Линейная алгебра

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Линейные отображения.

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений

def: U, V - линейные пространства над одним полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$\mathcal{A} : U \to V$ называется **линейным гомоморфизмом**, если:

$$\forall \lambda \in K, \forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$$

Замечание 1: Мы будем писать $\mathcal{A}u$, вместо $\mathcal{A}(u)$.

Замечание 2: $\mathcal{A}u, \mathcal{B}u$ это какие-то числа, поэтому мы можем складывать их и умножать на скаляр.

Замечание 3: $\mathcal{A}\mathbb{O}_U = \mathbb{O}_V$, частный случай $\lambda = 0$

Примеры:

1. $\mathbb{O}$: это нулевое отображения $\forall u \in U : \mathbb{O}u = 0$
2. P_n - пространство многочленов степени $\leq n$. $\mathcal{A} = \dfrac{d}{dx}$ — дифференцирование.
3. ε — тождественное отображение. $\varepsilon : U \to U : \forall u \in U : \varepsilon u = u$.

Введем операции:

1. $\lambda \in K : \mathcal{A}$ — линейное отображение. Введем операцию умножения:
$$\forall u \in U : (\lambda \mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u)$$
2. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные отображение. Введем операцию сложения:
$$\forall u \in U : (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$
3. $\mathcal{B} \in L(U, W)$, $\mathcal{A} \in (L(W, V)$. Введем операцию произведения:
$$\forall u \in U : (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{v \in V : v = \mathcal{A}u | \forall u \in U\}$ — **образ линейного пространства.**

Замечание: $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — линейное подпространство.

$\mathcal{K}er\mathcal{A} = \{u \in U | \mathcal{A}u = \mathbb{O}\}$ — **ядро линейного отображения**.

$rg\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ — **ранг отображения**

$def\mathcal{A} = \dim \mathcal{K}er\mathcal{A}$ — **дефект отображения.**

Виды отображений:

- сюръекция, если $\operatorname{Im}\mathcal{A} = V \Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V$.
- инъекция, если $\mathcal{K}erA = \{\mathbb{O}_U\} \Leftrightarrow defA = 0$.
- биекция или изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}\mathcal{A} = V \\ \mathcal{K}er\mathcal{A} = \{\mathbb{O}_U\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rg\mathcal{A} = \dim V \\ def\mathcal{A} = 0 \end{cases}$
- *эндоморфизмом* или линейным оператором, когда $U = V$.

  $\mathcal{A} \in End(V) = End_K(v)$
- *автоморфизм* это биекция + эндоморфизм.

  $\mathcal{A} \in Aut(V) = Aut_K(v)$

Примеры:

1. P_n — пространство многочленов степени не больше n. $\mathcal{A} = \dfrac{d}{dt}\,\mathcal{A} : P_n \to P_n$. не инъекция, не сюръекция, не изоморофизм, эндоморфизм и не автоморфизм
2. $U = K^n, V = K^m$, $A = (a_{ij})_{m\times n}, a_{ij} \in K$, $\forall u \in U : \mathcal{A}u = A \cdot u$.

   $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \left\{ y \in K^m \begin{array}{c} y = \mathcal{A}x \\ \forall x \in K^n \end{array} \right\} = span(A_1, \ldots, A_n)$ — *образ матрицы.*

   $y = A \cdot x = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i$

   Давайте более подробно рассмотрим *отображения*:
   1. сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V = m$.

      $\mathcal{K}er\mathcal{A} = \{x \in K^n : Ax = \mathbb{O}\}$ — общее решение СЛОУ, *ядро матрицы.*

      $\dim \mathcal{K}er\mathcal{A} = \dim$ общего решения $= n - rgA$.

      $def\mathcal{A} = n - rgA$ — *дефект матрицы.*
   2. инъекция $\Leftrightarrow defA = 0 \Leftrightarrow n - rgA = 0 \Leftrightarrow rgA = n$.
   3. биекция $\Leftrightarrow \begin{cases} rgA = n \\ rgA = m \end{cases} \Leftrightarrow n = m$.
   4. эндоморфизм $\Leftrightarrow n = m \Leftrightarrow A_{n\times n}$.
   5. автоморфизм $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n, A_{n\times n} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$.

Свойства произведения:

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — изоморф. $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ — изоморфно.
2. $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$.
3. $\forall \lambda \in K : \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$.
4. $\mathcal{C} \in L(\Omega, U) : \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

Ассоциативная унитальная алгебра.

Замечание 1. Если $\mathcal{A} \in L(U, V)$ — изоморфно $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ — взаимно обр. отображение.

Замечание 2. Если $\mathcal{A} \in End(V)$, а также изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ — обратный лин. оператор к $\mathcal{A}$.

def: $U_0 \subset U$ - линейное подпространство. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \to V$ сужение лин. отобр. на лин подпространство.

$\forall u \in U_0 : \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$.

Если $\mathcal{A}$ — изоморфизм, то тогда его сужение на U_0 будет линейным отображением между U_0 и $\operatorname{Im}\mathcal{A}_0$. И это будет тоже изоморфизм.

Теорема (о ранге и дефекте линейного отображения)

$\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$. Доказать $\dim U = def\mathcal{A} + rg\mathcal{A}$.

Доказательство:

Пусть $U_0 = \mathcal{K}er \subset U$. Пусть $U_1 \subset U$, такое, что $U_0 \oplus U_1 = U$ — прямое дополнение. Возьму $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} \in L(U_1, \operatorname{Im}\mathcal{A}_1)$.

$\forall u \in U : \exists! u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in U_0$, $u_1 \in U_1$, по т. об определении прямой суммы. Тогда получаем, что:

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$$

Откуда $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{Im}\mathcal{A}_1$, $rg\mathcal{A} = rg\mathcal{A}_1$.

$\mathcal{K}er\mathcal{A}_1 \subset U_1$, а также $\mathcal{K}er\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{K}er\mathcal{A} = U_0 \Rightarrow \mathcal{K}er\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{O}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1$ — инъективна $\Rightarrow \mathcal{A}_1$ изоморфно. Откуда получаем:

$$\dim U = \dim U_1 + \dim U_0 = rg\mathcal{A} + def\mathcal{A}$$

Q.E.D.

Следствие. (характеристика автоморфизма)

Если $\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$ — условие обратимости линейного оператора.

1.2 Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

Пусть есть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ базис U, а также $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ базис V.

$$u \in U \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^n;\ v \in V \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\forall u \in U, v = \mathcal{A}u, : v = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathcal{A}\xi_i$$

То есть $\operatorname{Im}\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$rg\mathcal{A} = rg(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$.

Теперь заметим, что $\mathcal{A}\xi_i \in V$, откуда:

$$A\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \xleftrightarrow{\text{коорд. изоморфизм}} A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m$$

Назовем $A = (A_1, \dots, A_n) = (a_{ij})_{m\times n}$ — **матрицей линейного отображения** $\mathcal{A}$ на базисах ξ, η.

Замечание. Т.к. здесь координатный изоморфизм, то:

$$rg\mathcal{A} = rg(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = rg(A_1, \dots, A_n) = rgA.$$

def: $\mathcal{A} \in End(V) : \mathcal{A} : V \to V$ — **лин. оператор**.

Зафиксируем здесь один базис $e = e_1, \dots, e_n$. Получу:

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \dots, e_n)\mathcal{A}$$

Тогда $A_{n\times n}$ — **матрица линейного оператора**.

Заметим, что теперь мы умеем:

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A \in M_{m\times n}$$

Утв. $L(U, V) \cong M_{m\times n}$ **координатный изоморфизм линейных отображений**

Доказательство:

У нас есть взаимно однозначное соответствие. Проверим линейность:

$\forall \lambda \in K : \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \xleftrightarrow{\text{проверить}} A + \lambda B$.

$$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \cdot \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j + \lambda \sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(a_{ji} + \lambda b_{ji}) \cdot \eta_j$$

А откуда уже видно нужное нам соответствие. Q.E.D.

Утв. $\mathcal{A} \in L(W, V), \mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{AB} \in L(U, V)$. Пусть w - базис W, η - базис V, ξ - базис U. Тогда $\mathcal{AB} \leftrightarrow AB$ в базисах (ξ, η)

Доказательство:

$$\mathcal{AB}\xi_i = \mathcal{A}(\mathcal{B}\xi_i) = \mathcal{A}(\sum_{k=1}^{p} b_{ki}w_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathcal{A}(w_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki} \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{kj})\eta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (AB)_{ji} \cdot \eta_j$$

Q.E.D.

