Линейная алгебра

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Линейные отображения.

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений

def: U, V - линейное пространства над одним полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$\mathcal{A} : U \to V$ называется **линейным гомоморфизмом**, если:

$$\forall \lambda \in K, \forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$$

Замечание 1: Мы будем писать $\mathcal{A}u$, вместо $\mathcal{A}(u)$.

Замечание 2: $\mathcal{A}u, \mathcal{B}u$ это какие-то числа, поэтому мы можем складывать их и умножать на скаляр.

Замечание 3: $\mathcal{A}\mathbb{O}_U = \mathbb{O}_V$, частный случай $\lambda = 0$

Примеры:

1. $\mathbb{O}$: это нулевое отображения $\forall u \in U : \mathbb{O}u = 0$
2. P_n - пространство многочленов степени $\leq n$. $\mathcal{A} = \dfrac{d}{dx}$ — дифферинцирование.
3. ε — тождественное отображение. $\varepsilon : U \to U : \forall u \in U : \varepsilon u = u$.

Введем операции:

1. $\lambda \in K : \mathcal{A}$ — линейное отображение. Введем операцию умножения:
$$\forall u \in U : (\lambda \mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u)$$
2. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные отображение. Введем операцию сложения:
$$\forall u \in U : (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$
3. $\mathcal{B} \in L(U, W)$, $\mathcal{A} \in (L(W, V)$. Введем операцию произведения:
$$\forall u \in U : (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{v \in V : v = \mathcal{A}u | \forall u \in U\}$ — **образ линейного пространства.**

Замечание: $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — линейное подпространство.

$\mathcal{K}er\mathcal{A} = \{u \in U | \mathcal{A}u = \mathbb{O}\}$ — **ядро линейного отображения**.

$rg\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ — **ранг отображения**

$def\mathcal{A} = \dim \mathcal{K}er\mathcal{A}$ — **дефект отображения.**

Виды отображений:

- сюръекция, если $\operatorname{Im}\mathcal{A} = V \Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V$.
- инъекция, если $\mathcal{K}er A = \{\mathbb{O}_U\} \Leftrightarrow def A = 0$.
- биекция или изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}\mathcal{A} = V \\ \mathcal{K}er\mathcal{A} = \{\mathbb{O}_U\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rg\mathcal{A} = \dim V \\ def\mathcal{A} = 0 \end{cases}$
- *эндоморфизмом* или линейным оператором, когда $U = V$.

  $\mathcal{A} \in End(V) = End_K(v)$
- *автоморфизм* это биекция + эндоморфизм.

  $\mathcal{A} \in Aut(V) = Aut_K(v)$

Примеры:

1. P_n — пространство многочленов степени не больше n. $\mathcal{A} = \dfrac{d}{dt}\,\mathcal{A} : P_n \to P_n$. не инъекция, не сюръекция, не изоморофизм, эндоморфизм и не автоморфизм
2. $U = K^n, V = K^m$, $A = (a_{ij})_{m\times n}, a_{ij} \in K$, $\forall u \in U : \mathcal{A}u = A \cdot u$.

   $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \left\{ y \in K^m \begin{array}{c} y = \mathcal{A}x \\ \forall x \in K^n \end{array} \right\} = span(A_1, \dots, A_n)$ — *образ матрицы.*

   $y = A \cdot x = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i$

   Давайте более подробно рассмотрим *отображения*:

   1. сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V = m$.

      $\mathcal{K}er\mathcal{A} = \{x \in K^n : Ax = \mathbb{O}\}$ — общее решение СЛОУ, *ядро матрицы.*

      $\dim \mathcal{K}er\mathcal{A} = \dim$ общего решения $= n - rgA$.

