Линейная алгебра

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Линейные отображения.

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений

def: U, V - линейные пространства над одним полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$\mathcal{A} : U \to V$ называется **линейным гомоморфизмом**, если:

$$\forall \lambda \in K, \forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$$

Замечание 1: Мы будем писать $\mathcal{A}u$, вместо $\mathcal{A}(u)$.

Замечание 2: $\mathcal{A}u, \mathcal{B}u$ это какие-то числа, поэтому мы можем складывать их и умножать на скаляр.

Замечание 3: $\mathcal{A}\mathbb{O}_U = \mathbb{O}_V$, частный случай $\lambda = 0$

Примеры:

1. $\mathbb{O}$: это нулевое отображения $\forall u \in U : \mathbb{O}u = 0$
2. P_n - пространство многочленов степени $\leq n$. $\mathcal{A} = \dfrac{d}{dx}$ — дифференцирование.
3. ε — тождественное отображение. $\varepsilon : U \to U : \forall u \in U : \varepsilon u = u$.

Введем операции:

1. $\lambda \in K : \mathcal{A}$ — линейное отображение. Введем операцию умножения:
$$\forall u \in U : (\lambda \mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u)$$
2. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные отображение. Введем операцию сложения:
$$\forall u \in U : (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$
3. $\mathcal{B} \in L(U, W)$, $\mathcal{A} \in L(W, V)$. Введем операцию произведения:
$$\forall u \in U : (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{v \in V : v = \mathcal{A}u | \forall u \in U\}$ — **образ линейного отображения.**

Замечание: $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — линейное подпространство.

$\mathcal{K}er\mathcal{A} = \{u \in U | \mathcal{A}u = \mathbb{O}\}$ — **ядро линейного отображения**.

$rg\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ — **ранг отображения**

$def\mathcal{A} = \dim \mathcal{K}er\mathcal{A}$ — **дефект отображения.**

Виды отображений:

- сюръекция, если $\operatorname{Im}\mathcal{A} = V \Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V$.
- инъекция, если $\mathcal{K}er A = \{\mathbb{O}_U\} \Leftrightarrow def A = 0$.
- биекция или изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}\mathcal{A} = V \\ \mathcal{K}er\mathcal{A} = \{\mathbb{O}_U\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rg\mathcal{A} = \dim V \\ def\mathcal{A} = 0 \end{cases}$
- *эндоморфизмом* или линейным оператором, когда $U = V$.

  $\mathcal{A} \in End(V) = End_K(v)$
- *автоморфизм* это биекция + эндоморфизм.

  $\mathcal{A} \in Aut(V) = Aut_K(v)$

Примеры:

1. P_n — пространство многочленов степени не больше n. $\mathcal{A} = \dfrac{d}{dt}$ $\mathcal{A} : P_n \to P_n$. не инъекция, не сюръекция, не изоморофизм, эндоморфизм и не автоморфизм
2. $U = K^n, V = K^m$, $A = (a_{ij})_{m\times n}, a_{ij} \in K$, $\forall u \in U : \mathcal{A}u = A \cdot u$.

   $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \left\{ y \in K^m \begin{array}{c} y = \mathcal{A}x \\ \forall x \in K^n \end{array} \right\} = span(A_1, \ldots, A_n)$ — *образ матрицы.*

   $y = A \cdot x = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i$

   Давайте более подробно рассмотрим *отображения*:

   1. сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V = m$.

      $\mathcal{K}er\mathcal{A} = \{x \in K^n : Ax = \mathbb{O}\}$ — общее решение СЛОУ, *ядро матрицы.*

      $\dim \mathcal{K}er\mathcal{A} = \dim$ общего решения $= n - rgA$.

      $def\mathcal{A} = n - rgA$ — *дефект матрицы.*
   2. инъекция $\Leftrightarrow def A = 0 \Leftrightarrow n - rgA = 0 \Leftrightarrow rgA = n$.
   3. биекция $\Leftrightarrow \begin{cases} rgA = n \\ rgA = m \end{cases} \Leftrightarrow n = m$.
   4. эндоморфизм $\Leftrightarrow n = m \Leftrightarrow A_{n\times n}$.
   5. автоморфизм $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n, A_{n\times n} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$.

Свойства произведения:

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — изоморф. $\Rightarrow \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$ — изоморфно.
2. $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$.
3. $\forall \lambda \in K : \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})$.
4. $\mathcal{C} \in L(\Omega, U) : \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}$

Ассоциативная унитальная алгебра.

Замечание 1. Если $\mathcal{A} \in L(U, V)$ — изоморфно $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ — взаимно обр. отображение.

Замечание 2. Если $\mathcal{A} \in End(V)$, а также изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ — обратный лин. оператор к $\mathcal{A}$.

<u>def:</u> $U_0 \subset U$ - линейное подпространство. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \to V$ сужение лин. отобр. на лин подпространство.

$\forall u \in U_0 : \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A} u$.

Если $\mathcal{A}$ — изоморфизм, то тогда его сужение на U_0 будет линейным отображением между U_0 и $\operatorname{Im} \mathcal{A}_0$. И это будет тоже изоморфизм.

<u>Теорема (о ранге и дефекте линейного отображения)</u>

$\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$. Доказать $\dim U = def \mathcal{A} + rg \mathcal{A}$.

Доказательство:

Пусть $U_0 = \mathcal{K}er \subset U$. Пусть $U_1 \subset U$, такое, что $U_0 \oplus U_1 = U$ — прямое дополнение. Возьму $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} \in L(U_1, \operatorname{Im} \mathcal{A}_1)$.

$\forall u \in U : \exists! u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in U_0$, $u_1 \in U_1$, по т. об определении прямой суммы. Тогда получаем, что:

$$\mathcal{A} u = \mathcal{A} u_0 + \mathcal{A} u_1 = \mathcal{A} u_1$$

Откуда $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$, $rg \mathcal{A} = rg \mathcal{A}_1$.

$\mathcal{K}er \mathcal{A}_1 \subset U_1$, а также $\mathcal{K}er \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{K}er \mathcal{A} = U_0 \Rightarrow \mathcal{K}er \mathcal{A}_1 = \{\mathbb{O}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1$ — инъективна $\Rightarrow \mathcal{A}_1$ изоморфно. Откуда получаем:

$$\dim U = \dim U_1 + \dim U_0 = rg \mathcal{A} + def \mathcal{A}$$

Q.E.D.

Следствие. (характеристика автоморфизма)

Если $\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow rg \mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow def \mathcal{A} = 0$ — условие обратимости линейного оператора.

1.2 Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

Пусть есть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ базис U, а также $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ базис V.

$$u \in U \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^n; \; v \in V \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\forall u \in U, v = \mathcal{A} u, : v = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{A} \xi_i$$

То есть $\operatorname{Im}\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$rg\mathcal{A} = rg(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$.

Теперь заметим, что $\mathcal{A}\xi_i \in V$, откуда:

$$A\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \xleftrightarrow{\text{коорд. изоморфизм}} A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m$$

Назовем $A = (A_1, \dots, A_n) = (a_{ij})_{m\times n}$ — **матрицей линейного отображения** $\mathcal{A}$ на базисах ξ, η.

Замечание. Т.к. здесь координатный изоморфизм, то:

$$rg\mathcal{A} = rg(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = rg(A_1, \dots, A_n) = rgA.$$

def: $\mathcal{A} \in End(V) : \mathcal{A} : V \to V$ — **лин. оператор**.

Зафиксируем здесь один базис $e = e_1, \dots, e_n$. Получу:

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \dots, e_n)\mathcal{A}$$

Тогда $A_{n\times n}$ — **матрица линейного оператора**.

Заметим, что теперь мы умеем:

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A \in M_{m\times n}$$

Утв. $L(U, V) \cong M_{m\times n}$ **координатный изоморфизм линейных отображений**

Доказательство:

У нас есть взаимно однозначное соответствие. Проверим линейность:

$\forall\lambda \in K : \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \xleftrightarrow{\text{проверить}} A + \lambda B$.

$$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \cdot \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j + \lambda\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(a_{ji} + \lambda b_{ji}) \cdot \eta_j$$

А откуда уже видно нужное нам соответствие. Q.E.D.

Утв. $\mathcal{A} \in L(W, V), \mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{AB} \in L(U, V)$. Пусть w - базис W, η - базис V, ξ - базис U. Тогда $\mathcal{AB} \leftrightarrow AB$ в базисах (ξ, η)

Доказательство:

$$\mathcal{AB}\xi_i = \mathcal{A}(\mathcal{B}\xi_i) = \mathcal{A}(\sum_{k=1}^{p} b_{ki}w_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathcal{A}(w_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki})\eta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (AB)_{ji} \cdot \eta_j$$

Q.E.D.

Следствие: $\mathcal{A} \in L(U, V)$ - изоморфизм, A - матр в $\xi, \eta \Rightarrow A^{-1}$ - матр в (η, ξ).

Доказательство:

$$A \cdot A^{-1} = \varepsilon_V, \quad A^{-1} \cdot A = \varepsilon_U$$

$$AX = E_\eta, \quad XA = E_\xi$$

В силу того, что $\mathcal{A}$ — изоморфизм:

$$\dim U = \dim V = n, \quad rgA = n \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

$$X = A^{-1}$$

Q.E.D.

Утверждение: Пусть $\mathcal{A} \in L(U_\varepsilon, V_\eta), v = \mathcal{A}u$. Тогда $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$, где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — координатные столбцы v и u соответственно.

Доказательство: С одной стороны, v можно разложить по базису V:

$$v = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{v}_j \eta_j$$

С другой стороны, v представим как результат отображения:

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{u}_i)\eta_j \Rightarrow \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{u}_i$$

. Откуда получаем искомое: $v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u}$. Последнее равенство называется *координатной формой записи действия линейного отображения.*

Q.E.D.

Теорема (формула замены матрицы лин. отобр. при замене базиса)

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

ξ, ξ' базисы U, а η, η' базисы V. Хотим поменять базисы на штрихованные и получить новую матрицу. Тогда ее можно получить так:

$$A' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} A T_{\xi \to \xi'}$$

Доказательство:

$$\begin{tikzcd} U_{\xi} \arrow[r, "\mathcal{A}"] & V_{\eta} \arrow[d, "\mathcal{C}"] \\ U_{\xi'} \arrow[u, "\mathcal{B}"] \arrow[r, "\mathcal{A}'"] & V_{\eta'} \end{tikzcd}$$

Воспользуемся данным рисунком, чтобы понять происходящее. Мы хотим найти матрицу $\mathcal{A}'$. Для этого, заметим, что преобразование $\mathcal{A}'$, это преобразование $\mathcal{B}$, потом примененное к нему преобразование $\mathcal{A}$, а после этого примененое к нему преобразование $\mathcal{C}$. То есть:

$$\mathcal{A}' = \mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B}$$

Заметим, что матрица $\mathcal{B}$, это матрица перехода из ξ в ξ'. Это так потому что у нас просто меняется базис (про саму матрицу перехода см. одноименный раздел). Матрица $\mathcal{C}$, это $T_{\eta' \to \eta}$. Откуда, исходя из двух утверждений сверху:

$$A' = T_{\eta' \to \eta} A T_{\xi \to \xi'} \Rightarrow A' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} A T_{\xi \to \xi'}$$

Q.E.D.

Следствие: $A \in End(V)$. e, e' базисы V. $A' = T^{-1}AT$, где $T = T_{e \to e'}$.

def: квадратные матрицы A и B называются подобными, если $\exists$ невырожденная матрица C, такая, что: $B = C^{-1}AC$.

Замечание: матрицы линейного оператора в разных базисах подобны (см. следствие выше).

1.3 Инварианты линейного отображения.

Инвариатность называется некоторое свойство объекта, которое не меняется при определенных действиях и преобразованиях.

$\mathcal{A}$ - линейное отображение. Ранг и дефект инварианты относительно выбора базиса.

Пусть $\mathcal{A} \in End(V)$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ базис v.

Как мы знаем, $\exists! D$ n-форма, такая что $D(e_1, \dots e_n) = 1$. Тогда **определитель линейного оператора**:

$$\det \mathcal{A} := det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$$

Замечание: $\det \mathcal{A} = D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = D(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det A$ — определение определителя линейного оператора и матрицы соотносятся.

Теорема:

$\forall \mathcal{A} \in End(V), \det \mathcal{A} = \det A$.

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, \ldots, e_n)$ базис V. Тогда:

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A = (a_{ij})_{n\times n}$$

$$\det \mathcal{A} = D(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) = D(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_{i_1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}e_{i_n}) =$$

$$\xLeftrightarrow{\text{тк } D \text{ - } n \text{ форма}} \det \mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} D(e_{i_1} \ldots, e_{i_n}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} D(e_1, \ldots, e_n) = \det A$$

Q.E.D.

Замечание: A и B подобные матрицы, то $\det A = \det B$.

Замечание: $\det \mathcal{A}$ <u>инвариант</u> линейного оператора, он не зависит от базиса.

Следствие 1: $\forall n$ - форма f на V, $\forall \mathcal{A} \in End(V)$:

$$\forall \xi_1, \ldots, \xi_n \in V : f(\mathcal{A}\xi_1 \ldots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, \ldots, e_n)$ базис V. $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A$. Это значит, что мы берем матрицу линейного оператора в данном базисе.

$$f(\mathcal{A}e_1 \ldots, \mathcal{A}e_n) \overset{\text{из доказательства теоремы}}{=} \det A f(e_1, \ldots, e_n)$$

На самом деле $\alpha = f(e_1 \ldots, e_n)$, поэтому:

$$\forall \xi_1, \ldots, \xi_n : g(\xi_1, \ldots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \ldots, \mathcal{A}\xi_n)$$

Заметим, что g - полилинейное, тк f полилин. и $\mathcal{A}$ - лин. отобр. Также g - антисим, тк f - антисим. Откуда g - n-форма. Заметим интересный факт:

$$g(e_1, \ldots, e_n) = f(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) = \det A \cdot f(e_1, \ldots, e_n)$$

Откуда:

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = g(e_1, \ldots, e_n) D(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \det A \cdot \alpha D(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \det A \cdot f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

Q.E.D.

Замечание: Мы можем вывести 9-ое свойство определителя по-другому. Пусть $\mathcal{A} = A_{n\times n}$ — линейный оператор умножения. $f = D$, $B_j \in K^n$. Тогда:

$$det(AB_1, \ldots, AB_N) = \det A \cdot \det B$$

Следствие 2: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$

Доказательство:

Пусть e - базис V. Тогда $\mathcal{A} \overset{e}{\longleftrightarrow} A, \mathcal{B} \overset{e}{\longleftrightarrow} B$. Также $\mathcal{AB} \overset{e}{\longleftrightarrow} AB$ по свойству. Откуда:

$$\det \mathcal{AB} = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Q.E.D.

Следствие 3: $\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Причем $\det \mathcal{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathcal{A}}$

Доказательство:

$$\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ \text{изоморфизм} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ def\mathcal{A} = \dim \mathcal{K}er\mathcal{A} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ rg\mathcal{A} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \overset{e}{\longleftrightarrow} A, \det A \neq 0 \\ rgA = n \end{cases}$$

Мы знаем, что существует $\mathcal{A}^{-1}$. А также $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \varepsilon$. Откуда по свойству 3 получаем, что $\det \mathcal{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathcal{A}}$

Q.E.D.

Следствие 4: $\det(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = 1 = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1}$

Вспомним старое определение $trA = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ - *след матрицы.*

<u>Теорема (о tr подобных матриц)</u>

Если A и B подобны, то $trA = trB$.

Доказательство:

A и B подобны $\Leftrightarrow \exists C : B = C^{-1}AC$. Пусть $C^{-1} = S = (s_{ij})$. Откуда:

$$trB = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(AC)_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{ij} \cdot a_{jk} \cdot c_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \sum_{i=1}^{n} c_{ki}s_{ij}$$

Заметим, что $(CS)_{kj} = \delta_{kj}$, где $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$. Так что получаем, что

$$trB = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = trA$$

Q.E.D.

Следствие: $\forall \mathcal{A} \in End(V) \Rightarrow tr(A) = trA'$, где A и A' матрицы оператора $\mathcal{A}$ в базисе e и e' соответственно.

<u>def:</u> $\mathcal{A} \in End(V), tr\mathcal{A} = trA$ — **<u>след оператора</u>**.

Замечание: след оператора инвариантен из следствия выше.

def: Линейное подпространство $L \subset V$ называется **инвариантным** относительно линейного оператора $\mathcal{A} \in End(V)$, если $\forall v \in L, \mathcal{A}v \in L$.

Теорема 1:

$L \subset V$ - линейное подпространство. L - инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$. Тогда $\exists$ базис пр-ва V матрица, такой что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь *ступенчатый вид*, при этом размерность $A^1 = k \times k$, $k = \dim L$.

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

Доказательство:

$L = span(e_1, \dots, e_k)$ - базис L.

Дополним базис L до базиса V: $V = span(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$.

Запишем матрицу A по определению:

$$\forall e_i \in L : \mathcal{A}e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ji}e_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Откуда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} \end{pmatrix}$

Q.E.D.

Теорема 2:

$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантны отн. $\mathcal{A}$. $\Rightarrow \exists$ базис пр-ва V, такое что м-ца оператора $\mathcal{A}$ будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

Доказательство:

Пусть базис $V \overset{\text{по эквив. условию } \oplus}{=}$ объединение базисов L_i.

$$L_i = span(e_1^i, \dots, e_{k_i}^i), \dim L_i = k_i$$

Построим матрицу по определению. Не трудно заметить, что для каждого L_i из доказательства прошлой теоремы, все кроме соотв. строчек для L_i будет зануленно.

Q.E.D.

Замечание: $A_i \leftrightarrow A|_{L_i} \in End(L_i)$.

Теорема 3.

$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантны отн $\mathcal{A} \Rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} \mathcal{A}|_{L_i}$, где $\mathcal{A}|_{L_i} \in L(L_i, V)$

Доказательство:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i \xLeftrightarrow{\text{из т. об экв. опр. прямой суммы}} \forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^{m} v_i, v_i \in L_i$$

$$\forall v \in V : \operatorname{Im} \mathcal{A} \ni \mathcal{A}v = \mathcal{A} \sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}v_i \in \operatorname{Im} A|_{L_i}$$

Тогда всё, что нам осталось проверить это то, что наши пространства дизъюнкты. Но, если присмотреться к тому, что у нас написано, то у нас для любого вектора из $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ существует лишь одно разложение через $\operatorname{Im} A|_{L_i}$, что соответствует эквивалентному определению прямой суммы.

Q.E.D.

1.4 Собственные числа и собственные векторы лин. оператора

$\lambda \in K$ называется **собственным числом** $\mathcal{A} \in End(V)$, если $\exists v \in V, v \neq 0$. $\mathcal{A}v = \lambda v$. Такой v называют **собственным вектором** собственного числа λ.

$$\lambda \in K : \begin{cases} \mathcal{A}v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda\varepsilon)v = 0 \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon) \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow v$ собственный вектор собственного числа λ.

$V_\lambda = \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon)$ — **собственное подпространство** $\mathcal{A}$ соответств. с.ч. λ. Это мн-во всех с.в. V, отвечающим с.ч. λ и нулевой вектор.

$\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$ — **геометрическая кратность**.

Свойства:

1. V_λ инвариантно относительно $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$.
2. V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A}$.
3. $\gamma(\lambda)$ инвариант относительно базиса.

Условие существования с.ч.:
$\lambda \in K_{\mathcal{A}}$ - с.ч., v - с.в. $\Leftrightarrow \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon)$ нетривиально $\Leftrightarrow def(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow rg(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq n \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = 0$

Тк определитель линейного оператора инвариантен, то:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

def: $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$ - **характеристический многочлен** оператора $\mathcal{A}$.

Т.к. det оператора инвариантен $\chi(t) = \det(A - tE)$, где A - матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot t^n + (-1)^{n-1}(trAt^{n-1}) + \ldots + \det A$$

По теореме Виета: $\begin{cases} t_1 + \ldots + t_n = trA \\ t_1 \cdot \ldots \cdot t_n = \det A \end{cases}$ Заметим, что λ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in K \\ \chi(\lambda) = 0 \text{ - корень хар. мн.} \end{cases}$

Замечание. Если все корни хар. мн. $\in K \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = trA \\ \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A \end{cases}$

def: **Спектром** оператора $\mathcal{A}$ называется множество $\{(\lambda,\, \alpha(\lambda))\}$, $\alpha(\lambda)$ - кратность λ лин. оператора в хар. уравнении (*алгебраическая кратность*). Спектр это множество пар.

def: **Простой спектр** — все кратности - единички.

Теорема 1:

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$. $\forall \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} : 1 \le \gamma(\lambda) \le \alpha(\lambda)$

Доказательство:

λ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = V_\lambda$ не тривиально $\Leftrightarrow \gamma_1 = \dim V_\lambda \ge 1$.

Пусть $\dim V_\lambda = \gamma$, V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow$ по т-ме 1 об инв. подпр. существует V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ будет иметь ступенчатый вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

$$\dim A^1 = \gamma \times \gamma, V = span(e_1, \ldots, e_\gamma, e_{\gamma+1}, \ldots, e_n)$$

При построении матрицы оператора $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}e_i = \lambda e_i \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ - λ - на i-ой строчке. Немного распишем:

$$\chi(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} A^1 - tE_{\gamma\times\gamma} & * \\ \mathbb{O} & A^2 - tE_{(n-\gamma)\times(n-\gamma))} \end{vmatrix} \overset{\text{по 6-ому св-ву опр}}{=}$$

$$= |A^1 - tE||A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \cdot \chi_{A^2}(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A_2}(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda$ корень $\chi(t)$, причем кратность $\geq \gamma$, т.к λ может оказаться корнем χ_{A^2}

Q.E.D.

Теорема 2:

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ попарно различные с.ч $\mathcal{A}$, $v_1, \ldots, v_n$ соответ. с.в.

$\Rightarrow v_1, \ldots, v_n$ — лин. независимы.

Доказательство:

Докажем по индукции:

База $m = 1 : \lambda_1, v_1 \Rightarrow$ лин. незав.

ИП: Пусть верно для m, докажем для $m + 1$:

От противного: Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ попарно различные собственные числа.

$v_1, \ldots, v_m$ - линейно независимы по ИП. $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ - линейно зависимы. Откуда: $v_{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$. С одной стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \lambda_{m+1}v_{m+1} = \lambda_{m+1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i$$

С другой стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \mathcal{A}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathcal{A}v_i = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda_i v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_{m+1} - \lambda_i)a_i v_i = 0$$

Но мы знаем, что $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы. Откуда эта линейная комбинация тривиальна, но с другой стороны, она такой быть не может, потому что $\exists\alpha_i \neq 0$, для которого v_i не равен нулю, а так же, исходя из того что искомые с.ч. попарно различны, то $\lambda_{m+1} - \lambda_i \neq 0$. Откуда комбинация нетривиальна.

Противоречие.

Q.E.D.

Следствие: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$, т.е V_{λ_i} дизъюнктны.

Доказательстсво:

$$\mathbb{O} = v_1 + \ldots + v_m, v_i \in V_{\lambda_i}$$

Если в сумме какой-то из векторов ненулевой, то это собственный вектор, а собственные вектора для различных с.ч. линейно независимы. Противоречие. Откуда все вектора в сумме нулевые, откуда подпространства дизъюнктны.

Q.E.D.

Теорема 3:

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$

$\Rightarrow \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = \prod\limits_{i=1}^{m} \chi_{\mathcal{A}_i}(t)$.

Доказательство:

Смотрим теорему 3 об инв. подпр. Матрица А - блочно-диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

Тогда $\chi(t) = \det(A - tE) \overset{\text{по 6-ому свойству опр.}}{=} \prod\limits_{i=1}^{m} \det(A^i - tE) = \prod\limits_{i=1}^{m} \chi_{A_{L_i}}(t)$

Q.E.D.

1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.

$\mathcal{A} \in End(V)$ называется **оператором простой структуры** (о.п.с), если $\exists$ базис пространства V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет диаг. вид.

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что в таком случае собственные числа оператора $\mathcal{A}$ будут λ_i, а так же собственные вектора этих чисел - соотв. столбики (легко проверить умножением). Отсюда все корни характ. многочлена $\chi \in K \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$.

Теорема:

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$, если $\sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n$, то тогда:

$$\mathcal{A} \text{ - о.п.с} \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ - с.ч } : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Доказательство:

$\sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n \Leftrightarrow$ все корни $\chi \in K$, откуда $\mathcal{A}$ - о.п.с.

$\mathcal{A}$ о.п.с. $\Leftrightarrow \exists$ базис V такой, что матрица диагональна $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda-\text{с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \sum_{\lambda-\text{с.ч.}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Q.E.D.

Следствие. Если все корни характ. многочлена $\in K$, а также все $\alpha(\lambda) = 1$ (спектр простой), то $\mathcal{A}$ - о.п.с.

def: $A_{n\times n}$ называется **диагонализируемой**, если она подобна диагональной.

Теорема (критерий диагональности матрицы A)

~~это перепишется~~

A подобна диагональной $\Leftrightarrow$ матрица о.п.с $\mathcal{A}$ в нек. базисе

Доказательство:

- $\boxed{\Rightarrow}$

  Пусть A - диагонализируемая $\Leftrightarrow$ подобна диагональной $\Leftrightarrow \exists$ невырожд T: $T^{-1}AT = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. V - линейное пространство над полем K. $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V.

  Пусть A - матрица в базисе e. Тогда $Ae_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}e_i . v = (v_1, \dots, v_n)$ - базис.

  Откуда $v_1, \dots, v_n = (e_1, \dots, e_n)T_{e\to v} \Rightarrow \mathcal{A} \overset{v}{\leftrightarrow} A' = T^{-1}AT = \Lambda$

- $\boxed{\Leftarrow}$ $\mathcal{A}$ о.п.с, A - матрица в некотором базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$. Возьму $v_1, ..., v_n$ - базис V, где v_i - собственный вектор $\mathcal{A}$. Заметим, что так как $\mathcal{A}$ о.п.с, то такой базис существует

  Теперь давайте возьмем матрицу перехода из $T_{e\to v}$. Тогда $\mathcal{A} \overset{v}{\leftrightarrow} A' = T^{-1}AT = \Lambda \Rightarrow A$ подобна диагональной

Q.E.D.

Алгоритм поиска диагонального представления матрицы подобной диагональной:

1. найти спектр: если все корни $\chi \in K$, переходим к п2.
2. найти все $\gamma(\lambda)$, если $\forall \lambda$ с.ч $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, то перейти к п3.
3. $T_{\text{кан.}\to v} = (v_1, \dots, v_n)\ T^{-1}AT = \Lambda$

def: $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$. По теореме об равносильных условиях прямой суммы:

$\forall v \in V : \exists! v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i, \text{где } v_i \in L_i$. Возьму $P_i \in End(V)$, такие, что $P_i \cdot v = v_i \in L_i$.
Тогда такие P_i назовем **операторами проектирования** на подпр-во L_i.

Свойства операторов проектировния:

1. $\operatorname{Im} P_i = L_i, \quad \mathcal{K}er P_i = \bigoplus\limits_{j\neq i} L_j$
2. $P_iP_j = \mathbb{O}$
3. $\sum\limits_{i=1}^{m} P_i = \varepsilon$
4. $P_i^2 = P_i, (P_j^k = P_j, \text{где } k \in \mathbb{N})$ - **идемпотентность**

Они все тривиальны

Утверждение. Возьму множество операторов: $\{P_i\}_{i=1}^m$, $P_i \in End(V)$.

Пусть они удовлетворяют свойствам 2,3 $\Rightarrow V = \bigoplus\limits_{i=1}^m \operatorname{Im} P_i$. P_i это проектор на L_i.

Доказательство:

Мы знаем, что $P_iP_j = \mathbb{O}$, для $i \neq j$, а также $\sum\limits_{j=1}^m P_i = \varepsilon$. Откуда получаем, что:

$$P_i = P_i\varepsilon = P_i\sum_{j=1}^m P_j = \sum_{j=1}^m P_jP_i = P_i^2$$

А это значит, что $\forall v \in V : v = \varepsilon v = \sum\limits_{i=1}^m P_iv \Rightarrow V = \sum\limits_{i=1}^m \operatorname{Im} P_i$.

Осталось показать единственность разложения нуля:

$$\mathbb{O} = \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m P_iw_i, \text{ где } w_i \in V$$

$$P_j\mathbb{O} = \mathbb{O} = P_j\sum_{i=1}^n P_iw_i = \sum_{i=1}^n P_iP_jw_i = P_jw_j = v_j$$

$\Rightarrow v_j = \mathbb{O}, \forall j = 1\dots m \;\Rightarrow$ дизъюнк. $\Rightarrow \bigoplus \operatorname{Im} P_i$

Q.E.D.

Замечание: Из определения проекторов следует, что они существуют и определены однозначно для данной прямой суммы.

Теорема (спектральное разложение о.п.с)

Дан $\mathcal{A} \in End(V)$. Тогда выполнено:

1) $\mathcal{A}$ — о.п.с. $\Rightarrow \mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda\text{ - с.ч.}} \lambda P_\lambda, P_\lambda$ — проектор на V_λ $\forall$ с.ч. λ.

Такое разложение называется **спектральным**.

2) $V = \bigoplus\limits_{i=1}^m L_i$, P_i проекторы на L_i. $\mathcal{A} = \sum\limits_{j=1}^m \lambda_iP_i \Rightarrow \mathcal{A}$ о.п.с, λ_i с.ч.

$\operatorname{Im} P_i = L_i = V_\lambda$(соотвест. подпр-во)

Доказательство:

1) $\mathcal{A}$ о.п.с $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda\text{ - с.ч}} V_\lambda$. Возьму P_λ проекторы на V_λ (исходя из определения -они существуют)
Тогда давайте воспользуемся определением:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\lambda\text{ - с.ч}} v_\lambda, \text{где } v_\lambda \in V_\lambda : \mathcal{A}v = \mathcal{A}(\sum_\lambda v_\lambda) = \sum_\lambda \mathcal{A}v_\lambda = \sum_\lambda \lambda v_\lambda = \sum_\lambda \lambda P_\lambda v$$

Откуда уже крайне очевидно получаем, что $\mathcal{A} = \sum\limits_\lambda \lambda P_\lambda$.

2) $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$. Откуда по определению: $\forall v \in V : \exists! v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \in L_i = \operatorname{Im} P_i$, $v_i \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{A} v_i = (\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j) v_i = (\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j) P_i v = v \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j P_i$$

Теперь вспомним свойство, что при умножении двух различных операторов мы получаем $\mathbb{O}$. Поэтому на самом деле наша сумма равна:

$$v \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j P_i = v \lambda_i P_i P_i = v \lambda_i P_i = \lambda_i v_i$$

Хорошо, теперь вспомним, что изначально это было равно $\mathcal{A} v_i$. поэтому $\mathcal{A} v_i = \lambda_i v_i$, откуда получаем, что v_i с.в. $\mathcal{A}$ отвечающий с.ч. λ_i.

Откуда получаем, что наше подмножество $V_{\lambda_i} \supseteq \operatorname{Im} P_i$ (потому что любой $v \in \operatorname{Im} P_i$ — собственный вектор).

Вспомним, что: $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im} P_i \subseteq \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$, а как мы знаем $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \subseteq V$. Откуда, я получаю, что:

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} P_i = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \xRightarrow{\text{так как } P_i \subseteq V_{\lambda_i}} \operatorname{Im} P_i = V_{\lambda_i}$$

Q.E.D.

Следствие (спектральное разложение диагонализируемой матрицы)

A диагонализируема $\Leftrightarrow \exists! \{P_i\}_{i=1}^{m}$, такое, что $P_i \cdot P_j = \mathbb{O}$, $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} P_i = E$, $A = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$

Доказательство:

Очевидно следует из теоремы:

A диагонализируема $\iff$ матрица $\mathcal{A}$ о.п.с. Либо можно считать $A = \mathcal{A}$ о.п.с. $\in End(K^n)$

Q.E.D.

Замечание. Матрица A подобна диагональной, то у нее есть диагональное представление:

$$T^{-1} A T = \Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n), A = T \Lambda T^{-1}$$

А также у такой матрицы есть спектральное разложение:

$$A = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda P_\lambda$$

Просьба не путать эти две формулы!

СЕЙЧАС НАЧНЕТСЯ ЧТО-ТО СТРАШНОЕ

def: $A_k = (a_{ij}^k)_{n \times n}$ - последовательность матриц $n \times n$.

Обозначают так: $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ — **последовательность матриц**.

Раз это последовательность, то давайте введем на ней вот такой предел:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_k = \forall i, j : a_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}^k$$

Для лучшего понимания этого мира смотрите на приведенный ниже пример:

$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} (1+\frac{2}{k})^k & \sqrt[k]{k} \\ \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} & \frac{1-\cos\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

def: $a_n \in R : \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m = S \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{k} a_m = S$, где $S_k = \sum\limits_{m=1}^{k} a_m$ — **частичная сумма ряда.**

А саму такую конструкцию понятно называют рядом. Теперь давайте немного притронемся к матану:

$\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ - **ряды Тейлора - Маклорена**.