Следствие: $\mathcal{A} \in L(U, V)$ - изоморфизм, A - матр в $\xi, \eta \Rightarrow A^{-1}$ - матр в (η, ξ).

Доказательство:

$$A \cdot A^{-1} = \varepsilon_V, \quad A^{-1} \cdot A = \varepsilon_U$$

$$AX = E_\eta, \quad XA = E_\xi$$

В силу того, что $\mathcal{A}$ — изоморфизм:

$$\dim U = \dim V = n, \quad rgA = n \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

$$X = A^{-1}$$

Q.E.D.

Утверждение: Пусть $\mathcal{A} \in L(U_\varepsilon, V_\eta), v = \mathcal{A}u$. Тогда $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$, где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — координатные столбцы v и u соответственно.

Доказательство: С одной стороны, v можно разложить по базису V:

$$v = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{v}_j \eta_j$$

С другой стороны, v представим как результат отображения:

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{u}_i)\eta_j \Rightarrow \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{u}_i$$

. Откуда получаем искомое: $v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u}$. Последнее равенство называется *координатной формой записи действия линейного отображения.*

Q.E.D.

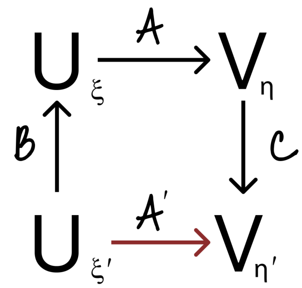
Теорема (формула замены матрицы лин. отобр. при замене базиса)

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

ξ, ξ' базисы U, а η, η' базисы V. Хотим поменять базисы на штрихованные и получить новую матрицу. Тогда ее можно получить так:

$$A' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} A T_{\xi \to \xi'}$$

Доказательство:



Воспользуемся данным рисунком, чтобы понять происходящее. Мы хотим найти матрицу $\mathcal{A}'$. Для этого, заметим, что преобразование $\mathcal{A}'$, это преобразование $\mathcal{B}$, потом примененное к нему преобразование $\mathcal{A}$, а после этого примененое к нему преобразование $\mathcal{C}$. То есть:

$$\mathcal{A}' = \mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B}$$

Заметим, что матрица $\mathcal{B}$, это матрица перехода из ξ в ξ'. Это так потому что у нас просто меняется базис (про саму матрицу перехода см. одноименный раздел). Матрица $\mathcal{C}$, это $T_{\eta' \to \eta}$. Откуда, исходя из двух утверждений сверху:

$$A' = T_{\eta' \to \eta} A T_{\xi \to \xi'} \Rightarrow A' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} A T_{\xi \to \xi'}$$

Q.E.D.

Следствие: $A \in End(V)$. e, e' базисы V. $A' = T^{-1}AT$, где $T = T_{e \to e'}$.

def: квадратные матрицы A и B называются подобными, если $\exists$ невырожденная матрица C, такая, что: $B = C^{-1}AC$.

Замечание: матрицы линейного оператора в разных базисах подобны (см. следствие выше).

1.3 Инварианты линейного отображения.

Инвариатность называется некоторое свойство объекта, которое не меняется при определенных действиях и преобразованиях.

$\mathcal{A}$ - линейное отображение. Ранг и дефект инварианты относительно выбора базиса.

Пусть $\mathcal{A} \in End(V)$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ базис v.

Как мы знаем, $\exists! D$ n-форма, такая что $D(e_1, \dots e_n) = 1$. Тогда **определитель линейного оператора**:

$$\det \mathcal{A} := det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}_n)$$

Замечание: $\det \mathcal{A} = D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}_n) = D(Ae_1, \dots, A_n) = \det A$ — определение определителя линейного оператора и матрицы соотносятся.

Теорема:

$\forall \mathcal{A} \in End(V), \det \mathcal{A} = \det A$.

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, \ldots, e_n)$ базис V. Тогда:

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A = (a_{ij})_{n\times n}$$

$$\det \mathcal{A} = D(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) = D(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_{i_1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}e_{i_n}) =$$

$$\xLeftrightarrow{\text{тк } D \text{ - } n \text{ форма}} \det \mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} D(e_{i_1} \ldots, e_{i_n}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} D(e_1, \ldots, e_n) = \det A$$

Q.E.D.

Замечание: A и B подобные матрицы, то $\det A = \det B$.

Замечание: $\det \mathcal{A}$ инвариант линейного оператора, он не зависит от базиса.

Следствие 1: $\forall n$ - форма f на V:

$$\forall \xi_1, \ldots, \xi_n \in V : f(\mathcal{A}\xi_1 \ldots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, \ldots, e_n)$ базис V. $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A$. Это значит, что мы берем матрицу линейного оператора в данном базисе.

$$f(\mathcal{A}e_1 \ldots, \mathcal{A}e_n) \overset{\text{из доказательства теоремы}}{=} \det A f(e_1, \ldots, e_n)$$

На самом деле $\alpha = f(e_1 \ldots, e_n)$, поэтому:

$$\forall \xi_1, \ldots, \xi_n : g(\xi_1, \ldots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \ldots, \mathcal{A}\xi_n)$$

Заметим, что g - полилинейное, тк f полилин. и $\mathcal{A}$ - лин. отобр. Также g - антисим, тк f - антисим. Откуда g - n-форма. Заметим интересный факт:

$$g(e_1, \ldots, e_n) = f(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) = \det A \cdot f(e_1, \ldots, e_n)$$

Откуда:

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = g(e_1, \ldots, e_n) D(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \det A \cdot \alpha D(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \det A \cdot f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

Q.E.D.

Замечание: Мы можем вывести 9-ое свойство определителя по-другому. Пусть $\mathcal{A} = A_{n\times n}$ — линейный оператор умножения. $f = D$, $B_j \in K^n$. Тогда:

$$det(AB_1, \ldots, AB_N) = \det A \cdot \det B$$

Следствие 2: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$

Доказательство:

Пусть e - базис V. Тогда $\mathcal{A} \overset{e}{\longleftrightarrow} A, \mathcal{B} \overset{e}{\longleftrightarrow} B$. Также $\mathcal{AB} \overset{e}{\longleftrightarrow} AB$ по свойству. Откуда:

$$\det \mathcal{AB} = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Q.E.D.

Следствие 3: $\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Причем $\det \mathcal{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathcal{A}}$

Доказательство:

$$\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ \text{изоморфизм} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ def\mathcal{A} = \dim \mathcal{K}er\mathcal{A} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ rg\mathcal{A} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \overset{e}{\longleftrightarrow} A, \det A \neq 0 \\ rgA = n \end{cases}$$

Мы знаем, что существует $\mathcal{A}^{-1}$. А также $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \varepsilon$. Откуда по свойству 3 получаем, что $\det \mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A}$.

Q.E.D.

Следствие 4: $\det(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = 1 = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1}$

Вспомним старое определение $trA = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ - *след матрицы.*

Теорема (о tr подобных матриц)

Если A и B подобны, то $trA = trB$.

Доказательство:

A и B подобны $\Leftrightarrow \exists C : B = C^{-1}AC$. Пусть $C^{-1} = S = (s_{ij})$. Откуда:

$$trB = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(AC)_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{ij} \cdot a_{jk} \cdot c_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \sum_{i=1}^{n} c_{ki}s_{ij}$$

Заметим, что $(CS)_{kj} = \delta_{kj}$, где $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$. Так что получаем, что

$$trB = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = trA$$

Q.E.D.

Следствие: $\forall \mathcal{A} \in End(V) \Rightarrow tr(A) = trA'$, где A и A' матрицы оператора $\mathcal{A}$ в базисе e и e' соответственно.

def: $\mathcal{A} \in End(V), tr\mathcal{A} = trA$ — **след оператора**.

Замечание: след оператора инвариантен из следствия выше.

def: Линейное подпространство $L \subset V$ называется **инвариантным** относительно линейного оператора $\mathcal{A} \in End(V)$, если $\forall v \in L, \mathcal{A}v \in L$.

Теорема 1:

$L \subset V$ - линейное подпространство. L - инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$. Тогда $\exists$ базис пр-ва V матрица, такой что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь *ступенчатый вид*, при этом размерность $A^1 = k \times k$, $k = \dim L$.

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

Доказательство:

$L = span(e_1, \dots, e_k)$ - базис L.

Дополним базис L до базиса V: $V = span(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$.