      $def\mathcal{A} = n - rgA$ — *дефект матрицы.*
   2. инъекция $\Leftrightarrow def A = 0 \Leftrightarrow n - rgA = 0 \Leftrightarrow rgA = n$.
   3. биекция $\Leftrightarrow \begin{cases} rgA = n \\ rgA = m \end{cases} \Leftrightarrow n = m$.
   4. эндоморфизм $\Leftrightarrow n = m \Leftrightarrow A_{n\times n}$.
   5. автоморфизм $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n, A_{n\times n} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$.

Свойства произведения:

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — изоморф. $\Rightarrow \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$ — изоморфно.
2. $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$.
3. $\forall \lambda \in K : \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})$.
4. $\mathcal{C} \in L(\Omega, U) : \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}$

Ассоциативная унитальная алгебра.

Замечание 1. Если $\mathcal{A} \in L(U, V)$ — изоморфно $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ — взаимно обр. отображение.

Замечание 2. Если $\mathcal{A} \in End(V)$, а также изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ — обратный лин. оператор к $\mathcal{A}$.

<u>def:</u> $U_0 \subset U$ - линейное подпространство. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \to V$ сужение лин. отобр. на лин подпространство.

$\forall u \in \mathcal{A}_0 : \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$.

Если $\mathcal{A}$ — изоморфизм, то тогда его сужение на U_0 будет линейным отображением между U_0 и $\operatorname{Im}\mathcal{A}_0$. И это будет тоже изоморфизм.

<u>Теорема (о ранге и дефекте линейного отображения)</u>

$\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$. Доказать $\dim U = def\mathcal{A} + rg\mathcal{A}$.

Доказательство:

Пусть $U_0 = \mathcal{K}er \subset U$. Пусть $U_1 \subset U$, такое, что $U_0 \oplus U_1 = U$ — прямое дополнение. Возьму $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} \in L(U_1, \operatorname{Im}\mathcal{A}_1)$.

$\forall u \in U : \exists! u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in U_0$, $u_1 \in U_1$, по т. об определении прямой суммы. Тогда получаем, что:

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$$

Откуда $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{Im}\mathcal{A}_1$, $rg\mathcal{A} = rg\mathcal{A}_1$.

$\mathcal{K}er\mathcal{A}_1 \subset U_1$, а также $\mathcal{K}er\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{K}er\mathcal{A} = U_0 \Rightarrow \mathcal{K}er\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{O}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1$ — инъективна $\Rightarrow \mathcal{A}_1$ изоморфно. Откуда получаем:

$$\dim U = \dim U_1 + \dim U_0 = rg\mathcal{A} + def\mathcal{A}$$

Q.E.D.

Следствие. (характеристика автоморфизма)

Если $\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$ — условие обратимости линейного оператора.

1.2 Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

Пусть есть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ базис U, а так же $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ базис V.

$$u \in U \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^n;\ v \in V \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\exists v = \mathcal{A}u, u \in U : v = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{A}\xi_i$$

То есть $\operatorname{Im}\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$rg\mathcal{A} = rg(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$.

Теперь заметим, что $\mathcal{A}\xi_i \in V$, откуда:

$$A\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \xleftrightarrow{\text{коорд. изоморфизм}} A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m$$

.

Назовем $A = (A_1, \dots, A_n) = (a_{ij})_{m\times n}$ — **матрицей линейного отображения** $\mathcal{A}$ на базисах ξ, η.

Замечание. Т.к. здесь координатный изоморфизм, то:

$$rg\mathcal{A} = rg(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = rg(A_1, \dots, A_n) = rgA.$$

def: $\mathcal{A} \in End(V) : \mathcal{A} : V \to V$ — **лин. оператор**.

Зафиксируем здесь один базис $e = e_1, \dots, e_n$. Получу:

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \dots, e_n)\mathcal{A}$$

Тогда $A_{n\times n}$ — **матрица линейного оператора**.

Заметим, что теперь мы умеем:

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A \in M_{m\times n}$$

Утв. $L(U, V) \cong M_{m\times n}$ **координатный изоморфизм линейных отображений**

Доказательство:

У нас есть взаимно однозначное соответствие. Проверим линейность:

$\forall\lambda \in K : \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \xleftrightarrow{\text{проверить}} A + \lambda B$.

$$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \cdot \mathcal{B}x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j + \lambda\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(a_{ji} + \lambda b_{ji}) \cdot \eta_j$$

А откуда уже видно нужное нам соответствие. Q.E.D.

