Конспект по Дискретной математике.

Чепелин В.А.

Содержание

1 Лекция 1.

1.1 Аксиматическое вероятное пространство .

Пусть у нас есть Ω - **элементарные исходы** и связанная с ним функция $p : \Omega \to [0, 1]$ - **дискретная вероятностная мера (плотность вероятности)** - функция, которая по элементарному исходу возвращает **вероятность**.

А также $\sum\limits_{w \in \Omega} p(w) = 1$, а также $0 \le p_i \le 1$ А также мы считаем, что $|\Omega|$ не более чем счетно. Для множеств мощности континуума нам нужна более сложная теория.

Рассмотрим **примеры**:

1. Честная монета:

   $\Omega = \{0, 1\}$. $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$.

2. Нечестная монета или распределение Бернулли:

   $\Omega = \{0, 1\}$. $p(0) = 1 - p(1) = q$.

3. Честная игральная кость:

   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $p(w) = \frac{1}{6}$. $p(w) = \dfrac{1}{52}$

4. Колода карт:

   $\Omega = \{\langle c, r\rangle\, 1 \le c \le 4, 1 \le r \le 15\}$

5. Геометрическое распределение:

   $\Omega = \mathbb{N}$, $p(i) = \dfrac{1}{2^i}$

Замечание. Не существует равномерного распределения на счетном множестве.

Событие — множество $A \subset \Omega$. $P(A) = \sum\limits_{w \in A} p(w)$. (Иногда используют Pr).

$P(A) = 1$ — достоверное событие.

$P(A) = 0$ — невозможное событие.

Рассмотрим примеры на честной игральной кости:

1. Только четные: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
2. Больше 4-ех: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Замечание: нельзя с равной вероятностью выбрать случайное целое число.

Независимые события — A,B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(\Omega)}$ — независимы (если выполнилось B, то вероятность не поменялась)

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ — вероятность A при условии B — **условная вероятность**.

Произведение вероятностных пространств.

Пусть у нас есть $\Omega_1.p_1$, а также Ω_2, p_2, тогда произведение вероятностных пространств:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$
$$p(\langle w1, w2 \rangle) = p_1(w_1) \cdot p_2(w_2)$$

.

Утв. $\forall A \subset \Omega_1, B \subset \Omega_2$.

$A \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times B$ независимы.

Пусть у нас есть n - событий: $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Тогда обычно **независимость n событий** подразумевает:

1. A_i, A_j - независимы $\forall i, j$
2. $\forall I \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. $P(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \prod\limits_{i \in I} P(A_i)$

Формула полной вероятности

$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$ — **полная система событий**.

Возьму B - какое-то событие.

$P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

Пример: Урна с шариками. Сначала выбираете урну, потом достаете шарик.

Формула Байеса.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

2 Лекция 2.

2.1 Случайная величина.

Случайная величина или численная характеристика каждого элементарного исхода — это отображение, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, которое сопоставляет каждому элементарному исходу какое-то число.

Пример:

1. $D = \{1, 2, \dots, 6\}$. Возьмем $\Omega = D^2$. Например, человек бросает два игральных кубика. Тогда, очевидно, $p(\langle i, j \rangle) = \dfrac{1}{36}$. И тогда он задает функцию случайной величины, например, как $\xi(\langle i, j \rangle) = i + j$.
2. Возьмем случайный граф G на n вершинах. $\xi(G) =$ количеству компонент связности. Или $\xi(G) =$ количеству ребер в этом графе.
3. Давайте кидать игральный кубик и сопоставим каждой выпадающей грани число равное количеству точек на этой грани.
   То есть $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, $\xi(i) = i$.
4. $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}; E = \{2, 4, 6\}$. $x_E(w) = \begin{cases} 1, w \in E \\ 0, w \notin E \end{cases}$

Возьмем какие-то Ω, p, ξ.

$[\xi = i] = \{w | \xi(w) = i\} \subset \Omega$ — множество элементарных исходов, случайная величина, которых равна i.

$$P([\xi = i]) = P(\xi = i) = f_\xi(i) = \sum_{w \in [\xi = i]} p(w)$$

Такая: $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — **дискретная плотность вероятности ξ**.

