Конспект по Дискретной математике.

Чепелин В.А.

Содержание

1 Лекция 1.

1.1 Аксиоматическое вероятное пространство.

Пусть у нас есть Ω - **элементарные исходы** и связанная с ним функция $p : \Omega \to [0, 1]$ - **дискретная вероятностная мера (плотность вероятности)** - функция, которая по элементарному исходу возвращает **вероятность**.

А также $\sum\limits_{w \in \Omega} p(w) = 1$, а также $0 \le p_i \le 1$ А также мы считаем, что $|\Omega|$ не более чем счетно. Для множеств мощности континуума нам нужна более сложная теория.

Рассмотрим **примеры**:

1. Честная монета:

   $\Omega = \{0, 1\}$. $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$.

2. Нечестная монета или распределение Бернулли:

   $\Omega = \{0, 1\}$. $p(0) = 1 - p(1) = q$.

3. Честная игральная кость:

   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $p(w) = \frac{1}{6}$. $p(w) = \dfrac{1}{52}$

4. Колода карт:

   $\Omega = \{\langle c, r\rangle\ 1 \le c \le 4, 1 \le r \le 15\}$

5. Геометрическое распределение:

   $\Omega = \mathbb{N}$, $p(i) = \dfrac{1}{2^i}$

Замечание. Не существует равномерного распределения на счетном множестве.

Событие — множество $A \subset \Omega$. $P(A) = \sum\limits_{w \in A} p(w)$. (Иногда используют Pr).

$P(A) = 1$ — достоверное событие.

$P(A) = 0$ — невозможное событие.

Рассмотрим примеры на честной игральной кости:

1. Только четные: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
2. Больше 4-ех: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Замечание: нельзя с равной вероятностью выбрать случайное целое число.

Независимые события — A,B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(\Omega)}$ — независимы (если выполнилось B, то вероятность не поменялась)

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ — вероятность A при условии B — **условная вероятность**.

Произведение вероятностных пространств.

Пусть у нас есть $\Omega_1.p_1$, а также Ω_2, p_2, тогда произведение вероятностных пространств:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$
$$p(\langle w1, w2 \rangle) = p_1(w_1) \cdot p_2(w_2)$$

Утв. $\forall A \subset \Omega_1, B \subset \Omega_2$.

$A \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times B$ независимы.

Пусть у нас есть n событий: $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Тогда обычно **независимость n событий** подразумевает:

1. A_i, A_j - независимы $\forall i, j, \quad i \neq j$
2. $\forall I \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$: $P(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) = \prod\limits_{i \in I} P(A_i)$

Формула полной вероятности

$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$ — **полная система событий**.

Возьму B - какое-то событие.

$P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

Пример: урна с шариками. Сначала выбираете урну, потом достаете шарик.

Формула Байеса.

$P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$

2 Лекция 2.

2.1 Случайная величина.

Случайная величина или численная характеристика каждого элементарного исхода — это отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, которое сопоставляет каждому элементарному исходу какое-то число.
Пример:

1. $D = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Возьмем $\Omega = D^2$. Например, человек бросает два игральных кубика. Тогда, очевидно, $p(\langle i, j\rangle) = \dfrac{1}{36}$. И тогда он задает функцию случайной величины, например, как $\xi(\langle i, j\rangle) = i + j$.
2. Возьмем случайный граф G на n вершинах. $\xi(G) =$ количеству компонент связности. Или $\xi(G) =$ количеству ребер в этом графе.
3. Давайте кидать игральный кубик и сопоставим каждой выпадающей грани число, равное количеству точек на этой грани.
То есть $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\xi(i) = i$.
4. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}; E = \{2, 4, 6\}$. $x_E(w) = \begin{cases} 1, w \in E \\ 0, w \notin E \end{cases}$

Возьмем какие-то Ω, p, ξ:

$[\xi = i] = \{w | \xi(w) = i\} \subset \Omega$ — **множество элементарных исходов**, случайная величина которых равна i.

def: $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — **дискретная плотность вероятности ξ**.