Запишем матрицу A по определению:

$$\forall e_i \in L : \mathcal{A}e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ji}e_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Откуда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} \end{pmatrix}$

Q.E.D.

Теорема 2:

$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантны отн. $\mathcal{A}$. $\Rightarrow \exists$ базис пр-ва V, такое что м-ца оператора $\mathcal{A}$ будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

Доказательство:

Пусть базис $V \overset{\text{по эквив. условию } \oplus}{=}$ объединение базисов L_i.

$$L_i = span(e_1^i, \dots, e_{k_i}^i), \dim L_i = k_i$$

Построим матрицу по определению. Не трудно заметить, что для каждого L_i из доказательства прошлой теоремы, все кроме соотв. строчек для L_i будет зануленно.

Q.E.D.

Замечание: $A_i \leftrightarrow A|_{L_i} \in End(L_i)$.

Теорема 3.

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантны отн $\mathcal{A} \Rightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\mathcal{A}|_{L_i}$, где $\mathcal{A}|_{L_i} \in L(L_i, V)$

Доказательство:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i \xLeftrightarrow{\text{из т. об экв. опр. прямой суммы}} \forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^{m} v_i, v_i \in L_i$$

$$\forall v \in V : \operatorname{Im}\mathcal{A} \ni \mathcal{A}v = \mathcal{A}\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}v_i \in \operatorname{Im} A|_{L_i}$$

Тогда всё, что нам осталось проверить это то, что наши пространства дизъюнкты. Но, если присмотреться к тому, что у нас написано, то у нас для любого вектора из $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ существует лишь одно разложение через $\operatorname{Im} A|_{L_i}$, что соответствует эквивалентному определению прямой суммы.

Q.E.D.

1.4 Собственные числа и собственные векторы лин. оператора

$\lambda \in K$ называется **собственным числом** $\mathcal{A} \in End(V)$, если $\exists v \in V, v \neq 0$. $\mathcal{A}v = \lambda v$. Такой v называют **собственным вектором** собственного числа λ.

$$\lambda \in K : \begin{cases} \mathcal{A}v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda\varepsilon)v = 0 \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon) \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow v$ собственный вектор собственного числа λ.

$V_\lambda = \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon)$ — **собственное подпространство** $\mathcal{A}$ соответств. с.ч. λ. Это мн-во всех с.в. V, отвечающим с.ч. λ и нулевой вектор.

$\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$ — **геометрическая кратность**.

Свойства:

1. V_λ инвариантно относительно $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$.
2. V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A}$.
3. $\gamma(\lambda)$ инвариант относительно базиса.

Условие существования с.ч.:
$\lambda \in K_{\mathcal{A}}$ - с.ч., v - с.в. $\Leftrightarrow \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon)$ нетривиально $\Leftrightarrow def(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow rg(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq n \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = 0$

Тк определитель линейного оператора инвариантен, то:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

def: $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$ - **характеристический многочлен** оператора $\mathcal{A}$.

Т.к. det оператора инвариантен $\chi(t) = \det(A - tE)$, где A - матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot t^n + (-1)^{n-1}(trAt^{n-1}) + \ldots + \det A$$

По теореме Виета: $\begin{cases} t_1 + \ldots + t_n = trA \\ t_1 \cdot \ldots \cdot t_n = \det A \end{cases}$ Заметим, что λ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in K \\ \chi(\lambda) = 0 \text{ - корень хар. мн.} \end{cases}$

Замечание. Если все корни хар. мн. $\in K \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = trA \\ \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A \end{cases}$

def: **Спектром** оператора $\mathcal{A}$ называется множество $\{(\lambda,\, \alpha(\lambda))\}$, $\alpha(\lambda)$ - кратность λ лин. оператора в хар. уравнении (*алгебраическая кратность*). Спектр это множество пар.

def: **Простой спектр** — все кратности - единички.

Теорема 1:

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$. $\forall \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} : 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

Доказательство:

λ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = V_\lambda$ не тривиально $\Leftrightarrow \gamma_1 = \dim V_\lambda \geq 1$.

Пусть $\dim V_\lambda = \gamma$, V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow$ по т-ме 1 об инв. подпр. существует V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ будет иметь ступенчатый вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

$$\dim A^1 = \gamma \times \gamma, V = span(e_1, \ldots, e_\gamma, e_{\gamma+1}, \ldots, e_\gamma)$$

При построении матрицы оператора $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}e_i = \lambda e_i \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ - λ - на i-ой строчке. Немного распишем:

$$\chi(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} A^1 - tE_{\gamma\times\gamma} & * \\ \mathbb{O} & A^2 - tE_{(n-\gamma)\times(n-\gamma))} \end{vmatrix} \overset{\text{по 6-ому св-ву опр}}{=}$$

$$= |A^1 - tE||A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \cdot \chi_{A^2}(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A_2}(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda$ корень $\chi(t)$, причем кратность $\geq \gamma$, т.к λ может оказаться корнем χ_{A^2}

Q.E.D.

Теорема 2:

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ попарно различные с.ч $\mathcal{A}$, $v_1, \ldots, v_n$ соответ. с.в.

$\Rightarrow v_1, \ldots, v_n$ — лин. независимы.

Доказательство:

Докажем по индукции:

База $m = 1 : \lambda_1, v_1 \Rightarrow$ лин. незав.

ИП: Пусть верно для m, докажем для $m + 1$:

От противного: Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ попарно различные собственные числа.

$v_1, \ldots, v_m$ - линейно независимы по ИП. $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ - линейно зависимы. Откуда: $v_{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$. С одной стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \lambda_{m+1}v_{m+1} = \lambda_{m+1}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$$

С другой стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \mathcal{A}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{A} v_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_{m+1} - \lambda_i)a_i v_i = 0$$

Но мы знаем, что $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы. Откуда эта линейная комбинация тривиальна, но с другой стороны, она такой быть не может, потому что $\exists \alpha_i \neq 0$, для которого v_i не равен нулю, а так же, исходя из того что искомые с.ч. попарно различны, то $v_{m+1} - v_i \neq 0$. Откуда комбинация нетривиальна.

Противоречие.

Q.E.D.

Следствие: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$, т.е V_{λ_i} дизъюнктны.

Доказательстсво:

$$\mathbb{0} = v_1 + \ldots + v_m, v_i \in V_{\lambda_i}$$

Если в сумме какой-то из векторов не нулевой, то это собственный вектор, а собственные вектора для различных с.ч. линейно независимы. Противоречие. Откуда все вектора в сумме нулевые, откуда подпространства дизъюнктны.

Q.E.D.

Теорема 3:

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$

$\Rightarrow \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = \prod\limits_{i=1}^{m} \chi_{\mathcal{A}_i}(t)$.

Доказательство:

Смотрим теорему 3 об инв. подпр. Матрица A - блочно-диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

Тогда $\chi(t) = \det(A - tE) \overset{\text{по 6-ому свойству опр.}}{=} \prod\limits_{i=1}^{m} \det(A^i - tE) = \prod\limits_{i=1}^{m} \chi_{A_i}(t)$

Q.E.D.

1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.

$\mathcal{A} \in End(V)$ называется **оператором простой структуры** (о.п.с), если $\exists$ базис пространства V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет диаг. вид.

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что в таком случае собственные числа оператора $\mathcal{A}$ будут λ_i, а так же собственные вектора этих чисел - соотв. столбики (легко проверить умножением). Отсюда все корни характ. многочлена $\chi \in K \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$.

Теорема:

$\forall A \in End(V)$, если $\sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n$, то тогда:

$$\mathcal{A} \text{ - о.п.с} \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ - с.ч } : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Доказательство:

$\sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(n) = n \Leftrightarrow$ все корни $\chi \in K$, откуда $\mathcal{A}$ - о.п.с.

$\mathcal{A}$ о.п.с. $\Leftrightarrow \exists$ базис V такой, что матрица диагональна $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda-\text{с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \sum_{\lambda-\text{с.ч.}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Q.E.D.

Следствие. Если все корни характ. многочлена $\in K$, а также все $\alpha(\lambda) = 1$ (спектр простой), то $\mathcal{A}$ - о.п.с.

def: $A_{n\times n}$ называется **диагонализируемой**, если она подобна диагональной.

