homework1

2000011476 胡逸

2022 年 10 月 8 日

tips for reading:

1. 由于此 pdf 是由文件夹中的`hw1.ipynb`直接导出，可能直接阅读.ipynb 文件会更加方便流畅，程序也可直接在其中编译运行。
2. 本文件夹包含了主要包含了一个.ipynb 文件与一个.cpp 文件。其中.ipynb 文件的编译方式是，在 vscode 中下载 Jupyter 插件，选择 python 环境即可进行编译，或者直接使用 jupyter notebook 软件进行打开；cpp 文件的编译方式即为一般的 c++ 文件的编译方式。

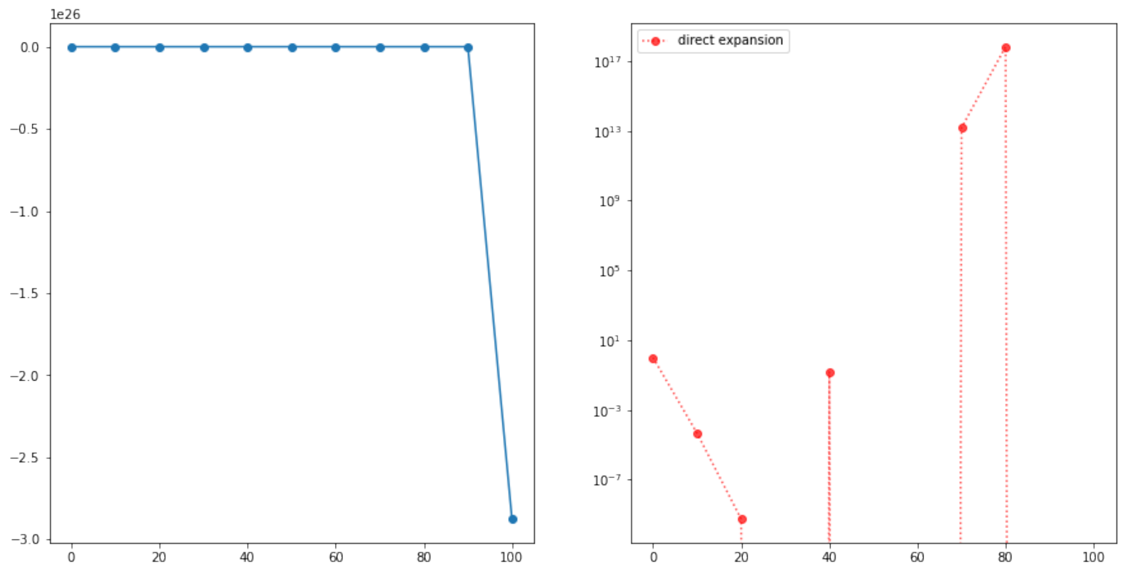
1 e^{-x} 展开

1.1 直接展开法

[48]:
```python
def fac(n:int):
    '''return factorial(n) '''
    result = 1
    if n != 0:
        for i in range(1, n + 1):
            result = result * i
    return result



def expansion(x):
    '''return exp(-x), using direct expansion'''
    n = 0
    sum = 0
    while True:
        sum += ((-1) ** n) * (x ** n / fac(n))
        if sum + ((-1) ** n) * (x ** n / fac(n)) == sum : break
```

```python
        n += 1
    return sum
```

[49]:
```python
from cmath import log
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import time

x = []
y_1 = []
y_log = []

for i in range(0, 110, 10):
    x.append(i)
    y_1.append(expansion(i))

plt.figure(figsize=(15, 7.5))

plt.subplot(121)
plt.scatter(x, y_1)
plt.plot(x,y_1)

plt.subplot(122)
plt.semilogy(x,
             y_1,
             linewidth=1.5,
             color='red',
             linestyle='dotted',
             label='direct expansion',
             alpha=0.7,
             marker='o')
plt.legend()


plt.show()
```



