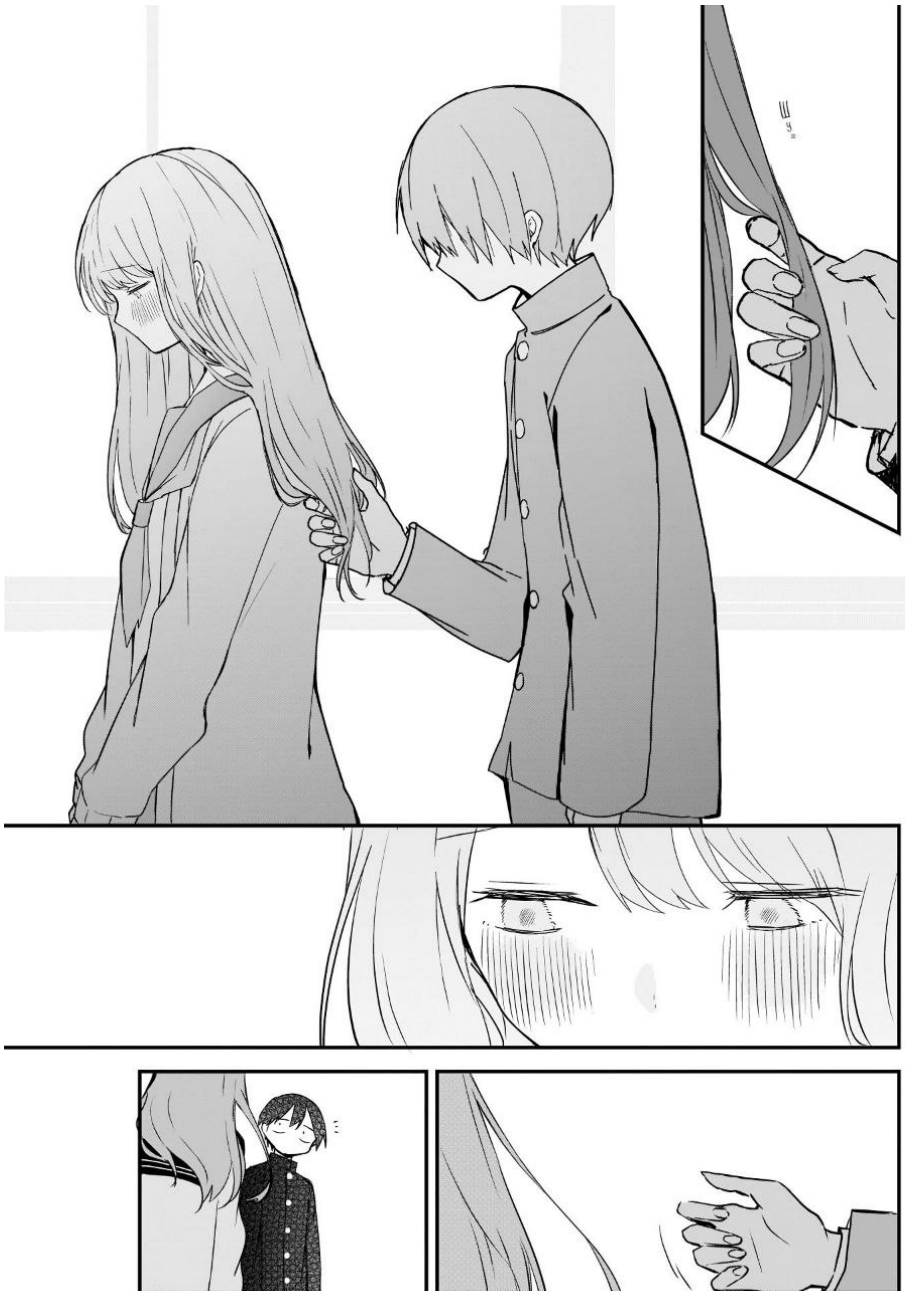
Линейная алгебра

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.



2 Линейные отображения.

2.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений

def: U, V - линейное пространства над одним полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$\mathcal{A} : U \to V$ называется **линейным гомоморфизмом**, если:

$$\forall \lambda \in K, \forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$$

Замечание 1: Мы будем писать $\mathcal{A}u$, вместо $\mathcal{A}(u)$.

Замечание 2: $\mathcal{A}u, \mathcal{B}u$ это какие-то числа, поэтому мы можем складывать их и умножать на скаляр.

Примеры:

1. $\mathbb{O}$: это нулевое отображения $\forall u \in U : \mathbb{O}u = 0$
2. P_n - пространство многочленов степени $\leq n$. $\mathcal{A} = \dfrac{d}{dx}$ — дифферинцирование.
3. ε — тождественное отображение. $\varepsilon : U \to U : \forall u \in U : \varepsilon u = u$.

