

Линейная алгебра

Чепелин Вячеслав

Содержание

1	Линейные отображения.	2
1.1	Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений	2
1.2	Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса.	4
1.3	Инварианты линейного отображения.	7
1.4	Собственные числа и собственные векторы лин. оператора	11
1.5	Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.	14
1.6	Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора	21
1.7	Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона . . .	23
1.8	Операторное разложение единицы. Корневое подпространство.	26
1.9	Нильпотентный оператор. Разложение Жордана	32
1.10	Жорданова форма матрицы. Формула Фраббениуса.	37
1.11	Функция оператора матрицы, приводимой к Жордановой форме.	43
2	Тензоры.	46
2.1	Линейные формы (функционалы). Сопряженное (дуальное) пространство. Контр-вариантный и ковариантный законы преобразования координат.	46
2.2	Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица тензоров.	50
3	Информация о курсе	52

1 Линейные отображения.

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений

def: U, V - линейные пространства над одним полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$ называется линейным гомоморфизмом, если:

$$\forall \lambda \in K, \forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$$

Замечание 1: Мы будем писать $\mathcal{A}u$, вместо $\mathcal{A}(u)$.

Замечание 2: $\mathcal{A}u, \mathcal{B}u$ это какие-то числа, поэтому мы можем складывать их и умножать на скаляр.

Замечание 3: $\mathcal{A}\mathbb{O}_U = \mathbb{O}_V$, частный случай $\lambda = 0$

Примеры:

1. \mathbb{O} : это нулевое отображения $\forall u \in U : \mathbb{O}u = 0$
2. P_n - пространство многочленов степени $\leq n$. $\mathcal{A} = \frac{d}{dx}$ — дифференцирование.
3. ε — тождественное отображение. $\varepsilon : U \rightarrow U : \forall u \in U : \varepsilon u = u$.

Введем операции:

1. $\lambda \in K : \lambda \mathcal{A}$ — линейное отображение. Введем операцию умножения:

$$\forall u \in U : (\lambda \mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u)$$

2. \mathcal{A}, \mathcal{B} — линейные отображение. Введем операцию сложения:

$$\forall u \in U : (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$

3. $\mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{A} \in L(W, V)$. Введем операцию произведения:

$$\forall u \in U : (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

$\text{Im } \mathcal{A} = \{v \in V : v = \mathcal{A}u | \forall u \in U\}$ — образ линейного пространства.

Замечание: $\text{Im } \mathcal{A}$ — линейное подпространство.

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U | \mathcal{A}u = \mathbb{O}\}$ — ядро линейного отображения.

$\text{rg } \mathcal{A} = \dim \text{Im } \mathcal{A}$ — ранг отображения

$\text{def } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } \mathcal{A}$ — дефект отображения.

Виды отображений:

- сюръекция, если $\text{Im } \mathcal{A} = V \Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V$.
- инъекция, если $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$.
- биекция или изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im } \mathcal{A} = V \\ \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \\ \text{def } \mathcal{A} = 0 \end{cases}$
- *эндоморфизмом* или линейным оператором, когда $U = V$.

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) = \text{End}_K(V)$$

- *автоморфизм* это биекция + эндоморфизм.

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) = \text{Aut}_K(V)$$

Примеры:

1. P_n — пространство многочленов степени не больше n . $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \mathcal{A} : P_n \rightarrow P_n$. не инъекция, не сюръекция, не изоморфизм, эндоморфизм и не автоморфизм
2. $U = K^n, V = K^m, A = (a_{ij})_{m \times n}, a_{ij} \in K, \forall u \in U : \mathcal{A}u = A \cdot u$.

$$\text{Im } \mathcal{A} = \left\{ y \in K^m \mid \begin{matrix} y = \mathcal{A}x \\ \forall x \in K^n \end{matrix} \right\} = \text{span}(A_1, \dots, A_n) — \text{образ матрицы.}$$

$$y = A \cdot x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i$$

Давайте более подробно рассмотрим *отображения*:

1. сюръекция $\Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V = m$.
 $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in K^n : Ax = 0\}$ — общее решение СЛЮУ, *ядро матрицы*.
 $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \text{общего решения} = n - \text{rg } A$.
 $\text{def } \mathcal{A} = n - \text{rg } A$ — *дефект матрицы*.
2. инъекция $\Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow n - \text{rg } A = 0 \Leftrightarrow \text{rg } A = n$.
3. биекция $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{rg } A = n \\ \text{rg } A = m \end{cases} \Leftrightarrow n = m$.
4. эндоморфизм $\Leftrightarrow n = m \Leftrightarrow A_{n \times n}$.
5. автоморфизм $\Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = n, A_{n \times n} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$.

Свойства произведения:

1. \mathcal{A}, \mathcal{B} — изоморф. $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ — изоморфно.
2. $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$.
3. $\forall \lambda \in K : \mathcal{A}(\lambda \mathcal{B}) = (\lambda \mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$.
4. $\mathcal{C} \in L(\Omega, U) : \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

Ассоциативная унитарная алгебра.

Замечание 1. Если $\mathcal{A} \in L(U, V)$ — изоморфно $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ — взаимно обр. отображение.

Замечание 2. Если $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$, а также изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} \in \text{End}(V)$ — обратный лн. оператор к \mathcal{A} .

def: $U_0 \subset U$ - линейное подпространство. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V$ сужение лн. отобра. на лн подпространство.

$\forall u \in U_0 : \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$.

Если \mathcal{A} — изоморфизм, то тогда его сужение на U_0 будет линейным отображением между U_0 и $\text{Im } \mathcal{A}_0$. И это будет тоже изоморфизм.

