Конспект по Дискретной математике.

Чепелин В.А.

Содержание

1 Информация о курсе

2 Введение в дискретную вероятность.
2.1 Аксиматическое вероятное пространство . . . .

1 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3142.
Преподаватель — Станкевич Андрей Сергеевич.

В данном семестер фокусируются 2 темы: Дискретная теория вероятности и представление слов (токенов) в компьютере.

2 Введение в дискретную вероятность.

2.1 Аксиматическое вероятное пространство .

Пусть у нас есть Ω - **элементарные исходы** и связанная с ним функция $p : \Omega \to [0, 1]$ - **дискретная вероятностная мера (плотность вероятности)** - функция, которая по элементарному исходу возвращает **вероятность**.

А также $\sum\limits_{w \in \Omega} p(w) = 1$, а также $0 \leq p_i \leq 1$ А также мы считаем, что $|\Omega|$ не более чем счетно. Для множеств мощности континуума нам нужна более сложная теория.

Рассмотрим **примеры**:

1. Честная монета:

   $\Omega = \{0, 1\}$. $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$.

2. Нечестная монета или распределение Бернулли:

   $\Omega = \{0, 1\}$. $p(0) = 1 - p(1) = q$.

3. Честная игральная кость:

   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $p(w) = \frac{1}{6}$. $p(w) = \dfrac{1}{52}$

4. Колода карт:

   $\Omega = \{\langle c, r\rangle\, 1 \leq c \leq 4, 1 \leq r \leq 15\}$

5. Геометрическое распределение:

   $\Omega = \mathbb{N}$, $p(i) = \dfrac{1}{2^i}$

Замечание. Не существует равномерного распределения на счетном множестве.

Событие — множество $A \subset \Omega$. $P(A) = \sum\limits_{w \in A} p(w)$. (Иногда используют Pr).

$P(A) = 1$ — достоверное событие.

$P(A) = 0$ — невозможное событие.

Рассмотрим примеры на честной игральной кости:

1. Только четные: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
2. Больше 4-ех: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Замечание: нельзя с равной вероятностью выбрать случайное целое число.

Независимые события — A,B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(\Omega)}$ — независимы (если выполнилось B, то вероятность не поменялась)

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ — вероятность A при условии B — **условная вероятность**.

Произведение вероятностных пространств.

Пусть у нас есть $\Omega_1.p_1$, а также Ω_2, p_2, тогда произведение вероятностных пространств:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$
$$p(\langle w1, w2 \rangle) = p_1(w_1) \cdot p_2(w_2)$$

.

Утв. $\forall A \subset \Omega_1, B \subset \Omega_2$.

$A \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times B$ независимы.

Пусть у нас есть n - событий: $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Тогда обычно **независимость n событий** подразумевает:

1. A_i, A_j - независимы $\forall i, j$
2. $\forall I \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. $P(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \prod\limits_{i \in I} P(A_i)$

Формула полной вероятности

$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$ — **полная система событий**.

Возьму B - какое-то событие.

$P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

Пример: Урна с шариками. Сначала выбираете урну, потом достаете шарик.

Формула Байеса.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$