Математический Анализ

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Практика 1.

1.1 Неопределенный интеграл

$f(x)$ - непрерывна. $U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

def: первообразной функции f называется функция $F(x)$, такая что $F'(x) = f(x) : \forall x \in U$

def: неопределенный интеграл $\int f dx = \{F -$ первообразные функции f$\}$

$(F_1 - F_2)' = 0$, откуда $F_1 - F_2 \equiv c$

Таким образом две первообразные отличаются на константу. То есть теперь:

$\int f dx = F + C$, где F - любая первообразная, а C - константа.

Свойства:

1. $\int$ линеен
2. $\int fg = \int fg' + \int f'g$. Или $\int f dg = fg - \int g df$
3. Замена переменных: φ - дифф $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)}$

Замечание: $f'(x)dx = df(x)$

Задачи: Найти первообразную функции f проходящую через точку (x_0, y_0) :

1. $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \sin x - \cos(x+1)$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$

   Можем искать интегралы раздельно из линейности:

$$\int f dx = \sqrt{x} - \cos x - \sin(x+1) + c$$

   Теперь хотим, чтобы в единице была 1:

$$c + 1 - \cos 1 - \sin 2 = 1$$

   Нашли c и выиграли

2. $f(x) = |x|, (x_0, y_0) = (-2, 4)$

$$f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x \leq 0 \end{cases} \quad ; F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + c, x \geq 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} + x, x < 0 \end{cases} \quad = \frac{x|x|}{2} + c$$

   Подставим точку и выиграем

3. $f = x|x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ -x^2, x < 0 \end{cases} \quad ; F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + c, x \geq 0 \\ \dfrac{-x^3}{3} + c, x < 0 \end{cases} \quad = \frac{|x|^3}{3} + c$$

4. $f = e^{|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x, x \geq 0 \\ e^{-x}, x \leq 0 \end{cases} \quad ; F(x) \begin{cases} e^x + c_1, x \geq 0 \\ -e^{-x} + c_2, x \leq 0 \end{cases}$$

На выходе должна быть непрерывная функция, откуда в точке ноль они должны совпададать

$$F(x) \begin{cases} e^x + c, x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2 + c, x < 0 \end{cases}$$

5. $f = \max(1, x^2)$

Тривиально.

6. $\displaystyle\int \sin(ax+b)dx, a \neq 0$

Хотим найти что-то такое $\displaystyle\int \sin(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$:

$$\int \sin(ax+b)dx = \int \sin t \frac{dt}{a} = -\frac{1}{a}\cos t + c = -\frac{\cos ax + b}{a} + c$$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+5}dx$

$$\frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{3}{5}x^2+1} = \frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{3}{5}}x) + c$$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$ Воспользуемся разложением на простые дроби:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c$$

9. $\int \sin^n x dx$

$$\int \sin^n x dx = \int -\sin^{n-1} x d\cos x = -\sin^{n-1} x \cos x + \int \cos^2 x (n-1) \cdot \sin^{n-2} x dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - \int \sin^n x dx$$

Откуда если взять эту формулу за I_n получится:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n}$$

А это уже можно дорешать.

2 Практика 2.

2.1 Продолжение неопределенных интегралов.

1. x^2+px+q не имеет корней. Найти $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px_q}dx = \int \frac{ax+b}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx =$$

Сделаем замену $y = x+\frac{p}{2}, \gamma^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ из-за того что корней нет

$$= \int \frac{ay+b-a\frac{p}{2}}{y^2+\gamma^2} = \frac{a}{2}\int \frac{2y+\frac{2b}{a}-p}{y^2+\gamma^2} = \int \frac{2ydy}{y^2+\gamma^2} + \frac{a}{2}\left(\frac{2b}{a}-p\right)\int \frac{dy}{y^2+\gamma^2} =$$

$$= \frac{a}{2}\ln(y^2+\gamma^2) + \frac{ac}{2} + \frac{a}{2}(\frac{2b}{a}-p)\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$$

Пусть у нас есть функция от двух рациональных переменных $R(x,y)$:

Пример: $\frac{x^3+2xy+y^2}{7x+4y^4}$.

И пусть хотим посчитать $\int R(\cos t, \sin t)dt$. Будем делать универсальную замену: $x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$

Тогда $\cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\sin t = \frac{2x}{1+x^2}$, $dt = 2\frac{dx}{1+x^2}$. То есть на самом деле:

$$\int R(\cos t, \sin t)dt = \int R(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2})\frac{2dx}{1+x^2}$$

Проблема в том, что такой интеграл считать не вкусно.

