

# Линейная алгебра

Чепелин Вячеслав

## Содержание

<b>1</b>	<b>Линейные отображения.</b>	<b>2</b>
1.1	Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений . . . .	2
1.2	Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса. . . . .	4
1.3	Инварианты линейного отображения. . . . .	7
1.4	Собственные числа и собственные векторы лин. оператора . . . . .	11
1.5	Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы. . . . .	14
1.6	Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора . . . . .	21
1.7	Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона . . .	23
1.8	Операторное разложение единицы. Корневое подпространство. . . . .	26
1.9	Нильпотентный оператор. Разложение Жордана . . . . .	32
1.10	Жорданова форма матрицы. Формула Фраббениуса. . . . .	34
<b>2</b>	<b>Информация о курсе</b>	<b>39</b>

# 1 Линейные отображения.

## 1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений

**def:**  $U, V$  - линейные пространства над одним полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$  называется линейным гомоморфизмом, если:

$$\forall \lambda \in K, \forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$$

**Замечание 1:** Мы будем писать  $\mathcal{A}u$ , вместо  $\mathcal{A}(u)$ .

**Замечание 2:**  $\mathcal{A}u, \mathcal{B}u$  это какие-то числа, поэтому мы можем складывать их и умножать на скаляр.

**Замечание 3:**  $\mathcal{A}\mathbb{O}_U = \mathbb{O}_V$ , частный случай  $\lambda = 0$

**Примеры:**

1.  $\mathbb{O}$ : это нулевое отображения  $\forall u \in U : \mathbb{O}u = 0$
2.  $P_n$  - пространство многочленов степени  $\leq n$ .  $\mathcal{A} = \frac{d}{dx}$  — дифференцирование.
3.  $\varepsilon$  — тождественное отображение.  $\varepsilon : U \rightarrow U : \forall u \in U : \varepsilon u = u$ .

**Введем операции:**

1.  $\lambda \in K : \lambda \mathcal{A}$  — линейное отображение. Введем операцию умножения:

$$\forall u \in U : (\lambda \mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u)$$

2.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — линейные отображение. Введем операцию сложения:

$$\forall u \in U : (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$

3.  $\mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{A} \in L(W, V)$ . Введем операцию произведения:

$$\forall u \in U : (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

$\text{Im } \mathcal{A} = \{v \in V : v = \mathcal{A}u | \forall u \in U\}$  — образ линейного пространства.

**Замечание:**  $\text{Im } \mathcal{A}$  — линейное подпространство.

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U | \mathcal{A}u = \mathbb{O}\}$  — ядро линейного отображения.

$\text{rg } \mathcal{A} = \dim \text{Im } \mathcal{A}$  — ранг отображения

$\text{def } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } \mathcal{A}$  — дефект отображения.

**Виды отображений:**

- сюръекция, если  $\text{Im } \mathcal{A} = V \Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V$ .
- инъекция, если  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$ .
- биекция или изоморфизм  $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im } \mathcal{A} = V \\ \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \\ \text{def } \mathcal{A} = 0 \end{cases}$
- *эндоморфизмом* или линейным оператором, когда  $U = V$ .

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) = \text{End}_K(V)$$

- *автоморфизм* это биекция + эндоморфизм.

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) = \text{Aut}_K(V)$$

**Примеры:**

1.  $P_n$  — пространство многочленов степени не больше  $n$ .  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \mathcal{A} : P_n \rightarrow P_n$ . не инъекция, не сюръекция, не изоморфизм, эндоморфизм и не автоморфизм
2.  $U = K^n, V = K^m, A = (a_{ij})_{m \times n}, a_{ij} \in K, \forall u \in U : \mathcal{A}u = A \cdot u$ .

$$\text{Im } \mathcal{A} = \left\{ y \in K^m \mid \begin{matrix} y = \mathcal{A}x \\ \forall x \in K^n \end{matrix} \right\} = \text{span}(A_1, \dots, A_n) — \text{образ матрицы.}$$

$$y = A \cdot x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i$$

Давайте более подробно рассмотрим *отображения*:

1. сюръекция  $\Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V = m$ .  
 $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in K^n : Ax = 0\}$  — общее решение СЛЮУ, *ядро матрицы*.  
 $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \text{общего решения} = n - \text{rg } A$ .  
 $\text{def } \mathcal{A} = n - \text{rg } A$  — *дефект матрицы*.
2. инъекция  $\Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow n - \text{rg } A = 0 \Leftrightarrow \text{rg } A = n$ .
3. биекция  $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{rg } A = n \\ \text{rg } A = m \end{cases} \Leftrightarrow n = m$ .
4. эндоморфизм  $\Leftrightarrow n = m \Leftrightarrow A_{n \times n}$ .
5. автоморфизм  $\Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = n, A_{n \times n} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$ .

**Свойства произведения:**

1.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — изоморф.  $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  — изоморфно.
2.  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ .
3.  $\forall \lambda \in K : \mathcal{A}(\lambda \mathcal{B}) = (\lambda \mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$ .
4.  $\mathcal{C} \in L(\Omega, U) : \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

Ассоциативная унитарная алгебра.

**Замечание 1.** Если  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  — изоморфно  $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$  — взаимно обр. отображение.

**Замечание 2.** Если  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , а также изоморфизм  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} \in \text{End}(V)$  — обратный лин. оператор к  $\mathcal{A}$ .

**def:**  $U_0 \subset U$  - линейное подпространство.  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V$  сужение лин. отобра. на лин подпространство.

$\forall u \in U_0 : \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$ .

Если  $\mathcal{A}$  — изоморфизм, то тогда его сужение на  $U_0$  будет линейным отображением между  $U_0$  и  $\text{Im } \mathcal{A}_0$ . И это будет тоже изоморфизм.

**Теорема (о ранге и дефекте линейного отображения)**

$\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$ . Доказать  $\dim U = \text{def } \mathcal{A} + \text{rg } \mathcal{A}$ .

**Доказательство:**

Пусть  $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A} \subset U$ . Пусть  $U_1 \subset U$ , такое, что  $U_0 \oplus U_1 = U$  — прямое дополнение. Возьму  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} \in L(U_1, \text{Im } \mathcal{A}_1)$ .

$\forall u \in U : \exists! u = u_0 + u_1$ , где  $u_0 \in U_0$ ,  $u_1 \in U_1$ , по т. об определении прямой суммы. Тогда получаем, что:

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$$

Откуда  $\text{Im } \mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{A}_1$ ,  $\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg } \mathcal{A}_1$ .

$\text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset U_1$ , а также  $\text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1$  — инъективна  $\Rightarrow \mathcal{A}_1$  изоморфно. Откуда получаем:

$$\dim U = \dim U_1 + \dim U_0 = \text{rg } \mathcal{A} + \text{def } \mathcal{A}$$

Q.E.D.

**Следствие.** (характеристика автоморфизма)

Если  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$  — условие обратимости линейного оператора.

## 1.2 Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$  — линейное отображение.

Пусть есть  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  базис  $U$ , а также  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$  базис  $V$ .

$$u \in U \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^n; v \in V \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\forall u \in U, v = \mathcal{A}u, : v = \mathcal{A} \left( \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A} \xi_i$$

То есть  $\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$$\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n).$$

Теперь заметим, что  $\mathcal{A}\xi_i \in V$ , откуда:

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j \xleftrightarrow{\text{коорд. изоморфизм}} A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m$$

Назовем  $A = (A_1, \dots, A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$  — матрицей линейного отображения  $\mathcal{A}$  на базисах  $\xi, \eta$ .

**Замечание.** Т.к. здесь координатный изоморфизм, то:

$$\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg}(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \text{rg}(A_1, \dots, A_n) = \text{rg } A.$$

**def:**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V) : \mathcal{A} : V \rightarrow V$  — лин. оператор.

Зафиксируем здесь один базис  $e = e_1, \dots, e_n$ . Получу:

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \dots, e_n)\mathcal{A}$$

Тогда  $A_{n \times n}$  — матрица линейного оператора.

Заметим, что теперь мы умеем:

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A \in M_{m \times n}$$

**Утв.**  $L(U, V) \cong M_{m \times n}$  координатный изоморфизм линейных отображений

**Доказательство:**

У нас есть взаимно однозначное соответствие. Проверим линейность:

$$\forall \lambda \in K : \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \xleftrightarrow{\text{проверить}} \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}.$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \cdot \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \cdot \eta_j$$

А откуда уже видно нужное нам соответствие.

Q.E.D.

**Утв.**  $\mathcal{A} \in L(W, V), \mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{AB} \in L(U, V)$ . Пусть  $w$  - базис  $W$ ,  $\eta$  - базис  $V$ ,  $\xi$  - базис  $U$ . Тогда  $\mathcal{AB} \leftrightarrow AB$  в базисах  $(\xi, \eta)$

**Доказательство:**

$$\mathcal{AB}\xi_i = \mathcal{A}(\mathcal{B}\xi_i) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^p b_{ki}w_k\right) = \sum_{k=1}^p b_{ki}\mathcal{A}(w_k) = \sum_{k=1}^p b_{ki} \sum_{j=1}^m a_{jk}\eta_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^p a_{jk}b_{ki}\right)\eta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^m (AB)_{ji} \cdot \eta_j$$

Q.E.D.

**Следствие:**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  - изоморфизм,  $A$  - матр в  $\xi, \eta \Rightarrow A^{-1}$  - матр в  $(\eta, \xi)$ .

**Доказательство:**

$$A \cdot A^{-1} = \varepsilon_V, \quad A^{-1} \cdot A = \varepsilon_U$$

$$AX = E_\eta, \quad XA = E_\xi$$

В силу того, что  $\mathcal{A}$  — изоморфизм:

$$\dim U = \dim V = n, \quad \text{rg} A = n \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

$$X = A^{-1}$$

Q.E.D.

**Утверждение:** Пусть  $\mathcal{A} \in L(U_\varepsilon, V_\eta), v = \mathcal{A}u$ . Тогда  $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$ , где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  — координатные столбцы  $v$  и  $u$  соответственно.

**Доказательство:** С одной стороны,  $v$  можно разложить по базису  $V$ :

$$v = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j \eta_j$$

С другой стороны,  $v$  представим как результат отображения:

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ji} \mathbf{u}_i \right) \eta_j \Rightarrow \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \mathbf{u}_i$$

. Откуда получаем искомое:  $v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u}$ . Последнее равенство называется *координатной формой записи действия линейного отображения*.

Q.E.D.

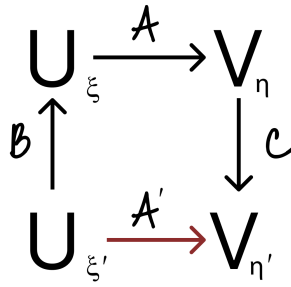
### Теорема (формула замены матрицы лин. отобр. при замене базиса)

$\mathcal{A} \in L(U, V)$  — линейное отображение.

$\xi, \xi'$  базисы  $U$ , а  $\eta, \eta'$  базисы  $V$ . Хотим поменять базисы на штрихованные и получить новую матрицу. Тогда ее можно получить так:

$$A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

**Доказательство:**



Воспользуемся данным рисунком, чтобы понять происходящее. Мы хотим найти матрицу  $A'$ . Для этого, заметим, что преобразование  $A'$ , это преобразование  $B$ , потом примененное к нему преобразование  $A$ , а после этого примененное к нему преобразование  $C$ . То есть:

$$A' = CAB$$

Заметим, что матрица  $B$ , это матрица перехода из  $\xi$  в  $\xi'$ . Это так потому что у нас просто меняется базис (про саму матрицу перехода см. одноименный раздел). Матрица  $C$ , это  $T_{\eta' \rightarrow \eta}$ . Откуда, исходя из двух утверждений сверху:

$$A' = T_{\eta' \rightarrow \eta} A T_{\xi \rightarrow \xi'} \Rightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Q.E.D.

