Конспект по Матлогу.

Штукенберг Дмитрий

под редакцией Чепелина Вячеслава

Содержание

1 Лекция 1. Введение в математическую логику

1.1 Математический анализ и его формализация

- **Ньютон, Лейбниц** (1664+) - неформальная идея анализа
- **Критика**: Джордж Беркли. «Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику»
- **Коши** - последовательности вместо бесконечно-малых, пределы
- **Вейерштрасс** - формализация вещественных чисел
- **Кантор** - теория множеств (1875), формализующая вещественные числа
- **Парадокс Рассела** (1901) - кризис оснований математики
- **Давид Гильберт**: «Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор»

1.2 Парадокс брадобрея, парадокс Рассела

- **Парадокс брадобрея**: На острове брадобрей бреет всех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?
- **Парадокс Рассела**: Рассмотрим множество

  $$X = \{x \mid x \notin x\}$$

  Что можно сказать про $X \in X$?
- Анализ:
  - Пусть $X \in X$. Тогда по определению $X \notin X$
  - Пусть $X \notin X$. Тогда по определению $X \in X$
- Философский вывод: проблема существования математических объектов

1.3 Программа Гильберта

- **Цели программы** (1921):
  1. Формализация всей математики
  2. Доказательство полноты формализации
  3. Доказательство непротиворечивости
  4. Консервативность (исключение идеальных объектов)
  5. Разрешимость (алгоритмическая проверка истинности)
- **Теоремы Гёделя о неполноте** (1930) - ограничения программы
- Современный подход: частичная формализация и изучение ограничений

1.4 Классическое исчисление высказываний

Определение 1 ***Высказывание*** *(формула) строится по правилам:*

- ***Атомарное****:* A, B', C_{1234} *(пропозициональные переменные)*
- ***Составное****: если* α *и* β *- высказывания, то:*
  - *Отрицание:* $(\neg\alpha)$
  - *Конъюнкция:* $(\alpha \,\&\, \beta)$ *или* $(\alpha \wedge \beta)$
  - *Дизъюнкция:* $(\alpha \vee \beta)$
  - *Импликация:* $(\alpha \to \beta)$ *или* $(\alpha \supset \beta)$

Пример 1

$$(((A \to B) \vee (B \to C)) \vee (C \to A))$$

1.5 Метаязыковые соглашения

- **Метапеременные**: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
- **Переменные для пропозициональных переменных**: X, Y_n, Z'
- **Приоритет связок**: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация
- **Ассоциативность**: левая для & и $\vee$, правая для $\to$

Пример 2 *Упрощение записи:*

$$(A \to B) \,\&\, Q \vee ((\neg B \to B) \to C) \vee (C \to C \to A)$$

1.6 Теория моделей

Оценка высказываний

Определение 2 ***Оценка*** *определяется:*

- *Множество значений:* $V = \{\text{И}, \text{Л}\}$
- *Функция интерпретации:* $f : \mathcal{P} \to V$
- *Синтаксис оценки:* $[\![\alpha]\!]^{X_1:=v_1,\ \ldots,\ X_n:=v_n}$

Рекурсивное определение оценки

$$\llbracket X \rrbracket = f(X)$$
$$\llbracket X \rrbracket^{X:=a} = a$$
$$\llbracket \neg\alpha \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = И \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$
$$\llbracket \alpha \,\&\, \beta \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = И \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$$
$$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$
$$\llbracket \alpha \to \beta \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = И,\ \llbracket \beta \rrbracket = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

1.7 Тавтологии и выполнимость

Определение 3 *α - **тавтология** ($\models \alpha$), если истинна при всех оценках*

Пример 3 *$A \to A$ - тавтология, $A \to \neg A$ - не тавтология*

Определение 4
- *$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha$ - α **следствие***
- ***Выполнима** - истинна при некоторой оценке*
- ***Невыполнима** - ложна при всех оценках*
- ***Опровержима** - ложна при некоторой оценке*

1.8 Теория доказательств

1.8.1 Схемы высказываний

Определение 5 ***Схема высказывания** - строка, где вместо переменных можно использовать метапеременные*

Определение 6 *Высказывание σ **строится по схеме** Ш, если*

$$\sigma = Ш[ч_1 := \varphi_1][ч_2 := \varphi_2]...[ч_n := \varphi_n]$$

1.8.2 Аксиомы исчисления высказываний

Определение 7 ***Схемы аксиом:***

1. $\alpha \to \beta \to \alpha$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \to \alpha$
5. $\alpha \& \beta \to \beta$

6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

1.8.3 Правило вывода Modus Ponens

- Исторически: Теофраст (IV-III вв. до н.э.)
- Формально:
$$\frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}$$
- Пример: «Сейчас сентябрь; если сентябрь, то осень; следовательно, осень»

Доказательство и вывод:

Определение 8 ***Доказательство*** - *последовательность* $\delta_1, \ldots, \delta_n$, *где каждое* δ_i:

- *Аксиома, или*
- *Получено по MP из предыдущих*

Определение 9 ***Вывод из гипотез*** Γ - *то же, но можно использовать гипотезы из* Γ

Корректность и полнота

Определение 10 ***Корректность***: $\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$

Определение 11 ***Полнота***: $\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$

Теорема 1 *Исчисление высказываний корректно*

Доказательство:

Индукция по длине вывода + проверка аксиом и правила MP

Теорема 2 (о дедукции)
$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$$

Доказательство:

Конструктивное доказательство: преобразование вывода с гипотезой α в вывод импликации $\alpha \to \beta$. Оно будет на следующей лекции

2 Информация о курсе.

Поток — y2024.
Группы M3132-M3139.
Преподаватель — Штукенберг Дмитрий Григорьевич.

Это мат. лог ребятки