# Линейная алгебра

Чепелин Вячеслав

## Содержание

**1 Линейные отображения.** **2**
1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений . . . . 2
1.2 Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
1.3 Инварианты линейного отображения. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
1.4 Собственные числа и собственные векторы лин. оператора . . . . . . . . . . . . 11
1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
1.6 Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона . . . 23
1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство. . . . . . . . . . . 26
1.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
1.10 Жорданова форма матрицы. Формула Фраббениуса. . . . . . . . . . . . . . . . . 37
1.11 Функция оператора матрицы, приводимой к Жордановой форме. . . . . . . . . . 43

**2 Тензоры.** **46**
2.1 Линейные формы (функционалы). Сопряженное (дуальное) пространство. Контрвариантный и ковариантный законы преобразования координат. . . . . . . . . . . 46
2.2 Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица тензоров. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
2.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Свертка тензоров. . . . . . 54

**3 Информация о курсе** **58**

# 1 Линейные отображения.

## 1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений

**def:** $U, V$ - линейные пространства над одним полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$\mathcal{A} : U \to V$ называется **линейным гомоморфизмом**, если:

$$\forall \lambda \in K, \forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$$

**Замечание 1:** Мы будем писать $\mathcal{A}u$, вместо $\mathcal{A}(u)$.

**Замечание 2:** $\mathcal{A}u, \mathcal{B}u$ это какие-то числа, поэтому мы можем складывать их и умножать на скаляр.

**Замечание 3:** $\mathcal{A}\mathbb{O}_U = \mathbb{O}_V$, частный случай $\lambda = 0$

**Примеры:**

1. $\mathbb{O}$: это нулевое отображения $\forall u \in U : \mathbb{O}u = 0$
2. $P_n$ - пространство многочленов степени $\leq n$. $\mathcal{A} = \dfrac{d}{dx}$ — дифференцирование.
3. $\varepsilon$ — тождественное отображение. $\varepsilon : U \to U : \forall u \in U : \varepsilon u = u$.

**Введем операции:**

1. $\lambda \in K : \mathcal{A}$ — линейное отображение. Введем операцию умножения:
$$\forall u \in U : (\lambda \mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u)$$
2. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные отображение. Введем операцию сложения:
$$\forall u \in U : (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$
3. $\mathcal{B} \in L(U, W)$, $\mathcal{A} \in (L(W, V)$. Введем операцию произведения:
$$\forall u \in U : (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{v \in V : v = \mathcal{A}u | \forall u \in U\}$ — **образ линейного пространства.**

**Замечание:** $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — линейное подпространство.

$\mathcal{K}er\mathcal{A} = \{u \in U | \mathcal{A}u = \mathbb{O}\}$ — **ядро линейного отображения**.

$rg\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ — **ранг отображения**

$def\mathcal{A} = \dim \mathcal{K}er\mathcal{A}$ — **дефект отображения.**

**Виды отображений:**

- сюръекция, если $\operatorname{Im}\mathcal{A} = V \Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V$.
- инъекция, если $\mathcal{K}erA = \{\mathbb{O}_U\} \Leftrightarrow defA = 0$.
- биекция или изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{Im}\mathcal{A} = V \\ \mathcal{K}er\mathcal{A} = \{\mathbb{O}_U\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rg\mathcal{A} = \dim V \\ def\mathcal{A} = 0\end{cases}$
- *эндоморфизмом* или линейным оператором, когда $U = V$.

  $\mathcal{A} \in End(V) = End_K(v)$
- *автоморфизм* это биекция + эндоморфизм.

  $\mathcal{A} \in Aut(V) = Aut_K(v)$

**Примеры:**

1. $P_n$ — пространство многочленов степени не больше n. $\mathcal{A} = \dfrac{d}{dt}\ \mathcal{A} : P_n \to P_n$. не инъекция, не сюръекция, не изоморофизм, эндоморфизм и не автоморфизм
2. $U = K^n, V = K^m$, $A = (a_{ij})_{m\times n}, a_{ij} \in K$, $\forall u \in U : \mathcal{A}u = A \cdot u$.

   $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \left\{ y \in K^m \ \begin{matrix} y = \mathcal{A}x \\ \forall x \in K^n \end{matrix} \right\} = span(A_1, \ldots, A_n)$ — *образ матрицы.*

   $y = A \cdot x = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i$

   Давайте более подробно рассмотрим *отображения*:

   1. сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V = m$.

      $\mathcal{K}er\mathcal{A} = \{x \in K^n : Ax = \mathbb{O}\}$ — общее решение СЛОУ, *ядро матрицы.*

      $\dim \mathcal{K}er\mathcal{A} = \dim$ общего решения $= n - rgA$.

      $def\mathcal{A} = n - rgA$ — *дефект матрицы.*
   2. инъекция $\Leftrightarrow defA = 0 \Leftrightarrow n - rgA = 0 \Leftrightarrow rgA = n$.
   3. биекция $\Leftrightarrow \begin{cases} rgA = n \\ rgA = m \end{cases} \Leftrightarrow n = m$.
   4. эндоморфизм $\Leftrightarrow n = m \Leftrightarrow A_{n\times n}$.
   5. автоморфизм $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n, A_{n\times n} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$.

**Свойства произведения:**

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — изоморф. $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ — изоморфно.
2. $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$.
3. $\forall \lambda \in K : \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$.
4. $\mathcal{C} \in L(\Omega, U) : \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

Ассоциативная унитальная алгебра.

**Замечание 1.** Если $\mathcal{A} \in L(U, V)$ — изоморфно $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ — взаимно обр. отображение.

**Замечание 2.** Если $\mathcal{A} \in End(V)$, а также изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ — обратный лин. оператор к $\mathcal{A}$.

**def:** $U_0 \subset U$ - линейное подпространство. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \to V$ сужение лин. отобр. на лин подпространство.

$\forall u \in U_0 : \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$.

Если $\mathcal{A}$ — изоморфизм, то тогда его сужение на $U_0$ будет линейным отображением между $U_0$ и $\operatorname{Im} \mathcal{A}_0$. И это будет тоже изоморфизм.

**Теорема (о ранге и дефекте линейного отображения)**

$\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$. Доказать $\dim U = def \mathcal{A} + rg \mathcal{A}$.

**Доказательство:**

Пусть $U_0 = \mathcal{K}er \subset U$. Пусть $U_1 \subset U$, такое, что $U_0 \oplus U_1 = U$ — прямое дополнение. Возьму $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} \in L(U_1, \operatorname{Im} \mathcal{A}_1)$.

$\forall u \in U : \exists! u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in U_0$, $u_1 \in U_1$, по т. об определении прямой суммы. Тогда получаем, что:

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$$

Откуда $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$, $rg\mathcal{A} = rg\mathcal{A}_1$.

$\mathcal{K}er\mathcal{A}_1 \subset U_1$, а также $\mathcal{K}er\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{K}er\mathcal{A} = U_0 \Rightarrow \mathcal{K}er\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{O}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1$ — инъективна $\Rightarrow \mathcal{A}_1$ изоморфно. Откуда получаем:

$$\dim U = \dim U_1 + \dim U_0 = rg\mathcal{A} + def\mathcal{A}$$

Q.E.D.

**Следствие.** (характеристика автоморфизма)

Если $\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow rg\mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$ — условие обратимости линейного оператора.

## 1.2 Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

Пусть есть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ базис $U$, а также $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ базис $V$.

$$u \in U \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^n;\ v \in V \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\forall u \in U, v = \mathcal{A}u, : v = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{A}\xi_i$$

То есть $\operatorname{Im}\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \ldots, \mathcal{A}\xi_n)$

$rg\mathcal{A} = rg(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \ldots, \mathcal{A}\xi_n)$.

Теперь заметим, что $\mathcal{A}\xi_i \in V$, откуда:

$$A\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \xleftrightarrow{\text{коорд. изоморфизм}} A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m$$

Назовем $A = (A_1, \ldots, A_n) = (a_{ij})_{m\times n}$ — **матрицей линейного отображения** $\mathcal{A}$ на базисах $\xi, \eta$.

**Замечание.** Т.к. здесь координатный изоморфизм, то:

$$rg\mathcal{A} = rg(\mathcal{A}\xi_1, \ldots, \mathcal{A}\xi_n) = rg(A_1, \ldots, A_n) = rgA.$$

**def:** $\mathcal{A} \in End(V) : \mathcal{A} : V \to V$ — **лин. оператор**.

Зафиксируем здесь один базис $e = e_1, \ldots, e_n$. Получу:

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \ldots, e_n)\mathcal{A}$$

Тогда $A_{n\times n}$ — **матрица линейного оператора**.

Заметим, что теперь мы умеем:

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A \in M_{m\times n}$$

**Утв.** $L(U, V) \cong M_{m\times n}$ **координатный изоморфизм линейных отображений**

**Доказательство:**

У нас есть взаимно однозначное соответствие. Проверим линейность:

$\forall\lambda \in K : \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \xleftrightarrow{\text{проверить}} A + \lambda B$.

$$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \cdot \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j + \lambda\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(a_{ji} + \lambda b_{ji}) \cdot \eta_j$$

А откуда уже видно нужное нам соответствие. Q.E.D.

**Утв.** $\mathcal{A} \in L(W, V), \mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{A}\mathcal{B} \in L(U, V)$. Пусть $w$ - базис $W$, $\eta$ - базис $V$, $\xi$ - базис $U$. Тогда $\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$ в базисах $(\xi, \eta)$

**Доказательство:**

$$\mathcal{A}\mathcal{B}\xi_i = \mathcal{A}(\mathcal{B}\xi_i) = \mathcal{A}(\sum_{k=1}^{p} b_{ki}w_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathcal{A}(w_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{kj})\eta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (AB)_{ji} \cdot \eta_j$$

Q.E.D.

**Следствие:** $\mathcal{A} \in L(U, V)$ - изоморфизм, $A$ - матр в $\xi, \eta \Rightarrow A^{-1}$ - матр в $(\eta, \xi)$.

**Доказательство:**

$$A \cdot A^{-1} = \varepsilon_V, \quad A^{-1} \cdot A = \varepsilon_U$$

$$AX = E_\eta, \quad XA = E_\xi$$

В силу того, что $\mathcal{A}$ — изоморфизм:

$$\dim U = \dim V = n, \quad rgA = n \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

$$X = A^{-1}$$

Q.E.D.

**Утверждение:** Пусть $\mathcal{A} \in L(U_\varepsilon, V_\eta), v = \mathcal{A}u$. Тогда $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$, где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — координатные столбцы $v$ и $u$ соответственно.

**Доказательство:** С одной стороны, $v$ можно разложить по базису $V$:

$$v = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{v}_j \eta_j$$

С другой стороны, $v$ представим как результат отображения:

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{u}_i)\eta_j \Rightarrow \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{u}_i$$

. Откуда получаем искомое: $v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u}$. Последнее равенство называется *координатной формой записи действия линейного отображения.*

Q.E.D.

**Теорема (формула замены матрицы лин. отобр. при замене базиса)**

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

$\xi, \xi'$ базисы $U$, а $\eta, \eta'$ базисы $V$. Хотим поменять базисы на штрихованные и получить новую матрицу. Тогда ее можно получить так:

$$A' = T_{\eta \to \eta'}^{-1} A T_{\xi \to \xi'}$$

**Доказательство:**

$$\begin{tikzcd}
U_\xi \arrow[r, "\mathcal{A}"] & V_\eta \arrow[d, "\mathcal{C}"] \\
U_{\xi'} \arrow[u, "\mathcal{B}"] \arrow[r, "\mathcal{A}'"] & V_{\eta'}
\end{tikzcd}$$

Воспользуемся данным рисунком, чтобы понять происходящее. Мы хотим найти матрицу $\mathcal{A}'$. Для этого, заметим, что преобразование $\mathcal{A}'$, это преобразование $\mathcal{B}$, потом примененное к нему преобразование $\mathcal{A}$, а после этого применненое к нему преобразование $\mathcal{C}$. То есть:

$$\mathcal{A}' = \mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B}$$

Заметим, что матрица $\mathcal{B}$, это матрица перехода из $\xi$ в $\xi'$. Это так потому что у нас просто меняется базис (про саму матрицу перехода см. одноименный раздел). Матрица $\mathcal{C}$, это $T_{\eta' \to \eta}$. Откуда, исходя из двух утверждений сверху:

$$A' = T_{\eta' \to \eta} A T_{\xi \to \xi'} \Rightarrow A' = T_{\eta \to \eta'}^{-1} A T_{\xi \to \xi'}$$

Q.E.D.

**Следствие:** $A \in End(V)$. $e, e'$ базисы V. $A' = T^{-1}AT$, где $T = T_{e \to e'}$.

**def:** квадратные матрицы $A$ и $B$ называются подобными, если $\exists$ невырожденная матрица $C$, такая, что: $B = C^{-1}AC$.

**Замечание:** матрицы линейного оператора в разных базисах подобны (см. следствие выше).

## 1.3 Инварианты линейного отображения.

**Инвариатность** называется некоторое свойство объекта, которое не меняется при определенных действиях и преобразованиях.

$\mathcal{A}$ - линейное отображение. Ранг и дефект инварианты относительно выбора базиса.

Пусть $\mathcal{A} \in End(V)$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис $v$.

Как мы знаем, $\exists! D$ n-форма, такая что $D(e_1, \ldots e_n) = 1$. Тогда **определитель линейного оператора**:

$$\det \mathcal{A} := det(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) = D(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$$

**Замечание:** $\det \mathcal{A} = D(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}_n) = D(Ae_1, \ldots, A_n) = \det A$ — определение определителя линейного оператора и матрицы соотносятся.

**Теорема:**

$\forall \mathcal{A} \in End(V), \det \mathcal{A} = \det A$.

**Доказательство:**

Возьмем $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис $V$. Тогда:

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A = (a_{ij})_{n\times n}$$

$$\det \mathcal{A} = D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = D(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}e_{i_n}) =$$

$$\xLeftrightarrow{\text{тк } D \text{ - } n \text{ форма}} \det \mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} D(e_{i_1} \dots, e_{i_n}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} D(e_1, \dots, e_n) = \det A$$

Q.E.D.

**Замечание:** $A$ и $B$ подобные матрицы, то $\det A = \det B$.

**Замечание:** $\det \mathcal{A}$ инвариант линейного оператора, он не зависит от базиса.

**Следствие 1:** $\forall n$ - форма $f$ на $V$:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V : f(\mathcal{A}\xi_1 \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

**Доказательство:**

Возьмем $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис $V$. $\mathcal{A} \overset{e}{\leftrightarrow} A$. Это значит, что мы берем матрицу линейного оператора в данном базисе.

$$f(\mathcal{A}e_1 \dots, \mathcal{A}e_n) \overset{\text{из доказательства теоремы}}{=} \det A f(e_1, \dots, e_n)$$

На самом деле $\alpha = f(e_1 \dots, e_n)$, поэтому:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n : g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

Заметим, что $g$ - полилинейное, тк $f$ полилин. и $\mathcal{A}$ - лин. отобр. Также $g$ - антисим, тк $f$ - антисим. Откуда $g$ - $n$-форма. Заметим интересный факт:

$$g(e_1, \dots, e_n) = f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det A \cdot f(e_1, \dots, e_n)$$

Откуда:

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n)D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot \alpha D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Q.E.D.

**Замечание:** Мы можем вывести 9-ое свойство определителя по-другому. Пусть $\mathcal{A} = A_{n\times n}$ — линейный оператор умножения. $f = D$, $B_j \in K^n$. Тогда:

$$det(AB_1, \dots, AB_N) = \det A \cdot \det B$$

**Следствие 2:** $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$

**Доказательство:**

Пусть $e$ - базис $V$. Тогда $\mathcal{A} \overset{e}{\leftrightarrow} A, \mathcal{B} \overset{e}{\leftrightarrow} B$. Также $\mathcal{AB} \overset{e}{\leftrightarrow} AB$ по свойству. Откуда:

$$\det \mathcal{AB} = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Q.E.D.

**Следствие 3:** $\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Причем $\det \mathcal{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathcal{A}}$

**Доказательство:**

$$\mathcal{A} \in Aut(V) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ \text{изоморфизм} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ def\mathcal{A} = \dim \mathcal{K}er\mathcal{A} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in End(V) \\ rg\mathcal{A} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \overset{e}{\leftrightarrow} A, \det A \neq 0 \\ rgA = n \end{cases}$$

Мы знаем, что существует $\mathcal{A}^{-1}$. А также $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \varepsilon$. Откуда по свойству 3 получаем, что $\det \mathcal{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathcal{A}}$

Q.E.D.

**Следствие 4:** $\det(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = 1 = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1}$

Вспомним старое определение $trA = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ - *след матрицы.*

**<u>Теорема (о tr подобных матриц)</u>**

Если $A$ и $B$ подобны, то $trA = trB$.

**Доказательство:**

$A$ и $B$ подобны $\Leftrightarrow \exists C : B = C^{-1}AC$. Пусть $C^{-1} = S = (s_{ij})$. Откуда:

$$trB = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(AC)_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{ij} \cdot a_{jk} \cdot c_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \sum_{i=1}^{n} c_{ki}s_{ij}$$

Заметим, что $(CS)_{kj} = \delta_{kj}$, где $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$. Так что получаем, что

$$trB = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = trA$$

Q.E.D.

**Следствие:** $\forall \mathcal{A} \in End(V) \Rightarrow tr(A) = trA'$, где $A$ и $A'$ матрицы оператора $\mathcal{A}$ в базисе $e$ и $e'$ соответственно.

**<u>def:</u>** $\mathcal{A} \in End(V), tr\mathcal{A} = trA$ — **<u>след оператора</u>**.

**Замечание:** след оператора инвариантен из следствия выше.

**def:** Линейное подпространство $L \subset V$ называется **инвариантным** относительно линейного оператора $\mathcal{A} \in End(V)$, если $\forall v \in L, \mathcal{A}v \in L$.

**Теорема 1:**

$L \subset V$ - линейное подпространство. $L$ - инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$. Тогда $\exists$ базис пр-ва $V$ матрица, такой что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь *ступенчатый вид*, при этом размерность $A^1 = k \times k$, $k = \dim L$.

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

**Доказательство:**

$L = span(e_1, \ldots, e_k)$ - базис $L$.

Дополним базис $L$ до базиса $V$: $V = span(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$.