$x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — их область определения, $|x| < R$ (или еще обозначается r) — **радиус сходимости**, $c_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Причем эти c-шки на самом деле производные. (если интересно см. конспект по мат. анализу первый семестр)

Рассмотрим пример: Давайте разложим e^x, нам это позже понадобится:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, |x| < +\infty$$

В таком случае $c_m = \dfrac{f^{(m)}(0)}{m!}$.

Пусть $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_n x^n$. А давайте расширим на матрицы :)

def: $A_{n\times n} : f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m A^m$. Причем мы так же считаем частичные суммы и ищем их предел, но теперь просто ищем предел в матрицах.

Можно добавить параметр: $f(At) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m A^m t^m$.

Теорема 1 (функция от диагонализируемой матрицы 1)

Пусть A — подобна диагональной. А также нам дана $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m, |x| < r$.

Тогда, если $\forall$ с.ч. $|\lambda| < r \Rightarrow \exists f(A)$ и $f(A) = T f(\Lambda) T^{-1}$, где $f(\Lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$

Доказательство:

Упрощу $\sum\limits_{m=0}^{k} c_m A^m$. Мы знаем, что A - подобна диагональной $\Rightarrow A = T\Lambda T^{-1}$. Тогда:

$$A^m = (T\Lambda T^{-1})^m = T\Lambda T^{-1}T\Lambda T^{-1}\dots T\Lambda T^{-1} = T\Lambda^m T^{-1}$$

Теперь давайте подставим это в нашу сумму:

$$\sum_{m=0}^{k} c_m A^m = \sum_{m=0}^{k} c_m T\Lambda^m T^{-1} = T\left(\sum_{m=0}^{k} c_m \Lambda^m\right)T^{-1}$$

Теперь вспомним, что Λ^n диагональня, поэтому занесем сумму внутрь матрицы и получим:

$$T\left(\sum_{m=0}^{k} c_m \Lambda^m\right)T^{-1} = T\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{k} c_m\lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum\limits_{m=0}^{k} c_m\lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} =$$

Теперь вспомним, что $\forall$ с.ч. $|\lambda| < r$, поэтому для них мы можем применить формулу, откуда:

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k} c_m A^m = \lim_{k\to\infty} T\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{k} c_m\lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum\limits_{m=0}^{k} c_m\lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Q.E.D.

Теорема 2 (функция от диагонализируемой матрицы, 2-я формула)

Пусть A — подобна диагональной.

Тогда A имеет спектральное разложение $\sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч.}} \lambda P_\lambda$, где P_λ — проекторы. А также нам дана $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad |x| < r$.

Тогда, если $\forall$ с.ч. $|\lambda| < r$, то $\exists f(A)$, а так же $f(A) = \sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч.}} f(\lambda)P_\lambda$.

Доказательство:

$A^m = (\sum\limits_{\lambda} \lambda P_\lambda)^m = \sum\limits_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum\limits_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum\limits_{\xi} \xi P_\xi$

А теперь вспомним свойства проекторов. Когда я умножаю два разных проектора, я получаю ноль, откуда:

$$A^m = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum_{\xi} \xi P_\xi = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda$$

Значит: $\sum\limits_{m=0}^{k} c_m A^m = \sum\limits_{m=0}^{k} c_m \sum\limits_{\lambda} \lambda^m P_\lambda = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda \sum\limits_{m=0}^{k} \lambda^m c_m$. Теперь если я возьму предел, то я получу то, что мне нужно, потому что каждая лямбда $< r$, и поэтому я могу вместо них подставить $f(\lambda)$.

Q.E.D.

Экспонента:

А теперь давайте возьмем все $c = 1$, а также вспомним, что мы можем протаскивать с собой параметр. Поэтому у нас получается новая формула:

$f(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{m=0}^{k} t^m A^m$, а теперь вспомним наше разложение e-шки. А это именно оно и есть! Поэтому получаю:

$$e^{At} = f(At) = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} t^m A^m$$

Или:

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1} = \sum_{\lambda \text{ - с.ч.}} e^{\lambda t} P_\lambda$$

Свойства:

1. $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A.$
2. $e^{(A_1+A_2)t} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$
3. $e^{\mathbb{O}t} = E$

Обратная:

A - подобна диагональной $\forall$ с.ч. $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = T \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dfrac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$

Свойства:

1. $A^{-1} = \sum\limits_{\lambda \text{ - с. ч}} \dfrac{1}{\lambda} P(\lambda)$
2. $AA^{-1} = T\Lambda T^{-1} T \Lambda^{-1} T^{-1} = E$
3. $AA^{-1} = (\sum \mu P_\mu)(\sum \frac{1}{\lambda} P_\lambda) = \sum\limits_{\lambda} \lambda \frac{1}{\lambda} P_\lambda = E$

Корень:

Если A подобна диагональной и $\forall$ с.ч. $\lambda \geq 0$, то взяв $m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2$ мы можем ввести:

$$\sqrt[m]{A} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}, \text{ полагая } \sqrt[m]{\lambda} \geqslant 0$$

Спектральное представление: $\sqrt[m]{A} = \sum\limits_{\lambda \text{ с. ч.}} \sqrt[m]{\lambda} P_\lambda$.

1.6 Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора

Давайте посмотрим какие линейные операторы мы уже изучили:

Пусть $\mathcal{A} \in End(V) \overset{e}{\longleftrightarrow} A$, $\chi(t)$ — корни характеристического многочлена. Он может быть:

1. Все корни $\in K$. $\sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$
   - $\exists$ базис V из v_λ: $\forall \lambda: \ \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) \iff$ диагонализируема.
   - $\nexists$ базис V из $v_\lambda : \exists$ с.ч. λ: $\gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \iff A$ жорданова форма.
2. Не все корни $\in K$. В таком случае вещ. V комплексифицируют.

def: V — линейное пространство над $\mathbb{R}$ (вещ. лин. пр-во)

$$\forall x, y \in V \Rightarrow z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad V_{\mathbb{C}} = \{z = x + yi \mid \forall x, y \in V\}$$

Назовем $V_{\mathbb{C}}$ **комплексификацией** V.

Покажем некоторые **свойства:**

1. $\mathbb{O} \in V \leftrightarrow \mathbb{O} + i\mathbb{O} = \mathbb{O} \in V_{\mathbb{C}}$ - существование нуля
2. $x \in V \leftrightarrow x + i\mathbb{O} = x \in V_c$, $V \subset V_{\mathbb{C}}$ — говорим, что $V \subseteq V_{\mathbb{C}}$
3. $\forall z = x + iy$ существует обратное: $-x + i(-y)$

Заметим, что в таком случае $V_{\mathbb{C}}$ — линейное пространство над полем комплексных чисел.

Утв. Пусть $e_1, \dots, e_n$ - базис V. Докажем что $e_1, \dots, e_n$ — базис $V_{\mathbb{C}}$.

Доказательство:

Возьмем любой z и докажем, что его можно породить с помощью базиса:

$$z = x + iy = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j + i \sum_{j=1}^{n} y_j e_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j + iy_j) e_j$$

Откуда e - порождающий базис для $V_{\mathbb{C}}$. Докажем линейную независимость:

Для этого нам надо показать, что любая нулевая комбинация тривиальна:

$$\mathbb{O} = \sum_{j=1}^{n} (a_j + ib_j) e_j = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j + i \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \iff \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \underset{\in \mathbb{R}}{=} \mathbb{O} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j \underset{\in \mathbb{R}}{=} \mathbb{O} \end{cases} \iff \begin{cases} \forall j : \alpha_j = 0 \\ \forall j : \beta_j = 0 \end{cases}$$

Откуда получили линейную независимость.

Q.E.D.

Замечание. Мы знаем, что $V \subset V_{\mathbb{C}}$. $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$, откуда наши пространства должны быть равны? Нет! Это было бы так, если бы не одно НО. V - линейное пространство над $\mathbb{R}$, а $V_{\mathbb{C}}$ - линейное пространство над $\mathbb{C}$, поэтому это не правда.

Благодаря верхней теореме мы можем сделать некоторые замечания:

$$x \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, z = x + iy \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$$

def: $z \in V_{\mathbb{C}}$, $\overline{z} = x - iy$ — **сопряженный** вектор, $z = x + iy, \quad x, y \in V$

Свойства:

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
2. $\overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\overline{z}$
3. $v_1, \ldots, v_m$ — лин. (не)зависимы $\Leftrightarrow \overline{v_1}, \ldots \overline{v_m}$ лин. (не)зависимы.
4. $rg(v_1 \ldots v_m) = rg(\overline{v}_1 \ldots \overline{v}_m)$

def: Возьму оператор $\mathcal{A} \in End(V)$. $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

Назову данную конструкцию **продолжением вещ. лин. оператора** $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}}$ вещественного пространства V.

Очевидно, что в таком случае $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$, т.к. $\mathcal{A}$ — линейный оператор.

Утверждение: $\mathcal{A} \in End(V)$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ базис V ($\Rightarrow$ базис $V_{\mathbb{C}}$ из теоремы сверху).

Тогда, если $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A$, то $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \underset{e}{\leftrightarrow} A$

Доказательство:

По определению матричного оператора:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \cdot e_j = \mathcal{A} \cdot e_j + i\mathcal{A}\mathbb{O} = \mathcal{A} \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k \iff A_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

1. $\chi_{\mathcal{A}}(t) \equiv \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$ — так как матрицы совпадают.

   Замечание:

   1) если $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0$ - корень $\chi(t) \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, но не с.ч. $\mathcal{A}$.

   2) если $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ корень $\chi \Rightarrow \overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ - тоже корень, причём той же кратности.

2. $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \overline{A_{\mathbb{C}} z} = A_{\mathbb{C}} \overline{z}$.

   $\overline{A_{\mathbb{C}} z} = \overline{Ax + iAy} = Ax - iAy = A_{\mathbb{C}} \overline{z}$

3. λ с.ч $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, z - с. в , отвечающий $\lambda \Rightarrow \overline{\lambda}$ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, $\overline{z}$ с.в., отвечающий $\overline{\lambda}$

   $\mathcal{A}\overline{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z}$.

4. $\gamma(\lambda) = \gamma(\overline{\lambda})$, $\dim V_\lambda = \dim V_{\overline{\lambda}}$

Вернемся к тому старому разделению на случаи. Заметим, что если в таком случае мы возьмем наш третий случай и комплексифицируем, то для полученного оператора $A_{\mathbb{C}}$ мы получим, что он относится либо к первому варианту, либо ко второму.

1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона

def: $\mathcal{A} \in End(V)$ - нормализованный многочлен $\psi(t)$ называется **аннулятором** элемента $x \in V$, если $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$.

А теперь на более понятном. Пусть у нас есть $\psi(t) = t^k + a_1t^{k-1} \ldots + a_{k+1}t^0$. Подставляя в него оператор получу: $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^k + a_1\mathcal{A}^{k-1} + \ldots + a_{k+1}\varepsilon$. И такой оператор будет аннулятором x, если $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$.

Замечание. $\psi(t) \neq 0$, потому что это нормализованный многочлен,
его старший коэффициент равен 1.

$\psi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ - корень}} (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ - так как это многочлен. Здесь $m(\lambda)$ — кратность корня λ. Перепишем на место t оператор:

$$\psi(\mathcal{A}) = \prod_{\lambda \text{ - корень}} (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$$

def: Аннулятор элемента $x \in V$ наименьшей степени
называется **минимальным аннулятором** элемента x.

Теорема: (о существовании и единственности минимального аннулятора)

1. $\forall\ x \in V\ \exists!\, \psi(t)$ минимальный аннулятор x.

2. $\forall$ другой аннулятор $x \vdots$ на минимальный аннулятор x.

Доказательство:

1. (a) Пусть $x = \mathbb{O}$, $\psi(t) = 1$, $\psi(\mathcal{A}) = \varepsilon$, $\varepsilon x = \varepsilon\mathbb{O} = \mathbb{O}$

   (b) Пусть $x \neq \mathbb{O}$. Посмотрю на $x, \mathcal{A}x, \mathcal{A}^2x, \ldots, \mathcal{A}^m x$

   Причем m такое, что $x, \mathcal{A}x, \ldots \mathcal{A}^{m-1}x$ - линейно независимы, а $x, \mathcal{A}x, \ldots \mathcal{A}^m x$ - зависимы. Такой набор собрать удастся, при этом $m \leq n$.

   $\Rightarrow \exists!\, c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \in k$, такие, что $\mathcal{A}^m x = \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j\mathcal{A}^j x$

   Откуда получаем, что $(\mathcal{A}^m - \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j\mathcal{A}^j)x = \mathbb{O}$. Получил какой-то оператор, который при умножении на x дает $\mathbb{O}$. А это значит, аннулятор существует, причём аннулятор выше минимальный по построению.

Замечание: мы смотрим на многочлен с коэффицентами $1, c_{n-1}, \ldots, c_0$ — этот многочлен и есть наш минимальный аннулятор..

2. Пусть мой минимальный аннулятор это $\psi(t)$, а $\psi_1(t)$ другой аннулятор x.

   Посмотрим на результат деления:

   $\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$ (остаток), $\deg r < \deg \psi$

   Это значит, что подставляя в него $\mathcal{A}$ и умножая на x должно быть верно:

$$\psi_1(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})x + r(\mathcal{A})x$$

   Но $\psi_1(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, поэтому $r(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, но что это значит?

   Как мы знаем $\psi(t)$ - минимальный аннулятор. Так как $r(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, то если $r(t) \not\equiv 0$, получаем, что это аннулятор, а тогда мы выбрали не минимальный аннулятор, т.к. $\deg \psi > \deg r$. Противоречие!

   Откуда получаю, что $r \equiv 0 \Rightarrow \psi_1$ делится на минимальный оператор ψ.

Q.E.D.

<u>**def:**</u> Нормализованный многочлен $\varphi(t)$ называется <u>**аннулятором оператора**</u> $\mathcal{A}$, если:

$$\varphi(\mathcal{A}) \equiv \mathbb{O}, (\text{т.е.} \forall v \in V, \varphi(\mathcal{A})v = \mathbb{O})$$

<u>**def:**</u> <u>**минимальным многочленом оператора**</u> $\mathcal{A}$ называется аннулятор $\mathcal{A}$ наименьшей степени.

<u>**Теорема: (о существовании и единственности миним. многочлена оператора)**</u>

1. $\forall \mathcal{A} \in End(V) : \exists!$ - минимальный многочлен.
2. $\forall$ аннул. оператора $\mathcal{A}$ делится на миним. мн-н $\mathcal{A}$

Доказательство:

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ - базис V. Построим $\psi_j(t)$ - минимальный аннулятор e_j

Возьму $\varphi(t) =$ Н.О.К. $\{\psi_j\}_{j=1}^n$, где $j = 1, \ldots, n$. Покажем, что φ аннулятор $\mathcal{A}$:

Как мы знаем $\forall v \in V, v = \sum\limits_{i=1}^n v_i e_i$. Поэтому:

$$\varphi(\mathcal{A})v = \sum_{j=1}^n v_j \cdot \varphi(\mathcal{A}) \cdot e_j = \sum_{j=1}^n v_j \cdot (\psi_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{A}))e_j = \mathbb{O} \iff \varphi(\mathcal{A}) \equiv \mathbb{O}$$

То есть такой многочлен существует. Теперь докажем <u>единственность</u>:

Пусть $\varphi_a(t)$ другой аннулятор $\mathcal{A}$: Тогда $\forall j = 1, \ldots, n : \varphi_a(\mathcal{A})e_j = \mathbb{O}$.

Тогда φ_a аннулятор элемента e_j для любого j.

По теореме о линейном операторе мы знаем, что φ_a делится на ψ_j для любого j, то есть $\varphi_a \vdots \varphi$.

Откуда я получаю, что φ_a степени хотя бы такой же, что φ. То есть φ_a хотя бы Н.О.К.

Если мы предполагаем, что это многочлен минимальной степени, то он такой же степени, как и φ. При этом они оба делятся на Н.О.К., а $\varphi =$ Н.О.К. Так же их старшие коэффиценты равны. Поэтому: $\varphi_1 = \varphi$. Исходя из этого получаем, что такой многочлен единственный. Делимость получаем из того, что любой другой аннулятор оператора является аннулятором базисных векторов, откуда делится на каждый из них $\Rightarrow$ делится на их НОК $=$ минимальному.

Q.E.D.

Теорема (Кэли - Гамильтона)

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ выполнено, что:

$\chi(t) = \det(A - t\varepsilon)$ - аннулятор оператора $\mathcal{A}$.

Замечание $\det(\mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \varepsilon)$, $t \in K$. Сюда не предполагается подставлять матрицу.

Доказательство:

Пусть есть базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогда $\mathcal{A} \overset{e}{\leftrightarrow} A$.

Пусть есть $\mu \in K$ - не корень $\chi(t)$, где $t \in K$. Посмотрим на $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - tE)$. Как мы знаем: $\chi(\mu) \neq 0$, поэтому $\det(A - \mu E) \neq 0$. Откуда существует обратная матрица (по теореме об обратной матрице), тк A - не вырожденная:

$$\exists!(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B = \frac{1}{\chi(\mu)} B$$

где B - матрица из алгебраических дополнений.

Наша матрица B выглядит примерно так: $\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{11i}\mu^i & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{1ni}\mu^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{n1i}\mu^i & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{nni}\mu^i \end{pmatrix}$

Давайте разложим нашу матрицу в сумму матриц так, что матрица B_k будет состоять из всех коэффицентов на k-ой позиции этих k функций:

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Тогда вернемся к тому, что было:

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\chi(\mu)} \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Или домножим на $(A - \mu E)$ и получим:

$$E \cdot \chi(\mu) = (A - \mu E) \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Пусть $\chi(t) = \alpha_n t^n + \ldots + \alpha_0 t^0$. Давайте расскроем скобки, мы получим:

$$\begin{array}{ll}
\mu^0: & E\alpha_0 = AB_0 \\
\mu^1: & E\alpha_1 = AB_1 - B_0 \\
\mu^2: & E\alpha_2 = AB_2 - B_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\mu^{n-1}: & E\alpha_{n-1} = AB_{n-1} - B_{n-2} \\
\mu^n: & E\alpha_n = -B_{n-1}
\end{array}$$

Теперь умножим каждый $E\alpha_i$ на A^i и сложим. Получится:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = AB_0 + A^2B_1 - AB_0 + A^3B_2 - A^2B_1 + \ldots + A^nB_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} = \mathbb{O}$$

$\chi(A) = \mathbb{O} \quad \Rightarrow \chi$ аннулятор $\mathcal{A}$, т.к. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t)$. Q.E.D.

Замечание: Очевидно, $\forall$ матрицы $A_{n\times n}$ ее характеристический многочлен это аннулятор $\mathcal{A}$.

Следствие 1. $\forall \mathcal{A} \in End(V)$, φ - минимальный многочлен, тогда $\chi \,\vdots\, \varphi$ (из теоремы о минимальном мн-не.)

Следствие 1.5. $\deg \varphi \le n$, т.к. $\deg \chi = n$ и $\chi \,\vdots\, \varphi$.

Следствие 2. $\forall \mathcal{A} \in End(V)$. Если $\deg \varphi = n = \deg \chi \Leftrightarrow \varphi \equiv \chi \cdot (-1)^n$

Теорема (о множестве корней характеристического многочлена)

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ множество корней χ совпадает с множеством корней φ (без учета кратности)

Доказательство:

1. λ корень $\varphi \Rightarrow \lambda$ - корень χ. Очевидно.
2. Пусть λ корень χ. Мы должны показать, что и у φ есть такой корень. Тогда есть 2 варианта:
   (a) $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$ - с.ч. $\Rightarrow \exists u$ - собственный вектор $\neq \mathbb{O}$

   Так как u - собственный вектор, то $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)u = \mathbb{O}$

   $(t-\lambda)$ - минимальный аннулятор элемента u, φ - минимальный многочлен $\Rightarrow$ аннулятор v, откуда $\varphi \,\vdots\, (t-\lambda) \Rightarrow \lambda$ корень φ - победили

   (b) $\lambda \notin K \equiv \mathbb{R}$, т.е. λ - не собственное число. Прибегаем к комплексификации:

   Для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ λ - корень. Как мы знаем $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \equiv \chi_{\mathcal{A}} = \chi$.

   Тогда по пункту a это корень минимального многочлена в $\varphi_{\mathbb{C}}$.

   Построим минимальный многочлен:

   Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис. $\mathcal{A} \overset{e}{\leftrightarrow} A$. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \overset{e}{\leftrightarrow} A$. Начнем строить по определению минимальный многочлен. Для этого мы должны найти $\psi_i(t)$ - аннулятор e_i.

   Выпишу: $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \ldots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$. Причем k такое, что $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \ldots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{k-1} e_i$ - линейно независимы, а $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \ldots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$ - зависимы. Заметим, что $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_j = \mathcal{A}e_j$.

   Поэтому по алгоритму построения мин. многочлена $\varphi_j = \varphi_{j\ \mathbb{C}}$. А уже откуда λ корень φ - победили!

Q.E.D.

Замечание: $\chi(t) = \prod (t-\lambda)^{\alpha(\lambda)}$ и $\varphi(t) = \prod (t-\lambda)^{m(\lambda)}$, верно, что: $1 \le m(\lambda) \le \alpha(\lambda)$

1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство.

Пусть у нас есть $\varphi(t)$ - многочлен над полем K (все его коэффициенты в K).

Пусть все его корни $\varphi \in K$. Тогда давайте разложим его в произведение корней:

$$\varphi(t) = \prod_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$$

давайте теперь вынесем один из корней за скобки. Получим:

$$\varphi(t) = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \cdot \prod_{\mu \neq \lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$$

Переобозначим $\varphi_\lambda(t) = \prod\limits_{\mu \neq \lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$ и подставим:

$$\varphi(t) = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(t)$$

Возьмем P_{m-1} - множество всех многочленов над полем K степени $\leq m-1$.

Зафиксируем φ и λ и назовем **главным идеалом**, порожденным многочленом φ_λ:

$$I_\lambda = \{p \in P_{n-1} | p \vdots \varphi_\lambda\}$$

Очевидно I_λ линейное подпространство. Заметим, что $p \vdots \varphi_\lambda \Leftrightarrow p(t) = a_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$

Поэтому на самом деле: $I_\lambda \cong \{a_\lambda\} = P_{m(\lambda)-1}$

Откуда $\dim I_\lambda = m(\lambda)$.

Теорема:

$P_{m-1} = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ - корень } \varphi} I_\lambda$.

Доказательство:

1. Проверим дизъюнктность:

$$\mathbb{O} = \sum_{\lambda \text{ - корень } \varphi} p_\lambda \in I_\lambda = \sum_{\lambda} a_\lambda(t)\varphi_\lambda(t)$$

Зафиксируем какую-то λ и вынесем ее за скобки:

$$a_\lambda\varphi_\lambda(t) + \sum_{\mu \neq \lambda} a_\mu(t) \cdot \varphi_\mu(t)$$

Как мы знаем, для всех $\mu \neq \lambda : \varphi_\mu \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}$

А так же мы знаем, что $\varphi_\lambda(t)$ не делится на $(t-\lambda)^{m(\mu)}$

Откуда получаем, что $a_\lambda \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}$.5 А это значит, что $a_\lambda \equiv 0$

Откуда дизъюнктно.

2. Проверим размерность $\dim(\bigoplus_\lambda I_\lambda) = \sum_\lambda \dim I_\lambda = \sum_\lambda m(\lambda) = \dim P_{m-1}$, откуда прямая сумма.

Q.E.D.

Следствие 1: $\forall p \in P_{m-1} : \exists! p = \sum_\lambda p_\lambda$, где $p_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$, $\deg \alpha_\lambda \leq m(\lambda) - 1$.

В частности, $1 = \sum_{\lambda \text{ корень}} p_\lambda$ - **полиномиальное разложение единицы**

Замечание:

1. Пусть $\lambda \neq \mu$ - корни φ

   $p_\lambda \in I_\lambda,\ p_\mu \in I_\mu,\ p_\lambda p_\mu \vdots \varphi$

   $p_\lambda(t) = \alpha_\lambda \varphi_\lambda(t)$, $p_\mu(t) = \alpha_\mu \varphi_\mu(t)$

   $p_\lambda(t) p_\mu(t) = \alpha_\lambda \varphi_\lambda(t) \alpha_\mu \varphi_\mu(t) \vdots \varphi$
2. Пусть $\forall\lambda,\ m(\lambda) = 1$, тогда $\varphi(t) = \prod_\lambda (t - \lambda)$.

   $I_\lambda \ni p_\lambda = \alpha_\lambda \varphi_\lambda$, тогда $\alpha_\lambda = \text{const}$. Это можно понять так же из $0 \leq \deg \alpha_\lambda \leq m(\lambda) - 1 = 0$

Теорема (Лагранж)

Пусть $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$, то есть $\varphi(t) = \prod_\lambda (t - \lambda)$.Тогда:

$$\forall p \in P_{m-1} : p(t) = \sum_\lambda \frac{p(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(t)$$

Доказательство:

Возьму многочлен p и посмотрю значение в λ.

$p(\lambda) = \sum_\mu p_\mu$ - я могу так разложить из следствия 1 (см. выше). Также заметим, что a_μ - константы. Тогда получается вот такая формула:

$$p(\lambda) = \sum_\mu p_\mu = \sum_\mu a_\mu \varphi_\mu(\lambda)$$

Заметим, что при $\mu \neq \lambda$ у нас заннуляется сумма, так что $p(\lambda) = a_\lambda \varphi_\lambda(\lambda)$.

Откуда получаю, что $\alpha_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\varphi_\lambda(\lambda)}$.

Теперь про производную: $\varphi'(t) = ((t - \lambda) \cdot \varphi_\lambda(t))' = \varphi_\lambda(t) + (t - \lambda)\varphi'_\lambda(t)$

Зафиксируем λ. Получу, что в таком случае $\varphi'(\lambda) = \varphi_\lambda(\lambda)$. Откуда, если присмотреться, мы получаем формулу из теоремы.

Q.E.D.

Замечание. Эта теорема позволяет нам быстро искать $\alpha_\lambda(t)$, в случае всех m единиц, потому что в таком случае $\alpha_\lambda(t)$ - константа.

Следствие: $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$: Пусть $1 = \sum_\lambda \frac{1}{\varphi'(\lambda)} \varphi_\lambda(t) = \sum_\lambda p_\lambda(t) \Rightarrow t = \sum_\lambda \lambda p_\lambda(t)$

Доказательство: $t = \sum\limits_{\lambda} \dfrac{\lambda}{\varphi'(t)}\varphi_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$

Q.E.D.

Вернемся к операторам. Возьмем $\mathcal{A} \in End(V)$:

$\varphi(t)$ минимальный многочлен, все корни $\varphi \in K(\Leftrightarrow$ все корни $\chi \in K$), то есть являются собственными числами.

$\exists ! 1 = \sum\limits_{\lambda \text{ - корни } \varphi} p_\lambda(t)$ —**<u>полиномиальное разложение единицы</u>**.

$\varepsilon = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda(\mathcal{A})$, $\varepsilon = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda$ — **<u>оператор разложения единицы</u>**.

Позамечаем некоторые интересные факты:

1. $P_\lambda \in End(V)$
2. Возьму $\lambda \neq \mu$. Замечу, что $p_\lambda \cdot p_\mu \vdots \varphi$. Тогда $p_\lambda(t)p_\mu(t) = \alpha(t)\varphi(t)$, откуда:

   $\forall v \in V : P_\lambda P_\mu v = a(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{A})v = \mathbb{O}$, из-за того, что φ - минимальный многочлен.

   Откуда $P_\lambda P_\mu$ - аннулятор $\mathcal{A}$ или $P_\lambda P_\mu = \mathbb{O}$
3. $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda \\ P_\lambda \cdot P_\mu = \mathbb{O} \end{cases} \quad \Leftrightarrow P_\lambda$ - по теореме это проекторы на $\operatorname{Im} P_\lambda,\ V = \bigoplus \operatorname{Im} P_\lambda$

Такие проекторы называются **<u>спектральными</u>**. Это не те самые проекторы на V_λ. Пока что это проекторы на их собственные подпространства. Они обладают теми свойствами проекторов, что мы вывели до этого.

<u>**ЕСЛИ** $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$</u>, тогда по следствию из теоремы Лагранжа, мы знаем:

$\varepsilon = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda$, $\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda \cdot \lambda \Rightarrow \mathcal{A}$ о.п.с., λ - с.ч $\mathcal{A}$.

Откуда это будут проекторы на собственные подпространства.

Следствие: Т.е. $\mathcal{A}$ о.п.с. достаточно удотворять: $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$ в минимальном многочлене.

<u>def:</u> $\mathcal{A} \in End(V)$, λ - с.ч. $\mathcal{A}$. K_λ - **<u>корневое подпространство</u>**, если:

$K_\lambda = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$, где $m(\lambda)$ кратность λ в мин. многочлене φ. $\varphi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$

Очевидно $V_\lambda \subseteq K_\lambda$.

<u>Теорема (о корневом подпространстве)</u>

1. K_λ - инвариантно относительно $\mathcal{A}$.
2. $\operatorname{Im} P_\lambda = K_\lambda$, где $\varepsilon = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda$ - оператор разложение единицы.

   Называются образами спектров проекторов.

   $\Rightarrow \bigoplus\limits_{\lambda} K_\lambda = V$
3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ - минимальный многочлен для $B = \mathcal{A}\Big|_{K_\lambda} \in End(K_\lambda)$

Доказательство:

1. Возьмем $v \in K_\lambda = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$

   Заметим, что $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$ - многочлен от $\mathcal{A}$. Тогда:

   $$\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}\mathcal{A}$$

   Умножим и левую и правую часть на v. Получим:

   $$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}(\mathcal{A}v) = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbb{O}$$

   Откуда $\mathcal{A}v \in \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda \Rightarrow K_\lambda$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$

2. Вспомним, что: $\varepsilon = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda,\ P_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A}),\, p_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$

   Пусть $v \in V$. Тогда посмотрим на:

   $$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot P_\mu v =$$

   Заменим P_λ по формуле:

   $$= ((\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \alpha_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \varphi_\lambda(\mathcal{A}))v =$$

   Так как это все многочлены от $\mathcal{A}$, то они перестановочны:

   $$= (\alpha_\lambda(\mathcal{A}) \cdot (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(\mathcal{A}))v = (\alpha_\lambda(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{A}))v = \mathbb{O}$$

   Так как $\varphi(\mathcal{A})v = \mathbb{O}$ (минимальный многочлен).

   Откуда $P_\lambda v \in \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$. Следовательно $\operatorname{Im} P_\lambda \subseteq K_\lambda$.

   Теперь докажем, что они совпадают:

   Возьму $\mu \neq \lambda$, а также $v \in K_\lambda$. Посмотрим на $P_\lambda v$:

   $$P_\mu v = \alpha_\mu(\mathcal{A})\varphi_\mu(\mathcal{A})v =$$

   Мы знаем, что в $\varphi_\mu(\mathcal{A})$ содержится множитель $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$. Давайте его вынесем за скобки, получим:

   $$\alpha_\mu(\mathcal{A})\varphi_\mu(\mathcal{A})v = \alpha_\mu(\mathcal{A})\beta_\mu(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v$$

   Так как $v \in K_\lambda = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$, то $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbb{O}$, откуда $P_\mu v = \mathbb{O}$.

   Откуда получаю, что $\forall v \in K_\lambda,\ v = \varepsilon v = \sum\limits_{\mu} P_\mu v = P_\lambda v$. Следовательно $K_\lambda \subseteq \operatorname{Im} P_\lambda$, но мы уже сказали, что $\operatorname{Im} P_\lambda \subseteq K_\lambda$, поэтому $K_\lambda = \operatorname{Im} P_\lambda$.

   Частный случай: если нет $\mu \neq \lambda$, т.е. λ — единственное с.ч. $\mathcal{A}$, то $\varphi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow \varphi_\lambda(t) \equiv 1 \Rightarrow a_\lambda(t) \equiv 1 \Rightarrow \mathcal{P}_\lambda = \varepsilon \Rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{P}_\lambda = V$.

   С другой стороны, $K_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$, но $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$ это буквально $\varphi(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$, так что $K_\lambda = V = \operatorname{Im} \mathcal{P}_\lambda$.

3. $B = \mathcal{A}\Big|_{K_\lambda} \in End(K_\lambda)$

   $\forall v \in K_\lambda : (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} v = \mathbb{O}$, откуда получаем, что $\psi(t) = (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ - аннулятор $\mathcal{B}$.

   Хотим понять: минимальный ли это многочлен?

   Предположим, что он не минимальный, тогда есть $\psi_i(t)$ - минимальный многочлен $\mathcal{B}$: $\deg \psi_i < \deg \psi$. Заметим, что любой аннулятор $\mathcal{B}$ делится на минимальный многочлен, поэтому $\psi_i(t) = (t-\lambda)^k$, причем $k \leq m(\lambda) - 1$. Тогда заметим, что $\psi_1(t) = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)-1}$ - тоже аннулятор $\mathcal{B}$.

