

Линейная алгебра

Чепелин Вячеслав

Содержание

1	Линейные отображения.	2
1.1	Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений	2
1.2	Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса.	4
1.3	Инварианты линейного отображения.	7
1.4	Собственные числа и собственные векторы лин. оператора	11
1.5	Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.	14
1.6	Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора	21
1.7	Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона . . .	23
2	Информация о курсе	25

1 Линейные отображения.

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений

def: U, V - линейные пространства над одним полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$ называется линейным гомоморфизмом, если:

$$\forall \lambda \in K, \forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$$

Замечание 1: Мы будем писать $\mathcal{A}u$, вместо $\mathcal{A}(u)$.

Замечание 2: $\mathcal{A}u, \mathcal{B}u$ это какие-то числа, поэтому мы можем складывать их и умножать на скаляр.

Замечание 3: $\mathcal{A}\mathbb{O}_U = \mathbb{O}_V$, частный случай $\lambda = 0$

Примеры:

1. \mathbb{O} : это нулевое отображения $\forall u \in U : \mathbb{O}u = 0$
2. P_n - пространство многочленов степени $\leq n$. $\mathcal{A} = \frac{d}{dx}$ — дифференцирование.
3. ε — тождественное отображение. $\varepsilon : U \rightarrow U : \forall u \in U : \varepsilon u = u$.

Введем операции:

1. $\lambda \in K : \mathcal{A}$ — линейное отображение. Введем операцию умножения:

$$\forall u \in U : (\lambda \mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u)$$

2. \mathcal{A}, \mathcal{B} — линейные отображение. Введем операцию сложения:

$$\forall u \in U : (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$

3. $\mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{A} \in L(W, V)$. Введем операцию произведения:

$$\forall u \in U : (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

$\text{Im } \mathcal{A} = \{v \in V : v = \mathcal{A}u | \forall u \in U\}$ — образ линейного пространства.

Замечание: $\text{Im } \mathcal{A}$ — линейное подпространство.

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U | \mathcal{A}u = \mathbb{O}\}$ — ядро линейного отображения.

$\text{rg } \mathcal{A} = \dim \text{Im } \mathcal{A}$ — ранг отображения

$\text{def } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } \mathcal{A}$ — дефект отображения.

Виды отображений:

- сюръекция, если $\text{Im } \mathcal{A} = V \Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V$.
- инъекция, если $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$.
- биекция или изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im } \mathcal{A} = V \\ \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \\ \text{def } \mathcal{A} = 0 \end{cases}$
- *эндоморфизмом* или линейным оператором, когда $U = V$.

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) = \text{End}_K(V)$$

- *автоморфизм* это биекция + эндоморфизм.

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) = \text{Aut}_K(V)$$

Примеры:

1. P_n — пространство многочленов степени не больше n . $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \mathcal{A} : P_n \rightarrow P_n$. не инъекция, не сюръекция, не изоморфизм, эндоморфизм и не автоморфизм
2. $U = K^n, V = K^m, A = (a_{ij})_{m \times n}, a_{ij} \in K, \forall u \in U : \mathcal{A}u = A \cdot u$.

$$\text{Im } \mathcal{A} = \left\{ y \in K^m \mid \begin{matrix} y = \mathcal{A}x \\ \forall x \in K^n \end{matrix} \right\} = \text{span}(A_1, \dots, A_n) — \text{образ матрицы.}$$

$$y = A \cdot x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i$$

Давайте более подробно рассмотрим *отображения*:

1. сюръекция $\Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V = m$.
 $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in K^n : Ax = 0\}$ — общее решение СЛЮУ, *ядро матрицы*.
 $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \text{общего решения} = n - \text{rg } A$.
 $\text{def } \mathcal{A} = n - \text{rg } A$ — *дефект матрицы*.
2. инъекция $\Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow n - \text{rg } A = 0 \Leftrightarrow \text{rg } A = n$.
3. биекция $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{rg } A = n \\ \text{rg } A = m \end{cases} \Leftrightarrow n = m$.
4. эндоморфизм $\Leftrightarrow n = m \Leftrightarrow A_{n \times n}$.
5. автоморфизм $\Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = n, A_{n \times n} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$.

Свойства произведения:

1. \mathcal{A}, \mathcal{B} — изоморф. $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ — изоморфно.
2. $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$.
3. $\forall \lambda \in K : \mathcal{A}(\lambda \mathcal{B}) = (\lambda \mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$.
4. $\mathcal{C} \in L(\Omega, U) : \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

Ассоциативная унитарная алгебра.

Замечание 1. Если $\mathcal{A} \in L(U, V)$ — изоморфно $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ — взаимно обр. отображение.

Замечание 2. Если $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$, а также изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} \in \text{End}(V)$ — обратный лин. оператор к \mathcal{A} .

def: $U_0 \subset U$ - линейное подпространство. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V$ сужение лин. отобра. на лин подпространство.

$\forall u \in U_0 : \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$.

Если \mathcal{A} — изоморфизм, то тогда его сужение на U_0 будет линейным отображением между U_0 и $\text{Im } \mathcal{A}_0$. И это будет тоже изоморфизм.

Теорема (о ранге и дефекте линейного отображения)

$\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$. Доказать $\dim U = \text{def } \mathcal{A} + \text{rg } \mathcal{A}$.

Доказательство:

Пусть $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A} \subset U$. Пусть $U_1 \subset U$, такое, что $U_0 \oplus U_1 = U$ — прямое дополнение. Возьму $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} \in L(U_1, \text{Im } \mathcal{A}_1)$.

$\forall u \in U : \exists! u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in U_0$, $u_1 \in U_1$, по т. об определении прямой суммы. Тогда получаем, что:

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$$

Откуда $\text{Im } \mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{A}_1$, $\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg } \mathcal{A}_1$.