**Следствие:**  $A \in \text{End}(V)$ .  $e, e'$  базисы  $V$ .  $A' = T^{-1}AT$ , где  $T = T_{e \rightarrow e'}$ .

**def:** квадратные матрицы  $A$  и  $B$  называются подобными, если  $\exists$  невырожденная матрица  $C$ , такая, что:  $B = C^{-1}AC$ .

**Замечание:** матрицы линейного оператора в разных базисах подобны (см. следствие выше).

### 1.3 Инварианты линейного отображения.

**Инвариантность** называется некоторое свойство объекта, которое не меняется при определенных действиях и преобразованиях.

$A$  - линейное отображение. Ранг и дефект инварианты относительно выбора базиса.

Пусть  $A \in \text{End}(V)$ . Пусть  $e_1, \dots, e_n$  базис  $v$ .

Как мы знаем,  $\exists!$   $D$   $n$ -форма, такая что  $D(e_1, \dots, e_n) = 1$ . Тогда **определитель линейного оператора:**

$$\det A := \det(Ae_1, \dots, Ae_n) = D(Ae_1, \dots, Ae_n)$$

**Замечание:**  $\det A = D(Ae_1, \dots, Ae_n) = D(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det A$  — определение определителя линейного оператора и матрицы соотносятся.

**Теорема:**

$$\forall A \in \text{End}(V), \det A = \det A.$$

**Доказательство:**

Возьмем  $e = (e_1, \dots, e_n)$  базис  $V$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A = (a_{ij})_{n \times n} \\ \det \mathcal{A} &= D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = D\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in}e_{i_n}\right) = \\ &\xleftrightarrow{\text{тк } D - n \text{ форма}} \det \mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} D(e_1, \dots, e_n) = \det A \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Замечание:**  $A$  и  $B$  подобные матрицы, то  $\det A = \det B$ .

**Замечание:**  $\det \mathcal{A}$  инвариант линейного оператора, он не зависит от базиса.

**Следствие 1:**  $\forall n$  - форма  $f$  на  $V$ :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V : f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

**Доказательство:**

Возьмем  $e = (e_1, \dots, e_n)$  базис  $V$ .  $\mathcal{A} \xrightarrow{e} A$ . Это значит, что мы берем матрицу линейного оператора в данном базисе.

$$f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) \stackrel{\text{из доказательства теоремы}}{=} \det A f(e_1, \dots, e_n)$$

На самом деле  $\alpha = f(e_1, \dots, e_n)$ , поэтому:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n : g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

Заметим, что  $g$  - полилинейное, тк  $f$  полилин. и  $\mathcal{A}$  - лин. отобр. Также  $g$  - антисим, тк  $f$  - антисим. Откуда  $g$  -  $n$ -форма. Заметим интересный факт:

$$g(e_1, \dots, e_n) = f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det A \cdot f(e_1, \dots, e_n)$$

Откуда:

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot \alpha D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Q.E.D.

**Замечание:** Мы можем вывести 9-ое свойство определителя по-другому. Пусть  $\mathcal{A} = A_{n \times n}$  — линейный оператор умножения.  $f = D$ ,  $B_j \in K^n$ . Тогда:

$$\det(AB_1, \dots, AB_N) = \det A \cdot \det B$$

**Следствие 2:**  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$

**Доказательство:**



Пусть  $e$  - базис  $V$ . Тогда  $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A, \mathcal{B} \xleftrightarrow{e} B$ . Также  $\mathcal{AB} \xleftrightarrow{e} AB$  по свойству. Откуда:

$$\det \mathcal{AB} = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Q.E.D.

**Следствие 3:**  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \det A \neq 0$ . Причем  $\det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \in \text{Aut}(V) &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \text{изоморфизм} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \dim \text{Ker } \mathcal{A} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \text{rg } \mathcal{A} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A, \det A \neq 0 \\ \text{rg } A = n \end{cases} \end{aligned}$$

Мы знаем, что существует  $\mathcal{A}^{-1}$ . А также  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \varepsilon$ . Откуда по свойству 3 получаем, что  $\det \mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A}$ .

Q.E.D.

**Следствие 4:**  $\det(\mathcal{AA}^{-1}) = 1 = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1}$

Вспомним старое определение  $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  - *след матрицы*.

### Теорема (о tr подобных матриц)

Если  $A$  и  $B$  подобны, то  $\text{tr } A = \text{tr } B$ .

**Доказательство:**

$A$  и  $B$  подобны  $\Leftrightarrow \exists C : B = C^{-1}AC$ . Пусть  $C^{-1} = S = (s_{ij})$ . Откуда:

$$\text{tr } B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}(AC)_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ij} \cdot a_{jk} \cdot c_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \sum_{i=1}^n c_{ki} s_{ij}$$

Заметим, что  $(CS)_{kj} = \delta_{kj}$ , где  $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, k=j \\ 0, k \neq j \end{cases}$ . Так что получаем, что

$$\text{tr } B = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A$$

Q.E.D.

**Следствие:**  $\forall A \in \text{End}(V) \Rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr } A'$ , где  $A$  и  $A'$  матрицы оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $e$  и  $e'$  соответственно.

**def:**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V), \text{tr } \mathcal{A} = \text{tr } A$  — след оператора.

**Замечание:** след оператора инвариантен из следствия выше.

**def:** Линейное подпространство  $L \subset V$  называется инвариантным относительно линейного оператора  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , если  $\forall v \in L, \mathcal{A}v \in L$ .

### Теорема 1:

$L \subset V$  - линейное подпространство.  $L$  - инвариантно относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ . Тогда  $\exists$  базис пр-ва  $V$  матрица, такой что матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе будет иметь *ступенчатый вид*, при этом размерность  $A^1 = k \times k$ ,  $k = \dim L$ .

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

### Доказательство:

$L = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$  - базис  $L$ .

Дополним базис  $L$  до базиса  $V$ :  $V = \text{span}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ .

Запишем матрицу  $A$  по определению:

$$\forall e_i \in L : \mathcal{A}e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^k a_{ji}e_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Откуда } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

### Теорема 2:

$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $L_i$  инвариантны отн.  $\mathcal{A}$ .  $\Rightarrow \exists$  базис пр-ва  $V$ , такое что м-ца оператора  $\mathcal{A}$  будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

### Доказательство:

Пусть базис  $V$  по эквив. условию  $\oplus$  объединение базисов  $L_i$ .

$$L_i = \text{span}(e_1^i, \dots, e_{k_i}^i), \dim L_i = k_i$$

Построим матрицу по определению. Не трудно заметить, что для каждого  $L_i$  из доказательства прошлой теоремы, все кроме соотв. строчек для  $L_i$  будет зануленно.

Q.E.D.

**Замечание:**  $A_i \leftrightarrow A|_{L_i} \in \text{End}(L_i)$ .

### Теорема 3.

$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $L_i$  инвариантны отн  $\mathcal{A} \Rightarrow \text{Im } \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$ , где  $\mathcal{A}|_{L_i} \in L(L_i, V)$

**Доказательство:**

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \xLeftrightarrow{\text{из т. об экв. опр. прямой суммы}} \forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i, v_i \in L_i$$

$$\forall v \in V : \text{Im } \mathcal{A} \ni \mathcal{A}v = \mathcal{A} \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}v_i \in \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$

Тогда всё, что нам осталось проверить это то, что наши пространства дизъюнкты. Но, если присмотреться к тому, что у нас написано, то у нас для любого вектора из  $\text{Im } \mathcal{A}$  существует лишь одно разложение через  $\text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$ , что соответствует эквивалентному определению прямой суммы.

Q.E.D.

## 1.4 Собственные числа и собственные векторы лин. оператора

$\lambda \in K$  называется собственным числом  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , если  $\exists v \in V, v \neq 0. \mathcal{A}v = \lambda v$ . Такой  $v$  называют собственным вектором собственного числа  $\lambda$ .

$$\lambda \in K : \begin{cases} \mathcal{A}v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda E)v = 0 \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \text{Ker}(A - \lambda E) \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow v$  собственный вектор собственного числа  $\lambda$ .

$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E)$  — собственное подпространство  $\mathcal{A}$  соответств. с.ч.  $\lambda$ . Это мн-во всех с.в.  $V$ , отвечающим с.ч.  $\lambda$  и нулевой вектор.

$\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$  — геометрическая кратность.

**Свойства:**

1.  $V_\lambda$  инвариантно относительно  $(\mathcal{A} - \lambda E)$ .
2.  $V_\lambda$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ .
3.  $\gamma(\lambda)$  инвариант относительно базиса.

**Условие существования с.ч.:**

$\lambda \in K_{\mathcal{A}}$  - с.ч.,  $v$  - с.в.  $\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda E)$  нетривиально  $\Leftrightarrow \text{def}(A - \lambda E) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda E) \neq n \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$

Тк определитель линейного оператора инвариантен, то:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

**def:**  $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$  - характеристический многочлен оператора  $\mathcal{A}$ .

Т.к.  $\det$  оператора инвариантен  $\chi(t) = \det(A - tE)$ , где  $A$  - матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе.

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot t^n + (-1)^{n-1} (tr A t^{n-1}) + \dots + \det A$$

По теореме Виета:  $\begin{cases} t_1 + \dots + t_n = tr A \\ t_1 \cdot \dots \cdot t_n = \det A \end{cases}$  Заметим, что  $\lambda$  с.ч.  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in K \\ \chi(\lambda) = 0 \text{ - корень хар. мн.} \end{cases}$

**Замечание.** Если все корни хар. мн.  $\in K \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = tr A \\ \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A \end{cases}$

**def:** Спектр оператора  $\mathcal{A}$  называется множество  $\{(\lambda, \alpha(\lambda))\}$ ,  $\alpha(\lambda)$  - кратность  $\lambda$  лин. оператора в хар. уравнении (*алгебраическая кратность*). Спектр это множество пар.

**def:** Простой спектр — все кратности - единички.

**Теорема 1:**

$\forall \mathcal{A} \in End(V). \forall \lambda$  с.ч.  $\mathcal{A} : 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

**Доказательство:**

$\lambda$  с.ч.  $\mathcal{A} \Leftrightarrow Ker(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) = V_\lambda$  не тривиально  $\Leftrightarrow \gamma_1 = \dim V_\lambda \geq 1$ .

Пусть  $\dim V_\lambda = \gamma$ ,  $V_\lambda$  инвариантно относительно  $\mathcal{A} \Rightarrow$  по т-ме 1 об инв. подпр. существует  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  будет иметь ступенчатый вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$$

$$\dim A^1 = \gamma \times \gamma, V = span(e_1, \dots, e_\gamma, e_{\gamma+1}, \dots, e_n)$$

При построении матрицы оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}e_i = \lambda e_i \Leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} - \lambda - \text{ на } i\text{-ой строчке. Немного распишем:}$$

$$\chi(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} A^1 - tE_{\gamma \times \gamma} & * \\ 0 & A^2 - tE_{(n-\gamma) \times (n-\gamma)} \end{vmatrix} \stackrel{\text{по 6-ому св-ву опр}}{=}$$

$= |A^1 - tE||A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \cdot \chi_{A^2}(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A^2}(t) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \lambda$  корень  $\chi(t)$ , причем кратность  $\geq \gamma$ , т.к  $\lambda$  может оказаться корнем  $\chi_{A^2}$

Q.E.D.

**Теорема 2:**

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  попарно различные с.ч  $\mathcal{A}$ ,  $v_1, \dots, v_n$  соответ. с.в.

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$  — лин. независимы.

**Доказательство:**

Докажем по индукции:

**База**  $m = 1$  :  $\lambda_1, v_1 \Rightarrow$  лин. незав.

**ИП:** Пусть верно для  $m$ , докажем для  $m + 1$ :

От противного: Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$  попарно различные собственные числа.