Теорема (о ранге и дефекте линейного отображения)

$\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$. Доказать $\dim U = \text{def } \mathcal{A} + \text{rg } \mathcal{A}$.

Доказательство:

Пусть $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A} \subset U$. Пусть $U_1 \subset U$, такое, что $U_0 \oplus U_1 = U$ — прямое дополнение. Возьму $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} \in L(U_1, \text{Im } \mathcal{A}_1)$.

$\forall u \in U : \exists! u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in U_0$, $u_1 \in U_1$, по т. об определении прямой суммы. Тогда получаем, что:

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$$

Откуда $\text{Im } \mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{A}_1$, $\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg } \mathcal{A}_1$.

$\text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset U_1$, а также $\text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1$ — инъективна $\Rightarrow \mathcal{A}_1$ изоморфно. Откуда получаем:

$$\dim U = \dim U_1 + \dim U_0 = \text{rg } \mathcal{A} + \text{def } \mathcal{A}$$

Q.E.D.

Следствие. (характеристика автоморфизма)

Если $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$ — условие обратимости линейного оператора.

1.2 Матрица лн. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

Пусть есть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ базис U , а также $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ базис V .

$$u \in U \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^n; v \in V \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\forall u \in U, v = \mathcal{A}u, : v = \mathcal{A} \left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A} \xi_i$$

То есть $\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$.

Теперь заметим, что $\mathcal{A}\xi_i \in V$, откуда:

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j \xleftrightarrow{\text{коорд. изоморфизм}} A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m$$

Назовем $A = (A_1, \dots, A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$ — матрицей линейного отображения \mathcal{A} на базисах ξ, η .

Замечание. Т.к. здесь координатный изоморфизм, то:

$$\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg}(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \text{rg}(A_1, \dots, A_n) = \text{rg } A.$$

def: $\mathcal{A} \in \text{End}(V) : \mathcal{A} : V \rightarrow V$ — лин. оператор.

Зафиксируем здесь один базис $e = e_1, \dots, e_n$. Получу:

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \dots, e_n)\mathcal{A}$$

Тогда $A_{n \times n}$ — матрица линейного оператора.

Заметим, что теперь мы умеем:

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A \in M_{m \times n}$$

Утв. $L(U, V) \cong M_{m \times n}$ координатный изоморфизм линейных отображений

Доказательство:

У нас есть взаимно однозначное соответствие. Проверим линейность:

$$\forall \lambda \in K : \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \xleftrightarrow{\text{проверить}} \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}.$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \cdot \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \cdot \eta_j$$

А откуда уже видно нужное нам соответствие.

Q.E.D.

Утв. $\mathcal{A} \in L(W, V), \mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{AB} \in L(U, V)$. Пусть w - базис W , η - базис V , ξ - базис U . Тогда $\mathcal{AB} \leftrightarrow AB$ в базисах (ξ, η)

Доказательство:

$$\mathcal{AB}\xi_i = \mathcal{A}(\mathcal{B}\xi_i) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^p b_{ki}w_k\right) = \sum_{k=1}^p b_{ki}\mathcal{A}(w_k) = \sum_{k=1}^p b_{ki} \sum_{j=1}^m a_{jk}\eta_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^p a_{jk}b_{ki}\right)\eta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^m (AB)_{ji} \cdot \eta_j$$

Q.E.D.

Следствие: $\mathcal{A} \in L(U, V)$ - изоморфизм, A - матр в $\xi, \eta \Rightarrow A^{-1}$ - матр в (η, ξ) .

Доказательство:

$$A \cdot A^{-1} = \varepsilon_V, \quad A^{-1} \cdot A = \varepsilon_U$$

$$AX = E_\eta, \quad XA = E_\xi$$

В силу того, что \mathcal{A} — изоморфизм:

$$\dim U = \dim V = n, \quad \text{rg} A = n \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

$$X = A^{-1}$$

Q.E.D.

Утверждение: Пусть $\mathcal{A} \in L(U_\varepsilon, V_\eta), v = \mathcal{A}u$. Тогда $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$, где \mathbf{v} и \mathbf{u} — координатные столбцы v и u соответственно.

Доказательство: С одной стороны, v можно разложить по базису V :

$$v = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j \eta_j$$

С другой стороны, v представим как результат отображения:

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} \mathbf{u}_i \right) \eta_j \Rightarrow \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \mathbf{u}_i$$

. Откуда получаем искомое: $v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u}$. Последнее равенство называется *координатной формой записи действия линейного отображения*.

Q.E.D.

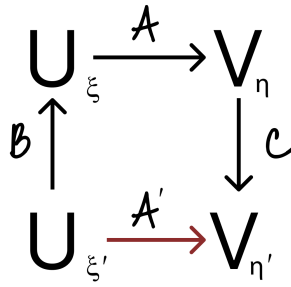
Теорема (формула замены матрицы лин. отобр. при замене базиса)

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ — линейное отображение.

ξ, ξ' базисы U , а η, η' базисы V . Хотим поменять базисы на штрихованные и получить новую матрицу. Тогда ее можно получить так:

$$A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Доказательство:



Воспользуемся данным рисунком, чтобы понять происходящее. Мы хотим найти матрицу A' . Для этого, заметим, что преобразование A' , это преобразование B , потом примененное к нему преобразование A , а после этого примененное к нему преобразование C . То есть:

$$A' = CAB$$

Заметим, что матрица B , это матрица перехода из ξ в ξ' . Это так потому что у нас просто меняется базис (про саму матрицу перехода см. одноименный раздел). Матрица C , это $T_{\eta' \rightarrow \eta}$. Откуда, исходя из двух утверждений сверху:

$$A' = T_{\eta' \rightarrow \eta} A T_{\xi \rightarrow \xi'} \Rightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Q.E.D.