$\text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset U_1$, а также $\text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1$ — инъективна $\Rightarrow \mathcal{A}_1$ изоморфно. Откуда получаем:

$$\dim U = \dim U_1 + \dim U_0 = \text{rg } \mathcal{A} + \text{def } \mathcal{A}$$

Q.E.D.

Следствие. (характеристика автоморфизма)

Если $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$ — условие обратимости линейного оператора.

1.2 Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

Пусть есть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ базис U , а также $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ базис V .

$$u \in U \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^n; v \in V \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\forall u \in U, v = \mathcal{A}u, : v = \mathcal{A} \left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A} \xi_i$$

То есть $\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$.

Теперь заметим, что $\mathcal{A}\xi_i \in V$, откуда:

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j \xleftrightarrow{\text{коорд. изоморфизм}} A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m$$

Назовем $A = (A_1, \dots, A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$ — матрицей линейного отображения \mathcal{A} на базисах ξ, η .

Замечание. Т.к. здесь координатный изоморфизм, то:

$$\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg}(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \text{rg}(A_1, \dots, A_n) = \text{rg } A.$$

def: $\mathcal{A} \in \text{End}(V) : \mathcal{A} : V \rightarrow V$ — лин. оператор.

Зафиксируем здесь один базис $e = e_1, \dots, e_n$. Получу:

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \dots, e_n)\mathcal{A}$$

Тогда $A_{n \times n}$ — матрица линейного оператора.

Заметим, что теперь мы умеем:

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A \in M_{m \times n}$$

Утв. $L(U, V) \cong M_{m \times n}$ координатный изоморфизм линейных отображений

Доказательство:

У нас есть взаимно однозначное соответствие. Проверим линейность:

$$\forall \lambda \in K : \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \xleftrightarrow{\text{проверить}} \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}.$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \cdot \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \cdot \eta_j$$

А откуда уже видно нужное нам соответствие.

Q.E.D.

Утв. $\mathcal{A} \in L(W, V), \mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{AB} \in L(U, V)$. Пусть w - базис W , η - базис V , ξ - базис U . Тогда $\mathcal{AB} \leftrightarrow AB$ в базисах (ξ, η)

Доказательство:

$$\mathcal{AB}\xi_i = \mathcal{A}(\mathcal{B}\xi_i) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^p b_{ki}w_k\right) = \sum_{k=1}^p b_{ki}\mathcal{A}(w_k) = \sum_{k=1}^p b_{ki} \sum_{j=1}^m a_{jk}\eta_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^p a_{jk}b_{ki}\right)\eta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^m (AB)_{ji} \cdot \eta_j$$

Q.E.D.

Следствие: $\mathcal{A} \in L(U, V)$ - изоморфизм, A - матр в $\xi, \eta \Rightarrow A^{-1}$ - матр в (η, ξ) .

Доказательство:

$$A \cdot A^{-1} = \varepsilon_V, \quad A^{-1} \cdot A = \varepsilon_U$$

$$AX = E_\eta, \quad XA = E_\xi$$

В силу того, что \mathcal{A} — изоморфизм:

$$\dim U = \dim V = n, \quad \text{rg} A = n \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

$$X = A^{-1}$$

Q.E.D.

Утверждение: Пусть $\mathcal{A} \in L(U_\varepsilon, V_\eta), v = \mathcal{A}u$. Тогда $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$, где \mathbf{v} и \mathbf{u} — координатные столбцы v и u соответственно.

Доказательство: С одной стороны, v можно разложить по базису V :

$$v = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j \eta_j$$

С другой стороны, v представим как результат отображения:

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} \mathbf{u}_i \right) \eta_j \Rightarrow \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \mathbf{u}_i$$

. Откуда получаем искомое: $v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u}$. Последнее равенство называется *координатной формой записи действия линейного отображения*.

Q.E.D.

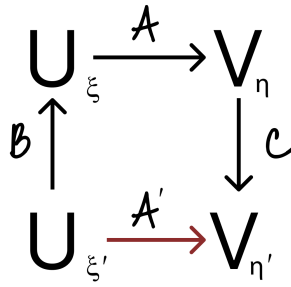
Теорема (формула замены матрицы лин. отобр. при замене базиса)

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

ξ, ξ' базисы U , а η, η' базисы V . Хотим поменять базисы на штрихованные и получить новую матрицу. Тогда ее можно получить так:

$$A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Доказательство:



Воспользуемся данным рисунком, чтобы понять происходящее. Мы хотим найти матрицу A' . Для этого, заметим, что преобразование A' , это преобразование B , потом примененное к нему преобразование A , а после этого примененное к нему преобразование C . То есть:

$$A' = CAB$$

Заметим, что матрица B , это матрица перехода из ξ в ξ' . Это так потому что у нас просто меняется базис (про саму матрицу перехода см. одноименный раздел). Матрица C , это $T_{\eta' \rightarrow \eta}$. Откуда, исходя из двух утверждений сверху:

$$A' = T_{\eta' \rightarrow \eta} A T_{\xi \rightarrow \xi'} \Rightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Q.E.D.

Следствие: $A \in \text{End}(V)$. e, e' базисы V . $A' = T^{-1}AT$, где $T = T_{e \rightarrow e'}$.

def: квадратные матрицы A и B называются подобными, если \exists невырожденная матрица C , такая, что: $B = C^{-1}AC$.

Замечание: матрицы линейного оператора в разных базисах подобны (см. следствие выше).

1.3 Инварианты линейного отображения.

Инвариантность называется некоторое свойство объекта, которое не меняется при определенных действиях и преобразованиях.

A - линейное отображение. Ранг и дефект инварианты относительно выбора базиса.

Пусть $A \in \text{End}(V)$. Пусть e_1, \dots, e_n базис v .