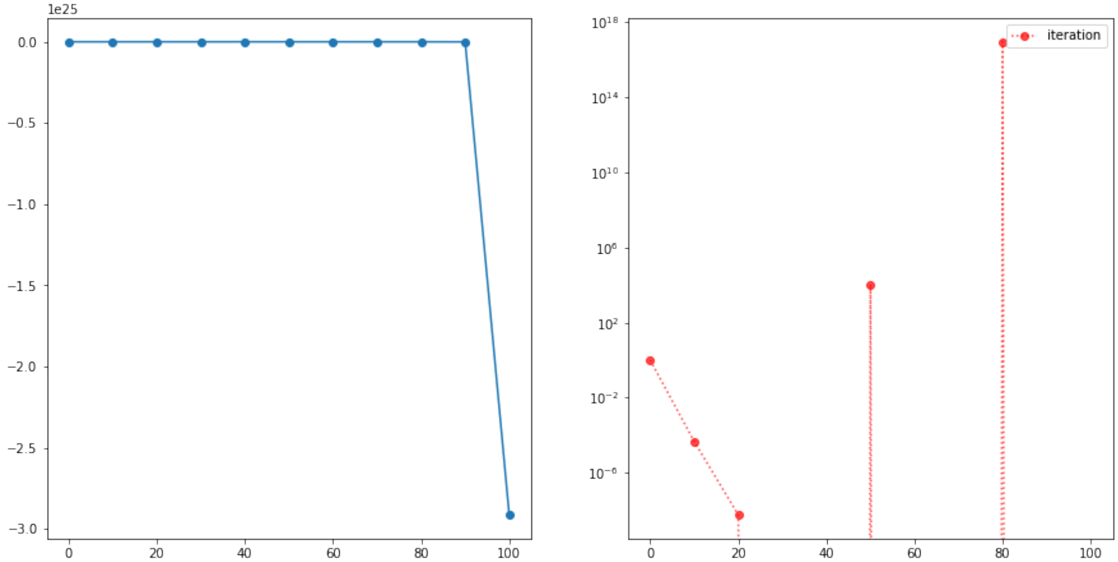
上图左图是由直接展开法得到的结果 e^{-x}，右图是将 y 取了对数坐标后得到的 $\log(e^{-x})$。需要说明的是，此算法在 $x \geq 30$ 时，得到的结果 e^{-x} 可能为负数，无法转化为对数，所以右图中会有一些点缺失（具体为 $x = 30, 50, 60, 90, 100$ 时）。

观察上图可以发现，直接展开法在 $x \geq 30$ 时有较为明显的误差。

1.2 递归法

[50]:
```
def s(n,x):
    if n == 0: return 1
    else: return - s(n - 1, x) * x / n


def iteration(x):
    '''return exp(-x), using iteration'''
    sum = 0
    n = 0
    while True:
        sum += s(n, x)
        n += 1
        if sum + s(n, x) == sum: break
    return sum
```

[51]:
```python
from cmath import log
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import time

x = []
y_2 = []

for i in range(0, 110, 10):
    x.append(i)
    y_2.append(iteration(i))

plt.figure(figsize=(15, 7.5))

plt.subplot(121)
plt.scatter(x, y_2)
plt.plot(x, y_2)

plt.subplot(122)
plt.semilogy(x,
             y_2,
             linewidth=1.5,
             color='red',
             linestyle='dotted',
             label='iteration',
             alpha=0.7,
             marker='o')
plt.legend()
plt.show()
```



上图左图是由递归法得到的结果 e^{-x}，右图是将 y 取了对数坐标后得到的 $\log(e^{-x})$。与第一问一样，此算法在 $x \geq 30$ 时，得到的结果 e^{-x} 可能为负数，无法转化为对数，所以右图中会有一些点缺失（具体为 $x = 30, 40, 60, 70, 90, 100$ 时）。