$v_1, \dots, v_m$  — линейно независимы по ИП.  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$  — линейно зависимы. Откуда:  $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$ . С одной стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \lambda_{m+1}v_{m+1} = \lambda_{m+1} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v_{m+1} &= \mathcal{A} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{A}v_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^m (\lambda_{m+1} - \lambda_i) \alpha_i v_i = 0 \end{aligned}$$

Но мы знаем, что  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы. Откуда эта линейная комбинация тривиальна, но с другой стороны, она такой быть не может, потому что  $\exists \alpha_i \neq 0$ , для которого  $v_i$  не равен нулю, а так же, исходя из того что искомые с.ч. попарно различны, то  $v_{m+1} - v_i \neq 0$ . Откуда комбинация нетривиальна.

Противоречие.

Q.E.D.

**Следствие:**  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  попарно различные с.ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i}$ , т.е  $V_{\lambda_i}$  дизъюнкты.

**Доказательство:**

$$0 = v_1 + \dots + v_m, v_i \in V_{\lambda_i}$$

Если в сумме какой-то из векторов ненулевой, то это собственный вектор, а собственные вектора для различных с.ч. линейно независимы. Противоречие. Откуда все вектора в сумме нулевые, откуда подпространства дизъюнкты.

Q.E.D.

**Теорема 3:**

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i, \quad L_i \text{ инвариантно относительно } \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t).$$

**Доказательство:**

Смотрим теорему 3 об инв. подпр. Матрица  $A$  - блочно-диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \chi(t) = \det(A - tE) \stackrel{\text{по 6-ому свойству опр.}}{=} \prod_{i=1}^m \det(A^i - tE) = \prod_{i=1}^m \chi_{A_i}(t)$$

Q.E.D.

## 1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  называется **оператором простой структуры** (о.п.с), если  $\exists$  базис пространства  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе имеет диаг. вид.

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что в таком случае собственные числа оператора  $\mathcal{A}$  будут  $\lambda_i$ , а так же собственные вектора этих чисел - соотв. столбики (легко проверить умножением). Отсюда все корни характ. многочлена  $\chi \in K \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$ .

**Теорема:**

$\forall A \in \text{End}(V)$ , если  $\sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n$ , то тогда:

$$\mathcal{A} \text{ - о.п.с} \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ - с.ч.} : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

**Доказательство:**

$$\sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n \Leftrightarrow \text{все корни } \chi \in K, \text{ откуда } \mathcal{A} \text{ - о.п.с.}$$

$\mathcal{A}$  о.п.с.  $\Leftrightarrow \exists$  базис  $V$  такой, что матрица диагональна  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ - с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч.}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Q.E.D.

**Следствие.** Если все корни характ. многочлена  $\in K$ , а также все  $\alpha(\lambda) = 1$  (спектр простой), то  $\mathcal{A}$  - о.п.с.

**def:**  $A_{n \times n}$  называется диагонализируемой, если она подобна диагональной.

### Теорема (критерий диагональности матрицы $A$ )

это перенимается

$A$  подобна диагональной  $\Leftrightarrow$  матрица о.п.с  $\mathcal{A}$  в нек. базисе

#### **Доказательство:**

•  $\Rightarrow$

Пусть  $A$  - диагонализируемая  $\Leftrightarrow$  подобна диагональной  $\Leftrightarrow \exists$  невырожд  $T$ :  $T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .  $V$  - линейное пространство над полем  $K$ .  $e = (e_1, \dots, e_n)$  - базис  $V$ .

Пусть  $A$  - матрица в базисе  $e$ . Тогда  $Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i \cdot v = (v_1, \dots, v_n)$  - базис.

Откуда  $v_1, \dots, v_n = (e_1, \dots, e_n)T_{e \rightarrow v} \Rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{v} A' = T^{-1}AT = \Lambda$

•  $\Leftarrow$   $\mathcal{A}$  о.п.с,  $A$  - матрица в некотором базисе  $e = (e_1, \dots, e_n)$ . Возьму  $v_1, \dots, v_n$  - базис  $V$ , где  $v_i$  - собственный вектор  $\mathcal{A}$ . Заметим, что так как  $\mathcal{A}$  о.п.с, то такой базис существует

Теперь давайте возьмем матрицу перехода из  $T_{e \rightarrow v}$ . Тогда  $\mathcal{A} \xrightarrow{v} A' = T^{-1}AT = \Lambda \Rightarrow A$  подобна диагональной

Q.E.D.

### **Алгоритм поиска диагонального представления матрицы подобной диагональной:**

1. найти спектр: если все корни  $\chi \in K$ , переходим к п2.
2. найти все  $\gamma(\lambda)$ , если  $\forall \lambda$  с.ч  $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$ , то перейти к п3.
3.  $T_{\text{кан.} \rightarrow v} = (v_1, \dots, v_n) T^{-1}AT = \Lambda$

**def:**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ . По теореме об равносильных условиях прямой суммы:

$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i$ , где  $v_i \in L_i$ . Возьму  $P_i \in \text{End}(V)$ , такие, что  $P_i \cdot v = v_i \in L_i$ .

Тогда такие  $P_i$  назовем операторами проектирования на подпр-во  $L_i$ .

#### **Свойства операторов проектирования:**

1.  $\text{Im } P_i = L_i, \text{ Ker } P_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$
2.  $P_i P_j = \mathbb{O}$
3.  $\sum_{i=1}^m P_i = \varepsilon$
4.  $P_i^2 = P_i, (P_j^k = P_j, \text{ где } k \in \mathbb{N})$  - идемпотентность

Они все тривиальны

**Утверждение.** Возьму множество операторов:  $\{P_i\}_{i=1}^m$ ,  $P_i \in \text{End}(V)$ .

Пусть они удовлетворяют свойствам 2,3  $\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i$ .  $P_i$  это проектор на  $L_i$ .

**Доказательство:**

Мы знаем, что  $P_i P_j = 0$ , для  $i \neq j$ , а также  $\sum_{j=1}^m P_j = \varepsilon$ . Откуда получаем, что:

$$P_i = P_i \varepsilon = P_i \sum_{j=1}^m P_j = \sum_{j=1}^m P_j P_i = P_i^2$$

А это значит, что  $\forall v \in V : v = \varepsilon v = \sum_{i=1}^m P_i v \Rightarrow V = \sum_{i=1}^m \text{Im } P_i$ .

Осталось показать единственность разложения нуля:

$$0 = \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m P_i w_i, \text{ где } w_i \in V$$

$$P_j 0 = 0 = P_j \sum_{i=1}^n P_i w_i = \sum_{i=1}^n P_i P_j w_i = P_j w_j = v_j$$

$\Rightarrow v_j = 0, \forall j = 1 \dots m \Rightarrow \text{дизъюнк.} \Rightarrow \bigoplus \text{Im } P_i$

Q.E.D.

**Замечание:** Из определения проекторов следует, что они существуют и определены однозначно для данной прямой суммы.

### Теорема (спектральное разложение о.п.с)

Дан  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ . Тогда выполнено:

1)  $\mathcal{A}$  — о.п.с.  $\Rightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \lambda P_\lambda$ ,  $P_\lambda$  — проектор на  $V_\lambda \forall \text{ с.ч. } \lambda$ .

Такое разложение называется спектральным.

2)  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $P_i$  проекторы на  $L_i$ .  $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^m \lambda_i P_i \Rightarrow \mathcal{A}$  о.п.с,  $\lambda_i$  с.ч.

$\text{Im } P_i = L_i = V_\lambda$  (соответ. подпр-во)

**Доказательство:**

1)  $\mathcal{A}$  о.п.с  $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч.}} V_\lambda$ . Возьму  $P_\lambda$  проекторы на  $V_\lambda$  (исходя из определения -они существуют)

Тогда давайте воспользуемся определением:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} v_\lambda, \text{ где } v_\lambda \in V_\lambda : \mathcal{A}v = \mathcal{A}\left(\sum_{\lambda} v_\lambda\right) = \sum_{\lambda} \mathcal{A}v_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda v$$

Откуда уже крайне очевидно получаем, что  $\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda$ .



2)  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ . Откуда по определению:  $\forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i \in L_i = \text{Im } P_i, v_i \neq 0$ . Тогда

$$\mathcal{A}v_i = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j\right)v_i = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j\right)P_i v = v \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j P_i$$

Теперь вспомним свойство, что при умножении двух различных операторов мы получаем 0. Поэтому на самом деле наша сумма равна:

$$v \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j P_i = v \lambda_i P_i P_i = v \lambda_i P_i = \lambda_i v_i$$

Хорошо, теперь вспомним, что изначально это было равно  $\mathcal{A}v_i$ . поэтому  $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$ , откуда получаем, что  $v_i$  с.в.  $\mathcal{A}$  отвечающий с.ч.  $\lambda_i$ .

Откуда получаем, что наше подмножество  $V_{\lambda_i} \supseteq \text{Im } P_i$  (потому что любой  $v \in \text{Im } P_i$  — случайный вектор).

Вспомним, что:  $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i \subseteq \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i}$ , а как мы знаем  $\bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i} \subseteq V$ . Откуда, я получаю, что:

$$\bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i = \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i} \xrightarrow{\text{так как } P_i \subseteq V_{\lambda_i}} \text{Im } P_i = V_{\lambda_i}$$

Q.E.D.

### Следствие (спектральное разложение диагонализированной матрицы)

$A$  диагонализирована  $\Leftrightarrow \exists \{P_i\}_{i=1}^m$ , такое, что  $P_i \cdot P_j = 0, i \neq j$  и  $\sum_{i=1}^m P_i = E, A = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$

#### **Доказательство:**

Очевидно следует из теоремы:

$A$  диагонализирована  $\Leftrightarrow$  матрица  $\mathcal{A}$  о.п.с. Либо можно считать  $A = \mathcal{A}$  о.п.с.  $\in \text{End}(K^n)$

Q.E.D.

**Замечание.** Матрица  $A$  подобна диагональной, то у нее есть диагональное представление:

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n), A = T\Lambda T^{-1}$$

А также у такой матрицы есть спектральное разложение:

$$A = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda P_\lambda$$

Просьба не путать эти две формулы! **СЕЙЧАС НАЧНЕТСЯ ЧТО-ТО СТРАШНОЕ**

**def:**  $A_k = (a_{ij}^k)_{n \times n}$  - последовательность матриц  $n \times n$ .

Обозначают так:  $(A_k)_{k=1}^\infty$  — последовательность матриц.

Раз это последовательность, то давайте введем на ней вот такой предел:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_k = \forall i, j : a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k$$

Для лучшего понимания этого мира смотрите на приведенный ниже пример:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (1 + \frac{2}{k})^k & \frac{\sqrt[k]{k}}{\frac{1}{k}} \\ \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} & \frac{1 - \cos \frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

**def:**  $a_n \in R : \sum_{m=1}^{\infty} a_m = S \Leftrightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k a_m = S$ , где  $S_k = \sum_{m=1}^k a_m$  — частичная сумма ряда.

А саму такую конструкцию понятно называют рядом. Теперь давайте немного притронемся к матану:

$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$  — ряды Тейлора - Маклорена.

$x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$  — их область определения,  $|x| < R$  (или еще обозначается  $r$ ) — радиус сходимости,  $c_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Причем эти  $c$ -шки на самом деле производные. (если интересно см. конспект по мат. анализу первый семестр)

**Рассмотрим пример:** Давайте разложим  $e^x$ , нам это позже понадобится:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, |x| < +\infty$$

В таком случае  $c_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$ .

Пусть  $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ . А давайте расширим на матрицы :)

**def:**  $A_{n \times n} : f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$ . Причем мы так же считаем частичные суммы и ищем их предел, но теперь просто ищем предел в матрицах.

Можно добавить параметр:  $f(At) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m t^m$ .