   Если мы покажем, что $\varphi_1(t) = \psi_1(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$ - минимальный многочлен $\mathcal{A}$, тогда наш искомый минимальный многочлен не был минимальным. Как мы знаем:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_\mu v_\mu, \text{ где } v_\mu \in \operatorname{Im} P_\mu = K_\mu$$

   Покажем, что $\varphi_1(t)$ - минимальный многочлен:

$$\varphi_1(\mathcal{A})v = \psi_1(\mathcal{A})\varphi_\lambda(\mathcal{A})v = \psi_1(\mathcal{A})\varphi_\lambda(\mathcal{A}) \sum_\mu v_\mu = \varphi_\lambda(\mathcal{A})\psi_1(\mathcal{A})v_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \psi_1(\mathcal{A})\varphi_\lambda(\mathcal{A})v_\mu$$

   Как мы сказали выше: $\psi_1(t)$ - аннулятор B, откуда $\psi_1(\mathcal{A})v_\lambda = 0$ (тк $v_\lambda \in K_\lambda$). Также как мы знаем в $\varphi_\lambda(\mathcal{A})$ содержится $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\mu)}$. А $v_\mu \in K_\mu = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\mu)}$. То есть наш многочлен и вправду минимальный. То есть мы пришли к противоречию.

   Откуда $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ - минимальный многочлен для $\mathcal{B}$.

Q.E.D.

Следствие 1: Очевидно, что тогда $1 \leq m(\lambda) \leq \dim(K_\lambda)$.

Следствие 2: $\mathcal{A}$ - о.п.с $\Leftrightarrow \varphi(t) = \prod_\lambda (t-\lambda)$, т.е $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$, (все корни $\varphi \in K$)

Доказательство:

$\Rightarrow$ Пусть $\mathcal{A}$ - о.п.с.. Тогда мы знаем, что:

$$V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч}} V_\lambda, \lambda \text{ - корень } \varphi$$

$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)v = 0 \Rightarrow (t-\lambda)$ - минимальный аннулятор v, где v - собственный вектор. Мы знаем, что:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_\lambda v_\lambda$$

Докажем, что $\varphi(t) = \prod_\lambda (t-\lambda)$ - минимальный многочлен:

$$\varphi(\mathcal{A}) \cdot v = \left(\prod_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \right) \sum_\mu v_\mu = \mathbb{O}$$

Это верно, потому что в это произведение входят анулляторы собственных подпространств $(t-\lambda)$, которые будут занулять каждое из слагаемых. Откуда это аннулятор $\mathcal{A}$. А так как корни характеристического и минимального совпадают по теореме о множестве корней характеристического многочлена, а так же потому что λ - собственные числа - получаем, что данный многочлен - минимальный.

$\Leftarrow$ Уже доказывали, смотрите **ЕСЛИ** над теоремой о корневом подпространстве.

Q.E.D.

1.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

!!! Не путать разложение жордана с жордановой формой матрицы !!!

def: $B \in End(V)$ называется **нильпотентным**, если его минимальный многочлен $= t^{\nu}$,

(т.е. $B^{\nu} = \mathbb{O}$), где ν - **индекс нильпотентности**.

Теорема (Разложение Жордана)

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$, все корни $\chi, \varphi \in K$. Надо доказать, что:

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$, где $\mathcal{D}$ - о.п.с, $\mathcal{B}$ - нильпотентный, причем $DB = BD$.

Доказательство:

Возьмем оператор $\mathcal{A}$. У него есть $\varphi = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ - минимальный многочлен.

Разложим на операторы разложения единицы:

$$\varepsilon = \sum_{\lambda \text{ - корень } \varphi} P_{\lambda}$$

Позже мы этим воспользуемся.

Возьму $\mathcal{D} := \sum\limits_{\lambda} \lambda P_{\lambda}$ — очевидно, $\mathcal{D}$ - о.п.с. (смотрите теоремы о.п.с).

Возьму $\mathcal{B} := \mathcal{A} - \mathcal{D}$. Все, что осталось проверить - нильпотентность $\mathcal{B}$.

Пусть $\nu = \max(m_{\lambda})$, где λ - корень φ. Тогда:

$$\mathcal{B}^{\nu} = \left(\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda}\right)^{\nu} = \left(\mathcal{A} \sum_{\lambda} P_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda}\right)^{\nu} = \left(\sum_{\lambda} \left(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon\right) P_{\lambda}\right)^{\nu}$$

Как мы помним $\forall \mu \neq \lambda : P_{\lambda} \cdot P_{\mu} = \mathbb{O}$, а также $P_{\lambda}^2 = P_{\lambda}$. Поэтому:

$$\left(\sum_{\lambda} \left(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon\right) P_{\lambda}\right)^{\nu} = \sum_{\lambda} \left(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon\right)^{\nu} P_{\lambda}$$

А как мы помним из определения $P_{\lambda} = a_{\lambda}(\mathcal{A})\varphi_{\lambda}(\mathcal{A})$. А также, так как $\nu = \max(m_{\lambda})$, то внутри каждой скобки есть множитель $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$. Откуда $\mathcal{B}$ и вправду нильпотентно.

Теперь докажем перестановочность. $\mathcal{B}\mathcal{D} = \left(\mathcal{A} - \sum\limits_{\lambda} \lambda P_{\lambda}\right) \sum\limits_{\mu} \mu P_{\mu}$

А так как это многочлены от $\mathcal{A}$, то они перестановочны. Поэтому и получается наша перестановочность

Q.E.D.

Замечание: $\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$

Теорема (единственность разложения Жордана):

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$. Доказать, что разложение Жордана единственно, то есть $\exists! D, B$.

Доказательство:

Пусть у нас есть еще одно разложение Жордана: $\mathcal{A} = \mathcal{D}' + C$, $\mathcal{D}'C = C\mathcal{D}'$, где $\mathcal{D}'$ - о.п.с, а C - нильпотентый оператор.

$\mathcal{D}' = \sum\limits_{\mu} \mu Q_\mu$, где Q_μ - проекторы.

Давайте разметим план доказательства:

1. Множество λ совпадает с множеством μ.
   1.1 Докажем, что $CQ_\mu = Q_\mu C$.
   1.2 Докажем, что $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$.
   1.3 Покажем для каждого μ аннуляторы $\operatorname{Im} Q_\mu$. $\psi_\mu = (t-\mu)^{k(\mu)}$
   1.4 Покажем, что произведение ψ_μ - аннулятор $\mathcal{A}$.
   1.5 Покажем, что на самом деле это минимальный многочлен, откуда множество корней совпадет.
2. Докажем совпадение $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$.

Начнем доказательство:

1.1 Возьмем μ. Докажем, что $CQ_\mu = Q_\mu C$

Посмотрим на $\mathcal{D}'Q_\mu$. Используя свойства проекторов, оно равно:

$$\mathcal{D}'Q_\mu = \left(\sum_{\xi} \xi Q_\xi\right) Q_\mu = \mu Q_\mu$$

Посмотрим на $Q_\mu \mathcal{D}'$. Используя свойства проекторов, оно равно:

$$Q_\mu \mathcal{D}' = Q_\mu \left(\sum_{\xi} \xi Q_\xi\right) = \mu Q_\mu$$

Откуда $\mathcal{D}'$ и Q_λ - перестановочны.

Возьмем ξ, μ. Для них выполнено:

$$(\xi - \mu) Q_\xi C Q_\mu = \xi Q_\xi C Q_\mu - Q_\xi C \mu Q_\mu$$

Как мы только что доказали: $\mu Q_\mu = \mathcal{D}'Q_\mu$. Поэтому:

$$\xi Q_\xi C Q_\mu - Q_\xi C \mu Q_\mu = \mathcal{D}' Q_\xi C Q_\mu - Q_\xi C \mathcal{D}' Q_\mu$$

А так же мы только что доказали, что $\mathcal{D}'$ и Q_μ перестановочны для любого μ. Откуда:

$$\mathcal{D}' Q_\xi C Q_\mu - Q_\xi C \mathcal{D}' Q_\mu = Q_\xi \mathcal{D}' C Q_\mu - Q_\xi C \mathcal{D}' Q_\mu = Q_\xi (\mathcal{D}'C - C\mathcal{D}') Q_\mu$$

А как мы знаем из определения жорданового разложения C и D' перестановочны. Это значит, что $D'C - CD' = \mathbb{O}$. Откуда:

$$(\xi - \mu) Q_\xi C Q_\mu = \mathbb{O} = (\mu - \xi) Q_\mu C Q_\xi$$

То есть для $\xi \neq \mu$: $Q_\xi C Q_\mu = Q_\mu C Q_\xi = \mathbb{O}$ Теперь вернемся к тому, что мы изначально хотели - перестановочность C, Q_μ:

$$CQ_\mu = \varepsilon C Q_\mu = \left(\sum_\xi Q_\xi\right) CQ_\mu$$

Хочу использовать только что доказанный факт:$Q_\xi C Q_\mu = Q_\mu C Q_\xi$:

$$\left(\sum_\xi Q_\xi\right) CQ_\mu = \sum_\xi Q_\mu C Q_\xi = Q_\mu C \left(\sum_\xi Q_\xi\right) = Q_\mu C$$

Откуда $Q_\mu C = CQ_\mu$ — перестановочны.

1.2 Докажем, что $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$. Сначала посмотрим на случай $k = 1$:

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)Q_\mu = (\mathcal{D}' + C - \mu\varepsilon)Q_\mu = (\sum_\xi \xi Q_\xi + C - \mu)Q_\mu$$

Воспользуемся свойствами проекторов и получим, что:

$$(\sum_\xi \xi Q_\xi + C - \mu)Q_\mu = \mu Q_\mu + CQ_\mu - \mu Q_\mu = CQ_\mu$$

Воспользуемся индукцией:

База: $k = 1$ доказана сверху.

Индукционный переход: Пусть выполнено $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$, тогда выполнено: $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k+1} Q_\mu = C^{k+1} Q_\mu$. Докажем:

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k+1} Q_\mu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^1 (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon) C^k Q_\mu = C^k (\mathcal{A} - \mu\varepsilon) Q_\mu = C^{k+1} Q_\mu$$

1.3 Посмотрим на $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu$. Как мы доказали в пункте 1.2 $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$. Как мы помним, C - нильпотентная, откуда есть k начиная с которого $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = \mathbb{O}$. Давайте для каждого μ введем свое $k(\mu)$ - минимальная степень, чтобы получился ноль. Из перестановочности $C^j Q, QC^j$ получаю, что $(A - \mu\varepsilon)^{k(\mu)} Q = Q(A - \mu\varepsilon)^{k(\mu)}$

То есть $Q_\mu (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k(\mu)} Q_\mu = C^{k(\mu)} Q_\mu = \mathbb{O}$. Это значит, что любой вектор из $\operatorname{Im} Q\mu$ применяя к нему $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k(\mu)}$ будет получаться ноль. То есть многочлен $(t - \mu)^{k(\mu)}$ - минимальный аннулятор векторов из $\operatorname{Im} Q_m$.

Замечание: именно здесь применяется пункт 1.1.

1.4 Возьму $\psi = \prod\limits_\mu (t - \mu)^{k(\mu)}$. Покажу, что это аннулятор $\mathcal{A}$.

$\forall x : \exists! x = \sum\limits_\mu x_\mu$, где $x_\mu \in \operatorname{Im} Q_\mu$ - по определению проекторов.

Подействуем на x нашим минимальным многочленом:

$$\psi(\mathcal{A})x = \left(\prod_\mu (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k(\mu)}\right) \sum_\xi x_\xi = \sum_\xi \left(q_\xi \cdot (\mathcal{A} - \xi)^{k(\xi)} \cdot x_\xi\right) = \mathbb{O}$$

Это ноль потому что каждое слагаемое в сумме ноль, а каждое слагаемое ноль, потому что в $\psi(\mathcal{A})$ входит множитель $(\mathcal{A} - \xi)^{k(\xi)}$ - аннулятор векторов из $\operatorname{Im} Q_\mu$.

Откуда ψ аннулятор $\mathcal{A}$.

1.5 Как мы знаем минимальный многочлен делится на минимальные аннуляторы векторов, откуда φ делится на каждое ψ_λ, откуда делится на НОК $= \psi$. Также мы только что доказали, что ψ аннулятор $\mathcal{A}$, откуда ψ делится на φ. А раз ψ делится на φ и φ делится на ψ, то $\psi \equiv \varphi$ - минимальный аннулятор. Из этого следует, что множество λ и множество μ совпадает.

Замечание: совпадение λ и μ еще не говорит нам о том, что $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.

2. $k(\lambda) = m(\lambda)$ из того, что совпали ψ, φ.

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\lambda)} Q_\lambda = Q_\lambda (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\lambda)} = \mathbb{0}$$

Откуда векторы из $\operatorname{Im} Q_m \subseteq \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$. Но мы помним, что $\bigoplus\limits_\lambda K_\lambda = V$ и $\bigoplus\limits_\lambda \operatorname{Im} Q_\lambda = V$, откуда они совпадают. Откуда $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

Q.E.D.

Теорема:

Разложение Жордана $\mathcal{A} = D + B$. Тогда $\chi_\mathcal{A} \equiv \chi_\mathcal{D}$

Доказательство:

По теореме о о.п.с у $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$ совпадает множество корней.

Но нам надо теперь понять что-то про степени. $\nu = \max(m(\lambda)); \mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$. Тогда:

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu - \mathcal{B}^\nu t^\nu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon - \mathcal{B}t)((\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-2}\mathcal{B}t + \ldots + (\mathcal{B}t)^{\nu-1})$$

Так как $\mathcal{B}$ - многочлен от $\mathcal{A}$, то мы можем так разложить

Возьмем μ не корень. Посчитаем определители. С одной стороны это: $\det(A - \mu\varepsilon)^\nu = (\chi_\mathcal{A})^\nu$ - не зависит от t. С другой стороны это:

$$\det(A - \mu\varepsilon)^\nu = \det(\mathcal{A} - \mu\varepsilon - \mathcal{B}t)\det((\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-2}\mathcal{B}t + \ldots + (\mathcal{B}t)^{\nu-1})$$

Тут два многочлена зависящих от t (оба не нули, иначе μ - корень).

Заметим, что слева многочлен нулевой степени t. Когда произведение двух многочленов от t дает в произведении многочлен нулевой степени? Когда это многочлены нулевой степени. Откуда это константы

Давайте посчитаем эти константы. Подставим в первый многочлен $t = 1$, а во второй подставим $t = 0$. Получим:

$$(\chi_\mathcal{A}(\mu))^\nu = \chi_\mathcal{D}(\mu)(\chi_\mathcal{A}(\mu))^{\nu-1})$$

Откуда $\chi_\mathcal{A}(\mu) = \chi_\mathcal{D}(\mu)$. Получили, что в любой точке - не корне, у нас совпадение многочленов. В корнях они оба зануляются, откуда $\chi_\mathcal{A} \equiv \chi_\mathcal{D}$.

Q.E.D.

Следствие 1: $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{D} \Rightarrow \det\mathcal{A} = \det\mathcal{D}$

Следствие 2: $\forall\mathcal{A} : \alpha(\lambda) = \dim K_\lambda$

Доказательство:

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ - разложение Жордана. $\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$ из теоремы.

$D = \sum\limits_{\lambda} \lambda P_\lambda$, $\mathcal{D}$ - о.п.с. $\forall$ с.ч $\lambda : \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$, а теперь вспомним, что проекторы это с одной стороны проекторы на K_λ, а с другой стороны на собственные подпространства $\mathcal{D}$ V_λ.

Q.E.D.

1.10 Жорданова форма матрицы. Формула Фробениуса.

Возьмем какое-то λ и рассмотрим сужение. Введем некоторые локальные обозначения:

$K = K_\lambda = \mathcal{K}er(A - \lambda)^{m(\lambda)}, B = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)\Big|_K, m = m(\lambda), \alpha = \alpha(\lambda), \gamma = \gamma(\lambda).$

Возьмем $K_r = \mathcal{K}er(B^r) = \mathcal{K}er((\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^r), r = 1, \ldots, m : K_\lambda = K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_m = K$. Заметим, что m - минимальная степень, когда он зануляется. Докажем, что там строгое включение:

Доказательство:

Пусть существует: $K_r \equiv K_{r+1}$. $\mathcal{K}er B^r = \mathcal{K}er B^{r+1}$. Тогда по теореме о ранге и дефекте:

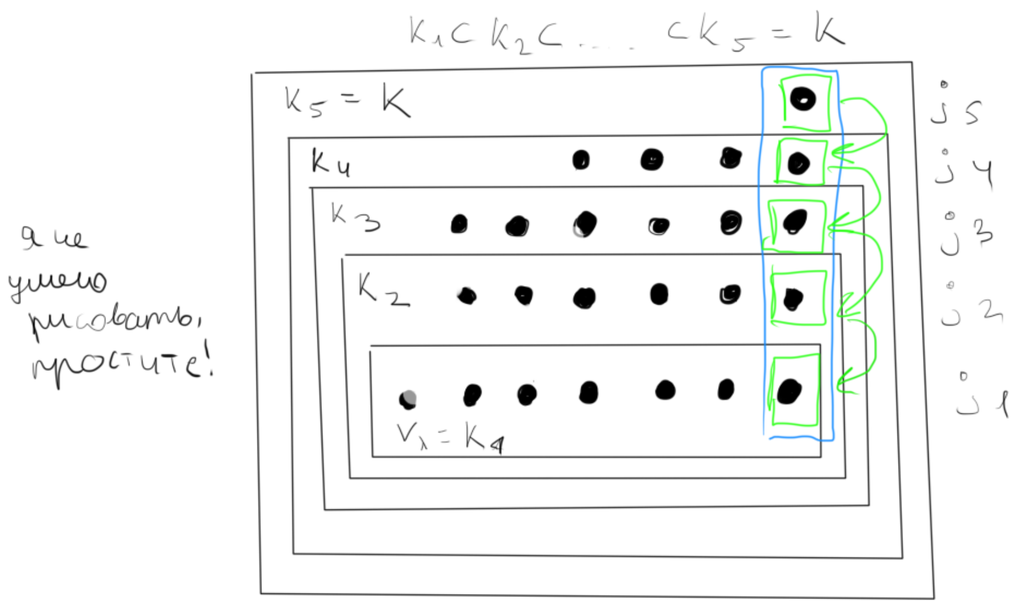
$rg B^r = rg B^{r+1}, \operatorname{Im} B^{r+1} \subseteq \operatorname{Im} B^r \Rightarrow \operatorname{Im} B^{r+1} = \operatorname{Im} B^r$

Что это значит? Пусть $X = \operatorname{Im} B^r$. Тогда $BX = X, \quad B^2 X = X, \quad \ldots \quad , B^m X = X$.

Вспомним, что $B^m = \mathbb{O}$, откуда $X = \mathbb{O}$, но в таком случае (так как r от 1 до $m-1$, то мы нашли число $r < m$, что $B^r = \mathbb{O}$. Но такого не может быть, так как m - минимальная степень, чтобы оператор занулился. Противоречие. Откуда все K_i различны.

Q.E.D.

Доказали, что включения строгие. А теперь объясним все на рисунке, а позже введем более формальную терминологию:



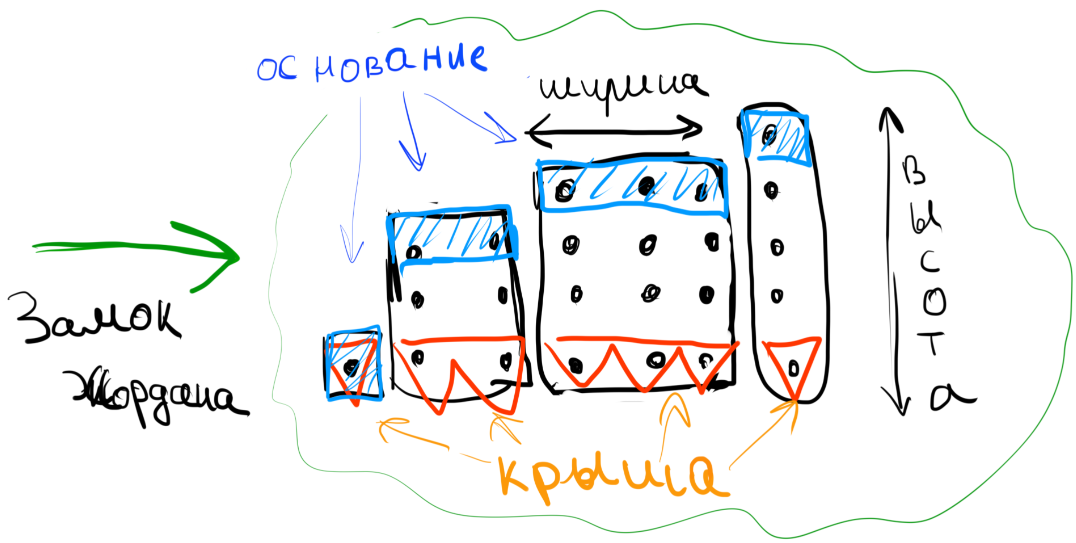
Рассмотрим такое K, что его ранг 24. И давайте сопоставим точкам на рисунке базисные вектора. Тогда у K_1 будет 6 базисных векторов, у K_2 будет 11 и так далее. Тогда давайте введем новое определение: $\overline{K}_5$, такое подпространство, что $(KB + K_4) \oplus \overline{K}_5 = K$. Возьму оттуда первый базисный вектор. Назову его j_5. На картинке вы можете это отчетливо видеть. Тогда возьму $j_4 = Bj_5$, $j_3 = Bj_4$, $j_2 = Bj_3$, $j_1 = Bj_2$. Причем заметим, что в таком случае $j_i \in K_i$.

Такие j_5, j_4, j_3, j_2, j_1 мы будем называть **циклическим базисом** длины 5, а j_4, j_3, j_2, j_1 будут называться **присоединенными**.

Пока упустим, почему эти векторы линейно независимы, это потом докажется. Давайте сузим наш оператор до $S = span(j_1, \ldots, j_5)$ и попытаемся понять: какая будет матрица оператора. Заметим, что $K_1 = V_\lambda$, откуда мы знаем, что j_1 - собственный вектор, соответствующий собственному числу λ, то есть $Aj_1 = \lambda j_1$. $j_1 = Bj_2$, то есть $\mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2$. Таким образом получаю, что моя матрица будет:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Такая матрица называется **жордановой клеткой**, порожденной циклическим базисом размерности 5. Обозначается $J_5(\lambda) = \lambda E + I_5$, где I_5 - матричка из единиц на диагонали, расположенной выше главной. По-другому еще называется **блок нижнего уровня**.



Давайте теперь возьмем все такие циклические базисы (столбики) одной высоты и объединим их. Получатся **башни**. Или более формально башня - подпространство, порожденное циклическими базисами одной длины. У башни есть **опорные подпространства** (основание башни), а так же у каждой башни есть **крыша**. Они подписаны на рисунках сверху. Башни мы будем обозначать τ_h, где h высота башни. То есть на данном рисунке присутствуют башни $\tau_1, \tau_3, \tau_4, \tau_5$, но не присутствует башня τ_2.

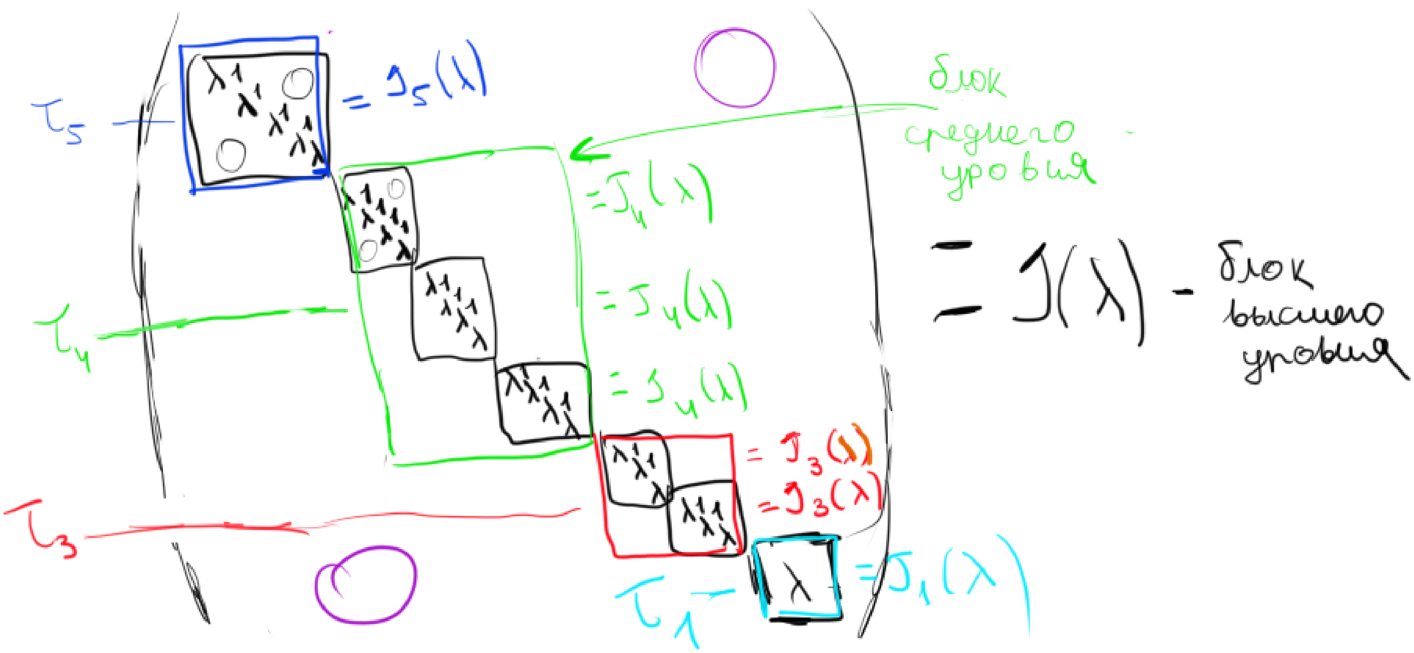
Замок Жордана, возвышающийся над живописными холмами Прованса, хранит немало тайн. Говорят, что в 15 веке в нем жил загадочный алхимик по имени Пьер. Местные жители часто видели странное зеленоватое свечение в окнах замка по ночам...

Так о чем это я? Вся эта конструкция величается **ЗАМКОМ ЖОРДАНА**. А если у нас $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$, то наш замок будет просто полоской, поэтому мы его будем называть **деревней Жордана**.

Так вот матрица, соответствующая этой K_λ, выраженной через циклические базисы:

$$\begin{pmatrix} J_5(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix} = J(\lambda)$$

Называется **блоком верхнего уровня**, причем m - размер самой большой клетки. При этом, если раскрыть все J, то получится:



Теперь мы приходим к **матрице в форме Жордана**, она состоит блоков верхнего уровня, соответствующих собственных чисел

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda) & & & \\ & J(\mu) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\xi) \end{pmatrix}$$

$T = T_{\text{кан} \to \text{жорд. базис}} =$ объединение всех циклических базисов.

И если A - матрица $\mathcal{A}$, то: $T^{-1}AT = J$.

А ТЕПЕРЬ НА ЯЗЫКЕ МАТЕМАТИКИ:

$B = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)\Big|_K$. Введу $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_r \subset \ldots \subset K_m = K$, где $K_r = \mathcal{K}er B^r$.

Введем временное обозначение:

$z_0 = BK = \operatorname{Im} B$
$z_1 = BK + K_1$
$\vdots$
$z_r = BK + K_r$
$\vdots$
$z_m = BK + K_m = K$

Заметим, что в таком случае: $z_0 \subseteq z_1 \subseteq \ldots \subseteq z_m$, а также $z_{r+1} = z_r \oplus \overline{K}_{r+1}$, где $\overline{K}_r$ - **опорное подпространство**. Тогда заметим вот такую формулу:

$$K = z_m = BK + K_m = z_{m-1} \oplus \overline{K}_m = BK \oplus \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m$$

Прямую сумму K_λ называют **прямой суммой опорных подпространств**.

Теорема:

$\forall r : 1 \le r \le m-1$ будет выполнено: $B^r K = B^{r+1} K \oplus B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus B^r \overline{K}_m$

Доказательство:

Пусть $x_* \in K$. Тогда существует и единственно представление в прямой сумме опорных подпространств и BK:

$$x_* = Bx + x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \text{ где } x_j \in \overline{K}_j$$

Теперь умножим правую и левую часть на B^r:

$$B^r x_* = B^{r+1} x + B^r x_1 + \ldots + B^r x_r + \ldots + B^r x_m$$

Заметим, что в таком случае все x_j, где $j \le r$ уйдут, потому что $x_j \in \overline{K}_j$, то есть $B^j x_j = \mathbb{0}$.

$$B^r K = B^{r+1} K + B^r \overline{K}_{r+1} + B^r \overline{K}_{r+2} + \ldots + B^r \overline{K}_m$$

Осталось проверить дизъюнктность, то есть проверить тривиальность разложения нуля:

$$\mathbb{0} = B^{r+1} x + B^r x_{r+1} + \ldots + B^r x_m = B^r (Bx + x_{r+1} + \ldots + x_m)$$

Заметим, что то, что находится внутри скобок находится в $\mathcal{K}er B^r \subset z_r = BK \oplus \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_r$. Откуда существует единственное разложение через эту прямую сумму:

$$Bx + x_{r+1} \ldots + x_m = By + x_1 + \ldots + x_r$$

Но, как мы помним BK и $\overline{K}_j$ - дизъюнктны из прямой суммы опорных пространств и $\operatorname{Im} B = BK$. То есть $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$. Откуда получаем, что Bx тоже ноль, откуда разложение нуля - тривиально.

Q.E.D.

Следствие:

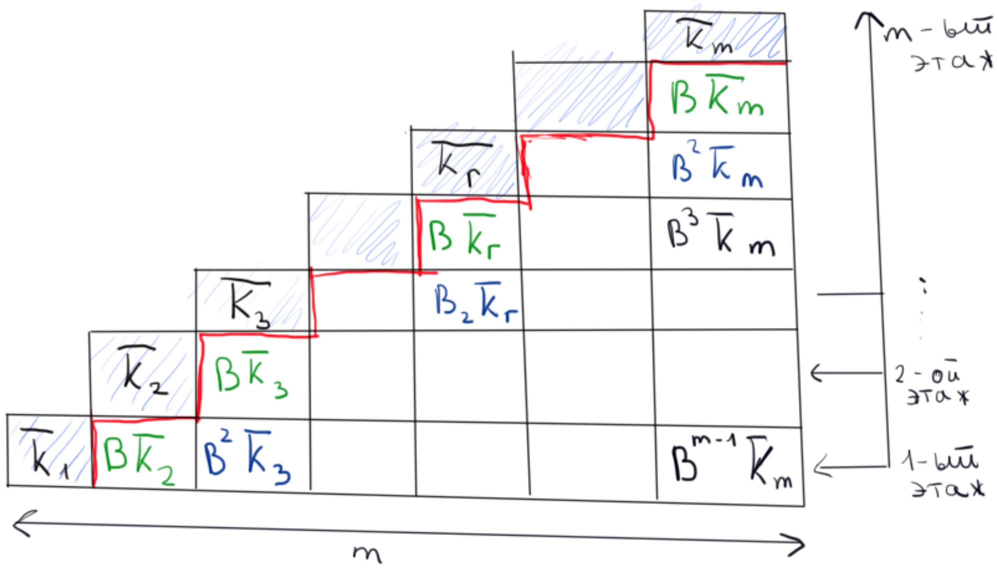
$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus B\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus B\overline{K}_m \oplus B^2 \overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus B^{m-1} \overline{K}_m$

Доказательство:

$K = BK \oplus \overline{K}_1 \ldots \oplus \overline{K}_m$
$BK = B^2K \oplus B\overline{K}_2 \ldots \oplus B\overline{K}_m$
$\vdots$
$B^{m-1}K = B^mK \oplus B^{m-1}\overline{K}_m = B^{m-1}\overline{K}_m$
Подставьте рекурсивно и получите все, что нам надо.

Q.E.D.

Тогда из этого следствия наше корневое подпространство K можно представить вот так:



def: Если $\overline{K}_r \neq \{\mathbb{0}\}$, то тогда: $\overline{K}_r \oplus B\overline{K}_r \oplus \ldots \oplus B^{r-1}\overline{K}_r = \tau_r$ - называется **башней** высоты r.

Заметим, что l-ый этаж башни - $B^{r-l}K_r$.

Если $\overline{K_r} = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow$ башни высоты r нет.

Покажем, что каждый этаж башни имеет одну и ту же размерность, которая называется **ширина башни**.

Теорема (о размерности башни)

Все этажи башни высоты r имеют одну и ту же dim (называем ее шириной d_r)

$\dim \overline{K}_r = \dim B\overline{K}_r = \ldots = \dim B^{r-1}\overline{K}_r = d_r$.

Доказательство:

$\forall j = 1, \ldots, r-1 : B^j : \overline{K}_r \to B^j\overline{K}_r$. Покажем, что $\overline{K}_r$ и $B^j\overline{K}_r$ — изоморфные пространства. (Тогда у нас сразу совпадут dim и не надо будет ничего доказывать).