Как мы знаем, $\exists!$ D n -форма, такая что $D(e_1, \dots, e_n) = 1$. Тогда **определитель линейного оператора:**

$$\det A := \det(Ae_1, \dots, Ae_n) = D(Ae_1, \dots, Ae_n)$$

Замечание: $\det A = D(Ae_1, \dots, Ae_n) = D(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det A$ — определение определителя линейного оператора и матрицы соотносятся.

Теорема:

$$\forall A \in \text{End}(V), \det A = \det A.$$

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис V . Тогда:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A = (a_{ij})_{n \times n} \\ \det \mathcal{A} &= D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = D\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in}e_{i_n}\right) = \\ &\xleftrightarrow{\text{тк } D - n \text{ форма}} \det \mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} D(e_1, \dots, e_n) = \det A \end{aligned}$$

Q.E.D.

Замечание: A и B подобные матрицы, то $\det A = \det B$.

Замечание: $\det \mathcal{A}$ инвариант линейного оператора, он не зависит от базиса.

Следствие 1: $\forall n$ - форма f на V :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V : f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис V . $\mathcal{A} \xrightarrow{e} A$. Это значит, что мы берем матрицу линейного оператора в данном базисе.

$$f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) \stackrel{\text{из доказательства теоремы}}{=} \det A f(e_1, \dots, e_n)$$

На самом деле $\alpha = f(e_1, \dots, e_n)$, поэтому:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n : g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

Заметим, что g - полилинейное, тк f полилин. и \mathcal{A} - лин. отобр. Также g - антисим, тк f - антисим. Откуда g - n -форма. Заметим интересный факт:

$$g(e_1, \dots, e_n) = f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det A \cdot f(e_1, \dots, e_n)$$

Откуда:

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot \alpha D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Q.E.D.

Замечание: Мы можем вывести 9-ое свойство определителя по-другому. Пусть $\mathcal{A} = A_{n \times n}$ — линейный оператор умножения. $f = D$, $B_j \in K^n$. Тогда:

$$\det(AB_1, \dots, AB_N) = \det A \cdot \det B$$

Следствие 2: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$

Доказательство:

Пусть e - базис V . Тогда $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A, \mathcal{B} \xleftrightarrow{e} B$. Также $\mathcal{AB} \xleftrightarrow{e} AB$ по свойству. Откуда:

$$\det \mathcal{AB} = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Q.E.D.

Следствие 3: $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Причем $\det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \in \text{Aut}(V) &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \text{изоморфизм} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \dim \text{Ker } \mathcal{A} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \text{rg } \mathcal{A} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A, \det A \neq 0 \\ \text{rg } A = n \end{cases} \end{aligned}$$

Мы знаем, что существует \mathcal{A}^{-1} . А также $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \varepsilon$. Откуда по свойству 3 получаем, что $\det \mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A}$.

Q.E.D.

Следствие 4: $\det(\mathcal{AA}^{-1}) = 1 = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1}$

Вспомним старое определение $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ - *след матрицы*.

Теорема (о tr подобных матриц)

Если A и B подобны, то $\text{tr } A = \text{tr } B$.

Доказательство:

A и B подобны $\Leftrightarrow \exists C : B = C^{-1}AC$. Пусть $C^{-1} = S = (s_{ij})$. Откуда:

$$\text{tr } B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}(AC)_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ij} \cdot a_{jk} \cdot c_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \sum_{i=1}^n c_{ki} s_{ij}$$

Заметим, что $(CS)_{kj} = \delta_{kj}$, где $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$. Так что получаем, что

$$\text{tr } B = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A$$

Q.E.D.

Следствие: $\forall A \in \text{End}(V) \Rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr } A'$, где A и A' матрицы оператора \mathcal{A} в базисе e и e' соответственно.

def: $\mathcal{A} \in \text{End}(V), \text{tr } \mathcal{A} = \text{tr } A$ — след оператора.

Замечание: след оператора инвариантен из следствия выше.

def: Линейное подпространство $L \subset V$ называется инвариантным относительно линейного оператора $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$, если $\forall v \in L, \mathcal{A}v \in L$.

Теорема 1:

$L \subset V$ - линейное подпространство. L - инвариантно относительно $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$. Тогда \exists базис пр-ва V матрица, такой что матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе будет иметь *ступенчатый вид*, при этом размерность $A^1 = k \times k$, $k = \dim L$.

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

Доказательство:

$L = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ - базис L .

Дополним базис L до базиса V : $V = \text{span}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$.

Запишем матрицу A по определению:

$$\forall e_i \in L : \mathcal{A}e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^k a_{ji}e_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Откуда } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

Теорема 2:

$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$, L_i инвариантны отн. \mathcal{A} . $\Rightarrow \exists$ базис пр-ва V , такое что м-ца оператора \mathcal{A} будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

Доказательство:

Пусть базис V по эквив. условию \oplus объединение базисов L_i .

$$L_i = \text{span}(e_1^i, \dots, e_{k_i}^i), \dim L_i = k_i$$

Построим матрицу по определению. Не трудно заметить, что для каждого L_i из доказательства прошлой теоремы, все кроме соотв. строчек для L_i будет зануленно.

Q.E.D.

Замечание: $A_i \leftrightarrow A|_{L_i} \in \text{End}(L_i)$.

Теорема 3.

$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$, L_i инвариантны отн $\mathcal{A} \Rightarrow \text{Im } \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$, где $\mathcal{A}|_{L_i} \in L(L_i, V)$

Доказательство:

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \xLeftrightarrow{\text{из т. об экв. опр. прямой суммы}} \forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i, v_i \in L_i$$

$$\forall v \in V : \text{Im } \mathcal{A} \ni \mathcal{A}v = \mathcal{A} \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}v_i \in \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$

Тогда всё, что нам осталось проверить это то, что наши пространства дизъюнкты. Но, если присмотреться к тому, что у нас написано, то у нас для любого вектора из $\text{Im } \mathcal{A}$ существует лишь одно разложение через $\text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$, что соответствует эквивалентному определению прямой суммы.