**Теорема 1 (функция от диагонализированной матрицы 1)**

Пусть  $A$  — подобна диагональной. А также нам дана  $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, |x| < r$ .

Тогда, если  $\forall$  с.ч.  $|\lambda| < r \Rightarrow \exists f(\lambda)$  и  $f(A) = T f(\Lambda) T^{-1}$ , где  $f(\Lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$

**Доказательство:**

Упросту  $\sum_{m=0}^k c_m A^m$ . Мы знаем, что  $A$  - подобна диагональной  $\Rightarrow A = T \Lambda T^{-1}$ . Тогда:

$$A^m = (T \Lambda T^{-1})^m = T \Lambda T^{-1} T \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1} = T \Lambda^m T^{-1}$$

Теперь давайте подставим это в нашу сумму:

$$\sum_{m=0}^k c_m A^m = \sum_{m=0}^k c_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left( \sum_{m=0}^k c_m \Lambda^m \right) T^{-1}$$

Теперь вспомним, что  $\Lambda^n$  подобна диагональной, поэтому занесем сумму внутрь матрицы и получим:

$$T \left( \sum_{m=0}^k c_m \Lambda^m \right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^k c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^k c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} =$$

Теперь вспомним, что  $\forall$  с.ч.  $|\lambda| < r$ , поэтому для них мы можем применить формулу, откуда:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k c_m A^m = \lim_{k \rightarrow \infty} T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^k c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^k c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Q.E.D.

## Теорема 2 (функция от диагоналируемой матрицы, 2-я формула)

Пусть  $A$  — подобна диагональной.

Тогда  $A$  имеет спектральное разложение  $\sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \lambda P_\lambda$ , где  $P_\lambda$  — проекторы. А также нам дана

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad |x| < r.$$

Тогда, если  $\forall$  с.ч.  $|\lambda| < r$ , то  $\exists f(A)$ , а так же  $f(A) = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} f(\lambda) P_\lambda$ .

**Доказательство:**

$$A^m = \left( \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \right)^m = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum_{\xi} \xi P_\xi$$

А теперь вспомним свойства проекторов. Когда я умножаю два разных проектора, я получаю ноль, откуда:

$$A^m = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum_{\xi} \xi P_\xi = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda$$

Значит:  $\sum_{m=0}^k c_m A^m = \sum_{m=0}^k c_m \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda = \sum_{\lambda} P_\lambda \sum_{m=0}^k \lambda^m c_m$ . Теперь если я возьму предел, то я получу то, что мне нужно, потому что каждая лямбда  $< r$ , и поэтому я могу вместо них подставить  $f(\lambda)$ .

Q.E.D.

**Экспонента:**

А теперь давайте возьмем все  $c = 1$ , а также вспомним, что мы можем протаскивать с собой параметр. Поэтому у нас получается новая формула:

$f(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k t^m A^m$ , а теперь вспомним наше разложение  $e$ -шки. А это именно оно и есть!

Поэтому получаю:

$$e^{At} = f(At) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k t^m A^m$$

Или:

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} e^{\lambda t} P_\lambda$$

**Свойства:**

1.  $(e^{At})' = A e^{At} = e^{At} A$ .
2.  $e^{(A_1 + A_2)t} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$
3.  $e^{0t} = E$

**Обратная:**

$$A - \text{подобна диагональной } \forall \text{ с.ч. } \lambda \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

**Свойства:**

1.  $A^{-1} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda} P(\lambda)$
2.  $AA^{-1} = T \Lambda T^{-1} T \Lambda^{-1} T^{-1} = E$
3.  $AA^{-1} = (\sum \mu P_\mu) (\sum \frac{1}{\lambda} P_\lambda) = \sum_\lambda \lambda \frac{1}{\lambda} P_\lambda = E$

**Корень:**

Если  $A$  подобна диагональной и  $\forall$  с.ч.  $\lambda \geq 0$ , то взяв  $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$  мы можем ввести:

$$\sqrt[m]{A} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}, \text{ полагая } \sqrt[m]{\lambda} \geq 0$$

**Спектральное представление:**  $\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda} P_\lambda$ .

## 1.6 Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора

Давайте посмотрим какие линейные операторы мы уже изучили:

Пусть  $A \in \text{End}(V) \xleftrightarrow{c} A$ ,  $\chi(t)$  — корни характеристического многочлена. Он может быть:

1. Все корни  $\in K$ .  $\sum_{\lambda - \text{с.ч}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$ 
  - $\exists$  базис  $V$  из  $v_\lambda: \forall \lambda: \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) \iff$  диагонализируема.
  - $\nexists$  базис  $V$  из  $v_\lambda: \exists \text{ с.ч. } \lambda: \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \iff A$  жорданова форма.
2. Не все корни  $\in K$ . В таком случае вещ.  $V$  комплексифицируют.

**def:**  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$  (вещ. лин. пр-во)

$$\forall x, y \in V \Rightarrow z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad V_{\mathbb{C}} = \{z = x + yi \mid \forall x, y \in V\}$$

Назовем  $V_{\mathbb{C}}$  комплексификацией  $V$ .

Покажем некоторые **свойства**:

1.  $0 \in V \leftrightarrow 0 + i0 = 0 \in V_{\mathbb{C}}$  - существование нуля
2.  $x \in V \leftrightarrow x + i0 = x \in V_{\mathbb{C}}, V \subset V_{\mathbb{C}}$  — говорим, что  $V \subseteq V_{\mathbb{C}}$
3.  $\forall z = x + iy$  существует обратное:  $-x + i(-y)$

Заметим, что в таком случае  $V_{\mathbb{C}}$  — линейное пространство над полем комплексных чисел.

**Утв.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ . Докажем что  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V_{\mathbb{C}}$ .

**Доказательство:**

Возьмем любой  $z$  и докажем, что его можно породить с помощью базиса:

$$z = x + iy = \sum_{j=1}^n x_j e_j + i \sum_{j=1}^n y_j e_j = \sum_{j=1}^n (x_j + iy_j) e_j$$

Откуда  $e$  — порождающий базис для  $V_{\mathbb{C}}$ . Докажем линейную независимость:

Для этого нам надо показать, что любая нулевая комбинация тривиальна:

$$0 = \sum_{j=1}^n (a_j + ib_j) e_j = \sum_{j=1}^n a_j e_j + i \sum_{j=1}^n b_j e_j \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j = 0 \\ \sum_{j=1}^n \beta_j e_j = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall j: \alpha_j = 0 \\ \forall j: \beta_j = 0 \end{cases}$$

Откуда получили линейную независимость.

Q.E.D.

**Замечание.** Мы знаем, что  $V \subset V_{\mathbb{C}}, \dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$ , откуда наши пространства должны быть равны? Нет! Это было бы так, если бы не одно НО.  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$ , а  $V_{\mathbb{C}}$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ , поэтому это не правда.

Благодаря верхней теореме мы можем сделать некоторые замечания:

$$x \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, z = x + iy \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$$

**def:**  $z \in V_{\mathbb{C}}, \bar{z} = x - iy$  — сопряженный вектор,  $z = x + iy, \quad x, y \in V$

**Свойства:**

1.  $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
2.  $\overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \bar{z}$
3.  $v_1, \dots, v_m$  — лин. (не)зависимы  $\Leftrightarrow \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$  лин. (не)зависимы.
4.  $rg(v_1 \dots v_m) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$

**def:** Возьму оператор  $\mathcal{A} \in End(V)$ .  $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

Назову данную конструкцию продолжением вещ. лин. оператора  $\mathcal{A}$  на  $V_{\mathbb{C}}$  вещественного пространства  $V$ .

Очевидно, что в таком случае  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$ , т.к.  $\mathcal{A}$  — линейный оператор.

**Утверждение:**  $\mathcal{A} \in End(V)$ ,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  базис  $V$  ( $\Rightarrow$  базис  $V_{\mathbb{C}}$  из теоремы сверху).

Тогда, если  $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A$ , то  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{e} A$

**Доказательство:**

По определению матричного оператора:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \cdot e_j = \mathcal{A} \cdot e_j + i\mathcal{A}0 = \mathcal{A} \cdot e_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} e_k \iff A_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

**Свойства  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ :**

1.  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \equiv \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$  — так как матрицы совпадают.

**Замечание:**

1) если  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0$  - корень  $\chi(t) \Rightarrow \lambda$  с.ч.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ , но не с.ч.  $\mathcal{A}$ .

2) если  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  корень  $\chi \Rightarrow \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  - тоже корень, причём той же кратности.

2.  $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z}$ .

$$\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y} = \mathcal{A}x - i\mathcal{A}y = \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z}$$

3.  $\lambda$  с.ч.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}, z$  - с. в., отвечающий  $\lambda \Rightarrow \bar{\lambda}$  с.ч.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}, \bar{z}$  с.в., отвечающий  $\bar{\lambda}$

$$\mathcal{A} \bar{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{z}, \text{ тогда } \gamma(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})$$

Вернемся к тому старому разделению на случаи. Заметим, что если в таком случае мы возьмем наш третий случай и компелисифицируем, то для полученного оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  мы получим, что он относится либо к первому варианту, либо ко второму.

## 1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона

**def:**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  - нормализованный многочлен  $\psi(t)$  называется аннулятором элемента  $x \in V$ , если  $\psi(\mathcal{A})x = 0$ .

А теперь на более понятном. Пусть у нас есть  $\psi(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k+1} t^0$ . Подставляя в него оператор получу:  $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^k + a_1 \mathcal{A}^{k-1} + \dots + a_{k+1} \varepsilon$ . И такой оператор будет аннулятором  $x$ , если  $\psi(\mathcal{A})x = 0$ .

**Замечание.**  $\psi(t) \neq 0$ , потому что это нормализованный многочлен, его старший коэффициент равен 1.

$\psi(t) = \prod_{\lambda - \text{корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$  - так как это многочлен. Здесь  $m(\lambda)$  — кратность корня  $\lambda$ . Перепишем на место  $t$  оператор:

$$\psi(\mathcal{A}) = \prod_{\lambda - \text{корень}} (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)^{m(\lambda)}$$

**def:** Аннулятор элемента  $x \in V$  наименьшей степени называется минимальным аннулятором элемента  $x$ .

### Теорема: (о существовании и единственности минимального аннулятора)

1.  $\forall x \in V \exists!$   $\psi(t)$  минимальный аннулятор  $x$ .
2.  $\forall$  другой аннулятор  $x$  : на минимальный аннулятор  $x$ .

**Доказательство:**

1. (a) Пусть  $x = 0$ ,  $\psi(t) = 1$ ,  $\psi(\mathcal{A}) = \varepsilon$ ,  $\varepsilon x = \varepsilon 0 = 0$   
 (b) Пусть  $x \neq 0$ . Посмотрю на  $x, \mathcal{A}x, \mathcal{A}^2x, \dots, \mathcal{A}^m x$

Причем  $m$  такое, что  $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^{m-1}x$  - линейно независимы, а  $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^m x$  - зависимы. Такой набор собрать удастся, при этом  $m \leq n$ .

$$\Rightarrow \exists! c_0, c_1, \dots, c_{m-1} \in k, \text{ такие, что } \mathcal{A}^m x = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j x$$

Откуда получаем, что  $(\mathcal{A}^m - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j)x = 0$ . Получил какой-то оператор, который при умножении на  $x$  дает 0. А это значит, аннулятор существует, причём аннулятор выше минимальный по построению.

**Замечание:** мы смотрим на многочлен с коэффициентами  $1, c_{n-1}, \dots, c_0$  — этот многочлен и есть наш минимальный аннулятор..

2. Пусть мой минимальный аннулятор это  $\psi(t)$ , а  $\psi_1(t)$  другой аннулятор  $x$ .