Заметим, что у нашего отображения уже есть сюръективность (потому что мы буквально сужаем, то куда переводит наше отображение). Значит, чтобы доказать изоморфность нам нужна инъективность. А что такое инъективность? Это то, что $\exists x_1, x_2 \in \overline{K}_r$, что $B^jx_1 = B^jx_2 \Leftrightarrow$

$B^j(x_1 - x_2) = \mathbb{O}$. То есть если мы покажем тривиальность ядра B^j, то тогда наша функция будет инъективной:

Пусть $x \in \mathcal{K}er B^j$ и $x \in \overline{K}_r$, тогда $x \in \mathcal{K}er B^j \cap \overline{K}_r = K_j \cap \overline{K}_r$. А как мы знаем $K_j \cap \overline{K}_r = \{\mathbb{O}\}$. Если бы был x в их пересечении, то тогда $x \in \mathcal{K}er B^j = K_j$ и $x \in \overline{K}_r$. Но как мы знаем x находится именно в $\overline{K}_r$, поэтому $B^{r-1}x \neq \mathbb{O}$, но как я сказал ранее: $x \in \mathcal{K}er B^j$. Противоречие.

То есть это значит, что $x \in \{\mathbb{O}\} \Leftrightarrow x = \mathbb{O}$, откуда ядро тривиально, наша функция инъективна, а из этого уже следует изоморфность, то есть биекция.

Q.E.D.

Следствие 1. $\sum\limits_{r=1}^{n} d_r = \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$.

Следствие 1.5. $\sum\limits_{r=1}^{m} r \cdot d_r = \alpha(\lambda) = \dim K_\lambda$

Следствие 2. **(Теорема Фробениуса.)**

$$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$$

Доказательство:

$B^r K = B^{r+1} K \oplus B^r \overline{K}_{r+1} \oplus \ldots \oplus B^r \overline{K}_m$

Введем обозначение $p_r := \dim \operatorname{Im} B^r = \dim B^r K = rgB^r$. Тогда:

$$p_r - p_{r+1} = d_{r+1} + d_{r+2} + \ldots + d_m$$

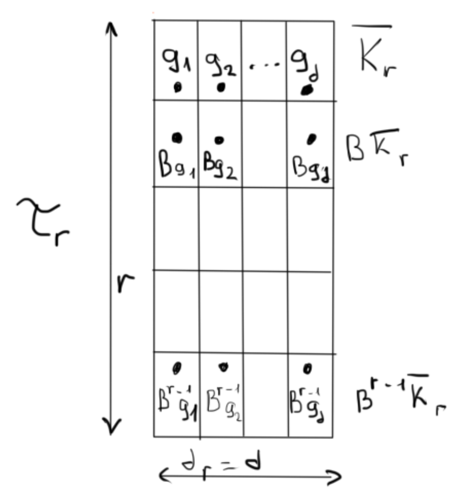
Давайте напишем разности:

$$\begin{aligned}
p_0 - p_1 &= d_1 + d_2 + \ldots + d_m \\
p_1 - p_2 &= \phantom{d_1 + {}} d_2 + \ldots + d_m \\
&\vdots \\
p_{m-1} - p_m &= \phantom{d_1 + d_2 + \ldots + {}} d_m
\end{aligned}$$

А теперь получаем, что $d_1 = p_0 - 2p_1 + p_2$, $d_2 = p_1 - 2p_2 + p_3$, а откуда если заметить, то мы получаем нужную мне формулу!

Замечание: Такое равенство в теореме не очень удобно, потому что B - суженное изображение. todo: дописать формулу с практики

Пусть $\overline{K}_r = span(g_1, g_2, \ldots, g_d)$ - на рисунке это показано точечками. Давайте к этим векторам будем применять наше отображение. Сначала получим $Bg_1, \ldots, Bg_d$, а в теореме о размерности башни мы доказали, что у нас изоморфны $\overline{K}_r$ и $B\overline{K}_r$, то есть мы получили еще один базис, только теперь $B\overline{K}_r$. Будем так проделывать и получим, что у нас базис $B^i\overline{K}_r$ это $B^i g_1, \ldots, B^i g_d$.



def: **Циклическим базисом**, порожденным вектором длины r называются $g_p, Bg_p, \ldots, B^{r-1}g_p$. В таком случае $Bg_p, \ldots, B^{r-1}g_p$ называют **присоединенными**.

$S = span(B^{r-1}g_p = j_1, B^{r-2}g_p = j_2, \dots, g_p = j_p)$.

Как мы помним из рассуждений наверху в самом начале этого параграфа:

$$A\Big|_S \overset{j}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\tau_r = \bigoplus_{p=1}^{d_r} S_p, \quad K_\lambda = \bigoplus_{r=1}^{m(\lambda)} \tau_r(\lambda)$$

$V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ - с.ч.}} K_\lambda = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ - с.ч.}} \bigoplus\limits_{r}^{m(\lambda)} \bigoplus\limits_{p}^{d_r} S_{p,\lambda,r}$ - объединение всех базисов называется **Жордановым базисом**.

1.11 Функция оператора матрицы, приводимой к Жордановой форме.

$f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m, |x| < r$

$f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m A^m$, $|\lambda| < r$ - все случайные числа.

Как мы знаем, матрицу можно привести к жордановой форме: $A = TJT^{-1}$.

$J = \begin{pmatrix} J(\lambda) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & J(\mu) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & J(\xi) \end{pmatrix}$

Давайте посчитаем функцию от матрицы A:

$$f(A) = f(TJT^{-1}) = T \begin{pmatrix} f(J(\lambda)) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & f(J(\mu)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & f(J(\xi)) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Посмотрим на блок высшего уровня. Он состоит из клеток:

$J(\lambda) = \begin{pmatrix} K_1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & K_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & K_k \end{pmatrix}$, где K_i - жорданова клетка.

Тогда $f(J(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(K_1) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & f(K_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & f(K_{ind}) \end{pmatrix}$

Посмотрим ситуацию для одной клетки. $J_k = \lambda E + I_k$.

$(\lambda E + I_k)^m = \sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j \lambda^{m-j} (I_k)^j$

Теперь мы можем показать соответствующую матрицу (туда была добавлена t):

$$J_k^m t^m = \begin{pmatrix} \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1} t^m & \frac{m(m-1)}{2}\lambda^{m-2} t^m & \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\lambda^{m-3} t^m & \dots & \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{(k-1)!}\lambda^{m-k+1} t^m \\ & \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1} t^m & & & \vdots \\ & & \lambda^m t^m & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1} t^m \\ 0 & & & & & \lambda^m t^m \end{pmatrix}$$

Теперь посмотрим $f(J_k t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m J_k^m t^m =$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m t^m \lambda^m & \frac{t}{1}\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m m (\lambda t)^{m-1} & \frac{t^2}{2!}\sum\limits_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)(\lambda t)^{m-2} & \frac{t^3}{3!}\sum\limits_{m=3}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2)(\lambda t)^{m-3} & \dots \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

У ряда мы можем брать производную сколько угодно раз (факт из математического анализа) (от функции в которую подставлен λt)

Откуда наша страшная формула равна $f(\lambda t) = \begin{pmatrix} f(\lambda t) & \dfrac{t}{1!}f'(\lambda t) & \dfrac{t^2}{2!}f^{(2)}(\lambda t) & \dots & \dots \\ 0 & f(\lambda t) & \dfrac{t}{1!}f'(\lambda t) & \ddots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \end{pmatrix}$

Пример:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$f(x) = \cos x,\ /f'(x) = -\sin x,\ f^{(2)}(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x$

$f'(J_k t) = -\sin \lambda t$

$$\cos(J_4 t) = \begin{pmatrix} \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) & \frac{t^2}{2!}(-\cos \lambda t) & \frac{t^3}{3!}(\sin \lambda t) \\ \vdots & \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) & \frac{t^2}{2!}(-\cos \lambda t) \\ \vdots & \ddots & \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) \\ 0 & \dots & \dots & \cos \lambda t \end{pmatrix}$$

2 Тензоры.

2.1 Линейные формы (функционалы). Сопряженное (дуальное) пространство. Контрвариантный и ковариантный законы преобразования координат.

def: V - линейное пространство над полем K, $f : V \to K$ - линейная:

$$\forall \lambda \in K : \forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2)$$

Такое f называется **линейной формой** или **функционалом**.

Примеры:

1. $\overline{b} = const : \forall \overline{a} :\in V_3 : f(\overline{a}) = (\overline{a}, \overline{b})$ - очевидно линейная форма
2. $A_{n\times n} : f(A) = tr(A)$ - очевидно линейная.
3. $p \in P,\ t_0 \in k$ фикс. $f(p) = \frac{p^{(m)}t_0}{m!}$ - линейная форма.
4. $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ - бесконечномерное линейное пр-во. $\delta(f) = f(0)$ — дельта-функция Дирака.

f_1, f_2 - линейные формы. Введем операции:

1. **Сложение:** $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$
2. **Умножение на скаляр:** $(\lambda f_1)(v) = \lambda f_1(v)$

Очевидно существует ноль и противоположные. Откуда выполнены аксиомы 1-8, откуда линейное пространство.

$V^* = \{f : V \to K$ - линейная форма$\}$ - называется **сопряженное** пр-во к V или **дуальное**.

Возьмем V, зафиксируем $e_1, \dots, e_n$ - базис.

$\forall X \in V : X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = x^i e_i$ - вспоминаем правило Энштейна из первого семестра. Тогда:

$$X \overset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x$$

$f(X) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i) = x^i a_i$, где $f(e_i) = a_i \in K$. $f(X) = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

$f \leftrightarrow a = (a_1, \dots, a_n)$ строка. $V^* = (K^n)^T$.

Откуда $\dim V^* = n$. Это взаимооднозначное соответствие, оно очевидно линейно, откуда это изоморфизм.

То есть теперь на самом деле функции описываются строками — значениями на базисных векторах.

Пример:

Возьмем и посмотрим на скалярное произведение в V_3, $\bar{b} = const$. $\forall X \in V_3,\ f(\bar{X}) = (\bar{X}, \bar{b})$.

$f(\bar{i}) = (\bar{i}, \bar{b}) = b_1,\ f(\bar{j}) = (\bar{j}, \bar{b}) = b_2,\ f(\bar{k}) = (\bar{k}, \bar{b}) = b_3$

$\bar{X} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$

$f(\bar{X}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, у нас строка $f \leftrightarrow (b_1, b_2, b_3)$

def: V, $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис.

$\forall x \in V : w^i(x) = x^i$ — i-ая координата вектора x относительно базиса e.

w^i называется **координатной функцией**.

Не трудно заметить, что w^i - линейная форма $\in V^*$.

Теорема 1: (о базисе V^*)

Доказать $w^1, \dots, w^n$ - базис V^*.

Доказательство:

Докажем порождаемость:

$\forall f \in V^* : \forall x \in V : f(x) = x^i a_i = w^i(x)a_i$, где $a_i \in K$ — порождаемое

Докажем линейную независимость, показав единственность разложения нуля:

$\mathbb{O} = \alpha_i w^i$, где $\alpha_i \in K$. Посмотрим на $\forall x \in V :\ \alpha_i w^i(x) = \mathbb{O}$.

Пусть $x = e_j$ для $j = 1, \dots, n$. Как мы знаем, для $i \neq j : w^i(e_j) = 0$. Тогда $\alpha_i w^i(e_j) = \alpha_j = 0$, $\forall j \Rightarrow$ лин. независим.

Q.E.D.

Следствие: w^i координатные формы относительно базиса $e \Rightarrow \forall f \in V^* : f = a_i w^i$, т.е $a = (a_1, \dots, a_n)$ координаты f в базисе $w = (w^1, \dots, w^n)$ пространства V^*.

Доказательство:

$$\forall f \in V^*, \forall x \in V : f(x) = x^i a_i = w^i(x)a_i = (a_i w^i)(x) \Leftrightarrow f = a_i w^i.$$

Q.E.D.

def: $w^1, \dots, w^n$ называется **сопряженным** (дуальным) к базису e пространства V.

Очевидно $w^j(e_i) = \delta^i_j$.

Теорема 2:

$\forall$ базиса $w'^1, \dots, w'^n$ пространства V^*.

$\exists$ базис $e'_1, \dots, e'_n$ пространства V такой, что w' базис, сопряженный к e'. То есть w'^i это координатные функции относительно e'.

Доказательство:

Пусть $e_1, \dots, e_n$ базис V. Тогда, как мы говорили ранее: $w^1, \dots, w^n$ координатные функции относительно e, базис V^* сопряженный к e.

Возьмем w'. Так как он базис и w базис, то:

$$w' = wT_{w\to w'}$$

$(T_{w\to w'})^T = S = (S^i_j)_{n\times n}$. Заметим, что S невырожденная, т.к. T матрица перехода. Строки матрицы S — это координаты элементов нового базиса w' в старом базисе (w).

$$(w'^1, \dots, w'^n) = (w^1, \dots, w^n)T_{w\to w'}$$

Давайте все транспонируем:

$$\begin{pmatrix} w'^1 \\ \vdots \\ w'^n \end{pmatrix} = (T_{w\to w'})^T \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$$

Пусть $S^{-1} =: T = (t^i_j)_{n\times n}$ — невырожденная, $S^{-1} = T_{e\to e'}$

Осталось показать, что w' будет сопряженным к e', т.е. показать $w'^i(x) = x'^i$, $x = x'^i e'_i$, для всех $x \in V$. Тк w'^i - линейная форма, то:

$$w'^i(x'^i e'_j) = x'^j w'^i(e'_j)$$

Теперь, давайте заметим, что $w'^i = S^i_k w^k$, $e'_j = t^m_j e_m$. Откуда

$$\omega'^i(x) = (S^i_j\omega^j)(x) = S^i_j\omega^j(x) = S^i_j x^j = S^i_j t^j_k x'^k = (ST)^i_k x'^k = \delta^i_k x'^k = x'^i$$

Q.E.D.

Следствие. e, e' базисы V, w, w' сооответственные сопряженные базисы к e, e' в V^*.

$T = T_{e\to e'}, S = T^{-1}$

$\Rightarrow \forall x \in V : \forall f \in V^* : x' = Sx, a' = aT$, где a - разложение f в базисе.

Доказательство:

$T = T_{e\to e'}$ и мы уже знаем, что $x' = T_{e'\to e}x = Sx$

$(T_{w\to w'})^T = S$. Как мы знаем из матрицы перехода:

$$a^T = T_{w\to w'}(a')^T$$

Откуда:

$$a = a'(T_{w\to w'})^T = a'S$$

А уже отсюда получаем, что $a' = aS^{-1} = aT$.

Q.E.D.

Замечание от Славы. Очень удобно менять базис, когда у нас один из базисов канонический. А также, зная матрицу перехода $T_{w\to w'}$ мы уже знаем матрицу перехода из $T_{e\to e'} = ((T_{w\to w'})^T)^{-1}$

Преобразование координат, согласованных по тому же закону, что и базис: $a' = aT$

Преобразование координат, согласованных по противоположному закону: $x' = Sx$

def: Преобразование координат векторов пространства V происходит по закону, противоположному преобразованию базисов — называется **контрвариантным**, а координаты векторов пространства V называются **контрвариантыми** (индексы координат пишутся вверху).

def: Преобразование координат векторов пространства V происходит по тому же закону, что преобразование базисов в пространстве V (т.е. согласованно) называется **ковариантным** преобразованиям. Координаты векторов пространства V^* называется **ковариантным** (индексы пишутся внизу).

Позамечаем интересные факты:

$\forall f \in V^* \leftrightarrow (a_1, \dots, a_n), a_j = f(e_j)$ - каждой функции, как и говорилось ранее, на заданном базисе, я могу сопоставить a. Поэтому возьму n функций и векторов, и захочу посчитать значение каждой функции в каждой точке :

$\forall f^1, \dots f^n \in V^* : f^j \xleftrightarrow{w} a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$

$\forall x_1, \dots, x_n \in V : x_i \xleftrightarrow{e} x_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^n \end{pmatrix}$

Хочу посчитать вот такую вот страшную матрицу (значение каждой функции в каждой точке):

$$(f^j(x_i))_{n\times n} = \begin{pmatrix} f^1(x_1) & f^1(x_2) & \dots & f^1(x_n) \\ f^2(x_1) & f^2(x_2) & \dots & f^2(x_n) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f^n(x_1) & f^n(x_2) & \dots & f^n(x_n) \end{pmatrix} = f^j(x_i) = a^j x_i =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \ddots & \ddots & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & \ddots & \ddots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \dots & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \text{ - лаконичная запись!}$$

Интересный факт, который идет из такого произведения:

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} \cdot (e_1 e_2 \dots e_n) = E$$

def: $V^{**} = (V^*)^*$ **дважды сопряженное** пространство.

$\forall f \in V^*$. Пусть $x \in V$:

$"x"(f) = f(x)$. $"x" : V^* \to K$.

$\forall \lambda \in K : \forall f^1, f^2 \in V^*$

$"x"(\lambda f^1 + f^2) = (\lambda f^1 + f^2)(x) = \lambda f^1(x) + f^2(x) = \lambda_1 "x"(f^1) + "x"(f^2)$

$\Rightarrow$ "x" линейное отображение $\Rightarrow$ "x" $\in (V^*)^*$

Дальше у "x" будут упускаться :))

Теорема 3 (О естественном изоморфизме)

Естественный - не зависит от введения базиса.

$V \cong V^{**}$

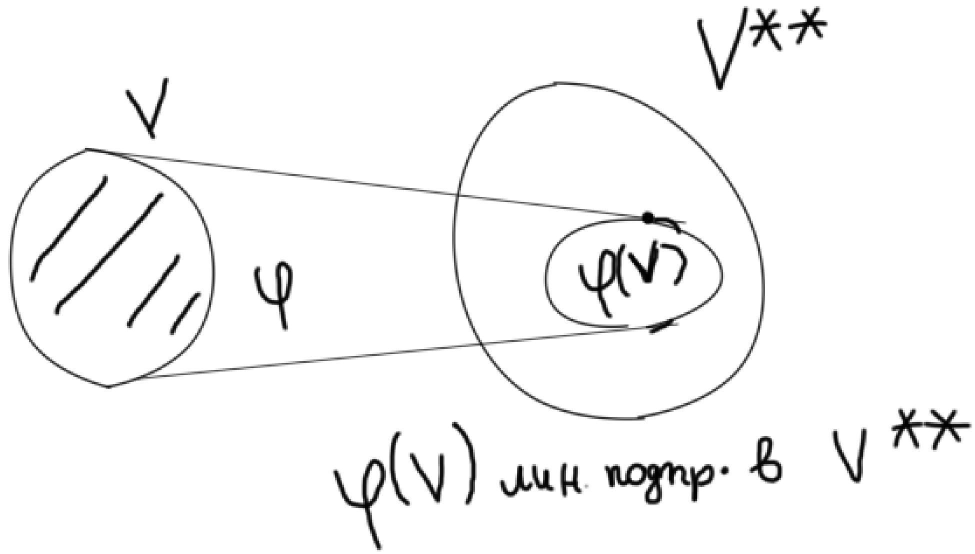
Доказательство:

$\forall x \in V \to$ "x" $\in V^{**}$. Назовем это отображение φ.

Покажем, что наше взаимооднозначное сопоставление линейно.

$x_1 + \lambda x_2 \in V : x_1 \to$ "x_1", $x_2 \to$ "x_2"

$\forall f \in V^*$: "$x_1 + \lambda x_2$"$(f) = f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2) =$ "x_1"$(f) + \lambda$"x_2"(f). Откуда φ линейно.



Покажем, что φ, это изоморфизм.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис V. Им соответствуют "e_1", ..., "e_n". Покажем, что это базис в V^{**}:

Мы знаем, что $\dim(V^*)^* = \dim V^* = \dim V = n$. Откуда достаточно показать, что "e_1" , ..., "e_n" - линейно независимы. Для этого покажем единственность разложения нуля.

$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$"$e_i$"$(w^j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w^j(e_j) = \alpha_j \Rightarrow$ линейно независимы, откуда базис.

Откуда отображение φ это изоморфизм.

Q.E.D.

Как мы только что поняли: $x \in V \leftrightarrow$ "x" $\in V^{**}$ - изомофризм. $f \in V^*, x \in V$.

$x(f) = f(x) = x^i a_i = w^i(x) a_i = x(w^i) a_i = x^i a_i = x^i f(e_i) = x^i e_i(f)$

e и w взаимно сопряж.

$x = x^i e_i, w^i(x) = x^i$, где $x \in V$

$e_j(f) = f(e_j) = a_j (f \in V^*)$, $e_j \in V^{**}$ - коорд. формы относительно базиса w^i.

Я категорически не помню для чего Кучерук это написала, напомните мне пж.

Пример:

$\mathcal{A}$ - о.п.с, A - диагонализируема.

$V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda = span(v_1, \dots, v_n)$

$w^1, \dots, w^n$ сопряж. базис к v

$\Rightarrow \forall x \in V : w^j(x) = x^i : x^i v_j = x$

2.2 Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица тензоров.

def: Есть V, V^* и $p, q \in N$.

Тензором типа (p, q) (p-раз ковариантным, q-раз контрвариантным) называется полилинейная функция $f : V^p \times (V^*)^q \to K$. p, q называются **валентностями** тензора, $r = (p+q)$ ранг тензора.

Если $r = 0, f = const$. Если тензор $(p, 0)$ - **ковариантный** тензор валентности p. Если тензор $(0, q)$ - **контрвариантный** тензор валентности q. Если $p \neq 0$ и $q \neq 0$ - тензор смешанного типа.

$\xi_j \in V, \eta^i \in V^*$

$f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q)$ - линейно по каждому аргументу (или полилинейная)

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ - базис V, $w = (w^1, \ldots, w^n)$ - базис V^*. Тогда сделаем похожую вещь, как когда мы считали определитель. По линейности вынесем, то есть:

$$\xi_j = \xi_j^{j_k} e_{j_k}; \eta^i = \eta^i_{i_m} w^{i_m}$$

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \ldots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \ldots \eta^q_{i_q} \cdot f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}, w^{i_1}, \ldots, w^{i_q})$$

То есть на самом деле наша функция задается матрицей значений на базисных векторах. Обозначим $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}, w^{i_1}, \ldots, w^{i_q}) = \alpha^{i_1, \ldots, i_q}_{j_1, \ldots, j_p}$

def: M - **многомерная матрица** тензора $r = (p+q)$ мерная размерности n.

Замечание: Если говорить программистким языком, то наша матрица это просто:

```
for (i1 = 1 ... n):
    for(i2 = 1 ... n):
        ...
        for(iq = 1 ... n):
            for(j1 = 1 ... n):
                ...
                for(jp = 1 ... n):
                    m[i1][i2]...[iq][j1]...[jp] = f(соответсвенных значений)
```

Соглашение о записи элементов многомерной матрицы

$\alpha^{i_1, \ldots, i_q}_{j_1, \ldots, j_p} \in M_{p+q}$ - многомерная матрица порядка n. $i_k \in (1, \ldots, n); j_m \in (1, \ldots, m)$

Мы читаем сначала верхние индексы, потом нижние в записи

Пример:

1. $r = 2 : (\alpha^i_j), (\alpha^{ij}), (\alpha_{ij})$

   1-ый индекс номер строки

   2-ой индекс номер столбца

   Например при $n = 3$:

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 & \alpha^1_3 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 & \alpha^2_3 \\ \alpha^3_1 & \alpha^3_2 & \alpha^3_3 \end{pmatrix} \text{ или } (a^{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} \\ \alpha^{31} & \alpha^{32} & \alpha^{33} \end{pmatrix}$$

2. $r = 3 : (\alpha^{ijk}), (\alpha^{ij}_k), (\alpha^i_{jk}), (\alpha_{ijk})$

   1-ый индекс всегда строка

   2-ой индекс всегда столбец

   3-ий индекс всегда слой

   Например при $n = 3$:

$$(a^i_{jk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha^1_{11} & \alpha^1_{21} & \alpha^1_{31} & \alpha^1_{12} & \alpha^1_{22} & \alpha^1_{32} & \alpha^1_{13} & \alpha^1_{23} & \alpha^1_{33} \\ \alpha^2_{11} & \alpha^2_{21} & \alpha^2_{31} & \alpha^2_{12} & \alpha^2_{22} & \alpha^2_{32} & \alpha^2_{13} & \alpha^2_{23} & \alpha^2_{33} \\ \alpha^3_{11} & \alpha^3_{21} & \alpha^3_{31} & \alpha^3_{12} & \alpha^3_{22} & \alpha^3_{32} & \alpha^3_{13} & \alpha^3_{23} & \alpha^3_{33} \end{array}\right)$$

3. $r = 4 : (\alpha^{ijkm}), (\alpha^{ijk}_m), (\alpha^{ij}_{km}), (\alpha^i_{jkm}), (\alpha_{ijkm})$

   1-ый индекс всегда строка

   2-ой индекс всегда столбец

   3-ий индекс всегда слой

   4-ый индекс всегда сечение

   Например при $n = 2$ мы имеем:

$$(a^{ij}_{km}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha^{11}_{11} & \alpha^{12}_{11} & \alpha^{11}_{12} & \alpha^{12}_{12} \\ \alpha^{21}_{11} & \alpha^{22}_{11} & \alpha^{21}_{12} & \alpha^{22}_{12} \\ \hline \alpha^{11}_{21} & \alpha^{12}_{21} & \alpha^{11}_{22} & \alpha^{12}_{22} \\ \alpha^{21}_{21} & \alpha^{22}_{21} & \alpha^{21}_{22} & \alpha^{22}_{22} \end{array}\right)$$

4. $r = 1 : (\alpha^i), (a_i)$

   При первой записи мы считаем, что она в столбик, а при второй считаем, что она строчка.

Пример:

$f : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$

$\forall \overline{a}, \overline{b} : f(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\varphi$

$f \in T(2, 0)$. Зафиксируем базис e_1, e_2, e_3:

$f(a^i e_i, b^j r_j) = a^i b^j f(e_i, e_j)$

Пусть e_1, e_2, e_3 вектора, между которыми 2 угла по 60 градусов и 1 120 и $|e_i| = i$.

Тогда $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 4 & 3 \\ \frac{3}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Вернемся в реальность.

Пускай $f \in T(p, q) \xleftrightarrow{e,w} \left(\alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\right)$, где e - базис, w - дуально сопряженный

$f : V^p \times (V^*)^q \to K$

Возьмем $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ и дуальный к нему $w' = (w'_1, \ldots, w'_m)$

$T = T_{(e\to e')}, S = T^{-1} = (T^T_{w\to w'})$

Замечу, что $\xi = \xi^i e_i : \xi = T\xi' \leftrightarrow \xi^i = t^i_k \xi'^k$ и $\eta = \eta_j w^j; \eta = \eta' S \leftrightarrow \eta_j = s^k_j \eta'_k$

Возьму $\xi_1, \dots, \xi_p \in V$ и $\eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \xi^{j_1}_1 \dots \xi^{j_p}_p \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{iq} = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cdot t^{j_1}_{k_1} \xi'^{k_1}_1 \dots t^{j_p}_{k_p} \xi'^{k_p}_p \cdot s^{m_1}_{i_1} \eta'^1_{m_1} \dots s^{m_q}_{i_q} \eta'^1_{m_q}$$

$$= \alpha^{i_1,\dots i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cdot t^j_{k_1} \dots t^{j_p}_{k_p} \cdot s^{m_1}_{i_1} \dots s^{m_q}_{i_q} \cdot \xi'^{k_1}_1 \dots \xi'^{k_p}_p \cdot \eta'^1_{m_1} \dots \eta'^{q_1}_{m_q}$$

Откуда подставив новые базисные вектора в эту формулу:

$$\alpha'^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} t^{j_1}_{k_1} \dots t^{j_p}_{k_p} s^{m_1}_{i_1} \dots s^{m_q}_{i_q}$$

$j_1, \dots, j_p$ ковариантные индексы матрицы, $i_1, \dots, i_q$ контрвариантные, откуда название тензора $f \in T(p,q)$ p-раз ковариантный, q раз контрвариантный.

Замечание: это формула перехода (смены базиса), потом будет очень много везде использоваться.

<u>2-ое определение тензора:</u> $\alpha - r = p + q$ мерная матрица n - геометрический объект над пространством V $(\dim V = n)$, такой, что при смене базиса пространства V элементы матрицы пересчитываются по формуле:

$$\alpha'^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} t^{j_1}_{k_1} \dots t^{j_p}_{k_p} s^{m_1}_{i_1} \dots s^{m_q}_{i_q}$$

(геометрический объект - независимый от выбора базиса, но согласованный с заменой базиса, т.е. после замены базиса остается тем же объектом с теми же свойствами)

Если матрицы одного порядка, то мы умеем складывать их и умножать на скаляр, есть нулевая и противоположная, откуда это линейное пространство.

Осталось показать, что эти операции не ломают второе определение (формулу перехода):

$$(\alpha + \lambda\beta)'^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} = \alpha'^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} + \lambda\beta'^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cdot t^{j_1}_{k_1} \dots t^{j_p}_{k_p} \cdot s^{m_1}_{i_1} \dots s^{m_q}_{i_q} + \lambda\beta^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cdot t^{j_1}_{k_1} \dots t^{j_p}_{k_p} \cdot s^{m_1}_{i_1} \dots s^{m_q}_{i_q}$$

$$= (\alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} + \lambda\beta^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}) t^{j_1}_{k_1} \dots s^{m_q}_{i_q}$$

Откуда корректно.

Замечание: в дальнейшем мы будем называть формулу перехода - свойством линейного пространства.

То есть теперь наше линейное пространство сохраняет заданное свойство.

Заметим, что мы получили равносильность первого и второго определения.

2.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Свертка тензоров.

<u>def:</u> $\alpha \in T(p_1, q_1), \beta \in T(p_2, q_2)$. Тогда **<u>произведением</u>** тензоров называется тензор $\gamma \in T(p_1 + p_2, q_1 + g_2)$:

$$\gamma^{i_1,\dots i_{q_1}, m_1,\dots,m_{q_2}}_{j_1,\dots,j_{p_1}, k_1,\dots,k_{p_2}} := \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1,\dots,j_p} \beta^{m_1,\dots,m_{q_2}}_{k_1,\dots,k_{p_2}}$$

Проверим корректность, то есть то что выполняется свойство тензора:

$$\gamma'^{\widetilde{i}_1,\ldots,\widetilde{i}_{q_1},\widetilde{m}_1,\ldots,\widetilde{m}_{q_2}}_{\widetilde{j}_1,\ldots,\widetilde{j}_{p_1},\widetilde{k}_1,\ldots,\widetilde{k}_{p_2}} = \alpha'^{\widetilde{i}_1,\ldots,\widetilde{i}_{q_1}}_{\widetilde{j}_1,\ldots,\widetilde{j}_{p_1}} \cdot \beta'^{\widetilde{m}_1,\ldots,\widetilde{m}_{q_2}}_{\widetilde{k}_1,\ldots,\widetilde{k}_{p_2}} =$$

$$= \alpha^{i_1,\ldots,i_{q_1}}_{j_1,\ldots j_{p_1}} t^{j_1}_{\widetilde{j}_1} \ldots t^{j_{p_1}}_{\widetilde{j}_{p_1}} s^{\widetilde{i}_1}_{i_1} \ldots s^{\widetilde{i}_{q_1}}_{i_{q_1}} \cdot \beta^{m_1,\ldots,m_{q_2}}_{k_1,\ldots k_{p_2}} t^{k_1}_{\widetilde{k}_1} \ldots t^{k_{p_2}}_{\widetilde{k}_{p_2}} s^{\widetilde{m}_1}_{m_1} \ldots s^{\widetilde{m}_{q_2}}_{m_{q_2}} =$$

$$= \gamma^{i_1,\ldots,i_{q_1},m_1,\ldots,m_{q_2}}_{j_1,\ldots,j_{p_1},k_1,\ldots,k_{p_2}} \cdot t^{j_1}_{\widetilde{j}_1} \ldots t^{j_{p_1}}_{\widetilde{j}_{p_1}} s^{\widetilde{i}_1}_{i_1} \ldots s^{\widetilde{i}_{q_1}}_{i_{q_1}} \cdot t^{k_1}_{\widetilde{k}_1} \ldots t^{k_{p_2}}_{\widetilde{k}_{p_2}} s^{\widetilde{m}_1}_{m_1} \ldots s^{\widetilde{m}_{q_2}}_{m_{q_2}}$$

Откуда получаем, что верно, это тензор!!! ~~я устал это писать~~

Обозначается $\gamma = \alpha \otimes \beta$.

Произведение ассоциативно, дистрибутивно, не коммутативно

Пример:

Пусть $\alpha \in T(1,0), \beta \in T(0,1)$. Тогда $\gamma = \alpha \otimes \beta \in T(1,1)$.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$. Тогда

$$\gamma^i_j = \alpha^i \beta_j \leftrightarrow \gamma = \begin{pmatrix} \alpha^1\beta_1 & \alpha^1\beta_2 & \alpha^1\beta_3 \\ \alpha^2\beta_1 & \alpha^2\beta_2 & \alpha^2\beta_3 \\ \alpha^3\beta_1 & \alpha^3\beta_2 & \alpha^3\beta_3 \end{pmatrix}$$

Возьмем $\alpha \in T(p_1, q_1) \leftrightarrow f : V^{p_1} \times (V^{q_1})^* \to K$.