Теорема (критерий диагональности матрицы A)

~~это перепишется~~

A подобна диагональной $\Leftrightarrow$ матрица о.п.с $\mathcal{A}$ в нек. базисе

Доказательство:

- $\boxed{\Rightarrow}$

  Пусть A - диагонализируемая $\Leftrightarrow$ подобна диагональной $\Leftrightarrow \exists$ невырожд T: $T^{-1}AT = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. V - линейное пространство над полем K. $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V.

  Пусть A - матрица в базисе e. Тогда $Ae_j = \sum\limits_{i=1}^{n} = a_{ij}e_i.v = (v_1, \dots, v_n)$ - базис.

  Откуда $v_1, \dots, v_n = (e_1, \dots, e_n)T_{e\to v} \Rightarrow \mathcal{A} \overset{v}{\leftrightarrow} A' = T^{-1}AT = \Lambda$

- $\boxed{\Leftarrow}$ $\mathcal{A}$ о.п.с, A - матрица в некотором базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$. Возьму $v_1, ..., v_n$ - базис V, где v_i - собственный вектор $\mathcal{A}$. Заметим, что так как $\mathcal{A}$ о.п.с, то такой базис существует

  Теперь давайте возьмем матрицу перехода из $T_{e\to v}$. Тогда $\mathcal{A} \overset{v}{\leftrightarrow} A' = T^{-1}AT = \Lambda \Rightarrow A$ подобна диагональной

Q.E.D.

Алгоритм поиска диагонального представления матрицы подобной диагональной:

1. найти спектр: если все корни $\chi \in K$, переходим к п2.
2. найти все $\gamma(\lambda)$, если $\forall\lambda$ с.ч $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, то перейти к п3.
3. $T_{\text{кан.}\to v} = (v_1, \dots, v_n)$ $T^{-1}AT = \Lambda$

def: $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$. По теореме об равносильных условиях прямой суммы:

$\forall v \in V : \exists! v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i$, где $v_i \in L_i$. Возьму $P_i \in End(V)$, такие, что $P_i \cdot v = v_i \in L_i$.
Тогда такие P_i назовем **операторами проектирования** на подпр-во L_i.

Свойства операторов проектировния:

1. $\operatorname{Im} P_i = L_i, \quad \mathcal{K}er P_i = \bigoplus\limits_{j\neq i} L_j$
2. $P_iP_j = \mathbb{O}$
3. $\sum\limits_{i=1}^{m} P_i = \varepsilon$
4. $P_i^2 = P_i, (P_j^k = P_j$, где $k \in \mathbb{N})$ - **идемпотентность**

Они все тривиальны

Утверждение. Возьму множество операторов: $\{P_i\}_{i=1}^m$, $P_i \in End(V)$.

Пусть они удовлетворяют свойствам 2,3 $\Rightarrow V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im} P_i$. P_i это проектор на L_i.

Доказательство:

Мы знаем, что $P_i P_j = \mathbb{O}$, для $i \neq j$, а также $\sum\limits_{j=1}^{m} P_i = \varepsilon$. Откуда получаем, что:

$$P_i = P_i \varepsilon = P_i \sum_{j=1}^{m} P_j = \sum_{j=1}^{m} P_j P_i = P_i^2$$

А это значит, что $\forall v \in V : v = \varepsilon v = \sum\limits_{i=1}^{m} P_i v \Rightarrow V = \sum\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im} P_i$.

Осталось показать единственность разложения нуля:

$$\mathbb{O} = \sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=1}^{m} P_i w_i, \text{ где } w_i \in V$$

$$P_j \mathbb{O} = \mathbb{O} = P_j \sum_{i=1}^{n} P_i w_i = \sum_{i=1}^{n} P_i P_j w_i = P_j w_j = v_j$$

$\Rightarrow v_j = \mathbb{O}, \forall j = 1 \dots m \;\; \Rightarrow$ дизъюнк. $\Rightarrow \bigoplus \operatorname{Im} P_i$

Q.E.D.

Замечание: Из определения проекторов следует, что они существуют и определены однозначно для данной прямой суммы.

<u>**Теорема (спектральное разложение о.п.с)**</u>

Дан $\mathcal{A} \in End(V)$. Тогда выполнено:

1) $\mathcal{A}$ — о.п.с. $\Rightarrow \mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч.}} \lambda P_\lambda, P_\lambda$ — проектор на V_λ $\forall$ с.ч. λ.

Такое разложение называется <u>**спектральным**</u>.

2) $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, P_i проекторы на L_i. $\mathcal{A} = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_i P_i \Rightarrow \mathcal{A}$ о.п.с, λ_i с.ч.

$\operatorname{Im} P_i = L_i = V_\lambda$(соотвест. подпр-во)

Доказательство:

1) $\mathcal{A}$ о.п.с $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ - с.ч}} V_\lambda$. Возьму P_λ проекторы на V_λ (исходя из определения -они существуют)
Тогда давайте воспользуемся определением:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\lambda \text{ - с.ч}} v_\lambda, \text{где } v_\lambda \in V_\lambda : \mathcal{A}v = \mathcal{A}(\sum_\lambda v_\lambda) = \sum_\lambda \mathcal{A} v_\lambda = \sum_\lambda \lambda v_\lambda = \sum_\lambda \lambda P_\lambda v$$

Откуда уже крайне очевидно получаем, что $\mathcal{A} = \sum\limits_\lambda \lambda P_\lambda$.

2) $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$. Откуда по определению: $\forall v \in V : \exists ! v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \in L_i = \operatorname{Im} P_i$, $v_i \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{A}v_i = (\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j)v_i = (\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j)P_i v = v\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j P_i$$

Теперь вспомним свойство, что при умножении двух различных операторов мы получаем $\mathbb{O}$. Поэтому на самом деле наша сумма равна:

$$v\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j P_i = v\lambda_i P_i P_i = v\lambda_i P_i = \lambda_i v_i$$

Хорошо, теперь вспомним, что изначально это было равно $\mathcal{A}v_i$. поэтому $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$, откуда получаем, что v_i с.в. $\mathcal{A}$ отвечающий с.ч. λ_i.

Откуда получаем, что наше подмножество $V_{\lambda_i} \supseteq \operatorname{Im} P_i$ (потому что любой $v \in \operatorname{Im} P_i$ — случайный вектор).

Вспомним, что: $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im} P_i \subseteq \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$, а как мы знаем $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \subseteq V$. Откуда, я получаю, что:

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} P_i = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \xRightarrow{\text{так как } P_i \subseteq V_{\lambda_i}} \operatorname{Im} P_i = V_{\lambda_i}$$

Q.E.D.

Следствие (спектральное разложение диагонализируемой матрицы)

A диагонализируема $\Leftrightarrow \exists ! \{P_i\}_{i=1}^{m}$, такое, что $P_i \cdot P_j = \mathbb{O}$, $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} P_i = E$, $A = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$

Доказательство:

Очевидно следует из теоремы:

A диагонализируема $\iff$ матрица $\mathcal{A}$ о.п.с. Либо можно считать $A = \mathcal{A}$ о.п.с. $\in End(K^n)$

Q.E.D.

Замечание. Матрица A подобна диагональной, то у нее есть диагональное представление:

$$T^{-1}AT = \Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n), A = T\Lambda T^{-1}$$

А также у такой матрицы есть спектральное разложение:

$$A = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda P_\lambda$$

Просьба не путать эти две формулы! **СЕЙЧАС НАЧНЕТСЯ ЧТО-ТО СТРАШНОЕ**

def: $A_k = (a_{ij}^k)_{n\times n}$ - последовательность матриц $n \times n$.

Обозначают так: $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ — **последовательность матриц**.

Раз это последовательность, то давайте введем на ней вот такой предел:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_k = \forall i,j : a_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}^k$$

Для лучшего понимания этого мира смотрите на приведеный ниже пример:

$$\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix}(1+\frac{2}{k})^k & \sqrt[k]{k} \\ \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} & \frac{1-\cos\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^2 & 1 \\ \pi & 0\end{pmatrix}$$

def: $a_n \in R : \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m = S \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{k} a_m = S$, где $S_k = \sum\limits_{m=1}^{k} a_m$ — **частичная сумма ряда.**

А саму такую конструкцию понятно называют рядом. Теперь давайте немного притронемся к матану:

$\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ - **ряды Тейлора - Маклорена**.

$x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — их область определения, $|x| < R$ (или еще обозначается r) — **радиус сходимости**, $c_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Причем эти c-шки на самом деле производные. (если интересно см. конспект по мат. анализу первый семестр)

Рассмотрим пример: Давайте разложим e^x, нам это позже понадобится:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, |x| < +\infty$$

В таком случае $c_m = \dfrac{f^{(m)}(0)}{m!}$.