Запишем матрицу $A$ по определению:

$$\forall e_i \in L : \mathcal{A}e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ji}e_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Откуда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & * & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{k1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{k1} \end{pmatrix}$

Q.E.D.

**Теорема 2:**

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, $L_i$ инвариантны отн. $\mathcal{A}$. $\Rightarrow \exists$ базис пр-ва $V$, такое что м-ца оператора $\mathcal{A}$ будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A^1 & \ldots & \ldots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \ldots & \ldots & A^n \end{pmatrix}$$

**Доказательство:**

Пусть базис $V \overset{\text{по эквив. условию } \oplus}{=}$ объединение базисов $L_i$.

$$L_i = span(e_1^i, \ldots, e_{k_i}^i), \dim L_i = k_i$$

Построим матрицу по определению. Не трудно заметить, что для каждого $L_i$ из доказательства прошлой теоремы, все кроме соотв. строчек для $L_i$ будет зануленно.

Q.E.D.

**Замечание:** $A_i \leftrightarrow A|_{L_i} \in End(L_i)$.

**Теорема 3.**

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, $L_i$ инвариантны отн $\mathcal{A} \Rightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\mathcal{A}|_{L_i}$, где $\mathcal{A}|_{L_i} \in L(L_i, V)$

**Доказательство:**

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i \xLeftrightarrow{\text{из т. об экв. опр. прямой суммы}} \forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^{m} v_i, v_i \in L_i$$

$$\forall v \in V : \operatorname{Im}\mathcal{A} \ni \mathcal{A}v = \mathcal{A}\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}v_i \in \operatorname{Im} A|_{L_i}$$

Тогда всё, что нам осталось проверить это то, что наши пространства дизъюнкты. Но, если присмотреться к тому, что у нас написано, то у нас для любого вектора из $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ существует лишь одно разложение через $\operatorname{Im} A|_{L_i}$, что соответствует эквивалентному определению прямой суммы.

Q.E.D.

## 1.4 Собственные числа и собственные векторы лин. оператора

$\lambda \in K$ называется **собственным числом** $\mathcal{A} \in End(V)$, если $\exists v \in V, v \neq 0$. $\mathcal{A}v = \lambda v$. Такой $v$ называют **собственным вектором** собственного числа $\lambda$.

$$\lambda \in K : \begin{cases} \mathcal{A}v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda\varepsilon)v = 0 \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon) \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $v$ собственный вектор собственного числа $\lambda$.

$V_\lambda = \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon)$ — **собственное подпространство** $\mathcal{A}$ соответств. с.ч. $\lambda$. Это мн-во всех с.в. $V$, отвечающим с.ч. $\lambda$ и нулевой вектор.

$\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$ — **геометрическая кратность**.

**Свойства:**

1. $V_\lambda$ инвариантно относительно $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$.
2. $V_\lambda$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$.
3. $\gamma(\lambda)$ инвариант относительно базиса.

**Условие существования с.ч.:**
$\lambda \in K_{\mathcal{A}}$ - с.ч., $v$ - с.в. $\Leftrightarrow \mathcal{K}er(A - \lambda\varepsilon)$ нетривиально $\Leftrightarrow def(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow rg(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq n \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = 0$

Тк определитель линейного оператора инвариантен, то:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

**def:** $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$ - **характеристический многочлен** оператора $\mathcal{A}$.

Т.к. det оператора инвариантен $\chi(t) = \det(A - tE)$, где $A$ - матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot t^n + (-1)^{n-1}(trAt^{n-1}) + \ldots + \det A$$

По теореме Виета: $\begin{cases} t_1 + \ldots + t_n = trA \\ t_1 \cdot \ldots \cdot t_n = \det A \end{cases}$ Заметим, что $\lambda$ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in K \\ \chi(\lambda) = 0 \text{ - корень хар. мн.} \end{cases}$

**Замечание.** Если все корни хар. мн. $\in K \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = trA \\ \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A \end{cases}$

**def:** **Спектром** оператора $\mathcal{A}$ называется множество $\{(\lambda,\, \alpha(\lambda))\}$, $\alpha(\lambda)$ - кратность $\lambda$ лин. оператора в хар. уравнении (*алгебраическая кратность*). Спектр это множество пар.

**def:** **Простой спектр** — все кратности - единички.

**Теорема 1:**

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$. $\forall \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} : 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

**Доказательство:**

$\lambda$ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = V_\lambda$ не тривиально $\Leftrightarrow \gamma_1 = \dim V_\lambda \geq 1$.

Пусть $\dim V_\lambda = \gamma$, $V_\lambda$ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow$ по т-ме 1 об инв. подпр. существует $V$ такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ будет иметь ступенчатый вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

$$\dim A^1 = \gamma \times \gamma, V = span(e_1, \ldots, e_\gamma, e_{\gamma+1}, \ldots, e_\gamma)$$

При построении матрицы оператора $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}e_i = \lambda e_i \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ - $\lambda$ - на $i$-ой строчке. Немного распишем:

$$\chi(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} A^1 - tE_{\gamma\times\gamma} & * \\ \mathbb{O} & A^2 - tE_{(n-\gamma)\times(n-\gamma))} \end{vmatrix} \overset{\text{по 6-ому св-ву опр}}{=}$$

$$= |A^1 - tE||A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \cdot \chi_{A^2}(t) = (\lambda - t)^{\gamma}\chi_{A_2}(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda$ корень $\chi(t)$, причем кратность $\geq \gamma$, т.к $\lambda$ может оказаться корнем $\chi_{A^2}$

Q.E.D.

**Теорема 2:**

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ попарно различные с.ч $\mathcal{A}$, $v_1, \ldots, v_n$ соответ. с.в.

$\Rightarrow v_1, \ldots, v_n$ — лин. независимы.

**Доказательство:**

Докажем по индукции:

**База** $m = 1 : \lambda_1, v_1 \Rightarrow$ лин. незав.

**ИП**: Пусть верно для $m$, докажем для $m+1$:

От противного: Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ попарно различные собственные числа.

$v_1, \ldots, v_m$ - линейно независимы по ИП. $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ - линейно зависимы. Откуда: $v_{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$. С одной стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \lambda_{m+1}v_{m+1} = \lambda_{m+1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i$$

С другой стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \mathcal{A}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i \mathcal{A}v_i = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda_i v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_{m+1} - \lambda_i)a_i v_i = 0$$

Но мы знаем, что $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы. Откуда эта линейная комбинация тривиальна, но с другой стороны, она такой быть не может, потому что $\exists \alpha_i \neq 0$, для которого $v_i$ не равен нулю, а так же, исходя из того что искомые с.ч. попарно различны, то $v_{m+1} - v_i \neq 0$. Откуда комбинация нетривиальна.

Противоречие.

Q.E.D.

**Следствие:** $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$, т.е $V_{\lambda_i}$ дизъюнктны.

**Доказательстсво:**

$$\mathbb{O} = v_1 + \ldots + v_m, v_i \in V_{\lambda_i}$$

Если в сумме какой-то из векторов ненулевой, то это собственный вектор, а собственные вектора для различных с.ч. линейно независимы. Противоречие. Откуда все вектора в сумме нулевые, откуда подпространства дизъюнктны.

Q.E.D.

**Теорема 3:**

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, $L_i$ инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$

$\Rightarrow \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = \prod\limits_{i=1}^{m} \chi_{\mathcal{A}_i}(t)$.

**Доказательство:**

Смотрим теорему 3 об инв. подпр. Матрица A - блочно-диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

Тогда $\chi(t) = \det(A - tE) \overset{\text{по 6-ому свойству опр.}}{=} \prod\limits_{i=1}^{m} \det(A^i - tE) = \prod\limits_{i=1}^{m} \chi_{A_i}(t)$

Q.E.D.

## 1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.

$\mathcal{A} \in End(V)$ называется **оператором простой структуры** (о.п.с), если $\exists$ базис пространства $V$ такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет диаг. вид.

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что в таком случае собственные числа оператора $\mathcal{A}$ будут $\lambda_i$, а так же собственные вектора этих чисел - соотв. столбики (легко проверить умножением). Отсюда все корни характ. многочлена $\chi \in K \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$.

**Теорема:**

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$, если $\sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n$, то тогда:

$$\mathcal{A} \text{ - о.п.с} \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ - с.ч } : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

**Доказательство:**

$\sum\limits_{\lambda\text{-с.ч.}\mathcal{A}} \alpha(n) = n \Leftrightarrow$ все корни $\chi \in K$, откуда $\mathcal{A}$ - о.п.с.

$\mathcal{A}$ о.п.с. $\Leftrightarrow \exists$ базис $V$ такой, что матрица диагональна $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda-\text{с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \sum_{\lambda-\text{с.ч.}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Q.E.D.

**Следствие.** Если все корни характ. многочлена $\in K$, а также все $\alpha(\lambda) = 1$ (спектр простой), то $\mathcal{A}$ - о.п.с.

**def:** $A_{n\times n}$ называется **диагонализируемой**, если она подобна диагональной.

**Теорема (критерий диагональности матрицы $A$)**

~~это перепишется~~

$A$ подобна диагональной $\Leftrightarrow$ матрица о.п.с $\mathcal{A}$ в нек. базисе

**Доказательство:**

- $\boxed{\Rightarrow}$

  Пусть $A$ - диагонализируемая $\Leftrightarrow$ подобна диагональной $\Leftrightarrow \exists$ невырожд T: $T^{-1}AT = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. $V$ - линейное пространство над полем $K$. $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V.

  Пусть $A$ - матрица в базисе $e$. Тогда $Ae_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i . v = (v_1, \dots, v_n)$ - базис.

  Откуда $v_1, \dots, v_n = (e_1, \dots, e_n)T_{e\to v} \Rightarrow \mathcal{A} \overset{v}{\leftrightarrow} A' = T^{-1}AT = \Lambda$

- $\boxed{\Leftarrow}$ $\mathcal{A}$ о.п.с, $A$ - матрица в некотором базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$. Возьму $v_1, ..., v_n$ - базис V, где $v_i$ - собственный вектор $\mathcal{A}$. Заметим, что так как $\mathcal{A}$ о.п.с, то такой базис существует

  Теперь давайте возьмем матрицу перехода из $T_{e\to v}$. Тогда $\mathcal{A} \overset{v}{\leftrightarrow} A' = T^{-1}AT = \Lambda \Rightarrow A$ подобна диагональной

Q.E.D.

**Алгоритм поиска диагонального представления матрицы подобной диагональной:**

1. найти спектр: если все корни $\chi \in K$, переходим к п2.
2. найти все $\gamma(\lambda)$, если $\forall \lambda$ с.ч $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, то перейти к п3.
3. $T_{\text{кан.}\to v} = (v_1, \dots, v_n)$ $T^{-1}AT = \Lambda$

**def:** $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$. По теореме об равносильных условиях прямой суммы:

$\forall v \in V : \exists! v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i,$ где $v_i \in L_i$. Возьму $P_i \in End(V)$, такие, что $P_i \cdot v = v_i \in L_i$.
Тогда такие $P_i$ назовем **операторами проектирования** на подпр-во $L_i$.

**Свойства операторов проектировния:**

1. $\operatorname{Im} P_i = L_i, \quad \mathcal{K}er P_i = \bigoplus\limits_{j\neq i} L_j$
2. $P_i P_j = \mathbb{O}$
3. $\sum\limits_{i=1}^{m} P_i = \varepsilon$
4. $P_i^2 = P_i, (P_j^k = P_j,$ где $k \in \mathbb{N})$ - **идемпотентность**

Они все тривиальны

**Утверждение.** Возьму множество операторов: $\{P_i\}_{i=1}^m$, $P_i \in End(V)$.

Пусть они удовлетворяют свойствам 2,3 $\Rightarrow V = \bigoplus\limits_{i=1}^m \operatorname{Im} P_i$. $P_i$ это проектор на $L_i$.

**Доказательство:**

Мы знаем, что $P_i P_j = \mathbb{O}$, для $i \neq j$, а также $\sum\limits_{j=1}^m P_i = \varepsilon$. Откуда получаем, что:

$$P_i = P_i \varepsilon = P_i \sum_{j=1}^m P_j = \sum_{j=1}^m P_j P_i = P_i^2$$

А это значит, что $\forall v \in V : v = \varepsilon v = \sum\limits_{i=1}^m P_i v \Rightarrow V = \sum\limits_{i=1}^m \operatorname{Im} P_i$.

Осталось показать единственность разложения нуля:

$$\mathbb{O} = \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m P_i w_i, \text{ где } w_i \in V$$

$$P_j \mathbb{O} = \mathbb{O} = P_j \sum_{i=1}^n P_i w_i = \sum_{i=1}^n P_i P_j w_i = P_j w_j = v_j$$

$\Rightarrow v_j = \mathbb{O}, \forall j = 1 \dots m \ \Rightarrow$ дизъюнк. $\Rightarrow \bigoplus \operatorname{Im} P_i$

Q.E.D.

**Замечание:** Из определения проекторов следует, что они существуют и определены однозначно для данной прямой суммы.

**Теорема (спектральное разложение о.п.с)**

Дан $\mathcal{A} \in End(V)$. Тогда выполнено:

1) $\mathcal{A}$ — о.п.с. $\Rightarrow \mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч.}} \lambda P_\lambda, P_\lambda$ — проектор на $V_\lambda$ $\forall$ с.ч. $\lambda$.

Такое разложение называется **спектральным**.

2) $V = \bigoplus\limits_{i=1}^m L_i$, $P_i$ проекторы на $L_i$. $\mathcal{A} = \sum\limits_{j=1}^m \lambda_i P_i \Rightarrow \mathcal{A}$ о.п.с, $\lambda_i$ с.ч.

$\operatorname{Im} P_i = L_i = V_\lambda$(соотвест. подпр-во)

**Доказательство:**

1) $\mathcal{A}$ о.п.с $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ - с.ч}} V_\lambda$. Возьму $P_\lambda$ проекторы на $V_\lambda$ (исходя из определения -они существуют)
Тогда давайте воспользуемся определением:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\lambda \text{ - с.ч}} v_\lambda, \text{где } v_\lambda \in V_\lambda : \mathcal{A}v = \mathcal{A}(\sum_\lambda v_\lambda) = \sum_\lambda \mathcal{A} v_\lambda = \sum_\lambda \lambda v_\lambda = \sum_\lambda \lambda P_\lambda v$$

Откуда уже крайне очевидно получаем, что $\mathcal{A} = \sum\limits_\lambda \lambda P_\lambda$.

2) $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$. Откуда по определению: $\forall v \in V : \exists! v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \in L_i = \operatorname{Im} P_i$, $v_i \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{A} v_i = (\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j) v_i = (\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j) P_i v = v \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j P_i$$

Теперь вспомним свойство, что при умножении двух различных операторов мы получаем $\mathbb{O}$. Поэтому на самом деле наша сумма равна:

$$v \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j P_i = v \lambda_i P_i P_i = v \lambda_i P_i = \lambda_i v_i$$

Хорошо, теперь вспомним, что изначально это было равно $\mathcal{A} v_i$. поэтому $\mathcal{A} v_i = \lambda_i v_i$, откуда получаем, что $v_i$ с.в. $\mathcal{A}$ отвечающий с.ч. $\lambda_i$.

Откуда получаем, что наше подмножество $V_{\lambda_i} \supseteq \operatorname{Im} P_i$ (потому что любой $v \in \operatorname{Im} P_i$ — случайный вектор).

Вспомним, что: $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im} P_i \subseteq \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$, а как мы знаем $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \subseteq V$. Откуда, я получаю, что:

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} P_i = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \xRightarrow{\text{так как } P_i \subseteq V_{\lambda_i}} \operatorname{Im} P_i = V_{\lambda_i}$$

Q.E.D.

**Следствие (спектральное разложение диагонализируемой матрицы)**

$A$ диагонализируема $\Leftrightarrow \exists! \{P_i\}_{i=1}^{m}$, такое, что $P_i \cdot P_j = \mathbb{O}$, $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} P_i = E$, $A = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$

**Доказательство:**

Очевидно следует из теоремы:

$A$ диагонализируема $\iff$ матрица $\mathcal{A}$ о.п.с. Либо можно считать $A = \mathcal{A}$ о.п.с. $\in End(K^n)$

Q.E.D.

**Замечание.** Матрица $A$ подобна диагональной, то у нее есть диагональное представление:

$$T^{-1} A T = \Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n), A = T \Lambda T^{-1}$$

А также у такой матрицы есть спектральное разложение:

$$A = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda P_\lambda$$

Просьба не путать эти две формулы! **СЕЙЧАС НАЧНЕТСЯ ЧТО-ТО СТРАШНОЕ**

**def:** $A_k = (a_{ij}^k)_{n \times n}$ - последовательность матриц $n \times n$.

Обозначают так: $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ — **последовательность матриц**.

Раз это последовательность, то давайте введем на ней вот такой предел:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_k = \forall i, j : a_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}^k$$

Для лучшего понимания этого мира смотрите на приведеный ниже пример:

$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} (1+\frac{2}{k})^k & \sqrt[k]{k} \\ \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} & \frac{1-\cos\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

**def:** $a_n \in R : \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m = S \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{k} a_m = S$, где $S_k = \sum\limits_{m=1}^{k} a_m$ — **частичная сумма ряда.**

А саму такую конструкцию понятно называют рядом. Теперь давайте немного притронемся к матану:

$\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ - **ряды Тейлора - Маклорена**.

$x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — их область определения, $|x| < R$ (или еще обозначается r) — **радиус сходимости**, $c_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Причем эти $c$-шки на самом деле производные. (если интересно см. конспект по мат. анализу первый семестр)

**Рассмотрим пример:** Давайте разложим $e^x$, нам это позже понадобится:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, |x| < +\infty$$

В таком случае $c_m = \dfrac{f^{(m)}(0)}{m!}$.

Пусть $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_n x^n$. А давайте расширим на матрицы :)

**def:** $A_{n\times n} : f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m A^m$. Причем мы так же считаем частичные суммы и ищем их предел, но теперь просто ищем предел в матрицах.

Можно добавить параметр: $f(At) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m A^m t^m$.

**Теорема 1 (функция от диагонализируемой матрицы 1)**

Пусть $A$ — подобна диагональной. А также нам дана $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m, |x| < r$.