Возьмем $\beta \in T(p_2, q_2) \leftrightarrow g : V^{p_2} \times (V^{q_2})^* \to K$.

$\xi_1, \ldots, \xi_{p_1} \in V; \eta^1, \ldots, \eta^{q_1} \in V^*; \zeta_1, \ldots, \zeta_{p_2} \in V; \theta^1, \ldots, \theta^{q_2} \in V^*$

$\gamma = a \otimes \beta \in T(p_1 + p_2, q_1 + q_1) \leftrightarrow t : V^{p_1+p_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \to K$

$$t(\xi_1, \ldots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p_2}, \eta^1, \ldots, \eta^{q_1}, \theta^1, \ldots, \theta^{q_2}) =$$

$$= \gamma^{i_1,\ldots,i_{q_1},m_1,\ldots,m_{q_2}}_{j_1,\ldots,j_{p_1},k_1,\ldots,k_{p_2}} \xi^{j_1}_1 \ldots \xi^{j_{p_1}}_{p_1} \cdot \zeta^{k_1}_1 \ldots \zeta^{k_{p_2}}_{p_2} \cdot \eta^1_{i_1} \ldots \eta^{q_1}_{i_{q_1}} \cdot \theta^1_{m_1} \ldots \theta^{q_2}_{m_{q_2}} =$$
$$= f(\xi_1, \ldots, \xi_{p_1}, \eta^1, \ldots, \eta^{q_1}) \cdot g(\zeta_1, \ldots \zeta_{p_2}, \theta^1, \ldots \theta^{q_2})$$

Вывели формулу, по которой мы можем легко находить значения функций. Воспользуемся нашей формулой и выведем еще одну:

$f^1, \ldots, f^p \in V^* = T(1,0) - f^j : V \to K$ - линейная форма

$g_1, \ldots, g_q \in V^{**} = T(0,1) - g_i : V^* \to K$

$\gamma = f^1 \otimes \ldots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \leftrightarrow a^1_{j1} \ldots a^p_{j_p} b^{i_1}_1 \ldots b^{i_q}_q = \gamma^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}$, $\gamma \in T(p,q)$.

Воспользуемся только что доказанной формулой и получим:

$$\gamma(\xi_1, \ldots \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = f^1(\xi_1) \ldots f^q(\xi_q) \cdot g_1(\eta^1) \ldots g_q(\eta^q)$$

Продолжим играться с этой формулой:

Пусть $f^j = w^j$, а $g_i = e_i$ (сопряженные базисы), и подставим это в нашу формулу:

$w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q} \in T(p,q)$

Как мы вывели ранее:

$$w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = w^{j_1}(\xi_1) \ldots w^{j_p}(\xi_q) \cdot e_{i_1}(\eta^1) \ldots e_{i_q}(\eta^q) =$$

$$= \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \ldots \xi_p^{j_p} \cdot \eta_{i_1}^1 \ldots \eta_{i_q}^q$$

Получили вот такую относительно простую формулу для базисных векторов

Теорема (о базисе пространства тензоров типа (p, q))

Набор тензоров $w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}$, где $j_k \in (1, \ldots, n), i_m \in (1, \ldots, n)$ — базис пространства $T(p,q)$.

Доказательство:

1. Докажем, что порождающее. Пусть $f \in T(p,q) : \forall \xi_1, \ldots \xi_p \in V, \forall \eta^1, \ldots \eta^q \in V^* :$

   Давайте найдем значение функции в этой точке:

   $$f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = \alpha_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q} \xi_1^{j_1} \ldots \xi_p^{j_p} \cdot \eta_{i_1}^1 \ldots \eta_{i_q}^q =$$

   Выразим координаты через базис и дуальный к нему:

   $$= \alpha_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q} w^{j_1}(\xi_1) \ldots w^{j_p}(\xi_p) e_{i_1}(\eta^1) \ldots e_{i_q}(\eta^q) = \alpha_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q} w^{j_1} \otimes \ldots \otimes p_{i_q}(\xi_1, \ldots, \eta^q)$$

   Что мы получили? Разложение в нашем базисе с коэффициентами: $\alpha_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q}$

   Откуда порождаемо.

2. Докажем, что линейно независимо. Для этого, как обычно, покажем единственность разложения нуля:

   $$\gamma = \alpha_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q} w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q} = \mathbb{O}$$

   Давайте подставим какие-то базисные векторы:

   $$\gamma(e_{\widetilde{j}_1}, \ldots, e_{\widetilde{j}_p}, w^{\widetilde{i}_1}, \ldots, w^{\widetilde{i}_q}) =$$

   $$\alpha_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q} w^{j_1}(e_{\widetilde{j}_1}) \ldots w^{j_p}(e_{\widetilde{j}_p}) \cdot e_{i_1}(w^{\widetilde{i}_1}) \ldots e_{i_q}(w^{\widetilde{i}_q})$$

   Заметим, что каждая из $w^{j_k}(e_{\widetilde{j}_k}) = \delta_{\widetilde{j}_k}^{j_k}$ и $e_{i_k}(w^{\widetilde{i}_k}) = \delta_{i_k}^{\widetilde{i}_k}$, поэтому получим, что:

   $$= \alpha_{\widetilde{j}_1,\ldots,\widetilde{j}_p}^{\widetilde{i}_1,\ldots,\widetilde{i}_q}$$

   Но с другой стороны это ноль (тк мы смотрим на разложение тензора, выдающего всегда ноль (нуля)). Тогда получаем, что все $\alpha = 0$, откуда единственно

   Q.E.D.

Следствие: элементы матрицы тензора это его координаты в базисе пространства $T(p,q)$: $w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}$

С одной стороны элементы матрицы - значения на базисном наборе, а с другой стороны коэффициент при базисном элементе.

Замечание. Канонический базис состоит из тензоров, в матрицах которых есть ровно одна единица, а все остальные значения нули.

def: Пусть $\alpha \in T(p,q) : p,q \geq 1$, тогда тензор β называется **свёрткой** тензора α, если

$$\beta^{i_1,\ldots,\widehat{i_k},\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,\widehat{j}_m,\ldots,j_p} = \alpha^{i_1,\ldots,i_{k-1},æ,i_{k+1},\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_{m-1},æ,j_{m+1},\ldots,j_p}$$

Причем $\widehat{i_k}$ - нет индекса на этой позиции.

Замечание: Этого не говорили на лекции, но k, m фиксированы. Отсюда я бы хотел написать похожее определение, которое может быть более понятным:

$$\beta^{i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_{m-1},j_{m+1},\ldots,j_p} = \alpha^{i_1,\ldots,i_{k-1},æ,i_{k+1},\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_{m-1},æ,j_{m+1},\ldots,j_p}$$

(Причем тут скрыта сумма в правой части)

Получили, что $\beta \in T(p-1,q-1)$, но нам осталось проверить свойство:

$$\beta'^{\widetilde{i}_1,\ldots,\hat{\widetilde{i}}_k,\ldots,\widetilde{i}_q}_{\widetilde{j}_1,\ldots,\hat{\widetilde{j}}_m,\ldots,\widetilde{j}_p} = \alpha'^{\widetilde{i}_1,\ldots,æ,\ldots,\widetilde{i}_q}_{\widetilde{j}_1,\ldots,æ,\ldots,\widetilde{j}_p} =$$

$$= \alpha^{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_m,\ldots,j_p} \cdot t^{j_1}_{\widetilde{j}_1} \ldots t^{j_m}_{æ} \ldots t^{j_p}_{\widetilde{j}_p} \cdot s^{\widetilde{i}_1}_{i_1} \ldots s^{æ}_{i_k} \ldots s^{\widetilde{i}_q}_{i_q} =$$

Что у нас происходит с æ? Мы умножаем j_m строчку T на i_k строчку S, откуда $t^{j_m}_{æ} \cdot s^{æ}_{i_k} = (TS)^{j_m}_{i_k} = \delta^{j_m}_{i_k}$. Тогда в нашей сумме сохранится только суммы, когда $i_k = j_m = \widetilde{æ}$:

$$= \alpha^{i_1,\ldots,\widetilde{æ},\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,\widetilde{æ},\ldots,j_p} t^{j_1}_{\widetilde{j}_1} \ldots \widehat{t^{j_m}_{æ}} \ldots t^{j_p}_{\widetilde{j}_p} \cdot s^{\widetilde{i}_1}_{i_1} \ldots \widehat{s^{æ}_{i_k}} \ldots s^{\widetilde{i}_q}_{i_q}$$

(переменные с крышками как бы пропали)

Откуда получили то, что нужно.

Замечание: Свертка может происходить по нескольким парам символов.

Замечание: Если в результате свертки получалась константа, то такая свертка называется **полной**.

2.4 Транспонирование тензора. Симметричные, кососимметричные тензоры.

Пускай $\alpha \in T(2,0), \alpha = (\alpha_{ij})$, мы умеем ее транспонировать — $\alpha^T = (a_{ij})^T = \beta = (\beta_{ij})$, причем $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$. Это называется транспонированием 2-мерной матрицы. Казалось бы, можно транспонировать многомерную матрицу, но нет так нельзя

Для тензоров транспонирование происходит только по одному типу индексов либо по нижним, либо по верхним.

Пускай $\beta = \alpha^T$. $\beta_{j_1 j_2} = \alpha_{j_2 j_1}$. На самом деле случилась перестановка. Теперь для тензора произвольного типа

def: $\alpha \in T(p,q), p \geq 2$. Пусть σ это перестановка из p чисел $(1,2,3,\ldots,p)$. $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_p)$

$\beta = \sigma(\alpha)$. β получен **транспонированием** (перестановкой σ) по нижним индексам из тензора α по перестановке σ, если

$$\beta^{i_1,\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} = \alpha^{i_1,\ldots i_q}_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}$$

Замечание. Аналогично определяется транспонирование по верхним индексам.

Замечание. При транспонировании по нижним индексам верхние индексы никак не задействованы.

Замечание. В дальнейшем мы будем рассматривать транспонирования по нижним индексам. Все, что будет доказано для транспонированя и по нижним индексам будет выполнено и для транспонирования по верхним индексам.

Как и было раньше нам надо проверить корректность определение тензора(то самое свойство).

$\forall\sigma =$ конечное число транспозиций двух элементов(доказывали в прошлом семестре). То есть достаточно проверить корректность определения для транспонирования при котором переставляются только 2 индекса.

$\beta^{i_1\ldots i_q}_{j_1,\ldots *\ldots\Delta\ldots j_p} = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1,\ldots\Delta\ldots *\ldots j_p}$, где $*$ и Δ - наша перестановка.

$$\beta'^{\,k_1\ldots k_q}_{m_1\ldots m_*\ldots m_\Delta\ldots m_p} = \alpha'^{\,k_1\ldots k_q}_{m_1\ldots m_\Delta\ldots m_*\ldots m_p} = \alpha^{i_1\ldots i_1}_{j_1\ldots\Delta\ldots *\ldots j_p} t^{j_1}_{m_1}\ldots t^{j_\Delta}_{m_\Delta}\ldots t^{j_*}_{m_*}\ldots t^{j_p}_{m_p} s^{k_1}_{i_1}\ldots s^{k_q}_{i_q}$$

Заметим, что $\alpha_{j_1\ldots\Delta\ldots *\ldots j_p} = \beta^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots *\ldots\Delta\ldots j_p}$, переставим множители $t^{j_\Delta}_{m_\Delta}, t^{j_*}_{m_*}$ и получим наше определение.

Теперь посмотрим на это с функциональной стороны:

$\alpha \in T(p,q) \leftrightarrow f : V^p \times (V^*)^q \to K$, $\beta = \sigma(\alpha) \leftrightarrow g : V^p \times (V^*)^q \to K$

$\forall \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \in V; \forall \eta^1, \ldots, \eta^q \in V^* :$

$$g(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q) = \beta^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\xi^{j_1}_1\ldots\xi^{j_p}_p\eta^1_{i_1}\ldots\eta^q_{i_q} = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}\xi^{j_1}_1\ldots\xi^{j_p}_p\eta^1_{i_1}\ldots\eta^q_{i_q}$$

Немного переставим внутри и получим:

$$= \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}\xi^{j_{\sigma_1}}_{\sigma_1}\ldots\xi^{j_{\sigma_p}}_{\sigma_p}\eta^1_{i_1}\ldots\eta^q_{i_q} = f(\xi_{\sigma_1},\ldots\xi_{\sigma_p},\eta^1,\ldots,\eta^q)$$

То есть:

$$g = \sigma(f) \leftrightarrow g(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f(\xi_{\sigma_1}, \dots \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q)$$

Пример:

Пусть $\alpha \in T(3,0)$, $\alpha = f^1 \otimes f^2 \otimes f^3, f^j \in V^* = T(1,0)$, $\sigma = (312), \beta = \sigma(\alpha)$.

$\forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in V$

$\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = f^1 \otimes f^2 \otimes f^3(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = f^1(\xi_3) \cdot f^2(\xi_1) \cdot f^3(\xi_2)$

И из этого примера следует формула:

Если $\alpha \in T(p,q) : \alpha = f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes \gamma$, $\beta = \sigma(\alpha)$,$p \geq 2$, $\gamma \in T(0,q)$

$\beta = f^{\sigma_1^{-1}} \otimes \dots \otimes f^{\sigma_p^{-1}} \otimes \gamma = \sigma^{-1}(f^1 \otimes \dots \otimes f^p) \otimes \gamma$

На практике транспонирование многомерной матрицы тензора осуществляется:

МЕТОДОМ ТРАНСПОНИРОВАНИЯ СЛОЯМИ:

Для этого разобьем нашу σ на транспозиции и будем транспонировать по ним по очереди:

Для этого фиксируется набор верхних индексов, и набор нижних индексов, за исключением двух нижних. Таким образом из многомерной матрицы тензора извлекается двумерная матрица, которая называется **слой**.

$$\alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots * \dots \Delta \dots j_p}$$

Здесь я фиксирую все i-шки, а j все фиксированнны кроме $*$ и Δ. Получили двумерную матрицу порядка n - **слой**.

$$(\alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots * \dots \Delta \dots j_p})^T = \overline{\alpha}$$

(просто обычная транспозицая квадратной двумерной матрицы).

И после транспонирования слой $\overline{\alpha}$ размещается обратно в исходную матрицу на те же позиции. Таким образом, в тензоре будут произведена перестановка (транспозиция) двух индексов. Назовем такую операцию τ.

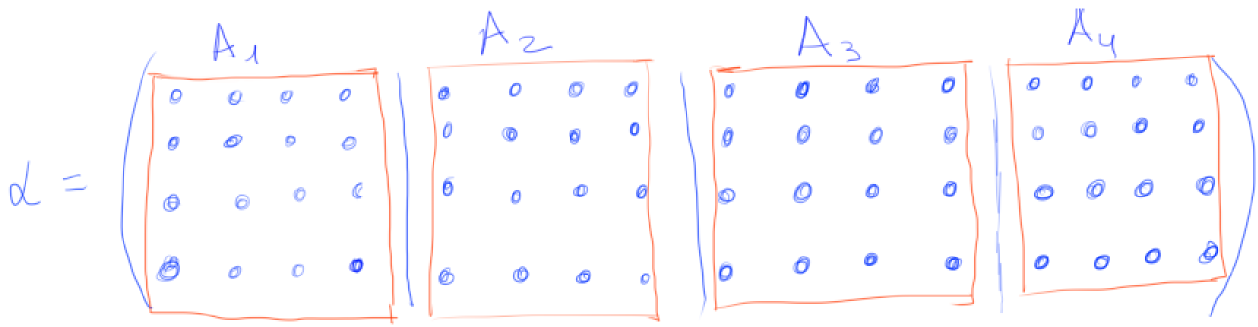
Тогда наша последовательность действий выглядит так:

$$\sigma \xrightarrow{\tau_1} \overline{\sigma} \xrightarrow{\tau_2} \dots \to (1, 2, \dots n)$$

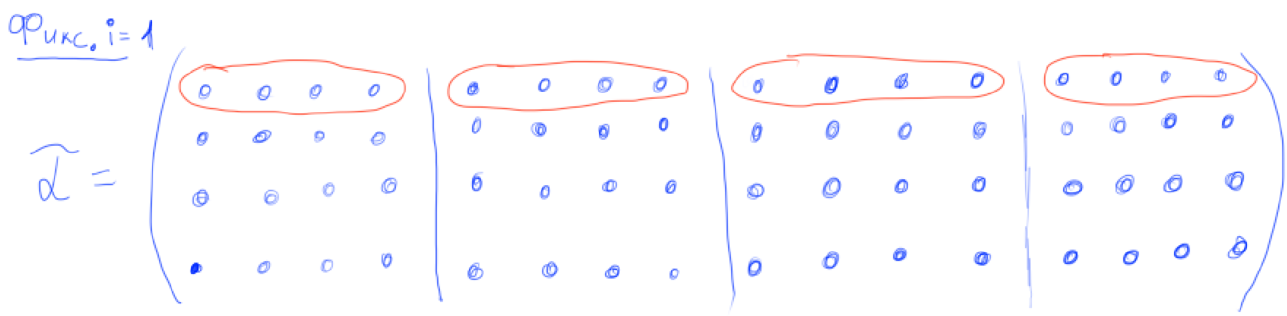
Пример:

$n = 4, \alpha \in T(3,0), \sigma = (312) \to \overline{\sigma} = (132) \to \overline{\overline{\sigma}} = (123)$

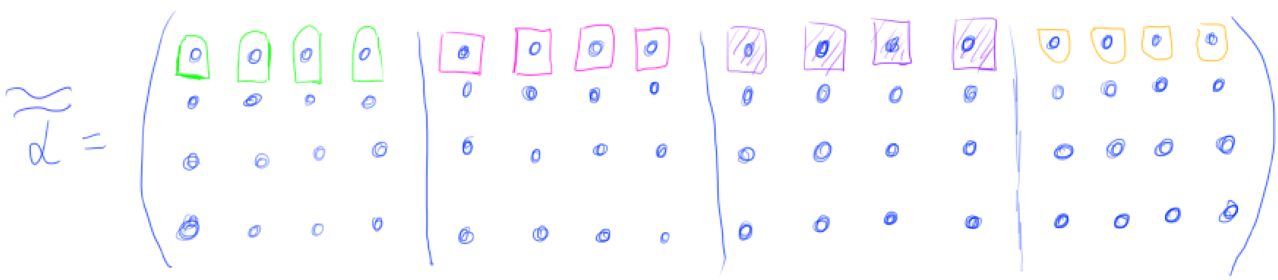
1) Проведем первую операцию. Так как у нас зафиксирована 3-я координата, то на самом деле нам надо лишь транспонировать 3 матрицы слоев. На рисунке снизу изображены все 4-и слоя и матрицы A_1, A_2, A_3, A_4. Поэтому для операции транспонирования я должен взять каждую из матриц A_i и транспонировать ее



2) Проведем вторую операцию. В этот раз у нас зафиксирована 1-ая координата(строка). Зафиксируем $i = 1$ и выпишем соответствующий ей слой:



А теперь возвращаем наш слой обратно. На рисунке показано, как мы это делаем:



Проделываем то же самое с остальными 3-емя слоями и получаем протранспонированную матрицу тензора.

Замечание: Если в матрице тензора много нулей, то проще пересчитать элементы по формуле.

Замечание: $\beta = \sigma(\alpha), \sigma = (kij)$. $\alpha_{ikj} = \beta_{kij}$ — неверно!!! Это ошибка!!!

Операция транспонирования - линейная операция, очевидно из определения.

$\sigma = \tau_k \cdot \ldots \tau_1$ произведение перестановок ассоциативно и не коммутативно, откуда операция транспозиции тензора аналогично ассоциативна и не коммутативна.

def: $\alpha \in T(p,q)$ называется **симметричным** тензором по нижним индексам, если $\forall \sigma$ перестановки $\sigma(\alpha) = \alpha$

def: $\alpha \in T(p,q)$ называется **кососимметричным** тензором по нижним индексам, если $\forall \sigma$: $\sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha$, где ε знак перестановки. (смотрите конспект первого семестра, раздел 6)

Поговорим, про равносильные определения:

α симметричный $\Leftrightarrow \sigma : \alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}} \Leftrightarrow \forall(k,m) : \alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{\ldots j_k \ldots j_m \ldots} = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j_m \ldots j_k \ldots}$

α кососимметричный $\Leftrightarrow \sigma : \alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}} \Leftrightarrow \forall(k,m) : \alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{\ldots j_k \ldots j_m \ldots} = -\alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j_m \ldots j_k \ldots}$

Теперь про функциональные:

α - симметричный $\Leftrightarrow \forall\sigma : \forall \xi_1, \ldots, \xi_p \in V; \forall \eta^1, \ldots, \eta^q \in V^*$:

$$\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = \alpha(\xi_{\sigma_1}, \ldots \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \ldots, \eta^q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall(k,m) : \alpha(\ldots, \xi_m, \ldots, \xi_k, \ldots) = \alpha(\ldots, \xi_k, \ldots, \xi_m, \ldots)$$

α - кососимметричный $\Leftrightarrow \forall\sigma : \forall \xi_1, \ldots, \xi_p \in V; \forall \eta^1, \ldots, \eta^q \in V^*$:

$$\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha(\xi_{\sigma_1}, \ldots \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \ldots, \eta^q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall(k,m) : \alpha(\ldots, \xi_m, \ldots, \xi_k, \ldots) = -\alpha(\ldots, \xi_k, \ldots, \xi_m, \ldots)$$

Утверждение. α кососимметричный $\Leftrightarrow \forall(k,m) : \forall \xi : \alpha(\ldots, \xi, \ldots \xi, \ldots) = 0$

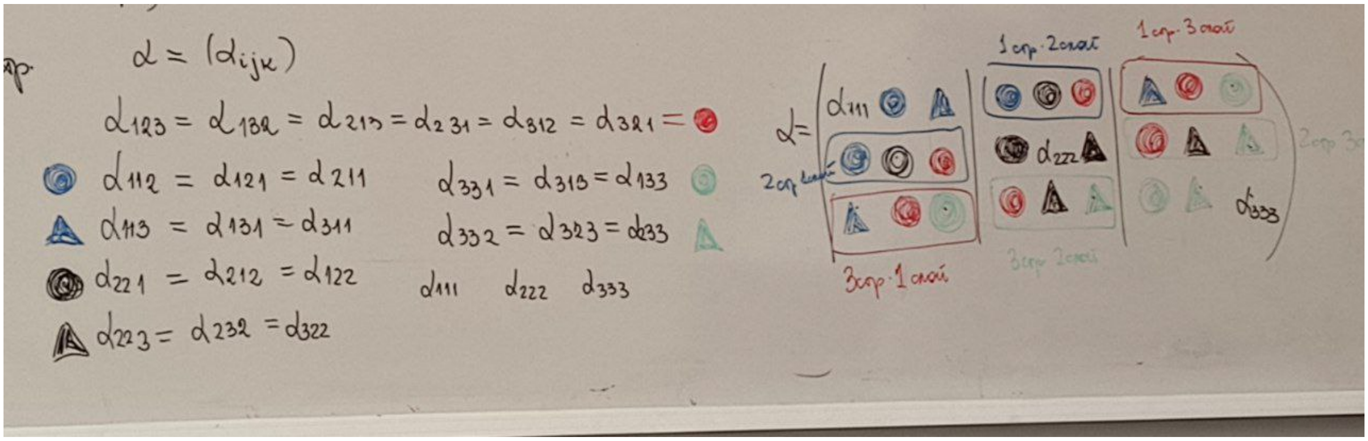
Замечание: $\alpha \in T(p,q)$ — кососимметричная. Тогда

1. Если $p > n \Rightarrow \alpha \equiv \mathbb{O}$, тк обязательно в наборе $j_1, \ldots, j_p$ будут одни индексы, а из этого следует, что все компоненты будут нулями
2. Если $p = n \Rightarrow$ ненулевые элементы матрицы α будут только те, у которых набор нижних индексов $j_1, \ldots j_n$ = перестановка от 1 до n. Все остальные будут нулями , тк совпадают индексы:
$$\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha^{i_1 * \ldots i_q}_{1\ldots n}$$

Примеры:

1. V_3, $\alpha(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, \overline{b}) \in T(2,0)$ — скалярное произведение — симметрично.
2. V_3, $\alpha(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \overline{a}\overline{b}\overline{c} \in T(3,0)$ — смешанное произведение — кососимметрично.

3. $n = 3, \alpha \in T(3, 0)$, α - симметрично $\alpha = (\alpha_{ijk})$. Тогда $\alpha_{123} = \alpha_{132} = \alpha_{213} = \alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{321}$, $\alpha_{112} = \alpha_{121} = \alpha_{211}$, ... См рисунок



~~он перерисуется, когда у славы руки дойдут~~

2.5 Операции симметрирования и альтернировании тензора.

кососимметричный = антисимметричный = альтернированный.

def: $\alpha \in T(p,q), p \geq 2$. $\text{Sim } \alpha = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\alpha)$, где S_p - множество всех перестановок $(1, \ldots, p)$. Такая операция называется **симметрированием** тензора по нижним индексам.

def: $\text{Alt } \alpha = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma(\alpha)$ - операция **альтернирования** тензора по нижним индексам.

Замечание: по верхним аналогичным.

Позамечаем некоторые интересные факты

1. $\text{Sim } \alpha \in T(p,q), \text{Alt } \alpha \in T(p,q)$
2. $\text{Sim }, \text{Alt }$ — линейные операции, так как σ - линейные операторы.
3. если α симметричный $\Rightarrow \text{Sim } \alpha = \alpha$
4. если α кососимметричный $\Rightarrow \text{Alt } \alpha = \alpha$
5. Sim и Alt можно проводить не по всему набору (нижних) индексов. В этом случае, тот набор по которому происходит симметрирование (альтернирование) заключается в круглые (квадратные) скобки. Индексы, не участвующие в операндах выделяются вертикальными чертами. При этом квадратные и круглые скобки должны быть только одни.

Теорема.

$\alpha \in T(p,q), p \geq 2$.

$\forall \sigma : \text{Sim } \sigma(\alpha) = \sigma(\text{Sim } \alpha) = \text{Sim } \alpha, \text{Alt } (\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{Alt } \alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\text{Alt } \alpha$

Доказательство:

Будем доказывать для Alt для (Sim упр).

$$\text{Alt } (\sigma(\alpha)) = \frac{1}{p!}\sum_{\tau \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\tau)}\tau(\sigma(\alpha))$$

Пусть $r\sigma = \rho$. Заметим, что ρ пробегает все P. Тогда заменим и получим:

$$= \frac{(-1)^{\varepsilon(\sigma)}}{p!}\sum_{\rho \in S_\rho} (-1)^{\varepsilon(\rho)}\rho(\alpha)$$

Теперь вторая часть:

$$\sigma(\text{Alt } \alpha) = \sigma\left(\frac{1}{p}\sum_{\tau \in S_P} (-1)^{\varepsilon}\tau(\alpha)\right)$$

Как мы знаем транспонирование это линейная операция. Сделаем замену на ρ, как в прошлой части и получим:

$$= \frac{1}{p!}\sum_{\tau \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\tau)}\sigma(\tau(\alpha)) = \frac{(-1)^{\varepsilon(\sigma)}}{p!}\sum_{\rho \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\tau)}\rho(\alpha)$$

Получили то, что хотели.

Q.E.D.

Следствие 1. $\forall \alpha \in T(p,q)$, Alt α - кососимметричный тензор, Sim α - симметричный тензор. Очевидно по определению.

Следствие 2. α кососимметричный $\Leftrightarrow$ Alt $\alpha = \alpha$, а также α симметричный $\Leftrightarrow$ Sim $\alpha = \alpha$

Доказательство:

В правую сторону очевидно по определению. Докажем в левую сторону.

Пусть $\alpha = \text{Alt } \alpha$. Тогда $\sigma(\text{Alt } \alpha) = \sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\text{Alt } \alpha = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha$. Откуда $\sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha$. Откуда кососимметрично по определению.

Q.E.D.

Следствие 3. Alt (Alt α) = Alt α, Sim (Sim α) = Sim α, Alt (Sim α) = $\mathbb{O}$, Sim (Alt α) = 0:

Доказательство:

1, 2 очевидно из следствия 1,2.

$$\text{Alt (Sim } \alpha) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma(\text{Sim } \alpha) = \frac{\text{Sim } \alpha}{p!}\sum_{\sigma \in S_p}(-1)^{\varepsilon(\sigma)} = \mathbb{O}$$

$$\text{Sim (Alt } \alpha) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p}\sigma(\text{Alt } (\alpha)) = \text{Alt } \alpha \cdot \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p}(-1)^{\sigma(\varepsilon)} = \mathbb{O}$$

Q.E.D.

Замечание. Теорема и следствия верны для неполного набора индексов.

Замечание. $T(p,q)^{\text{кососим}}$ и $T(p,q)^{\text{сим}}$ - линейные пространства в $T(p,q)$.

Замечание.$T(p,q)^{\text{кососим}} \oplus T(p,q)^{\text{сим}} = T(p,q)$

2.6 p-формы. Внешнее произведение p форм.

def: $f \in T(p, 0)$ — ковариантный тензор валентности p — **полилинейная форма**.

$f \in T(p, 0)$ и **полилинейная антисимметричная** форма = ковар. тензор валентности p и кососимметричный. В таком случае f называется **p-формой**, или **внешней формой**, или внешней формой порядка p.

$\Lambda^p V^* = \{f \in T(p, 0) : \text{Alt } f = f\}$ — линейное подпространство тензоров — **линейное пространство** p-форм.

$p = 1 : \Lambda^1 V^* \equiv V^*$.

def: $g \in T(0, q)$ — **контрвариантный тензор** валентности q или **поливектор**.

$g \in T(0, q)$ — **антисимметричный поливектор** — **q-вектор**

$V^q V = \{g \in T(0, q) : \text{Alt } g = g\}$ — **линейное пространство** q-векторов.

Замечание: все, что мы выведем для p-форм, будет верно и для q-форм

def: $f^1 \in \Lambda^{p_1} V^*, f^2 \in \Lambda^{p_2} V^*$ p_1 и p_2 формы. Введем новую операцию, такую:

$$f^1 \wedge f^2 = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \text{Alt } (f^1 \otimes f^2)$$

Такая операция называется **внешним произведением** p-форм.

Свойства внешнего произведение:

1. $f^1 \wedge f^2 = (-1)^{p_1 \cdot p_2} \cdot f^2 \wedge f^1$

   Доказательство:

$$f^1 \wedge f^2 = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} (\text{Alt } f^1 \otimes f^2)$$

   Заметим, что тогда должно быть выполнено:

$$\text{Alt } (f^1 \otimes f^2) = (-1)^{p_1 \cdot p_2} \text{Alt } (f^2 \otimes f^1)$$

   Введем больше формальности в доказательства. Разложим f^1, f^2 по базису пространства тензоров. Получим:

$$f^1 \leftrightarrow (a_{i_1, \ldots i_{p_1}}), f^2 \leftrightarrow (b_{j_1, \ldots, j_{p_2}})$$

   Тогда давайте выпишем:

$$f^1 \otimes f^2 \leftrightarrow \gamma_{i_1 \ldots i_{p_1} j_1 \ldots j_{p_2}} = \alpha_{i_1 \ldots i_{p_1}} \beta_{j_1 \ldots j_{p_2}}$$

$$f^2 \otimes f^1 \leftrightarrow \theta_{j_1 \ldots j_{p_2} i_1 \ldots i_{p_1}} = \beta_{j_1 \ldots, j_{p_2}} \alpha_{i_1 \ldots i_{p_1}}$$

   Тогда:

$$\text{Alt } (\gamma) = \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1 + p_2}} \sigma(\gamma)(-1)^{\varepsilon(\sigma)} \qquad \text{Alt } (\theta) = \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\tau \in S_{p_1 + p_2}} \tau(\theta)(-1)^{\varepsilon(\tau)}$$

   Заметим, что γ и θ отличаются перестановкой из $(i_1, \ldots, i_{p_1}, j_1, \ldots, j_{p_2})$ в $(j_1, \ldots, j_{p_2}, i_1, \ldots i_{p_1})$, обозначим ее ab. То есть у меня выполнено:

$$\text{Alt } \gamma = \text{Alt } (ab(\theta)) = (-1)^{\varepsilon(ab)} \text{Alt } \theta$$

Заметим, что перестановка ab тратит p_1p_2 транспозиций, то есть $\varepsilon(ab) = p_1p_2$, откуда уже получаем искомую формулу.

Q.E.D.

В частности, $f^1 \in V^*, f^2 \in V^*$, то $f^1 \wedge f^2 = -f^2 \wedge f^1$. Так же $f \wedge f = \mathbb{O}$.

Отсюда выводится свойство, что $w^i \wedge w^j = -w^j \wedge w^i$ и $w^i \wedge w^i = \mathbb{O}$.