观察上图可以发现，直接展开法在 $x \geq 30$ 时有较为明显的误差。

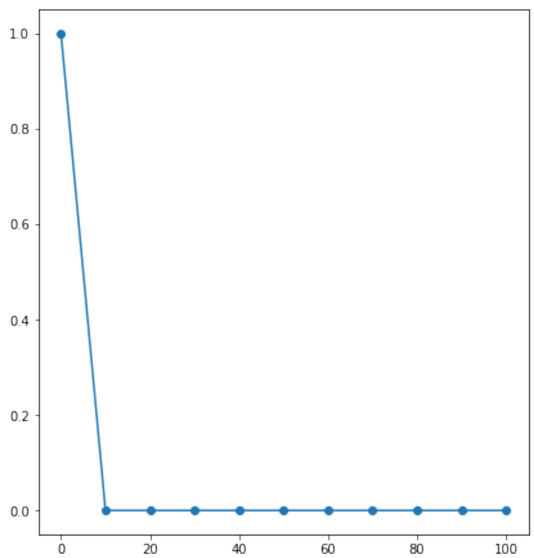
理论上，递归法的时间复杂度要低于直接展开法。

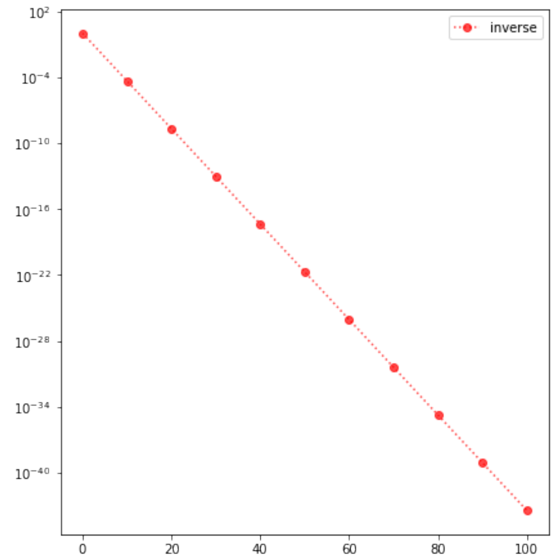
1.3 先利用 1.2 计算 e^x，然后求倒数

[52]:
```python
def s(n, x):
    if n == 0: return 1
    else: return s(n - 1, x) * x / n



def iteration_positive(x):
    '''return exp(x), using iteration'''
    sum = 0
    n = 0
    while True:
        sum += s(n, x)
        n += 1
        if s(n, x) == 0: break
```

```
    return sum
```

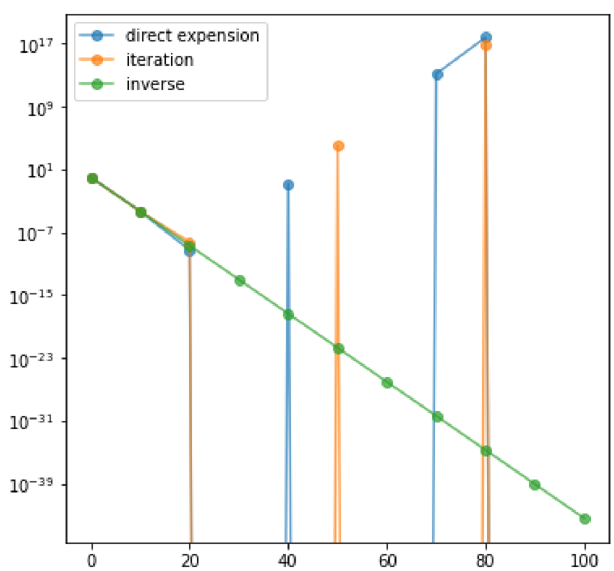
[53]:
```
from cmath import log
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = []
y_3 = []

for i in range(0, 110, 10):
    x.append(i)
    y_3.append(1/iteration_positive(i))
end = time.time()

plt.figure(figsize=(15, 7.5))

plt.subplot(121)
plt.scatter(x, y_3)
plt.plot(x, y_3)

plt.subplot(122)
plt.semilogy(x,
             y_3,
             linewidth=1.5,
             color='red',
             linestyle='dotted',
             label='inverse',
             alpha=0.7,
             marker='o')
plt.legend()

plt.show()
```