Тогда, если $\forall$ с.ч. $|\lambda| < r \Rightarrow \exists f(A)$ и $f(A) = Tf(\Lambda)T^{-1}$, где $f(\Lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$

**Доказательство:**

Упрощу $\sum\limits_{m=0}^{k} c_m A^m$. Мы знаем, что $A$ - подобна диагональной $\Rightarrow A = T\Lambda T^{-1}$. Тогда:

$$A^m = (T\Lambda T^{-1})^m = T\Lambda T^{-1} T\Lambda T^{-1} \dots T\Lambda T^{-1} = T\Lambda^m T^{-1}$$

Теперь давайте подставим это в нашу сумму:

$$\sum_{m=0}^{k} c_m A^m = \sum_{m=0}^{k} c_m T \Lambda^m T^{-1} = T\left(\sum_{m=0}^{k} c_m \Lambda^m\right) T^{-1}$$

Теперь вспомним, что $\Lambda^n$ подобна диагональной, поэтому занесем сумму внутрь матрицы и получим:

$$T\left(\sum_{m=0}^{k} c_m \Lambda^m\right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{k} c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum\limits_{m=0}^{k} c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} =$$

Теперь вспомним, что $\forall$ с.ч. $|\lambda| < r$, поэтому для них мы можем применить формулу, откуда:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} c_m A^m = \lim_{k\to\infty} T \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{k} c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum\limits_{m=0}^{k} c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Q.E.D.

**Теорема 2 (функция от диагонализируемой матрицы, 2-я формула)**

Пусть $A$ — подобна диагональной.

Тогда $A$ имеет спектральное разложение $\sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч.}} \lambda P_\lambda$, где $P_\lambda$ — проекторы. А также нам дана $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad |x| < r$.

Тогда, если $\forall$ с.ч. $|\lambda| < r$, то $\exists f(A)$, а так же $f(A) = \sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч.}} f(\lambda) P_\lambda$.

**Доказательство:**

$A^m = (\sum\limits_{\lambda} \lambda P_\lambda)^m = \sum\limits_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum\limits_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum\limits_{\xi} \xi P_\xi$

А теперь вспомним свойства проекторов. Когда я умножаю два разных проектора, я получаю ноль, откуда:

$$A^m = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum_{\xi} \xi P_\xi = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda$$

Значит: $\sum\limits_{m=0}^{k} c_m A^m = \sum\limits_{m=0}^{k} c_m \sum\limits_{\lambda} \lambda^m P_\lambda = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda \sum\limits_{m=0}^{k} \lambda^m c_m$. Теперь если я возьму предел, то я получу то, что мне нужно, потому что каждая лямбда $< r$, и поэтому я могу вместо них подставить $f(\lambda)$.

Q.E.D.

**Экспонента:**

А теперь давайте возьмем все $c = 1$, а также вспомним, что мы можем протаскивать с собой параметр. Поэтому у нас получается новая формула:

$f(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{m=0}^{k} t^m A^m$, а теперь вспомним наше разложение $e$-шки. А это именно оно и есть! Поэтому получаю:

$$e^{At} = f(At) = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} t^m A^m$$

Или:

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1} = \sum_{\lambda \text{ - с.ч.}} e^{\lambda t} P_\lambda$$

**Свойства:**

1. $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A.$
2. $e^{(A_1+A_2)t} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$
3. $e^{\mathbb{O}t} = E$

**Обратная:**

$A$ - подобна диагональной $\forall$ с.ч. $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = T \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dfrac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$

**Свойства:**

1. $A^{-1} = \sum\limits_{\lambda \text{ - с. ч}} \dfrac{1}{\lambda} P(\lambda)$
2. $AA^{-1} = T\Lambda T^{-1} T \Lambda^{-1} T^{-1} = E$
3. $AA^{-1} = (\sum \mu P_\mu)(\sum \frac{1}{\lambda} P_\lambda) = \sum\limits_{\lambda} \lambda \frac{1}{\lambda} P_\lambda = E$

**Корень:**

Если $A$ подобна диагональной и $\forall$ с.ч. $\lambda \geq 0$, то взяв $m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2$ мы можем ввести:

$$\sqrt[m]{A} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}, \text{ полагая } \sqrt[m]{\lambda} \geqslant 0$$

**Спектральное представление:** $\sqrt[m]{A} = \sum\limits_{\lambda \text{ с. ч.}} \sqrt[m]{\lambda} P_\lambda.$

## 1.6 Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора

Давайте посмотрим какие линейные операторы мы уже изучили:

Пусть $\mathcal{A} \in End(V) \overset{e}{\leftrightarrow} A$, $\chi(t)$ — корни характеристического многочлена. Он может быть:

1. Все корни $\in K$. $\sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$
   - $\exists$ базис $V$ из $v_\lambda$: $\forall\lambda:\ \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) \iff$ диагонализируема.
   - $\nexists$ базис $V$ из $v_\lambda$ : $\exists$ с.ч. $\lambda$: $\gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \iff A$ жорданова форма.
2. Не все корни $\in K$. В таком случае вещ. $V$ комплексифицируют.

**<u>def:</u>** $V$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$ (вещ. лин. пр-во)

$$\forall x, y \in V \Rightarrow z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad V_{\mathbb{C}} = \{z = x + yi \mid \forall x, y \in V\}$$

Назовем $V_{\mathbb{C}}$ **<u>комплексификацией</u>** $V$.

Покажем некоторые **свойства:**

1. $\mathbb{O} \in V \leftrightarrow \mathbb{O} + i\mathbb{O} = \mathbb{O} \in V_{\mathbb{C}}$ - существование нуля
2. $x \in V \leftrightarrow x + i\mathbb{O} = x \in V_c$, $V \subset V_{\mathbb{C}}$ — говорим, что $V \subseteq V_{\mathbb{C}}$
3. $\forall z = x + iy$ существует обратное: $-x + i(-y)$

Заметим, что в таком случае $V_{\mathbb{C}}$ — <u>линейное пространство</u> над полем комплексных чисел.

**Утв.** Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис $V$. Докажем что $e_1, \ldots, e_n$ — базис $V_{\mathbb{C}}$.

**Доказательство:**

Возьмем любой $z$ и докажем, что его можно породить с помощью базиса:

$$z = x + iy = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j + i\sum_{j=1}^{n} y_j e_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j + iy_j) e_j$$

Откуда $e$ - порождающий базис для $V_{\mathbb{C}}$. Докажем линейную независимость:

Для этого нам надо показать, что любая нулевая комбинация тривиальна:

$$\mathbb{O} = \sum_{j=1}^{n} (a_j + ib_j) e_j = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j + i\sum_{j=1}^{n} b_j e_j \iff \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \underset{\in\mathbb{R}}{=} \mathbb{O} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j \underset{\in\mathbb{R}}{=} \mathbb{O} \end{cases} \iff \begin{cases} \forall j : \alpha_j = 0 \\ \forall j : \beta_j = 0 \end{cases}$$

Откуда получили линейную независимость.

Q.E.D.

**Замечание.** Мы знаем, что $V \subset V_{\mathbb{C}}$. $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$, откуда наши пространства должны быть равны? Нет! Это было бы так, если бы не одно НО. $V$ - линейное пространство над $\mathbb{R}$, а $V_{\mathbb{C}}$ - линейное пространство над $\mathbb{C}$, поэтому это не правда.

Благодаря верхней теореме мы можем сделать некоторые замечания:

$$x \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, z = x + iy \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$$

**def:** $z \in V_{\mathbb{C}}$, $\overline{z} = x - iy$ — **сопряженный** вектор, $z = x + iy, \quad x, y \in V$

**Свойства:**

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
2. $\overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\overline{z}$
3. $v_1, \dots, v_m$ — лин. (не)зависимы $\Leftrightarrow \overline{v_1}, \dots \overline{v_m}$ лин. (не)зависимы.
4. $rg(v_1 \dots v_m) = rg(\overline{v}_1 \dots \overline{v}_m)$

**def:** Возьму оператор $\mathcal{A} \in End(V)$. $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

Назову данную конструкцию **продолжением вещ. лин. оператора** $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}}$ вещественного пространства $V$.

Очевидно, что в таком случае $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$, т.к. $\mathcal{A}$ — линейный оператор.

**Утверждение:** $\mathcal{A} \in End(V)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис $V$ ($\Rightarrow$ базис $V_{\mathbb{C}}$ из теоремы сверху).

Тогда, если $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A$, то $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \underset{e}{\leftrightarrow} A$

**Доказательство:**

По определению матричного оператора:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \cdot e_j = \mathcal{A} \cdot e_j + i\mathcal{A}\mathbb{O} = \mathcal{A} \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k \iff A_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

**Свойства** $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

1. $\chi_{\mathcal{A}}(t) \equiv \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$ — так как матрицы совпадают.

   **Замечание:**

   1) если $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0$ - корень $\chi(t) \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, но не с.ч. $\mathcal{A}$.

   2) если $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ корень $\chi \Rightarrow \overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ - тоже корень, причём той же кратности.
2. $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \overline{A_{\mathbb{C}} z} = A_{\mathbb{C}} \overline{z}$.

   $\overline{A_{\mathbb{C}} z} = \overline{Ax + iAy} = Ax - iAy = A_{\mathbb{C}} \overline{z}$
3. $\lambda$ с.ч $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, $z$ - с. в , отвечающий $\lambda \Rightarrow \overline{\lambda}$ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, $\overline{z}$ с.в., отвечающий $\overline{\lambda}$

   $\mathcal{A}\overline{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z}$, тогда $\gamma(\lambda) = \gamma(\overline{\lambda})$

Вернемся к тому старому разделению на случаи. Заметим, что если в таком случае мы возьмем наш третий случай и компелисифицируем, то для полученного оператора $A_{\mathbb{C}}$ мы получим, что он относится либо к первому варианту, либо ко второму.

## 1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона

**def:** $\mathcal{A} \in End(V)$ - нормализованный многочлен $\psi(t)$ называется **аннулятором** элемента $x \in V$, если $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$.

А теперь на более понятном. Пусть у нас есть $\psi(t) = t^k + a_1 t^{k-1} \ldots + a_{k+1} t^0$. Подставляя в него оператор получу: $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^k + a_1 \mathcal{A}^{k-1} + \ldots + a_{k+1}\varepsilon$. И такой оператор будет аннулятором $x$, если $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$.

**Замечание.** $\psi(t) \neq 0$, потому что это нормализованный многочлен, его старший коэффициент равен 1.

$\psi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ - корень}} (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ - так как это многочлен. Здесь $m(\lambda)$ — кратность корня $\lambda$. Перепишем на место $t$ оператор:

$$\psi(\mathcal{A}) = \prod_{\lambda \text{ - корень}} (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$$

**def:** Аннулятор элемента $x \in V$ наименьшей степени называется **минимальным аннулятором** элемента $x$.

**Теорема: (о существовании и единственности минимального аннулятора)**

1. $\forall\ x \in V\ \exists!\, \psi(t)$ минимальный аннулятор $x$.
2. $\forall$ другой аннулятор $x \vdots$ на минимальный аннулятор $x$.

**Доказательсто:**

1. (a) Пусть $x = \mathbb{O}$, $\psi(t) = 1$, $\psi(\mathcal{A}) = \varepsilon$, $\varepsilon x = \varepsilon \mathbb{O} = \mathbb{O}$
   (b) Пусть $x \neq \mathbb{O}$. Посмотрю на $x, \mathcal{A}x, \mathcal{A}^2 x, \ldots, \mathcal{A}^m x$

   Причем $m$ такое, что $x, \mathcal{A}x, \ldots \mathcal{A}^{m-1}x$ - линейно независимы, а $x, \mathcal{A}x, \ldots \mathcal{A}^m x$ - зависимы. Такой набор собрать удастся, при этом $m \leq n$.

   $\Rightarrow \exists!\, c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \in k$, такие, что $\mathcal{A}^m x = \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j x$

   Откуда получаем, что $(\mathcal{A}^m - \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j)x = \mathbb{O}$. Получил какой-то оператор, который при умножении на $x$ дает $\mathbb{O}$. А это значит, аннулятор существует, причём аннулятор выше минимальный по построению.

   **Замечание:** мы смотрим на многочлен с коэффицентами $1, c_{n-1}, \ldots, c_0$ — этот многочлен и есть наш минимальный аннулятор..

2. Пусть мой минимальный аннулятор это $\psi(t)$, а $\psi_1(t)$ другой аннулятор $x$.

   Посмотрим на результат деления:

   $\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$ (остаток), $\deg r < \deg \psi$

   Это значит, что подставляя в него $\mathcal{A}$ и умножая на $x$ должно быть верно:

   $$\psi_1(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})x + r(\mathcal{A})x$$

   Но $\psi_1(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, поэтому $r(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, но что это значит?

Как мы знаем $\psi(t)$ - минимальный аннулятор. Так как $r(\mathcal{A})x = \mathbb{O}$, то если $r(t) \not\equiv 0$, получаем, что это аннулятор, а тогда мы выбрали не минимальный аннулятор, т.к. $\deg \psi > \deg r$. Противоречие!

Откуда получаю, что $r \equiv 0 \Rightarrow \psi_1$ делится на минимальный оператор $\psi$.

Q.E.D.

**def:** Нормализованный многочлен $\varphi(t)$ называется **аннулятором оператора** $\mathcal{A}$, если:

$$\varphi(\mathcal{A}) \equiv \mathbb{O}, (\text{т.е.} \forall v \in V, \varphi(\mathcal{A})v = \mathbb{O})$$

**def:** **минимальным многочленом оператора** $\mathcal{A}$ называется аннулятор $\mathcal{A}$ наименьшей степени.

**Теорема: (о существовании и единственности миним. многочлена оператора)**

1. $\forall \mathcal{A} \in End(V) : \exists!$ - минимальный многочлен.
2. $\forall$ аннул. оператора $\mathcal{A}$ делится на миним. мн-н $\mathcal{A}$

**Доказательсто:**

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис $V$. Построим $\psi_j(t)$ - минимальный аннулятор $e_j$

Возьму $\varphi(t) =$ Н.О.К. $\{\psi_j\}_{j=1}^n$, где $j = 1, \dots, n$. Покажем, что $\varphi$ аннулятор $\mathcal{A}$:

Как мы знаем $\forall v \in V, v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i e_i$. Поэтому:

$$\varphi(\mathcal{A})v = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \varphi(\mathcal{A}) \cdot e_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot (\psi_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{A}))e_j = \mathbb{O} \iff \varphi(\mathcal{A}) \equiv \mathbb{O}$$

То есть такой многочлен существует. Теперь докажем единственность:

Пусть $\varphi_a(t)$ другой аннулятор $\mathcal{A}$: Тогда $\forall j = 1, \dots, n : \varphi_a(\mathcal{A})e_j = \mathbb{O}$.

Тогда $\varphi_a$ аннулятор элемента $e_j$ для любого $j$.

По теореме о линейном операторе мы знаем, что $\varphi_a$ делится на $\psi_j$ для любого $j$, то есть $\varphi_a \,\vdots\, \varphi$.

Откуда я получаю, что $\varphi_a$ степени хотя бы такой же, что $\varphi$. То есть $\varphi_a$ хотя бы Н.О.К.

Если мы предполагаем, что это многочлен минимальной степени, то он такой же степени, как и $\varphi$. При этом они оба делятся на Н.О.К., а $\varphi =$ Н.О.К. Так же их старшие коэффиценты равны. Поэтому: $\varphi_1 = \varphi$. Исходя из этого получаем, что такой многочлен единственный

Q.E.D.

**Теорема (Кэли - Гамильтона)**

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ выполнено, что:

$\chi(t) = \det(A - t\varepsilon)$ - аннулятор оператора $\mathcal{A}$.

**Замечание** $\det(\mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \varepsilon)$, $t \in K$. Сюда не предполагается подставлять матрицу.

**Доказательство:**

Пусть есть базис $e_1, \dots, e_n$. Тогда $\mathcal{A} \overset{e}{\leftrightarrow} A$.

Пусть есть $\mu \in K$ - не корень $\chi(t)$, где $t \in K$. Посмотрим на $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - tE)$. Как мы знаем: $\chi(\mu) \neq 0$, поэтому $\det(A - \mu E) \neq 0$. Откуда существует обратная матрица (по теореме об обратной матрице), тк $A$ - не вырожденная:

$$\exists!(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B = \frac{1}{\chi(\mu)} B$$

где $B$ - матрица из алгебраических дополнений.

Наша матрица $B$ выглядит примерно так: $\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{11i}\mu^i & \dots & \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{1ni}\mu^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{n1i}\mu^i & \dots & \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_{nni}\mu^i \end{pmatrix}$

Давайте разложим нашу матрицу в сумму матриц так, что матрица $B_k$ будет состоять из всех коэффицентов на $k$-ой позиции этих $k$ функций:

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Тогда вернемся к тому, что было:

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\chi(\mu)} \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Или домножим на $(A - \mu E)$ и получим:

$$E \cdot \chi(\mu) = (A - \mu E) \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Пусть $\chi(t) = \alpha_n t^n + \ldots + \alpha_0 t^0$. Давайте расскроем скобки, мы получим:

$$\begin{aligned}
&\mu^0: \quad E\alpha_0 = AB_0 \\
&\mu^1: \quad E\alpha_1 = AB_1 - B_0 \\
&\mu^2: \quad E\alpha_2 = AB_2 - B_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\mu^{n-1}: E\alpha_{n-1} = AB_{n-1} - B_{n-2} \\
&\mu^n: \quad E\alpha_n = -B_{n-1}
\end{aligned}$$

Теперь умножим каждый $E\alpha_i$ на $A^i$ и сложим. Получится:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = AB_0 + A^2B_1 - AB_0 + A^3B_2 - A^2B_1 + \ldots + A^nB_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} = \mathbb{O}$$

$\chi(A) = \mathbb{O} \quad \Rightarrow \chi$ аннулятор $\mathcal{A}$, т.к. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t)$. Q.E.D.

**Замечание:** Очевидно, $\forall$ матрицы $A_{n\times n}$ ее характеристический многочлен это аннулятор $\mathcal{A}$.

**Следствие 1.** $\forall \mathcal{A} \in End(V)$, $\varphi$ - минимальный многочлен, тогда $x \,\vdots\, \varphi$ (из теоремы о минимальном мн-не.)