Пусть $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_n x^n$. А давайте расширим на матрицы :)

def: $A_{n\times n} : f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m A^m$. Причем мы так же считаем частичные суммы и ищем их предел, но теперь просто ищем предел в матрицах.

Можно добавить параметр: $f(At) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m A^m t^m$.

Теорема 1 (функция от диагонализируемой матрицы 1)

Пусть A — подобна диагональной. А также нам дана $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m, |x| < r$.

Тогда, если $\forall$ с.ч. $|\lambda| < r \Rightarrow \exists f(A)$ и $f(A) = Tf(\Lambda)T^{-1}$, где $f(\Lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n)\end{pmatrix}$

Доказательство:

Упрощу $\sum\limits_{m=0}^{k} c_m A^m$. Мы знаем, что A - подобна диагональной $\Rightarrow A = T\Lambda T^{-1}$. Тогда:

$$A^m = (T\Lambda T^{-1})^m = T\Lambda T^{-1} T\Lambda T^{-1} \dots T\Lambda T^{-1} = T\Lambda^m T^{-1}$$

Теперь давайте подставим это в нашу сумму:

$$\sum_{m=0}^{k} c_m A^m = \sum_{m=0}^{k} c_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left(\sum_{m=0}^{k} c_m \Lambda^m \right) T^{-1}$$

Теперь вспомним, что Λ^n подобна диагональной, поэтому занесем сумму внутрь матрицы и получим:

$$T \left(\sum_{m=0}^{k} c_m \Lambda^m \right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{k} c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum\limits_{m=0}^{k} c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} =$$

Теперь вспомним, что $\forall$ с.ч. $|\lambda| < r$, поэтому для них мы можем применить формулу, откуда:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} c_m A^m = \lim_{k\to\infty} T \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{k} c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum\limits_{m=0}^{k} c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Q.E.D.

Теорема 2 (функция от диагонализируемой матрицы, 2-я формула)

Пусть A — подобна диагональной.

Тогда A имеет спектральное разложение $\sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч.}} \lambda P_\lambda$, где P_λ — проекторы. А также нам дана $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad |x| < r$.

Тогда, если $\forall$ с.ч. $|\lambda| < r$, то $\exists f(A)$, а так же $f(A) = \sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч.}} f(\lambda) P_\lambda$.

Доказательство:

$A^m = (\sum\limits_{\lambda} \lambda P_\lambda)^m = \sum\limits_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum\limits_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum\limits_{\xi} \xi P_\xi$

А теперь вспомним свойства проекторов. Когда я умножаю два разных проектора, я получаю ноль, откуда:

$$A^m = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum_{\xi} \xi P_\xi = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda$$

Значит: $\sum\limits_{m=0}^{k} c_m A^m = \sum\limits_{m=0}^{k} c_m \sum\limits_{\lambda} \lambda^m P_\lambda = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda \sum\limits_{m=0}^{k} \lambda^m c_m$. Теперь если я возьму предел, то я получу то, что мне нужно, потому что каждая лямбда $< r$, и поэтому я могу вместо них подставить $f(\lambda)$.

Q.E.D.

Экспонента:

А теперь давайте возьмем все $c = 1$, а также вспомним, что мы можем протаскивать с собой параметр. Поэтому у нас получается новая формула:

$f(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{m=0}^{k} t^m A^m$, а теперь вспомним наше разложение e-шки. А это именно оно и есть! Поэтому получаю:

$$e^{At} = f(At) = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} t^m A^m$$

Или:

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1} = \sum_{\lambda \text{ - с.ч.}} e^{\lambda t} P_\lambda$$

Свойства:

1. $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A.$
2. $e^{(A_1+A_2)t} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$
3. $e^{\mathbb{O}t} = E$

Обратная:

A - подобна диагональной $\forall$ с.ч. $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = T \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dfrac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$

Свойства:

1. $A^{-1} = \sum\limits_{\lambda \text{ - с. ч}} \dfrac{1}{\lambda} P(\lambda)$
2. $AA^{-1} = T\Lambda T^{-1} T \Lambda^{-1} T^{-1} = E$
3. $AA^{-1} = (\sum \mu P_\mu)(\sum \frac{1}{\lambda} P_\lambda) = \sum\limits_{\lambda} \lambda \frac{1}{\lambda} P_\lambda = E$

Корень:

Если A подобна диагональной и $\forall$ с.ч. $\lambda \geq 0$, то взяв $m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2$ мы можем ввести:

$$\sqrt[m]{A} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}, \text{ полагая } \sqrt[m]{\lambda} \geqslant 0$$

Спектральное представление: $\sqrt[m]{A} = \sum\limits_{\lambda \text{ с. ч.}} \sqrt[m]{\lambda} P_\lambda.$

1.6 Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора

Давайте посмотрим какие линейные операторы мы уже изучили:

Пусть $\mathcal{A} \in End(V) \overset{e}{\leftrightarrow} A$, $\chi(t)$ — корни характеристического многочлена. Он может быть:

1. Все корни $\in K$. $\sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$
   - $\exists$ базис V из v_λ: $\forall \lambda: \ \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) \iff$ диагонализируема.
   - $\nexists$ базис V из v_λ : $\exists$ с.ч. λ: $\gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \iff A$ жорданова форма.
2. Не все корни $\in K$. В таком случае вещ. V комплексифицируют.

def: V — линейное пространство над $\mathbb{R}$ (вещ. лин. пр-во)

$$\forall x, y \in V \Rightarrow z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad V_{\mathbb{C}} = \{z = x + yi \mid \forall x, y \in V\}$$

Назовем $V_{\mathbb{C}}$ **комплексификацией** V.

Покажем некоторые **свойства:**

1. $\mathbb{O} \in V \leftrightarrow \mathbb{O} + i\mathbb{O} = \mathbb{O} \in V_{\mathbb{C}}$ - существование нуля
2. $x \in V \leftrightarrow x + i\mathbb{O} = x \in V_c$, $V \subset V_{\mathbb{C}}$ — говорим, что $V \subseteq V_{\mathbb{C}}$
3. $\forall z = x + iy$ существует обратное: $-x + i(-y)$

Заметим, что в таком случае $V_{\mathbb{C}}$ — линейное пространство над полем комплексных чисел.

Утв. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис V. Докажем что $e_1, \ldots, e_n$ — базис $V_{\mathbb{C}}$.

Доказательство:

Возьмем любой z и докажем, что его можно породить с помощью базиса:

$$z = x + iy = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j + i \sum_{j=1}^{n} y_j e_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j + iy_j) e_j$$

Откуда e - порождающий базис для $V_{\mathbb{C}}$. Докажем линейную независимость:

Для этого нам надо показать, что любая нулевая комбинация тривиальна:

$$\mathbb{O} = \sum_{j=1}^{n} (a_j + ib_j) e_j = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j + i \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \iff \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \underset{\in \mathbb{R}}{=} \mathbb{O} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j \underset{\in \mathbb{R}}{=} \mathbb{O} \end{cases} \iff \begin{cases} \forall j : \alpha_j = 0 \\ \forall j : \beta_j = 0 \end{cases}$$

Откуда получили линейную независимость.

Q.E.D.

Замечание. Мы знаем, что $V \subset V_{\mathbb{C}}$. $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$, откуда наши пространства должны быть равны? Нет! Это было бы так, если бы не одно НО. V - линейное пространство над $\mathbb{R}$, а $V_{\mathbb{C}}$ - линейное пространство над $\mathbb{C}$, поэтому это не правда.

Благодаря верхней теореме мы можем сделать некоторые замечания:

$$x \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, z = x + iy \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$$

def: $z \in V_{\mathbb{C}}$, $\overline{z} = x - iy$ — **сопряженный** вектор, $z = x + iy, \quad x, y \in V$

Свойства:

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
2. $\overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\overline{z}$
3. $v_1, \ldots, v_m$ — лин. (не)зависимы $\Leftrightarrow \overline{v_1}, \ldots \overline{v_m}$ лин. (не)зависимы.
4. $rg(v_1 \ldots v_m) = rg(\overline{v}_1 \ldots \overline{v}_m)$

def: Возьму оператор $\mathcal{A} \in End(V)$. $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

Назову данную конструкцию **продолжением вещ. лин. оператора** $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}}$ вещественного пространства V.