Утв. $\mathcal{A} \in L(W, V), \mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{AB} \in L(U, V)$. Пусть w - базис W, η - базис V, ξ - базис U. Тогда $\mathcal{AB} \leftrightarrow AB$ в базисах (ξ, η)

Доказательство:

$$\mathcal{AB}\xi_i = \mathcal{A}(\mathcal{B}\xi_i) = \mathcal{A}(\sum_{k=1}^{p} b_{ki}w_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathcal{A}(w_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{kj})\eta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (AB)_{ji} \cdot \eta_j$$

Q.E.D.

Следствие: $\mathcal{A} \in L(U, V)$ - изоморфизм, A - матр в $\xi, \eta \Rightarrow A^{-1}$ - матр в (η, ξ).

Доказательство:

$$A \cdot A^{-1} = \varepsilon_V, \quad A^{-1} \cdot A = \varepsilon_U$$

$$AX = E_\eta, \quad XA = E_\xi$$

В силу того, что $\mathcal{A}$ — изоморфизм:

$$\dim U = \dim V = n, \quad rgA = n \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

$$X = A^{-1}$$

Q.E.D.

Утверждение: Пусть $\mathcal{A} \in L(U_\varepsilon, V_\eta), v = \mathcal{A}u$. Тогда $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$, где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — координатные столбцы v и u соответственно.

Доказательство: С одной стороны, v можно разложить по базису V:

$$v = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{v}_j \eta_j$$

С другой стороны, v представим как результат отображения:

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{u}_i)\eta_j \Rightarrow \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{u}_i$$

. Откуда получаем искомое: $v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u}$. Последнее равенство называется *координатной формой записи действия линейного отображения.*

Q.E.D.

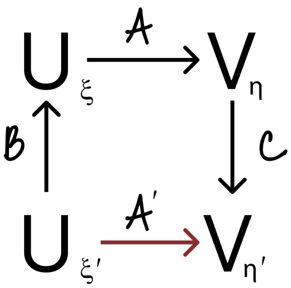
Теорема (формула замены матрицы лин. отобр. при замене базиса)

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

ξ, ξ' базисы U, а η, η' базисы V. Хотим поменять базисы на штрихованные и получить новую матрицу. Тогда ее можно получить так:

$$A' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} A T_{\xi \to \xi'}$$

Доказательство:



Воспользуемся данным рисунком, чтобы понять происходящее. Мы хотим найти матрицу $\mathcal{A}'$. Для этого, заметим, что преобразование $\mathcal{A}'$, это преобразование $\mathcal{B}$, потом примененное к нему преобразование $\mathcal{A}$, а после этого применненое к нему преобразование $\mathcal{C}$. То есть:

$$\mathcal{A}' = \mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B}$$

Заметим, что матрица $\mathcal{B}$, это матрица перехода из ξ в ξ'. Это так потому что у нас просто меняется базис (про саму матрицу перехода см. одноименный раздел). Матрица $\mathcal{C}$, это $T_{\eta' \to \eta}$. Откуда, исходя из двух утверждений сверху:

$$A' = T_{\eta' \to \eta} A T_{\xi \to \xi'} \Rightarrow A' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} A T_{\xi \to \xi'}$$

Q.E.D.

Следствие: $A \in End(V)$. e, e' базисы V. $A' = T^{-1}AT$, где $T = T_{e \to e'}$.

def: квадратные матрицы A и B называются подобными, если $\exists$ невырожденная матрица C, такая, что: $B = C^{-1}AC$.

Замечание: матрицы линейного оператора в разных базисах подобны (см. следствие выше).

1.3 Инварианты линейного отображения.