上图左图为运用方法 3 得到的结果 e^{-x}，右图是将 y 取了对数坐标后得到的 $\log(e^{-x})$。可以发现这种方法在 x 较大时精度明显提高，而且时间复杂度也与递归法相近。

下面是三种方法求得的 e^{-x} 通过 y 对数坐标作出的图，可以明显看到方法 (3) 在精度上的优势。



2 矩阵的模和条件数

2.1 计算 A 的行列式

上三角矩阵的行列式等于对角元的乘积，因而 A 的行列式显然是 1，所以不是奇异矩阵。

2.2 给出 A 的逆

[55]:
```
import numpy as np
def get_A(n):
    '''
    return matix A of n dim

    input: n
    output: A of n dim
    '''
    A = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        A[i, i]=1
        for j in range(i+1,n):
            A[i, j] = -1
    return A

def get_I(n:int):
    '''
    input: n
    output: I of n dim
    '''
    I = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        I[i, i]=1
    return I

def get_inverse(A):
    '''
    input: A
    output: A^{-1}
    '''
```

```python
    n = len(A)
    big_matrix = np.concatenate((A,get_I(n)), axis=1) # 得到和 I 拼起来的大矩阵
    for i in range(n - 1, -1, -1):
        for j in range(n - 1, i, -1):
            big_matrix[i] += big_matrix[j]
    return big_matrix[:, -n:]

# evaluate
print(get_inverse(get_A(5)))
print(get_inverse(get_A(5)) @ get_A(5))
```

```
[[1. 1. 2. 4. 8.]
 [0. 1. 1. 2. 4.]
 [0. 0. 1. 1. 2.]
 [0. 0. 0. 1. 1.]
 [0. 0. 0. 0. 1.]]
[[1. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 1. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 1. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 1. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 1.]]
```

上述程序给出了 $n = 5$ 时，A^{-1} 的形式，可以看出:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

2.3 证明:$\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$

$$
\begin{aligned}
\|x\|_\infty &= \max_i |x_i| \\
\|Ax\|_\infty &= \max_i |\sum_j a_{ij}x_j| \\
\|A\|_\infty &= \sup_{x\neq 0} \frac{\max\limits_i |\sum\limits_j a_{ij}x_j|}{\max\limits_i |x_i|} \\
&= \max_i \sum_j |a_{ij}|
\end{aligned}
\tag{2}
$$

等式最后一行需要：取 x 使得 $a_{ij}x_j$ 对任意 j 同号，且 $|x_j|$ 相等。

2.4 证明

1. $\|U\|_2 = \|U^\dagger\|_2 = 1$

$$
\|U\|_2 = \|U^\dagger\|_2 = \left[\rho(U^\dagger U)\right]^{\frac{1}{2}} = [\rho(I)]^{\frac{1}{2}} = 1 \tag{3}
$$

2. 对任意 A，$\|UA\|_2 = \|A\|_2$

$$
\|UA\|_2 = \left[\rho((UA)^\dagger UA)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\rho(A^\dagger U^\dagger UA)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\rho(A^\dagger A)\right]^{\frac{1}{2}} = \|A\|_2 \tag{4}
$$

2.5 计算条件数

$$
\begin{gathered}
\|A\|_\infty = n \\
\|A^{-1}\|_\infty = 1 + 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1} \\
\therefore K_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = n \cdot 2^{n-1}
\end{gathered}
$$

3 Hilbert 矩阵

3.1

要使 D 取极小值，说明：

$$
\frac{\partial D}{\partial c_i} = 0 \tag{5}
$$

同时根据 D 的表达式：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial c_j} &= \int_0^1 dx(\sum_i c_i x^{i-1} - f(x))^2 \\
&= \int_0^1 2dx(\sum_i c_i x^{i-1} - f(x))x^{j-1} \\
&= 2\sum_i c_i \int_0^1 x^{i+j-2}dx - 2\int_0^1 f(x)x^{j-1}dx \\
&= 2\sum_i c_i \frac{1}{i+j-1} - 2\int_0^1 f(x)x^{j-1}dx
\end{aligned} \tag{6}
$$