Следствие: $A \in \text{End}(V)$. e, e' базисы V . $A' = T^{-1}AT$, где $T = T_{e \rightarrow e'}$.

def: квадратные матрицы A и B называются подобными, если \exists невырожденная матрица C , такая, что: $B = C^{-1}AC$.

Замечание: матрицы линейного оператора в разных базисах подобны (см. следствие выше).

1.3 Инварианты линейного отображения.

Инвариантность называется некоторое свойство объекта, которое не меняется при определенных действиях и преобразованиях.

A - линейное отображение. Ранг и дефект инварианты относительно выбора базиса.

Пусть $A \in \text{End}(V)$. Пусть e_1, \dots, e_n базис v .

Как мы знаем, $\exists!$ D n -форма, такая что $D(e_1, \dots, e_n) = 1$. Тогда **определитель линейного оператора:**

$$\det A := \det(Ae_1, \dots, Ae_n) = D(Ae_1, \dots, Ae_n)$$

Замечание: $\det A = D(Ae_1, \dots, Ae_n) = D(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det A$ — определение определителя линейного оператора и матрицы соотносятся.

Теорема:

$$\forall A \in \text{End}(V), \det A = \det A.$$

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис V . Тогда:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A = (a_{ij})_{n \times n} \\ \det \mathcal{A} &= D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = D\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in}e_{i_n}\right) = \\ &\xleftrightarrow{\text{тк } D - n \text{ форма}} \det \mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} D(e_1, \dots, e_n) = \det A \end{aligned}$$

Q.E.D.

Замечание: A и B подобные матрицы, то $\det A = \det B$.

Замечание: $\det \mathcal{A}$ инвариант линейного оператора, он не зависит от базиса.

Следствие 1: $\forall n$ - форма f на V :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V : f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис V . $\mathcal{A} \xrightarrow{e} A$. Это значит, что мы берем матрицу линейного оператора в данном базисе.

$$f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) \stackrel{\text{из доказательства теоремы}}{=} \det A f(e_1, \dots, e_n)$$

На самом деле $\alpha = f(e_1, \dots, e_n)$, поэтому:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n : g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

Заметим, что g - полилинейное, тк f полилин. и \mathcal{A} - лин. отобр. Также g - антисим, тк f - антисим. Откуда g - n -форма. Заметим интересный факт:

$$g(e_1, \dots, e_n) = f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det A \cdot f(e_1, \dots, e_n)$$

Откуда:

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot \alpha D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Q.E.D.

Замечание: Мы можем вывести 9-ое свойство определителя по-другому. Пусть $\mathcal{A} = A_{n \times n}$ — линейный оператор умножения. $f = D$, $B_j \in K^n$. Тогда:

$$\det(AB_1, \dots, AB_N) = \det A \cdot \det B$$

Следствие 2: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$

Доказательство:

Пусть e - базис V . Тогда $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A, \mathcal{B} \xleftrightarrow{e} B$. Также $\mathcal{AB} \xleftrightarrow{e} AB$ по свойству. Откуда:

$$\det \mathcal{AB} = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Q.E.D.

Следствие 3: $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Причем $\det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \in \text{Aut}(V) &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \text{изоморфизм} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \dim \text{Ker } \mathcal{A} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \text{rg } \mathcal{A} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A, \det A \neq 0 \\ \text{rg } A = n \end{cases} \end{aligned}$$

Мы знаем, что существует \mathcal{A}^{-1} . А также $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \varepsilon$. Откуда по свойству 3 получаем, что $\det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$

Q.E.D.

Следствие 4: $\det(\mathcal{AA}^{-1}) = 1 = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1}$

Вспомним старое определение $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ - *след матрицы*.

Теорема (о tr подобных матриц)

Если A и B подобны, то $\text{tr } A = \text{tr } B$.

Доказательство:

A и B подобны $\Leftrightarrow \exists C : B = C^{-1}AC$. Пусть $C^{-1} = S = (s_{ij})$. Откуда:

$$\text{tr } B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}(AC)_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ij} \cdot a_{jk} \cdot c_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \sum_{i=1}^n c_{ki} s_{ij}$$

Заметим, что $(CS)_{kj} = \delta_{kj}$, где $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, k=j \\ 0, k \neq j \end{cases}$. Так что получаем, что

$$\text{tr } B = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A$$

Q.E.D.

Следствие: $\forall A \in \text{End}(V) \Rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr } A'$, где A и A' матрицы оператора \mathcal{A} в базисе e и e' соответственно.

def: $\mathcal{A} \in \text{End}(V), \text{tr } \mathcal{A} = \text{tr } A$ — след оператора.

Замечание: след оператора инвариантен из следствия выше.

def: Линейное подпространство $L \subset V$ называется инвариантным относительно линейного оператора $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$, если $\forall v \in L, \mathcal{A}v \in L$.

Теорема 1:

$L \subset V$ - линейное подпространство. L - инвариантно относительно $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$. Тогда \exists базис пр-ва V матрица, такой что матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе будет иметь *ступенчатый вид*, при этом размерность $A^1 = k \times k$, $k = \dim L$.

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

Доказательство:

$L = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ - базис L .

Дополним базис L до базиса V : $V = \text{span}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$.

Запишем матрицу A по определению:

$$\forall e_i \in L : \mathcal{A}e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^k a_{ji}e_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Откуда } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

Теорема 2:

$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$, L_i инвариантны отн. \mathcal{A} . $\Rightarrow \exists$ базис пр-ва V , такое что м-ца оператора \mathcal{A} будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

Доказательство:

Пусть базис V по эквив. условию \oplus объединение базисов L_i .

$$L_i = \text{span}(e_1^i, \dots, e_{k_i}^i), \dim L_i = k_i$$

Построим матрицу по определению. Не трудно заметить, что для каждого L_i из доказательства прошлой теоремы, все кроме соотв. строчек для L_i будет зануленно.