Инвариатность называется некоторое свойство объекта, которое не меняется при определенных действиях и преобразованиях.

$\mathcal{A}$ - линейное отображение. Ранг и дефект инварианты относительно выбора базиса.

Пусть $\mathcal{A} \in End(V)$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис v.

Как мы знаем, $\exists! D$ n-форма, такая что $D(e_1, \ldots e_n) = 1$. Тогда **определитель линейного оператора**:

$$\det \mathcal{A} := det(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) = D(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$$

Замечание: $\det \mathcal{A} = D(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}_n) = D(Ae_1, \ldots, A_n) = \det A$ — определение определителя линейного оператора и матрицы соотносятся.

Теорема:

$\forall \mathcal{A} \in End(V), \det \mathcal{A} = \det A$.

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, \ldots, e_n)$ базис V. Тогда:

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A = (a_{ij})_{n\times n}$$

$$\det \mathcal{A} = D(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) = D(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_{i_1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}e_{i_n}) =$$

$$\xLeftrightarrow{\text{тк } D \text{ - } n \text{ форма}} \det \mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} D(e_{i_1} \ldots, e_{i_n}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} D(e_1, \ldots, e_n) = \det A$$

Q.E.D.

Замечание: A и B подобные матрицы, то $\det A = \det B$.

Замечание: $\det \mathcal{A}$ <u>инвариант</u> линейного оператора, он не зависит от базиса.

Следствие 1: $\forall n$ - форма f на V:

$$\forall \xi_1, \ldots, \xi_n \in V : f(\mathcal{A}\xi_1 \ldots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, \ldots, e_n)$ базис V. $\mathcal{A} \overset{e}{\longleftrightarrow} A$. Это значит, что мы берем матрицу линейного оператора в данном базисе.

$$f(\mathcal{A}e_1 \ldots, \mathcal{A}e_n) \overset{\text{из доказательства теоремы}}{=} \det A f(e_1, \ldots, e_n)$$

На самом деле $\alpha = f(e_1 \ldots, e_n)$, поэтому:

$$\forall \xi_1, \ldots, \xi_n : g(\xi_1, \ldots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \ldots, \mathcal{A}\xi_n)$$

Заметим, что g - полилинейное, тк f полилин. и $\mathcal{A}$ - лин. отобр. Также g - антисим, тк f - антисим. Откуда g - n-форма. Заметим интересный факт:

$$g(e_1, \ldots, e_n) = f(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) = \det A \cdot f(e_1, \ldots, e_n)$$

Откуда:

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = g(e_1, \ldots, e_n) D(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \det A \cdot \alpha D(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \det A \cdot f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

Q.E.D.

Замечание: Мы можем вывести 9-ое свойство определителя по-другому. Пусть $\mathcal{A} = A_{n\times n}$ — линейный оператор умножения. $f = D$, $B_j \in K^n$. Тогда:

$$det(AB_1, \ldots, AB_N) = \det A \cdot \det B$$

Следствие 2: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V) \Rightarrow \det(\mathcal{AB}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$

Доказательство:

Пусть e - базис V. Тогда $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A, \mathcal{B} \xleftrightarrow{e} B$. Также $\mathcal{AB} \xleftrightarrow{e} AB$ по свойству. Откуда:

$$\det \mathcal{AB} = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Q.E.D.

Следствие 3: $\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Причем $\det \mathcal{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathcal{A}}$

Доказательство:

$$\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ \text{изоморфизм} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ def\mathcal{A} = \dim \mathcal{K}er\mathcal{A} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ rg\mathcal{A} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A, \det A \neq 0 \\ rgA = n \end{cases}$$

Мы знаем, что существует $\mathcal{A}^{-1}$. А также $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \varepsilon$. Откуда по свойству 3 получаем, что $\det \mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A}$.

Q.E.D.

Следствие 4: $\det(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = 1 = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1}$

Вспомним старое определение $trA = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ - *след матрицы.*

Теорема (о tr подобных матриц)

Если A и B подобны, то $trA = trB$.

