

Дискретная математика. Третий семестр

Автор: Вячеслав Чепелин

Содержание

1. Лекция 1	3
1.1. Основные определения для неориентированных графов	3
1.2. Основные определения для ориентированных графов	4
1.3. Связность и пути.	4
2. Лекция 2	6
2.1. Деревья	6
2.2. Коды Прюфера	8
3. Эйлеровы и Гамильтоновы циклы и пути	9
3.1. Эйлеровы пути и циклы	9
3.2. Гамильтоновы пути и циклы	9
4. Лекция 4.	12
4.1. Планарные графы	12
5. Лекция 5.	14
5.1. Раскраски	14
6. Информация о курсе	15

1. Лекция 1

1.1. Основные определения для неориентированных графов

Определение. Неориентированный граф

Неориентированный граф — пара (V, E) , где V — множество вершин, а $E \subset (V \times V / \sim) \setminus \{(u, u)\}$ — множество рёбер, где отношение эквивалентности задаётся как $(u, v) \sim (v, u)$.

Определение. Путь

Путь — последовательность $P = u_0 e_1 u_1 e_2 \dots e_k u_k$, где $e_i = u_{i-1} u_i$.

Число $k = \text{len}(P) = |P|$ называется **длиной пути**.

Простой путь — путь, посещающий каждую вершину не более одного раза.

Рёберно-простой путь — путь, посещающий каждое ребро не более одного раза.

Циклический путь — путь, у которого $u_0 = u_k$.

Рассмотрим замкнутый путь (циклический маршрут) в графе:

$$P = u_0 e_1 u_1 e_2 u_2 \dots u_{k-1} e_k u_k,$$

где $u_k = u_0$ (путь начинается и заканчивается в одной вершине).

Циклический сдвиг пути: для любого $0 \leq i \leq k$ определим сдвинутый путь:

$$Q_i = u_i e_{\{i+1\}} u_{\{i+1\}} \dots e_k u_k e_1 u_1 \dots e_i u_i.$$

Отражение (обратный обход) пути P задаётся как:

$$P^{\{-1\}} = u_k e_k u_{\{k-1\}} \dots e_1 u_0.$$

Два пути P и P' называются **эквивалентными** ($P \sim P'$), если:

- P' является циклическим сдвигом P , или
- P' является отражением P (с точностью до циклического сдвига).

Определение. Цикл

Циклом называется класс эквивалентности замкнутых путей относительно \sim , то есть:

$$\text{Цикл} = [P]_{\sim} = \{Q \mid Q \sim P\}.$$

Дополнительно требуется, чтобы в цикле не было повторного прохождения одного и того же ребра в противоположных направлениях.

Граф без циклов называется **ациклическим**.

Обозначение: $u \rightsquigarrow v$ означает, что вершины u и v соединены путём.

Теорема.

В неориентированном графе отношение «связаны путём» является отношением эквивалентности.

Классы эквивалентности этого отношения называются **компонентами связности**.

Вершины u и v называются **рёберно двусвязными**, если существуют два рёберно непересекающихся пути из u в v .

Теорема.

Отношение рёберной двусвязности является отношением эквивалентности.

Доказательство:

1. Рефлексивность: возьмём два одинаковых пути из вершины в себя. Они не пересекаются по рёбрам. (Довольно забавно об этом думать)
2. Симметричность: очевидно.
3. Транзитивность: пусть u двусвязана с v , а v — с w . Рассмотрим p_1 и p_2 — два пути из u в v . Возьмём w и будем из неё идти в сторону v по путям q_1 и q_2 .
 1. Если дошли без пересечения с p_1 или p_2 — победа.
 2. Если по одному пути пересеклись с p_1 , а по другому — с p_2 — победа.
 3. Если пришли на один и тот же путь, то от одного из q_1 и q_2 пойдём в сторону u , а от другого — в сторону v . Из второго пойдём из v в u по второму пути между ними. Победа.

Советуем порисовать для понимания. Тут вполне тривиальное доказательство.

Q.E.D.

Два ребра ab и cd являются **вершинно-двусвязными**, если существует два вершинно-непересекающихся пути, соединяющих их концы.