Q.E.D.

Замечание: $A_i \leftrightarrow A|_{L_i} \in \text{End}(L_i)$.

Теорема 3.

$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$, L_i инвариантны отн $\mathcal{A} \Rightarrow \text{Im } \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$, где $\mathcal{A}|_{L_i} \in L(L_i, V)$

Доказательство:

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \xLeftrightarrow{\text{из т. об экв. опр. прямой суммы}} \forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i, v_i \in L_i$$

$$\forall v \in V : \text{Im } \mathcal{A} \ni \mathcal{A}v = \mathcal{A} \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}v_i \in \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$

Тогда всё, что нам осталось проверить это то, что наши пространства дизъюнкты. Но, если присмотреться к тому, что у нас написано, то у нас для любого вектора из $\text{Im } \mathcal{A}$ существует лишь одно разложение через $\text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$, что соответствует эквивалентному определению прямой суммы.

Q.E.D.

1.4 Собственные числа и собственные векторы лин. оператора

$\lambda \in K$ называется собственным числом $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$, если $\exists v \in V, v \neq 0. \mathcal{A}v = \lambda v$. Такой v называют собственным вектором собственного числа λ .

$$\lambda \in K : \begin{cases} \mathcal{A}v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda E)v = 0 \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \text{Ker}(A - \lambda E) \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow v$ собственный вектор собственного числа λ .

$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E)$ — собственное подпространство \mathcal{A} соответств. с.ч. λ . Это мн-во всех с.в. V , отвечающим с.ч. λ и нулевой вектор.

$\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$ — геометрическая кратность.

Свойства:

1. V_λ инвариантно относительно $(\mathcal{A} - \lambda E)$.
2. V_λ инвариантно относительно \mathcal{A} .
3. $\gamma(\lambda)$ инвариант относительно базиса.

Условие существования с.ч.:

$\lambda \in K_{\mathcal{A}}$ - с.ч., v - с.в. $\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda E)$ нетривиально $\Leftrightarrow \text{def}(\mathcal{A} - \lambda E) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(\mathcal{A} - \lambda E) \neq n \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda E) = 0$

Тк определитель линейного оператора инвариантен, то:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

def: $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$ - характеристический многочлен оператора \mathcal{A} .

Т.к. \det оператора инвариантен $\chi(t) = \det(A - tE)$, где A - матрица линейного оператора \mathcal{A} в некотором базисе.

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot t^n + (-1)^{n-1} (tr A t^{n-1}) + \dots + \det A$$

По теореме Виета: $\begin{cases} t_1 + \dots + t_n = tr A \\ t_1 \cdot \dots \cdot t_n = \det A \end{cases}$ Заметим, что λ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in K \\ \chi(\lambda) = 0 \text{ - корень хар. мн.} \end{cases}$

Замечание. Если все корни хар. мн. $\in K \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = tr A \\ \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A \end{cases}$

def: Спектр оператора \mathcal{A} называется множество $\{(\lambda, \alpha(\lambda))\}$, $\alpha(\lambda)$ - кратность λ лин. оператора в хар. уравнении (*алгебраическая кратность*). Спектр это множество пар.

def: Простой спектр — все кратности - единички.

Теорема 1:

$\forall \mathcal{A} \in End(V). \forall \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} : 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

Доказательство:

λ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow Ker(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) = V_\lambda$ не тривиально $\Leftrightarrow \gamma_1 = \dim V_\lambda \geq 1$.

Пусть $\dim V_\lambda = \gamma$, V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow$ по т-ме 1 об инв. подпр. существует V такой, что матрица оператора \mathcal{A} будет иметь ступенчатый вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbf{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

$$\dim A^1 = \gamma \times \gamma, V = span(e_1, \dots, e_\gamma, e_{\gamma+1}, \dots, e_n)$$

При построении матрицы оператора \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}e_i = \lambda e_i \Leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} - \lambda - \text{ на } i\text{-ой строчке. Немного распишем:}$$

$$\chi(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} A^1 - tE_{\gamma \times \gamma} & * \\ \mathbf{O} & A^2 - tE_{(n-\gamma) \times (n-\gamma)} \end{vmatrix} \stackrel{\text{по 6-ому св-ву опр}}{=}$$

$= |A^1 - tE||A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \cdot \chi_{A^2}(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A^2}(t) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lambda$ корень $\chi(t)$, причем кратность $\geq \gamma$, т.к λ может оказаться корнем χ_{A^2}

Q.E.D.

Теорема 2:

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ попарно различные с.ч \mathcal{A} , v_1, \dots, v_n соответ. с.в.

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ — лин. независимы.

Доказательство:

Докажем по индукции:

База $m = 1$: $\lambda_1, v_1 \Rightarrow$ лин. незав.

ИП: Пусть верно для m , докажем для $m + 1$:

От противного: Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ попарно различные собственные числа.

v_1, \dots, v_m — линейно независимы по ИП. v_1, \dots, v_m, v_{m+1} — линейно зависимы. Откуда: $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$. С одной стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \lambda_{m+1}v_{m+1} = \lambda_{m+1} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v_{m+1} &= \mathcal{A} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{A}v_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^m (\lambda_{m+1} - \lambda_i) \alpha_i v_i = 0 \end{aligned}$$

Но мы знаем, что v_1, \dots, v_m линейно независимы. Откуда эта линейная комбинация тривиальна, но с другой стороны, она такой быть не может, потому что $\exists \alpha_i \neq 0$, для которого v_i не равен нулю, а так же, исходя из того что искомые с.ч. попарно различны, то $v_{m+1} - v_i \neq 0$. Откуда комбинация нетривиальна.