Доказательство:

A и B подобны $\Leftrightarrow \exists C : B = C^{-1}AC$. Пусть $C^{-1} = S = (s_{ij})$. Откуда:

$$trB = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(AC)_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{ij} \cdot a_{jk} \cdot c_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \sum_{i=1}^{n} c_{ki}s_{ij}$$

Заметим, что $(CS)_{kj} = \delta_{kj}$, где $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$. Так что получаем, что

$$trB = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = trA$$

Q.E.D.

Следствие: $\forall \mathcal{A} \in End(V) \Rightarrow tr(A) = trA'$, где A и A' матрицы оператора $\mathcal{A}$ в базисе e и e' соответственно.

def: $\mathcal{A} \in End(V), tr\mathcal{A} = trA$ — **след оператора**.

Замечание: след оператора инвариантен из следствия выше.

def: Линейное подпространство $L \subset V$ называется **инвариантным** относительно линейного оператора $\mathcal{A} \in End(V)$, если $\forall v \in L, \mathcal{A}v \in L$.

Теорема 1:

$L \subset V$ - линейное подпространство. L - инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$. Тогда $\exists$ базис пр-ва V матрица, такой что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь *ступенчатый вид*, при этом размерность $A^1 = k \times k$, $k = \dim L$.

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

Доказательство:

$L = span(e_1, \dots, e_k)$ - базис L.

Дополним базис L до базиса V: $V = span(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$.

Запишем матрицу A по определению:

$$\forall e_i \in L : \mathcal{A}e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ji}e_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Откуда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} \end{pmatrix}$

Q.E.D.

Теорема 2:

$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантны отн. $\mathcal{A}$. $\Rightarrow \exists$ базис пр-ва V, такое что м-ца оператора $\mathcal{A}$ будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

Доказательство:

Пусть базис $V \overset{\text{по эквив. условию } \oplus}{=}$ объединение базисов L_i.

$$L_i = span(e_1^i, \dots, e_{k_i}^i), \dim L_i = k_i$$

Построим матрицу по определению. Не трудно заметить, что для каждого L_i из доказательства прошлой теоремы, все кроме соотв. строчек для L_i будет зануленно.

Q.E.D.

Замечание: $A_i \leftrightarrow A|_{L_i} \in End(L_i)$.

Теорема 3.

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантны отн $\mathcal{A} \Rightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\mathcal{A}|_{L_i}$, где $\mathcal{A}|_{L_i} \in L(L_i, V)$

Доказательство:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i \xLeftrightarrow{\text{из т. об экв. опр. прямой суммы}} \forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^{m} v_i, v_i \in L_i$$

$$\forall v \in V : \operatorname{Im}\mathcal{A} \ni \mathcal{A}v = \mathcal{A}\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}v_i \in \operatorname{Im} A|_{L_i}$$

Тогда всё, что нам осталось проверить это то, что наши пространства дизъюнкты. Но, если присмотреться к тому, что у нас написано, то у нас для любого вектора из $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ существует лишь одно разложение через $\operatorname{Im} A|_{L_i}$, что соответствует эквивалентному определению прямой суммы.

Q.E.D.

1.4 Собственные числа и собственные векторы лин. оператора

$\lambda \in K$ называется **собственным числом** $\mathcal{A} \in End(V)$, если $\exists v \in V, v \neq 0$. $\mathcal{A}v = \lambda v$. Такой v называют **собственным вектором** собственного числа λ.

$$\lambda \in K : \begin{cases} \mathcal{A}v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda\varepsilon)v = 0 \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon) \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow v$ собственный вектор собственного числа λ.

$V_\lambda = \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon)$ — **собственное подпространство** $\mathcal{A}$ соответств. с.ч. λ. Это мн-во всех с.в. V, отвечающим с.ч. λ и нулевой вектор.

$\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$ — **геометрическая кратность**.