所以有，(这里更换了一下 i 和 j 的符号，并不影响结果)

$$
\sum_j c_j \frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 f(x)x^{i-1}dx
$$

令:$(H_n)_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, b_i = \int_0^1 f(x)x^{i-1}dx$，则有:

$$
\sum_j (H_n)_{ij} c_j = b_i
$$

3.2 说明 H_n 是对称的正定矩阵，进而论证它非奇异。

$$
\begin{aligned}
c^T Hc &= \sum_{i,j} H_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i,j} \frac{1}{i+j-1} x_i x_j \\
&= \int_0^1 \sum_{i,j} x_i x_j t^{i+j-2} dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i,j} (x_i t^{i-1})(x_j t^{j-1}) dt \\
&= \int_0^1 (\sum_i x_i t^{i-1})^2 dt \geq 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

所以 H_n 为对称的正定矩阵，根据正定矩阵行列式为正，可知 H_n 非奇异。

[56]:
```python
def Hilbert(n):
    '''
    return hilbert matrix of n dim
    '''
    H = np.zeros((n, n))
```

```
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            H[i][j] = 1 / (i + j + 1)
    return H
```

3.3 估计 $\det(H_n)$ 的值

s1. 直接通过严格表达式计算

[57]:
```
# 直接求 det(H_n)
def c(n):
    '''
    return c_n
    '''
    result = 1
    for i in range(1, n):
        for j in range(1, i+1): result *= j

    return result

def det_H(n):
    return (c(n)) ** 4 / c(2 * n)



for i in range(1, 11):
    print('when n = ', i, ', det(Hn) = ', det_H(i))
```

```
when n =  1 , det(Hn) =  1.0
when n =  2 , det(Hn) =  0.08333333333333333
when n =  3 , det(Hn) =  0.000462962962962963
when n =  4 , det(Hn) =  1.6534391534391535e-07
when n =  5 , det(Hn) =  3.749295132515087e-12
when n =  6 , det(Hn) =  5.3672998873586688e-18
when n =  7 , det(Hn) =  4.835802623926117e-25
when n =  8 , det(Hn) =  2.737050113791513e-33
when n =  9 , det(Hn) =  9.720234311925e-43
when n =  10 , det(Hn) =  2.164179226431492e-53
```

s2. 通过对严格表达式取对数降低复杂度

对 $det(H_n)$ 取对数:

$$\log(\det(H_n)) = 4\log(c_n) - \log(c_{2n})$$

$$\begin{aligned}\log(c_n) &= \log 1 + (\log 1 + \log 2) + (\log 1 + \log 2 + \log 3) + ... + (\log 1 + ... \log(n-1)) \\ &= (n-1)\log 1 + (n-2)\log 2 + ... + (n-(n-1))\log(n-1)\end{aligned}$$

[58]:
```python
# 通过取对数求 det(Hn)
def log_c(n):
    result = 0
    for i in range(1,n): result += (n-i) * np.log10(i)
    return result

def log_det_H(n):
    return 4 * log_c(n) - log_c(2 * n)

def get_from_log_det_H(n):
    return 10 ** log_det_H(n)

for i in range(1,11):
    print('when n = ', i ,', det(Hn) = ',get_from_log_det_H(i))
```

```
when n =  1 , det(Hn) =  1.0
when n =  2 , det(Hn) =  0.08333333333333333
when n =  3 , det(Hn) =  0.00046296296296296632
when n =  4 , det(Hn) =  1.6534391534391535e-07
when n =  5 , det(Hn) =  3.74929513251509e-12
when n =  6 , det(Hn) =  5.367299887358741e-18
when n =  7 , det(Hn) =  4.835802623926148e-25
when n =  8 , det(Hn) =  2.7370501137914296e-33
when n =  9 , det(Hn) =  9.720234311925259e-43
when n =  10 , det(Hn) =  2.164179226431472e-53
```