2. $(f^1 + f^2) \wedge f^3 = f^1 \wedge f^3 + f^2 \wedge f^3$ и $f^1 \wedge (f^2 + f^3) = f^1 \wedge f^2 + f^1 \wedge f^3$
3. $\forall \lambda \in K : (\lambda f^1) \wedge f^2 = \lambda(f^1 \wedge f^2) = f^1 \wedge (\lambda f^2)$
4. $\mathbb{O}_{\Lambda^{p_1}V^*} \wedge f^2 = f^1 \wedge \mathbb{O}_{\Lambda^{p_2}V^*} = \mathbb{O}_{\Lambda^{p_1+p_2}V^*}$
5. $(f^1 \wedge f^2) \wedge f^3 = f^1 \wedge (f^2 \wedge f^3) = f^1 \wedge f^2 \wedge f^3$

Доказательство:

Распишем первое:

$$(f^1 \wedge f^2) \wedge f^3 = \left(\frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!}\text{Alt }(f^1 \otimes f^2)\right) \wedge f^3 =$$

$$= \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{(p_1+p_2)!(p_3)!}\text{Alt }\left(\left(\frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2}\text{Alt }(f^1 \otimes f^2)\right) \otimes f^3\right) = \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!}\text{Alt }\left(\text{Alt }(f^1 \otimes f^2) \otimes f^3\right)$$

Распишем второе:

$$(f^1 \wedge f^2) \wedge f^3 = \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!}\text{Alt }\left(f^1 \otimes \text{Alt }(f^2 \otimes f^3)\right)$$

Нам надо лишь доказать, что $\text{Alt }(\text{Alt }(f^1 \otimes f^2) \otimes f^3) = \text{Alt }(f^1 \otimes \text{Alt }(f^2 \otimes f^3))$

Ну, давайте докажем:

$$\text{Alt }(\text{Alt }(f^1 \otimes f^2) \otimes f^3) = \text{Alt }\left(\frac{1}{(p_1+p_2)!}\sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}}\left((-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma(f^1 \otimes f^2) \otimes f^3\right)\right)$$

$$f^1 \otimes f^2 \leftrightarrow \alpha_{i_1 \dots i_{p_1}}\beta_{j_1 \dots j_{p_2}} \quad f^3 \leftrightarrow \gamma_{\theta_1 \dots \theta_{p_3}}$$

Заметим, что σ это перестановка, которая переставляет $p_1 + p_2$ индексов.

Возьму τ такую перестановку, что она переставляет $(p_1+p_2+p_3)$ индексов $i_1, , \dots, i_{p_1}, j_1, \dots, j_{p_2}, \theta_1, \dots, \theta$ но при этом последние p индексов будут стоять на месте(Расширим нашу перестановку σ).

$$= \frac{1}{(p_1+p_2)!}\text{Alt }\left(\sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}}(-1)^{\varepsilon(\tau)}\tau(f^1 \otimes f^2 \otimes f^3)\right) = \frac{1}{(p_1+p_2)!}\sum_{\sigma}(-1)^{\varepsilon(\tau)}\text{Alt }(\tau(f^1 \otimes f^2 \otimes f^3)) =$$

$$= \frac{1}{(p_1+p_2)!}\text{Alt }(f^1 \otimes f^2 \otimes f^3)\sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} 1 = \text{Alt }(f^1 \otimes f^2 \otimes f^3)$$

Аналогичным образом раскрываем и получаем, для другой то же самое. Откуда они равны.

Q.E.D

Следствие: $f^1 \wedge f^2 \wedge f^3 = \dfrac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!}\text{Alt}\ (f^1 \otimes f^2 \otimes f^3)$

Следствие: По индукции верно $f^1 \wedge \ldots \wedge f^n = \dfrac{(p_1+\ldots+p_n)}{p_1!\ldots p_n!}\text{Alt}\ (f^1 \otimes \ldots \otimes f^n)$

Следствие: $\forall j = 1 \ldots p : f^j \in V^* = \Lambda^1 V^*$

$$f^1 \wedge \ldots \wedge f^p = p! \cdot \text{Alt}\ (f^1 \otimes \ldots \otimes f^n)$$

Это следует из нашего свойства и поэтому у нас именно такое обозначение p-форм (у нас как бы значок $\wedge$)

6. $\forall j = 1 \ldots p : f^j \in V^* = \Lambda^1 V^*$.

   Тогда

$$\sigma(f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^p) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} f^1 \wedge \ldots \wedge f^p = \sigma^{-1}(f^1 \wedge \ldots \wedge f^n) = f^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge f^{\sigma_p}$$

   Доказательство:

   Докажем только последний переход, все остальные очевидны из определения:

$$\sigma^{-1}(f^1 \wedge \ldots \wedge f^p) = p!\sigma^{-1}\text{Alt}\ (f^1 \otimes \ldots \otimes f^p) = p!\text{Alt}\ (\sigma^{-1}(f^1 \otimes \ldots \otimes f^p))$$

   Следствие: Если f^j— 1 формы, тогда:

$$f^1 \wedge \ldots \wedge f^k \wedge \ldots \wedge f^m \wedge \ldots \wedge f^p = -f^1 \wedge \ldots \wedge f^m \wedge \ldots \wedge f^k \wedge \ldots f^P$$

$$\ldots \wedge f \wedge \ldots \wedge f \wedge \ldots = \mathbb{0}$$

Теорема (о базисе пространства p - форм)

Пусть $j_1 < \ldots < j_p$ — упорядоченный набор $j_l \in (1, \ldots, n)$

$\{w^{j_1} \wedge \ldots \wedge w^{j_p}\}$ совокупность по всем упорядоченным наборам $(j_1, \ldots, j_p)$ — базис $\Lambda^p V^*$.

Доказательство:

Докажем порождаемость:

$\forall f \in \Lambda^p V^*$. $f \in T(p,0)$ и $f = \text{Alt}\ f$ - кососимметричный. Разложим по координатам тензора

$$f = \alpha_{i_1 \ldots i_p} w^{i_1} \otimes \ldots \otimes w^{i_p}$$

С другой стороны $\text{Alt}\ f = \text{Alt}\ (\alpha_{i_1 \ldots i_p} w^{i_1} \otimes \ldots \otimes w^{i_p}) = a_{i_1 \ldots i_p} \text{Alt}\ (w^{i_1} \otimes \ldots \otimes w^{i_p})$. Из следствия 2 свойства 5 $\text{Alt}\ (w^{i_1} \otimes \ldots \otimes w^{i_p}) = \dfrac{1}{p!} w^{i_1} \wedge \ldots \wedge w^{i_p}$.

Если среди $(i_1 \ldots i_p)$ есть одинаковые индексы, то $w^{i_1} \wedge \ldots \wedge w^{i_p} = \mathbb{0}$. Если все индексы различные, то это просто перестановка $(j_1, \ldots, j_p) : j_1 < \ldots < j_p$. Тогда заменим на равное:

$$= \sum_{j_1 < \ldots < j_p} \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \ldots j_{\sigma_p}} w^{j_{\sigma_1}} \wedge \ldots \wedge w^{j_{\sigma_p}} = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \ldots j_{\sigma_p}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} w^{j_1} \wedge \ldots w^{j^p}$$

Вынесем за скобки и получим:

$$= \sum_{j_1<\ldots<j_p} \left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \ldots j_{\sigma_p}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \right) w^{j_1} \wedge \ldots \wedge w^{j_p}$$

Откуда порождаемый.

Замечание: коээффицент перед омегами равен $\beta_{j_1 \ldots j_p}$ b называется **существенной** координатой p-формы f. Она равна $\alpha_{[j_1 \ldots j_p]} = \beta_{j_1 \ldots j_p}$.

Докажем линейно-независимость:

Для этого составим комбинацию.

$$\mathbb{O} = \sum_{j_1<\ldots j_p} \beta_{j_1 \ldots j_p} w^{j_1} \wedge \ldots \wedge w^{j_P} = \sum_{j_1<\ldots<j_p} \beta_{j_1 \ldots j_p} \sum_{\sigma \in S_p} w^{j_{\sigma_1}} \otimes \ldots \otimes w^{j_{\sigma(p)}} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} =$$

$$= \alpha_{i_1 \ldots i_p} w^{i_1} \otimes \ldots \otimes w^{i_p}$$

где если хотя бы 2 индекса совпадают,то $\alpha_{i_1 \ldots i_p} = 0$. Получили, что базис из тензоров = нулю, откуда и искомые.

Q.E.D.

Следствие 1: $\dim \Lambda^p V^* = C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Следствие 2: $\forall f \in \Lambda^p V^*$:

$$f = \sum_{j_1<\ldots<j_p} \beta_{j_1 \ldots j_p} w^{j_1} \wedge \ldots \wedge w^{j_p}$$

где $\beta_{j_1 \ldots j_p} = \alpha_{j_1 \ldots j_p}$— **существенные** координаты (α в данном случае берется из матричного представления тензора f).

Существенные координаты принято записывать в строку (перестановки в лексикографическом порядке)

Пример:

$n = 4, p = 3 : f \in \Lambda^p V^* \leftrightarrow \beta = (\beta_{123}, \beta_{124}, \beta_{134}, \beta_{234})$

Теорема 1

$$\forall \xi_1, \ldots, \xi_p \in V : w^{j_1} \wedge \ldots \wedge w^{j_p}(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \det(\xi_k^{j_m})_{p \times p} = \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \ldots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \ldots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

Доказательство:

$$w^{j_1} \wedge \ldots \wedge w^{j_p}(\xi_1, \ldots, \xi_p) = p!\text{Alt } (w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p})(\xi_1, \ldots, \xi_p) =$$

$$= \frac{p!}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sigma (w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p})(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p}(\xi_{\sigma_1}, \ldots, \xi_{\sigma_p}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \xi^{j_1}_{\sigma_1} \dots \xi^{j_p}_{\sigma_p} = \det(\xi^{j_m}_k)$$

Q.E.D.

Следствие: $\forall f \in \Lambda^p V^*$:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1 \dots j_p} \begin{vmatrix} \xi^{j_1}_1 & \dots & \xi^{j_1}_p \\ \vdots & & \vdots \\ \xi^{j_p}_1 & \dots & \xi^{j_p}_p \end{vmatrix}$$

Теорема 2.

$\forall j = 1 \dots p . f^j \in V^* = \Lambda^1 V^*$ - 1 форма.

$f = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^p$ - p - форма.

$f^j \leftrightarrow a^j = (a^j_1 \dots a^j_n)$ — координатная строка в базисе w^j. $f^j = a^j_i w^i$. Тогда

$$\beta_{j_1 \dots j_p} = \begin{vmatrix} a^1_{j_1} & \dots & a^1_{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a^p_{j_1} & \dots & a^p_{j_p} \end{vmatrix} = \det(a^m_{j_k})$$

А также:

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \begin{vmatrix} a^1_{j_1} & \dots & a^1_{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a^p_{j_1} & \dots & a^p_{j_p} \end{vmatrix} w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p}$$

Доказательство:

$$\beta_{j_1 \dots j_p} = f^1 \wedge \dots \wedge f^p(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) =$$

Теперь смотрите доказательство первой теоремы, но в качестве w^j возьмите f^j, а в качестве $\xi_i \to e_{j_i}$:

$$= \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} f^1(e_{j_{\sigma_1}}) \dots f^p(e_{j_{\sigma_p}}) = \det(a^m_{j_k}) = \begin{vmatrix} a^1_{j_1} & \dots & a^1_{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a^p_{j_1} & \dots & a^p_{j_p} \end{vmatrix}$$

Q.E.D

Следствие: $\forall j = 1 \dots m : f^j$ - 1-форма. $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V$. Тогда

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \begin{vmatrix} a^1_{j_1} & \dots & a^1_{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a^p_{j_1} & \dots & a^p_{j_p} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi^{j_1}_1 & \dots & \xi^{j_1}_p \\ \vdots & & \vdots \\ \xi^{j_p}_1 & \dots & \xi^{j_p}_p \end{vmatrix}$$

Теорема 3.

$\forall j = 1 \dots p,\ f^j$ - 1-формы. $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V$ выполнено:

$$f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots \xi_p) = \begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix} = \det(f^j(\xi_i))$$

Доказательство:

Смотрите доказательство теоремы 2. Записать $e_{j_k} \to \xi_k$.

$$f^1 \wedge \ldots \wedge f^p(\xi_1 \ldots \xi_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} f^1(\xi_{\sigma_1}) \ldots f^p(\xi_{\sigma_p}) = \det(f^j(\xi_k))$$

Q.E.D.

Следствие: $\begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \ldots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \ldots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix} = \sum_{j_1 < \ldots j_p} \begin{vmatrix} a^1_{j_1} & \ldots & a^1_{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a^p_{j_1} & \ldots & a^p_{j_p} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^{j_1}_1 & \ldots & \xi^{j_1}_p \\ \vdots & & \vdots \\ \xi^{j_p}_1 & \ldots & \xi^{j_p}_p \end{vmatrix}$

Пример: частный случай.

$p = n, \dim \Lambda^n V^* = 1$. Тогда в таком случае:

$$f^1 \wedge \ldots \wedge f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \det(A\xi) = \det A \cdot \det \xi$$

$$f = \det A \cdot w^1 \wedge \ldots \wedge w^n$$

Замечание. Все вышесказанное верно и для q-векторов. Есть лишь пару отличий:

$g_1 \vee g_2 = \dfrac{(q_1+q_2)!}{q_1!q_2!}\text{Alt }(g_1 \otimes g_2)$ — **внешнее произведение** q-векторов.

Все свойства и теоремы выполнены, но базис $\{e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_q}\}$, для $i_1 < \ldots < i_1$.

Как мы помним $f(\xi) = \xi(f)$. Так что давайте применим это.

Пусть $p = q$. Тогда $\xi_j \in V \cong V^{**}$, $f^j \in V^*$. Тогда

$$\xi_1 \vee \ldots \vee \xi_p(f^1, \ldots, f^p) = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} \begin{vmatrix} \xi^{j_1}_1 & \ldots & \xi^{j_1}_p \\ \vdots & & \vdots \\ \xi^{j_p}_1 & \ldots & \xi^{j_o}_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^1_{j_1} & \ldots & a^1_{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a^p_{j_1} & \ldots & a^p_{j_p} \end{vmatrix} = f^1 \wedge \ldots \wedge f^p(\xi_1, \ldots \xi_p) =$$

$$= \det(f^j(\xi_i)) = \det(\xi_i(f^j))$$

3 Евклидовы и унитарные пространства.

3.1 Основные определения.

Начнем с определений.

def: V - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ называется **скалярное произведение**, если она удовлетворяет 4-ем аксиомам.

$\forall x, y \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $(x, y) = (y, x)$ — симметричность
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4. $\forall x \neq 0 : (x, x) > 0$

def: $(V, (\cdot,\cdot))$ $\dim V = n < \infty$ называется **евклидовым пространством** или вещественным линейным пространством со скалярным произведением.

Замечание: Если V бесконечномерно, то это называется **гильбертовым пространством**

def: V - линейное пространство над полем $\mathbb{C}$.

$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ функция называется **псевдоскалярным** произведением.

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ — симметричность
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4. $\forall x \neq 0 : (x, x) > 0$

Такая функция называется **полуторалинейной**.

def: $\dim V = n < \infty$, $(V, (\cdot,\cdot))$ называется **унитарным** пространством или эрмитовый или псевдоевклидовой или комплексным линейным пространством с псевдоскаляром.

Замечание: Если вы не напишите слово вещественные или комплексные в работе или на экзамене, то вам инста бан.

def: Введем норму: $\forall x \in V : ||x|| = \sqrt{(x, x)}$ — **евклидова норма**.

Давайте проверим выполняемость свойств нормы.

1. $\forall x \neq 0 \Rightarrow ||x|| \neq 0$ (невырожденность) — выполнена.
2. $\forall \lambda \in K \Rightarrow ||\lambda x|| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = |\lambda| \cdot ||x||$ (однородность) — выполнено.
3. $\forall x, y \in V$ неравенство треугольника.

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Мы будем пользоваться в доказательстве неравенством КБШ. Его доказательство вы можете найти в конспекте первого семестра по матанализу.

$$||x + y||^2 = (x + y, x + y) = ||x||^2 + (x, y) + (y, x) + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2Re(x, y) + ||y||^2 \leq$$

$$\le ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 \le (||x|| + ||y||)^2$$
$$\Rightarrow ||x+y|| \le ||x|| + ||y||$$

def: $\forall x \in V : ||x||$ - **длина вектора**. φ называем углом между x и y, таким, что $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{||x||||y||}$

Пример:

1. Возьмем $\mathbb{R}^n$. $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$. $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$. Заметим что выполнены все 4 аксиомы скалярного произведения
$$||x|| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2} = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}}$$
Неравенство КБШ в данном случае будет вот таким:
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\dfrac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\dfrac{1}{2}}$$
А неравенство треугольника у нас будет вот таким:
$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2\right)^{\dfrac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\dfrac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\dfrac{1}{2}}$$
По-другому неравентво треугольника в данном случае будет называться неравенством Минковского.

2. Так же мы будем пользоваться вот таким примером. Пусть у нас выбран промежуток $[a,b]$ и $\int\limits_a^b |f|^2 dt < \infty$. Тогда введем скалярное произведение:
$$(f,g) = \int_a^b f\overline{g} dt$$

3.2 Процесс ортогонализация Грама-Шмидта. Орто-нормированный базис. Ортогональное дополнение.

def: Система ненулевых векторов $v_1, \dots, v_m$ называется **ортогональным**, если $\forall (i,j), i \neq j : (v_i, v_j) = 0$.

def: Система ненулевых векторов называется **ортонормированной**, если $v_1, \dots, v_m : \forall (i,j) : (v_i, v_j) = \delta_{ij}$. $||v_i|| = 1$

Утверждение: $v_1, \dots, v_m$ ортогональная $\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ линейно независимы.

Доказательство:

$v_1, \dots, v_m$ ортогональны. Хотим показать тривиальность разложения нуля(в принципе ничего нового).

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \mathbb{O}$$

Давайте применим операцию скалярного произведения с v_j к обеим частям. Таким образом получим:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_i, v_j) = \alpha_j (v_j, v_j) \Rightarrow \alpha_j = 0$$

Таким образом получаю, что каждая $\alpha_j = 0$, то есть вектора линейно независимы.

Q.E.D.

Теорема (процесс ортогонализации Грама-Шмидта)

$\forall a_1, \dots, a_n \to \exists b_1, \dots, b_k \in V$. Причем b_i попарно-ортогонально и $span(a_1, \dots, a_n) = span(b_1, \dots, b_k)$. При этом $k = rg(a_1, \dots, a_m)$

Доказательство:

Пусть $a_1, \dots, a_m$ линейно независимы, то есть $m = k$

Будем доказывать по индукции.

База:

Рассмотрим $k = 2$, пусть $b_1 = a_1$. Мы хотим, чтобы b_2 и b_1 были ортогональны, то есть $(b_1, b_2) = 0$. Пусть $b_2 = a_2 - c_1 b_1$. Тогда, нам надо, чтобы было выполнено:

$$0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) - c_1(b_1, b_1) \Leftrightarrow c_1 = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$$

Заметим, что сейчас мы нашли такое b_2, что оно ортогонально и тк мы сделали линейное преобразование, то $span(b_1, b_2) = span(a_1, a_2)$

Индукционный переход:

Пусть верно для m. Докажем для $m + 1$.

Возьму первые m. Для них по предположению индукцию построю ортогональные.

Возьму $b_{m+1} = a_{m+1} - \sum_{j=1}^{m} c_j b_j$

Хотим, понять существуют ли такие c. Давайте переберем $r = 1 \dots m$ и возьмем скалярное произведение с b_r. Тогда:

$$0 = (b_{m+1}, b_r) = (a_{m+1}, b_r) - \sum_{j=1}^{m} c_j(b_j, b_r) = (a_{m+1}, b_r) - c_r(b_r, b_r)$$

$c_r = \dfrac{(a_{m+1}, b_r)}{||b_r||^2}$

Заметим, что $b_{m+1} \neq 0$, тк иначе $a_{m+1} \in span(b_1, \dots b_n)$, откуда линейно-независимый. Откуда получили $m+1$ ортогональный.

Q.E.D.

Следствие 1: Для любого пространства V евклидова, унитарного всегда существует ортонормированный базис.

Следствие 2: Любую ортогональную систему в V можно дополнить до о.н.б.

def: $L \subset V$ $L^{\perp} = \{y \in V | (x, y) = 0, \forall x \in L\}$ — **ортогональное дополнение** L.

Свойства:

1. $L^{\perp}$ — линейное подпространство.

$$\forall y_1, y_2 \in L^{\perp}, \forall \lambda \in K : (x, \lambda y_1 + \lambda y_2) = \overline{\lambda}(x, y_1) + (x, y_2) = 0$$

Откуда $\lambda y_1 + y_2 \in L^{\perp}$

2. $V = L \oplus L^{\perp}$.

Доказательство:

L и $L^{\perp}$ дизъюнктны: $y \in L, y \in L^{\perp}, (y, y) = 0 \Leftrightarrow y = \mathbb{O} \Leftrightarrow L \cap L^{\perp} = \{\mathbb{O}\}$.

Теперь хотим понять $L \oplus L^{\perp} = V$.

Пусть $L = span(a_1, \dots, a_n)$ - ортогональный базис L. Дополним до базиса V.

$$V = span(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

Тогда очевидно, что $L^{\perp} = span(a_{k+1}, \dots, a_n)$, тк $\forall y \in span(a_{k+1} \dots a_n) : y = \sum\limits_{j=1}^{n-k} c_j a_{k+j}$ и $\forall x \in L : (x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n-k} \overline{c_j}(x, a_{k+j}) = \sum\limits_{j=1}^{n-k} \sum\limits_{m=1}^{k} \overline{c_j} \alpha_m (a_m, a_{k+j}) = 0$

Откуда по эквивалентноёму условию прямой суммы верно.

Q.E.D.

Замечание: $\forall L : \exists L'$ - прямое дополнение и $\exists L^{\perp}$ со свойством, что его элементы $\perp L$.

3. $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$ и $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$

Доказательство:

$(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$.

Докажем сначала вложенность в левую сторону:

$\forall y \in L_1^\perp \,\&\, y \in L_2^\perp \Leftrightarrow y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$. Как мы знаем:

$$\forall x_1 \in L_1 : (x_1, y) = 0$$

$$\forall x_2 \in L_2 : (x_2, y) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 \in L_1 + L_2; (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) = 0$$

Откуда $y \in (L_1 + L_2)^\perp$.

Докажем вложенность в правую сторону:

Пусть $y \in (L_1 + L_2)^\perp \Rightarrow \forall x_1 + x_2 \in L_1 + L_2, x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$: $(x_1 + x_2, y) = 0$. Пусть $x_2 = \mathbb{O}$. Тогда $\forall x_1 \in L_1 : (x_1, y) = 0$. Откуда $y \in L_1^\perp$, аналогично $y \in L_2^\perp$. А это то что нам надо

Теперь докажем второе равенство:

$$(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$$

Применим первое свойство к $L_1^\perp$

$$(L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp = (L_1^\perp)^\perp \cap (L_2^\perp)^\perp$$

Это равно

$$(L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp = L_1 \cap L_2$$

$$((L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp)^\perp = (L_1 \cap L_2)^\perp$$

Q.E.D.

4. $V^\perp = \mathbb{O}$

3.3 Матрица Грама и ее свойства. Ортогональные и унитарные матрицы.

Дано $(V, (\cdot,\cdot))$ - евклидово или унитарное, e - базис V. $e = (e_1, \ldots, e_n)$.

$\forall x, y \in V : (x, y) = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j}(e_i, e_j)$

def: $\Gamma = ((e_i, e_j))_{n\times n} = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \ldots & (e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_n, e_1) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$ — **матрицей Грама**(базиса пространства V)

Очевидно, что $\overline{\Gamma^T} = \Gamma$ из свойств скалярного произведения.

def: $A = (a_{ij})_{n\times n}, a_{ij} \in K$. $A^* = \overline{A^T}$ называется матрицей, **сопряженной** к A.

Замечание: все def пишем для $\mathbb{C}$, для $\mathbb{R}$ надо убрать операцию сопряжения.

def: $A^* = A$ называется **самосопряженной**.

$\mathbb{R}$ $A^T = A$ — симметричная.

$\mathbb{C}$ $\overline{A^T} = A$ — **эрмитова матрица**.

$(x, y) = x^T \cdot \Gamma \cdot \overline{y}$

Частный случай. e - ортонормированный базис $\Gamma = E$.

Частный случай. e - ортогональный базис $\Gamma = diag(||e_1||^2, \ldots, ||e_n||^2)$

def: Пусть есть $a_1, \ldots, a_k \in V$. Назовем $G = (a_1, \ldots, a_k) = ((a_i, a_j))_{k\times k}$
— **матрицей Грама системы векторов**.

Очевидно, что $G^* = G$ - самосопряженная.

Очевидно, что $\Gamma = G(e_1, \ldots, e_n)$ - матрица Грама частный случай.

def: $g(a_1, \ldots, a_k) = \det G(a_1, \ldots, a_k)$.

Теорема (об определителе матрицы Грама)

$a_1, \ldots, a_k$ по Граму-Шмидту переводится в попарно-ортогональные $b_1, \ldots, b_k$ (но возможно есть нули).

Тогда $g(a_1, \ldots, a_k) = ||b_1||^2 \ldots ||b_k||^2 = g(b_1, \ldots, b_k)$

Доказательство:

$$g(a_1, \ldots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & (a_1, a_3) & \ldots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & (a_2, a_3) & \ldots & (a_1, a_n) \\ (a_3, a_1) & (a_3, a_2) & (a_3, a_3) & \ldots & (a_1, a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & (a_n, a_3) & \ldots & (a_n, a_n) \end{vmatrix}$$

По процессу ортогонализации я заменяю a_1 на b_1 получу:

$$g(a_1,\dots,a_k) = \begin{vmatrix} (b_1,b_1) & (b_1,a_2) & (b_1,a_3) & \dots & (b_1,a_n) \\ (a_2,b_1) & (a_2,a_2) & (a_2,a_3) & \dots & (a_1,a_n) \\ (a_3,b_1) & (a_3,a_2) & (a_3,a_3) & \dots & (a_1,a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n,b_1) & (a_n,a_2) & (a_n,a_3) & \dots & (a_n,a_n) \end{vmatrix}$$

Выполним второй шаг. $b_2 = a_2 - c_1$, где $c_1 = \dfrac{(a_2,b_1)}{||b_1||^2}$.

Из второй строки вычту 1 строку умноженную на c_1 получу:

$$g(a_1,\dots,a_k) = \begin{vmatrix} (b_1,b_1) & (b_1,a_2) & (b_1,a_3) & \dots & (b_1,a_n) \\ (b_2,b_1) & (b_2,a_2) & (b_2,a_3) & \dots & (b_1,a_n) \\ (a_3,b_1) & (a_3,a_2) & (a_3,a_3) & \dots & (a_1,a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n,b_1) & (a_n,a_2) & (a_n,a_3) & \dots & (a_n,a_n) \end{vmatrix}$$

А теперь из второго столбика вычту первый умноженный на $\overline{c_1}$. Аналогично дальше. Откуда получили то, что нам надо.

Q.E.D.

Следствие 1: $a_1,\dots a_k$ - линейно-независимо $\Leftrightarrow$ определитель матрицы Грама > 0.

Следствие 2: $a_1,\dots a_{k-1}$ линейно независимы, есть a_k. Тогда: $||b_k||^2 = \dfrac{g(a_1,\dots,a_k)}{g(a_1,\dots,a_{k-1})}$.

def: $A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Угловым минором k-ого порядка называется $\Delta_k = \det A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$

Свойства Γ:

1. $\Gamma > 0$ **положительно-определенная**. $\Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma = \Gamma^* \\ \forall x \in K^n, x^T\Gamma\overline{x} > 0 \end{cases}$

   Верно из свойств скалярного произведения.

2. Для матрицы Γ все угловые миноры $\Delta_k > 0$. Откуда матрица Γ — невырожденная.

3. e, e' базисы V. $\Gamma = G(e_1,\dots,e_n), \Gamma' = G(e'_1,\dots,e'_n)$. $\Gamma' = T^T\Gamma\overline{T}$

   Доказательство:

   $\forall x,y \in V : (x,y) = x^T\Gamma\overline{y}$.

Сделаем замену $x^T\Gamma \cdot \overline{y} = (x')^T T^T \Gamma \overline{T} \cdot \overline{(y')} = (x')^T \Gamma' \overline{y'}$

Пусть $x' = E_i, y' = E_j$, тогда подставляя мы получаем поэлементное равенство матриц, откуда доказали

4. e, e' о.н.б. $V \Rightarrow T^T\overline{T} = E$

def: $Q_{n\times n}$ невырожденная. Q называется унитарной, ортогональной, если $Q^* = Q^{-1}$

Свойства ортогональной/унитарной матрицы

1. строки и столбцы попарно-ортогональны и нормированны. (со стандартный ск. п.)

   Доказательство:
   $$Q^*Q = E = QQ^*$$
   $$(\overline{Q^T}Q) = E = (Q\overline{Q^T})$$
   А это получается, что $(Q_i, Q_j) = \sigma_{ij}$, аналогично $(Q_i^T, Q_j^T) = \sigma_{ij}$

   Q.E.D.

2. Q ортог/унитар $\Rightarrow Q^{-1}$ ортог/унитар.
3. Q, R ортог/унитар $\Rightarrow QR$ ортог/унитар.
4. $|\det Q| = 1 : (\mathbb{R} : \det Q = \pm 1)$
5. e, e' о.н.б $\Rightarrow T_{e\to e'}$ ортогонально унитарно.

   e' о.н.б. $\Leftarrow e$ о.н.б. $T = T_{e\to e'}$ унит./ортог.

   Доказательство:

   Первое утверждения это очевидно из 4-ого свойства матрицы Грама.

   Докажем второе утверждение. $\Gamma' = T^T\Gamma\overline{T} = T^T\overline{T} = E$, откуда e' о.н.б.

   Q.E.D.

3.4 Теорема Пифагора. Расстояние до линейного подпространства. Задача о перпендикуляре(наилучшем приближении). Объем k-мерного параллелепипеда в n-мерном пространстве

Теорема (Пифагора)

$\forall y, z \in V : (y, z) = 0 \Rightarrow ||y+z||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$

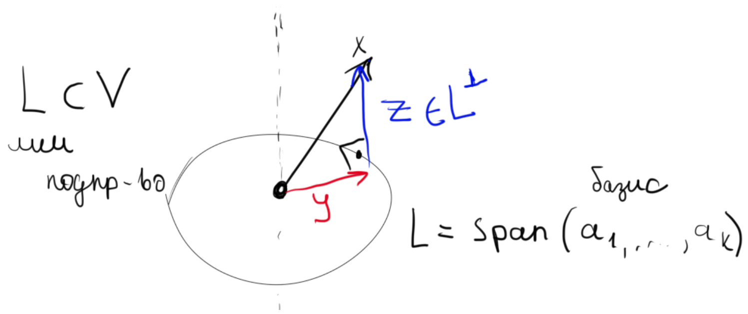
Доказательство:

$$||y+z||^2 = (y+z, y+z) = (y,y) + (y,z) + (z,y) + (z,z)$$

Q.E.D.

Следствие: $\forall x_1, \ldots, x_k \in V$ попарно-ортогональными: $||\sum\limits_{j=1}^{k} x_j||^2 = \sum\limits_{j=1}^{k} ||x_j||^2$

def:



$V = L \oplus L^{\perp}$. $\forall x \in V : x = y + z$ представляется единственным образом, где $y \in L, z \in L^{\perp}$. В таком случае y называется **ортогональной проекцией** x на линейное подпространство L. z - **ортогональная составляющая** x относительно линейного подпространства L или **перпендикуляром**, опущенным из x на L.

Теорема (о наилучшем приближении)

$L \subset V : \forall l \in L : ||x - l|| \geq ||x - y||$, причем $=$ при $l = y$

Доказательство:

$||x-l||^2 = ||x-y+y-l||^2 = ||x-y||^2 + ||y-l||^2 \geq ||x-y||^2$

Q.E.D.

def: $L \subset V, x \in V$. $dist(x, L) := (||z||)$, где z ортогон. сост. (перпендикуляр x относительно y).

Замечание: исходя из того, что мы доказали выше $dist(x, L) = \min\limits_{l \in L} ||x - l||$

Задача о перпендикуляре(о наилучшем приближении)

Возьму $L = span(a_1, \ldots, a_m)$, $y = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j a_j$. $(x, a_k) = (y, a_k) + (z, a_k) = (y, a_k)$. Хочу найти c_j.

$k = 1 \dots m : \left(\sum\limits_{j=1}^{m} c_j a_j, a_k \right) = (x, a_k)$

$\sum\limits_{j=1}^{m} c_j (a_j, a_k) = (x, a_k)$. Что же получаем? Да это же СЛОУ!

$$G^T C = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_m) \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что $a_1, \dots, a_m$ линейно независимы, откуда определитель матрицы Грама > 0, откуда матрица невырожденная, а из этого следует, что существует единственное решение. То есть:

$$C = (G^T)^{-1} \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_m) \end{pmatrix}$$

Замечание: аналогично можно искать z, раскладывая по базису $L^\perp$ (имеет смысл, если известен базис $L^\perp$)

Теорема(о расстоянии до линейного пространства)

$L \subset V$ - линейное подпространство. $L = span(a_1, \dots, a_n)$ и $a_1, \dots a_n$ - базис.