Точкой сочленения называется вершина, принадлежащая сразу двум классам вершинной двусвязности.

Мост — ребро, концы которого не являются рёберно двусвязными.

Лемма о рукопожатиях.

Сумма степеней вершин равна удвоенному количеству вершин

1.2. Основные определения для ориентированных графов

Ориентированный граф — пара (V, E) , где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество дуг.

Определения пути, циклического пути ($u_0 = u_k$) и цикла (класс эквивалентности циклических путей относительно циклического сдвига) аналогичны неориентированному случаю.

1.3. Связность и пути.**Теорема о количестве путей или о матрице смежности..**

Возьмем матрицу смежности. Она обозначается A_G и на позиции $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{есть ребро } ij \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

d_{ijk} - число путей из i в j , содержащее k ребер. Тогда:

$$d_{ijk} = (A_G)^k[i][j]$$

Доказательство:

Докажем по индукции:

1) База: $k = 0$ $A_G^0 = I$ - работает.

$k = 1$ $A_G^1 = A_G$ - работает.

2) ИП: Хотим доказать, что:

$$D_n = A_j^n$$

Пусть выполнено для $n - 1$, докажем, что выполнено для n . Имею:

$$A_G^k = A_G^{k-1} A_G$$

Переобозначим $C = A_G^K, B = A_G^{k-1}, A = A_G$. Тогда:

$$c[i][j] = \sum_t b[i][t] a[t][j]$$

А теперь концептуально подумаем над этой формулой.

TODO

Q.E.D.

2. Лекция 2

2.1. Деревья

Определение. Дерево

Дерево — связный неориентированный граф без циклов

Лемма.

G — дерево, содержащее хотя бы 2 вершины. Тогда \exists вершина степени 1.

Ее можно усилить до того, что существуют 2 таких вершины. Такие вершины называются **висячими** или **листами**.

Теорема.

G — граф, содержит n вершин.

1. $n - 1$ ребер
2. нет циклов
3. G — связный

Если выполнены любые 2 из данных 3, то выполнено и третье

Доказательство этой теоремы очень просто

Теорема.

G — дерево тогда и только тогда, когда $\forall u, v : \exists!$ простой путь $u \rightsquigarrow v$

Доказательство этой теоремы тоже очень просто: стоит лишь рассмотреть от противного.

Утверждение. G дерево $\Leftrightarrow G$ связен и любое ребро мост.

Определение. Подграф

G - граф. H получен удалением из G ребер или вершин. H называется подграфом G

Определение. Индуцированный Подграф

G - граф. H получен удалением из G вершин. H называется индуцированным подграфом G

Определение. Остовный Подграф

G - граф. H получен удалением из G ребер, причем H связно. H называется остовным подграфом G

Определение. Остовное дерево

Остовное дерево - остовный граф, который является деревом

Лемма.

Любой связный граф содержит остовное дерево

Определение. Матрица Кирхгофа

Матрица Кирхгофа называется матрица K_G , такая что

$$a_{ij} = \begin{cases} \deg i, i = j \\ -1, ij \in E \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

Теорема. Кирхгофа

G - связный граф. Кол-во остовных деревьев G равно $\overline{A_{ij}}, \forall i, j$

Доказательство:

Лемма 1.

Введем понятие для графа G **матрицы инцидентов**. Пусть у нас n вершин и m ребер. Возьмем матрицу из m столбцов и n строк и для каждого ребра в этой матрице инцидентов поставим 1 в соотв. строку если ребро соединяет эту вершину с другой и 0 иначе. Назовем ее I_g . Пример:

i-ое ребро		
	0	
	1	
	0	
	0	
	1	
	0	

u

v

Возьмем I_g и I_g^T и перемножим. Заметим, что получится матрица Кирхгофа, но у нас не того знака единицы. Возьмем теперь ориентацию графа G (любую). Поставим -1 в начало ребра и $+1$ в конец. Теперь уже перемножая их получим нашу нужную нам матрицу Кирхгофа.

$$\vec{I}_n * \vec{I}_n^T = \text{Матрица Киргофа } G$$

Лемма 2.