Свойства:

1. V_λ инвариантно относительно $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$.
2. V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A}$.
3. $\gamma(\lambda)$ инвариант относительно базиса.

Условие существования с.ч.:
$\lambda \in K_{\mathcal{A}}$ - с.ч., v - с.в. $\Leftrightarrow \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon)$ нетривиально $\Leftrightarrow def(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow rg(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq n \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = 0$

Тк определитель линейного оператора инвариантен, то:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

def: $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$ - **характеристический многочлен** оператора $\mathcal{A}$.

Т.к. det оператора инвариантен $\chi(t) = \det(A - tE)$, где A - матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot t^n + (-1)^{n-1}(trAt^{n-1}) + \ldots + \det A$$

По теореме Виета: $\begin{cases} t_1 + \ldots + t_n = trA \\ t_1 \cdot \ldots \cdot t_n = \det A \end{cases}$ Заметим, что λ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in K \\ \chi(\lambda) = 0 \text{ - корень хар. мн.} \end{cases}$

Замечание. Если все корни хар. мн. $\in K \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = trA \\ \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A \end{cases}$

def: **Спектром** оператора $\mathcal{A}$ называется множество $\{(\lambda,\, \alpha(\lambda))\}$, $\alpha(\lambda)$ - кратность λ лин. оператора в хар. уравнении (*алгебраическая кратность*). Спектр это множество пар.

def: **Простой спектр** — все кратности - единички.

Теорема 1:

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$. $\forall \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} : 1 \le \gamma(\lambda) \le \alpha(\lambda)$

Доказательство:

λ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = V_\lambda$ не тривиально $\Leftrightarrow \gamma_1 = \dim V_\lambda \ge 1$.

Пусть $\dim V_\lambda = \gamma$, V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow$ по т-ме 1 об инв. подпр. существует V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ будет иметь ступенчатый вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

$$\dim A^1 = \gamma \times \gamma, V = span(e_1, \ldots, e_\gamma, e_{\gamma+1}, \ldots, e_\gamma)$$

При построении матрицы оператора $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}e_i = \lambda e_i \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ - λ - на i-ой строчке. Немного распишем:

$$\chi(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} A^1 - tE_{\gamma\times\gamma} & * \\ \mathbb{O} & A^2 - tE_{(n-\gamma)\times(n-\gamma))} \end{vmatrix} \overset{\text{по 6-ому св-ву опр}}{=}$$

$$= |A^1 - tE||A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \cdot \chi_{A^2}(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A_2}(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda$ корень $\chi(t)$, причем кратность $\geq \gamma$, т.к λ может оказаться корнем χ_{A^2}

Q.E.D.

Теорема 2:

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ попарно различные с.ч $\mathcal{A}$, $v_1, \ldots, v_n$ соответ. с.в.

$\Rightarrow v_1, \ldots, v_n$ — лин. независимы.

Доказательство:

Докажем по индукции:

База $m = 1 : \lambda_1, v_1 \Rightarrow$ лин. незав.

ИП: Пусть верно для m, докажем для $m+1$:

От противного: Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ попарно различные собственные числа.

$v_1, \ldots, v_m$ - линейно независимы по ИП. $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ - линейно зависимы. Откуда: $v_{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$. С одной стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \lambda_{m+1}v_{m+1} = \lambda_{m+1}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$$

С другой стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \mathcal{A}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{A} v_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_{m+1} - \lambda_i) a_i v_i = 0$$

Но мы знаем, что $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы. Откуда эта линейная комбинация тривиальна, но с другой стороны, она такой быть не может, потому что $\exists \alpha_i \neq 0$, для которого v_i не равен нулю, а так же, исходя из того что искомые с.ч. попарно различны, то $v_{m+1} - v_i \neq 0$. Откуда комбинация нетривиальна.

Противоречие.

Q.E.D.

Следствие: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$, т.е V_{λ_i} дизъюнктны.