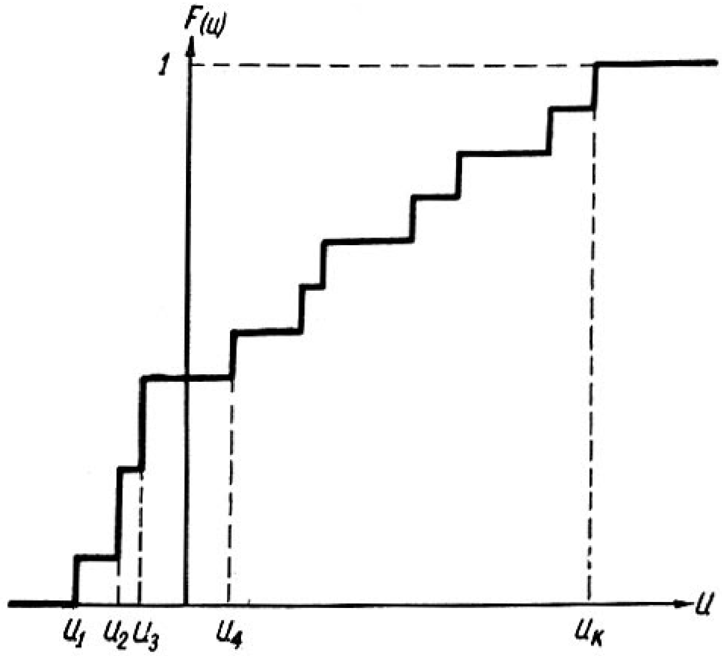
$$P([\xi = i]) = P(\xi = i) = f_\xi(i) = \sum_{w \in [\xi = i]} p(w)$$

Дискретная плотность вероятности — это функция, которая говорит нам, насколько вероятно каждое из этих отдельных значений, которые может принимать случайная величина. Другими словами, она присваивает вероятность каждому возможному исходу.

Немного поменяем и получим $[\xi \le i] = \{w | \xi(w) \le i\} \subset \Omega$.

$$P([\xi \le i]) = P(\xi \le i) = F_\xi(i)$$

def: $F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — **функция распределения**. У дискретной случайной величины функция распределения ступенчатая. Например:



2.2 Мат. ожидание.

<u>**Математическое ожидание**</u> — среднее значение случайной величины.

$E_\xi = \sum\limits_w p(w)\xi(w) = \sum\limits_i i \cdot P(\xi = i)$.

Дальше А.С. использует 3 вида обозначений:

1. E_ξ 2. $E(\xi)$ 3. $E\xi$ — не боимся, это одно и то же.

<u>**Теорема (линейность мат ожидания)**</u>

$$E\lambda\xi = \lambda E_\xi \quad E_{(\xi+\eta)} = E_\xi + E_\eta$$

Доказательство:

$$E\lambda\xi = \sum_w p(w) \cdot \lambda\xi(w) = \lambda \sum_w p(w)\xi(w) = \lambda E_\xi$$

$$E(\xi + \eta) = \sum_w p(w)(\xi(w) + \eta(w)) = \sum_w p(w)\xi(w) + \sum_w p(w)\eta(w) = E(\xi) + E(\eta)$$

Q.E.D.

<u>**МАТ. ОЖИДАНИЕ ВСЕГДА ЛИНЕЙНО!!!**</u>

2.3 Незав. случайные величины

ξ, η - <u>**независимы**</u>, если $[\xi = a], [\eta = b]$ — независимы $\forall a, b$.

Эквивалентное утверждение — $[\xi \le a], [\eta \le b]$ — независимы $\forall a, b$.

Иначе говоря, две случайные величины называются *независимыми*, если по значению одной нельзя сделать выводы о значении другой.

Теорема (о мультипликативности мат. ожидания)

ξ, η — независимы $\Rightarrow E(\xi \cdot \eta) = E_\xi \cdot E_\eta$.

Доказательство:

$$E_{(\xi\cdot\eta)} = \sum_a aP(\xi,\eta = a) = \sum_a a \sum_{\forall i,j:\, i\cdot j = a\, i\in R_\xi, j\in R_\eta} P(\xi = i, \eta = j) =$$

$$= \sum_a \sum_i \sum_j aP(\xi = i)P(\eta = j) = \sum_i iP(\xi = i) \cdot \sum_j jP(\eta = j) = E_\eta \cdot E_\xi$$

Q.E.D.

2.4 Дисперсия случайной величины.

$D_\xi = Var(\xi)$ — **дисперсия** случайной величины.

$$D_\xi = E((\xi - E_\xi)^2) = E_{\xi^2} - (E_\xi)^2$$

Дисперсия случайной величины — это мера того, насколько сильно разбросаны значения этой случайной величины вокруг её математического ожидания (среднего значения). Другими словами, она показывает, насколько "широко"распределение вероятностей случайной величины.

Теорема (свойства дисперсии). Если ξ, η - независимы:

$$D_{c\eta} = c^2 D_\eta \quad D_{\xi+\eta} = D_\xi + D_\eta$$

Доказательство тривиально из линейности мат. ожидания.

3 Лекция 3.