Q.E.D.

1.4 Собственные числа и собственные векторы лин. оператора

$\lambda \in K$ называется собственным числом $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$, если $\exists v \in V, v \neq 0. \mathcal{A}v = \lambda v$. Такой v называют собственным вектором собственного числа λ .

$$\lambda \in K : \begin{cases} \mathcal{A}v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda E)v = 0 \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \text{Ker}(A - \lambda E) \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow v$ собственный вектор собственного числа λ .

$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E)$ — собственное подпространство \mathcal{A} соответств. с.ч. λ . Это мн-во всех с.в. V , отвечающим с.ч. λ и нулевой вектор.

$\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$ — геометрическая кратность.

Свойства:

1. V_λ инвариантно относительно $(\mathcal{A} - \lambda E)$.
2. V_λ инвариантно относительно \mathcal{A} .
3. $\gamma(\lambda)$ инвариант относительно базиса.

Условие существования с.ч.:

$\lambda \in K_{\mathcal{A}}$ - с.ч., v - с.в. $\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda E)$ нетривиально $\Leftrightarrow \text{def}(A - \lambda E) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda E) \neq n \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$

Тк определитель линейного оператора инвариантен, то:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

def: $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$ - характеристический многочлен оператора \mathcal{A} .

Т.к. \det оператора инвариантен $\chi(t) = \det(A - tE)$, где A - матрица линейного оператора \mathcal{A} в некотором базисе.

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot t^n + (-1)^{n-1} (tr A t^{n-1}) + \dots + \det A$$

По теореме Виета: $\begin{cases} t_1 + \dots + t_n = tr A \\ t_1 \cdot \dots \cdot t_n = \det A \end{cases}$ Заметим, что λ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in K \\ \chi(\lambda) = 0 \text{ - корень хар. мн.} \end{cases}$

Замечание. Если все корни хар. мн. $\in K \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = tr A \\ \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A \end{cases}$

def: Спектр оператора \mathcal{A} называется множество $\{(\lambda, \alpha(\lambda))\}$, $\alpha(\lambda)$ - кратность λ лин. оператора в хар. уравнении (*алгебраическая кратность*). Спектр это множество пар.

def: Простой спектр — все кратности - единички.

Теорема 1:

$\forall \mathcal{A} \in End(V). \forall \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} : 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

Доказательство:

λ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow Ker(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) = V_\lambda$ не тривиально $\Leftrightarrow \gamma_1 = \dim V_\lambda \geq 1$.

Пусть $\dim V_\lambda = \gamma$, V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow$ по т-ме 1 об инв. подпр. существует V такой, что матрица оператора \mathcal{A} будет иметь ступенчатый вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$$

$$\dim A^1 = \gamma \times \gamma, V = span(e_1, \dots, e_\gamma, e_{\gamma+1}, \dots, e_n)$$

При построении матрицы оператора \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}e_i = \lambda e_i \Leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} - \lambda - \text{ на } i\text{-ой строчке. Немного распишем:}$$

$$\chi(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} A^1 - tE_{\gamma \times \gamma} & * \\ 0 & A^2 - tE_{(n-\gamma) \times (n-\gamma)} \end{vmatrix} \stackrel{\text{по 6-ому св-ву опр}}{=}$$

$= |A^1 - tE||A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \cdot \chi_{A^2}(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A^2}(t) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lambda$ корень $\chi(t)$, причем кратность $\geq \gamma$, т.к λ может оказаться корнем χ_{A^2}

Q.E.D.

Теорема 2:

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ попарно различные с.ч \mathcal{A} , v_1, \dots, v_n соответ. с.в.

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ — лин. независимы.

Доказательство:

Докажем по индукции:

База $m = 1$: $\lambda_1, v_1 \Rightarrow$ лин. незав.

ИП: Пусть верно для m , докажем для $m + 1$:

От противного: Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ попарно различные собственные числа.

v_1, \dots, v_m — линейно независимы по ИП. v_1, \dots, v_m, v_{m+1} — линейно зависимы. Откуда: $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$. С одной стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \lambda_{m+1}v_{m+1} = \lambda_{m+1} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v_{m+1} &= \mathcal{A} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{A}v_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^m (\lambda_{m+1} - \lambda_i) \alpha_i v_i = 0 \end{aligned}$$

Но мы знаем, что v_1, \dots, v_m линейно независимы. Откуда эта линейная комбинация тривиальна, но с другой стороны, она такой быть не может, потому что $\exists \alpha_i \neq 0$, для которого v_i не равен нулю, а так же, исходя из того что искомые с.ч. попарно различны, то $v_{m+1} - v_i \neq 0$. Откуда комбинация нетривиальна.

Противоречие.

Q.E.D.

Следствие: $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i}$, т.е V_{λ_i} дизъюнкты.

Доказательство:

$$0 = v_1 + \dots + v_m, v_i \in V_{\lambda_i}$$

Если в сумме какой-то из векторов не нулевой, то это собственный вектор, а собственные вектора для различных с.ч. линейно независимы. Противоречие. Откуда все вектора в сумме нулевые, откуда подпространства дизъюнкты.

Q.E.D.

Теорема 3:

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i, \quad L_i \text{ инвариантно относительно } \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t).$$

Доказательство:

Смотрим теорему 3 об инв. подпр. Матрица A - блочно-диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \chi(t) = \det(A - tE) \stackrel{\text{по 6-ому свойству опр.}}{=} \prod_{i=1}^m \det(A^i - tE) = \prod_{i=1}^m \chi_{A_i}(t)$$

Q.E.D.

1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ называется **оператором простой структуры** (о.п.с), если \exists базис пространства V такой, что матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе имеет диаг. вид.

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что в таком случае собственные числа оператора \mathcal{A} будут λ_i , а так же собственные вектора этих чисел - соотв. столбики (легко проверить умножением). Отсюда все корни характ. многочлена $\chi \in K \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$.