Посмотрим на результат деления:

$$\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t) \text{ (остаток), } \deg r < \deg \psi$$

Это значит, что подставляя в него  $\mathcal{A}$  и умножая на  $x$  должно быть верно:

$$\psi_1(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})x + r(\mathcal{A})x$$

Но  $\psi_1(\mathcal{A})x = 0$ ,  $\psi(\mathcal{A})x = 0$ , поэтому  $r(\mathcal{A})x = 0$ , но что это значит?

Как мы знаем  $\psi(t)$  - минимальный аннулятор. Так как  $r(\mathcal{A})x = 0$ , то если  $r(t) \neq 0$ , получаем, что это аннулятор, а тогда мы выбрали не минимальный аннулятор, т.к.  $\deg \psi > \deg r$ . Противоречие!

Откуда получаю, что  $r \equiv 0 \Rightarrow \psi_1$  делится на минимальный оператор  $\psi$ .

Q.E.D.

**def:** Нормализованный многочлен  $\varphi(t)$  называется аннулятором оператора  $\mathcal{A}$ , если:

$$\varphi(\mathcal{A}) \equiv 0, (\text{т.е. } \forall v \in V, \varphi(\mathcal{A})v = 0)$$

**def:** минимальным многочленом оператора  $\mathcal{A}$  называется аннулятор  $\mathcal{A}$  наименьшей степени.

**Теорема: (о существовании и единственности миним. многочлена оператора)**

1.  $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V) : \exists !$  - минимальный многочлен.
2.  $\forall$  аннул. оператора  $\mathcal{A}$  делится на миним. мн-н  $\mathcal{A}$

**Доказательство:**

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  - базис  $V$ . Построим  $\psi_j(t)$  - минимальный аннулятор  $e_j$

Возьму  $\varphi(t) = \text{Н.О.К. } \{\psi_j\}_{j=1}^n$ , где  $j = 1, \dots, n$ . Покажем, что  $\varphi$  аннулятор  $\mathcal{A}$ :

Как мы знаем  $\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ . Поэтому:

$$\varphi(\mathcal{A})v = \sum_{j=1}^n v_j \cdot \varphi(\mathcal{A}) \cdot e_j = \sum_{j=1}^n v_j \cdot (\psi_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{A}))e_j = 0 \iff \varphi(\mathcal{A}) \equiv 0$$

То есть такой многочлен существует. Теперь докажем единственность:

Пусть  $\varphi_a(t)$  другой аннулятор  $\mathcal{A}$ : Тогда  $\forall j = 1, \dots, n : \varphi_a(\mathcal{A})e_j = 0$ .

Тогда  $\varphi_a$  аннулятор элемента  $e_j$  для любого  $j$ .

По теореме о линейном операторе мы знаем, что  $\varphi_a$  делится на  $\psi_j$  для любого  $j$ , то есть  $\varphi_a \vdots \varphi$ .

Откуда я получаю, что  $\varphi_a$  степени хотя бы такой же, что  $\varphi$ . То есть  $\varphi_a$  хотя бы Н.О.К.

Если мы предполагаем, что это многочлен минимальной степени, то он такой же степени, как и  $\varphi$ . При этом они оба делятся на Н.О.К., а  $\varphi = \text{Н.О.К.}$ . Так же их старшие коэффициенты равны. Поэтому:  $\varphi_1 = \varphi$ . Исходя из этого получаем, что такой многочлен единственный

Q.E.D.

**Теорема (Кэли - Гамильтона)**

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$  выполнено, что:

$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$  - аннулятор оператора  $\mathcal{A}$ .

**Замечание**  $\det(\mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \varepsilon)$ ,  $t \in K$ . Сюда не предполагается подставлять матрицу.



**Доказательство:**

Пусть есть базис  $e_1, \dots, e_n$ . Тогда  $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A$ .

Пусть есть  $\mu \in K$  - не корень  $\chi(t)$ , где  $t \in K$ . Посмотрим на  $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - tE)$ . Как мы знаем:  $\chi(\mu) \neq 0$ , поэтому  $\det(A - \mu E) \neq 0$ . Откуда существует обратная матрица (по теореме об обратной матрице), тк  $A$  - не вырожденная:

$$\exists!(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B = \frac{1}{\chi(\mu)} B$$

где  $B$  - матрица из алгебраических дополнений.

Наша матрица  $B$  выглядит примерно так:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} c_{11i} \mu^i & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} c_{1ni} \mu^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} c_{n1i} \mu^i & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} c_{nni} \mu^i \end{pmatrix}$$

Давайте разложим нашу матрицу в сумму матриц так, что матрица  $B_k$  будет состоять из всех коэффициентов на  $k$ -ой позиции этих  $k$  функций:

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Тогда вернемся к тому, что было:

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\chi(\mu)} \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Или домножим на  $(A - \mu E)$  и получим:

$$E \cdot \chi(\mu) = (A - \mu E) \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Пусть  $\chi(t) = \alpha_n t^n + \dots + \alpha_0 t^0$ . Давайте раскроем скобки, мы получим:

$$\begin{aligned} \mu^0 : & \quad E\alpha_0 = AB_0 \\ \mu^1 : & \quad E\alpha_1 = AB_1 - B_0 \\ \mu^2 : & \quad E\alpha_2 = AB_2 - B_1 \\ & \dots\dots\dots \\ \mu^{n-1} : & \quad E\alpha_{n-1} = AB_{n-1} - B_{n-2} \\ \mu^n : & \quad E\alpha_n = -B_{n-1} \end{aligned}$$

Теперь умножим каждый  $E\alpha_i$  на  $A^i$  и сложим. Получится:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \dots + A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = \mathcal{O}$$

$$\chi(A) = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \chi \text{ аннулятор } \mathcal{A}, \text{ т.к. } \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t).$$

Q.E.D.

**Замечание:** Очевидно,  $\forall$  матрицы  $A_{n \times n}$  ее характеристический многочлен это аннулятор  $\mathcal{A}$ .

**Следствие 1.**  $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$ ,  $\varphi$  - минимальный многочлен, тогда  $x : \varphi$  (из теоремы о минимальном мн-не.)

**Следствие 1.5.**  $\deg \varphi \leq n$ , т.к.  $\deg \chi = n$  и  $\chi : \varphi$ .

**Следствие 2.**  $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$ . Если  $\deg \varphi = n = \deg \chi \Leftrightarrow \varphi \equiv \chi \cdot (-1)^n$

### Теорема (о множестве корней характеристического многочлена)

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$  множество корней  $\chi$  совпадает с множеством корней  $\varphi$  (без учета кратности)

#### **Доказательство:**

1.  $\lambda$  корень  $\varphi \Rightarrow \lambda$  - корень  $\chi$ . Очевидно.
2. Пусть  $\lambda$  корень  $\chi$ . Мы должны показать, что и у  $\varphi$  есть такой корень. Тогда есть 2 варианта:
  - (a)  $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$  - с.ч.  $\Rightarrow \exists u$  - собственный вектор  $\neq 0$

Так как  $u$  - случайный вектор, то  $(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)u = 0$

$(t - \lambda)$  - минимальный аннулятор элемента  $u$ ,  $\varphi$  - минимальный многочлен  $\Rightarrow$  аннулятор  $v$ , откуда  $\varphi : (t - \lambda) \Rightarrow \lambda$  корень  $\varphi$  - победили

- (b)  $\lambda \notin K \equiv \mathbb{R}$ , т.е.  $\lambda$  - не собственное число. Прибегаем к комплексификации:

Для  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$   $\lambda$  - корень. Как мы знаем  $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \equiv \chi_{\mathcal{A}} = \chi$ .

Тогда по пункту a это корень минимального многочлена в  $\varphi_{\mathbb{C}}$ .

Построим минимальный многочлен:

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  базис.  $\mathcal{A} \xrightarrow{e} A$ .  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{e} A$ . Начнем строить по определению минимальный многочлен. Для этого мы должны найти  $\psi_i(t)$  - аннулятор  $e_i$ .

Выпишу:  $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \dots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$ . Причем  $k$  такое, что  $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \dots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{k-1} e_i$  - линейно независимы, а  $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \dots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$  - зависимы. Заметим, что  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_j = \mathcal{A}e_j$ .

Поэтому по алгоритму построения мин. многочлена  $\varphi_j = \varphi_j_{\mathbb{C}}$ . А уже откуда  $\lambda$  корень  $\varphi$  - победили!

Q.E.D.

**Замечание:**  $\chi(t) = \prod (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$  и  $\varphi(t) = \prod (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ , верно, что:  $1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

## 1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство.

Пусть у нас есть  $\varphi(t)$  - многочлен над полем  $K$  (все его коэффициенты в  $K$ ).

Пусть все его корни  $\varphi \in K$ . Тогда давайте разложим его в произведение корней:

$$\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

давайте теперь вынесим один из корней за скобки. Получим:

$$\varphi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \cdot \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

Переобозначим  $\varphi_\lambda(t) = \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$  и подставим:

$$\varphi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(t)$$

Возьмем  $P_{m-1}$  - множество всех многочленов над полем  $K$  степени  $\leq m - 1$ .

Зафиксируем  $\varphi$  и  $\lambda$  и назовем главным идеалом, порожденным многочленом  $\varphi_\lambda$ :

$$I_\lambda = \{p \in P_{m-1} | p : \varphi_\lambda\}$$

Очевидно  $I_\lambda$  линейное подпространство. Заметим, что  $p : \varphi_\lambda \Leftrightarrow p(t) = a_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$

Поэтому на самом деле:  $I_\lambda \cong \{a_\lambda\} = P_{m(\lambda)-1}$

Откуда  $\dim I_\lambda = m(\lambda)$ .

**Теорема:**

$$P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda - \text{корень } \varphi} I_\lambda.$$

**Доказательство:**

1. Проверим дизъюнктность:

$$0 = \sum_{\lambda - \text{корень } \varphi} p_\lambda \in I_\lambda = \sum_{\lambda} a_\lambda(t) \varphi_\lambda(t)$$

Зафиксируем какую-то  $\lambda$  и вынесем ее за скобки:

$$a_\lambda \varphi_\lambda(t) + \sum_{\mu \neq \lambda} a_\mu(t) \cdot \varphi_\mu(t)$$

Как мы знаем, для всех  $\mu \neq \lambda : \varphi_\mu : (t - \lambda)^{m(\lambda)}$

А так же мы знаем, что  $\varphi_\lambda(t)$  не делится на  $(t - \lambda)^\mu$

Откуда получаем, что  $a_\lambda : (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ . А это значит, что  $a_\lambda \equiv 0$

Откуда дизъюнктно.

2. Проверим размерность  $\dim(\bigoplus_{\lambda} I_\lambda) = \sum_{\lambda} \dim I_\lambda = \sum_{\lambda} m(\lambda) = \dim P_{m-1}$ , откуда прямая сумма.

Q.E.D.

**Следствие 1:**  $\forall p \in P_{m-1} : \exists! p = \sum_{\lambda} p_\lambda$ , где  $p_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$ ,  $\deg \alpha_\lambda \leq m(\lambda) - 1$ .

В частности,  $1 = \sum_{\lambda \text{ корень}} p_\lambda$  - полиномиальное разложение единицы

**Замечание:**

1. Пусть  $\lambda \neq \mu$  - корни  $\varphi$

$$p_\lambda \in I_\lambda, p_\mu \in I_\mu, p_\lambda p_\mu : \varphi$$

$$p_\lambda(t) = \alpha_\lambda \varphi_\lambda(t), p_\mu(t) = \alpha_\mu \varphi_\mu(t)$$

$$p_\lambda(t) p_\mu(t) = \alpha_\lambda \varphi_\lambda(t) \alpha_\mu \varphi_\mu(t) : \varphi$$

2. Пусть  $\forall \lambda, m(\lambda) = 1$ , тогда  $\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$ .