Очевидно, что в таком случае $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$, т.к. $\mathcal{A}$ — линейный оператор.

Утверждение: $\mathcal{A} \in End(V)$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ базис V ($\Rightarrow$ базис $V_{\mathbb{C}}$ из теоремы сверху).

Тогда, если $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A$, то $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \underset{e}{\leftrightarrow} A$

Доказательство:

По определению матричного оператора:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \cdot e_j = \mathcal{A} \cdot e_j + i\mathcal{A}\mathbb{O} = \mathcal{A} \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k \iff A_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

1. $\chi_{\mathcal{A}}(t) \equiv \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$ — так как матрицы совпадают.

   Замечание:

   1) если $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0$ - корень $\chi(t) \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, но не с.ч. $\mathcal{A}$.

   2) если $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ корень $\chi \Rightarrow \overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ - тоже корень, причём той же кратности.

2. $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \overline{A_{\mathbb{C}} z} = A_{\mathbb{C}} \overline{z}$.

   $\overline{A_{\mathbb{C}} z} = \overline{Ax + iAy} = Ax - iAy = A_{\mathbb{C}} \overline{z}$

3. λ с.ч $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, z - с. в , отвечающий $\lambda \Rightarrow \overline{\lambda}$ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, $\overline{z}$ с.в., отвечающий $\overline{\lambda}$

   $\mathcal{A}\overline{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z}$, тогда $\gamma(\lambda) = \gamma(\overline{\lambda})$

Вернемся к тому старому разделению на случаи. Заметим, что если в таком случае мы возьмем наш третий случай и компелисифицируем, то для полученного оператора $A_{\mathbb{C}}$ мы получим, что он относится либо к первому варианту, либо ко второму.

1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона

def: $\mathcal{A} \in End(V)$ - нормализованный многочлен $\psi(t)$ называется **аннулятором** элемента $x \in V$, если $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$.

А теперь на более понятном. Пусть у нас есть $\psi(t) = t^k + a_1 t^{k-1} \ldots + a_{k+1} t^0$. Подставляя в него оператор получу: $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^k + a_1 \mathcal{A}^{k-1} + \ldots + a_{k+1}\varepsilon$. И такой оператор будет аннулятором x, если $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$.

Замечание. $\psi(t) \neq 0$, потому что это нормализованный многочлен,
его старший коэффициент равен 1.

$\psi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ - корень}} (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ - так как это многочлен. Здесь $m(\lambda)$ — кратность корня λ. Перепишем на место t оператор:

$$\psi(\mathcal{A}) = \prod_{\lambda \text{ - корень}} (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$$

def: Аннулятор элемента $x \in V$ наименьшей степени
называется **минимальным аннулятором** элемента x.

Теорема: (о существовании и единственности минимального аннулятора)

1. $\forall\ x \in V\ \exists!\, \psi(t)$ минимальный аннулятор x.

2. $\forall$ другой аннулятор $x \,\vdots$ на минимальный аннулятор x.

Доказательсто:

1. (a) Пусть $x = \mathbb{O}$, $\psi(t) = 1$, $\psi(\mathcal{A}) = \varepsilon$, $\varepsilon x = \varepsilon\mathbb{O} = \mathbb{O}$

   (b) Пусть $x \neq \mathbb{O}$. Посмотрю на $x, \mathcal{A}x, \mathcal{A}^2 x, \ldots, \mathcal{A}^m x$

   Причем m такое, что $x, \mathcal{A}x, \ldots \mathcal{A}^{m-1}x$ - линейно независимы, а $x, \mathcal{A}x, \ldots \mathcal{A}^m x$ - зависимы. Такой набор собрать удастся, при этом $m \leq n$.

   $\Rightarrow \exists!\, c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \in k$, такие, что $\mathcal{A}^m x = \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j x$

   Откуда получаем, что $(\mathcal{A}^m - \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j)x = \mathbb{O}$. Получил какой-то оператор, который при умножении на x дает $\mathbb{O}$. А это значит, аннулятор существует, причём аннулятор выше минимальный по построению.

   Замечание: мы смотрим на многочлен с коэффицентами $1, c_{n-1}, \ldots, c_0$ — этот многочлен и есть наш минимальный аннулятор..

2. Пусть мой минимальный аннулятор это $\psi(t)$, а $\psi_1(t)$ другой аннулятор x.

   Посмотрим на результат деления:

   $\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$ (остаток), $\deg r < \deg \psi$

   Это значит, что подставляя в него $\mathcal{A}$ и умножая на x должно быть верно:

   $$\psi_1(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})x + r(\mathcal{A})x$$

   Но $\psi_1(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, поэтому $r(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, но что это значит?

Как мы знаем $\psi(t)$ - минимальный аннулятор. Так как $r(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, то если $r(t) \not\equiv 0$, получаем, что это аннулятор, а тогда мы выбрали не минимальный аннулятор, т.к. $\deg \psi > \deg r$. Противоречие!

Откуда получаю, что $r \equiv 0 \Rightarrow \psi_1$ делится на минимальный оператор ψ.

Q.E.D.

def: Нормализованный многочлен $\varphi(t)$ называется **аннулятором оператора** $\mathcal{A}$, если:

$$\varphi(\mathcal{A}) \equiv \mathbb{O}, (\text{т.е.} \forall v \in V, \varphi(\mathcal{A})v = \mathbb{O})$$

def: **минимальным многочленом оператора** $\mathcal{A}$ называется аннулятор $\mathcal{A}$ наименьшей степени.

Теорема: (о существовании и единственности миним. многочлена оператора)

1. $\forall \mathcal{A} \in End(V) : \exists!$ - минимальный многочлен.
2. $\forall$ аннул. оператора $\mathcal{A}$ делится на миним. мн-н $\mathcal{A}$

Доказательсто:

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V. Построим $\psi_j(t)$ - минимальный аннулятор e_j

Возьму $\varphi(t) =$ Н.О.К. $\{\psi_j\}_{j=1}^n$, где $j = 1, \dots, n$. Покажем, что φ аннулятор $\mathcal{A}$:

Как мы знаем $\forall v \in V, v = \sum\limits_{i=1}^n v_i e_i$. Поэтому:

$$\varphi(\mathcal{A})v = \sum_{j=1}^n v_j \cdot \varphi(\mathcal{A}) \cdot e_j = \sum_{j=1}^n v_j \cdot (\psi_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{A}))e_j = \mathbb{O} \iff \varphi(\mathcal{A}) \equiv \mathbb{O}$$

То есть такой многочлен существует. Теперь докажем единственность:

Пусть $\varphi_a(t)$ другой аннулятор $\mathcal{A}$: Тогда $\forall j = 1, \dots, n : \varphi_a(\mathcal{A})e_j = \mathbb{O}$.

Тогда φ_a аннулятор элемента e_j для любого j.

По теореме о линейном операторе мы знаем, что φ_a делится на ψ_j для любого j, то есть $\varphi_a \vdots \varphi$.

Откуда я получаю, что φ_a степени хотя бы такой же, что φ. То есть φ_a хотя бы Н.О.К.

Если мы предполагаем, что это многочлен минимальной степени, то он такой же степени, как и φ. При этом они оба делятся на Н.О.К., а $\varphi =$ Н.О.К. Так же их старшие коэффиценты равны. Поэтому: $\varphi_1 = \varphi$. Исходя из этого получаем, что такой многочлен единственный

Q.E.D.

Теорема (Кэли - Гамильтона)

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ выполнено, что:

$\chi(t) = \det(A - t\varepsilon)$ - аннулятор оператора $\mathcal{A}$.

Замечание $\det(\mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \varepsilon)$, $t \in K$. Сюда не предполагается подставлять матрицу.

Доказательство:

Пусть есть базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогда $\mathcal{A} \overset{e}{\longleftrightarrow} A$.

Пусть есть $\mu \in K$ - не корень $\chi(t)$, где $t \in K$. Посмотрим на $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - tE)$. Как мы знаем: $\chi(\mu) \neq 0$, поэтому $\det(A - \mu E) \neq 0$. Откуда существует обратная матрица (по теореме об обратной матрице), тк A - не вырожденная:

$$\exists!(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B = \frac{1}{\chi(\mu)} B$$

где B - матрица из алгебраических дополнений.