Теорема:

$\forall A \in \text{End}(V)$, если $\sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n$, то тогда:

$$\mathcal{A} \text{ - о.п.с} \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ - с.ч.} : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Доказательство:

$$\sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n \Leftrightarrow \text{все корни } \chi \in K, \text{ откуда } \mathcal{A} \text{ - о.п.с.}$$

\mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow \exists$ базис V такой, что матрица диагональна \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ - с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч.}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Q.E.D.

Следствие. Если все корни характ. многочлена $\in K$, а также все $\alpha(\lambda) = 1$ (спектр простой), то \mathcal{A} - о.п.с.

def: $A_{n \times n}$ называется диагонализируемой, если она подобна диагональной.

Теорема (критерий диагональности матрицы A)

это перенимается

A подобна диагональной \Leftrightarrow матрица о.п.с \mathcal{A} в нек. базисе

Доказательство:

• \Rightarrow

Пусть A - диагонализируемая \Leftrightarrow подобна диагональной $\Leftrightarrow \exists$ невырожд T : $T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. V - линейное пространство над полем K . $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V .

Пусть A - матрица в базисе e . Тогда $Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i \cdot v = (v_1, \dots, v_n)$ - базис.

Откуда $v_1, \dots, v_n = (e_1, \dots, e_n)T_{e \rightarrow v} \Rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{v} A' = T^{-1}AT = \Lambda$

• \Leftarrow \mathcal{A} о.п.с, A - матрица в некотором базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$. Возьму v_1, \dots, v_n - базис V , где v_i - собственный вектор \mathcal{A} . Заметим, что так как \mathcal{A} о.п.с, то такой базис существует

Теперь давайте возьмем матрицу перехода из $T_{e \rightarrow v}$. Тогда $\mathcal{A} \xrightarrow{v} A' = T^{-1}AT = \Lambda \Rightarrow A$ подобна диагональной

Q.E.D.

Алгоритм поиска диагонального представления матрицы подобной диагональной:

1. найти спектр: если все корни $\chi \in K$, переходим к п2.
2. найти все $\gamma(\lambda)$, если $\forall \lambda$ с.ч $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, то перейти к п3.
3. $T_{\text{кан.} \rightarrow v} = (v_1, \dots, v_n) T^{-1}AT = \Lambda$

def: $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$. По теореме об равносильных условиях прямой суммы:

$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i$, где $v_i \in L_i$. Возьму $P_i \in \text{End}(V)$, такие, что $P_i \cdot v = v_i \in L_i$.

Тогда такие P_i назовем операторами проектирования на подпр-во L_i .

Свойства операторов проектирования:

1. $\text{Im } P_i = L_i, \text{ Ker } P_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$
2. $P_i P_j = \mathbb{O}$
3. $\sum_{i=1}^m P_i = \varepsilon$
4. $P_i^2 = P_i, (P_j^k = P_j, \text{ где } k \in \mathbb{N})$ - идемпотентность

Они все тривиальны

Утверждение. Возьму множество операторов: $\{P_i\}_{i=1}^m$, $P_i \in \text{End}(V)$.

Пусть они удовлетворяют свойствам 2,3 $\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i$. P_i это проектор на L_i .

Доказательство:

Мы знаем, что $P_i P_j = 0$, для $i \neq j$, а также $\sum_{j=1}^m P_j = \varepsilon$. Откуда получаем, что:

$$P_i = P_i \varepsilon = P_i \sum_{j=1}^m P_j = \sum_{j=1}^m P_j P_i = P_i^2$$

А это значит, что $\forall v \in V : v = \varepsilon v = \sum_{i=1}^m P_i v \Rightarrow V = \sum_{i=1}^m \text{Im } P_i$.

Осталось показать единственность разложения нуля:

$$0 = \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m P_i w_i, \text{ где } w_i \in V$$

$$P_j 0 = 0 = P_j \sum_{i=1}^n P_i w_i = \sum_{i=1}^n P_i P_j w_i = P_j w_j = v_j$$

$\Rightarrow v_j = 0, \forall j = 1 \dots m \Rightarrow \text{дизъюнк.} \Rightarrow \bigoplus \text{Im } P_i$

Q.E.D.

Замечание: Из определения проекторов следует, что они существуют и определены однозначно для данной прямой суммы.

Теорема (спектральное разложение о.п.с)

Дан $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$. Тогда выполнено:

1) \mathcal{A} — о.п.с. $\Rightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \lambda P_\lambda$, P_λ — проектор на $V_\lambda \forall \text{ с.ч. } \lambda$.

Такое разложение называется спектральным.

2) $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$, P_i проекторы на L_i . $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j \Rightarrow \mathcal{A}$ о.п.с, λ_i с.ч.

$\text{Im } P_i = L_i = V_\lambda$ (соответственное подпр-во)

Доказательство:

1) \mathcal{A} о.п.с $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч.}} V_\lambda$. Возьму P_λ проекторы на V_λ (исходя из определения — они существуют) Тогда давайте воспользуемся определением:

$$\forall v \in V : \exists ! v = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} v_\lambda, \text{ где } v_\lambda \in V_\lambda : \mathcal{A}v = \mathcal{A}\left(\sum_{\lambda} v_\lambda\right) = \sum_{\lambda} \mathcal{A}v_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda v$$

Откуда уже крайне очевидно получаем, что $\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda$.

2) $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$. Откуда по определению: $\forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i \in L_i = \text{Im } P_i, v_i \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{A}v_i = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j\right)v_i = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j\right)P_i v = v \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j P_i$$

Теперь вспомним свойство, что при умножении двух различных операторов мы получаем 0. Поэтому на самом деле наша сумма равна:

$$v \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j P_i = v \lambda_i P_i P_i = v \lambda_i P_i = \lambda_i v_i$$

Хорошо, теперь вспомним, что изначально это было равно $\mathcal{A}v_i$. поэтому $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$, откуда получаем, что v_i с.в. \mathcal{A} отвечающий с.ч. λ_i .