Немного поменяем и получим $[\xi \le i] = \{w | \xi(w) \le i\} \subset \Omega$.

$$P([\xi \le i]) = P(\xi \le i) = F_\xi(i)$$

А вот такая $F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — **функция распределения**.

Дальше А.С. использует 2 вида обозначений:

1. E_ξ 2. $E(\xi)$ — не боимся, это одно и то же.

2.2 Мат. ожидание.

Математическое ожидание — среднее значение случайной величины.

$E_\xi = \sum\limits_w p(w)\xi(w) = \sum\limits_i i \cdot P(\xi = i)$.

Примеры:

1. Посчитаем $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}, \xi = id$, $E_\xi = \dfrac{21}{6} = 3.5$.

Теорема (линейность мат ожидания)

$$E\lambda_\xi = \lambda E_\xi \quad E_{(\xi+\eta)} = E_\xi + E_\eta$$

Доказательство:

$$E\lambda_\xi = \sum_w p(w) \cdot \lambda\xi(w) = \lambda \sum_w p(w)\xi(w) = \lambda E_\xi$$

$$E(\xi + \eta) = \sum_w p(w)(\xi(w) + \eta(w)) = \sum_w p(w)\xi(w) + \sum_w p(w)\eta(w) = E(\xi) + E(\eta)$$

Q.E.D.

МАТ. ОЖИДАНИЕ ВСЕГДА ЛИНЕЙНО!!!

2.3 Незав. случайные величины

ξ, η - независимы, если $[\xi = a], [\eta = b]$ — независимы $\forall a, b$.

Эквивалентное утверждение — $[\xi \le a], [\eta \le b]$ — независимы $\forall a, b$.

Теорема (о мультипликативности мат. ожидания)

ξ, η — независимы $\Rightarrow E(\xi \cdot \eta) = E_\xi \cdot E_\eta$.

Доказательство:

$$E_{(\xi\cdot\eta)} = \sum_a aP(\xi, \eta = a) = \sum_a a \sum_{\forall i,j:\, i\cdot j = a\, i\in R_\xi, j \in R_\eta} P(\xi = i, \eta = j) =$$

$$= \sum_a \sum_i \sum_j aP(\xi = i)P(\eta = j) = \sum_i iP(\xi = i) \cdot \sum_j jP(\eta = j) = E_\eta \cdot E_\xi$$

Q.E.D.

2.4 Дисперсия случайной величины.

$D_\xi = Var(\xi)$ — **дисперсия** случайной величины.

$$D_\xi = E((\xi - E_\xi)^2) = E_{\xi^2} - (E_\xi)^2$$

Теорема (свойства дисперсии). Если ξ, η - независимы:

$$D_{c\eta} = c^2 D_\eta \quad D_{\xi+\eta} = D_\xi + D_\eta$$

Доказательство тривиально из линейности мат. ожидания

3 Лекция 3.

3.1 Ковариация

$$Cov(\xi, \eta) = E_{\xi\eta} - E_{\xi}E_{\eta}$$

Ковариация или **корреляционный** момент показывает на сколько зависимы случайные величины это мера зависимости двух случайных величин.

3.2 Корреляция

$$Corr(\xi, \eta) = \frac{E_{\xi\eta} - E_{\xi}E_{\eta}}{\sqrt{D_{\xi} \cdot D_{\eta}}} = \frac{Cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D_{\xi} \cdot D_{\eta}}}$$

Корреляция - статистическая взаимосвязь двух случайных величин.

Теорема (об ограниченности корреляции)

$$-1 \leq Cor(\xi, \eta) \leq 1$$

Доказательство:

Возьму $\alpha = \xi - \lambda\eta$:

$$D\alpha = D(\alpha) = E\xi^2 - 2\lambda E_{\xi\eta} + E\eta^2 - (E\xi)^2 + 2\lambda E_{\xi}E_{\lambda} - \lambda^2(E_{\eta})^2 \geq 0$$

$$D\xi + w\lambda Cov(\xi, \eta) + \lambda^2 D\xi \geq 0$$

Откуда, если рассматривать это, как уравнение относительно λ, то $D \leq 0$, то есть:

$$4Cov(\xi, \eta) - 4D_{\eta}D_{\xi} \leq 0$$

А если присмотреться, то это и есть то, что нам надо.