3.1 Ковариация

$$Cov(\xi, \eta) = E_{\xi\eta} - E_{\xi}E_{\eta}$$

Ковариация или **корреляционный момент** показывает на сколько зависимы случайные величины это мера зависимости двух случайных величин.

Если ξ, η - независимые случайные величины

$$Cov(\xi, \eta) = 0$$

:

$$Cov(\xi, \xi) = D_{\xi} = Var_{\xi} \text{ - вариация}$$

3.2 Корреляция

$$Corr(\xi, \eta) = \frac{E_{\xi\eta} - E_{\xi}E_{\eta}}{\sqrt{D_{\xi} \cdot D_{\eta}}} = \frac{Cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D_{\xi} \cdot D_{\eta}}}$$

Корреляция - статистическая взаимосвязь двух случайных величин. Корреляция является **нормированной** версией ковариации, что позволяет сравнивать силу линейной зависимости между различными парами переменных, независимо от их масштаба.

Теорема (об ограниченности корреляции)

$$-1 \leq Cor(\xi, \eta) \leq 1$$

Доказательство:

Возьму $\alpha = \xi - \lambda\eta$:

$$D\alpha = D(\alpha) = E\xi^2 - 2\lambda E_{\xi\eta} + \lambda^2 E\eta^2 - (E\xi)^2 + 2\lambda E_{\xi}E_{\eta} - \lambda^2(E_{\eta})^2 \geq 0$$

$$D\xi - 2\lambda Cov(\xi, \eta) + \lambda^2 D\xi \geq 0$$

Откуда, если рассматривать это, как уравнение относительно λ, то $D \leq 0$, то есть:

$$4Cov(\xi, \eta) - 4D_{\eta}D_{\xi} \leq 0$$

А если присмотреться, то это и есть то, что нам надо.

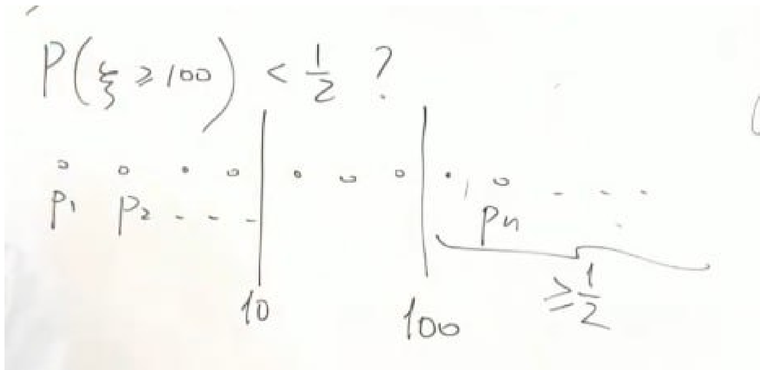
Q.E.D.

3.3 Хвостовые неравенства

Рассмотрим азартную игру. ~~не одобряем, не играем.~~

Проводится случайный эксперимент, смотрится значение ξ. Если оно получилось 100 или больше, то мы платим 100 рублей, а иначе наш друг платит нам 100 рублей. Мы знаем $E\xi = 10, \xi \geq 0$.

Хотим оценить $P(\xi \leq 100)$:



Давайте посмотрим, является ли наша вероятность меньше $\frac{1}{2}$. Тогда всё, что правее 100 имеет вероятность выпадения $\geq \frac{1}{2}$. Все левое оценивается нулем, откуда мат ожидание хотя бы 50. Такого быть не может. В общем случае:

Теорема (Неравенство Маркова)

$$\xi \not\equiv 0, \xi \geq 0 : \forall a \geq 1 : P(\xi \geq a \cdot E\xi) \leq \frac{1}{a}$$

Доказательство:

$$E_\xi = \sum_v v \cdot P(\xi = v) = \sum_{v < a \cdot E\xi} vP(\xi = v) + \sum_{v \geq a \cdot E\xi} vP(\xi = v) \geq \sum_{v \geq a \cdot E\xi} aE\xi P(\xi = v) = aE\xi \cdot P(\xi \geq a \cdot E\xi)$$

Q.E.D.

Теорема (Неравенство Чебышева)

Абсолютная версия и относительная версия ($\alpha = \lambda\sigma$):

$$P(|\xi - E\xi| \geq \alpha) \leq \frac{D\xi}{\alpha^2} \qquad P(|\xi - E\xi| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

Доказательство:
Возьму вот такие величины:

$$D_\xi = E(\xi - E\xi)^2 \qquad \eta = (\xi - E\xi)^2$$

Заметим, что $E\eta = D\xi$. Используем неравенство Маркова для оценки дисперсии:

$$P(\eta \geq c \cdot E\eta) \leq \frac{1}{c}$$

Возьму $c = \dfrac{D_\xi}{\alpha^2}$ и получу искомое.