s3. 对对数式进行估计以降低复杂度

$$
\begin{aligned}
\ln(c_n) &= \ln 1 + (\ln 1 + \ln 2) + ... + (\ln 1 + ... \ln(n-1)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \ln i \\
&\approx \int_1^n (n-x) \ln x dx \\
&= (n(x\ln x - x) - (\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}))\Big|_1^n \\
&= n^2 \ln n - n^2 - \frac{n^2}{2} \ln n + \frac{n^2}{4} - (-n + \frac{1}{4}) \\
&= \frac{n^2}{2} \ln n - \frac{3n^2}{4} - (-n + \frac{1}{4})
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln(\det(H_n)) &= 4\ln(c_n) - \ln(c_{2n}) \\
&= 4\left[\frac{n^2}{2} \ln n - \frac{3n^2}{4} - (-n + \frac{1}{4})\right] - \left[2n^2 \ln 2n - 3n^2 - (-2n + \frac{1}{4})\right] \\
&= -2n^2 \ln 2 + 2n
\end{aligned} \tag{9}
$$

结果如下:

```
when n =  1 , det(Hn) =  1.8472640247326626
when n =  2 , det(Hn) =  0.21327402356696973
when n =  3 , det(Hn) =  0.0015389587154111299
when n =  4 , det(Hn) =  6.940583668280697e-07
when n =  5 , det(Hn) =  1.9563431581210277e-11
when n =  6 , det(Hn) =  3.446466766384948e-17
when n =  7 , det(Hn) =  3.794750016915579e-24
when n =  8 , det(Hn) =  2.611393179409883e-32
when n =  9 , det(Hn) =  1.12315934960641e-41
when n =  10 , det(Hn) =  3.019190423321601e-52
```

3.4 比较 GEM 和 Cholesky 分解求解线性方程 $H_n \cdot x = b$

[59]:
```
def Hilbert(n):
    '''
    return hilbert matrix of n dim
    '''
    H = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
```

```
        for j in range(n):
            H[i][j] = 1 / (i + j + 1)
    return H
```

[60]:
```
def GEM(H):
    '''
    return solution x of H * x = b through Gauss Elimination Method
    '''
    # 通过初等变换将矩阵化为上三角矩阵
    n = len(H)
    # 此后的 H 均指增广矩阵
    H = np.concatenate((H, np.ones((n, 1))), axis=1)
    for i in range(n):
        if i == 0: H[i] = H[i] / H[i, i]
        else:
            assert H[i - 1, i - 1] == 1
            for j in range(i):
                H[i] = H[i] - H[j] * H[i, j]
                H[i] = H[i] / H[i, i]
    # 将上三角增广矩阵通过初等变换转化为对角矩阵
    for i in range(n - 2, -1, -1):
        for j in range(n - 1, i, -1):
            H[i] = H[i] - H[j] * H[i, j]
    return H[:, n]
```