**Следствие 1.5.** $\deg \varphi \leq n$, т.к. $\deg \chi = n$ и $\chi \,\vdots\, \varphi$.

**Следствие 2.** $\forall \mathcal{A} \in End(V)$. Если $\deg \varphi = n = \deg \chi \Leftrightarrow \varphi \equiv \chi \cdot (-1)^n$

**Теорема (о множестве корней характеристического многочлена)**

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ множество корней $\chi$ совпадает с множеством корней $\varphi$ (без учета кратности)

**Доказательство:**

1. $\lambda$ корень $\varphi \Rightarrow \lambda$ - корень $\chi$. Очевидно.
2. Пусть $\lambda$ корень $\chi$. Мы должны показать, что и у $\varphi$ есть такой корень. Тогда есть 2 варианта:
   (a) $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$ - с.ч. $\Rightarrow \exists u$ - собственный вектор $\neq \mathbb{0}$

   Так как $u$ - случайный вектор, то $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)u = \mathbb{0}$

   $(t - \lambda)$ - минимальный аннулятор элемента $u$, $\varphi$ - минимальный многочлен $\Rightarrow$ аннулятор $v$, откуда $\varphi \,\vdots\, (t - \lambda) \Rightarrow \lambda$ корень $\varphi$ - победили

   (b) $\lambda \notin K \equiv \mathbb{R}$, т.е. $\lambda$ - не собственное число. Прибегаем к комплесификации:

   Для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ $\lambda$ - корень. Как мы знаем $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \equiv \chi_{\mathcal{A}} = \chi$.

   Тогда по пункту $a$ это корень минимального многочлена в $\varphi_{\mathbb{C}}$.

   Построим минимальный многочлен:

   Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис. $\mathcal{A} \overset{e}{\longleftrightarrow} A$. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \overset{e}{\longleftrightarrow} A$. Начнем строить по определению минимальный многочлен. Для этого мы должны найти $\psi_i(t)$ - аннулятор $e_i$.

   Выпишу: $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_i, \ldots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$. Причем $k$ такое, что $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_i, \ldots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{k-1} e_i$ - линейно независимы, а $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_i, \ldots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$ - зависимы. Заметим, что $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \mathcal{A} e_j$.

   Поэтому по алогритму построения мин. многочлена $\varphi_j = \varphi_{j\ \mathbb{C}}$. А уже откуда $\lambda$ корень $\varphi$ - победили!

Q.E.D.

**Замечание:** $\chi(t) = \prod (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$ и $\varphi(t) = \prod (t - \lambda)^{m(\lambda)}$, верно, что: $1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

## 1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство.

Пусть у нас есть $\varphi(t)$ - многочлен над полем $K$(все его коэффиценты в $K$).

Пусть все его корни $\varphi \in K$. Тогда давайте разложим его в произведение корней:

$$\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

давайте теперь вынесим один из корней за скобки. Получим:

$$\varphi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \cdot \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

Переобозначим $\varphi_\lambda(t) = \prod\limits_{\mu \neq \lambda} (t-\mu)^{m(\mu)}$ и подставим:

$$\varphi(t) = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(t)$$

Возьмем $P_{m-1}$ - множество всех многочленов над полем $K$ степении $\leq m-1$.

Зафиксируем $\varphi$ и $\lambda$ и назовем **главным идеалом**, порожденным многочленом $\varphi_\lambda$:

$$I_\lambda = \{p \in P_{n-1} | p \vdots \varphi_\lambda\}$$

Очевидно $I_\lambda$ линейное подпространство. Заметим, что $p \vdots \varphi_\lambda \Leftrightarrow p(t) = a_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$

Поэтому на самом деле: $I_\lambda \cong \{a_\lambda\} = P_{m(\lambda)-1}$

Откуда $\dim I_\lambda = m(\lambda)$.

**Теорема:**

$P_{m-1} = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ - корень } \varphi} I_\lambda$.

**Доказательство:**

1. Проверим дизъюнктность:

$$\mathbb{O} = \sum_{\lambda \text{ - корень } \varphi} p_\lambda \in I_\lambda = \sum_\lambda a_\lambda(t) \varphi_\lambda(t)$$

   Зафиксируем какую-то $\lambda$ и вынесем ее за скобки:

$$a_\lambda \varphi_\lambda(t) + \sum_{\mu \neq \lambda} a_\mu(t) \cdot \varphi_\mu(t)$$

   Как мы знаем, для всех $\mu \neq \lambda : \varphi_\mu : (t-\lambda)^{m(\lambda)}$

   А так же мы знаем, что $\varphi_\lambda(t)$ не делится на $(t-\lambda)^\mu$

   Откуда получаем, что $a_\lambda \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ .А это значит, что $a_\lambda \equiv 0$

   Откуда дизъюнктно.

2. Проверим размерность $\dim(\bigoplus\limits_\lambda I_\lambda) = \sum\limits_\lambda \dim I_\lambda = \sum\limits_\lambda m(\lambda) = \dim P_{m-1}$, откуда прямая сумма.

Q.E.D.

**Следствие 1:** $\forall p \in P_{m-1} : \exists ! p = \sum\limits_\lambda p_\lambda$, где $p_\lambda(r) = \alpha_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$, $\deg \alpha_\lambda \leq m(\lambda) - 1$.

В частности, $1 = \sum\limits_{\lambda \text{ корень}} p_\lambda$ - **полиномиальное разложение единицы**

**Замечание:**

1. Пусть $\lambda \neq \mu$ - корни $\varphi$

   $p_\lambda \in I_\lambda,\ p_\mu \in I_\mu,\ p_\lambda p_\mu \vdots \varphi$

   $p_\lambda(t) = \alpha_\lambda \varphi_\lambda(t)$, $p_\mu(t) = \alpha_\mu \varphi_\mu(t)$

   $p_\lambda(t) p_\mu(t) = \alpha_\lambda \varphi_\lambda(t) \alpha_\mu \varphi_\mu(t) \vdots \varphi$

2. Пусть $\forall\lambda,\ m(\lambda) = 1$, тогда $\varphi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)$.

   $I_\lambda \ni p_\lambda = \alpha_\lambda\varphi_\lambda$, тогда $\alpha_\lambda = \text{const}$. Это можно понять так же из $0 \le \deg\alpha_\lambda \le m(\lambda) - 1 = 0$

**Теорема (Лагранж)**

Пусть $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$, то есть $\varphi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)$.Тогда:

$$\forall p \in P_{m-1} : p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(t), \text{ где } p_\lambda \in I_\lambda$$

**Доказательство:**

Возьму многочлен $p$ и посмотрю значение в $\lambda$.

$p(\lambda) = \sum\limits_{\mu} p_\mu$ - я могу так разложить из следствия 1 (см. выше). Также заметим, что $a_\mu$ - константы. Тогда получается вот такая формула:

$$p(\lambda) = \sum_{\mu} p_\mu = \sum_{\mu} a_\mu\varphi_\mu(\lambda)$$

Заметим, что при $\mu \ne \lambda$ у нас зануляется сумма, так что $p(\lambda) = a_\lambda\varphi_\mu(\lambda)$.

Откуда получаю, что $\alpha_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\varphi_\lambda(\lambda)}$.

Теперь про производную: $\varphi'(t) = ((t-\lambda)\cdot\varphi_\lambda(t))' = \varphi_\lambda(t) + (t-\lambda)\varphi'_\lambda(t)$

Зафиксируем $\lambda$. Получу, что в таком случае $\varphi'(\lambda) = \varphi_\lambda(\lambda)$. Откуда, если присмотреться, мы получаем формулу из теоремы.

Q.E.D.

**Замечание.** Эта теорема позволяет нам быстро искать $\alpha_\lambda(t)$, в случае всех $m$ единиц, потому что в таком случае $\alpha_\lambda(t)$ - константа.

**Следствие:** $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$: Пусть $1 = \sum\limits_{\lambda} \dfrac{1}{\varphi'(\lambda)}\varphi_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda(t) \Rightarrow t = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda(t)$

**Доказательство:** $t = \sum\limits_{\lambda} \dfrac{\lambda}{\varphi'(t)}\varphi_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$

Q.E.D.

Вернемся к операторам. Возьмем $\mathcal{A} \in End(V)$:

$\varphi(t)$ минимальный многочлен, все корни $\varphi \in K (\Leftrightarrow$ все корни $\chi \in K$ ), то есть являются собственными числами.

$\exists! 1 = \sum\limits_{\lambda \text{ - корни } \varphi} p_\lambda(t)$ —**полиномиальное разложение единицы**.

$\varepsilon = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda(\mathcal{A})$, $\varepsilon = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda$ — **оператор разложения единицы**.

Позамечаем некоторые интересные факты:

1. $P_\lambda \in End(V)$
2. Возьму $\lambda \neq \mu$. Замечу, что $p_\lambda \cdot p_\mu \vdots \varphi$. Тогда $p_\lambda(t)p_\mu(t) = \alpha(t)\varphi(t)$, откуда:

   $\forall v \in V : P_\lambda P_\mu v = a(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{A})v = \mathbb{O}$, из-за того, что $\varphi$ - минимальный многочлен.

   Откуда $P_\lambda P_\mu$ - аннулятор $\mathcal{A}$ или $P_\lambda P_\mu = \mathbb{O}$
3. $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \sum\limits_\lambda P_\lambda \\ P_\lambda \cdot P_\mu = \mathbb{O} \end{cases} \Leftrightarrow P_\lambda$ - по теореме это проекторы на $\operatorname{Im} P_\lambda,\ V = \bigoplus \operatorname{Im} P_\lambda$

Такие проекторы называются **спектральными**. Это не те самые проекторы на $V_\lambda$. Пока что это проекторы на их собственные подпространства. Они обладают теми свойствами проекторов, что мы вывели до этого.

**ЕСЛИ** $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$, тогда по следствию из матрицы Лагранжа, мы знаем

$\varepsilon = \sum\limits_\lambda P_\lambda$, $\mathcal{A} = \sum\limits_\lambda P_\lambda \cdot \lambda \Rightarrow \mathcal{A}$ о.п.с., $\lambda$ - с.ч $\mathcal{A}$.

Откуда это будут проекторы на собственные подпространства.

**Следствие:** Т.е. $\mathcal{A}$ о.п.с. достаточно удотворять: $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$ в минимальном многочлене.

**def:** $\mathcal{A} \in End(V)$, $\lambda$ - с.ч. $\mathcal{A}$. $K_\lambda$ - **корневое подпространство**, если:

$K_\lambda = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$, где $m(\lambda)$ кратность $\lambda$ в мин. многочлене $\varphi$. $\varphi(t) = \prod\limits_\lambda (t-\lambda)^{m(\lambda)}$

Очевидно $V_\lambda \subseteq K_\lambda$.

**Теорема (о корневом подпространстве)**

1. $K_\lambda$ - инвариантно относительно $\mathcal{A}$.
2. $\operatorname{Im} P_\lambda = K_\lambda$, где $\varepsilon = \sum\limits_\lambda P_\lambda$ - оператор разложение единицы.

   Называются образами спектров проекторов.

   $\Rightarrow \bigoplus\limits_\lambda K_\lambda = V$
3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ - минимальный многочлен для $B = \mathcal{A}\Big|_{K_\lambda} \in End(K_\lambda)$

**Доказательство:**

1. Возьмем $v \in K_\lambda = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$

   Заметим, что $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$ - многочлен от $\mathcal{A}$. Тогда:

   $$\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}\mathcal{A}$$

   Умножим и левую и правую часть на $v$. Получим:

   $$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}(\mathcal{A}v) = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbb{O}$$

   Откуда $\mathcal{A}v \in \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda \Rightarrow K_\lambda$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$

2. Вспомним, что: $\varepsilon = \sum\limits_{\lambda} P_\lambda,\ P_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A}),\ p_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$

   Пусть $v \in V$. Тогда посмотрим на:

$$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot P_\lambda v =$$

   Заменим $P_\lambda$ по формуле:

$$= ((\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \alpha_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \varphi_\lambda(\mathcal{A}))v =$$

   Так как это все многочлены от $\mathcal{A}$, то они перестановочны:

$$= (\alpha_\lambda(\mathcal{A}) \cdot (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(\mathcal{A}))v = (\alpha_\lambda(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{A}))v = \mathbb{O}$$

   Так как $\varphi(\mathcal{A})v = \mathbb{O}$ (минимальный многочлен).

   Откуда $P_\lambda v \in \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$. Следовательно $\operatorname{Im} P_\lambda \subseteq K_\lambda$.

   Теперь докажем, что они совпадают:

   Возьму $\mu \neq \lambda$, а также $v \in K_\lambda$. Посмотрим на $P_\lambda v$:

$$P_\mu v = \alpha_\mu(\mathcal{A})\varphi_\mu(\mathcal{A})v =$$

   Мы знаем, что в $\varphi_\mu$ содержится $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$. Давайте его вынесем за скобки, получим:

$$\alpha_\mu(\mathcal{A})\varphi_\mu(\mathcal{A})v = \alpha_\mu(\mathcal{A})\beta_\mu(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v$$

   Так как $v \in K_\lambda = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$, то $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbb{O}$, откуда $P_\mu v = \mathbb{O}$.

   Откуда получаю, что $\forall v \in K_\lambda,\ v = \varepsilon v = \sum\limits_{\mu} P_\mu v = P_\lambda v$. Следовательно $K_\lambda \subseteq \operatorname{Im} P_\lambda$, но мы уже сказали, что $\operatorname{Im} P_\lambda \subseteq K_\lambda$, поэтому $K_\lambda = \operatorname{Im} P_\lambda$.

3. $B = \mathcal{A}\Big|_{K_\lambda} \in End(K_\lambda)$

   $\forall v \in K_\lambda : (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbb{O}$, откуда получаем, что $\psi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ - аннулятор $\mathcal{B}$.

   Хотим понять: минимальный ли это многочлен?

   Предположим, что он не минимальный, тогда есть $\psi_i(t)$ - минимальный многочлен $\mathcal{B}$: $\deg\psi_i < \deg\psi$. Заметим, что любой аннулятор $\mathcal{B}$ делится на минимальный многочлен, поэтому $\psi_i(t) = (t - \lambda)^k$, причем $k \leq m(u) - 1$. Тогда заметим, что $\psi_1(t) = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)-1}$ - тоже аннулятор $\mathcal{B}$.

   Если мы покажем, что $\varphi_1(t) = \psi_1(t)\cdot\varphi_\lambda(t)$ - минимальный многочлен $\mathcal{A}$, тогда наш искомый минимальный многочлен не был минимальным. Как мы знаем:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\mu} v_\mu, \text{ где } v_\mu \in \operatorname{Im} P_\mu = K_\mu$$

   Покажем, что $\varphi_1(t)$ - минимальный многочлен:

$$\varphi_1(\mathcal{A})v = \psi_1(\mathcal{A})\varphi_\lambda(\mathcal{A})v = \psi_1(\mathcal{A})\varphi_\lambda(\mathcal{A})\sum_{\mu} v_\mu = \varphi_\lambda(\mathcal{A})\psi_1(\mathcal{A})v_\lambda + \sum_{\mu\neq\lambda} \psi_1(\mathcal{A})\varphi_\lambda(\mathcal{A})v_\mu$$

   Как мы сказали выше: $\psi_1(t)$ - аннулятор $B$, откуда $\psi_1(\mathcal{A})v_\lambda = 0$ (тк $v_\lambda \in K_\lambda$). Также как мы знаем в $\varphi_\lambda(\mathcal{A})$ содержится $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\mu)}$. А $v_\mu \in K_\mu = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\mu)}$. То есть наш многочлен и вправду минимальный. То есть мы пришли к противоречию.

   Откуда $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ - минимальный многочлен для $\mathcal{B}$.

Q.E.D.

**Следствие 1:** Очевидно, что тогда $1 \leq m(\lambda) \leq \dim(K_\lambda)$.

**Следствие 2:** $\mathcal{A}$ - о.п.с $\Leftrightarrow \varphi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)$, т.е $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$, (все корни $\varphi \in K$)

**Доказательство:**

$\Rightarrow$ Пусть $\mathcal{A}$ - о.п.с.. Тогда мы знаем, что:

$$V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч}} V_\lambda, \lambda \text{ - корень } \varphi$$

$(\mathcal{A}-\lambda\varepsilon)v = 0 \Rightarrow (t-\lambda)$ - минимальный аннулятор $v$, где $v$ - собственный вектор. Мы знаем, что:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\lambda} v_\lambda$$

Докажем, что $\varphi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)$ - минимальный многочлен:

$$\varphi(\mathcal{A}) \cdot v = \left(\prod_{\lambda}(\mathcal{A}-\lambda\varepsilon)\right)\sum_{\mu} v_\mu = \mathbb{0}$$

Это верно, потому что в это произведение входят анулляторы собственных подпространств $(t-\lambda)$, которые будут занулять каждое из слагаемых. Откуда это аннулятор $\mathcal{A}$. А так как корни характеристического и минимального совпадают по теореме о множестве корней характеристического многочлена, а так же потому что $\lambda$ - собственные числа - получаем, что данный многочлен - минимальный.

$\Leftarrow$ Уже доказывали, смотрите **ЕСЛИ** над теоремой о корневом подпространстве.

Q.E.D.

## 1.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

**!!! Не путать разложение жордана с жордановой формой матрицы !!!**

**def:** $B \in End(V)$ называется **нильпотентным**, если его минимальный многочлен $= t^v$,

(т.е. $B^\nu = \mathbb{O}$), где $\nu$ - **индекс нильпотентности**.

**Теорема (Разложение Жардана)**

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$, все корни $\chi, \varphi \in K$. Надо доказать, что:

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$, где $\mathcal{D}$ - о.п.с, $\mathcal{B}$ - нильпотентный, причем $DB = BD$.

**Доказательство:**

Возьмем оператор $\mathcal{A}$. У него есть $\varphi = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ - минимальный многочлен.

Разложим на операторы разложения единицы:

$$\varepsilon = \sum_{\lambda \text{ - корень } \varphi} P_\lambda$$

Позже мы этим воспользуемся.

Возьму $\mathcal{D} := \sum\limits_{\lambda} \lambda P_\lambda$ — очевидно, $\mathcal{D}$ - о.п.с. (смотрите теоремы о.п.с).

Возьму $\mathcal{B} := \mathcal{A} - \mathcal{D}$. Все, что осталось проверить - нильпотентность $\mathcal{B}$.