Доказательстсво:

$$\mathbb{O} = v_1 + \ldots + v_m, v_i \in V_{\lambda_i}$$

Если в сумме какой-то из векторов не нулевой, то это собственный вектор, а собственные вектора для различных с.ч. линейно независимы. Противоречие. Откуда все вектора в сумме нулевые, откуда подпространства дизъюнктны.

Q.E.D.

Теорема 3:

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$

$\Rightarrow \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = \prod\limits_{i=1}^{m} \chi_{\mathcal{A}_i}(t)$.

Доказательство:

Смотрим теорему 3 об инв. подпр. Матрица A - блочно-диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

Тогда $\chi(t) = \det(A - tE) \overset{\text{по 6-ому свойству опр.}}{=} \prod\limits_{i=1}^{m} \det(A^i - tE) = \prod\limits_{i=1}^{m} \chi_{A_i}(t)$

Q.E.D.

1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.

$\mathcal{A} \in End(V)$ называется **оператором простой структуры** (о.п.с), если $\exists$ базис пространства V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет диаг. вид.

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что в таком случае собственные числа оператора $\mathcal{A}$ будут λ_i, а так же собственные вектора этих чисел - соотв. столбики (легко проверить умножением). Отсюда все корни характ. многочлена $\chi \in K \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$.

Теорема:

$\forall A \in End(V)$, если $\sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n$, то тогда:

$$\mathcal{A} \text{ - о.п.с} \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ - с.ч } : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Доказательство:

$\sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(n) = n \Leftrightarrow$ все корни $\chi \in K$, откуда $\mathcal{A}$ - о.п.с.

$\mathcal{A}$ о.п.с. $\Leftrightarrow \exists$ базис V такой, что матрица диагональна $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda-\text{с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \sum_{\lambda-\text{с.ч.}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Q.E.D.

Следствие. Если все корни характ. многочлена $\in K$, а также все $\alpha(\lambda) = 1$ (спектр простой), то $\mathcal{A}$ - о.п.с.

def: $A_{n\times n}$ называется **диагонализируемой**, если она подобна диагональной.

Теорема (критерий диагональности матрицы A)

~~это перепишетмя~~

A подобна диагональной $\Leftrightarrow$ матрица о.п.с $\mathcal{A}$ в нек. базисе

Доказательство:

- $\boxed{\Rightarrow}$

  Пусть A - диагонализируемая $\Leftrightarrow$ подобна диагональной $\Leftrightarrow \exists$ невырожд T: $T^{-1}AT = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. V - линейное пространство над полем K. $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V.

  Пусть A - матрица в базисе e. Тогда $Ae_j = \sum\limits_{i=1}^{n} = a_{ij}e_i.v = (v_1, \dots, v_n)$ - базис.

  Откуда $v_1, \dots, v_n = (e_1, \dots, e_n)T_{e\to v} \Rightarrow \mathcal{A} \overset{v}{\leftrightarrow} A' = T^{-1}AT = \Lambda$

- $\boxed{\Leftarrow}$ $\mathcal{A}$ о.п.с, A - матрица в некотором базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$. Возьму $v_1, ..., v_n$ - базис V, где v_i - собственный вектор $\mathcal{A}$. Заметим, что так как $\mathcal{A}$ о.п.с, то такой базис существует

  Теперь давайте возьмем матрицу перехода из $T_{e\to v}$. Тогда $\mathcal{A} \overset{v}{\leftrightarrow} A' = T^{-1}AT = \Lambda \Rightarrow A$ подобна диагональной

Q.E.D.

Алгоритм поиска диагонального представления матрицы подобной диагональной:

1. найти спектр: если все корни $\chi \in K$, переходим к п2.
2. найти все $\gamma(\lambda)$, если $\forall\lambda$ с.ч $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, то перейти к п3.
3. $T_{\text{кан.}\to v} = (v_1, \dots, v_n)$ $T^{-1}AT = \Lambda$

2 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Не сдавайтесь, изучая лин. ал. Это реально! Upd: 13.02 слава устал