Введем операции:

1. $\lambda \in K : \mathcal{A}$ — линейное отображение. Введем операцию умножения:
$$\forall u \in U : (\lambda \mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u)$$
2. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные отображение. Введем операцию сложения:
$$\forall u \in U : (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$
3. $\mathcal{B} \in L(U, W)$, $\mathcal{A} \in (L(W, V)$. Введем операцию произведения:
$\forall u \in U : (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$

$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{v \in V : v = \mathcal{A}u | \forall u \in V\}$ — **образ линейного пространства.**

Замечание: $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — линейное подпространство.

$\mathcal{K}er\mathcal{A} = \{u \in U | \mathcal{A}u = \mathbb{O}\}$ — **ядро линейного отображения**.

$rg\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ — **ранг отображения**

$def\mathcal{A} = \dim \mathcal{K}er\mathcal{A}$ — **деффект отображения.**

Виды отображений:

- сюръекция, если $\operatorname{Im}\mathcal{A} = V \Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V$.
- инъекция, если $\mathcal{K}er A = \{\mathbb{O}_U\} \Leftrightarrow def A = 0$.
- биекция или изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}\mathcal{A} = V \\ \mathcal{K}er\mathcal{A} = \{\mathbb{O}_U\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rg\mathcal{A} = \dim V \\ def\mathcal{A} = 0 \end{cases}$
- *эндоморфизмом* или линейным оператором, когда $U = V$.

  $\mathcal{A} \in End(V) = End_K(v)$
- *автоморфизм* это биекция + эндоморфизм.

  $\mathcal{A} \in Aut(V) = Aut_K(v)$

Примеры:

1. P_n — пространство многочленов степени не больше n. $\mathcal{A} = \dfrac{d}{dt}\mathcal{A} : P_n \to P_n$. не инъекция, не сюръекция, не изоморофизм, эндоморфизм и не автоморфизм
2. $U = K^n, V = K^m$, $A = (a_{ij})_{m\times n}, a_{ij} \in K$, $\forall u \in U : \mathcal{A}u = A \cdot u$.

   $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \left\{ y \in K^m \begin{array}{c} y = \mathcal{A}x \\ \forall x \in K^n \end{array} \right\} = span(A_1, \ldots, A_n)$ — *образ матрицы.*

   $y = A \cdot x = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i$

   Давайте более подробно рассмотрим *отображения*:

   1. сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V = m$.

      $\mathcal{K}er\mathcal{A} = \{x \in K^n : Ax = \mathbb{O}\}$ — общее решение СЛОУ, *ядро матрицы.*

      $\dim \mathcal{K}er\mathcal{A} = \dim$ общего решения $= n - rgA$.

      $def\mathcal{A} = n - rgA$ — *дефект матрицы.*
   2. инъекция $\Leftrightarrow def A = 0 \Leftrightarrow n - rgA = 0 \Leftrightarrow rgA = n$.
   3. биекция $\Leftrightarrow \begin{cases} rgA = n \\ rgA = m \end{cases} \Leftrightarrow n = M$.
   4. эндоморфизм $\Leftrightarrow n = m \Leftrightarrow A_{n\times n}$.
   5. автоморфизм $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n, A_{n\times n} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$.

Свойства произведения:

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — изоморф. $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ — изоморфно.

2. $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$.
3. $\forall \lambda \in K : \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$.
4. $\mathcal{C} \in L(\Omega, U) : \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

Ассоциативная унитальная алгебра.

Замечание 1. Если $\mathcal{A} \in L(U, V)$ — изоморфно $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ — взаимно обр. отображение.

Замечание 2. Если $\mathcal{A} \in End(V)$, а также изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ — обратный лин. оператор к $\mathcal{A}$.

<u>def:</u> $U_0 \subset U$ - линейное подпространство. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \to V$ сужение лин. отобр. на лин подпространство.

$\forall u \in \mathcal{A}_0 : \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$.

Если $\mathcal{A}$ — изоморфизм, то тогда его сужение на U_0 будет линейным отображением между U_0 и $\operatorname{Im}\mathcal{A}_0$. И это будет тоже изоморфизм.

<u>Теорема(о ранге и дефекте линейного отображения)</u>

$\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$. Доказать $\dim U = def\mathcal{A} + rg\mathcal{A}$.

Доказательство:

Пусть $U_0 = \mathcal{K}er \subset U$. Пусть $U_1 \subset U$, такое, что $U_0 \oplus U_1 = U$ — прямое дополнение. Возьму $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} \in L(U_1, \operatorname{Im}\mathcal{A}_1)$.

$\forall u \in U : \exists! u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in U_0$, $u_1 \in U_1$, по т. об определении прямой суммы. Тогда получаем, что:

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$$

Откуда $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{Im}\mathcal{A}_1$, $rg\mathcal{A} = rg\mathcal{A}_1$.

$\mathcal{K}er\mathcal{A}_1 \subset U_1$, а также $\mathcal{K}er\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{K}er\mathcal{A} = U_0 \Rightarrow \mathcal{K}er\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{O}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1$ — инъективна $\Rightarrow \mathcal{A}_1$ изоморфно. Откуда получаем:

$$\dim U = \dim U_1 + \dim U_0 = rg\mathcal{A} + def\mathcal{A}$$

Q.E.D.