$I_{\lambda} \ni p_{\lambda} = \alpha_{\lambda} \varphi_{\lambda}$ , тогда  $\alpha_{\lambda} = \text{const}$ . Это можно понять так же из  $0 \leq \deg \alpha_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1 = 0$

### Теорема (Лагранж)

Пусть  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$ , то есть  $\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$ . Тогда:

$$\forall p \in P_{m-1} : p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} \cdot \varphi_{\lambda}(t), \text{ где } p_{\lambda} \in I_{\lambda}$$

### Доказательство:

Возьму многочлен  $p$  и посмотрю значение в  $\lambda$ .

$p(\lambda) = \sum_{\mu} p_{\mu}$  - я могу так разложить из следствия 1 (см. выше). Также заметим, что  $a_{\mu}$  - константы. Тогда получается вот такая формула:

$$p(\lambda) = \sum_{\mu} p_{\mu} = \sum_{\mu} a_{\mu} \varphi_{\mu}(\lambda)$$

Заметим, что при  $\mu \neq \lambda$  у нас зануляется сумма, так что  $p(\lambda) = a_{\lambda} \varphi_{\lambda}(\lambda)$ .

Откуда получаю, что  $\alpha_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\varphi_{\lambda}(\lambda)}$ .

Теперь про производную:  $\varphi'(t) = ((t - \lambda) \cdot \varphi_{\lambda}(t))' = \varphi_{\lambda}(t) + (t - \lambda) \varphi'_{\lambda}(t)$

Зафиксируем  $\lambda$ . Получу, что в таком случае  $\varphi'(\lambda) = \varphi_{\lambda}(\lambda)$ . Откуда, если присмотреться, мы получаем формулу из теоремы.

Q.E.D.

**Замечание.** Эта теорема позволяет нам быстро искать  $\alpha_{\lambda}(t)$ , в случае всех  $m$  единиц, потому что в таком случае  $\alpha_{\lambda}(t)$  - константа.

**Следствие:**  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$ : Пусть  $1 = \sum_{\lambda} \frac{1}{\varphi'(\lambda)} \varphi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) \Rightarrow t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}(t)$

**Доказательство:**  $t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\varphi'(t)} \varphi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

Q.E.D.

Вернемся к операторам. Возьмем  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ :

$\varphi(t)$  минимальный многочлен, все корни  $\varphi \in K (\Leftrightarrow \text{все корни } \chi \in K)$ , то есть являются собственными числами.

$\exists! 1 = \sum_{\lambda - \text{ корни } \varphi} p_{\lambda}(t)$  — полиномиальное разложение единицы.

$\varepsilon = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(\mathcal{A})$ ,  $\varepsilon = \sum_{\lambda} P_{\lambda}$  — оператор разложения единицы.

Позамечаем некоторые интересные факты:

1.  $P_\lambda \in \text{End}(V)$
2. Возьму  $\lambda \neq \mu$ . Замечу, что  $p_\lambda \cdot p_\mu : \varphi$ . Тогда  $p_\lambda(t)p_\mu(t) = \alpha(t)\varphi(t)$ , откуда:  
 $\forall v \in V : P_\lambda P_\mu v = a(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{A})v = 0$ , из-за того, что  $\varphi$  - минимальный многочлен.  
 Откуда  $P_\lambda P_\mu$  - аннулятор  $\mathcal{A}$  или  $P_\lambda P_\mu = 0$
3.  $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \sum_\lambda P_\lambda \\ P_\lambda \cdot P_\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_\lambda$  - по теореме это проекторы на  $\text{Im } P_\lambda$ ,  $V = \bigoplus \text{Im } P_\lambda$

Такие проекторы называются **спектральными**. Это не те самые проекторы на  $V_\lambda$ . Пока что это проекторы на их собственные подпространства. Они обладают теми свойствами проекторов, что мы вывели до этого.

**ЕСЛИ**  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$ , тогда по следствию из матрицы Лагранжа, мы знаем

$$\varepsilon = \sum_\lambda P_\lambda, \mathcal{A} = \sum_\lambda P_\lambda \cdot \lambda \Rightarrow \mathcal{A} \text{ о.п.с., } \lambda - \text{с.ч. } \mathcal{A}.$$

Откуда это будут проекторы на собственные подпространства.

**Следствие:** Т.е.  $\mathcal{A}$  о.п.с. достаточно удовлетворять:  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$  в минимальном многочлене.

**def:**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ ,  $\lambda$  - с.ч.  $\mathcal{A}$ .  $K_\lambda$  - **корневое подпространство**, если:

$$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}, \text{ где } m(\lambda) \text{ кратность } \lambda \text{ в мин. многочлене } \varphi. \varphi(t) = \prod_\lambda (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

Очевидно  $V_\lambda \subseteq K_\lambda$ .

**Теорема (о корневом подпространстве)**

1.  $K_\lambda$  - инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ .
2.  $\text{Im } P_\lambda = K_\lambda$ , где  $\varepsilon = \sum_\lambda P_\lambda$  - оператор разложение единицы.

Называются образами спектров проекторов.

$$\Rightarrow \bigoplus_\lambda K_\lambda = V$$

3.  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  - минимальный многочлен для  $B = \mathcal{A}|_{K_\lambda} \in \text{End}(K_\lambda)$

**Доказательство:**

1. Возьмем  $v \in K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$

Заметим, что  $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$  - многочлен от  $\mathcal{A}$ . Тогда:

$$\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}\mathcal{A}$$

Умножим и левую и правую часть на  $v$ . Получим:

$$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}(\mathcal{A}v) = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = 0$$

Откуда  $\mathcal{A}v \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda \Rightarrow K_\lambda$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

2. Вспомним, что:  $\varepsilon = \sum_{\lambda} P_{\lambda}$ ,  $P_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A})$ ,  $p_{\lambda}(t) = \alpha_{\lambda}(t) \cdot \varphi_{\lambda}(t)$

Пусть  $v \in V$ . Тогда посмотрим на:

$$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot P_{\lambda}v =$$

Заменяем  $P_{\lambda}$  по формуле:

$$= ((\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \alpha_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \varphi_{\lambda}(\mathcal{A}))v =$$

Так как это все многочлены от  $\mathcal{A}$ , то они перестановочны:

$$= (\alpha_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_{\lambda}(\mathcal{A}))v = (\alpha_{\lambda}(\mathcal{A})\varphi_{\lambda}(\mathcal{A}))v = \mathbf{O}$$

Так как  $\varphi_{\lambda}(\mathcal{A})v = \mathbf{O}$  (минимальный многочлен).

Откуда  $P_{\lambda}v \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_{\lambda}$ . Следовательно  $\text{Im } P_{\lambda} \subseteq K_{\lambda}$ .

Теперь докажем, что они совпадают:

Возьму  $\mu \neq \lambda$ , а также  $v \in K_{\lambda}$ . Посмотрим на  $P_{\lambda}v$ :

$$P_{\mu}v = \alpha_{\mu}(\mathcal{A})\varphi_{\mu}(\mathcal{A})v =$$

Мы знаем, что в  $\varphi_{\mu}$  содержится  $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$ . Давайте его вынесем за скобки, получим:

$$\alpha_{\mu}(\mathcal{A})\varphi_{\mu}(\mathcal{A})v = \alpha_{\mu}(\mathcal{A})\beta_{\mu}(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v$$

Так как  $v \in K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$ , то  $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbf{O}$ , откуда  $P_{\mu}v = \mathbf{O}$ .

Откуда получаю, что  $\forall v \in K_{\lambda}$ ,  $v = \varepsilon v = \sum_{\mu} P_{\mu}v = P_{\lambda}v$ . Следовательно  $K_{\lambda} \subseteq \text{Im } P_{\lambda}$ , но мы уже сказали, что  $\text{Im } P_{\lambda} \subseteq K_{\lambda}$ , поэтому  $K_{\lambda} = \text{Im } P_{\lambda}$ .

3.  $B = \mathcal{A}|_{K_{\lambda}} \in \text{End}(K_{\lambda})$

$\forall v \in K_{\lambda} : (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbf{O}$ , откуда получаем, что  $\psi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)}$  - аннулятор  $\mathcal{B}$ .

Хотим понять: минимальный ли это многочлен?

Предположим, что он не минимальный, тогда есть  $\psi_i(t)$  - минимальный многочлен  $\mathcal{B}$ :  $\deg \psi_i < \deg \psi$ . Заметим, что любой аннулятор  $\mathcal{B}$  делится на минимальный многочлен, поэтому  $\psi_i(t) = (t - \lambda)^k$ , причем  $k \leq m(u) - 1$ . Тогда заметим, что  $\psi_1(t) = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)-1}$  - тоже аннулятор  $\mathcal{B}$ .

Если мы покажем, что  $\varphi_1(t) = \psi_1(t) \cdot \varphi_{\lambda}(t)$  - минимальный многочлен  $\mathcal{A}$ , тогда наш искомым минимальный многочлен не был минимальным. Как мы знаем:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\mu} v_{\mu}, \text{ где } v_{\mu} \in \text{Im } P_{\mu} = K_{\mu}$$

Покажем, что  $\varphi_1(t)$  - минимальный многочлен:

$$\varphi_1(\mathcal{A})v = \psi_1(\mathcal{A})\varphi_{\lambda}(\mathcal{A})v = \psi_1(\mathcal{A})\varphi_{\lambda}(\mathcal{A}) \sum_{\mu} v_{\mu} = \varphi_{\lambda}(\mathcal{A})\psi_1(\mathcal{A})v_{\lambda} + \sum_{\mu \neq \lambda} \psi_1(\mathcal{A})\varphi_{\lambda}(\mathcal{A})v_{\mu}$$

Как мы сказали выше:  $\psi_1(t)$  - аннулятор  $B$ , откуда  $\psi_1(\mathcal{A})v_{\lambda} = 0$  (тк  $v_{\lambda} \in K_{\lambda}$ ). Также как мы знаем в  $\varphi_{\lambda}(\mathcal{A})$  содержится  $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\mu)}$ . А  $v_{\mu} \in K_{\mu} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\mu)}$ . То есть наш многочлен и вправду минимальный. То есть мы пришли к противоречию.

Откуда  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  - минимальный многочлен для  $\mathcal{B}$ .

Q.E.D.

**Следствие 1:** Очевидно, что тогда  $1 \leq m(\lambda) \leq \dim(K_\lambda)$ .

**Следствие 2:**  $\mathcal{A}$  - о.п.с  $\Leftrightarrow \varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$ , т.е  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$ , (все корни  $\varphi \in K$ )

**Доказательство:**

$\Rightarrow$  Пусть  $\mathcal{A}$  - о.п.с.. Тогда мы знаем, что:

$$V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч}} V_\lambda, \lambda - \text{корень } \varphi$$

$(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)v = 0 \Rightarrow (t - \lambda)$  - минимальный аннулятор  $v$ , где  $v$  - собственный вектор. Мы знаем, что:

$$\forall v \in V : \exists ! v = \sum_{\lambda} v_{\lambda}$$

Докажем, что  $\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$  - минимальный многочлен:

$$\varphi(\mathcal{A}) \cdot v \left( \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) \right) \sum_{\mu} v_{\mu} = 0$$

Это верно, потому что в это произведение входят аннуляторы собственных подпространств  $(t - \lambda)$ , которые будут занулять каждое из слагаемых. Откуда это аннулятор  $\mathcal{A}$ . А так как корни характеристического и минимального совпадают по теореме о множестве корней характеристического многочлена, а так же потому что  $\lambda$  - случайные числа - получаем, что данный многочлен - минимальный.

$\Leftarrow$  Уже доказывали, смотрите **ЕСЛИ** над теоремой о корневом подпространстве.

Q.E.D.

## 1.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

!!! Не путать разложение жардана с жардановой формой матрицы !!!