Откуда получаем, что наше подмножество $V_{\lambda_i} \supseteq \text{Im } P_i$ (потому что любой $v \in \text{Im } P_i$ — случайный вектор)

Вспомним, что: $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i \subseteq \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i}$, а как мы знаем $\bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i} \subseteq V$. Откуда, я получаю, что:

$$\bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i = \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i} \xrightarrow{\text{так как } P_i \subseteq V_{\lambda_i}} \text{Im } P_i = V_{\lambda_i}$$

Q.E.D.

Следствие (спектральное разложение диагоналируемой матрицы)

A диагоналируема $\Leftrightarrow \exists! \{P_i\}_{i=1}^m$, такое, что $P_i \cdot P_j = 0, i \neq j$ и $\sum_{i=1}^m P_i = E, A = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$

Доказательство:

Очевидно следует из теоремы:

A диагоналируема \Leftrightarrow матрица \mathcal{A} о.п.с. Либо можно считать $A = \mathcal{A}$ о.п.с. $\in \text{End}(K^n)$

Q.E.D.

Замечание. Если матрица A подобна диагональной, то у нее есть диагональное представление:

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n), A = T\Lambda T^{-1}$$

A также у такой матрицы есть спектральное разложение:

$$A = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda P_\lambda$$

Просьба не путать эти две формулы!

СЕЙЧАС НАЧНЕТСЯ ЧТО-ТО СТРАШНОЕ (математический анализ.)

def: $A_k = (a_{ij}^k)_{n \times n}$ - последовательность матриц $n \times n$.

Обозначают так: $(A_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность матриц.

Раз это последовательность, то давайте введем на ней вот такой предел:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_k = \forall i, j : a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k$$

Для лучшего понимания этого мира смотрите на приведенный ниже пример:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (1 + \frac{2}{k})^k & \frac{\sqrt[k]{k}}{1/k} \\ \frac{\sin \pi / k}{1/k} & \frac{1 - \cos \pi / k}{1/k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

def: $a_n \in R : \sum_{m=1}^\infty a_m = S \Leftrightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k a_m = S$, где $S_k = \sum_{m=1}^k a_m$ — частичная сумма ряда.

А саму такую конструкцию понятно называют рядом. Теперь давайте немного притронемся к матану:

$\sum_{m=0}^\infty c_m x^m$ - ряды Тейлора - Маклорена.

$x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — их область определения, $|x| < R$ — радиус сходимости, $c_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Причем эти c -шки на самом деле производные. (если интересно см. конспект по мат. анализу первый семестр)

Рассмотрим пример: Давайте разложим e^x , нам это позже понадобится:

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} x^n, |x| < +\infty$$

В таком случае $c_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$.

Пусть $f(x) = \sum_{m=0}^\infty c_m x^m$. А давайте расширим на матрицы :)

def: $A_{n \times n} : f(A) = \sum_{m=0}^\infty c_m A^m$. Причем мы так же считаем частичные суммы и ищем их предел, но теперь просто ищем предел в матрицах.

Можно добавить параметр: $f(At) = \sum_{m=0}^\infty c_m A^m t^m$.

Теорема 1 (функция от диагонализированной матрицы, 1-я формула)

Пусть A — подобна диагональной. А также нам дана $f(x) = \sum_{m=0}^\infty c_m x^m, |x| < r$, где r — радиус сходимости функции f .

Тогда, если \forall с.ч. $|\lambda| < r \Rightarrow \exists f(\lambda)$ и $f(A) = T f(\Lambda) T^{-1}$, где $f(\Lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$

Доказательство:

Упросту $\sum_{m=0}^k c_m A^m$. Мы знаем, что A - подобна диагональной $\Rightarrow A = T \Lambda T^{-1}$. Тогда:

$$A^m = (T \Lambda T^{-1})^m = T \Lambda T^{-1} T \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1} = T \Lambda^m T^{-1}$$

Теперь давайте подставим это в нашу сумму:

$$\sum_{m=0}^k c_m A^m = \sum_{m=0}^k c_m T \Lambda^m T^{-1} = T \sum_{m=0}^k c_m \Lambda^m T^{-1}$$

Теперь вспомним, что Λ^n подобна диагональной, поэтому занесем сумму внутрь матрицы и получим:

$$T \sum_{m=0}^k c_m \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^k c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^k c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} =$$

Теперь вспомним, что \forall с.ч. $|\lambda| < r$, поэтому для них мы можем применить формулу, откуда:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k c_m A^m = \lim_{k \rightarrow \infty} T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^k c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^k c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Q.E.D.

Теорема 2 (функция от диагонализированной матрицы, 2-я формула)

Пусть A — подобна диагональной.

Тогда A имеет спектральное разложение $\sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \lambda P_\lambda$, где P_λ — проекторы. А также нам дана

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad |x| < r.$$

Тогда, если \forall с.ч. $|\lambda| < r$, то $\exists f(A)$, а так же $f(A) = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} f(\lambda) P_\lambda$.

Доказательство:

$$A^m = \left(\sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \right)^m = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum_{\xi} \xi P_\xi$$

А теперь вспомним свойства проекторов. Когда я умножаю два разных проектора, я получаю ноль, откуда:

$$A^m = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum_{\xi} \xi P_\xi = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda$$

Значит: $\sum_{m=0}^k c_m A^m = \sum_{m=0}^k c_m \sum_{\lambda} \lambda^m P_{\lambda} = \sum_{\lambda} P_{\lambda} \sum_{m=0}^k \lambda^m c_m$. Теперь если я возьму предел, то я получу то, что мне нужно, потому что каждая лямбда $< r$, и поэтому я могу вместо них подставить $f(\lambda)$.

Q.E.D.