[61]:
```
def Cholesky(H):
    '''
    return solution x of H * x = b through Cholesky decomposition
    '''
    # cholesky decomposition
    n = len(H)
    for j in range(1, n + 1):
        for k in range(1, j):
            H[j - 1, j - 1] -= H[j - 1, k - 1]**2
        H[j - 1, j - 1] = H[j - 1, j - 1]**(1 / 2)
        for i in range(j + 1, n + 1):
            for k in range(1, j):
```

```python
                H[i - 1, j - 1] -= H[i - 1, k - 1] * H[j - 1, k - 1]
            H[i - 1, j - 1] = H[i - 1, j - 1] / H[j - 1, j - 1]
    for i in range(n):
        for j in range(i + 1, n):
            H[i, j] = 0

    # 此时 H 是一个下三角矩阵
    L = H
    # 求 L y = b
    L = np.concatenate((H, np.ones((n, 1))), axis=1)
    for i in range(n):
        if i == 0: L[i] = L[i] / L[i, i]
        else:
            assert L[i - 1, i - 1] == 1
            for j in range(i):
                L[i] = L[i] - L[j] * L[i, j]
                L[i] = L[i] / L[i, i]
    y = L[:, n]

    # 下面求 H.T x = y
    Lt = H.T
    Lt = np.concatenate((Lt, np.ones((n, 1))), axis=1)
    for i in range(n):
        Lt[i][n] = y[i]
    for i in range(n):
        Lt[i] = Lt[i] / Lt[i, i]
    for i in range(n - 2, -1, -1):
        for j in range(n - 1, i, -1):
            Lt[i] = Lt[i] - Lt[j] * Lt[i, j]

    return Lt[:, n]


for i in range(1, 11):
    H = Hilbert(i)
    print('n = ', i)
```

```
    print('GEM :', GEM(H))
    print('Cho :', Cholesky(H))
```

```
n =  1
GEM : [1.]
Cho : [1.]
n =  2
GEM : [-2.  6.]
Cho : [-2.  6.]
n =  3
GEM : [  3. -24.  30.]
Cho : [  3. -24.  30.]
n =  4
GEM : [  -4.   60. -180.  140.]
Cho : [  -4.   60. -180.  140.]
n =  5
GEM : [    5.  -120.   630. -1120.   630.]
Cho : [    5.  -120.   630. -1120.   630.]
n =  6
GEM : [-6.000e+00  2.100e+02 -1.680e+03  5.040e+03 -6.300e+03  2.772e+03]
Cho : [-6.000e+00  2.100e+02 -1.680e+03  5.040e+03 -6.300e+03  2.772e+03]
n =  7
GEM : [ 7.00000003e+00 -3.36000001e+02  3.78000001e+03 -1.68000000e+04
  3.46500001e+04 -3.32640001e+04  1.20120000e+04]
Cho : [ 7.00000004e+00 -3.36000002e+02  3.78000002e+03 -1.68000001e+04
  3.46500001e+04 -3.32640001e+04  1.20120000e+04]
n =  8
GEM : [-7.99999961e+00  5.03999976e+02 -7.55999966e+03  4.61999980e+04
 -1.38599994e+05  2.16215992e+05 -1.68167994e+05  5.14799982e+04]
Cho : [-7.99999983e+00  5.03999988e+02 -7.55999982e+03  4.61999989e+04
 -1.38599997e+05  2.16215995e+05 -1.68167997e+05  5.14799990e+04]
n =  9
GEM : [ 8.99993240e+00 -7.19995227e+02  1.38599178e+04 -1.10879406e+05
  4.50447797e+05 -1.00900346e+06  1.26125475e+06 -8.23676812e+05
  2.18789208e+05]
Cho : [ 8.99993937e+00 -7.19995739e+02  1.38599269e+04 -1.10879473e+05
  4.50448049e+05 -1.00900399e+06  1.26125537e+06 -8.23677188e+05
```

```
  2.18789302e+05]
n =  10
GEM : [-9.99748263e+00  9.89781815e+02 -2.37553432e+04  2.40197605e+05
 -1.26105758e+06  3.78322315e+06 -6.72580589e+06  7.00039627e+06
 -3.93775591e+06  9.23677917e+05]
Cho : [-9.99766824e+00  9.89798372e+02 -2.37557034e+04  2.40200929e+05
 -1.26107361e+06  3.78326758e+06 -6.72587926e+06  7.00046754e+06
 -3.93779349e+06  9.23686209e+05]
```

可以看出，GEM 算法与 Cholesky 算法在 n 较小时，给出的解一致，在 n 较大时，给出的解有些许偏差。我认为 Cholesky 算法精度更高，因为 Cholesky 分解对正定的厄米矩阵稳定性极佳。

4 级数求和与截断误差

4.0.1 请求出 $f(q^2)$ 在 $q^2 = 0.5$ 处的值

$$f(q^2) = (\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} - \int d^3\vec{n})\frac{1}{|\vec{n}|^2 - q^2} \tag{10}$$

其中积分可以写出解析表达式，

$$\begin{aligned}
\int d^3\vec{n}\frac{1}{|\vec{n}|^2 - q^2} &= \int 4\pi r^2 dr\frac{1}{r^2 - q^2} \\
&= 4\pi\int(1 + \frac{q^2}{r^2 - q^2})dr \\
&= 4\pi r + 4\pi q\int\frac{1}{(\frac{r}{q})^2 - 1}d(\frac{r}{q}) \\
&= \begin{cases} 4\pi r - 4\pi q\cdot tanh^{-1}(\frac{r}{q}) & r < q \\ 4\pi r - 4\pi q\cdot tanh^{-1}(\frac{q}{r}) & r \geq q \end{cases}
\end{aligned} \tag{11}$$