Пусть $\nu = \max(m_\lambda)$, где $\lambda$ - корень $\varphi$. Тогда:

$$\mathcal{B}^\nu = \left(\mathcal{A} - \sum_\lambda \lambda P_\lambda\right)^\nu = \left(\mathcal{A}\sum_\lambda P_\lambda - \sum_\lambda \lambda P_\lambda\right)^\nu = \left(\sum_\lambda \left(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon\right) P_\lambda\right)^\nu$$

Как мы помним $\forall \mu \neq \lambda : P_\lambda \cdot P_\mu = \mathbb{O}$, а также $P_\lambda^2 = P_\lambda$. Поэтому:

$$\left(\sum_\lambda \left(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon\right) P_\lambda\right)^\nu = \sum_\lambda \left(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon\right)^\nu P_\lambda$$

А как мы помним из определения $P_\lambda = a_\lambda(\mathcal{A})\varphi_\lambda(\mathcal{A})$. А также, так как $\nu = \max(m_\lambda)$, то внутри каждой скобки есть множитель $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$. Откуда $\mathcal{B}$ и вправду нильпотентно.

Теперь докажем перестановочность. $\mathcal{B}\mathcal{D} = \left(\mathcal{A} - \sum\limits_\lambda \lambda P_\lambda\right) \sum\limits_\mu \mu P_\mu$

А так как это многочлены от $\mathcal{A}$, то они перестановочны. Поэтому и получается наша перестановочность

Q.E.D.

**Замечание:** $\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$

**Теорема (единственность разложения Жордана):**

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$. Доказать, что разложение Жордана единственно, то есть $\exists! D, B$.

**Доказательство:**

Пусть у нас есть еще одно разложение Жордана: $\mathcal{A} = \mathcal{D}' + C$, $\mathcal{D}'C = C\mathcal{D}'$, где $\mathcal{D}'$ - о.п.с, а $C$ - нильпотентый оператор.

$\mathcal{D}' = \sum\limits_{\mu} \mu Q_\mu$, где $Q_\mu$ - проекторы.

Давайте разметим план доказательства:

1. Множество $\lambda$ совпадает с множеством $\mu$.
   1.1 Докажем, что $CQ_\mu = Q_\mu C$.
   1.2 Докажем, что $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$.
   1.3 Покажем для каждого $\mu$ аннуляторы $\operatorname{Im} Q_\mu$. $\psi_\mu = (t-\mu)^{k(\mu)}$
   1.4 Покажем, что произведение $\psi_\mu$ - аннулятор $\mathcal{A}$.
   1.5 Покажем, что на самом деле это минимальный многочлен, откуда множество корней совпадет.
2. Докажем совпадение $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$.

Начнем доказательство:

1.1 Возьмем $\mu$. Докажем, что $CQ_\mu = Q_\mu C$

Посмотрим на $\mathcal{D}'Q_\mu$. Используя свойства проекторов, оно равно:

$$\mathcal{D}'Q_\mu = \left(\sum_{\xi} \xi Q_\xi\right) Q_\mu = \mu Q_\mu$$

Посмотрим на $Q_\mu \mathcal{D}'$. Используя свойства проекторов, оно равно:

$$Q_\mu \mathcal{D}' = Q_\mu \left(\sum_{\xi} \xi Q_\xi\right) = \mu Q_\mu$$

Откуда $\mathcal{D}'$ и $Q_\lambda$ - перестановочны.

Возьмем $\xi, \mu$. Для них выполнено:

$$(\xi - \mu) Q_\xi C Q_\mu = \xi Q_\xi C Q_\mu - Q_\xi C \mu Q_\mu$$

Как мы только что доказали: $\mu Q_\mu = \mathcal{D}'Q_\mu$. Поэтому:

$$\xi Q_\xi C Q_\mu - Q_\xi C \mu Q_\mu = \mathcal{D}' Q_\xi C Q_\mu - Q_\xi C \mathcal{D}' Q_\mu$$

А так же мы только что доказали, что $\mathcal{D}'$ и $Q_\mu$ перестановочны для любого $\mu$. Откуда:

$$\mathcal{D}' Q_\xi C Q_\mu - Q_\xi C \mathcal{D}' Q_\mu = Q_\xi \mathcal{D}' C Q_\mu - Q_\xi C \mathcal{D}' Q_\mu = Q_\xi(\mathcal{D}'C - C\mathcal{D}')Q_\mu$$

А как мы знаем из определения жорданового разложения $C$ и $D'$ перестановочны. Это значит, что $D'C - CD' = \mathbb{O}$. Откуда:

$$(\xi - \mu) Q_\xi C Q_\mu = \mathbb{O} = (\mu - \xi) Q_\mu C Q_\xi$$

То есть для $\xi \neq \mu$ : $Q_\xi C Q_\mu = Q_\mu C Q_\xi = \mathbb{O}$ Теперь вернемся к тому, что мы изначально хотели - перестановочность $C, Q_\mu$:

$$CQ_\mu = \varepsilon C Q_\mu = \left(\sum_\xi Q_\xi\right) CQ_\mu$$

Хочу использовать только что доказанный факт:$Q_\xi C Q_\mu = Q_\mu C Q_\xi$:

$$\left(\sum_\xi Q_\xi\right) CQ_\mu = \sum_\xi Q_\mu C Q_\xi = Q_\mu C\left(\sum_\xi Q_\xi\right) = Q_\mu C$$

Откуда $Q_\mu C = CQ_\mu$ — перестановочны.

1.2 Докажем, что $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$. Сначала посмотрим на случай $k = 1$:

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)Q_\mu = (\mathcal{D}' + C - \mu\varepsilon)Q_\mu = (\sum_\xi \xi Q_\xi + C - \mu\sum_\xi \xi)Q_\mu$$

Воспользуемся свойствами проекторов и получим, что:

$$(\sum_\xi \xi Q_\xi + C - \mu\sum_\xi \xi)Q_\mu = \mu Q_\mu + CQ_\mu - \mu Q_\mu = CQ_\mu$$

Воспользуемся индукцией:

**База:** $k = 1$ доказана сверху.

**Индукционный переход:** Пусть выполнено $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$, тогда выполнено: $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k+1} Q_\mu = C^{k+1} Q_\mu$. Докажем:

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k+1} Q_\mu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^1(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)C^k Q_\mu = C^k(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)Q_\mu = C^{k+1}Q_\mu$$

1.3 Посмотрим на $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu$. Как мы доказали в пункте 1.2 $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$. Как мы помним, $C$ - нильпотентная, откуда есть $k$ начиная с которого $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_\mu = \mathbb{O}$. Давайте для каждого $\mu$ введем свое $k(\mu)$ - минимальная степень, чтобы получился ноль. Из перестановочности $C^j Q, QC^j$ получаю, что $(A - \mu\varepsilon)^{k(\mu)} Q = Q(A - \mu\varepsilon)^{k(\mu)}$

То есть $Q_\mu(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k(\mu)} Q_\mu = C^{k(\mu)} Q_\mu = \mathbb{O}$. Это значит, что любой вектор из $\operatorname{Im} Q\mu$ применяя к нему $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k(\mu)}$ будет получаться ноль. То есть многочлен $(t - \mu)^{k(\mu)}$ - минимальный аннулятор векторов из $\operatorname{Im} Q_m$.

**Замечание:** именно здесь применяется пункт 1.1.

1.4 Возьму $\psi = \prod\limits_\mu (t - \mu)^{k(\mu)}$. Покажу, что это аннулятор $\mathcal{A}$.

$\forall x : \exists! x = \sum\limits_\mu x_\mu$, где $x_\mu \in Q_\mu$ - по определению проекторов.

Подействуем на $x$ нашим минимальным многочленом:

$$\psi(\mathcal{A})x = \left(\prod_\mu (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{k(\mu)}\right)\sum_\xi x_\xi = \sum_\xi \left(q_\xi \cdot (\mathcal{A} - \xi)^{k(\xi)} \cdot x_\xi\right) = \mathbb{O}$$

Это ноль потому что каждое слагаемое в сумме ноль, а каждое слагаемое ноль, потому что в $\psi(\mathcal{A})$ входит множитель $t(\mathcal{A} - \xi)^{k(\xi)}$ - аннулятор векторов из $\operatorname{Im} Q_\mu$.

Откуда $\psi$ аннулятор $\mathcal{A}$.

1.5 Как мы знаем минимальный многочлен делится на минимальные аннуляторы векторов, откуда $\varphi$ делится на каждое $\psi_\lambda$. Также мы только что доказали, что $\psi$ аннулятор $\mathcal{A}$, откуда $\psi$ делится на $\varphi$. А раз $\psi$ делится на $\varphi$ и $\varphi$ делится на $\psi$, то $\psi \equiv \varphi$ - минимальный аннулятор. Из этого следует, что множество $\lambda$ и множество $\mu$ совпадает.

**Замечание:** совпадение $\lambda$ и $\mu$ еще не говорит нам о том, что $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.

2. $k(\lambda) = m(\lambda)$ из того, что совпали $\psi, \varphi$.

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\lambda)} Q_\lambda = Q_\lambda (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\lambda)} = \mathbb{0}$$

Откуда векторы из $\operatorname{Im} Q_m \subseteq \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$. Но мы помним, что $\bigoplus\limits_\lambda K_\lambda = V$ и $\bigoplus\limits_\lambda \operatorname{Im} Q_\lambda = V$, откуда они совпадают. Откуда $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

Q.E.D.

**Теорема:**

разложение Жордана $\mathcal{A} = D + B$. Тогда $\chi_\mathcal{A} \equiv \chi_\mathcal{D}$

**Доказательство:**

По теореме о о.п.с у $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$ совпадает множество корней.

Но нам надо теперь понять что-то про степени. $\nu = \max(m(\lambda)); \mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$. Тогда:

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu - \mathcal{B}^\nu t^\nu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon - \mathcal{B}t)((\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-2}\mathcal{B}t + \ldots + (\mathcal{B}t)^{\nu-1})$$

Так как $\mathcal{B}$ - многочлен от $\mathcal{A}$, то мы можем так разложить

Возьмем $\mu$ не корень. Посчитаем определители. С одной стороны это: $\det(A - \mu\varepsilon)^\nu = (\chi_\mathcal{A})^\nu$ - не зависит от $t$. С другой стороны это:

$$\det(A - \mu\varepsilon)^\nu = \det(\mathcal{A} - \mu\varepsilon - \mathcal{B}t) \det((\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-2}\mathcal{B}t + \ldots + (\mathcal{B}t)^{\nu-1})$$

Тут два многочлена зависящих от $t$ (оба не нули, иначе $\mu$ - корень).

Заметим, что слева многочлен нулевой степени $t$. Когда произведение двух многочленов от $t$ дает в произведении многочлен нулевой степени? Когда это многочлены нулевой степени. Откуда это константы

Давайте посчитаем эти константы. Подставим в первый многочлен $t = 1$, а во второй подставим $t = 0$. Получим:

$$(\chi_\mathcal{A}(\mu))^\nu = \chi_\mathcal{D}(\mu)(\chi_\mathcal{A}(\mu))^{\nu-1})$$

Откуда $\chi_\mathcal{A}(\mu) = \chi_\mathcal{D}(\mu)$. Получили, что в любой точке - не корне, у нас совпадение многочленов. В корнях они оба заннуляются, откуда $\chi_\mathcal{A} \equiv \chi_\mathcal{D}$.

Q.E.D.

**Следствие 1:** $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{D} \Rightarrow \det \mathcal{A} = \det \mathcal{D}$

**Следствие 2:** $\forall \mathcal{A} : \alpha(\lambda) = \dim K_\lambda$

**Доказательство:**

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ - разложение Жордана. $\chi_\mathcal{A} \equiv \chi_\mathcal{D}$ из теоремы.

$D = \sum\limits_{\lambda} \lambda P_\lambda$, $\mathcal{D}$ - о.п.с. $\forall$ с.ч $\lambda : \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$, а теперь вспомним, что проекторы это с одной стороны проекторы на $K_\lambda$, а с другой стороны на собственные подпространства $\mathcal{D}$ $V_\lambda$.

Q.E.D.

## 1.10 Жорданова форма матрицы. Формула Фраббениуса.

Возьмем какое-то $\lambda$ и расмотрим сужение. Введем некоторые локальные обозначения:

$K = K_\lambda = \mathcal{K}er(A-\lambda)^{m(\lambda)}, B = (\mathcal{A}-\lambda\varepsilon)\Big|_K, m = m(\lambda), \alpha = \alpha(\lambda), \gamma = \gamma(\lambda).$

Возьмем $K_r = \mathcal{K}er(B^r) = \mathcal{K}er((\mathcal{A}-\lambda\varepsilon)^r), r = 1, \ldots, m : K_\lambda = K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_m = K$. Заметим, что $m$ - минимальная степень, когда он зануляется. Докажем, что там строгое включение:

**Доказательство:**

Пусть существует: $K_r \equiv K_{r+1}$. $\mathcal{K}erB^r = \mathcal{K}erB^{r+1}$. Тогда по теорема о ранге и дефекте:

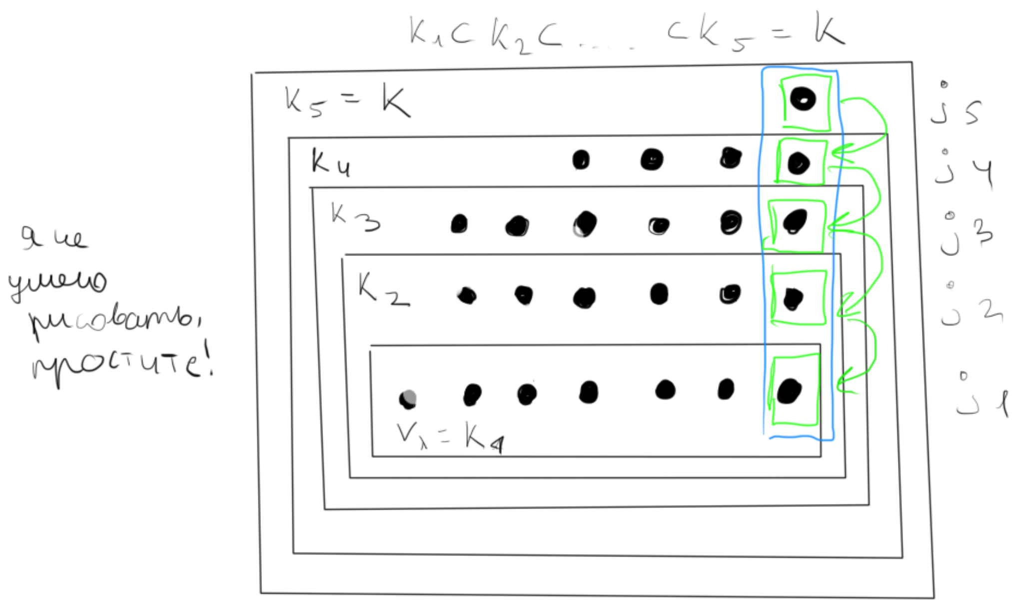
$rgB^r = rgB^{r+1}, \operatorname{Im} B^{r+1} \subseteq \operatorname{Im} B^r \Rightarrow \operatorname{Im} B^{r+1} = \operatorname{Im} B^r$

Что это значит? Пусть $X = \operatorname{Im} B^r$. Тогда $BX = X, \quad B^2X = X, \quad \ldots \quad, B^mX = X$.

Вспомним, что $B^m = \mathbb{0}$, откуда $X = \mathbb{0}$, но в таком случае(так как $r$ от 1 до $m-1$, то мы нашли число $r < m$, что $B^r = \mathbb{0}$. Но такого не может быть, так как $m$ - минимальная степень, чтобы оператор заннулился. Противоречие. Откуда все $K_i$ различны.

Q.E.D.

Доказали, что включения строгие. А теперь объясним все на рисунке, а позже введем более формальную терминологию:



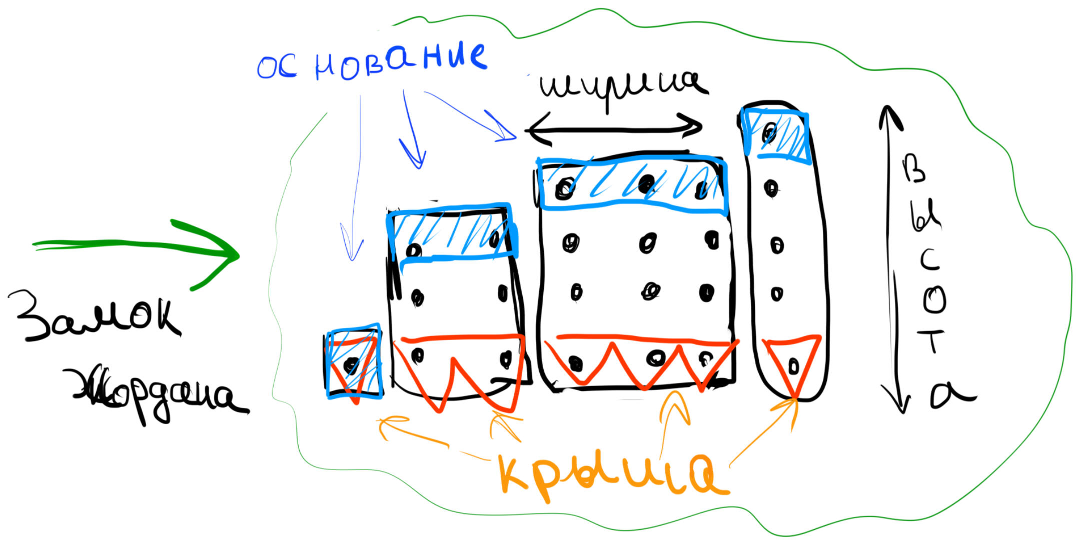

Рассмотрим такое $K$, что его ранг 24. И давайте сопоставим точкам на рисунке базисные вектора. Тогда у $K_1$ будет 6 базисных векторов, у $K_2$ будет 11 и так далее. Тогда давайте введем новое определение: $\overline{K}_5$, такое подпространство, что $(KB + K_4) \oplus \overline{K}_5 = K$. Возьму оттуда первый базисный вектор. Назову его $j_5$. На картинке вы можете это отчетливо видеть. Тогда возьму $j_4 = Bj_5$, $j_3 = Bj_4$, $j_2 = Bj_3$, $j_1 = Bj_2$. Причем заметим, что в таком случае $j_i \in K_i$.

Такие $j_5, j_4, j_3, j_2, j_1$ мы будем называть **циклическим базисом** длины 5, а $j_4, j_3, j_2, j_1$ будут называться **присоединяемыми**.