Следствие. (характеристика автоморфизма)

Если $\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$ — условие обратимости линейного пространства.

2.2 Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

Пусть есть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ базис U, а так же $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ базис V.

$$u \in U \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^n;\ v \in V \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\exists v = \mathcal{A}u, u \in U : v = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{A}\xi_i$$

То есть $\operatorname{Im} \mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$rg\mathcal{A} = rg(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$.

Теперь заметим, что $\mathcal{A}\xi_i \in V$, откуда:

$$A\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \xleftrightarrow{\text{коорд. изоморфизм}} A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m$$

.

Назовем $A = (A_1, \dots, A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$ — **матрицей линейного отображения** $\mathcal{A}$ на базисах ξ, η.

Замечание. Т.к. здесь координатный изоморфизм, то:

$$rg\mathcal{A} = rg(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = rg(A_1, \dots, A_n) = rgA.$$

def: $\mathcal{A} \in End(V) : \mathcal{A} : V \to V$ — **лин. оператор**.

Зафиксируем здесь один базис $e = e_1, \dots, e_n$. Получу:

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \dots, e_n)\mathcal{A}$$

Тогда $A_{n \times n}$ — **матрица линейного оператора**.

Заметим, что теперь мы умеем:

$$\mathcal{A} \in L(U,V) \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A \in M_{m\times n}$$

Утв. $L(U,V) \cong M_{m\times n}$ **<u>координатный изоморфизм линейных отображений</u>**

Доказательство:

У нас есть взаимно однозначное соответствие. Проверим линейность:

$\forall \lambda \in K : \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \xleftrightarrow{\text{проверить}} A + \lambda B.$

$$(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda\cdot\mathcal{B}x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j + \lambda\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(a_{ji}+\lambda b_{ji})\cdot\eta_j$$

А откуда уже видно нужное нам соответствие. Q.E.D.

Утв. $\mathcal{A} \in L(W,V), \mathcal{B} \in L(V,W), \mathcal{AB} \in L(U,V)$. Пусть w - базис W, η - базис V, ξ - базис U. Тогда $\mathcal{AB} \leftrightarrow AB$ в базисах (ξ,η)

Доказательство:

$$\mathcal{AB}\xi_i = \mathcal{A}(\mathcal{B}\xi_i) = \mathcal{A}(\sum_{k=1}^{p} b_{ki}w_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathcal{A}(w_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{kj})\eta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(AB)_{ji}\cdot\eta_j$$

Q.E.D.

Следствие: $\mathcal{A} \in L(U,V)$ - изоморфизм, A - матр в $\xi,\eta \Rightarrow A^{-1}$ - матр в (η,ξ).

Доказательство:

$$v = Cu = \sum_{i=1}^{n} u_i\mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^{n} u_i\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}u_i)\eta_j \Rightarrow v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}u_i$$

Откуда получаю, что $v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow v = A\cdot u$. Откуда уже получаем то, что и хотели найти

Q.E.D.

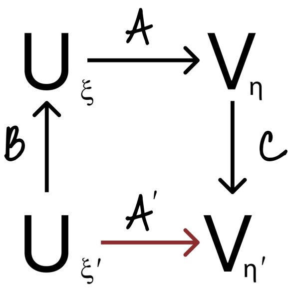
<u>Теорема (формула замены мантрицы лин. отобр. при замене базиса)</u>

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

ξ, ξ' базисы U, а η, η' базисы V. Хотим поменять базисы на штрихованные и получить новую матрицу. Тогда ее можно получить так:

$$A' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} A T_{\xi \to \xi'}$$

Доказательство:



Воспользуемся данным рисунком, чтобы понять происходящее. Мы хотим найти матрицу $\mathcal{A}'$. Для этого, заметим, что преобразование $\mathcal{A}'$, это преобразование $\mathcal{B}$, потом примененное к нему преобразование $\mathcal{A}$, а после этого примененое к нему преобразование $\mathcal{C}$. То есть:

$$\mathcal{A}' = \mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B}$$

.

Заметим, что матрица $\mathcal{B}$, это матрица перехода из ξ в ξ'. Это так потому что у нас просто меняется базис (про саму матрицу перехода см. одноименный раздел). Матрица $\mathcal{C}$, это $T_{\eta' \to \eta}$. Откуда, исходя из двух утверждений сверху:

$$A' = T_{\eta' \to \eta} A T_{\xi \to \xi'} \Rightarrow A' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} A T_{\xi \to \xi'}$$

Q.E.D.

Следствие: $A \in End(V)$. e, e' базисы V. $A' = T^{-1} A T$

2.3 Инварианты линейного отображения.

Инвариатность называется некоторое свойство объекта, которое не меняется при определенных действиях и преобразованиях.

A - линейное отображение. Ранг и дефект инварианты относительно выбора базиса.