Экспонента:

А теперь давайте возьмем все $c = 1$, а также вспомним, что мы можем протаскивать с собой параметр. Поэтому у нас получается новая формула:

$f(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k t^m A^m$, а теперь вспомним наше разложение e -шки. А это именно оно и есть! Поэтому получаю:

$$e^{At} = f(At) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k t^m A^m$$

Или:

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} e^{\lambda t} P_{\lambda}$$

Свойства:

1. $(e^{At})' = A e^{At} = e^{At} A$
2. $e^{(A_1 + A_2)t} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$
3. $e^{0t} = E$

Обратная:

$$A - \text{подобна диагональной } \forall \text{ с.ч. } \lambda \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

Свойства:

1. $A^{-1} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda} P(\lambda)$
2. $AA^{-1} = T \Lambda T^{-1} T \Lambda^{-1} T^{-1} = E$
3. $AA^{-1} = (\sum \mu P_{\mu})(\sum \frac{1}{\lambda} P_{\lambda}) = \sum_{\lambda} \lambda \frac{1}{\lambda} P_{\lambda} = E$

Корень:

Если A подобна диагональной и \forall с.ч. $\lambda \geq 0$, то взяв $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ мы можем ввести $\sqrt[m]{A} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$, полагая $\sqrt[m]{\lambda} \geq 0$.

Спектральное представление: $\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda} P_\lambda$.

1.6 Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора

Давайте посмотрим какие линейные операторы мы уже изучили:

Пусть $\mathcal{A} \in \text{End}(V) \xrightarrow{e} A$, $\chi(t)$ — корни многочлена. Он может быть:

- Все корни $\in K$. $\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$
 - \exists базис V из v_λ : $\forall \lambda$: $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) \iff$ диагонализируема.
 - \exists базис V из v_λ : \exists с.ч. λ : $\gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \iff A$ жорданова форма.
- Не все корни $\in K$. В таком случае вещ. V комплексифицируют.

def: V — линейное пространство над \mathbb{R} (вещ. лин. пр-во)

$$\forall x, y \in V \Rightarrow z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad V_{\mathbb{C}} = \{z = x + yi \mid \forall x, y \in V\}$$

Назовем $V_{\mathbb{C}}$ комплексификацией V .

Покажем некоторые **свойства**:

- $0 \in V \leftrightarrow 0 + i0 = 0 \in V_{\mathbb{C}}$ - существование нуля
- $x \in V \leftrightarrow x + i0 = x \in V_{\mathbb{C}}, V \subset V_{\mathbb{C}}$ — говорим, что $V \subseteq V_{\mathbb{C}}$
- $\forall z = x + iy$ существует обратное: $-x + i(-y)$

Заметим, что в таком случае $V_{\mathbb{C}}$ — линейное пространство над полем комплексных чисел, так как тривиально выполняются все 8 аксиом лин. пространства.

Утв. Пусть e_1, \dots, e_n - базис V . Докажем что e_1, \dots, e_n — базис $V_{\mathbb{C}}$.

Доказательство:

Возьмем любой z и докажем, что его можно породить с помощью базиса:

$$z = x + iy = \sum_{j=1}^n x_j e_j + i \sum_{j=1}^n y_j e_j = \sum_{j=1}^n (x_j + iy_j) e_j$$

Откуда e - порождающий базис для $V_{\mathbb{C}}$. Докажем линейную независимость:

Для этого нам надо показать, что любая нулевая комбинация тривиальна:

$$0 = \sum_{j=1}^n (a_j + ib_j) e_j = \sum_{j=1}^n a_j e_j + i \sum_{j=1}^n b_j e_j \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \stackrel{\in \mathbb{R}}{=} 0 \\ \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \stackrel{\in \mathbb{R}}{=} 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall j : \alpha_j = 0 \\ \forall j : \beta_j = 0 \end{cases}$$

Откуда получили линейную независимость.

Q.E.D.

Замечание. Мы знаем, что $V \subset V_{\mathbb{C}}$. $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$, откуда наши пространства должны быть равны? Нет! Это было бы так, если бы не одно НО. V - линейное пространство над \mathbb{R} , а $V_{\mathbb{C}}$ - линейное пространство над \mathbb{C} , поэтому это не правда.

Благодаря верхней теореме мы можем сделать некоторые замечания:

$$x \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, z = x + iy \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$$

def: $z \in V_{\mathbb{C}}, \bar{z} = x - iy$ — сопряженный вектор, $z = x + iy, \quad x, y \in V$

Свойства:

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
2. $\overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \bar{z}$
3. v_1, \dots, v_m — лин. (не)зависимы $\Leftrightarrow \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ лин. (не)зависимы.
4. $rg(v_1 \dots v_m) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$

def: Возьму оператор $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$. $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

Назову данную конструкцию продолжением вещ. лин. оператора \mathcal{A} на $V_{\mathbb{C}}$ вещественного пространства V .

Очевидно, что в таком случае $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$, т.к. \mathcal{A} — линейный оператор.

Утверждение: $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис V (\Rightarrow базис $V_{\mathbb{C}}$ из теоремы сверху).

Тогда, если $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A$, то $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{e} A$

Доказательство:

По определению матричного оператора:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \cdot e_j = \mathcal{A} \cdot e_j + i\mathcal{A}0 = \mathcal{A} \cdot e_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} e_k \iff A_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

1. $\chi_{\mathcal{A}}(t) \equiv \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$ — так как матрицы совпадают.

Замечание:

1) если $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0$ - корень $\chi(t) \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, но не с.ч. \mathcal{A} .