Q.E.D.

Нечестная монета. Вот вам дали домашку, вместе с вопросом $p > \frac{1}{2}$ или $p < \frac{1}{2}$. Что вы можете делать? Только кидать ее, но при этом бесконечное количество раз вы не кинете, у вас дедлайн домашки через час.

Пусть мы бросили n раз. Выпало c единиц и $n-c$ нулей. Пусть $c \le \frac{n}{2}$:

$$P(\xi = c) \le P(\xi \le c) \le P(|\xi - pn| \ge pn - c) \le P(|\xi - pn| \ge \frac{n}{2} - c) \le \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{2} - c\right)^2}$$

Что это концептуально значит? На самом деле, это дает нам оценку на распределение. Зачем? Чтобы **СДАТЬ** домашку.

Теорема (Граница Чернова)

$$P(\xi \ge (1+\varepsilon)p) \le e^{-\frac{\varepsilon^2}{2+\varepsilon}np} \quad \Leftrightarrow \quad P(\xi \ge (1+\varepsilon)p) \le e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}np}$$

$$e^{-\frac{\varepsilon^2}{3}np} \le \delta \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\varepsilon^2}{3}np \le \ln \delta$$

$$n \ge \frac{3}{p\varepsilon^2} \ln \frac{1}{\delta}$$

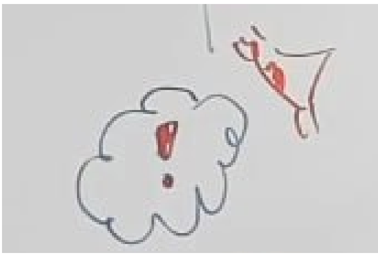
Не знаю, что это концептуально, напишите пж

4 Лекция 4.

4.1 Введение в теорию информации.

информация = - неопределенность - сказал дяденька Шеннон

Для осознания нам поможет рисунок АС:



Есть что-то - неизвестное - облачко. Затем, вы с помощью глаза заглядываете туда, и ваша неопределенность уменьшается. Соответственно вы получили информацию. То есть сначала была неопределенность H_1, потом H_2. $I = H_1 - H_2$, откуда и получается наша формула. У него есть глубокий смысл, но создается вопрос: «И че? И что это за неопределенность?»

Ну наличие глаза мешает, непонятно, фу фу фу. Поэтому хотим ввести что-то более формальное и менее абстрактное.

Пусть у нас есть какой-то случайный эксперимент Ω, с вероятностями $p_1, \dots, p_n$. И вот мы получили информацию что выпало (например орел на монетке).

Случайный источник — черный ящик с красной кнопкой, который показывает номер эл. исхода, когда вы нажимаете на красную кнопку.

Возьмем монетку. Кинули, получили 0 или 1. Теперь возьмем кубик, получим число от 1 до 6. Когда мы кидаем кубик, мы получаем больше информации. И вот Шеннон решил систематизировать все это...

4.2 Энтропия

Пусть у нас есть случайный источник и вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n$. Мы хотим померить численно сколько информации содержится в одном эксперименте:

$$H(p_1, \dots, p_n) : RS \to R^+$$

Энтропия Шеннона(H) - это мера неопределенности или случайности, связанная с случайной переменной. Она измеряет среднее количество информации, необходимое для описания результата случайной переменной. Иными словами, энтропия показывает, насколько непредсказуемым является источник информации.

Возьму пример $p_i = \dfrac{1}{n}$. Введем новое обозначение:

$$h(n) = H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

Очевидно, что $h(n+1) > h(n)$.

Теперь рассмотрим вероятностное пространство и источник на нем:

$$\Omega = \{(1,1),(1,1),\dots,(1,m_1),(2,1),\dots,(k,1),\dots,(k,m_k)\}$$

И давайте теперь каждому причислим какую-то q_{ij}, так, что в сумме 1. $p_i = \sum\limits_{j=1}^{m_i} q_{ij}$. Пусть наш случайный источник сломан и показывает только одно число. Если я возьму сломанный случайный источник от Ω, то мы получим столько же информации сколько и у случайного источника сделанного из p.

Теперь давайте делить это на 2 части. Что вот мы сначала видим первую часть информации, а потом хоба и видим вторую часть информации. И того мы получаем, что когда мы открываем вторую часть мы получим $p_i H(\frac{q_{i1}}{p_i},\dots,\frac{q_{mi}}{p_i})$ информации. Откуда благодаря таким рассуждение получаем свойство, которое называется **аддитивностью энтропии**:

$$H(p_1,\dots,p_k) + \sum_{i=1}^{k} p_i H(\frac{q_{i1}}{p_i},\dots,\frac{q_{mi}}{p_i}) = H(q_{11},\dots,q_{mk})$$

Также для фиксированного n, H непр из $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Теорема.(Формула энтропии Шеннона)

$$H(p_1,\dots,p_n) = -\alpha \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

α отвечает за выбор единицы измерений.