Пока упустим, почему эти векторы линейно независимы, это потом докажется. Давайте сузим наш оператор до $S = span(j_1, \ldots, j_5)$ и попытаемся понять: какая будет матрица оператора. Заметим, что $K_1 = V_\lambda$, откуда мы знаем, что $j_1$ - собственное число $\lambda$, то есть $Aj_1 = \lambda j_1$. $j_1 = Bj_2$, то есть $\mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2$. Таким образом получаю, что моя матрица будет:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Такая матрица называется **жордановой клеткой**, порожденной циклическим базисом размерности 5. Обозначается $J_5(\lambda) = \lambda E + I_5$, где $I_5$ - матричка из единиц на диагонали, расположенной выше главной. По-другому еще называется **блок нижнего уровня**.




Давайте теперь возьмем все такие циклические базисы(столбики) одной высоты и объединим их. Получатся **башни**. Или более формально башня - подпространство, порожденное циклическими базисами одной длины. У башни есть **опорные подпространства**(основание башни), а так же у каждой башни есть **крыша**. Они подписаны на рисунках сверху. Башни мы будем обозначать $\tau_h$, где $h$ высота башни. То есть на данном рисунке присутствует башня $\tau_1, \tau_3, \tau_4, \tau_5$, но не присутствует башня $\tau_2$.

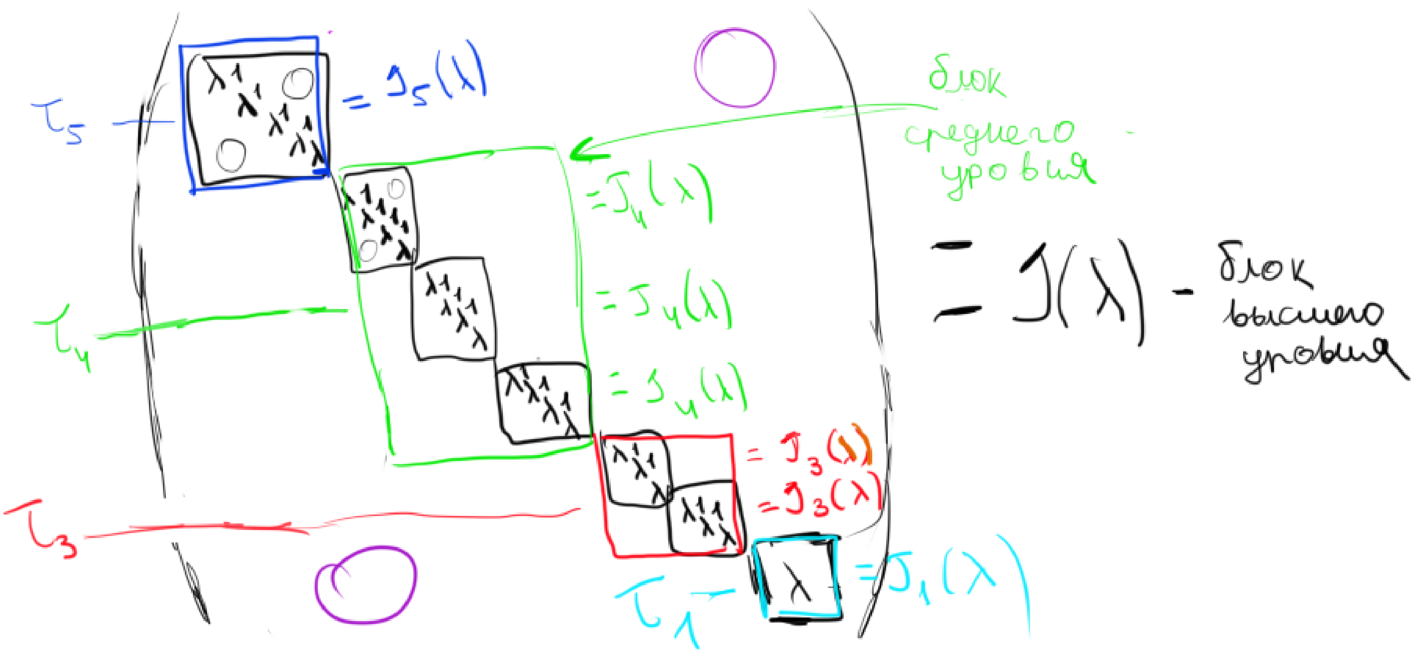
Замок Жордана, возвышающийся над живописными холмами Прованса, хранит немало тайн. Говорят, что в 15 веке в нем жил загадочный алхимик по имени Пьер. Местные жители часто видели странное зеленоватое свечение в окнах замка по ночам...

Так о чем это я? Вся эта конструкция величается **ЗАМКОМ ЖОРДАНА**. А если у нас $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$, то наш замок будет просто полоской, поэтому мы его будем называть **деревней Жордана**.

Так вот матрица, соответствующая этой $K_\lambda$, выраженной через циклические базисы:

$$\begin{pmatrix} J_5(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix} = J(\lambda)$$

Называется **блоком верхнего уровня**, причем $m$ - размер самой большой клетки. При этом, если раскрыть все $J$, то получится:




Теперь мы приходим к **матрице в форме Жордана**, она состоит блоков верхнего уровня, соответсвующих собственных чисел

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda) & & & \\ & J(\mu) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\xi) \end{pmatrix}$$

$T = T_{\text{кан} \to \text{жорд. базис}} =$ объединение всех циклических базисов.

И если $A$ - матрица $\mathcal{A}$, то: $T^{-1}AT = J$.

**А ТЕПЕРЬ НА ЯЗЫКЕ МАТЕМАТИКИ:**

$B = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)\Big|_K$. Введу $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_r \subset \ldots \subset K_m = K$, где $K_r = \mathcal{K}er B^r$.

Введем временное обозначение:

$z_0 = BK = \operatorname{Im} B$
$z_1 = BK + K_1$
$\vdots$
$z_r = BK + K_r$
$\vdots$
$z_m = BK + K_m = K$

Заметим, что в таком случае: $z_0 \subseteq z_1 \subseteq \ldots \subseteq z_m$, а также $z_{r+1} = z_r \oplus \overline{K}_{r+1}$, где $\overline{K}_r$ - **опорное подпространство**. Тогда заметим вот такую формулу:

$$K = z_m = BK + K_m = z_{m-1} \oplus \overline{K}_m = BK \oplus \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m$$

Прямую сумму $K_\lambda$ называют **прямой суммой опорных подпространств**.

**Теорема:**

$\forall r : 1 \le r \le m-1$ будет выполнено: $B^r K = B^{r+1}K \oplus B^r\overline{K}_{r+1} \oplus B^r\overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus B^r\overline{K}_m$

**Доказательство:**

Пусть $x_* \in K$. Тогда существует и единственно представление в прямой сумме опорных подпространств и $BK$:

$$x_* = Bx + x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \text{ где } x_j \in \overline{K}_j$$

Теперь умножим правую и левую часть на $B^r$:

$$B^r x_* = B^{r+1}x + B^r x_1 + \ldots + B^r x_r + \ldots + B^r x_m$$

Заметим, что в таком случае все $x_j$, где $j \le r$ уйдут, потому что $x_j \in \overline{K}_j$, то есть $B^j x_j = \mathbb{0}$.

$$B^r K = B^{r+1}K + B^r\overline{K}_{r+1} + B^r\overline{K}_{r+2} + \ldots + B^r\overline{K}_m$$

Осталось проверить дизъюнктность, то есть проверить тривиальность разложения нуля:

$$\mathbb{0} = B^{r+1}x + B^r x_{r+1} + \ldots + B^r x_m = B^r(Bx + \ldots + x_m)$$

Заметим, что то, что находится внутри скобок находится в $\mathcal{K}er B^r \subset z_r = BK \oplus \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_r$. Откуда существует единственное разложение через эту прямую сумму:

$$Bx + x_{r+1} \ldots + x_m = By + x_1 + \ldots + x_r$$

Но, как мы помним $BK$ и $\overline{K}_j$ - дизъюнктны из прямой суммы опорных пространств и $\operatorname{Im} B = BK$. То есть $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$. Откуда получаем, что $Bx$ тоже ноль, откуда разложение нуля - тривиально.

Q.E.D.

**Следствие:**

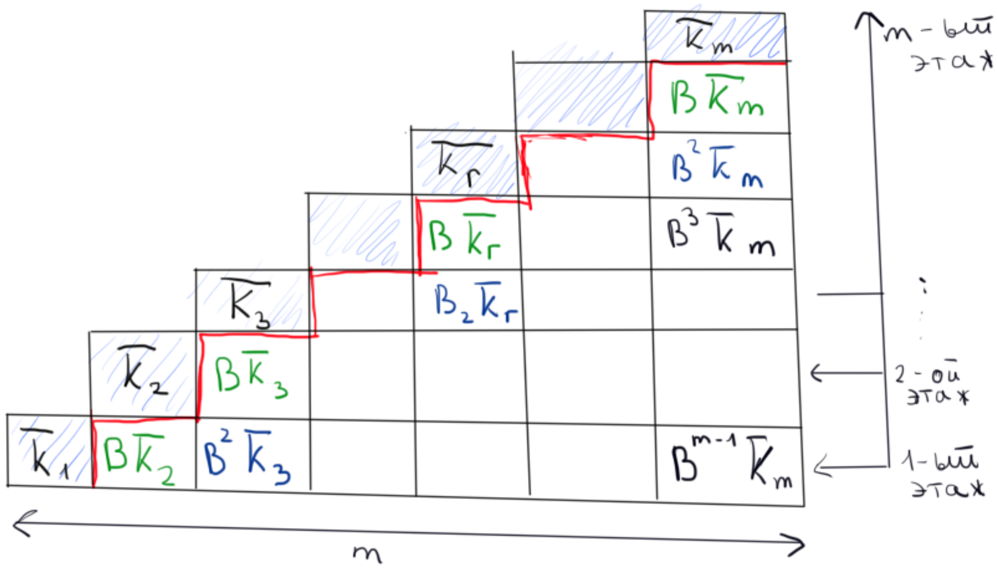
$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus B\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus B\overline{K}_m \oplus B^2\overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus B^{m-1}\overline{K}_{m-1}$

**Доказательство:**

$K = BK \oplus \overline{K}_1 \ldots \oplus \overline{K}_m$
$BK = B^2K \oplus B\overline{K}_2 \ldots \oplus B\overline{K}_m$
$\vdots$
$B^{m-1}K = B^mK \oplus B^{m-1}\overline{K}_m = B^{m-1}\overline{K}_m$
Подставьте рекурсивно и получите все, что нам надо.

Q.E.D.

Тогда из этого следствия наше корневое подпространство $K$ можно представить вот так:




**def:** Если $\overline{K}_r \neq \{\mathbb{O}\}$, то тогда: $\overline{K}_r \oplus B\overline{K}_r \oplus \ldots \oplus B^{r-1}\overline{K}_r = \tau_r$ - называется **башней**

Заметим, что $l$-ый этаж башни - $B^{r-l}K_r$.

Если $\overline{K_r} = \{\mathbb{O}\} \Rightarrow$ башни высоты $r$ нет.

Покажем, что каждый этаж башни имеет одну и ту же размерность, которая называется — **шириной башни**.

**Теорема (о размерности башни)**

Все этажи башни высоты $r$ имеют одну и ту же dim (называем ее шириной $d_r$)

$\dim \overline{K}_r = \dim B\overline{K}_r = \ldots = \dim B^{r-1}\overline{K}_r = d_r$.

**Доказательство:**

$\forall j = 1, \ldots, r-1 : B^j : \overline{K}_r \to B^j\overline{K}_r$. Покажем, что $\overline{K}_r$ и $B^j\overline{K}_r$ — изоморфные пространства. (Тогда у нас сразу совпадут dim и не надо будет ничего доказывать).

Заметим, что у нашего отображения уже есть сюръективность (потому что мы буквально сужаем, то куда переводит наше отображение). Значит, чтобы доказать изоморфность нам нужна инъективность. А что такое инъективность? Это то, что $\exists x_1, x_2 \in \overline{K}_r$, что $B^jx_1 = B^jx2 \Leftrightarrow B^j(x_1 - x_2) = \mathbb{O}$. То есть если мы покажем тривиальность ядра $B^j$, то тогда наша функция будет инъективной:

Пусть $x \in \mathcal{K}erB^j$ и $x \in \overline{K}_r$, тогда $x \in \mathcal{K}erB^j \cap \overline{K}_r = K_j \cap \overline{K}_r$. А как мы знаем $K_j \cap \overline{K}_r = \{\mathbb{O}\}$. Если бы был $x$ в их пересечении, то тогда $x \in \mathcal{K}erB^j = K_j$ и $x \in \overline{K}_r$. Но как мы знаем x находится именно в $\overline{K}_r$, поэтому $B^{r-1}x \neq \mathbb{O}$, но как я сказал ранее: $x \in \mathcal{K}erB^j$. Противоречие.

То есть А это значит, что $x \in \{\mathbb{O}\} \Leftrightarrow x = \mathbb{O}$, откуда ядро тривиально, наша функция инъективна, а из этого уже следует изоморфность, то есть биекция.

Q.E.D.

**Следствие 1.** $\sum_{r=1}^{n} d_r = \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$.

**Следствие 1.5.** $\sum_{r=1}^{m} r \cdot d_r = \alpha(\lambda) = \dim K_\lambda$

**Следствие 2. (Теорема Фробениуса.)**

$$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$$

**Доказательство:**

$B^rK = B^{r+1}K \oplus B^r\overline{K}_{r+1} \oplus \ldots \oplus B^r\overline{K}_m$

Введем обозначение $p_r := \dim \operatorname{Im} B^R = \dim B^rK = rgB^r$. Тогда:

$$p_r - p_{r+1} = d_{r+1} + d_{r+2} + \ldots + d_m$$

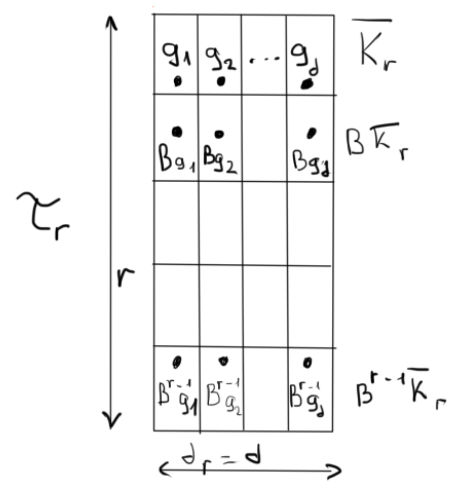
Давайте напишем разности:

$$\begin{aligned}
p_0 - p_1 &= d_1 + d_2 + \ldots + d_m \\
p_1 - p_2 &= \phantom{d_1 +{}} d_2 + \ldots + d_m \\
&\vdots \\
p_{m-1} - p_m &= \phantom{d_1 + d_2 + \ldots +{}} d_m
\end{aligned}$$

А теперь получаем, что $d_1 = p_0 - 2p_1 + p_2$, $d_2 = p_1 - 2p_2 + p_3$, а откуда если заметить, то мы получаем нужную мне формулу!

**Замечание:** Такое равенство в теореме не очень удобно, потому что $B$ - суженное изображение. todo: дописать формулу с практики

Пусть $\overline{K}_r = span(g_1, g_2, \ldots, g_d)$ - на рисунке это показано точечками. Давайте к этим векторам будем применять наше отображение. Сначала получим $Bg_1, \ldots, Bg_d$, а в теореме о размерности башни мы доказали, что у нас изоморфнs $\overline{K}_r$ и $B\overline{K}_r$, то есть мы получили еще один базис, только теперь $B\overline{K}_r$. Будем так проделывать и получим, что у нас базис $B^i\overline{K}_r$ это $B^ig_1, \ldots, B^ig_d$.




**def:** **Циклическим базисом**, порожденным вектором длины $r$ называются $g_p, Bg_p, \ldots, B^{r-1}g_p$. В таком случае $Bg_p, \ldots, B^{r-1}g_p$ называют **присоединяемыми**.

$S = span(B^{r-1}g_p = j_1, B^{r-2}g_p = j_2, \ldots, g_p = j_p)$.

Как мы помним из рассуждений наверху в самом начале этого параграфа:

$$A\Big|_S \overset{j}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ - с.ч.}} K_\lambda = \bigoplus\limits_{\lambda} \bigoplus\limits_{r} \bigoplus\limits_{p} S_{p,\lambda,r}$ - объединение всех базисов называется **Жордановым базисом**.

## 1.11 Функция оператора матрицы, приводимой к Жордановой форме.

$f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m, |x| < r$

$f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m A^m$, $|\lambda| < r$ - все случайные числа.

Как мы знаем матрицу можно привести к жордановой форме. $A = TJT^{-1}$.

$J = \begin{pmatrix} J(\lambda) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & J(\mu) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & J(\xi) \end{pmatrix}$

Давайте посчитаем функцию от матрицы $A$:

$$f(A) = f(TJT^{-1}) = T \begin{pmatrix} f(J(\lambda)) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & f(J(\mu)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & f(J(\xi)) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Посмотрим на блок высшего уровня. Он состоит из клеток:

$J(\lambda) = \begin{pmatrix} K_1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & K_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & K_k \end{pmatrix}$, где $K_i$ - жорданова клетка.

Тогда $f(J(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(K_1) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & f(K_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & f(K_{ind}) \end{pmatrix}$

Посмотрим ситуацию для одной клетки. $J_k = \lambda E + I_k$.