Давайте выберем любое $n - 1$ ребро. Рассмотрим столбцы \vec{I}_n , связанные с этими ребрами. Удалим любую строчку. Останется матрица $n - 1$ на $n - 1$. Назовем ее B . Если выбранные ребра образуют остовное дерево, то $\det B = \pm 1$, иначе $\det B = 0$.

Доказательство:

Обозначим множество оставшихся рёбер за EQ , а вершину, которую мы вычеркнули, — за u .

- Если EQ содержит цикл, то граф, тривиально, не связан. Рассмотрим компоненту связности, не содержащую u . В ней сумма столбцов равна нулю, и хорошо. Ну, как хорошо. Вообще EQ может не содержать ориентированного цикла, но содержать цикл G . Так вот, в таком случае нам придётся взять не сумму соответствующих столбцов, а алгебраическую сумму, где неправильно направленные рёбра идут с коэффициентом -1 . Тогда мы получим-таки наш ноль, то есть линейная комбинация столбцов будет равна нулю, следовательно определитель нулевой.
- Теперь пусть циклов там нет. Тогда там дерево (нет циклов и $n - 1$ ребро). Оно содержит 2 листа. Один из них — не u . Обзовём его v_1 . Поскольку мы считаем определитель, нам разрешают переставлять строки и столбцы матрицы: давайте возьмём строку v_1 , в ней где-то ровно одна ± 1 . Переместим строку на первое место, а ± 1 — в первый столбец, после чего забудем о v_1 . Оставшаяся часть —

дерево, в нём есть два листа, один — не u , возьмём его как v_2 . Так сделаем до посинения, получим нижне-треугольную матрицу с ± 1 на диагонали.

Лемма 3. Формула Коши-Бине

Пусть A — матрица $r \times s$, B — матрица $s \times r$, $s \geq r$. Тогда

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq s} \det A^{i_1; \dots; i_r} \det B_{i_1; \dots; i_r}$$

Напомню, что $A^{i_1; \dots; i_r}$ — минор матрицы A , где выбраны столбцы $i_1; \dots; i_r$, а $B_{i_1; \dots; i_r}$ — минор B , где выбраны строки $i_1; \dots; i_r$.

Доказывать формулу мы не будем. Кучерук нам вроде даже ее давала

Наконец доказательство самой теоремы

Вычеркнем строчку с номером u . Что изменится в матрице Кирхгофа? Удалится строчка и столбец с u .

А теперь, используя формулу Коши-Бине для подсчета данного минора. Ой посмотрим посмотрим и получаем, что количество остовных деревьев в точности равно нашему минору.

Q.E.D.

2.2. Коды Прюфера

Как кодировать деревья?

- Возьмем лист, имеющий мин. номер, выпишем на листик и удалим соотв вершину.

Повторим так много раз. Есть биекция между деревьями и этими массивами

3. Эйлеровы и Гамильтоновы циклы и пути

3.1. Эйлеровы пути и циклы

Определение. Эйлеров путь(цикл)

Эйлеров путь(цикл) — соответственно путь или цикл, который проходит по каждому ребру 1 раз.

Теорема.

G - связный граф. Тогда существует эйлеров цикл \Leftrightarrow соблюдено усл. таблицы:

	Цикл	Путь
граф	все степени вершин четны	не больше 2 вершин имеют неч. степень
ор. граф	количество исходящих и входящих ребер четно	левое, кроме 2 вершин у которых количество входящих и исходящих по модулю отличается на один

Доказательство:

Идея в правую сторону: вычеркиваем циклы, вычеркиваем, пока мы не распадемся на несколько компонент, используем индукцию и аккуратно ходим. Случай с путем сводим к поиску цикла.

Идея: в левую сторону: Смотрим на степени и все.

Q.E.D.

Теорема.

G - связный неориентированный граф, $2k$ вершин неч. степени и $k \geq 1$.

Тогда ребра графа представляют собой обход графа по k пересекающимся путям.

Доказательство аналогично доказательству прошлой теоремы

3.2. Гамильтоновы пути и циклы

Определение. Гамильтонов путь

Гамильтонов цикл(путь) — цикл(путь), который проходит по каждой вершине 1 раз.