Противоречие.

Q.E.D.

Следствие: $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i}$, т.е V_{λ_i} дизъюнкты.

Доказательство:

$$0 = v_1 + \dots + v_m, v_i \in V_{\lambda_i}$$

Если в сумме какой-то из векторов ненулевой, то это собственный вектор, а собственные вектора для различных с.ч. линейно независимы. Противоречие. Откуда все вектора в сумме нулевые, откуда подпространства дизъюнкты.

Q.E.D.

Теорема 3:

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i, \quad L_i \text{ инвариантно относительно } \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t).$$

Доказательство:

Смотрим теорему 3 об инв. подпр. Матрица A - блочно-диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \chi(t) = \det(A - tE) \stackrel{\text{по 6-ому свойству опр.}}{=} \prod_{i=1}^m \det(A^i - tE) = \prod_{i=1}^m \chi_{A_i}(t)$$

Q.E.D.

1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ называется **оператором простой структуры** (о.п.с), если \exists базис пространства V такой, что матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе имеет диаг. вид.

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что в таком случае собственные числа оператора \mathcal{A} будут λ_i , а так же собственные вектора этих чисел - соотв. столбики (легко проверить умножением). Отсюда все корни характ. многочлена $\chi \in K \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$.

Теорема:

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$, если $\sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n$, то тогда:

$$\mathcal{A} \text{ - о.п.с} \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ - с.ч.} : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Доказательство:

$$\sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n \Leftrightarrow \text{все корни } \chi \in K, \text{ откуда } \mathcal{A} \text{ - о.п.с.}$$

\mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow \exists$ базис V такой, что матрица диагональна \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ - с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч.}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Q.E.D.

Следствие. Если все корни характ. многочлена $\in K$, а также все $\alpha(\lambda) = 1$ (спектр простой), то \mathcal{A} - о.п.с.

def: $A_{n \times n}$ называется диагонализируемой, если она подобна диагональной.

Теорема (критерий диагональности матрицы A)

это перенимается

A подобна диагональной \Leftrightarrow матрица о.п.с \mathcal{A} в нек. базисе

Доказательство:

• \Rightarrow

Пусть A - диагонализируемая \Leftrightarrow подобна диагональной $\Leftrightarrow \exists$ невырожд T : $T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. V - линейное пространство над полем K . $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V .

Пусть A - матрица в базисе e . Тогда $Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i \cdot v = (v_1, \dots, v_n)$ - базис.

Откуда $v_1, \dots, v_n = (e_1, \dots, e_n)T_{e \rightarrow v} \Rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{v} A' = T^{-1}AT = \Lambda$

• \Leftarrow \mathcal{A} о.п.с, A - матрица в некотором базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$. Возьму v_1, \dots, v_n - базис V , где v_i - собственный вектор \mathcal{A} . Заметим, что так как \mathcal{A} о.п.с, то такой базис существует

Теперь давайте возьмем матрицу перехода из $T_{e \rightarrow v}$. Тогда $\mathcal{A} \xrightarrow{v} A' = T^{-1}AT = \Lambda \Rightarrow A$ подобна диагональной

Q.E.D.

Алгоритм поиска диагонального представления матрицы подобной диагональной:

1. найти спектр: если все корни $\chi \in K$, переходим к п2.
2. найти все $\gamma(\lambda)$, если $\forall \lambda$ с.ч $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, то перейти к п3.
3. $T_{\text{кан.} \rightarrow v} = (v_1, \dots, v_n) T^{-1}AT = \Lambda$

def: $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$. По теореме об равносильных условиях прямой суммы:

$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i$, где $v_i \in L_i$. Возьму $P_i \in \text{End}(V)$, такие, что $P_i \cdot v = v_i \in L_i$.

Тогда такие P_i назовем операторами проектирования на подпр-во L_i .

Свойства операторов проектирования:

1. $\text{Im } P_i = L_i, \text{ Ker } P_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$
2. $P_i P_j = \mathbb{O}$
3. $\sum_{i=1}^m P_i = \varepsilon$
4. $P_i^2 = P_i, (P_j^k = P_j, \text{ где } k \in \mathbb{N})$ - идемпотентность

Они все тривиальны

Утверждение. Возьму множество операторов: $\{P_i\}_{i=1}^m$, $P_i \in \text{End}(V)$.

Пусть они удовлетворяют свойствам 2,3 $\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i$. P_i это проектор на L_i .

Доказательство:

Мы знаем, что $P_i P_j = 0$, для $i \neq j$, а также $\sum_{j=1}^m P_j = \varepsilon$. Откуда получаем, что:

$$P_i = P_i \varepsilon = P_i \sum_{j=1}^m P_j = \sum_{j=1}^m P_j P_i = P_i^2$$

А это значит, что $\forall v \in V : v = \varepsilon v = \sum_{i=1}^m P_i v \Rightarrow V = \sum_{i=1}^m \text{Im } P_i$.

Осталось показать единственность разложения нуля:

$$0 = \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m P_i w_i, \text{ где } w_i \in V$$

$$P_j 0 = 0 = P_j \sum_{i=1}^n P_i w_i = \sum_{i=1}^n P_i P_j w_i = P_j w_j = v_j$$

$\Rightarrow v_j = 0, \forall j = 1 \dots m \Rightarrow \text{дизъюнк.} \Rightarrow \bigoplus \text{Im } P_i$

Q.E.D.