$(\lambda E + I_k)^m = \sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j \lambda^{m-j} (I_k)^j$

Теперь мы можем показать соответствующую матрицу (туда была добавлена t):

$$J_k^m t^m = \begin{pmatrix} \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1}t^m & \frac{m(m-1)}{2}\lambda^{m-2}t^m & \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\lambda^{m-3}t^m & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(k-1)!}\lambda^{m-k+1}t^m \\ & \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1}t^m & & & \vdots \\ & & \lambda^m t^m & \ddots & & \\ & & & \ddots & \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1}t^m \\ 0 & & & & & \lambda^m t^m \end{pmatrix}$$

Теперь посмотрим $f(J_k t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m J_k^m t^m =$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m t^m \lambda^m & \frac{t}{1}\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m m(\lambda t)^{m-1} & \frac{t^2}{2!}\sum\limits_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)(\lambda t)^{m-2} & \frac{t^3}{3!}\sum\limits_{m=3}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2)(\lambda t)^{m-3} & \cdots \\ 0 & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \end{pmatrix}$$

У ряда мы можем брать производную сколько угодно раз (факт из математического анализа) (от функции в которую подставлен $\lambda t$)

Откуда наша страшная формула равна $f(\lambda t) = \begin{pmatrix} f(\lambda t) & \dfrac{t}{1}f'(\lambda t) & \dfrac{t^2}{2}f^{(2)}(\lambda t) & \dots & \dots \\ 0 & f(\lambda t) & \dfrac{t}{1}f'(\lambda t) & \ddots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \end{pmatrix}$

**Пример:**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$f(x) = \cos x,\ /f'(x) = -\sin x,\ f^{(2)}(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x$

$f'(\lambda t) = -\sin \lambda t$

$$\cos(J_4 t) = \begin{pmatrix} \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) & \frac{t^2}{2!}(-\cos \lambda t) & \frac{t^3}{3!}(-\sin \lambda t) \\ \vdots & \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) & \frac{t^2}{2!}(-\cos \lambda t) \\ \vdots & \ddots & \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) \\ 0 & \dots & \dots & \cos \lambda t \end{pmatrix}$$

# 2 Тензоры.

## 2.1 Линейные формы (функционалы). Сопряженное (дуальное) пространство. Контрвариантный и ковариантный законы преобразования координат.

**def:** $V$ - линейное пространство над полем $K$, $f : V \to K$ - линейная:

$$\forall \lambda \in K : \forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2)$$

Такое $f$ называется **линейной формой** или **функционал**.

**Примеры:**

1. $\overline{b} = const : \forall \overline{a} :\in V_3 : f(\overline{a}) = (\overline{a}, \overline{b})$ - очевидно линейная форма
2. $A_{n\times n} : f(A) = tr(A)$ - очевидно линейная.
3. $p \in P,\ t_0 \in k$ фикс. $f(p) = \frac{p^{(m)}t_0}{m!}$ - линейная форма.
4. $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ - бесконечномерное линейное пр-во. $\delta(f) = f(0)$ — дельта-функция Дирака.

$f_1, f_2$ - линейные формы. Введем операции:

1. **Сложение:** $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$
2. **Умножение на скаляр:** $(\lambda f_1)(v) = \lambda f_1(v)$

Очевидно существует ноль и противоположные. Откуда выполнены аксиомы 1-8, откуда линейное пространство.

$V^* = \{f : V \to K$ - линейная форма$\}$ - называется **сопряженное** пр-во к $V$ или **дуальное**.

Возьмем $V$, зафиксируем $e_1, \ldots, e_n$ - базис.

$\forall X \in V : X \in \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = x^i e_i$ - вспоминаем правило Энштейна из первого семестра. Тогда:

$$X \overset{e}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x$$

$f(X) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i) = x^i a_i$, где $f(e_i) = a_i \in K$. $f(X) = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

$f \leftrightarrow a = (a_1, \ldots, a_n)$ строка. $V^* = (K^n)^T$.

Откуда $\dim V^* = n$. Это взаимооднозначное соответствие, оно очевидно линейно, откуда это изоморфизм.

То есть теперь на самом деле функции описываются строками — значениями на базисных векторах.

**Пример:**

Возьмем и посмотрим на скалярное произведение в $V_3$, $\bar{b} = const$. $\forall X \in V_3,\ f(\bar{X}) = (\bar{X}, \bar{b})$.

$f(\bar{i}) = (\bar{i}, \bar{b}) = b_1,\ f(\bar{j}) = (\bar{j}, \bar{b}) = b_2,\ f(\bar{k}) = (\bar{k}, \bar{b}) = b_3$

$\bar{X} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$

$f(\bar{X}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, у нас строка $f \leftrightarrow (b_1, b_2, b_3)$

**def:** $V$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис.

$\forall x \in V : w^i(x) = x^i$ — $i$-ая координата вектора $x$ относительно базиса e.

$w^i$ называется **координатной функцией**.

Не трудно заметить, что $w^i$ - линейная форма $\in V^*$.

**Теорема 1: (о базисе $V^*$)**

Доказать $w^1, \dots, w^n$ - базис $V^*$.

**Доказательство:**

Докажем порождаемость:

$\forall f \in V^* : \forall x \in V : f(x) = x^i a_i = w^i(x)a_i$, где $a_i \in K$ — порождаемое

Докажем линейную независимость, показав единственность разложения нуля:

$\mathbb{O} = \alpha_i w^i$, где $\alpha_i \in K$. Посмотрим на $\forall x \in V :\ \alpha_i w^i(x) = \mathbb{O}$.

Пусть $x = e_j$ для $j = 1, \dots, n$. Как мы знаем, для $i \neq j : w^i(e_j) = 0$. Тогда $\alpha_i w^i(e_j) = \alpha_j = 0$, $\forall j \Rightarrow$лин. независим.

Q.E.D.

**Следствие:** $w^i$ координатные формы относительно базиса $e \Rightarrow \forall f \in V^* : f = a_i w^i$, т.е $a = (a_1, \dots, a_n)$ координаты $f$ в базисе $w = (w^1, \dots, w^n)$ пространства $V^*$

**def:** $w^1, \dots, w^n$ называется **сопряженным** (дуальным) к базису $e$ пространства $V$.

Очевидно $w^j(e_j) = \sigma^i_j$.

**Теорема 2:**

$\forall$ базиса $w'^1, \dots, w'^n$ пространства $V^*$.

$\exists!$ базис $e'_1, \dots, e'_n$ пространства $V$ такой, что $w'$ базис, сопряженный к $e'$. То есть $w'^i$ координаты формы относительно $e'$.

**Доказательство:**

Пусть $e_1, \dots, e_n$ базис $V$. Тогда, как мы говорили ранее: $w^1, \dots, w^n$ координатные функции относительно $e$, базис $V^*$ сопряженный к $e$.

Возьмем $w'$. Так как он базис и $w$ базис, то:

$$w' = wT_{w \to w'}$$

$(T_{w \to w'})^T = S = (S^i_j)_{n \times n}$. Заметим, что $S$ не вырожденная, т.к. $T$ матрица перехода. Строки матрицы $S$ - это координаты элементов нового базиса $w'$ в старом базисе($w$).

$$(w'^1, \dots, w'^n) = (w^1, \dots, w^n)T_{w \to w'}$$

Давайте все транспонируем:

$$\begin{pmatrix} w'^1 \\ \vdots \\ w'^n \end{pmatrix} = (T_{w\to w'})^T \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$$

Пусть $S^{-1} = T = (t^i_j)_{n\times n}$ - невырожденная, то если думать о ней как о $T_{e\to e'}$, получим, что $e' = eT$ базис в пр-ве $V$.

Осталось показать, что $w'$ будет сопряженным к $e'$, т.е. показать $w'^i(x) = x'^i$, $x = x'^i e'_i$, для всех $x \in V$. Тк $w'^i$ - линейная форма, то:

$$w'^i(x'^i e'_j) = x'^j w'^i(e'_j)$$

Теперь, давайте заметим, что $w'^i = S^i_k w^k$, $e'_j = t^m_j e_m$. Откуда

$$w'^i(e'_j) = S^i_k w^k(t^m_j e_m) = S^j_k t^m_j w^k(e_m) = S^i_m t^m_j = (ST)^i_j =$$

Q.E.D.

**Следствие.** $e, e'$ базисы $V$, $w, w'$ сооответственные сопряженные базисы к $e, e'$ в $V^*$.

$T = T_{e\to e'}, S = T^{-1}$

$\Rightarrow \forall x \in V : \forall f \in V^* : x' = Sx, a' = aT$, где $a$ - разложение $f$ в базисе.

**Доказательство:**

$T = T_{e\to e'}$ и мы уже знаем, что $x' = T_{e'\to e}x = Sx$

$(T_{w\to w'})^T = S$. Как мы знаем из матрицы перехода:

$$a^T = T_{w\to w'}(a')^T$$

Откуда:

$$a = a'(T_{w\to w'})^T = a'S$$

А уже отсюда получаем, что $a' = aS^{-1} = aT$.

Q.E.D.

**Замечание от Славы.** Очень удобно менять базис, когда у нас один из базисов канонический. А также, зная матрицу перехода $T_{w\to w'}$ мы уже знаем матрицу перехода из $T_{e\to e'} = ((T_{w\to w'})^T)^{-1}$

Преобразование координат, согласованных по тому же закону, что и базис: $a' = aT$

Преобразование координат, согласованных по противоположному закону: $x' = Sx$

**def:** Преобразование координат векторов пространства $V$ происходит по закону, противоположному преобразованию базисов — называется **контрвариантным**, а координаты векторов пространства $V$ называется **контрвариантыми**(индексы координат пишутся сверху)

**def:** Преобразование координат векторов пространства $V$ происходит по тому же закону, что преобразованию базисов в пространстве $V$(т.е. согласованно) называется **ковариантным** преобразованиям. Координаты векторов пространства $V^*$ называется **ковариантным**(индексы пишутся внизу)

Позамечаем интересные факты:

$\forall f \in V^* \leftrightarrow (a_1, \dots, a_n), a_j = f(e_j)$ - каждой функции, как и говорилось ранее, на заданном базисе, я могу сопоставить $a$. Поэтому возьму $n$ функций и векторов, и захочу посчитать значение каждой функции в каждой точке :

$\forall f^1, \dots f^n \in V^* : f^j \overset{w}{\longleftrightarrow} a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$

$\forall x_1, \dots, x_n \in V : x_i \overset{e}{\longleftrightarrow} x_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^n \end{pmatrix}$

Хочу посчитать вот такую вот страшную матрицу (значение каждой функции в каждой точке):

$$(f^j(x_i))_{n\times n} = \begin{pmatrix} f^1(x_1) & f^1(x_2) & \dots & f^1(x_n) \\ f^2(x_1) & f^2(x_2) & \dots & f^2(x_n) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f^n(x_1) & f^n(x_2) & \dots & f^n(x_n) \end{pmatrix} = f^j(x_i) = a^j x_i =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \ddots & \ddots & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & \ddots & \ddots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \dots & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \text{ - лаконичная запись!}$$

Интересный факт, который идет из такого произведения:

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} \cdot (e_1 e_2 \dots e_n) = E$$

**<u>def:</u>** $V^{**} = (V^*)^*$ **<u>дважды сопряженное</u>** пространство.

$\forall f \in V^*$. Пусть $x \in V$:

$"x"(f) = f(x)$. $"x" : V^* \to K$.

$\forall \lambda \in K : \forall f^1, f^2 \in V^*$

$"x"(\lambda f^1 + f^2) = (\lambda f^1 + f^2)(x) = \lambda f^1(x) + f^2(x) = \lambda_1 "x"(f^1) + "x"(f^2)$

$\Rightarrow "x"$ линейное отображение $\Rightarrow "x" \in (V^*)^*$

Дальше у $"x"$ будут упускаться :))

**<u>Теорема 3 (О естественном изоморфизме)</u>**

Естественный - не зависит от введения базиса.

$V \cong V^{**}$

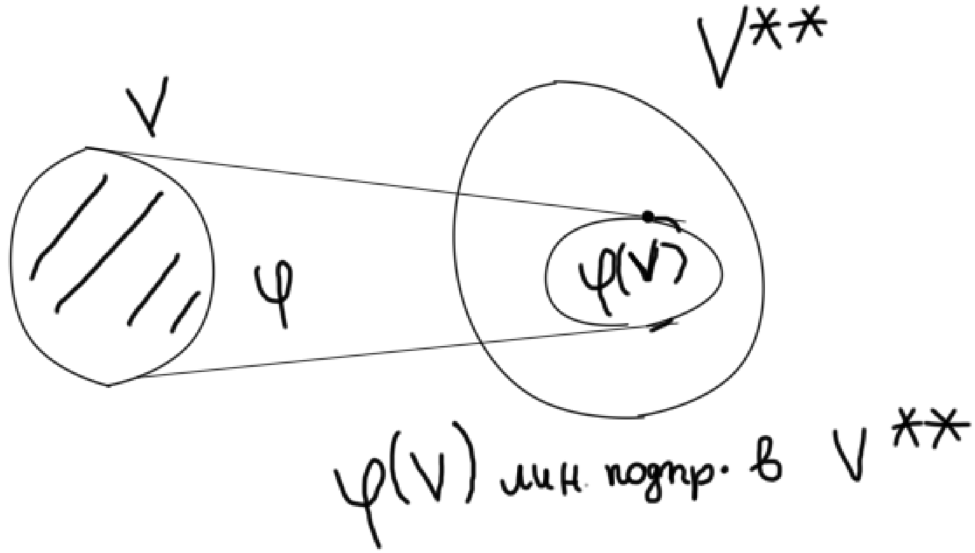
**Доказательство:**

$\forall x \in V \to "x" \in V^{**}$. Назовем это отображение $\varphi$.

Покажем, что наше взаимооднозначное сопоставление линейно.

$x_1 + \lambda x_2 \in V : x_1 \to "x_1", x_2 \to "x_2"$

$\forall f \in V^* : "x_1 + \lambda x_2"(f) = f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2) = "x_1"(f) + \lambda "x_2"(f)$. Откуда $\varphi$ линейно.




Покажем, что $\varphi$, это изоморфизм.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис $V$. Им соответствуют $"e_1", \ldots, "e_n"$. Покажем, что это базис в $V^{**}$:

Мы знаем, что $\dim(V^*)^* = \dim V^* = \dim V = n$. Откуда достаточно показать, что $"e_1", \ldots, "e_n"$ - линейно независимы. Для этого покажем единственность разложения нуля.

$0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i "e_i"(w_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i w^j(e_j) = \alpha_j \Rightarrow$ линейно независимы, откуда базис.

Откуда отображение $\varphi$ это изоморфизм.

Q.E.D.

Как мы только что поняли: $x \in V \leftrightarrow "x" \in V^{**}$ - изомофризм. $f \in V^*, x \in V$.

$x(f) = f(x) = x^i a_i = w^i(x) a_i = x(w^i) a_i = x^i a_i = x^i f(e_i) = x^i e_i(f)$

$e$ и $w$ взаимно сопряж.

$x = x^i e_i, w^i(x) = x^i$, где $x \in V$

$e_j(f) = f(e_j) = a_j (f \in V^*)$, $e_j \in V^{**}$ - коорд. формы относительно базиса $w^i$.

Я категорически не помню для чего Кучерук это написала, напомните мне пж.

**Пример:**

$\mathcal{A}$ - о.п.с, $A$ - диагонализируема.

$V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda = span(v_1, \ldots, v_n)$

$w^1, \ldots, w^n$ сопряж. базис к $v$

$\Rightarrow \forall x \in V : w^j(x) = x^i : x^i v_j = x$

## 2.2 Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица тензоров.

**def:** Есть $V, V^*$ и $p, q \in N$.

**Тензором** типа $(p, q)$ ($p$-раз коварентная, $q$-раз контрвариантным) называется полинейная функция $f : V^p \times (V^*)^q \to K$. $p, q$ называются **валентностями** тензора, $r = (p+q)$ ранг тензора.

Если $r = 0, f = const$. Если тензор $(p, 0)$ - **ковариантный** тензор валентности $p$. Если тензор $(0, q)$ - **контрвариантный** тензор валентности $q$. $p \neq 0$ и $q \neq 0$ - тензор смешанного типа.

$\xi_j \in v, \eta^i \in V^*$

$f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q)$ - линейно по каждому аргументу (или полилинейная)

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ - базис $V$, $w = (w^1, \ldots, w^n)$ - базис $V^*$. Тогда сделаем похожую вещь, как когда мы считали определитель. По линейности вынесем, то есть:

$$\xi_j = \xi_j^{j_k} e_{j_k}; \eta^i = \eta^i_{i_m} w^{i_m}$$

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \ldots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \ldots \eta^q_{i_p} \cdot f(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_p}, w^{i_1}, \ldots, w^{i_q})$$

То есть на самом деле наша функция задается матрицей значений на базисных векторах. Обозначим $f(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_p}, w^{i_1}, \ldots, w^{i_q}) = \alpha^{i_1, \ldots, i_q}_{j_1, \ldots, j_p}$

**def:** $M$ - **многомерная матрица** тензора $r = (p+q)$ мерная размерности $n$.

**Замечание:** Если говорить программистким языком, то наша матрица это просто:

```
for (i1 = 1 ... n):
    for(i2 = 1 ... n):
        ...
        for(iq = 1 ... n):
            for(j1 = 1 ... n):
                ...
                for(jp = 1 ... n):
                    m[i1][i2]...[iq][j1]...[jp] = f(соответсвенных значений)
```

**Соглашение о записи элементов многомерной матрицы**

$\alpha^{i_1, \ldots, i_q}_{j_1, \ldots, j_p} \in M_{p+q}$ - многомерная матрица порядка $n$. $i_k \in (1, \ldots, n); j_m \in (1, \ldots, m)$

Мы читаем сначала верхние индексы, потом нижние в записи

**Пример:**

1. $r = 2 : (\alpha^i_j), (\alpha^{ij}), (\alpha_{ij})$

   1-ый индекс номер строки

   2-ой индекс номер столбца

   Например при $n = 3$:

   $$(a^i_j) = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 & \alpha^1_3 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 & \alpha^2_3 \\ \alpha^3_1 & \alpha^3_2 & \alpha^3_3 \end{pmatrix} \text{ или } (a^{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} \\ \alpha^{31} & \alpha^{32} & \alpha^{33} \end{pmatrix}$$

2. $r = 3 : (\alpha^{ijk}), (\alpha^{ij}_k), (\alpha^i_{jk}), (\alpha_{ijk})$

   1-ый индекс всегда стр

   2-ой индекс всегда столб

   3-ий индекс всегда слой

   Например при $n = 3$:

   $$(a^i_{jk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha^1_{11} & \alpha^1_{21} & \alpha^1_{31} & \alpha^1_{12} & \alpha^1_{22} & \alpha^1_{32} & \alpha^1_{13} & \alpha^1_{23} & \alpha^1_{33} \\ \alpha^2_{11} & \alpha^2_{21} & \alpha^2_{31} & \alpha^2_{12} & \alpha^2_{22} & \alpha^2_{32} & \alpha^2_{13} & \alpha^2_{23} & \alpha^2_{33} \\ \alpha^3_{11} & \alpha^3_{21} & \alpha^3_{31} & \alpha^3_{12} & \alpha^3_{22} & \alpha^3_{32} & \alpha^3_{13} & \alpha^3_{23} & \alpha^3_{33} \end{array}\right)$$

3. $r = 4 : (\alpha^{ijkm}), (\alpha^{ijk}_m), (\alpha^{ij}_{km}), (\alpha^i_{jkm}), (\alpha_{ijkm})$

   1-ый индекс всегда стр

   2-ой индекс всегда столб

   3-ий индекс всегда слой

   4-ый индекс срез

   Например при $n = 2$ мы имеем:

   $$(a^i_{jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha^{11}_{11} & \alpha^{12}_{11} & \alpha^{11}_{12} & \alpha^{12}_{12} \\ \alpha^{21}_{11} & \alpha^{22}_{11} & \alpha^{21}_{12} & \alpha^{22}_{12} \\ \hline \alpha^{11}_{21} & \alpha^{12}_{21} & \alpha^{11}_{22} & \alpha^{12}_{22} \\ \alpha^{21}_{21} & \alpha^{22}_{21} & \alpha^{21}_{22} & \alpha^{22}_{22} \end{array}\right)$$

4. $r = 1 : (\alpha^i), (a_i)$

   При первой записи мы считаем, что она в столбик, а при второй считаем, что она строчка

**Пример:**

$f : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$

$\forall \overline{a}, \overline{b} : f(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\varphi$

$f \in T(2, 0)$. Зафиксируем базис $e_1, e_2, e_3$:

$f(a^i e_i, b^j r_j) = a^i b^j f(e_i, e_j)$

Пусть $e_1, e_2, e_3$ вектора, между которыми 2 угла по 60 градусов и 1 120 и $|e_i| = i$.