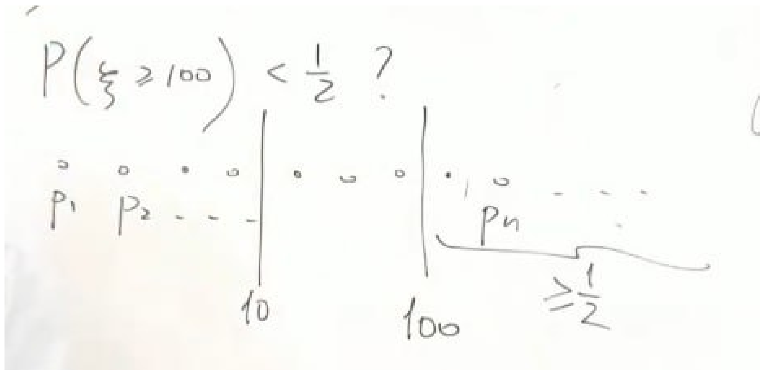
Q.E.D.

3.3 Хвостовые неравенства

Рассмотрим азартную игру. ~~не одобряем, не играем.~~

Проводится случайный эксперимент, смотрится значение ξ. Если оно получилось 100 или больше, то мы платим 100 рублей, а иначе наш друг платит нам 100 рублей. Мы знаем $E\xi = 10, \xi \geq 0$.

Хотим оценить $P(\xi \leq 100)$:



Давайте посмотрим, является ли наша вероятность меньше $\frac{1}{2}$. Тогда всё, что правее 100 имеет вероятность выпадения $\geq \frac{1}{2}$. Все левое оценивается нулем, откуда мат ожидание хотя бы 50. Такого быть не может. В общем случае:

Теорема (Неравенство Маркова)

$$\xi \not\equiv 0, \xi \geq 0 : P(\xi \geq a \cdot E_\xi) \leq \frac{1}{a}$$

Доказательство:

$$E_\xi = \sum_v v \cdot P(\xi = v) = \sum_{v \leq a \cdot E\xi} vP(\xi = v) + \sum_{v \geq a \cdot E\xi} v(P(\xi = v)) \geq aE\xi \cdot P(\xi \geq a \cdot E\xi)$$

Q.E.D.

Теорема (Неравенство Чебышева)

$$P(|\xi - E\xi| \geq a^2\sqrt{D\xi}) \leq \frac{1}{a^2}$$

Доказательство:

Используем неравентсво Маркова для оценки дисперсии:

$$D_\xi = E(\xi - E\xi)^2 \qquad \eta = (\xi - E\xi)^2$$

Возьму и подставлю неравенство Маркова для η:

$$P((\xi - E\xi)^2 \geq a^2 D\xi) \leq \frac{1}{a^2}$$

$$P(|\xi - E\xi| \geq a^2\sqrt{D\xi}) \leq \frac{1}{a^2}$$

Q.E.D.

Переобозначим $\sqrt{(D\xi)} = \sigma_\xi$ — **среднеквадратическое отклонение**.

Так же неравенство Чебышева удобно записывать по-другому:

$$P(|\xi - E_\xi| \geq c) \leq \frac{D\xi}{c^2}$$

Нечестная монета. Вот вам дали домашку, вместе с вопросом $p > \frac{1}{2}$ или $p < \frac{1}{2}$. Что вы можете делать? Только кидать ее, но при этом бесконечное количество раз вы не кинете, у вас дедлайн домашки через час.

Пусть мы бросили n раз. Выпало c единиц и $n - c$ нулей. Пусть $c \leq \frac{n}{2}$:

$$P(\xi = c) \leq P(\xi \leq c) \leq P(|\xi - pn| \geq pn - c) \leq P(|\xi - pn| \geq \frac{n}{2}c) \leq \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{2} - c\right)^2}$$

Что это концептуально значит? На самом деле то, это дает нам оценку на распределение. Зачем? Чтобы **СДАТЬ** домашку.

Теорема (Граница Чернова)

$$P(|\xi - \mu| \geq \delta\mu) \leq e^{-\mu\frac{\delta^2}{3}}$$

где $\mu = np$

todo: тут немного ненаписано про μ, будет дополнено после очной лекции

4 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3142.
Преподаватель — Станкевич Андрей Сергеевич.

В данном семестер фокусируются 2 темы: Дискретная теория вероятности и представление слов (токенов) в компьютере.