Доказательство:

Лемма 1. $h(n \cdot m) = h(n) + h(m)$.

Доказательство:

Возьмем $k = n, m_i = m, p_= \frac{1}{n}, q_{ij} = \frac{1}{nm}$. Из утверждения сверху это верно!

Q.E.D.

Фиксируем $h(2) = \alpha$. Тогда:

Лемма 2. $h(2^k) = k\alpha$. тривиально из Леммы 1.

Лемма 2,5. $h(n^r) = rh(n)$. тривиально из Леммы 1.

Лемма 3. $h(n) = \alpha \log_2 n$

Доказательство:

Найду i такое, что $2^i \le n^r < 2^{i+1}$, где $r \in \mathbb{N}$.

Из монотонности h следует: $\alpha i \le h(n^r) < \alpha(i+1)$. Поэтому:

$$\alpha i \le rh(n) < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad a\frac{i}{r} \le h(n) \le a\frac{i+1}{r}$$

Также мы знаем, что $i \le r\log_2 n < i + 1$. Получим, что:

$$\alpha\frac{i}{r} \le \alpha log_2 n < \alpha\frac{i+1}{r}$$

То есть $\forall r : |h(n) - \alpha log_2 n| \le \frac{\alpha}{r}$. Откуда, получаем требуемое равенство.

Q.E.D.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Пусть p_i рациональные. Приведем все p к общему знаменателю и пусть теперь $p_i = \frac{a_i}{b_i}$. Возьму $m_i = a_i$, $r_{ij} = \frac{1}{a_i}, q_{ij} = \frac{1}{n}$. Подставим во второе неравенство получим:

$$H\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{b}\right) = H(p_1, p_2, \ldots, p_k) + \sum_{i=1}^{k} p_i H\left(\frac{1}{a_i}, \ldots, \frac{1}{a_i}\right)$$

Что тут происходит? Я разбиваю каждый исход изначальный, на a_i исходов по $\frac{1}{b_i}$. С одной стороны я получаю b исходов по $\frac{1}{b}$. С другой стороны я могу выбрать исход, а потом его разбить. Откуда по аддитивности и получается такая формула. А она в свою очередь уже удобная, так как в ней повторяются значения внутри H, так что можем заменить на h:

$$h(b) = H(p_1, \ldots, p_k) + \sum_{i=1}^{k} p_i h(a_i)$$

Заметим, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, так что левую часть на эту сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i h(b) = H(p_1, \ldots, p_k) + \sum_{i=1}^{k} p_i h(a_i)$$

$$H(p_1, \ldots, p_k) = \sum_{i=1}^{n} p_i (h(b) - h(a_i))$$

$$H(p_1, \ldots, p_k) = \sum_{i=1}^{n} p_i (\alpha log_2 b - \alpha log_2 a_i) = -\alpha \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

Эта формула верна и не для рац. исходя непрерывности (любое не рац. можно зажать с двух сторон сходящимися последовательностями и мы победили)

Q.E.D.

α — бит, единица информации.

Обычно используется логарифм по основанию 2, тогда энтропия измеряется в битах (или "Шеннонах"). Если используется натуральный логарифм (основание e), то энтропия измеряется в натах. Использование логарифма по основанию 10 даёт единицы измерения в децитах (Hartleys). Выбор основания влияет только на масштаб энтропии, а не на её относительные значения.

Энтропия Шеннона имеет широкое применение в различных областях, включая:

- Теория информации: Является фундаментальным понятием для измерения количества информации.
- Сжатие данных: Используется для оценки теоретического предела сжатия данных.
- Криптография: Оценка случайности ключей и стойкости шифров.
- Машинное обучение: В деревьях решений используется для выбора признаков, которые лучше всего разделяют данные.
- Обработка естественного языка (NLP): Оценка неопределенности в языковых моделях.
- Термодинамика: Аналогична термодинамической энтропии, отражает меру беспорядка в системе.

Также есть такие понятия, как взаимная энтропия и условная энтропия. Их определения появятся в конспекте после того, как пройдет неделя со сдачей домашки.

5 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3142.
Преподаватель — Станкевич Андрей Сергеевич.

В данном семестер фокусируются 2 темы: Дискретная теория вероятности и представление слов (токенов) в компьютере.