Теорема. Теорема Хватала

Пусть G — связный граф с хотя бы 3 вершинами. Пусть его степени вершин — $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Если выполнено условие

$$d_k \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k$$

то G — гамильтонов.

Доказательство:

Для начала условие

$$d_k \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k$$

назовём $(*)$.

Итак, пусть G — негамильтонов граф, в котором выполнено $(*)$.

Лемма.

Пусть G выполнено $(*)$, $uv \notin E$. Тогда $G \cup uv$ также $(*)$.

Доказательство:

Пусть мы имели $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. При добавлении ребра uv степени вершин u и v увеличиваются на 1. После пересортировки последовательности степеней выполняется $d_{i(G)} \leq d_{i(G \cup uv)}$ для всех i . Поскольку условие $(*)$ монотонно относительно возрастания степеней, оно сохраняется.

Q.E.D.

Будем доказывать от противного. Предположим, существует негамильтонов граф, удовлетворяющий $(*)$.

Выберем такой граф G с:

- Наименьшим числом вершин
- Наибольшим числом рёбер среди таких графов

Тогда:

1. G не является полным графом (иначе он гамильтонов)
2. Для любого отсутствующего ребра uv граф $G \cup uv$ гамильтонов
3. Выберем отсутствующее ребро uv с максимальной суммой $\deg(u) + \deg(v)$

Поскольку $G \cup uv$ гамильтонов, в G существует гамильтонов путь :

$$u = u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_{n-1} \rightarrow u_n = v$$

Введём множества:

$$S = \{i \in [2; n-1] \mid uu_i \in E(G)\}$$

$$T = \{i \in [1; n-1] \mid u_iv \in E(G)\}$$

То есть идейно S - все вершины, выходящие из u , T - все вершины, входящие в v .

Имеем:

- $|S| = \deg(u)$
- $|T| = \deg(v)$
- $S \cap T = \emptyset$ (иначе существовал бы гамильтонов цикл в G !)

$$u \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow \dots \rightarrow u_{i-1} \rightarrow v \rightarrow u_{n-1} \rightarrow u_{n-2} \rightarrow \dots u_i \rightarrow u$$

Следовательно:

$$\deg(u) + \deg(v) = |S| + |T| \leq n - 1$$

Отсюда $\deg u + \deg v \leq n - 1$.

Без ограничения общности пусть $\deg(u) \leq \deg(v)$. Тогда:

$$\deg(u) \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$$

Положим $k = \deg(u)$. Тогда:

1. $d_k \leq k$ (существует k вершин со степенью $\leq k$)

2. По условию (*): $d_{n-k} \geq n - k$

Тогда, как выше и сказал, существует вершина $w \notin N(u)$ со степенью $\deg(w) \geq n - k$. Но тогда для ребра uw получаем:

$$\deg(u) + \deg(w) \geq k + (n - k) = n$$

что противоречит максимальнойности выбора ребра uv . Противоречие

Q.E.D.

4. Лекция 4.

4.1. Планарные графы

Определение. Укладка графа

Укладкой графа G на поверхность называется отображение вершин графа (инъекция) и отображение ребер в множество непрерывных кривых, где каждое ребро начинается и заканчивается в соотв вершине, а также не пересекаются

Теорема.

Любой граф можно вложить в \mathbb{R}^3

Доказательство:

Построим как-то, а потом будем двигать ребра в окрестности пересечения ребер.

Альтернатива: Давайте случайно поставим вершины графа в \mathbb{R}^3 . Проведем все ребра, вероятность что они пересекутся ноль, откуда можно вложить

Q.E.D.

Определение. Гомоморфные графы

Графы G_1, G_2 называются **гомоморфными**, если TODO

Лемма.

Граф можно уложить на сфере \Leftrightarrow граф можно уложить в \mathbb{R}^2

Доказательство:

Случайно построим почти биекцию между сферой(почти) и плоскостью примерно так:

- Положим плоскость
- Поставим сферу на плоскость и обозначим у нее северный полюс
- Возьмем любую точку на плоскости и проведем прямую через северный полюс. Она пересечет в каком-то месте шар.
- Давайте возьмем такое отображение, оно будет почти биективным (у северного полюса не будет образа)

А если подумать, то теперь мы просто будем строить биекцию(почти) и все - победа. Главное, чтобы северным полюсом была вершина, через которую не проходит ни одно ребро и ни одна вершина, чего можно добиться.