因而:

$$f(q^2) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3}\frac{1}{|\vec{n}|^2 - q^2} - 4\pi(\Lambda - q\cdot tanh^{-1}(\frac{q}{\Lambda}))$$

下面用 python 和 c++ 编写程序来计算上式。

[62]:
```python
# python version
from cmath import tanh
import math
import numpy as np
from tqdm import tqdm
```

```python
r = 100
q2 = 0.5
q = q2**(0.5)
sum = 0

for x in tqdm(range(-r, r + 1)):
    ylim = int((r**2 - x**2)**(0.5))
    for y in range(-ylim, ylim + 1):
        zlim = int((r**2 - x**2 - y**2)**(0.5))
        for z in range(-zlim, zlim + 1):
            sum += 1 / (x**2 + y**2 + z**2 - q2)

print('series = ', sum)

inter = 4 * math.pi * (r - q * np.arctanh(q / r))

print('integral = ', inter)
print(sum - inter)
```

```
100%|      | 201/201 [00:05<00:00, 37.71it/s]

series =  1257.5870842531626
integral =  1256.5742285356166
1.0128557175460173
```

由于 python 运行速度较慢，改用 c++ 编写程序，程序放在q4.cpp。

c++ 的运行到 $\Lambda = 1000$ 的结果为，$f = 1.09745$。

所以，估计结果约为 1.1。

4.1 引入 Λ 需要多大可以使 f 精度达到 10^{-5}?

大约需要 Λ 达到 10^5 数量级。

4.2

我们可以发现，原先主要的计算复杂度源于我们试图对三维矢量 $\vec{n}$ 求和，可以将其转化为对 $|\vec{n}|^2$ 求和，即

$$\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3}\frac{1}{|\vec{n}|^2-q^2}=\sum_{r^2\leq\Lambda^2}\frac{c(r^2)}{r^2-q^2}\overset{r^2\triangleq\gamma}{=}\sum_{\gamma\leq\Lambda^2}\frac{c'(\gamma)}{\gamma-q^2}$$

要计算右式，计算复杂度主要在于对于每一个 γ，如何计算其系数 $c'(\gamma).c'(\gamma)$ 代表着 γ 有多少种分解方式可以分解成三个有序整数的平方和。有两种思路：第一种是分解的思路，对 γ 从 1 遍历到 Λ^2，判断 γ 是否可分解；第二种是组合的思路，从 1 到 Λ，看这些数能够生成多少种无序三元组。不幸的是，第一种思路的计算复杂度比原先的做法还要高，因此采取第二种思路。

第三种思路需要分类讨论：我们考虑第一卦限中的格点 (x,y,z)

1. $x,y,z\neq 0$

- x,y,z 均不相等

  在 $1\to\Lambda$ 中抽取三个数：$O(\Lambda)\sim C_\Lambda^3$

  这个情况下 $\gamma=x^2+y^2+z^2$ 在一个卦限内需要被重复计算 6 次

- x,y,z 中有两个相等

  在 $1\to\Lambda$ 中抽取两个数：$O(\Lambda)\sim C_\Lambda^2$

  这个情况下 $\gamma=x^2+y^2+z^2$ 在一个卦限内需要被重复计算 3 次

- x,y,z 均相等

  在 $1\to\Lambda$ 中抽取一个数：$O(\Lambda)\sim C_\Lambda^1=\Lambda$

  这个情况下 $\gamma=x^2+y^2+z^2$ 在一个卦限内需要被重复计算 1 次

2. x,y,z 中有数为 0

此情况中的计算复杂度远低于上面的，在 Λ 极大时可以略去

综上，可以发现这个方法的复杂度在 $O(\Lambda)\sim C_\Lambda^3$