**def:**  $B \in \text{End}(V)$  называется нильпотентным, если его минимальный многочлен  $= t^\nu$ , (т.е.  $B^\nu = 0$ ), где  $\nu$  - индекс нильпотентности.

### Теорема (Разложение Жардана)

$\forall A \in \text{End}(V)$ , все корни  $\chi, \varphi \in K$ . Надо доказать, что:

$A = D + B$ , где  $D$  - о.п.с,  $B$  - нильпотентный, причем  $DB = BD$ .

**Доказательство:**

Возьмем оператор  $A$ . У него есть  $\varphi = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$  - минимальный многочлен.

Разложим на операторы разложения единицы:

$$\varepsilon = \sum_{\lambda - \text{корень } \varphi} P_{\lambda}$$

Позже мы этим воспользуемся.

Возьму  $D := \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda}$  — очевидно,  $D$  - о.п.с. (смотрите теоремы о.п.с).

Возьму  $B := A - D$ . Все, что осталось проверить - нильпотентность  $B$ .

Пусть  $\nu = \max(m_{\lambda})$ , где  $\lambda$  - корень  $\varphi$ . Тогда:

$$B^{\nu} = \left( A - \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda} \right)^{\nu} = \left( A \sum_{\lambda} P_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda} \right)^{\nu} = \left( \sum_{\lambda} (A - \lambda \varepsilon) P_{\lambda} \right)^{\nu}$$

Как мы помним  $\forall \mu \neq \lambda : P_{\lambda} \cdot P_{\mu} = 0$ , а также  $P_{\lambda}^2 = P_{\lambda}$ . Поэтому:

$$\left( \sum_{\lambda} (A - \lambda \varepsilon) P_{\lambda} \right)^{\nu} = \sum_{\lambda} (A - \lambda \varepsilon)^{\nu} P_{\lambda}$$

А как мы помним из определения  $P_{\lambda} = a_{\lambda}(A) \varphi_{\lambda}(A)$ . А также, так как  $\nu = \max(m_{\lambda})$ , то внутри каждой скобки есть множитель  $(A - \lambda \varepsilon)^{m(\lambda)}$ . Откуда  $B$  и вправду нильпотентно.

Теперь докажем перестановочность.  $BD = \left( A - \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda} \right) \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda}$

А так как это многочлены от  $A$ , то они перестановочны. Поэтому и получается наша перестановочность

Q.E.D.

**Замечание:**  $AD = DA$ ,  $AB = BA$

### Теорема (единственность разложения Жордана):

$\forall A \in \text{End}(V)$ . Доказать, что разложение Жордана единственно, то есть  $\exists! D, B$ .



**Доказательство:**

Пусть  $\mathcal{A} = \mathcal{D}' + \mathcal{C}$ ,  $D'C = CD'$

$$\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda} + B$$

Нужно доказать, что  $\{\lambda\} = \{\mu\}$ , а также  $\text{Im } Q_{\mu} = K_{\lambda} = \text{Im } P_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)^{m(\lambda)}$

я ее еще не понял :)

**Теорема:**

разложение Жордана  $\mathcal{A} = D + B$ . Тогда  $\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$

**Доказательство:**

По теореме о о.п.с у  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{D}$  совпадает множество корней.

Но нам надо теперь понять что-то про степени.  $\nu = \max(m(\lambda)); \mathcal{B}^{\nu} = \mathcal{O}$ . Тогда:

$$(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{\nu} = (\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{\nu} - \mathcal{B}^{\nu} t^{\nu} = (\mathcal{A} - \mu \varepsilon - \mathcal{B})((\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{\nu-2} \mathcal{B} t + \dots + (\mathcal{B} t)^{\nu-1})$$

Так как  $\mathcal{B}$  - многочлен от  $\mathcal{A}$ , то мы можем так разложить

Возьмем  $\mu$  не корень. Посчитаем определители. С одной стороны это:  $\det(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{\nu} = (\chi_{\mathcal{A}})^{\nu}$  - не зависит от  $t$ . С другой стороны это:

$$\det(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{\nu} = \det(\mathcal{A} - \mu \varepsilon - \mathcal{B}) \det((\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{\nu-2} \mathcal{B} t + \dots + (\mathcal{B} t)^{\nu-1})$$

Тут два многочлена зависящих от  $t$  (оба не нули, иначе  $\mu$  - корень).

Заметим, что слева многочлен нулевой степени  $t$ . Когда произведение двух многочленов от  $t$  дает в произведении многочлен нулевой степени? Когда это многочлены нулевой степени.

Откуда это константы

Давайте посчитаем эти константы. Подставим в первый многочлен  $t = 1$ , а во второй подставим  $t = 0$ . Получим:

$$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu}$$

Откуда  $\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$ . Получили, что в любой точке - не корне, у нас совпадение многочленов. В корнях они оба зануляются, откуда  $\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$ .

Q.E.D.

**Следствие 1:**  $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{D} \Rightarrow \det \mathcal{A} = \det \mathcal{B}$

**Следствие 2:**  $\forall \mathcal{A} : \alpha(\lambda) = \dim K_{\lambda}$

**Доказательство:**

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$  - разложение Жордана.  $\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{B}}$  из теоремы.

$\mathcal{D} = \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda}$ ,  $\mathcal{D}$  - о.п.с.  $\forall$  с.ч  $\lambda : \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$ , а теперь вспомним, что проекторы это с одной стороны проекторы на  $K_{\lambda}$ , а с другой стороны на собственные подпространства  $\mathcal{D} V_{\lambda}$ .

Q.E.D.

## 1.10 Жорданова форма матрицы. Формула Фраббениуса.

Возьмем какое-то  $\lambda$  и рассмотрим сужение. Введем некоторые локальные обозначения:

$$K = K_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda)^{m(\lambda)}, B = (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)|_K, m = m(\lambda), \alpha = \alpha(\lambda), \gamma = \gamma(\lambda).$$

Возьмем  $K_r = \text{Ker}(B^r) = \text{Ker}((\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)^r), r = 1, \dots, m : K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m = K = K_\lambda$ . Заметим, что  $m$  - минимальная степень, когда он зануляется. Докажем, что там не строгое включение:

**Доказательство:**

Пусть существует:  $K_r \equiv K_{r+1}$ .  $\text{Ker} B^r = \text{Ker} B^{r+1}$ . Тогда по теореме о ранге и дефекте:

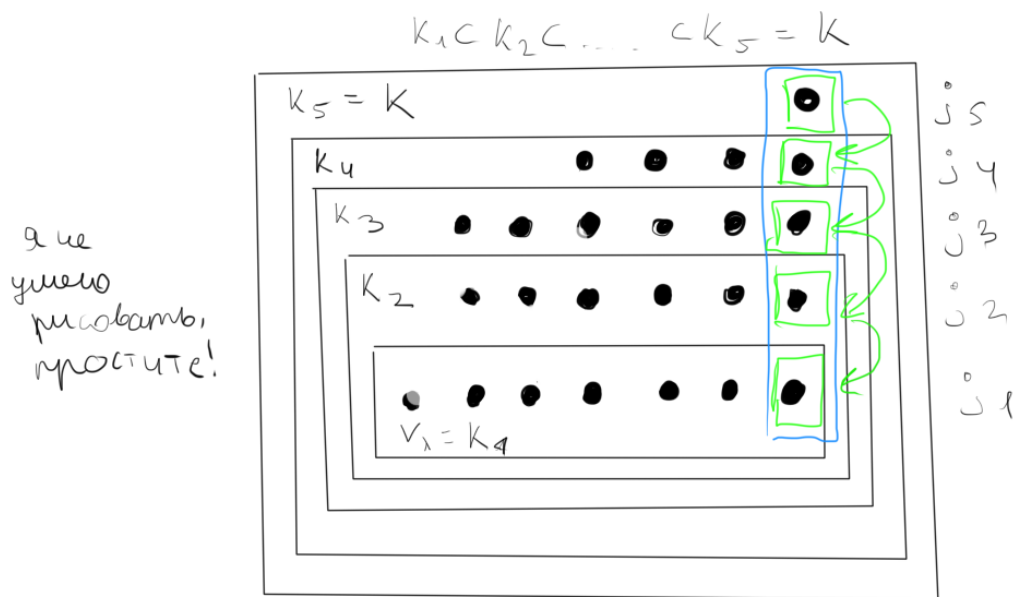
$$\text{rg} B^r = \text{rg} B^{r+1}, \text{Im} B^{r+1} \subseteq \text{Im} B^r \Rightarrow \text{Im} B^{r+1} = \text{Im} B^r$$

Что это значит? Пусть  $X = \text{Im} B^r$ . Тогда  $BX = X, B^2X = X, \dots, B^mX = X$ .

Вспомним, что  $B^m = 0$ , откуда  $X = 0$ , но в таком случае (так как  $r$  от 1 до  $m-1$ , то мы нашли число  $r < m$ , что  $B^r = 0$ . Но такого не может быть, так как  $m$  - минимальная степень, чтобы оператор занулился. Противоречие. Откуда все  $K_i$  различны.

Q.E.D.

Доказали, что включения строгие. А теперь объясним все на рисунке, а позже введем более формальную терминологию:



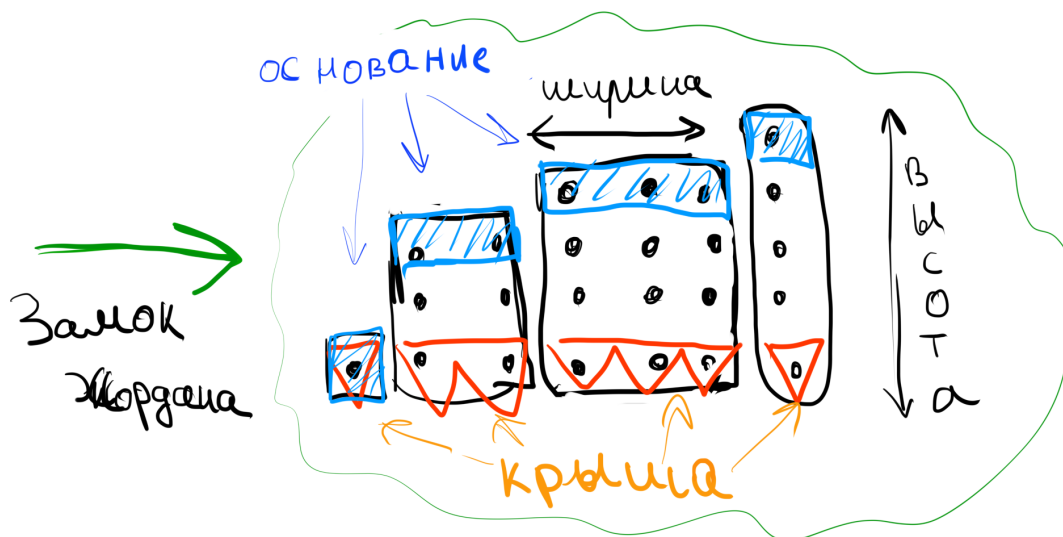
Рассмотрим такое  $K$ , что его ранг 24. И давайте сопоставим точкам на рисунке базисные вектора. Тогда у  $K_1$  будет 6 базисных векторов, у  $K_2$  будет 11 и так далее. Тогда давайте введем новое определение:  $\bar{K}_5$ , такое подпространство, что  $K_4 \oplus \bar{K}_5 = K$ . Возьму оттуда первый базисный вектор. Назову его  $j_5$ . На картинке вы можете это отчетливо видеть. Тогда возьму  $j_4 = B j_5$ ,  $j_3 = B j_4$ ,  $j_2 = B j_3$ ,  $j_1 = B j_2$ . Причем заметим, что в таком случае  $j_i \in K_i$ .

Такие  $j_5, j_4, j_3, j_2, j_1$  мы будем называть циклическим базисом длины 5, а  $j_4, j_3, j_2, j_1$  будут называться присоединяемыми.