Замечание: Из определения проекторов следует, что они существуют и определены однозначно для данной прямой суммы.

Теорема (спектральное разложение о.п.с)

Дан $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$. Тогда выполнено:

1) \mathcal{A} — о.п.с. $\Rightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \lambda P_\lambda$, P_λ — проектор на $V_\lambda \forall \text{ с.ч. } \lambda$.

Такое разложение называется спектральным.

2) $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$, P_i проекторы на L_i . $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^m \lambda_i P_i \Rightarrow \mathcal{A}$ о.п.с, λ_i с.ч.

$\text{Im } P_i = L_i = V_\lambda$ (соответ. подпр-во)

Доказательство:

1) \mathcal{A} о.п.с $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч.}} V_\lambda$. Возьму P_λ проекторы на V_λ (исходя из определения -они существуют)

Тогда давайте воспользуемся определением:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} v_\lambda, \text{ где } v_\lambda \in V_\lambda : \mathcal{A}v = \mathcal{A}\left(\sum_{\lambda} v_\lambda\right) = \sum_{\lambda} \mathcal{A}v_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda v$$

Откуда уже крайне очевидно получаем, что $\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda$.

2) $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$. Откуда по определению: $\forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i \in L_i = \text{Im } P_i, v_i \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{A}v_i = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j\right)v_i = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j\right)P_i v = v \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j P_i$$

Теперь вспомним свойство, что при умножении двух различных операторов мы получаем 0. Поэтому на самом деле наша сумма равна:

$$v \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j P_i = v \lambda_i P_i P_i = v \lambda_i P_i = \lambda_i v_i$$

Хорошо, теперь вспомним, что изначально это было равно $\mathcal{A}v_i$. поэтому $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$, откуда получаем, что v_i с.в. \mathcal{A} отвечающий с.ч. λ_i .

Откуда получаем, что наше подмножество $V_{\lambda_i} \supseteq \text{Im } P_i$ (потому что любой $v \in \text{Im } P_i$ — случайный вектор).

Вспомним, что: $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i \subseteq \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i}$, а как мы знаем $\bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i} \subseteq V$. Откуда, я получаю, что:

$$\bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i = \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i} \xrightarrow{\text{так как } P_i \subseteq V_{\lambda_i}} \text{Im } P_i = V_{\lambda_i}$$

Q.E.D.

Следствие (спектральное разложение диагонализированной матрицы)

A диагонализирована $\Leftrightarrow \exists \{P_i\}_{i=1}^m$, такое, что $P_i \cdot P_j = 0, i \neq j$ и $\sum_{i=1}^m P_i = E, A = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$

Доказательство:

Очевидно следует из теоремы:

A диагонализирована \Leftrightarrow матрица \mathcal{A} о.п.с. Либо можно считать $A = \mathcal{A}$ о.п.с. $\in \text{End}(K^n)$

Q.E.D.

Замечание. Матрица A подобна диагональной, то у нее есть диагональное представление:

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n), A = T\Lambda T^{-1}$$

А также у такой матрицы есть спектральное разложение:

$$A = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda P_\lambda$$

Просьба не путать эти две формулы! **СЕЙЧАС НАЧНЕТСЯ ЧТО-ТО СТРАШНОЕ**

def: $A_k = (a_{ij}^k)_{n \times n}$ - последовательность матриц $n \times n$.

Обозначают так: $(A_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность матриц.

Раз это последовательность, то давайте введем на ней вот такой предел:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_k = \forall i, j : a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k$$

Для лучшего понимания этого мира смотрите на приведенный ниже пример:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (1 + \frac{2}{k})^k & \frac{\sqrt[k]{k}}{\frac{1}{k}} \\ \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} & \frac{1 - \cos \frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

def: $a_n \in R : \sum_{m=1}^{\infty} a_m = S \Leftrightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k a_m = S$, где $S_k = \sum_{m=1}^k a_m$ — частичная сумма ряда.

А саму такую конструкцию понятно называют рядом. Теперь давайте немного притронемся к матану:

$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ — ряды Тейлора - Маклорена.

$x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — их область определения, $|x| < R$ (или еще обозначается r) — радиус сходимости, $c_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Причем эти c -шки на самом деле производные. (если интересно см. конспект по мат. анализу первый семестр)

Рассмотрим пример: Давайте разложим e^x , нам это позже понадобится:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, |x| < +\infty$$

В таком случае $c_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$.

Пусть $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$. А давайте расширим на матрицы :)

def: $A_{n \times n} : f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$. Причем мы так же считаем частичные суммы и ищем их предел, но теперь просто ищем предел в матрицах.

Можно добавить параметр: $f(At) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m t^m$.

Теорема 1 (функция от диагонализированной матрицы 1)

Пусть A — подобна диагональной. А также нам дана $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, |x| < r$.

Тогда, если \forall с.ч. $|\lambda| < r \Rightarrow \exists f(\lambda)$ и $f(A) = T f(\Lambda) T^{-1}$, где $f(\Lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$

Доказательство:

Упросту $\sum_{m=0}^k c_m A^m$. Мы знаем, что A - подобна диагональной $\Rightarrow A = T \Lambda T^{-1}$. Тогда:

$$A^m = (T \Lambda T^{-1})^m = T \Lambda T^{-1} T \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1} = T \Lambda^m T^{-1}$$

Теперь давайте подставим это в нашу сумму:

$$\sum_{m=0}^k c_m A^m = \sum_{m=0}^k c_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left(\sum_{m=0}^k c_m \Lambda^m \right) T^{-1}$$

Теперь вспомним, что Λ^n подобна диагональной, поэтому занесем сумму внутрь матрицы и получим:

$$T \left(\sum_{m=0}^k c_m \Lambda^m \right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^k c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^k c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} =$$

Теперь вспомним, что \forall с.ч. $|\lambda| < r$, поэтому для них мы можем применить формулу, откуда:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k c_m A^m = \lim_{k \rightarrow \infty} T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^k c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^k c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Q.E.D.