$\forall x \in V \Rightarrow dist^2(x, L) = \dfrac{g(a_1, \dots, a_m, x)}{g(a_1, \dots, a_m)} = ||z||^2$, где $x = y + z$, $y \in L, z \in L^\perp$.

Доказательство:

Переводим $a_1, \dots, a_m, x$ по Граму-Шмидту. Получаем $b_1, \dots, b_{m+1}$, причем первые m b-шек точно не нули.

$span(a_1, \dots, a_m) = span(b_1, \dots, b_m)$. $b_{m+1} = x - \sum\limits_{j=1}^{m} c_j b_j$. Немного перекинем и получим, что

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j b_j + b_{m+1}$$

При этом $b_{m+1} \in L^\perp$, а сумма $\in L$. Откуда по единственности разложения $x = y + z$, получаю, что $b_{m+1} = z$. А отсюда уже следует:

$$dist^2(x, L) = ||z||^2 = ||b_{m+1}||^2 = \frac{g(a_1, \dots, a_m, x)}{g(a_1, \dots, a_m)}$$

Q.E.D

Следствие 1: $dist(x, P) = min||x - u|| = ||z||$, где $z + y = x - x_0$, а P- линейное многообразие $x_0 + L$.

Доказательство: $dist(x, P) = \min\limits_{u \in P} ||x - u|| = \min\limits_{l \in L} ||x - x_0 + l||$, где $l \in L$

$\min\limits_{l\in L}||x-x_0+l|| = \min\limits_{l\in L}||y+z+l|| = \min\limits_{l\in L}||z+l||$, так как $y\in L, l\in L$

$\min\limits_{l\in L}||z+l|| = \min\limits_{l\in L}\sqrt{||z||^2+||l||^2} = ||z||$

Q.E.D

Следствие 2: $dist(P_1,P_2) = \min\limits_{u_1\in P_1, u_2\in P_2}||u_2-u_1|| = ||z||$, где z ортогональная составляющая x_1-x_2 относительно $L=L_1+L_2$. $P_j = x_j+L_j, j=1,2$ и $x_1-x_2 = y+z$, где $y\in L_1+L_2$, $z\in(L_1+L_2)^\perp$

Доказательство:

$$\min||u_2-u_1|| = \min_{l_1\in L_1, l_2\in L_2}||x_2-x_1+l_1+l_2|| = \min_{l\in L_1+L_2}||y+z+l|| = \min_{l\in L}||z+l|| = ||z||$$

Q.E.D.

<u>**def:**</u> $(V,(\cdot,\cdot))$ - евклидово пространство. Введем <u>**параллелепипед**</u>, натянутый на $a_1,\dots,a_k$ - линейно-независимые.

$$\prod(a_1,\dots,a_k) = \{x\in V | x = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_i, \forall\alpha_i\in[0,1]\}$$

Приложен к точке M_0.

$v(\prod(a_1,\dots,a_k)) := (g(a_1,\dots,a_k))^{\frac{1}{2}} = (g(b_1,\dots,b_k))^{\frac{1}{2}} = (g(a_1,\dots,a_{k-1}))||b_k|| = v(\prod(a_1,\dots,a_{k-1}))||b_k||$, где b_k высота. Получаем, что объем не зависит от точки приложения векторов.

Примеры:

1. $k=1$. $\prod(a_1) = \{\alpha_1 a_1 : \forall\alpha_1\in[0,1]\}$ - отрезок. $v(\prod(a_1)) = ||a_1||$.
2. $k=2$. $\prod(a_1,a_2)$ - параллелограмм. $v(\prod(a_1,a_2)) = v(\prod(a_1))||b_2||$ - длина основания на высоту, то есть наша привычная площадь параллелограмма.
3. $k=3$. $\prod(a_1,a_2,a_3)$ - параллелепипед. $v(\prod(a_1,a_2,a_3)) = v(\prod(a_1,a_2))\cdot||b_3||$. то есть наш привычный объем параллелепипеда.

Пусть $e_1,\dots,e_n$ о.н.б., то есть $(x,y) = x^Ty$. $\prod(a_1,\dots,a_k)$. $a_j\leftrightarrow A_j\in\mathbb{R}^n$ — координатный столбец. Тогда:

$$v(\prod(a_1,\dots,a_k)) = (g(a_1,\dots,a_k))^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix}(a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k)\\ \vdots & & \vdots\\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k)\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix}A_1^TA_1 & \dots & A_1^TA_k\\ \vdots & & \vdots\\ A_k^TA_1 & \dots & A_k^TA_k\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = |A^T\cdot A|^{\frac{1}{2}}$$

В частности, если $k=n$, то ответ просто будет $= |\det A|$. Так же есть ориентированный объем $v^\pm = \det A$.

Как меняется объем при линейны преобразованиях?

Пусть $B\in End(V)$ изоморфное и не вырожденное.

$$B(\prod(a_1,\dots,a_k)) = \{Bx = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i Ba_i = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i w_i | \forall\alpha_i\in[0,1]\} = \prod(w_1,\dots,w_k)$$

При этом из изоморфности изображения мы опять получили линейно-независимую систему векторов.

$v(\prod(w_1, \dots, w_k)) = v(\prod(Ba_1, \dots, Ba_k)) = (g(Ba_1, \dots, Ba_k))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(BA)^T BA} = \sqrt{A^T B^T BA}$

3.5 Коэффициенты Фурье. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя. Полиномы Лежандра.

Пускай у нас есть пространство со скалярным произведением (евклидово или унитарное). $e = (e_1, \dots, e_n)$ - **ортогональный базис**.

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

Умножу это скалярно на e_k-ое, получу:

$$(x, e_k) = x_k(e_k, e_k)$$

То есть $x_k = \dfrac{(x, e_k)}{||e_k||^2}$ - **коэффициенты Фурье**.

$x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$, Посмотрим на $L_j = span(e_j)$, $V = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} L_j$, $L_j \perp L_k$, при $j \neq k$.

Замечу, что $x_j \perp x_k$, откуда работает теорема пифагора:

$$||x||^2 = \sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 ||e_j||^2$$

Это **тождество Парсеваля**!

Неравенство Бесселя:

$$\forall k = 1, \dots, n : \sum_{j=1}^{k} |x_j|^2 ||e_j||^2 \leq ||x||^2$$

В частности, если e о.н.б. V. $x_k = (x, e_k)$. $||x||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_j|^2$ - тождество Парсеваля.

В частности, если переводить из ортогонального базиса в о.н.б.

$e'_j = \dfrac{e_j}{||e_j||}$ - ортонормированный. $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x'_k e'_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$.

def: $V = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} L_j$, $L_j \subset V$ - линейное подпространство, причем попарно-ортогональные.

Тогда мы умеем строить проекцию $P_j \in End(V)$ - **операторы ортогонального проектирования**.

$V = span(e_1, \dots, e_n)$ - о.н.б. - объединение базисов L_j.

$j = 1 \dots m : P_j x = \sum\limits_{e_k \in L_j} x_k e_k = \sum\limits_{e_k \in L_j} (x, e_k) e_k$

Отсюда получаем формулу для ортогонального проектора:

$$P_j = \sum_{e_k \in L_j} (\cdot, e_k) e_k$$

Полиномы Лежандра:

P_n многочлены степени $\leq n$. $\forall p, q \in P_n$. где $1, x, \dots, x^n$ - **канонический базис**.

$(p, q) = \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$

Мы берем стандартный базис $1, x, \dots, x^n$ и переводим его Г-Ш в ортог. базис $p_0, \dots, p_n$

$p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2 - \dfrac{1}{3}, p_3 = x^3 - \dfrac{3}{5}x, \dots$

$l_k(x) = \lambda_k p_k$, λ_k - **нормированные множители**, а сами l_k - **полиномы Лежандра**.

$q_k(x) = ((x^2-1)^k)^{(k)} = \lambda_k p_k(x)$ — **общая форма Родрига для полиномов Лежандра.**

Давайте более подробно на нее посмотрим.

Покажем, что $q_k \perp x^m : \forall m = 1, \dots, k-1$:

$$(q_k, x^m) = \int\limits_{0}^{1} q_k(x)x^m dx = \int\limits_{-1}^{1} ((x^2-1)^k)^{(k)} x^m dx = \int\limits_{-1}^{1} x^m d((x^2-1)^k)^{(k-1)} =$$

$$= x^m((x^2-1)^k)^{(k-1)}\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} ((x^2-1)^k)^{(k)} m x^{m-1} dx =$$

$$= (-1)^m m! \int\limits_{-1}^{1} ((x^2-1)^k)^{(k-m)} = 0$$

Откуда $q_k \perp span(1, \dots, x^{k-1}) = span(p_0, \dots, p_{k-1})$. По Г.Ш. $p_k \perp span(p_0, \dots, p_{k-1})$. $q_k \in span(1, \dots, x^k) = span(1, \dots, p_k)$, откуда q_k пропорционально p_k, то есть $q_k = const \cdot p_k$.

$l_k(x) = \lambda q_k(x) = \lambda_k((x^2-1)^k)^{(k)} = \dfrac{1}{k!2^k}((x^2-1)^k)^{(k)}$ — **общая формула Родрига**. $\lambda_1 = \dfrac{2k!}{k!}$

Тут мы выводили $q_k(1)$, если интересно смотрите ct notes 9.5.

3.6 Изометрия евкл/унитарных пространств. Теорема Рисса. Естественный изоморфизм V и V^* (евклидова)

def: $(V, (\cdot,\cdot)), (V', (\cdot,\cdot))$. V, V' называются изометричными (V изометрично V', и наоборот), если $V \cong V'$ и сохраняется скалярное произведение:

$$(x, y)_V = (x', y')_{V'}$$

Очевидно $||x||_V^2 = (x,x)_V = (x',x')_{V'} = ||x'||^2_{V'}$. Она сохраняет норму $\Rightarrow ||x-y|| = ||x'-y'||$ сохраняет метрику $\Leftrightarrow$ изометрия.

Утверждение: $\forall V, V'$ одной размерности изометричны.

Доказательство:

$\dim V = \dim V' \Leftrightarrow V \cong V'$. Пусть e - о.н.б. V, а e' - о.н.б. V'. Откуда:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \xleftrightarrow{\text{изоморфны}} x' = \sum_{i=1}^n x_i e_i'$$

Заметим, что в таком случае $(x,y)_V = \sum\limits_{i=1}^n x_i \overline{y}_i = (x',y')_{V'} \Rightarrow$ изометричны.

Q.E.D.

$(V, (\cdot,\cdot))$. Пусть $y \in V$ фиксировано. Пусть $f(x) = (x,y)$. Откуда $f \in V^*$.

Мы знаем, что однозначно $\forall y \in V \to f \in V^*$, осталось показать $y \in V \leftarrow \forall f \in V^*$.

Теорема (Рисса о взаимно однозначным соответствием V и V^*)

$\forall f \in V^* : \exists! y \in V : \forall x \in V : f(x) = (x,y)$

Доказательство:

1. единственность:

   Пусть $y_1, y_2 \in V$. $f(x) = (x,y_1) = (x,y_2)$. $\forall x \in V : (x,y_1) - (x,y_2) = (x, y_1 - y_2) = 0$. Пусть $x = (y_1 - y_2)$, получу, что $y_1 - y_2 = 0$.

2. существование:

   Пусть НУО в V выбран о.н.б. e.

   $f(x) = \sum\limits_{j=1}^n f(e_j)x_j = \sum\limits_{j=1}^n a_j x_j = (x,y) = \sum\limits_{j=1}^n x_i \overline{y_i}$. Откуда уже понятно как выглядит наш y.

$y \in V \xleftrightarrow[\text{взаимо однознач.}]{P} f \in V^* \Leftrightarrow \forall x \in V : f(x) = (x,y)$

Хотим понять является ли это изоморфизмом. Возьмем $y_1, y_2 \in V$ и $\lambda \in K$. Хотим показать, что $(y_1 + \lambda y_2) \overset{P}{\leftrightarrow} f$, если $y_1 \overset{P}{\leftrightarrow} f_1, y_2 \overset{P}{\leftrightarrow} f_2$.

$\forall x \in V : f(x) = (x, y_1 + \lambda y_2) = (x,y_1) + \overline{\lambda}(x,y_2)$. Изоморфизм у нас будет только для Евклидовых пространств, то есть $\lambda \in \mathbb{R}$.

Откуда, если $(V, (\cdot,\cdot))$ - евклидово, то $V \cong V^*$ - естественный изоморфизм.

Можно сделать этот изоморфизм изометрией, если определить $(\cdot, \cdot)$ на V^* след. образом:

$$\forall f, g \in V^* : (f, g) = (y, z)_V$$

где $f \overset{P}{\longleftrightarrow} y \in V$, $g \overset{P}{\longleftrightarrow} z \in V$.

Замечание: Пусть e - о.н.б. V, а w сопряж. базис V^*. $\forall x \in V : w^i(x) = x_i$, где x_i - коэффициенты Фурье. То есть $w_i \overset{P}{\longleftrightarrow} e_i$.

3.7 Взаимные базисы. Формулы Гиббса. Метрические тензоры. Операции поднятия и опускания индексов. Евклидовы тензоры.

В этой главе мы работаем с евклидовыми.

<u>def:</u> Базисы пространства V, $e = (e_1, \dots, e_n), e^* = (e^1, \dots e^n)$ называются **<u>взаимными</u>** если $(e_i, e^j) = \delta_i^j$.

$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$

<u>Теорема 1: (о существовании и единственности взаимного базиса)</u>

$\forall e = (e_1, \dots, e_n) : \exists!$ взаимный базис $e^* = (e^1, \dots, e^n) : (e_i, e^j) = \delta_i^j$

Доказательство:

$e^* = eT_{e \to e^*}$. $(e^1, \dots, e^n) = (e_1, \dots, e_n)T_{e \to e^*}$. Заметим, что:

$$E = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^1 & \dots & e^n \end{pmatrix} = \Gamma T_{e \to e'}$$

Откуда $E = \Gamma \cdot T_{e \to e'}$ и у $\exists \Gamma^{-1}$, откуда $\exists! e^* = e\Gamma^{-1}$

Q.E.D.

Следствие 1. $\begin{cases} e^* = e\Gamma^{-1} \\ e = e^*\Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^j = e_i g^{ij} = e_i g^{ji} \\ e_i = e^j g_{ji} = e^j g_{ij} \end{cases}$

Следствие 2: $\Gamma^{-1} = G(e^1, \dots, e^n)$ - матрица Грама для взаимного базиса

Следствие 3: e орто-нормированный базис $\Leftrightarrow e \equiv e^*$

<u>Теорема 2 (о матрице перехода для вазимных базисов)</u>

e, e^* - взаимные базисы. Тогда e' - новый базис $T = T_{e \to e'}$. У него есть свой взаимный базис $(e')^*$ и $T_2 = T_{e^* \to (e')^*}$.

$e' = eT, (e')^* = e^* T_2 \Rightarrow T_2 = S^T$, где $S = T^{-1}$.

Доказательство:

$e' = eT, (e')^T = T^T e^T$, $(e')^* = e^* T_2$, откуда:

$$(e')^T (e')^* = T^T e^T e^* T_2 = T^T T_2$$

и также $(e')^T \cdot (e')^* = E$, откуда уже очевидно искомое.

Q.E.D.

Следствие: $x = x^i e_i = x_j e^j$.

$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, x^* = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ — координаты x относительно базиса e и e' соответственно.

$x' = T^{-1}x = Sx$ - по контрвариантному закону, $(x^*)' = x^*T$ - по ковариантному закону.

Теорема 3. (о связи сопряженного и взаимного базисов)

e базис V, w сопряженный к e базис V^*. Пусть $w^i \overset{P}{\longleftrightarrow} e^i \Rightarrow e^i$ взаимный базис к e.

Доказательство:

По теореме Рисса: $\forall w^i : \exists! e^i \in V : \forall x \in V : w^i(x) = (x, e^i)$.

$\forall j = 1, \dots, n : (e_j, e^i) = w^i(e_j) = \delta_j^i \Rightarrow e^i$ взаимный базис.

~~Что тут происходит?~~

Q.E.D.

Замечание: e - о.н.б. $\Leftrightarrow e = e^*$. Очевидно из замечания к теореме Рисса.

$e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e^* = (e^1, \dots, e^n)$ взаимные. $x = x^i e_i = x_j e^j$.

$x = (x, e_i)e^i, x = (x, e^j)e_j$ - **формулы Гиббса**.

Замечание: $e^* = e\Gamma^{-1}$, $T_{e \to e'} = \Gamma^{-1} = G(e^1, \dots, e^n)$, $\det \Gamma^{-1} > 0 \Rightarrow \det T_{e \to e^*} > 0 \Leftrightarrow e, e^*$ принадлежат одному классу ориентированности (Например, в R^3 они одновременно будут левой/правой тройкой векторов, либо в R^2 одновременно будут право/лево ориентированными).

~~щас начнется что-то мозговзрывающее~~

$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n) = (g_{ij})_{n \times n}$, причем $g_{ij} = g_{ji}$.

$\Gamma^{-1} = G(e^1, \dots, e^n) = (g^{ij})_{n \times n}$, причем $g^{ij} = g^{ji}$.

$T = T_{e \to e'} : \Gamma' = T^T \Gamma T \Leftrightarrow g'_{ij} = g_{km} t_j^m t_i^k$

$T_2 = S^T : (\Gamma^{-1})' = T_2^T \Gamma^{-1} T_2 = S \Gamma^{-1} S^T \Leftrightarrow g'^{ij} = g^{km} s_k^i s_m^j$

def: $\Gamma \in T(2,0), \Gamma^{-1} \in T(0,2)$ - **симметричные тензоры**, метрические тензоры. Соответственно ковариантный и контрвариантный.

def: $x = x^i e_i = x_j e^j$ сверткой вектора x с метрическим тензором $\Gamma(\Gamma^{-1})$ называется свертка тензорного произведения контрваинтных(ковариантных) координат x:

$x^i g_{ik} = x_k$, $x_j g^{kj} = x^k$.

def: $\alpha \in T(p,q), p \geq 1$: **операцией поднятия индекса** тензора α называется его свертка с контрвариантным метрическим тензором (Γ^{-1}).

Операцией опускания индекса тензора α называется его свертка с ковариантным метрическим тензором (Γ).

Общее правило записи компонент тензора:

1. если индекс поднимается, то он всегда записывается крайним правым верхним.
2. если индекс опускается, то он всегда записывается крайним левым нижним.

Пример:

$$\alpha_{j_2 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q k} = \alpha_{m j_2 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} g^{mk}$$

$$\alpha_{k, j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_{q-1}} = \alpha_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_{q-1}, m} g_{mk}$$

При этом, если поднимается/опускается не крайний левый нижний/крайний правый верхний, то исходное положение индекса обозначается точкой.

Пример:

$\alpha_{jm}^{i\cdot k} = \alpha_{m}^{i\text{æ}k} g_{\text{æ}j}$

Правило чтения индексов:

i - строка, j - столбец, k - слой, m - сечение.

При этом, если опускаются/поднимаются несколько индексов, то опускаю/поднимаю их по очереди слева направо.

Замечание: Пусть e - о.н.б. V. $\Gamma = E$

$\alpha_{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_p}^{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_q} = \alpha_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} t_{\bar{j}_1}^{j_1} \dots t_{\bar{j}_p}^{j_p} s_{i_1}^{\bar{i}_1} \dots s_{i_q}^{\bar{i}_q}$

В о.н.б. у меня $S = T^T$, поэтому:

после приведения к некоторому о.н.б. тензоры, у которых матрицы совпадают и отличаются только записью в расположении верхних и нижних индексов, будем считать равными и называть **евклидовыми** тензорами.

4 Линейные операторы в евкл/унит пространствах.

4.1 Сопряженный оператор.

def: $\mathcal{A} \in L(U, V)$. $\mathcal{A}^* : V^* \to U^*$:

$\forall f \in V^* : \forall x \in U : (\mathcal{A}^* f)(x) = f(\mathcal{A}x)$

$\mathcal{A}^*$ называется **линейным отображением, сопряженным к $\mathcal{A}$**.

Покажем, что $A^* \in L(V^*, U^*)$.

$$\forall x \in U : \forall \lambda \in K : \forall f_1, f_2 \in V^* : \mathcal{A}^*(\lambda f_1 + f_2) = (\lambda f_1 + f_2)(\mathcal{A}x) = \lambda f_1(\mathcal{A}x) + f_2(\mathcal{A}x)$$

Откуда линейное отображение.

Если $U = V, \mathcal{A} \in End(V) : \mathcal{A}^* \in End(V^*)$ —- линейный оператор сопряженный к $\mathcal{A}$ или **сопряженный оператор**.

Пусть V это пространство со скалярным произведением (евклидово или унитарное).

По теореме Рисса: $\forall f \in V^* : \exists! y \in V : \forall x \in V : f(x) = (x, y)$.

$\mathcal{A} \in End(V)$. Пусть $g = \mathcal{A}^* f \in V^*$, тк $\mathcal{A}^* \in End(V^*)$. Тогда по теореме Рисса $\exists! z \in V : \forall x \in V : g(x) = (x, z)$.

Тогда $g = \mathcal{A}^* f \xleftrightarrow[\text{взаимооднозначно}]{\text{по т. Рисса}} z = \mathcal{A}^* y$.

def: $\mathcal{A}^* : V \to V : \mathcal{A}^* \in End(V) : \forall y \in V : \mathcal{A}^* y = z$

$(x, \mathcal{A}^* y) = (x, z) = g(x) = (\mathcal{A}^* f)(x) = f(\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, y)$

def: $A \in End(V)$. $A^* \in End(V)$ называется сопряженным оператором к $\mathcal{A}$, если $\forall x, y \in V : (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$.

Покажем линейность нашего отображения:

$\forall \lambda \in L, \forall y_1, y_2 \in V : (x, \mathcal{A}^*(\lambda y_1 + y_2)) = (\mathcal{A}x, \lambda y_1 + y_2) = \overline{\lambda}(\mathcal{A}x, y_1) + (\mathcal{A}x, y_2) = (x, \lambda \mathcal{A}^* y_1 + \mathcal{A}^* y_2)$

Свойства $\mathcal{A}$:

1. $(V, (\cdot, \cdot)), e = (e_1, \ldots, e_n)$ - базис.

$$A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}} A^* \overline{\Gamma}$$

где $A^* = \overline{A^T}$

Доказательство:

$x \overset{e}{\leftrightarrow} x, y \overset{e}{\leftrightarrow} y$, получаю, что:

$$\forall x, y \in V : (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) \Leftrightarrow (\mathcal{A}x)^T \Gamma\, \overline{y} = x^T \Gamma \overline{A^{\circledast} y}$$

$$x^T (A^T \Gamma) \overline{y} = x^T \Gamma \overline{A^{\circledast}} \overline{y}$$

Возьму $x = e_i, y = e_j$ и получу, что нужные нам матрицы равны поэлементно.

Q.E.D.

2. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.
3. $(\mathcal{A} + \lambda B)^* = \mathcal{A}^* + \overline{\lambda} B^*$

   Доказательство:

   $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V) : \forall \lambda \in K : \forall x, y \in V : (x, (\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})^* y) = ((\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})x, y) = (x, (\mathcal{A}^* + \overline{\lambda}\mathcal{B}^*)y)$

   Q.E.D.
4. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V) \Rightarrow (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$

   Доказывается аналогично прошлому пункту.
5. $\mathcal{K}er\mathcal{A}^* = (\operatorname{Im}\mathcal{A})^\perp$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}^* = (\mathcal{K}er\mathcal{A})^\perp$

   Доказательство:

   2-ое равенство: $\operatorname{Im}\mathcal{A}^* = (\mathcal{K}er\mathcal{A})^\perp$. Докажем:

   $\forall x \in \mathcal{K}er\mathcal{A} : \mathcal{A}x = \mathbb{O} : \forall y \in V : (x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y) = 0$

   $\Rightarrow \mathcal{K}er\mathcal{A} \subseteq (\operatorname{Im}\mathcal{A}^*)^\perp$.

   По теореме о ранге и дефекте:
   $$rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = n$$

   Хочу показать, что $rg\mathcal{A} = rg\mathcal{A}^*$. Мы знаем, что:
   $$A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}} A^* \overline{\Gamma}$$

   При этом $\overline{\Gamma^{-1}}$ и $\overline{\Gamma}$ невырожденные, то есть $rgA^{\circledast} = rg\mathcal{A}^* = rg\overline{A^T} = rg\mathcal{A}$.

   А это значит, что $rg\mathcal{A}^* + def\mathcal{A} = n$: $\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}^*) + \dim(\mathcal{K}er\mathcal{A}) = n$. Тогда получается, что нужные нам размерности совпадают.

   1-ое равенство: $\mathcal{K}erA^* = (\operatorname{Im}\mathcal{A}^*)^\perp$. Докажем:

   Воспользуемся выше выведенным правилом для $\mathcal{A}^*$:
   $$\operatorname{Im}(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{K}er(\mathcal{A}^*)^\perp$$
   $$\operatorname{Im} A = (\mathcal{K}erA^*)^\perp \Leftrightarrow (\operatorname{Im} A)^\perp = \mathcal{K}erA^*$$

   Q.E.D.
6. $\varepsilon^* = \varepsilon$. Если $\mathcal{A}$ невырожденное $\exists \mathcal{A}^{-1} \Rightarrow \mathcal{A}^*$ невырожденно, $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$.

   Доказательство:

   $\mathcal{A}$ невырожденно $\Leftrightarrow \mathcal{K}er\mathcal{A} = \{\mathbb{O}\} \Leftrightarrow A^*$ невырожденно.

   Посмотрим на $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$. $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \varepsilon$. Так же: $(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})^* = \varepsilon^* = \varepsilon$

   Раскроем скобки по 4-ому свойству и получим, что нам надо.

   Q.E.D.
7. $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\lambda}) = 0$.

   Замечание: Из этого следует $\chi_{\mathcal{A}^*}(t) = \overline{\chi_{\mathcal{A}}(\overline{t})}$.

   Доказательство:

e о.н.б. V. $\mathcal{A} \overset{e}{\leftrightarrow} A, \mathcal{A}^* \overset{e}{\leftrightarrow} A^*$:

$$0 = \overline{0} = \overline{\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)} = \overline{\det(A - \lambda E)} = \det(\overline{A^T} - \overline{\lambda} E) = \chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\lambda})$$

Q.E.D.

8. λ - с.ч. u - с.в. $\mathcal{A}$, μ - с.ч. v - с.в. $\mathcal{A}^*, \lambda \neq \overline{\mu} \Rightarrow u \perp v$.

   Доказательство:

   $\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^* v) = (u, \mu v) = \overline{\mu}(u, v)$. Откуда:

   $(\lambda - \overline{\mu})(u - v) = 0$. Откуда уже и требуется то, что нам надо

   Q.E.D.

9. $L \subset V$ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow L^{\perp}$ инвариатно относительно $\mathcal{A}^*$

   Доказательство:

   $x \in L : y \in L^{\perp} : (x, y) = 0.$

   $(x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^* y \in L^{\perp}$

   Q.E.D.

4.2 Нормальные операторы.

$\mathcal{A} \in End(V)$ называется **нормальным оператором**, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ - перестановочны:

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in V : (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$$

Свойства нормальных операторов.

1. $\mathcal{A}$ нормальный оператор $\Leftrightarrow$ в некотором о.н.б. е :$AA^* = A^*A$.

   Доказательство:

   В правую сторону очевидно, теперь в левую сторону. Пусть e о.н.б $AA^* = A^*A$. Пусть e' другой базис и $T_{e\to e'}$. $A =\overset{e'}{\longleftrightarrow} A', A^* \overset{e'}{\longleftrightarrow} A'^*$

   $A' = T^{-1}AT, A'^* = T^{-1}\overline{A^T}T$

   Покажем, что $A'A'^* = A'^*A'$:

   $$A'A'^* = T^{-1}AA^*T = T^{-1}A^*AT = A'^* \cdot A'$$

   Откуда $\mathcal{A}$ - нормальный.

   Q.E.D.

2. $\mathcal{K}er\mathcal{A} = \mathcal{K}erA^*, (\mathcal{K}er\mathcal{A})^{\perp} = \operatorname{Im}\mathcal{A}$. $\mathcal{K}er(\mathcal{A}^2) = \mathcal{K}er(\mathcal{A})$.

   Доказательство:

   (a) $x \in \mathcal{K}erA \Leftrightarrow \mathcal{A}x = \mathbb{O} \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = \mathbb{O} \Leftrightarrow x \in \mathcal{K}erA^*$

   (b) очевидно, из свойства 5 для сопряженного оператора.

   (c) $x \in \mathcal{K}er\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}er\mathcal{A}^2$.

   Пусть $x \in \mathcal{K}er\mathcal{A}^2 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^2x, \mathcal{A}^2x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}^2x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x)) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x), \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x))$. $\Leftrightarrow \mathcal{A}x \in \mathcal{K}er\mathcal{A}^* = \mathcal{K}er\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = \mathbb{O} \Leftrightarrow x \in \mathcal{K}er\mathcal{A}$

   Q.E.D

3. $B = \mathcal{A} - \lambda\varepsilon$ нормальный оператор, $\forall\lambda \in K$, если $\mathcal{A}$ - нормальный.

   Доказательство:

   $B^* = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^* = \mathcal{A} - \overline{\lambda}\varepsilon$

   $BB^* = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)(A^* - \overline{\lambda}\varepsilon) = B^* \cdot B$, так как это многочлены от A - перестановочные.

   Q.E.D.

4. λ с.ч.v - с.в. $\Leftrightarrow \overline{\lambda}$ с.ч v с.в $\mathcal{A}^*$

   Доказательство:

   λ с.ч. v с.в. $\mathcal{A} \Leftrightarrow v \neq 0 \in \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = \mathcal{K}erB = \mathcal{K}erB^* \Leftrightarrow v \in \mathcal{K}erB^* \Leftrightarrow v \in \mathcal{K}er(A^* - \overline{\lambda}\varepsilon) \Leftrightarrow \mathcal{A}^*v = \overline{\lambda}v$

   Q.E.D.

5. λ с.ч, v с.в $\mathcal{A}$, а также μ с.ч., а u его с.в. $\mathcal{A}$. Если $\lambda \neq \mu \Rightarrow u \perp v$.

   Доказательство:

$\mu(u, v) = (\mu u, v) = (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^* v) = (u, \overline{\lambda} v) = \lambda(u, v)$, откуда (u, v) - то, что нам и требовалось.

Q.E.D.

Замечание: Из этого следует ортогональность собств. подпространств.

Теорема(о каноническом виде матрицы нормального оператора в унит. пространстве)

$\mathcal{A} \in End(V)$.

$\mathcal{A}$ нормальный оператор $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. e пространства V, $\mathcal{A} \overset{e}{\leftrightarrow} \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in K$

Доказательство:

В левую сторону. $\mathcal{A} \xleftrightarrow[\text{о.н.б}]{e} \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ по условию, а также $\mathcal{A}^* \xleftrightarrow[\text{о.н.б}]{e} \Lambda^* = diag(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$ (см. замечание).

Откуда $\Lambda \cdot \Lambda^* = \Lambda^* \Lambda$ в некотором о.н.б $\Rightarrow$ по первому свойству нормальный оператор.

Докажем в правую сторону. Пусть λ_1 корень $\chi_{\mathcal{A}}$, тк мы находимся сейчас в унитарном пространстве, то λ_1 - собственное число. Пусть v_1 его собственный вектор, нормированный. Заметим, что тогда $\overline{\lambda_1}$ с.ч. v_1 с.в. $\mathcal{A}^*$.

Пусть $L = span(v_1).V = L \oplus L^\perp$. Мы знаем, что L инвариантно относительно $\mathcal{A}$, а также L инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$. Из свойства 9 сопряж. оператора, $L^\perp$ инвариантно относительно A^*, а также $L^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Откуда матрицу можно в блочно-ступенчатый вид из 2 блоков.

Воспользуемся методом математической индукции:

1. База $n = 1$ очевидно.
2. Пусть верно для $n = k$, что матрица будет иметь диаг. вид.

   Докажем, для $n = k + 1$. $\dim V = k + 1$. Пусть λ_1 с.ч. v_1 соотв ей нормированный с.в. $\mathcal{A}$. Пусть $L = span(v_1)$. $V = L \oplus L^\perp$, $\dim L^\perp = k$. По индукции я знаю, что $\mathcal{A}\Big|_{L^\perp} \xleftrightarrow{v_2, \dots, v_{k+1} \text{ - о.н.б.}} \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{k+1} \end{pmatrix}$

   Мы знаем $(v_1, \dots, v_{k+1})$, что это будет о.н.б, откуда уже очевидно следует требуемое нами.

Q.E.D.

Замечания:

1. Очевидно, что $\mathcal{A}^* \xleftrightarrow[\text{о.н.б.}]{e} \overline{\Lambda^T} = \Lambda^* = diag(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$
2. Очевидно, что λ_j с.ч. $\mathcal{A}$ ($\overline{\lambda_j}$ с.ч. $\mathcal{A}^*$)
3. Очевидно, что $\mathcal{A}$ - норм. $\Rightarrow$ о.п.с.