Пока упустим, почему эти векторы линейно независимы, это потом докажется. Давайте сузим наш оператор до  $S = \text{span}(j_1, \dots, j_5)$  и попытаемся понять: какая будет матрица оператора. Заметим, что  $K_1 = V_\lambda$ , откуда мы знаем, что  $j_1$  - собственное число  $\lambda$ , то есть  $Aj_1 = \lambda j_1$ .  $j_1 = Bj_2$ , то есть  $Aj_2 = j_1 + \lambda j_2$ . Таким образом получаю, что моя матрица будет:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Такая матрица называется жордановой клеткой размерности 5. Обозначается  $J_5(\lambda)$ . По-другому еще называется блок нижнего уровня.



Давайте теперь возьмем все такие циклические базисы (столбики) одной высоты и объединим их. Получатся башни. Или более формально башня - подпространство, порожденное циклическими базисами одной длины. У башни есть опорные подпространства (основание башни), а так же у каждой башни есть крыша. Они подписаны на рисунках сверху. Башни мы будем обозначать  $\tau_h$ , где  $h$  высота башни. То есть на данном рисунке присутствует башня  $\tau_1, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ , но не присутствует башня  $\tau_2$ .

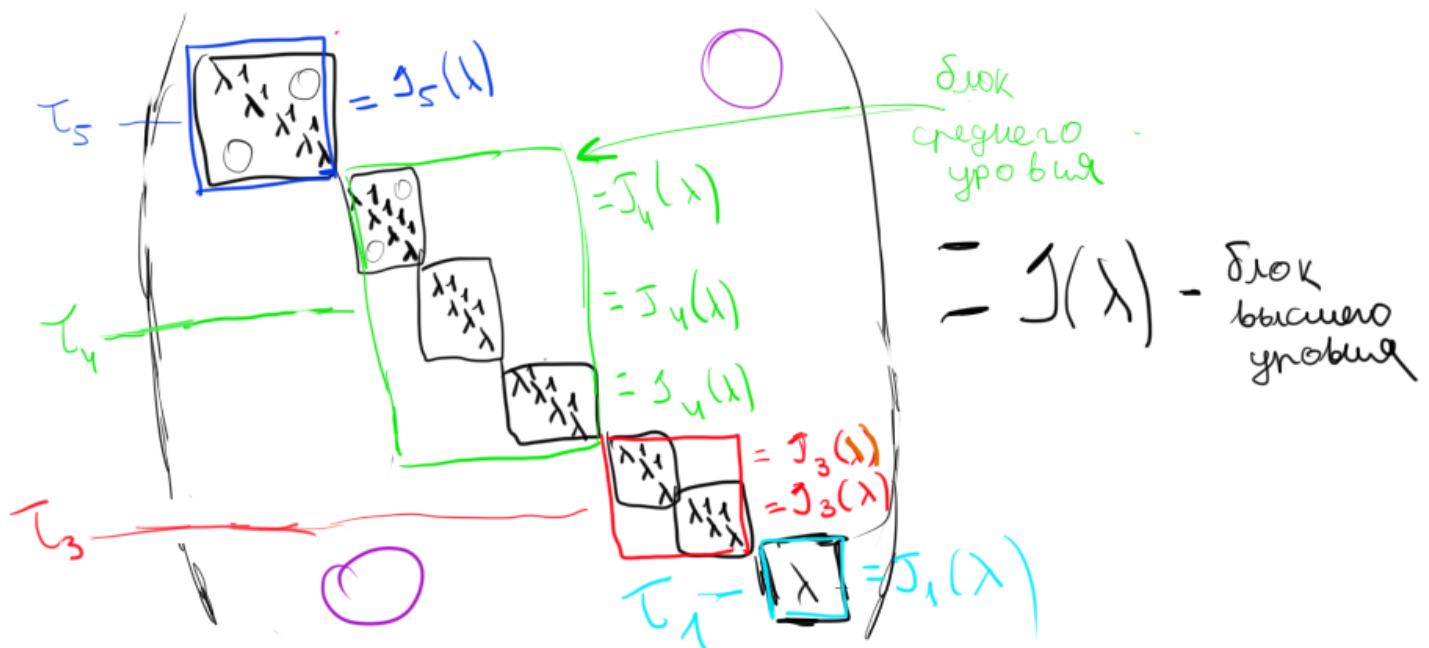
Замок Жордана, возвышающийся над живописными холмами Прованса, хранит немало тайн. Говорят, что в 15 веке в нем жил загадочный алхимик по имени Пьер. Местные жители часто видели странное зеленоватое свечение в окнах замка по ночам...

Так о чем это я? Вся эта конструкция величается ЗАМКОМ ЖОРДАНА. А если у нас  $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$ , то наш замок будет просто полоской, поэтому мы его будем называть деревней Жордана.

Так вот матрица, соответствующая этой  $K_\lambda$ , выраженной через циклические базисы:

$$\begin{pmatrix} J_5(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix} = J(\lambda)$$

Называется, блоком верхнего уровня, причем  $m$  - размер самой большой клетки. При этом, если раскрыть все  $J$ , то получится:



ну я стараюсь рисовать что-то красивое, но у меня руки из ж\*пы, потом перерисую

Теперь мы приходим к матрице в форме Жордана, она состоит блоков верхнего уровня, соответствующих собственным числам

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda) & & & \\ & J(\mu) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\xi) \end{pmatrix}$$

$T = T_{\text{кан}} \rightarrow \text{жорд. базис} = \text{объединение всех циклических базисов.}$

И если  $A$  - матрица  $A$ , то:  $T^{-1}AT = J$ .

**А ТЕПЕРЬ НА ЯЗЫКЕ МАТЕМАТИКИ:**

Введу  $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r \subset \dots \subset K_m = K$ , где  $K_r = \text{Ker } B^r$ .

Введем временное обозначение:

$$z_0 = BK = \text{Im } B$$

$$z_1 = BK + K_1$$

$$\vdots$$

$$z_r = BK + K_r$$

$$\vdots$$

$$z_m = BK + K_m = K$$

Заметим, что в таком случае:  $z_0 \subseteq z_1 \subseteq \dots \subseteq z_m$ , а также  $z_{r+1} = z_r \oplus \overline{K}_{r+1}$ , где  $\overline{K}_r$  - **опорное подпространство** - отличие между  $K_r$  и  $K_{r-1}$  ( $K_i \oplus \overline{K}_{i+1} = K_{i+1}$ ). Тогда заметим вот такую формулу:

$$K = z_m = BK + K_m = z_{m-1} \oplus \overline{K}_m = BK \oplus \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m$$

Прямую сумму  $K_\lambda$  называют **прямой суммой опорных подпространств**.

**Теорема:**

$$\forall r : 1 \leq r \leq m-1 \text{ будет выполнено: } B^r K = B^{r+1} K \oplus B^r K_{r+1} \oplus B^r K_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r K_m$$

**Доказательство:**

Пусть  $x_* \in K$ . Тогда существует и единственно представление в прямой сумме опорных подпространств и  $BK$ :

$$x_* = Bx + x_1 + x_2 + \dots + x_n, \text{ где } x_j \in \overline{K}_j$$

Теперь умножим правую и левую часть на  $B^r$ :

$$B^r x_* = B^{r+1} x + B^r x_1 + \dots + B^r x_r + \dots + B^r x_m$$

Заметим, что в таком случае все  $x_j$ , где  $j \leq r$  уйдут, потому что  $x_j \in \overline{K}_j$ , то есть  $B^j x_j = 0$ .

$$B^r K = B^{r+1} K + B^r K_{r+1} + B^r K_{r+2} + \dots + B^r K_m$$

Осталось проверить дизъюнктность, то есть проверить тривиальность разложения нуля:

$$0 = B^{r+1} x + B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m = B^r (Bx + \dots + x_m)$$

Заметим, что то, что находится внутри скобок находится в  $\text{Ker } B^r \subset z_r = BK \oplus \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_r$ . Откуда существует единственное разложение через эту прямую сумму:

$$Bx + x_{r+1} \dots + x_m = By + x_1 + \dots + x_r$$

Но, как мы помним  $BK$  и  $\overline{K}_j$  - дизъюнкты. То есть  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ . Откуда получаем, что  $Bx$  тоже ноль, откуда разложение нуля - тривиально.

Q.E.D.

**Следствие:**

$$K = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus B\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m \oplus B^2\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus B^{m-1}\overline{K}_{m-1}$$

**Доказательство:**

$$K = BK \oplus \bar{K}_1 \dots \oplus \bar{K}_m$$

$$BK = B^2K \oplus B\bar{K}_1 \dots \oplus B\bar{K}_m$$

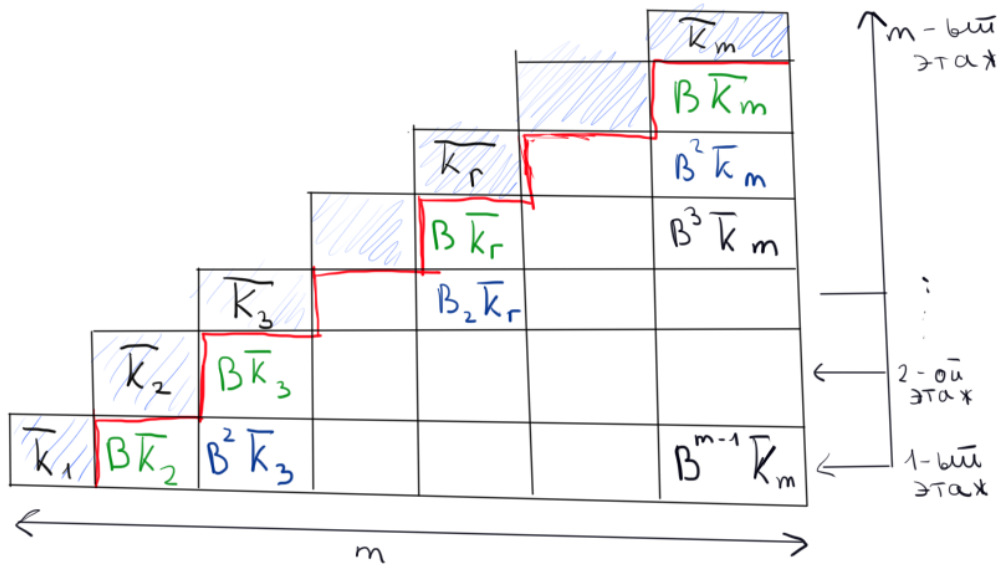
$$\vdots$$

$$B^{m-1}K = B^mK \oplus B^{m-1}\bar{K}_m = B^{m-1}\bar{K}_m$$

Подставьте рекурсивно и получите все, что нам надо.

Q.E.D.

Тогда из этого следствия наше корневое подпространство  $K$  можно представить вот так:



**def:** Если  $K_r \neq \{0\}$ , то тогда прямая сумма:

$$\bar{K}_r \oplus B\bar{K}_r \oplus \dots \oplus B^{r-1}\bar{K}_r = \tau_r - \text{башня} \text{ (та самая из рисунка сверху)}$$

$l$ -ые этаж башни  $B^{r-l}\bar{K}_r$ .

Прямая сумма всех

Покажем, что каждый этаж башни имеет одну и ту же размерность, которая называется шириной башни

### Теорема (о размерности башни)

Все этажи башни высоты  $r$  имеют одну и ту же  $\dim$  (называем ее шириной  $d_r$ )

$$\dim \bar{K}_r = \dim B\bar{K}_r = \dots = B^{r-1}\bar{K}_r = d_r$$

**Доказательство:**

## 2 Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3138-М3139.

Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Не сдавайтесь, изучая лин. ал. Это реально!

Upd: 13.02 слава устал

Upd: 06.03 что за пипяу происходит