Теорема 2 (функция от диагоналируемой матрицы, 2-я формула)

Пусть A — подобна диагональной.

Тогда A имеет спектральное разложение $\sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \lambda P_\lambda$, где P_λ — проекторы. А также нам дана

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad |x| < r.$$

Тогда, если \forall с.ч. $|\lambda| < r$, то $\exists f(A)$, а так же $f(A) = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} f(\lambda) P_\lambda$.

Доказательство:

$$A^m = \left(\sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \right)^m = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum_{\xi} \xi P_\xi$$

А теперь вспомним свойства проекторов. Когда я умножаю два разных проектора, я получаю ноль, откуда:

$$A^m = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum_{\xi} \xi P_\xi = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda$$

Значит: $\sum_{m=0}^k c_m A^m = \sum_{m=0}^k c_m \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda = \sum_{\lambda} P_\lambda \sum_{m=0}^k \lambda^m c_m$. Теперь если я возьму предел, то я получу то, что мне нужно, потому что каждая лямбда $< r$, и поэтому я могу вместо них подставить $f(\lambda)$.

Q.E.D.

Экспонента:

А теперь давайте возьмем все $c = 1$, а также вспомним, что мы можем протаскивать с собой параметр. Поэтому у нас получается новая формула:

$f(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k t^m A^m$, а теперь вспомним наше разложение e -шки. А это именно оно и есть!

Поэтому получаю:

$$e^{At} = f(At) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k t^m A^m$$

Или:

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} e^{\lambda t} P_\lambda$$

Свойства:

1. $(e^{At})' = A e^{At} = e^{At} A$.
2. $e^{(A_1 + A_2)t} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$
3. $e^{0t} = E$

Обратная:

$$A - \text{подобна диагональной } \forall \text{ с.ч. } \lambda \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

Свойства:

1. $A^{-1} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda} P(\lambda)$
2. $AA^{-1} = T \Lambda T^{-1} T \Lambda^{-1} T^{-1} = E$
3. $AA^{-1} = (\sum \mu P_\mu) (\sum \frac{1}{\lambda} P_\lambda) = \sum_\lambda \lambda \frac{1}{\lambda} P_\lambda = E$

Корень:

Если A подобна диагональной и \forall с.ч. $\lambda \geq 0$, то взяв $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ мы можем ввести:

$$\sqrt[m]{A} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}, \text{ полагая } \sqrt[m]{\lambda} \geq 0$$

Спектральное представление: $\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda} P_\lambda$.

1.6 Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора

Давайте посмотрим какие линейные операторы мы уже изучили:

Пусть $A \in \text{End}(V) \xleftrightarrow{c} A$, $\chi(t)$ — корни характеристического многочлена. Он может быть:

1. Все корни $\in K$. $\sum_{\lambda - \text{с.ч}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$
 - \exists базис V из $v_\lambda: \forall \lambda: \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) \iff$ диагонализируема.
 - \nexists базис V из $v_\lambda: \exists \text{ с.ч. } \lambda: \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \iff A$ жорданова форма.
2. Не все корни $\in K$. В таком случае вещ. V комплексифицируют.

def: V — линейное пространство над \mathbb{R} (вещ. лин. пр-во)

$$\forall x, y \in V \Rightarrow z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad V_{\mathbb{C}} = \{z = x + yi \mid \forall x, y \in V\}$$

Назовем $V_{\mathbb{C}}$ комплексификацией V .

Покажем некоторые **свойства**:

1. $0 \in V \leftrightarrow 0 + i0 = 0 \in V_{\mathbb{C}}$ - существование нуля
2. $x \in V \leftrightarrow x + i0 = x \in V_{\mathbb{C}}, V \subset V_{\mathbb{C}}$ — говорим, что $V \subseteq V_{\mathbb{C}}$
3. $\forall z = x + iy$ существует обратное: $-x + i(-y)$

Заметим, что в таком случае $V_{\mathbb{C}}$ — линейное пространство над полем комплексных чисел.

Утв. Пусть e_1, \dots, e_n — базис V . Докажем что e_1, \dots, e_n — базис $V_{\mathbb{C}}$.

Доказательство:

Возьмем любой z и докажем, что его можно породить с помощью базиса:

$$z = x + iy = \sum_{j=1}^n x_j e_j + i \sum_{j=1}^n y_j e_j = \sum_{j=1}^n (x_j + iy_j) e_j$$

Откуда e — порождающий базис для $V_{\mathbb{C}}$. Докажем линейную независимость:

Для этого нам надо показать, что любая нулевая комбинация тривиальна:

$$0 = \sum_{j=1}^n (a_j + ib_j) e_j = \sum_{j=1}^n a_j e_j + i \sum_{j=1}^n b_j e_j \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j = 0 \\ \sum_{j=1}^n \beta_j e_j = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall j: \alpha_j = 0 \\ \forall j: \beta_j = 0 \end{cases}$$

Откуда получили линейную независимость.

Q.E.D.

Замечание. Мы знаем, что $V \subset V_{\mathbb{C}}, \dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$, откуда наши пространства должны быть равны? Нет! Это было бы так, если бы не одно НО. V — линейное пространство над \mathbb{R} , а $V_{\mathbb{C}}$ — линейное пространство над \mathbb{C} , поэтому это не правда.