Q.E.D.

Мы хотим этого, потому что сфера это компакт.

Теорема Эйлера (или Формула Эйлера).

Пусть в связном планарном графе V вершин и E ребер, а при его укладке на плоскости получилось F граней. Тогда $V + F - E = 2$

Доказательство:

Докажем индукцией по количеству вершин и ребер. Если у нас 1 вершина и 0 ребер, то грань там одна.

- Пусть у нас не 1 вершина. Если наш граф дерево, у него n вершин, $n - 1$ ребро и 1 грань. Все работает.
- Если наш граф не дерево, у нас есть хоть один не-мост. Тогда он лежит в цикле, а значит при удалении этого ребра у нас уменьшится количество граней на 1. При этом граф останется связным.

Из индукционного предположения: $V + (F - 1) - (E - 1) = 2$.

Q.E.D.

Теорема.

K_5 нельзя уложить на плоскость

Доказательство:

Предположим противное. Пусть граф K_5 можно уложить на плоскости. Тогда по теореме Эйлера должно быть выполнено: $V + F - E = 2$. У K_5 вершин 5, ребер 10. Должно быть 7 граней.

Рассмотрим простой цикл длины 3 в этом графе. Посмотрим на еще одну вершину. Они вчетвером уже разбили на 4 грани нашу плоскость. Заметим, что добавление пятой вершины добавит еще минимум 3 грани (иначе будет не сходиться) - проиграли

Q.E.D.

Теорема.

$K_{3,3}$ нельзя уложить на плоскость

Доказательство:

Предположим противное. Тогда $V = 6, E = 9, F = 5$. Противоречие строится на счете ребер со стороны граней. Каждую грань ограничивает 4 ребра (мин. цикл длины 4).

Q.E.D.

На этой идее можно строить много разных оценок

Лемма.

Все компоненты вершинной двусвязности G планарны $\Rightarrow G$ планарны

Теорема.

Граф можно уложить в $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow G$ не содержит подграфа, гомоморфного K_5 или $K_{3,3}$

Доказательство:

В правую сторону очевидно из вышесказанных теорем.

В левую сторону. Пусть G не планарен и не содержит. Тут надо много писать. Не хочу писать. Потмо напишу TODO

Q.E.D.

Определение. Планарный граф

Планарный граф — граф, вложимый в \mathbb{R}^2

5. Лекция 5.

5.1. Раскраски

Определение. Корректная раскраска графа

Пусть G - неориентированный граф и отображение $c : V \rightarrow [1, k]$. При этом выполнено, что \forall ребра $uv : c(u) \neq c(v)$. В таком случае c называют **корректной раскраской**

Определение. k -colorable или k -раскрашиваемый.

Пусть G - неориентированный граф и у него есть корректная раскраска в k цветов.

Теорема.

Граф двудольный тогда и только тогда, когда \forall цикл четен.

Доказательство:

В правую сторону очевидно.

В левую сторону жадно красим с помощью dfs.

Q.E.D.

Определение. Хроматический многочлен

Хроматический многочлен $p_G(t)$ - функция, которая говорит количеству способов раскрасить граф в t цветов.

Отождествление вершин

$$p_G(t) = p_G(t)_{|c(u)=c(v)} + p_G(t)_{|c(u) \neq c(v)} = p_{G/uv}(t) + p_{G \cup uv}(t)$$

Очень хорошая формулка

Теорема. О хроматическом многочлене

G - неориентированный граф $p_g(t)$, n вершин, m ребер, k компонент связности. Тогда:

$$t^n - mt^{n-1} + p_{n-2}t^{n-2} - p_{n-3}t^{n-3} + \dots \pm p_k t^k$$

Доказательство:

Доказываем по индукции по числу вершин и по числу ребер.

База: $n, m = 0 : p_{G(t)} = t^n$

Q.E.D.

6. Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3238-М3239.

Преподаватель — Станкевич Андрей Сергеевич.

Это третий семестр курса по дискретной математике, всем успехов!