2) если $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ корень $\chi \Rightarrow \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ - тоже корень, причём той же кратности.

$$2. \forall z \in V_{\mathbb{C}} : \overline{A_{\mathbb{C}} z} = A_{\mathbb{C}} \bar{z}.$$

$$\overline{A_{\mathbb{C}} z} = \overline{Ax + iAy} = Ax - iAy = A_{\mathbb{C}} \bar{z}$$

$$3. \lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}, z - \text{с. в.}, \text{ отвечающий } \lambda \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}, \bar{z} \text{ с.в.}, \text{ отвечающий } \bar{\lambda}$$

$$\mathcal{A} \bar{z} = \overline{\mathcal{A} z} = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{z}$$

Вернемся к тому старому разделению на случаи. Заметим, что если в таком случае мы возьмем наш третий случай и комплексифицируем, то для полученного оператора $A_{\mathbb{C}}$ мы получим, что он относится либо к первому варианту, либо ко второму.

1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона

def: $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ - нормализованный многочлен $\psi(t)$ называется аннулятором элемента $x \in V$, если $\psi(\mathcal{A})x = 0$.

А теперь на более понятном. Пусть у нас есть $\psi(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k+1} t^0$. Подставляя в него оператор получу: $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^k + a_1 \mathcal{A}^{k-1} + \dots + a_{k+1} \varepsilon$. И такой оператор будет аннулятором x , если $\psi(\mathcal{A})x = 0$.

Замечание. $\psi(t) \neq 0$, потому что это нормализованный многочлен, его старший коэффициент равен 1.

$\psi(t) = \prod_{\lambda - \text{корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ - так как это многочлен. Здесь $m(\lambda)$ — кратность корня λ . Перепишем на место t матрицу:

$$\psi(\mathcal{A}) = \prod_{\lambda - \text{корень}} (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)^{m(\lambda)}$$

def: Аннулятор элемента $x \in V$ наименьшей степени называется минимальным аннулятором элемента x .

Теорема: (о существовании и единственности минимального аннулятора)

1. $\forall x \in V \exists!$ $\psi(t)$ минимальный аннулятор x .
2. \forall другой аннулятор x : на минимальный аннулятор x .

Доказательство:

1. (a) Пусть $x = 0$, $\psi(t) = 1$, $\psi(\mathcal{A}) = \varepsilon$, $\varepsilon x = \varepsilon 0 = 0$
- (b) Пусть $x \neq 0$. Посмотрю на $x, \mathcal{A}x, \mathcal{A}^2x, \dots, \mathcal{A}^m x$

Причем m такое, что $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^{m-1}x$ - линейно независимы, а $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^m x$ - зависимы. Такой набор собрать удастся, при этом $m \leq n$.

$$\Rightarrow \exists! c_0, c_1, \dots, c_{m-1} \in k, \text{ такие, что } \mathcal{A}^m x = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j x$$

Откуда получаем, что $(\mathcal{A}^m - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j)x = 0$. Получили какой-то оператор, который при умножении на x дает 0. А это значит, аннулятор существует, причём аннулятор выше минимальный по построению.

2. Пусть наш минимальный аннулятор это $\psi(t)$, а $\psi_1(t)$ другой аннулятор x .

Посмотрим на результат деления:

$$\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t) \text{ (остаток), } \deg r < \deg \psi$$

Это значит, что подставляя в него \mathcal{A} и умножая на x должно быть верно:

$$\psi_1(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})x + r(\mathcal{A})x$$

Но $\psi_1(\mathcal{A})x = 0$, $\psi(\mathcal{A}) = 0$, поэтому $r(\mathcal{A})x = 0$, но что это значит?

Как мы знаем $\psi(t)$ - минимальный аннулятор. Так как $r(\mathcal{A})x = 0$, то если $r(t) \neq 0$, получаем, что это аннулятор, а тогда мы выбрали не минимальный аннулятор, т.к. $\deg \psi > \deg r$. Противоречие!

Откуда получаю, что $r \equiv 0 \Rightarrow \psi_1$ делится на минимальный аннулятор ψ .

Q.E.D.

def: Нормализованный многочлен $\varphi(t)$ называется аннулятором оператора \mathcal{A} , если:

$$\varphi(\mathcal{A}) \equiv 0, \text{ (т.е. } \forall v \in V, \varphi(\mathcal{A})v = 0 \text{)}$$

def: минимальным многочленом оператора \mathcal{A} называется аннулятор \mathcal{A} наименьшей степени.

Теорема: (о существовании и единственности миним. многочлена оператора)

1. $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V) : \exists !$ - минимальный многочлен.
2. \forall аннул. оператора \mathcal{A} делится на миним. мн-н \mathcal{A}

Доказательство:

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V . Построим $\psi_j(t)$ - минимальный аннулятор e_j

Возьму $\varphi(t) = \text{Н.О.К. } \{\psi_j\}_{j=1}^n$, где $j = 1, \dots, n$. Покажем, что φ аннулятор \mathcal{A} :

Как мы знаем $\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$. Поэтому:

$$\varphi(\mathcal{A})v = \sum_{j=1}^n v_j \cdot \varphi(\mathcal{A}) \cdot e_j = \sum_{j=1}^n v_j \cdot (\psi_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{A})) = 0 \iff \varphi(\mathcal{A}) \equiv 0$$

То есть такой многочлен существует. Теперь докажем единственность:

Пусть $\varphi_a(t)$ другой аннулятор \mathcal{A} : Тогда $\forall j = 1, \dots, n : \varphi_a(\mathcal{A})e_j = 0$.

Тогда φ_a аннулятор элемента e_j для любого j .

По теореме о линейном операторе мы знаем, что φ_a делится на ψ_j для любого j , то есть $\varphi_a : \varphi$.

Откуда я получаю, что φ_a степени хотя бы такой же, что φ . То есть φ_a хотя бы Н.О.К.

А так как мы предполагаем, что это второй минимальный многочлен, то его степень такая же как и у φ , то есть Н.О.К. То есть они равны.

Q.E.D.

2 Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3138-М3139.

Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Не сдавайтесь, изучая лин. ал. Это реально! Upd: 13.02 слава устал