Если $R(-x,-y) = R(x,y)$, поделим на x в максимальной степени. Пример

$$\frac{x^2+3xy}{y^4+4} = \frac{\frac{1}{x^2}+3\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x^2}}{(\frac{y}{x})^4+\frac{4}{x^4}}$$

Давайте в таком случае сделаем замену $z = \operatorname{tg} t$, $dt = \frac{dz}{1+z^2}$, $\frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t = z, \cos^2 t = \frac{1}{1+z^2}$

Пример:

$$\int \frac{dt}{2+\cos^2 t} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{2+\frac{1}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{3+2z^2}$$

1. $\displaystyle\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

$$\int \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} dt = \int \frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t} dt = \int \frac{1 - z}{1 + z} \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = \int \frac{1}{1 + z} - \frac{z}{1 + z^2} dz = \ln(z+1) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) + c$$

Не забыть сделать обратную замену!

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x}$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos^2 t} dt}{2 + \operatorname{tg} t + \operatorname{tg}^2 t} = \int \frac{dz}{2 + z + z^2} = \int \frac{dz}{(z + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{4}{7}} \operatorname{arctg}(y \cdot \sqrt{\frac{4}{7}}) + c$$

Не забыть сделать обратную замену!

3. $\displaystyle\int \sin^2 t dt$

$$\int \sin^2 t dt = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt$$

А дальше очевидно доделывается.

3 Практика 3.

3.1 Определенные интегралы

f - непрерывные на $[a, b]$. Хотим посчитать площадь подграфика. Более подробно нам говорили на лекции(смотрите конспект лекции).

$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, где F - какая-то константа - **формула Ньютона-Лейбница**.

Задачи: кто больше?

1. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$ или $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$

   Очевидно правая больше из площади подграфика.

2. $\int\limits_0^{-1} e^{-x}\sin x dx$ или $\int\limits_0^{1} e^{-x^2}\sin x dx$

   $e^{-x} < e^{-x^2}$ на этом интервале. Откуда больше правая

3. $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ или $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x}$

   Функция слева меньше функции справа, откуда у правой подграфик больше(они положительные)

Доказать:

1. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$

   $$\frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} \le \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$$

   Вспользуемся переходом в неравенствах и получим то, что надо

2. $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx < \frac{3}{2}$

   $$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx =$$

   Заметим, что правое выржение - интеграл нечетной функции на симметричном интервале откуда это 0. Перепишем:

   $$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx$$

Теперь оценим сверху и снизу эту функцию и получим победу.

3. $\dfrac{\sqrt{2}}{3} < \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\cos x}{2+x^2} < 1$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos x}{2+x^2}dx = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos x}{2+x^2}dx$$

Сверху очевидно оценивается $\cos x = 1, x^2 = 0$, снизу оценивается $x^2 = 1$

4. $\dfrac{1}{10\sqrt{2}} < \int\limits_{0}^{1} \dfrac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx < \dfrac{1}{10}$

$$\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leq x^9$$

Интегрируем неравенство и получаем выигрыш.

5. $1 - \dfrac{1}{n} < \int\limits_{0}^{1} e^{-x^n}dx < 1, n \in \mathbb{N}$

$e^t = 1 + t + o(t)$, но мы не умеем в интегралы от $o(t)$, откуда $e^t \geq 1 + t$.

$$\int\limits_{0}^{1} e^{-x^n}dx \geq \int\limits_{0}^{1}(1 - x^n)dx = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}$$

Сверху оценивается очевидно

4 Практика 4.

4.1 Римановы суммы

$\sum\limits_{i=1}^{n}(\Delta x)_i f(x-\xi_i) \to_{n\to\infty} \int\limits_a^b f dx$. Об этом есть в конспекте лекций.

1. $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$

   Возьму $x_0 = a = 0, x_i = x_{i-1} + \frac{1}{n}, x_n = 1 = b,\ f(x) = \sqrt{x+1}$. В данном случае $\xi_i = x_i$

   Откуда на самом деле это предел Римановой суммы:

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}} = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}}{3}$$

2. $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\frac{k}{n}$$

   Откуда если $x_0 = a = 0, x_i = x_{i-1} + \frac{1}{n}, x_n = 1 = b, f(x) = x, \xi_i = x_i$. Получили Риманову сумму, откуда:

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \int\limits_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

3. $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$

   Тут что-то не видно ничего. Давайте вынесем $4n^2$:

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \frac{1}{2}\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{2n})^2}}$$

   А вот тут уже видно сумму Римана. $x_0 = a = 0, x_i = x_{i-1}+\frac{1}{n}, x_n = 1 = b, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}, \xi_i = x_i$.