Наша матрица B выглядит примерно так: $\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{11i}\mu^i & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{1ni}\mu^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{n1i}\mu^i & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{nni}\mu^i \end{pmatrix}$

Давайте разложим нашу матрицу в сумму матриц так, что матрица B_k будет состоять из всех коэффицентов на k-ой позиции этих k функций:

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Тогда вернемся к тому, что было:

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\chi(\mu)} \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Или домножим на $(A - \mu E)$ и получим:

$$E\chi(\mu) = (A - \mu E) \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Пусть $\chi(t) = \alpha_n t^n + \ldots + \alpha_0 t^0$. Давайте расскроем скобки, мы получим:

$$\begin{aligned} &\mu^0 : \quad E\alpha_0 = AB_0 \\ &\mu^1 : \quad E\alpha_1 = AB_1 - B_0 \\ &\mu^2 : \quad E\alpha_2 = AB_2 - B_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mu^{n-1} : E\alpha_2 = AB_{n-1} - B_{n-2} \\ &\mu^n : \quad E\alpha_n = -B_{n-1} \end{aligned}$$

Теперь умножим каждый $E\alpha_i$ на A^i и сложим. Получится:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = AB_0 + A^2B_1 - AB_0 + A^3B_2 - A^2B_1 + \ldots + A^nB_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} = \mathbb{O}$$

$\chi(A) = \mathbb{O} \quad \Rightarrow \chi$ аннулятор $\mathcal{A}$, т.к. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t)$. Q.E.D.

Замечание: Очевидно, $\forall$ матрицы $A_{n\times n}$ ее характеристический многочлен это аннулятор $\mathcal{A}$.

Следствие 1. $\forall \mathcal{A} \in End(V)$, φ - минимальный многочлен, тогда $x \vdots \varphi$ (из теоремы о минимальном мн-не.)

Следствие 1.5. $\deg \varphi \leq n$, т.к. $\deg \chi = n$ и $\chi \vdots \varphi$.

Следствие 2. $\forall \mathcal{A} \in End(V)$. Если $\deg \varphi = n = \deg \chi \Leftrightarrow \varphi \equiv \chi \cdot (-1)^n$

Теорема (о множестве корней характеристического многочлена)

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ множество корней χ совпадает с множеством корней φ (без учета кратности)

Доказательство:

1. λ корень $\varphi \Rightarrow \lambda$ - корень χ. Очевидно.
2. Пусть λ корень χ. Мы должны показать, что и у φ есть такой корень. Тогда есть 2 варианта:
   (a) $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$ - с.ч. $\Rightarrow \exists u$ - собственный вектор $\neq \mathbb{O}$

   Так как u - случайный вектор, то $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)u{=}\mathbb{O}$

   $(t{-}\lambda)$ - минимальный аннулятор элемента u, φ - минимальный многочлен $\Rightarrow$ аннулятор v, откуда $\varphi \ \vdots \ (t-\lambda) \Rightarrow \lambda$ корень φ - победили

   (b) $\lambda \notin K \equiv \mathbb{R}$, т.е. λ - не собственное число. Прибегаем к комплесификации:

   Для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ λ - корень. Как мы знаем $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \equiv \chi_{\mathcal{A}} = \chi$.

   Тогда по пункту a это корень минимального многочлена в $\varphi_{\mathbb{C}}$.

   Построим минимальный многочлен:

   Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис. $\mathcal{A} \overset{e}{\longleftrightarrow} A$. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \overset{e}{\longleftrightarrow} A$. Начнем строить по определению минимальный многочлен. Для этого мы должны найти $\psi_i(t)$ - аннулятор e_i.

   Выпишу: $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \ldots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$. Причем k такое, что $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \ldots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{k-1} e_i$ - линейно независимы, а $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \ldots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$ - зависимы. Заметим, что $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_j = \mathcal{A}e_j$.

   Поэтому по алогритму построения мин. многочлена $\varphi_j = \varphi_{j\ \mathbb{C}}$. А уже откуда λ корень φ - победили!

Q.E.D.

Замечание: $\chi(t) = \prod(t-\lambda)^{\alpha(\lambda)}$ и $\varphi(t) = \prod(t-\lambda)^{\mu(\lambda)}$, верно, что: $1 \leq \mu(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство.

Пусть у нас есть $\varphi(t)$ - многочлен над полем K(все его коэффиценты в K).

Пусть все его корни $\varphi \in K$. Тогда давайте разложим его в произведение корней:

$$\varphi(t) = \prod_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$$

давайте теперь вынесим один из корней за скобки. Получим:

$$\varphi(t) = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \cdot \prod_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$$

Переобозначим $\varphi_\lambda(t) = \prod\limits_{\mu \neq \lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$ и подставим:

$$\varphi(t) = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(t)$$

Возьмем P_{m-1} - множество всех многочленов над полем K степении $\leq m-1$.

Зафиксируем φ и λ и назовем **главным идеалом**, порожденным многочленом φ_λ:

$$I_\lambda = \{p \in P_{n-1} | p \vdots \varphi_\lambda\}$$

Очевидно I_λ линейное подпространство. Заметим, что $p \vdots \varphi_\lambda \Leftrightarrow P(t) = a_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$

Поэтому на самом деле: $I_\lambda \cong \{a_\lambda\} = P_{m(\lambda)-1}$

Откуда $\dim I_\lambda = m(\lambda)$.

Теорема:

$P_{m-1} = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ - корень } \varphi} I_\lambda$.

Доказательство:

1. Проверим дизъюнктность:

$$\mathbb{O} = \sum_{\lambda \text{ - корень } \varphi} p_\lambda \in I_\lambda = \sum_\lambda a_\lambda(t)\varphi_\lambda(t)$$

Зафиксируем какую-то λ и вынесем ее за скобки:

$$a_\lambda \varphi_\lambda(t) + \sum_{\mu \neq \lambda} a_\mu(t) \cdot \varphi_\mu(t)$$

Как мы знаем, для всех $\mu \neq \lambda : \varphi_\mu : (t-\lambda)^{m(\lambda)}$

А так же мы знаем, что $\varphi_\lambda(t)$ не делится на $(t-\lambda)^\mu$

Откуда получаем, что $a_\lambda \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}$.А это значит, что $a_\lambda \equiv 0$

Откуда дизъюнктно.

2. Проверим размерность $\dim(\bigoplus\limits_\lambda I_\lambda) = \sum\limits_\lambda \dim I_\lambda = \sum\limits_\lambda m(\lambda) = \dim P_{m-1}$, откуда прямая сумма.

Q.E.D.

Следствие 1: $\forall p \in P_{m-1} : \exists! p = \sum\limits_\lambda p_\lambda$, где $p_\lambda(r) = \alpha_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$, $\deg \alpha_\lambda \leq m(\lambda) - 1$.

В частности, $1 = \sum\limits_{\lambda \text{ корень}} p_\lambda$ - **полиномиальное разложение единицы**

Замечание:

1. Пусть $\lambda \neq \mu$ - корни φ

   $p_\lambda \in I_\lambda,\ p_\mu \in I_\mu,\ p_\lambda p_\mu \vdots \varphi$

   $p_\lambda(t) = \alpha_\lambda \varphi_\lambda(t)$, $p_\mu(t) = \alpha_\mu \varphi_\mu(t)$

   $p_\lambda(t)p_\mu(t) = \alpha_\lambda \varphi_\lambda(t)\alpha_\mu \varphi_\mu(t) \vdots \varphi$

2. Пусть $\forall\lambda,\ m(\lambda) = 1$, тогда $\varphi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)$.

   $I_\lambda \ni p_\lambda = \alpha_\lambda\varphi_\lambda$, тогда $\alpha_\lambda = \text{const}$. Это можно понять так же из $0 \leq \deg\alpha_\lambda \leq m(\lambda) - 1 = 0$

Теорема (Лагранж)

Пусть $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$, то есть $\varphi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)$.Тогда:

$$\forall p \in P_{m-1} : p(t) = \sum_{\lambda}\frac{p(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(t), \text{ где } p_\lambda \in I_\lambda$$

Доказательство:

Возьму многочлен p и посмотрю значение в λ.

$p(\lambda) = \sum\limits_{\mu} p_\mu$ - я могу так разложить из следствия 1 (см. выше). Также заметим, что a_μ - константы. Тогда получается вот такая формула:

$$p(\lambda) = \sum_{\mu} p_\mu = \sum_{\mu} a_\mu\varphi_\mu(\lambda)$$

Заметим, что при $\mu \neq \lambda$ у нас заннуляется сумма, так что $p(\lambda) = a_\lambda\varphi_\mu(\lambda)$.

Откуда получаю, что $\alpha_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\varphi_\lambda(\lambda)}$.