Следствие 1. $\mathcal{A}$ нормальный оператор в унитарном пространстве $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda$, причем $V_\lambda \perp V_\mu$ $(\lambda \neq \mu)$.

Следствие 2. $\forall AA^* = A^*A$. $\exists T$ унитарная $(T^* = T^{-1})$, где $T^*AT = \Lambda$.

Теорема (о каноническом виде матрицы нормального оператора в евкл. пространстве)

$\mathcal{A} \in End(V)$, V - евклидово.

$\mathcal{A}$ норм. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. e. $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \Phi_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \Phi_m \end{pmatrix}$ имеет вот такой блочно-диагональный вид.

Причем $\lambda_i \in \mathbb{R}$ - собственные числа (повторяются с учетом кратности), а каждое Φ_j имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$, где $\alpha_j \pm i\beta_j$ - пара сопряженных корней $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ (повторяются с учетом кратности).

Замечание: $\mathcal{A}^* \xleftrightarrow{\text{e - о.н.б.}} \Lambda^* = \Lambda^T$.

Доказательство будет дальше, но чтобы нам это доказать, сперва позамечаем куда более интересные факты:

Пусть $V_{\mathbb{C}}$ это комплесификация V. $\mathcal{A} \in End(V)$: $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ это продолжение $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}}$

$(V, (\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}})$ и есть теперь $(V_{\mathbb{C}}, (\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}})$.

Введем скалярное произведение на $V_{\mathbb{C}}$ таким образом:

$\forall z_1, z_2 \in V_{\mathbb{C}} : (z_1, z_2)_{\mathbb{C}} = (x_1+y_1 i, x_2+y_2 i)_{\mathbb{C}} = (x_1+x_2)_{\mathbb{R}}+(y_1,y_2)_{\mathbb{R}}+i((y_1,x_2)_{\mathbb{R}}-(x_1,y_2)_{\mathbb{R}}) \in \mathbb{C}$.

Свойства $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$:

1. $\forall x, y \in V : (x,y)_{\mathbb{C}} = (x,y)_{\mathbb{R}}$
2. $\overline{(z_1,z_2)_{\mathbb{C}}} = (\overline{z_1}, \overline{z_2})_{\mathbb{C}}$
3. $(z, \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ||x|| = ||y|| \\ (x,y) = 0 \end{cases}$ $, x = Rez, y = \operatorname{Im} z$

   Доказательство:

   $0 = (z, \overline{z}) = ||x||^2 - ||y||^2 + i((y,x) + (x+y))$

Q.E.D.

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

$\forall z \in V_{\mathbb{C}}, \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

1. $(\mathcal{A}\mathcal{B})_{\mathbb{C}} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$
2. $\mathcal{A}$ - невырожденная $\Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ невырожденная и $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})_{\mathbb{C}}$
3. $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$
4. $\mathcal{A}$ норм. $\Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ норм.
5. λ с.ч. $\mathcal{A}$, V_λ собственное подпространство $\mathcal{A} \Rightarrow (V_\lambda)_{\mathbb{C}}$ собственное подпространство $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, λ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$.

Доказательство теоремы:

Давайте сначала докажем достаточность $(\Leftarrow)$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \Phi_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \Phi_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Lambda^* = \Lambda^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \Phi_1^T & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \Phi_m^T \end{pmatrix}$$

Давайте умножим матрицу Λ и Λ^*. Для этого сначала умножу,

$$\Phi_j^T \cdot \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} = \Phi_j \Phi_j^T$$

Откуда при произведении $\Lambda \cdot \Lambda^* = \Lambda^* \cdot \Lambda$, что по первому свойству нормального оператора говорит о том, что $\mathcal{A}$ - нормальный.

Теперь докажем в другую сторону.

Пусть $\mathcal{A}$ нормальный оператор. Комплесифицируем и получим $V \to V_{\mathbb{C}}, \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$.

Наша цель: построить базис из вещ. векторов(т.е. $\in V$), в котором матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ будет иметь заявленный вид, потому что по свойству матрица $\mathcal{A}$ будет иметь такой же вид.

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ нормальный. Воспользуемся теоремой о канонич. виде матрицы нормального оператора для унитарного пространства.

Из нее существует о.н.б $V_{\mathbb{C}}$ нормированный и наше $V_{\mathbb{C}}$ представляется как:

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}} V_\lambda^{\mathbb{C}} \bigoplus_{\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}} V_\mu^{\mathbb{C}}$$

λ - рациональные корни $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$, μ_1, μ_2 - парные корни $\in C$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R} : V_\lambda^{\mathbb{C}} = (V_\lambda)_{\mathbb{C}}$. Причем как мы помним, $V_\lambda^{\mathbb{C}} \perp V_\mu^{\mathbb{C}}$. То есть $(V_\lambda)_{\mathbb{C}} = (span(h_1, \ldots, h_{k_\lambda}))_{\mathbb{C}}$, где $h_1, \ldots, h_k \in V$ - ортонормированные и вещественные. Теперь посмотрим на вторые виды векторов:

$$V_{\mu_1, u_2}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_j span_{\mathbb{C}}(z_j, \overline{z_j}) = \bigoplus_j (span_{\mathbb{R}}(u_i, u_j))_{\mathbb{C}}$$

Пусть $\alpha + i\beta = \mu_1 = \overline{\mu_2}$, z - собственный вектор μ_1, а $\overline{z}$ с.в. $\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \overline{z}$.

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \overline{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{\mu_1 z} = \mu_2 \overline{z}$$

Пусть $u_j = \dfrac{z_j + \overline{z_j}}{2}, v_j = \dfrac{z_j - \overline{z_j}}{2i}$. $span(z_j, \overline{z_j}) = span(v_j, u_j)$ в таком случае.

Как мы знаем $V_{\mu_1}^{\mathbb{C}} \perp V_{\mu_2}^{\mathbb{C}} : z \perp \overline{z} \Rightarrow \begin{cases} ||u|| = ||v|| \\ (u, v) = 0 \end{cases}$.

Откуда $V_{\mathbb{C}} = span(w_1, \ldots, w_k, u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m)_{\mathbb{C}}$ - ортогональный базис, где $w_1, \ldots, w_k$ - сумма ортонормированных базисов V_λ для собственных чисел $\lambda \in \mathbb{R}$.

Базис у нас получается состоит из вещественных векторов $\Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow \Lambda$ вещественный.

Тогда посмотрим на матрицу оператора в нашем ортогональном базисе.

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} w_j = \lambda_j w_j$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} u = A_{\mathbb{C}}(\frac{z+\overline{z}}{2}) = \alpha(\frac{z+\overline{z}}{2}) + i^2\beta(\frac{z-\overline{z}}{2i}) = au - \beta v$$

Аналогично:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} v = av + \beta u$$

Заметим, что мы получили нужный нам вид матрицы, но мы еще не отнормировали вторую половину векторов!

Как мы знаем: $||z|| = 1 = ||u||^2 + ||v||^2 = 2||u||^2 = 1$. Откуда, чтобы отнормировать вектора, я должен умножить все вектора из второй части на $\sqrt{2}$. Получу такой же вид матрицы, откуда теорема доказана!

Q.E.D.

Следствие: $\forall AA^T = A^TA$, A - норм. вещ матрица. Тогда существует ортогональная $T(T^{-1} = T^T)$, такая что $T^TAT = \Lambda$ из теоремы.

4.3 Самосопряжение и изометрические операторы.

def: $\mathcal{A} \in End(V)$. $\mathcal{A}$ называется **самосопряженным** если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x, y \in V : (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$

В $\mathbb{R}$ они будут называться **симметричными**. В $\mathbb{C}$ они будут названы **эрмитовы**.

Очевидно $\mathcal{A}$ самосопряженный $\Rightarrow$ нормированы.

Свойства:

1. $\mathcal{A}$ самосопряж. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б., где $A = A^*$.
2. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ самосопряж $\Rightarrow (\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})$ самосопряж, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ самосопряж. и $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} \Rightarrow \mathcal{AB}$ самосопряженный.
4. $\exists\mathcal{A}^{-1}, \mathcal{A}$ самосоп. $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ самосопряж.
5. $\mathcal{A}$ самосопряж. $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \text{ - норм.} \\ \text{все корни } \chi_{\mathcal{A}} \text{ веществ.} \end{cases} \Leftrightarrow$ о.п.с. с вещ. собств числами $V_\lambda \perp V_\mu$, при $\lambda \neq \mu$

   Доказательство:

   (a) теорема о каноноч. виде матрицы нормального оператора в унитарном пространстве. $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\Lambda^* = diag(\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n})$. $\mathcal{A}$ самосопряж. $\Leftrightarrow A = A^* \Leftrightarrow \Lambda = \Lambda^* \Leftrightarrow \lambda_j = \overline{\lambda_j}$

   (b) пользуемся теоремой о каноническом виде матрицы нормального оператора в евклид. пространстве, получаем $\Phi_j = \Phi_j^T$, то есть комплексных корней нет.

   Q.E.D.

6. $L \subset V$ лин. подпространство инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$ инвариантно относительно A

   Очевидно из свойств сопряж. оператора

def: $Q \in End(V)$. Q называется **изометрическим**,если Q невырождена и $Q^* = Q^{-1} \Leftrightarrow \forall x, y \in V : (Qx, Qy) = (x, y)$.

Замечание: $(Qx, Qy) = (Q^*Qx, y) \to Q \cdot Q^* = \varepsilon$

Свойства:

1. Q изометрич. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. $Q^{-1} = Q^*$.
2. Q изометрич. $\Leftrightarrow Q$ переводит о.н.б. в о.н.б.

   Доказательство:

   В правую сторону: Q изометрич., e о.н.б.: $(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$. Откуда если просто расписать определение, то получим $(e_i, e_j) = (Qe_i, Qe_j) = \delta_{ij}$

   В обратную сторону: $Qe_i = e_i'$, e - о.н.б, e' о.н.б.

   $\forall x, y \in V : (Qx, Qy) = \sum\limits_i \sum\limits_j x_i \overline{y}_j (e_i', e_j') = \sum\limits_i \sum\limits_j x_i \overline{y}_j \delta_{ij} = (x, y)$, откуда изометрический.

   Q.E.D.

3. Q, R изометрич. $\Rightarrow QR$ изометрич.

4. Q изометрич. $\Rightarrow Q^{-1}$ изометрич.

5. Q изометрич. $\Leftrightarrow \begin{cases} Q \text{ - норм.} \\ \text{все корни по модулю равны } 1 \end{cases}$

   Доказательство аналогично пункту 5 из сопряж.

6. $L \subset V$ инвариантно относительно $Q \Rightarrow L^{\perp}$ инвариантно относительно Q

   Доказательство:

   $\forall x \in L : \forall y \in L^{\perp}$. Q - невырожд. оператор

Q.E.D.

Теорема (о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора)

$\mathcal{A}$ самосопр. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б e, такой что матрица оператора имеет диагональный вид: $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \lambda_j \in \mathbb{R}$ собственные числа.

Это очевидно из теоремы о каноническом виде евклидового оператора.

Следствие 1. $\mathcal{A}$ самосопряж. $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda$, $V_\lambda \perp V_\mu, \lambda \neq \mu$.

Следствие 2. $\forall \mathcal{A} = \mathcal{A}^* : \exists T$ (унит./ортог.). $T^*AT = \Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. $T^* = \overline{T^T} = T^{-1} = T$.

Теорема (о каноническом виде матрицы изометрического оператора)

а) в унитарном пространстве:

   Q изометрично $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. e, такой что матрица диагональная из собственных чисел и $|\lambda_j| = 1$, где λ_j собственное число.

б) в евклидовом пространстве:

   Q изометрично $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б e, такой что матрица имеет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \Phi_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \Phi_m \end{pmatrix}$$

   где $\lambda_j \in \mathbb{R}$ собственные числа Q, а $\Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$, причем $\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$.

4.4 Знакоопределенность самосопряженного линейного оператора. Арифметический корень лин. оператора. Полярное разложение.

def: $\mathcal{A} \in End(V) : (V, (\cdot, \cdot))$ евклидово или унитарно.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ самосопряженный оператор.

1. $\mathcal{A} > 0$ положительно определен: $\forall u \neq 0 : (\mathcal{A}u, u) = (u, \mathcal{A}u) > 0$.
2. $\mathcal{A} < 0$ отрицательно определен: $\forall u \neq 0 : (\mathcal{A}u, u) = (u, \mathcal{A}u) < 0$.
3. $\mathcal{A} \geq 0$ положительно полуопределен: $\forall u \neq 0 : (\mathcal{A}u, u) = (u, \mathcal{A}u) \geq 0$, и существует $u \neq 0$, что $(u, \mathcal{A}u) = 0$
4. $\mathcal{A} \leq 0$ отрицательно полуопределен: $\forall u \neq 0 : (\mathcal{A}u, u) = (u, \mathcal{A}u) \leq 0$, и существует $u \neq 0$, что $(u, \mathcal{A}u) = 0$
5. $\mathcal{A} \rightleftharpoons 0$ неопределенно: $\Leftrightarrow \exists u \in V : (u, \mathcal{A}u) = (\mathcal{A}u, u) > 0$ и $\exists u \in V : (u, \mathcal{A}u) = (\mathcal{A}u, u) < 0$

Замечание: определение дословно переносится на матрицы $A_{n\times n}$. То есть введено стандартное скалярное произведение, $A = \overline{A}^T$, $A > 0$ положительно, если $\forall x \in K^n, x \neq \mathbb{O} : (Ax, x) = (x, Ax) > 0$.

Замечание: $(u, Au) = \overline{(Au, u)} = \overline{(u, Au)}$, то есть $(u, Au) \in \mathbb{R}$.

Теорема (Критерий знакоопределенности самосопряженных операторов)

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ все корни χ вещественные. Тогда:

1. $\mathcal{A} > 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda > 0$.
2. $\mathcal{A} < 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda < 0$.
3. $\mathcal{A} \geq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \geq 0$, причем есть $\lambda = 0$.
4. $\mathcal{A} \leq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \leq 0$, причем есть $\lambda = 0$.
5. $\mathcal{A} \rightleftharpoons 0$, то $\exists\ \lambda, \mu$ с.ч, что $\lambda > 0, \mu < 0$

Доказательство:

В правую сторону:

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*, V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda : V_\lambda \perp V_\mu, \mu \neq \lambda$.

Возьму λ - собственное число v_λ собственный вектор этого собственного числа $\neq \mathbb{O}$.

Тогда выполнено:

$$(Av_\lambda, v_\lambda) = (\lambda v_\lambda, v_\lambda) = \lambda ||v_\lambda||^2$$

Пользуясь этим фактом, докажем пару пунктов:

1. $A > 0 \Rightarrow \forall \lambda : \lambda ||v_\lambda|| > 0 \Rightarrow \lambda > 0$
2. $A \geq 0 \Rightarrow \forall \lambda : \lambda ||v_\lambda|| \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$, а также: $\exists u : (Au, u) = 0$, так как у нас прямая сумма подпространств, то $\mathbb{O} \neq u = \sum\limits_\lambda u_\lambda$

   $0 = (\mathcal{A}u, u) = \sum\limits_\lambda \lambda ||u_\lambda||^2 = 0 \Rightarrow u_\lambda = 0$, кроме одной μ. Заметим, что получаем, что $\exists \mu = 0$.

Остальные доказываются аналогично.

В левую сторону:

$$\forall u \in V, u = \sum_\lambda u_\lambda, \mathcal{A}u = \sum_\lambda \lambda u_\lambda$$

Как мы знаем $(u_\lambda, u_\mu) = 0$, при $\mu \neq \lambda$. Тогда:

$$(\mathcal{A}u, u) = (\sum_\lambda \lambda u_\lambda, \sum_\mu u_\mu) = \sum_\lambda \lambda ||u_\lambda||^2$$

Теперь, зная этот факт, рассмотрим пару пунктов:

1. Если у нас все $\lambda > 0 \Rightarrow (\mathcal{A}u, u) > 0$, тк если $u \neq 0 : \exists \mu : u_\mu \neq 0$, такое что $||u_\mu||^2 \neq 0, \mu > 0 \Rightarrow \sum\limits_\lambda \lambda ||u_\lambda||^2 > 0$

   Получили, что из выше сказанного доказали, что $A > 0$

2. Если у нас все $\lambda \geq 0$, то аналогичным образом получаем, что $(\mathcal{A}u, u) \geq 0$. У нас есть $\mu = 0$, возьму его собственный вектор $\neq 0$ и получу, что $(\mathcal{A}v_\mu, v_\mu) = \mu ||v_\mu||^2 = 0$.

   Получили, что из выше сказанного доказали, что $A \geq 0$

Остальные доказываются аналогично.

Q.E.D.

def: $\mathcal{A} \in End(V)$, $\mathcal{A}$ - о.п.с. и все с.ч $\lambda > 0$. Тогда $B \in End(V)$, $\mathcal{B}$ - о.п.с, все с.ч. $\mu \geq 0$ называется **арифметическим корнем** из $\mathcal{A}$, если $B^2 = \mathcal{A}$. $B = \sqrt{A}$.

Замечание: $m \in \mathbb{N}$ аналогично можно ввести $B = \sqrt[n]{\mathcal{A}}$.

Теорема (о существовании и единственности арифметического корня)

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$: о.п.с и все с.ч. $\lambda \geq 0$, то $\exists! \sqrt{A}$

Доказательство:

Покажем существование:

$\mathcal{A}$ - о.п.пс $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum\limits_\lambda \lambda P_\lambda$, где P_λ проекторы на V_λ.

$B := \sum\limits_\lambda \sqrt{\lambda} P_\lambda$. По теореме о спектральном разложении это о.п.с. со всеми собственными числами больше нуля, а также $B^2 = \mathcal{A}$, откуда существование показано.

Покажем единственность:

Пусть $\exists C$ о.п.с, все с.ч. $\mu \geq 0$, $C^2 = \mathcal{A}$.

Возьму собственное число C μ и его собственный вектор w_μ. Посмотрим куда переводит оператор $\mathcal{A}$ наш вектор:

$$\mathcal{A}w_\mu = C^2 W_\mu = \mu^2 w_\mu$$

То есть получаю, что w_μ собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ для с.ч. $\lambda = \mu^2$.

Я знаю, что C о.п.с. и $\mathcal{A}$ о.п.с.:

$V = \bigoplus\limits_{\mu} V_{\mu}^{C}$, а также $V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_{\lambda}$.

Во-первых из вышесказанного мы получили, что $\forall \mu : \exists \lambda = \mu^2 : V_{\mu}^{C} \subseteq V_{\lambda}$.

Заметим, что $V = \bigoplus\limits_{\mu} V_{\mu}^{C} \subseteq \bigoplus\limits_{\lambda} V_{\lambda} = V$

Откуда у меня на самом деле равенсто: $V_{\lambda} = V_{\mu}^{C}$. $\Rightarrow C = \sum\limits_{\lambda} \sqrt{\lambda} P_{\lambda} = B$

Q.E.D.

Теорема (полярное разложение)

$(V, (\cdot, \cdot))$ - евклидово, унитарное. $\forall \mathcal{A} \in End(V)$:

$\exists! \mathcal{H} \in End(V), \mathcal{H} \geq 0$ самосопряженный и $\exists U \in End(V)$ изометрич, что $\mathcal{A} = \mathcal{H}U$.

В частности, если $\mathcal{A}$ невырожденно, то оператор $U\ \exists!$, а также $\mathcal{H} > 0$.

Доказательство:

Рассмотрим парочку операторов: $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Покажем, что они оба самосопряженные:

1. $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^{**}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$
2. $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$

Теперь покажем, что они оба ≥ 0

$\mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0$ о.п.с, самосопряженный, откуда спектр вещественный, тогда существует ортонормированный базис из с.в. $V = span(v_1, \ldots, v_n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ - собственные числа $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Пусть $\lambda_i \neq 0, \lambda_j \neq 0$, v_i собственный вектор, v_j - собственный вектор, тогда:

$$(\mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}v_{\lambda}, v_{\mu}) = (\lambda v_{\lambda}, v_{\mu}) = \lambda(v_{\lambda}, v_{\mu}) = 0$$

А это значит, что $\mathcal{A}$ переводит базис $v_1, \ldots, v_n$ в систему ортог. векторов: $\mathcal{A}v_1, \ldots, \mathcal{A}v_n$.

$(\mathcal{A}^*\mathcal{A}v_i, v_i) = \lambda_i(v_i, v_i) = \lambda_i$, $||\mathcal{A}v_i|| = \sqrt{\lambda_i}$

Тогда получаю, что у меня некоторые из $\mathcal{A}v_i$ могли стать нулями (там где $\lambda = 0$). Дополним векторами из V_0 до о.н.б. и получим:

$$z_k = \frac{\mathcal{A}v_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \lambda_k \neq 0 \qquad \forall j = 1 \ldots n : \mathcal{A}v_j = \sqrt{\lambda_j} z_j$$

Определим U: $Uu_i = z_i$, переводит о.н.б в о.н.б, откуда изометрич.

Определим $\mathcal{H} : \mathcal{H}z_i := \sqrt{\lambda_i} z_i$, $i = 1, \ldots, n$. $\mathcal{H}$ будет о.п.с., так как в базисе z матрица будет иметь диагональный вид. При этом в диагональном виде все λ будут больше, откуда $\mathcal{H} \geq 0$.

Покажем корректность выбранных $\mathcal{H}, U$:

$$(HU)u_j = \mathcal{H}(Uu_j) = \mathcal{H}z_j = \sqrt{\lambda_j} z_j = \mathcal{A}v_j$$

по ранее замеченному. То есть для любого вектора из базиса у нас выполнено такое равенство, то есть $\mathcal{A} = \mathcal{H}U$.

<u>Докажем единственность:</u>

$\mathcal{A} = \mathcal{H}U, \mathcal{A}^* = U^*\mathcal{H}^* = U^{-1}\mathcal{H}$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ самосопряженный и ≥ 0, откуда:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{H}^2$$

А как мы доказали выше (в теореме о единственности арифм. корня), арифм. корень единственный, то есть $\mathcal{H} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$ определяется единственным образом.

Если $\mathcal{A}$ невырожд. $\Rightarrow \mathcal{A}^*$ невырожд. $\Rightarrow \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ невырожд.

А это в свою очередь значит, что все $\lambda_i \neq 0$, что в свою очередь значит, что все собственные числа $\mathcal{H} > 0$, что в свою очередь говорит, что H невырожденно.

$\mathcal{A} = \mathcal{H}U \Rightarrow \mathcal{H}^{-1}\mathcal{A} = U$, причем определенно однозначно из новырожденности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$.

Q.E.D.

Следствие: $\forall \mathcal{A} \in End(V) : \exists! \mathcal{H}_1 \geq 0, \exists U_1$ изометрич., так что $\mathcal{A} = U_1, H_1$.

Если $\mathcal{A}$ невырожденный $\Rightarrow \exists! U_1$.

Доказательство:

$\mathcal{A}^* = \mathcal{H}U$. $\mathcal{H} = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$

$\mathcal{A} = (\mathcal{H}U)^* = U^*\mathcal{H}^* = U^{-1}\mathcal{H} = U_1\mathcal{H}_1$

$U^{-1} = U_1$ оба изометричны из свойств изометричности.

Q.E.D.

<u>**def:**</u> $\mathcal{A} = \mathcal{H}U = U_1\mathcal{H}_1$

$H = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$ - <u>**левый модуль**</u> $\mathcal{A}$.

$H_1 = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$ - <u>**правый модуль**</u> $\mathcal{A}$.

Тут вообще есть замечание, но я не совсем понимаю, как его писать. Оно подразумевает, что мы вроде как концептуально придумали такое разложение для того, чтобы с комплами работать (поворот + растяжение). Но я не знаю какие слова подобрать, мб вы мне поможете.

4.5 Разложения матриц: LDU, Холецкого, QR.

def: $L = (l_{ij})_{n\times n}$ называется **унитреугольной нижней** (левой) матрицы если:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$$

def: $U = (u_{ij})_{n\times n}$ называется **унитреугольной верхней** (правой) матрицы если:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Замечание: Их определители равны 0.

def: $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $a_{ij} \in K$. A_k называется **угловой матрицей** A, если

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

$\Delta_k = \det A_k$ **угловой минор**.

Теорема:

$\forall A : \Delta_k \neq 0, k = 1 \dots n-1 \Leftrightarrow \exists! L : \exists! U : \exists! D$, такие что L - унитреугольная нижняя, U - унитреугольная верхняя, $D = diag(d_1, \dots, d_n)$, причем $d_k \neq 0 : k = 1, \dots, n-1$.

$$A = LDU$$

Доказательство:

Докажем в левую сторону:

Пусть $A = LDU$. Докажем интересный факт: $A_k = L_k D_k U_k$. Мы знаем:

$$A = LDU \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} l_{is}d_{st}u_{tj}$$

Из того, что матрица L нижнетреугольная, то есть при $s > i, l_{is} = 0$, а также матрица u_{tj} верхнетреугольная, то есть при $t > j, l_{tj} = 0$, то можно сделать замену:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} l_{is}d_{st}u_{tj} = \sum_{s=1}^{i}\sum_{t=1}^{j} l_{is}d_{st}u_{tj}$$

Пусть $i, j < k$ (мы хотим посмотреть на элементы матрицы A_k), то если мы добавим в нашу сумму нулевые элементы, то хуже не станет, то есть:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{i}\sum_{t=1}^{j} l_{is}d_{st}u_{tj} = \sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{k} l_{is}d_{st}u_{tj}$$

Что в свою очередь говорит нам, что $a_{ij}, i < k, j < k$ элемент зависит только от части матриц L и U, а если быть точнее, то мы получаем:

$$A_k = L_k D_k U_k$$

Теперь имея это мы получаем $\Delta_k = \det A_k = \det L_k \det D_k \det U_k = d_1 * \ldots * d_k \neq 0$

$\Rightarrow \Delta_{k+1} = \Delta_k d_{k+1}$, то есть: $d_{k+1} = \dfrac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}, k = 1, \ldots, n$, а так как $d_k \neq 0$ для тих k то наше утверждение выполнено и мы доказали теорему в левую сторону.

Докажем теорему в правую сторону:

Пусть $\Delta_k \neq 0, k = 1 \ldots n-1$. Воспользуемся методом математической индукции:

База:

$n = 1$, $A = (a_{11}), L = (1), U(1), D = (a_{11})$, очевидно, $A = LDU$ единственно.

ИП:

Пусть верно для $n = k : A_k = L_k D_k U_k$ и $d_1, \ldots, d_k \neq 0$

Докажем для $n = k+1$:

$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & b \\ c & a_{k+1k+1} \end{pmatrix}$

Теперь будем делать финт ушами: Я хочу получить: $A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} U_{k+1}$. При этом если такое разложение существует, то мы можем воспользоваться фактом, который мы доказали в начале этой теоремы: $(A_{k+1})_k = (L_{k+1})_k (D_{k+1})_k (U_{k+1})_k$. При этом из предположения индукции такое разложения у меня единственно, то есть если матрицы $L_{k+1}, D_{k+1}, U_{k+1}$ существуют, то должны иметь вид:

$$L_{k+1} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, U_{k+1} = \begin{pmatrix} U_k & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D_{k+1} = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & d_k & \\ 0 & & & d_{k+1} \end{pmatrix}$$

Теперь посмотрим, что у нас должно быть выполнено:

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & b \\ c & a_{k+1k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k D_k U_k & L_k D_k y \\ x D_k U_k & x D_k y + d_{k+1} \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow A_k = L_k D_k U_k$ по индукционному предположению. Также по ип: $\det A_k = \Delta_k = d_1 \cdot \ldots \cdot d_k \neq 0$.

$$\begin{cases} L_k D_k y = b \\ x D_k U_k = c \\ x D_k y + d_{k+1} = a_{k+1k+1} \end{cases}$$

Заметим, что чтобы найти y, мы должны решить СЛНУ с матр. $L_k D_K$, заметим, что $\det L_k D_k = \det D_k \neq 0$, то есть такое y существует и единственно: $y = (L_k D_k)^{-1} b$.

Аналогичным образом (протранспонировав второе выражение), получаем что существует и единственен $x : x^T = (U_k^T D_k)^{-1} C^T$.

Откуда существует и единственен $\Rightarrow d_{k+1} = a_{k+1k+1} - x D_K y = \dfrac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}$

То есть ИП доказан.

Замечание: на последнем шаге нам не важно, что $d_n = 0$.

Q.E.D.

Замечание:

1. $A = LDU$ разложение. $L' = LD$ нижне-треугольная с $d_1, \dots, d_n$. $U' = DU$ - верхне треугольная с $d_1, \dots, d_n$ на диагонали.
2. $\det A = \det L \det D \det U = \det D$.

Следствие: $A^* = A$ - самосопряженная, $\Delta_k \neq 0, k = 1, \dots, n-1 \Leftrightarrow \exists! L : \exists! D : \exists! V$, где $d_i \in \mathbb{R}$, а еще:

$$A = LDL^* = U^*DU$$

То есть $L^* = U, L = U^*$.

Доказательство:

$\begin{cases} A = LDU \\ A^* = U^*DL \end{cases}$, $A = A^*$, откуда пользуясь теоремой получаем, что LDU разложение единственно и получаем то, что надо.

Q.E.D

Алгоритм поиска LDU разложения

$$(A|E) \to \left(\begin{matrix} d_1 & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & d_n \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ * & & 1 \end{matrix}\right)$$

Мы переводим матрицу Гауссом, слева получаем DU, справа получаем L^{-1}. В Гауссе мы не переставляем строки.

def: $L_{ij}(\lambda)$ - **элементарная унитреугольная матрицв**, это единичная матрица с λ в i-ой строчке j-ом столбце.

Замечание: При умножении матрицы A на L_{ij} происходит прибавление к i строке $\lambda \cdot$ j-ая строка.

Замечание: $(L_{ij}(\lambda))^{-1} = L_{ij}(-\lambda)$.

Покажем почему работает:

$$(A|E) \to (L_m \dots L_1 A | L_m \dots L_1 E)$$

То есть $A = (L_1^{-1} \dots L_m^{-1})(L_m \dots L_1 A)$. Заметим, что $L_1^{-1} \dots L_m^{-1}$ это унитреугольная нижняя матрица, а вторая часть это DU, откуда из единственности LDU получаем, что это корректно.

Теорема (Разложение Холецкого, метод квадратного корня)

$\forall A : A > 0 : \Delta_k \neq 0, k = 1 \dots n$

Тогда $\exists! L$ нижнетреугольная, $\exists! U$ верхнетреугольная, что $l_{ii} > 0, u_{ii} > 0 : A = L \cdot L^* = U^* \cdot U$

Доказательство:

$A = L_0 D_0 U_0 = L_0 D_0 L_0^* = U_0^* D_0 U_0$, тк $A = A^*$.

$\forall x \neq \mathbb{O} : (Ax, x) = (L_0 D_0 u U_0 x, x) = (D_0 U_0 x, L_0^* x) = (D_0 y, D_0)$.

$y = U_0 x \neq 0$, тк U невырожденно и определитель равен 1.

$\forall y \neq 0 : (D_0 y, y) > 0 = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k |y_k|^2 \Rightarrow d_j > 0 : \forall j = 1 \dots n$. Из этого получаем:

$$A = L_0 D_0 L_0^* = (L\sqrt{D_0})(L_0\sqrt{D_0})^* = LL^*$$

Аналогично с U-шками.

Q.E.D.

<u>Теорема (QR разложение)</u>

$\forall A$ невырожденной $\exists Q$ унит/ортог. $\exists R$ верх. треугольная: $A = QR$

Доказательство:

A - невырожденная $\Leftrightarrow rgA = n, A = (A_1, \dots, A_n)$

Возьмем наши столбики, как вектора и приведем их к о.н.б с помощью Грамма-Шмидта.

Получим о.н. систему $q_1, \dots, q_n$, которая выражается через наши столбики:

$q_1 = u_{11} A_1$
$q_2 = u_{12} A_1 + u_{22} A_2$
$\vdots$
$q_n = u_{1n} A_1 + \dots + u_{nn} A_n$

$$Q = (A_1 \dots A_n) \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & u_{n-1n} \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Пусть матрица справа это R^{-1}.

$q_i^T \overline{q_j} = \delta_{ij}$ по построению.

$\Leftrightarrow Q^T \overline{Q} = E \Leftrightarrow Q$ унит/ортог.

$Q = AR^{-1}$

Q - невырожденная, A - невырожденная, откуда R^{-1} тоже невырожденная и существует R, то есть $QR = A$.

Q.E.D.

Следствие: $\forall A$ - невырожд., $\exists Q$ унит-ортог, $\exists L$ нижнетреугольная $A = LQ$.

Доказательство:

$A^* = QR, A = (QR)^* = R^* Q^*$. $R^* = L$ - нижнетреугольная $Q^* = Q$ - унит. ортог.

Q.E.D.

5 Информация о курсе

Поток — у2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Не сдавайтесь, изучая лин. ал. Это реально!

Upd: 13.02 слава устал

Upd: 06.03 что за пипяу происходит