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}^2}} = \frac{\pi}{6}$$

4. $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{n^2}\sqrt{(an+k)(an+k+1)}$

$$\sum \frac{1}{n}\sqrt{(a+\frac{k}{n})(a+\frac{k}{n}+\frac{1}{n})} = \sum \frac{1}{n}\sqrt{(a+\frac{k}{n})^2+\frac{1}{n}(a+\frac{k}{n})} = \sum \frac{1}{n}(n+\frac{k}{n})\sqrt{1+\frac{1}{n}\frac{1}{a+k/n}} =$$

$$= \sum \frac{1}{n}(a + \frac{k}{n}) + \sum (\frac{1}{n}(a + \frac{k}{n}) o(1))$$

Штуку слева мы уже научились считать, осталась только справа. (о малая от единицы взялась как то, что мы оценили то, что под корнем). Теперь оценим то, что под скобками как $\frac{1}{an}$, то есть оно стремится к нулю при увеличении n.

5. $\lim\limits_{n=1} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{2+\cos(\dfrac{\pi k}{n})}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{2+\cos(\dfrac{\pi k}{n})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\pi}{n} + o(\frac{1}{n^2})}{2+\cos(\dfrac{\pi k}{n})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\pi}{n}}{2+\cos(\dfrac{\pi k}{n})} + \sum_{k=1}^{n} \frac{o(\frac{1}{n^2})}{2+\cos(\dfrac{\pi k}{n})}$$

Первое - Риманова сумма, ее считать умеем, а справа непонятно.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{o(\frac{1}{n^2})}{2+\cos(\dfrac{\pi k}{n})} \right| \le \sum \left| o(\frac{1}{n}) \right| \frac{\pi}{n} \frac{1}{2+\cos(\frac{\pi k}{m})} = |o(\frac{1}{n})| \; \frac{\pi}{n} \frac{1}{2+\cos(\frac{\pi k}{m})} \to 0$$

Наше o не зависит от k, откуда можно вынести за скобки и получим, что оно стремится к нул.

Посчитаем первое:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{3+t^2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \cdot \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Тут появился несобственный интеграл, о нем читайте в конспекте

6. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^{k/n}}{n+\frac{1}{k}}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k/n}}{n+\frac{1}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k/n}}{1+\frac{1}{kn}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot 2^{k/n} (1 - \frac{1}{kn} + o(\frac{1}{kn})) =$$

Обозначим то, что в скобках $o(1)_k$. Заметим, что мы можем его оценить $o(1)$, которое не зависит от k.

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k/n}}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k/n}}{n} o(1)_k$$

Слева Риманова сумма. Посчитать ее понятно как. Справа какая-то хрень, но мы можем вынести $o(1)$ за скобки по вышесказанному. Откуда останется 0 на ограниченная, получится ноль и победа

5 Практика 5.

5.1 Разные идеи:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^x \cos(t^2)dt}{x}$

   Заметим, что мы можем поспользоваться Лопиталем потому что обе штуки стремятся к нулю, откуда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \cos(t^2)dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} \cdot dt}{\int\limits_0^x \sqrt{\sin t} dt}$

   Тут тоже Лопиталь, откуда выведем общую формулу:

$$\int\limits_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = (F(h(x)) - F(g(x)))' = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

   Пользуяст ею получаем, что наш предел равен:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)} \cos x}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)} \dfrac{1}{\cos^2 x}}$$

3. $\int\limits_0^x e^{t^2} dt \sim \dfrac{e^{x^2}}{2x}$, при $x \to \infty$

   Поделим и посмотрим на предел:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\int\limits_0^x e^{t^2} dt}{\dfrac{e^{x^2}}{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{\dfrac{4x^2 e^{x^2} - 2e^{x^2}}{4x^2}} = 1$$

4. $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_1^n \ln(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}})dx$

   Заменим n на t и воспользуемся Лопиталем.

6 Практика 6.

6.1 Длина кривой

$l(x_0, x_1) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$

Найти площадь фигуры, ограниченного кривыми. Так как это крайне скучно, то я просто вставлю кусок теории. Для решения всех задач на эту тему вы должны знать все предыдущие практики и в том числе уметь интегрировать и брать производные.

Если x, y заняты параметрически(функциями от t), то формула такая:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)} dt$$

где a, b - границы t по которым вы хотите посчитать.

Если у вас есть $y = f(x)$ и такая функция гладкая, то формула такая:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)} dx$$

где a, b - границы вашего пути по x

Если у вас есть функция, заданная в полярных координатах $r = f(\varphi)$, то формула такая:

$$l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f^2 + (f')^2} d\varphi$$

7 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Басков Игорь Сергеевич.

Я хочу чокопай