Теперь про производную: $\varphi'(t) = ((t-\lambda)\cdot\varphi_\lambda(t))' = \varphi_\lambda(t) + (t-\lambda)\varphi_\lambda'(t)$

Зафиксируем λ. Получу, что в таком случае $\varphi'(\lambda) = \varphi_\lambda(\lambda)$. Откуда, если присмотреться, мы получаем формулу из теоремы.

Q.E.D.

Следствие: $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$: Пусть $1 = \sum\limits_{\lambda}\dfrac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda(t) \Rightarrow t = \sum\limits_{\lambda}\lambda p_\lambda(t)$

Доказательство: $t = \sum\limits_{\lambda}\dfrac{\lambda}{\varphi'(t)}\varphi_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda}\lambda p_\lambda$

Q.E.D.

Вернемся к операторам. Возьмем $A \in End(V)$:

$\varphi(t)$ минимальный многочлен, все корни $\varphi \in K(\Leftrightarrow$ все корни $\chi \in K$), то есть являются случайными числами.

$\exists!1 = \sum\limits_{\lambda \text{ - корни } \varphi} p_\lambda(t)$ —**полиномиальное разложение единицы**.

$\varepsilon = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda(\mathcal{A})$, $\varepsilon = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda$ — **оператор разложения единицы**.

Позамечаем некоторые интересные факты:

1. $P_\lambda \in End(V)$

2. Возьму $\lambda \neq \mu$. Замечу, что $p_\lambda \cdot p_\mu \vdots \varphi$. Тогда $p_\lambda(t)p_\mu(t) = \alpha(t)\varphi(t)$, откуда:

   $\forall v \in V : P_\lambda P_\mu v = a(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{A})v = \mathbb{O}$, из-за того, что φ - минимальный многочлен.

   Откуда $P_\lambda P_\mu$ - анулятор $\mathcal{A}$ или $P_\lambda P_\mu = \mathbb{O}$

3. $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \sum\limits_\lambda P_\lambda \\ P_\lambda \cdot P_\mu = \mathbb{O} \end{cases} \Leftrightarrow P_\lambda$ - по теореме это проекторы на $\operatorname{Im} P_\lambda,\ V = \bigoplus \operatorname{Im} P_\lambda$

Такие проекторы называются **спектральными**. Это не те самые проекторы на V_λ. Пока что это проекторы на их собственные подпространства. Они обладают теми свойствами проекторов, что мы вывели до этого.

ЕСЛИ $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$, тогда по следствию из матрицы Лагранжа, мы знаем

$\varepsilon = \sum\limits_\lambda P_\lambda$, $\mathcal{A} = \sum\limits_\lambda P_\lambda \cdot \lambda \Rightarrow \mathcal{A}$ о.п.с., λ - с.ч $\mathcal{A}$.

Откуда это будут проекторы на собственные подпространства.

Следствие: Т.е. $\mathcal{A}$ о.п.с. достаточно удотворять: $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$ в минимальном многочлене.

def: $\mathcal{A} \in End(V)$, λ - с.ч. $\mathcal{A}$. K_λ - **корневое подпространство**, если:

$K_\lambda = \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$, где $m(\lambda)$ кратность λ в лин. многочлене φ. $\varphi(t) = \prod\limits_\lambda (t - \lambda)$

Очевидно $V_\lambda \subseteq K_\lambda$.

Теорема (о корневом подпространстве)

1. K_λ - инвариантно относительно $\mathcal{A}$.
2. $\operatorname{Im} P_\lambda = K_\lambda$, где $\varepsilon = \sum\limits_\lambda P_\lambda$ - оператор разложение единыц.

   Называются образами спектром проекторв

   $\Rightarrow \bigoplus\limits_\lambda K_\lambda = V$

3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ - минимальный многочлен для $B = \mathcal{A}\Big|_{K_\lambda} \in End(K_\lambda)$

Доказательство:

1. Возьмем $v \in K_\lambda = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$

   Заметим, что $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$ - многочлен от $\mathcal{A}$. Тогда:

   $$\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}\mathcal{A}$$

   Умножим и левую и правую часть на v. Получим:

   $$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}(\mathcal{A}v) = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbb{O}$$

   Откуда $\mathcal{A}v \in \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda \Rightarrow K_\lambda$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$

2. Вспомним, что: $\varepsilon = \sum\limits_\lambda P_\lambda,\ P_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A})$, $p_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$

Пусть $v \in V$. Тогда посмотрим на:

$$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot P_\lambda v =$$

Заменим P_λ по формуле:

$$= ((\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \alpha_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \varphi_\lambda(\mathcal{A}))v =$$

Так как это все многочлены от $\mathcal{A}$, то они перестановочны:

$$= (\alpha_\lambda(\mathcal{A}) \cdot (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(\mathcal{A}))v = (\alpha_\lambda(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{A}))v = \mathbb{O}$$

Так как $\varphi(\mathcal{A})v = \mathbb{O}$ (минимальный многочлен).

Откуда $P_\lambda v \in \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$. Следовательно $\operatorname{Im} P_\lambda \subseteq K_\lambda$.

<u>Теперь докажем, что они совпадают:</u>

Возьму $\mu \neq \lambda$, а также $v \in K_\lambda$. Посмотрим на $P_\lambda v$:

$$P_\mu v = \alpha_\mu(\mathcal{A})\varphi_\mu(\mathcal{A})v =$$

Мы знаем, что в φ_μ содержится $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$. Давайте его вынесем за скобки, получим:

$$\alpha_\mu(\mathcal{A})\varphi_\mu(\mathcal{A})v = \alpha_\mu(\mathcal{A})\beta_\mu(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v$$

Так как $v \in K_\lambda = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$, то $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbb{O}$, откуда $P_\mu v = \mathbb{O}$.

Откуда получаю, что $\forall v \in K_\lambda$, $v = \varepsilon v = \sum\limits_\mu P_\mu v = P_\lambda v$. Следовательно $K_\lambda \subseteq \operatorname{Im} P_\lambda$, но мы уже сказали, что $\operatorname{Im} P_\lambda \subseteq K_\lambda$, поэтому $K_\lambda = \operatorname{Im} P_\lambda$.

3. $B = \mathcal{A}\Big|_{K_\lambda} \in End(K_\lambda)$

   $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbb{O} \iff \forall$

Следствие 1: Очевидно, что тогда $1 \leq m(\lambda) \leq \dim(K_\lambda)$.

Следствие 2: $\mathcal{A}$ - о.п.с $\Leftrightarrow \varphi(t) = \prod\limits_\lambda (t - \lambda)$, т.е $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$, (все корни $\varphi \in K$)

Доказательство: $\Rightarrow$ Пусть $\mathcal{A}$ - о.п.с.

$V = \bigoplus\limits_{\lambda - \text{с.ч}} V_\lambda$, λ - корень φ.

$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)v = 0 \Rightarrow (t - \lambda)$ - минимальный аннулятор v

$\prod\limits_\lambda$ аннулятор $\mathcal{A}$, причем минимальной степени.

1.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жардана

Не путать разложение жардана с жардановой формой матрицы

<u>**def:**</u> $B \in End(V)$ называется нильпотентым, если его минимальный многочлен $\varphi(t) = t$

(т.е. $B^\nu = \mathbb{O}$), где ν - индекс нильпотентности.

Теорема (Разложение Жардана)

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$, все корни $\chi, \varphi \in K$

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$, где $\mathcal{D}$ - о.п.с, $\mathcal{B}$ - нильпотентный, причем $DB = BD$.

Доказательство:

$\varepsilon = \sum\limits_{\lambda \text{ - корень } \varphi} P_\lambda$ - оператор разложения ε.

$\mathcal{D} := \sum\limits_{\lambda} P_\lambda$ очевидно, $\mathcal{D}$ - о.п.с.

Замечание: $\mathcal{AD} = \mathcal{DA}$, $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$

Теорема (единственность разложения Жордана):

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$. Доказать, что разложение Жордана единственно, то есть $\exists! D, B$.

Доказательство:

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{D}' + \mathcal{C}$, $D'C = CD'$

$\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda} \lambda P_\lambda + B$

Нужно доказать, что $\{\lambda\} = \{\mu\}$, а также $\operatorname{Im} Q_\mu = K_\lambda = \operatorname{Im} P_\lambda = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$

2 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Не сдавайтесь, изучая лин. ал. Это реально! Upd: 13.02 слава устал