Тогда $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 4 & 3 \\ \frac{3}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix}$

**Вернемся в реальность**.

Пускай $f \in T(p, q) \overset{e,w}{\longleftrightarrow} \left(\alpha^{i_1, \ldots, i_q}_{j_1, \ldots, j_p}\right)$, где $e$ - базис, $w$ - дуально сопряженный

$f : V^p \times (V^*)^q \to K$

Возьмем $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ и дуальный к нему $w' = (w'_1, \ldots, w'm)$

$T = (e \to e'), S = T^{-1} = (T^T_{w \to w'})$

Замечу, что $\xi = \xi^i e_i : \xi = T\xi' \leftrightarrow \xi^i = t^i_k \xi'^k$ и $\eta = \eta_j w^j ; \eta = \eta' S \leftrightarrow \eta^j = s^k_j \eta'_k$

Возьму $\xi_1, \dots, \xi_p \in V$ и $\eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \xi^{j_1}_1 \dots \xi^{j_p}_p \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{iq} = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cdot t^{j_1}_{k_1} \xi'^{k_1}_1 \dots t^{j_p}_{k_p} \xi'^{k_p}_p \cdot s^{m_1}_{i_1} \eta'^1_{m_1} \dots s^{m_q}_{i_q} \eta'^1_{m_q}$$

$$= \alpha^{i_1,\dots i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cdot t^j_{k_1} \dots t^{j_p}_{k_p} \cdot s^{m_1}_{i_1} \dots s^{m_q}_{i_q} \cdot \xi'^{k_1}_1 \dots \xi'^{k_p}_p \cdot \eta'^1_{m_1} \dots \eta'^{q_1}_{m_q}$$

Откуда подставив новые базисные вектора в эту формулу:

$$\alpha'^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} t^{j_1}_{k_1} \dots t^{j_p}_{k_p} \dots s^{m_1}_{i_1} \dots s^{m_q}_{i_q}$$

$j_1, \dots, j_p$ ковариантные индексы матрицы, $i_1, \dots, i_q$ контрвариантые, откуда название тензора $f \in T(p, q)$ $p$-раз ковариантный, $q$ раз контрвариантный.

**Замечание:** это формула перехода(смены базиса) потом будет очень много везде использоваться.

**<u>2-ое определение тензора:</u>** $\alpha$ - $r = p + q$ мерная матрица $n$ - геометрический объект над пространством $V (\dim V = n)$, такой, что при смене базиса пространства $V$ элементы матрицы пересчитываются по формуле:

$$\alpha'^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} t^{j_1}_{k_1} \dots t^{j_p}_{k_p} \dots s^{m_1}_{i_1} \dots s^{m_q}_{i_q}$$

(геометрический объект - независимый от выбора базиса, но согласованный с заменой базиса, т.е. после замены базиса остается тем же объектом с теми же свойствами)

Если матрицы одного порядка, то мы умеем складывать их и умножать на скаляр, есть нулевая и противоположная, откуда это линейное пространство.

Осталось показать, что эти операции не ломают второе определение (формулу перехода):

$$(\alpha+\lambda\beta)'^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} = \alpha'^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} + \lambda\beta'^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cdot t^{j_1}_{k_1} \dots t^{j_p}_{k_p} \cdot s^{m_1}_{i_1} \dots s^{m_q}_{i_q} + \lambda\beta^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cdot t^{j_1}_{k_1} \dots t^{j_p}_{k_p} \cdot s^{m_1}_{i_1} \dots s^{m_q}_{i_q}$$

$$= (\alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} + \lambda\beta^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}) t^{j_1}_{k_1} \dots s^{m_q}_{i_q}$$

Откуда корректно.

**Замечание:** в дальнейшем мы будем называть формулу перехода - свойством линейного пространства.

То есть теперь наше линейное пространство сохраняет заданное свойство.

Заметим, что мы получили равносильность первого и второго определения.

## 2.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Свертка тензоров.

**<u>def:</u>** $\alpha \in T(p_1, q_1), \beta \in T(p_2, q_2)$. Тогда **<u>произведением</u>** тензоров называется тензор $\gamma \in T(p_1 + p_2, q_1 + g_2)$ :

$$\gamma^{i_1,\dots i_{q_1}, m_1,\dots,m_{q_2}}_{j_1,\dots,j_{p_1}, k_1,\dots,k_{p_2}} := \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1,\dots,j_p} \beta^{m_1,\dots,m_{q_2}}_{k_1,\dots,k_{p+2}}$$

Проверим корректность, то есть то что выполняется свойство тензора:

$$\gamma'^{\widetilde{i}_1,\ldots,\widetilde{i}_{q_1},\widetilde{m}_1,\ldots,\widetilde{m}_{q_2}}_{\widetilde{j}_1,\ldots,\widetilde{j}_{p_1},\widetilde{k}_1,\ldots,\widetilde{k}_{p_2}} = \alpha'^{\widetilde{i}_1,\ldots,\widetilde{i}_{q_1}}_{\widetilde{j}_1,\ldots,\widetilde{j}_{p_1}} \cdot \beta'^{\widetilde{m}_1,\ldots,\widetilde{m}_{q_2}}_{\widetilde{k}_1,\ldots,\widetilde{k}_{p_2}} =$$

$$= \alpha^{i_1,\ldots,i_{q_1}}_{j_1,\ldots j_{p_1}} t^{j_1}_{\widetilde{j}_1} \ldots t^{j_{p_1}}_{\widetilde{j}_{p_1}} s^{\widetilde{i}_1}_{i_1} \ldots s^{\widetilde{i}_{q_1}}_{i_{q_1}} \cdot \beta^{m_1,\ldots,m_{q_2}}_{k_1,\ldots k_{p_2}} t^{k_1}_{\widetilde{k}_1} \ldots t^{k_{p_2}}_{\widetilde{k}_{p_2}} s^{\widetilde{m}_1}_{m_1} \ldots s^{\widetilde{m}_{q_2}}_{m_{q_2}} =$$

$$= \gamma^{i_1,\ldots,i_{q_1},m_1,\ldots,m_{q_2}}_{j_1,\ldots,j_{p_1},k_1,\ldots,k_{p_2}} \cdot t^{j_1}_{\widetilde{j}_1} \ldots t^{j_{p_1}}_{\widetilde{j}_{p_1}} s^{\widetilde{i}_1}_{i_1} \ldots s^{\widetilde{i}_{q_1}}_{i_{q_1}} \cdot t^{k_1}_{\widetilde{k}_1} \ldots t^{k_{p_2}}_{\widetilde{k}_{p_2}} s^{\widetilde{m}_1}_{m_1} \ldots s^{\widetilde{m}_{q_2}}_{m_{q_2}}$$

Откуда получаем, что верно, это тензор!!! ~~я устал это писать~~

Обозначается $\gamma = \alpha \otimes \beta$.

Произведение ассоциативно, дистрибутивно, не коммутативно

**Пример:**

Пусть $\alpha \in T(1,0), \beta \in T(0,1)$. Тогда $\gamma = \alpha \otimes \beta \in T(1,1)$.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$. Тогда

$$\gamma^i_j = \alpha^i \beta_j \leftrightarrow \gamma = \begin{pmatrix} \alpha^1\beta_1 & \alpha^1\beta_2 & \alpha^1\beta_3 \\ \alpha^2\beta_1 & \alpha^2\beta_2 & \alpha^2\beta_3 \\ \alpha^3\beta_1 & \alpha^3\beta_2 & \alpha^3\beta_3 \end{pmatrix}$$

Возьмем $\alpha \in T(p_1, q_1) \leftrightarrow f : V^{p_1} \times (V^{q_1})^* \to K$.

Возьмем $\beta \in T(p_1, q_1) \leftrightarrow g : V^{p_2} \times (V^{q_2})^* \to K$.

$\xi_1, \ldots, \xi_{p_1} \in V; \eta^1, \ldots, \eta^{q_1} \in V^*; \zeta_1, \ldots, \zeta_{p_2} \in V; \theta^1, \ldots, \theta^{q_2} \in V^*$

$\gamma = a \otimes \beta \in T(p_1 + p_2, q_1 + q_1) \leftrightarrow t : V^{p_1+p_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \to K$

$$t(\xi_1, \ldots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p_2}, \eta^1, \ldots, \eta^{q_1}, \theta^1, \ldots, \theta^{q_2}) =$$

$$= \gamma^{i_1,\ldots,i_{q_1},m_1,\ldots,m_{q_2}}_{j_1,\ldots,j_{p_1},k_1,\ldots,k_{:p_2}} \xi^{j_1}_1 \ldots \xi^{j_p}_{p_1} \cdot \zeta^{k_1}_1 \ldots \zeta^{k_{p_2}}_{p_2} \cdot \eta^1_{i_1} \ldots \eta^{q_1}_{i_{q_1}} \cdot \theta^1_{m_1} \ldots \theta^1_{m_1} \ldots \theta^{q_2}_{m_{q_2}} =$$
$$= f(\xi_1, \ldots, \xi_{p_1}, \eta^1, \ldots, \eta^{q_1}) \cdot g(\zeta_1, \ldots \zeta_{p_2}, \theta^1, \ldots \theta^{q_2})$$

Вывели формулу, по которой мы можем легко находить значения функций. Воспользуемся нашей формулой и выведем еще одну:

$f^1, \ldots, f^p \in V^* = T(1,0) - f^j : V \to K$ - линейная форма

$g_1, \ldots, g_q \in V^{**} = T(0,1) - g_i : V^* \to k$

$\gamma = f^1 \otimes \ldots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \leftrightarrow a^1_{j1} \ldots a^p_{j_p} b^{i_1}_1 \ldots b^{i_q}_q = \gamma^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}$, $\gamma \in T(p,q)$.

Воспользуемся только что доказанной формулой и получим:

$$\gamma(\xi_1, \ldots \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = f^1(\xi_1) \ldots f^q(\xi_q) \cdot g_1(\eta^1) \ldots g_q(\eta^q)$$

Продолжим играться с этой формулой:

Пусть $f^j = w^j$, а $g_i = e_i$ (сопряженные базисы), и подставим это в нашу формулу:

$w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q} \in T(p,q)$

Как мы вывели ранее:

$$w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = w^{j_1}(\xi_1) \ldots w^{j_p}(\xi_q) \cdot e_{i_1}(\eta^1) \ldots g_{i_q}(\eta^q) =$$

$$= \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \ldots \xi_p^{j_p} \cdot \eta_{i_1}^1 \ldots \eta_{i_q}^q$$

Получили вот такую относительно простую формулу для базисных векторов

**Теорема (о базисе пространства тензоров типа (p,q))**

Набор тензоров $w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}$, где $j_k \in (1, \ldots, n), i_m \in (1, \ldots, n)$ — базис пространства $T(p,q)$.

**Доказательство:**

1. Докажем, что порождающее. Пусть $f \in T(p,q) : \forall \xi_1, \ldots \xi_p \in V, \forall \eta^1, \ldots \eta^q \in V^* :$

   Давайте найдем значение функции в этой точке:

   $$f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = \alpha_{j_1, \ldots, j_p}^{i_1, \ldots, i_q} \xi_1^{j_1} \ldots \xi_p^{j_p} \cdot \eta_{i_1}^1 \ldots \eta_{i_q}^q =$$

   Выразим координаты через базис и дуальный к нему:

   $$= \alpha_{j_1, \ldots, j_p}^{i_1, \ldots, i_q} w^{j_1}(\xi_1) \ldots w^{j_p}(\xi_p) e_{i_1}(\eta^1) \ldots e_{i_q}(\eta^q) = \alpha_{j_1, \ldots, j_p}^{i_1, \ldots, i_q} w^{j_1} \otimes \ldots \otimes p_{i_q}(\xi_1, \ldots, \eta^q)$$

   Что мы получили? Разложение в нашем базисе с коэффицентами: $\alpha_{j_1, \ldots, j_p}^{i_1, \ldots, i_q}$

   Откуда порождаемо.

2. Докажем, что линейно независимо. Для этого, как обычно, покажем единственность разложения нуля:

   $$\gamma = \alpha_{j_1, \ldots, j_p}^{i_1, \ldots, i_q} w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q} = \mathbb{O}$$

   Давайте подставим какие-то базисные векторы:

   $$\gamma(e_{\widetilde{j}_1}, \ldots, e_{\widetilde{j}_p}, w^{\widetilde{i}_1}, \ldots, w^{\widetilde{i}_q}) =$$

   $$\alpha_{j_1, \ldots, j_p}^{i_1, \ldots, i_q} w^{j_1}(e_{\widetilde{j}_1}) \ldots w^{j_p}(e_{\widetilde{j}_p}) \cdot e_{i_1}(w^{\widetilde{i}_1}) \ldots e_{i_q}(w^{\widetilde{i}_q})$$

   Заметим, что каждая из $w^{j_k}(e_{\widetilde{j}_k}) = \delta_{\widetilde{j}_k}^{j_k}$ и $e_{i_k}(w^{\widetilde{i}_k}) = \delta_{i_i}^{\widetilde{i}_i}$, поэтому получим, что:

   $$= \alpha_{\widetilde{j}_1, \ldots, \widetilde{j}_p}^{\widetilde{i}_1, \ldots, \widetilde{i}_q}$$

   Но с другой стороны это ноль (тк мы смотрим на разложение тензора, выдающего всегда ноль (нуля)). Тогда получаем, что все $\alpha = 0$, откуда единственно

Q.E.D.

**Следствие:** элементы матрицы тензора это его координаты в базисе пространства $T(p,q)$ : $w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}$

С одной стороны элементы матрицы - значения на базисном наборе, а с другой стороны коэффицент при базисном элементе.

**Замечание.** Канонический базис состоит из тензоров,в матрицах которых есть ровно одна единица, а все остальные значения нули.

**def:** Пусть $\alpha \in T(p,q) : p,q \geq 1$, тогда тензор $\beta$ называется **свёрткой** тензора $\alpha$, если

$$\beta^{i_1,\dots,\widehat{i_k},\dots,i_q}_{j_1,\dots,\widehat{j_m},\dots,j_p} = \alpha^{i_1,\dots,i_{k-1},\text{æ},i_{k+1},\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_{m-1},\text{æ},j_{m+1},\dots,j_p}$$

Причем $\widehat{i_k}$ - нет индекса на этой позиции.

**Замечание:** Этого не говорили на лекции, но $k,m$ фиксированны. Отсюда я бы хотел написать похожее определение, которое может быть более понятным:

$$\beta^{i_1,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_{m-1},j_{m+1},\dots,j_p} = \alpha^{i_1,\dots,i_{k-1},\text{æ},i_{k+1},\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_{m-1},\text{æ},j_{m+1},\dots,j_p}$$

(Причем тут скрыта сумма в правой части)

Получили, что $\beta \in T(p-1,q-1)$, но нам осталось проверить свойство:

$$\beta'^{\widetilde{i}_1,\dots,\widehat{\widetilde{i}_k},\dots,\widetilde{i}_q}_{\widetilde{j}_1,\dots,\widehat{\widetilde{j}_m},\dots,\widetilde{j}_p} = \alpha'^{\widetilde{i}_1,\dots,\text{æ},\dots,\widetilde{i}_q}_{\widetilde{j}_1,\dots,\text{æ},\dots,\widetilde{j}_p} =$$

$$= \alpha^{i_1,\dots,i_k,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_m,\dots,j_p} \cdot t^{j_1}_{\widetilde{j}_1} \dots t^{j_m}_{\text{æ}} \dots t^{j_p}_{\widetilde{j}_p} \cdot s^{\widetilde{i}_1}_{i_1} \dots s^{\text{æ}}_{i_k} \dots s^{\widetilde{i}_q}_{i_q} =$$

Что у нас происходит с æ? Мы умножаем $j_m$ строчку $T$ на $i_k$ строчку $S$, откуда $t^{j_m}_{\text{æ}} \cdot s^{\text{æ}}_{i_k} = (TS)^{j_m}_{i_k} = \delta^{j_m}_{i_k}$. Тогда в нашей сумме сохранится только суммы, когда $i_k = j_m = \widetilde{\text{æ}}$:

$$= \alpha^{i_1,\dots,\widetilde{\text{æ}},\dots,i_q}_{j_1,\dots,\widetilde{\text{æ}},\dots,j_p} t^{j_1}_{\widetilde{j}_1} \dots \widehat{t^{j_m}_{\text{æ}}} \dots t^{j_p}_{\widetilde{j}_p} \cdot s^{\widetilde{i}_1}_{i_1} \dots \widehat{s^{\text{æ}}_{i_k}} \dots s^{\widetilde{i}_q}_{i_q}$$

(переменные с крышками как бы пропали)

Откуда получили то, что нужно.

**Замечание:** Свертка может происходить по нескольким парам символов.

**Замечание:** Если в результате свертки получалась константа, то такая свертка называется **полной**.

# 3 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Не сдавайтесь, изучая лин. ал. Это реально!

Upd: 13.02 слава устал

Upd: 06.03 что за пипяу происходит