Благодаря верхней теореме мы можем сделать некоторые замечания:

$$x \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, z = x + iy \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$$

def: $z \in V_{\mathbb{C}}, \bar{z} = x - iy$ — сопряженный вектор, $z = x + iy, \quad x, y \in V$

Свойства:

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
2. $\overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \bar{z}$
3. v_1, \dots, v_m — лин. (не)зависимы $\Leftrightarrow \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ лин. (не)зависимы.
4. $rg(v_1 \dots v_m) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$

def: Возьму оператор $\mathcal{A} \in End(V)$. $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

Назову данную конструкцию продолжением вещ. лин. оператора \mathcal{A} на $V_{\mathbb{C}}$ вещественного пространства V .

Очевидно, что в таком случае $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$, т.к. \mathcal{A} — линейный оператор.

Утверждение: $\mathcal{A} \in End(V)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис V (\Rightarrow базис $V_{\mathbb{C}}$ из теоремы сверху).

Тогда, если $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A$, то $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{e} A$

Доказательство:

По определению матричного оператора:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \cdot e_j = \mathcal{A} \cdot e_j + i\mathcal{A}0 = \mathcal{A} \cdot e_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} e_k \iff A_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

1. $\chi_{\mathcal{A}}(t) \equiv \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$ — так как матрицы совпадают.

Замечание:

1) если $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0$ - корень $\chi(t) \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, но не с.ч. \mathcal{A} .

2) если $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ корень $\chi \Rightarrow \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ - тоже корень, причём той же кратности.

2. $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z}$.

$$\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y} = \mathcal{A}x - i\mathcal{A}y = \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z}$$

3. λ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}, z$ - с. в., отвечающий $\lambda \Rightarrow \bar{\lambda}$ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}, \bar{z}$ с.в., отвечающий $\bar{\lambda}$

$$\mathcal{A} \bar{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{z}, \text{ тогда } \gamma(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})$$

Вернемся к тому старому разделению на случаи. Заметим, что если в таком случае мы возьмем наш третий случай и компелисифицируем, то для полученного оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ мы получим, что он относится либо к первому варианту, либо ко второму.

1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона

def: $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ - нормализованный многочлен $\psi(t)$ называется аннулятором элемента $x \in V$, если $\psi(\mathcal{A})x = 0$.

А теперь на более понятном. Пусть у нас есть $\psi(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k+1} t^0$. Подставляя в него оператор получу: $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^k + a_1 \mathcal{A}^{k-1} + \dots + a_{k+1} \varepsilon$. И такой оператор будет аннулятором x , если $\psi(\mathcal{A})x = 0$.

Замечание. $\psi(t) \neq 0$, потому что это нормализованный многочлен, его старший коэффициент равен 1.

$\psi(t) = \prod_{\lambda - \text{корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ - так как это многочлен. Здесь $m(\lambda)$ — кратность корня λ . Перепишем на место t оператор:

$$\psi(\mathcal{A}) = \prod_{\lambda - \text{корень}} (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)^{m(\lambda)}$$

def: Аннулятор элемента $x \in V$ наименьшей степени называется минимальным аннулятором элемента x .

Теорема: (о существовании и единственности минимального аннулятора)

1. $\forall x \in V \exists!$ $\psi(t)$ минимальный аннулятор x .
2. \forall другой аннулятор x : на минимальный аннулятор x .

Доказательство:

1. (a) Пусть $x = 0$, $\psi(t) = 1$, $\psi(\mathcal{A}) = \varepsilon$, $\varepsilon x = \varepsilon 0 = 0$
 (b) Пусть $x \neq 0$. Посмотрю на $x, \mathcal{A}x, \mathcal{A}^2x, \dots, \mathcal{A}^m x$

Причем m такое, что $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^{m-1}x$ - линейно независимы, а $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^m x$ - зависимы. Такой набор собрать удастся, при этом $m \leq n$.

$$\Rightarrow \exists! c_0, c_1, \dots, c_{m-1} \in k, \text{ такие, что } \mathcal{A}^m x = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j x$$

Откуда получаем, что $(\mathcal{A}^m - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j)x = 0$. Получил какой-то оператор, который при умножении на x дает 0. А это значит, аннулятор существует, причём аннулятор выше минимальный по построению.

Замечание: мы смотрим на многочлен с коэффициентами $1, c_{n-1}, \dots, c_0$ — этот многочлен и есть наш минимальный аннулятор..

2. Пусть мой минимальный аннулятор это $\psi(t)$, а $\psi_1(t)$ другой аннулятор x .

Посмотрим на результат деления:

$$\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t) \text{ (остаток), } \deg r < \deg \psi$$

Это значит, что подставляя в него \mathcal{A} и умножая на x должно быть верно:

$$\psi_1(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})x + r(\mathcal{A})x$$

Но $\psi_1(\mathcal{A})x = 0$, $\psi(\mathcal{A})x = 0$, поэтому $r(\mathcal{A})x = 0$, но что это значит?

Как мы знаем $\psi(t)$ - минимальный аннулятор. Так как $r(\mathcal{A})x = 0$, то если $r(t) \neq 0$, получаем, что это аннулятор, а тогда мы выбрали не минимальный аннулятор, т.к. $\deg \psi > \deg r$. Противоречие!

Откуда получаю, что $r \equiv 0 \Rightarrow \psi_1$ делится на минимальный оператор ψ .

Q.E.D.

def: Нормализованный многочлен $\varphi(t)$ называется аннулятором оператора \mathcal{A} , если:

$$\varphi(\mathcal{A}) \equiv 0, (\text{т.е. } \forall v \in V, \varphi(\mathcal{A})v = 0)$$

def: минимальным многочленом оператора \mathcal{A} называется аннулятор \mathcal{A} наименьшей степени.

Теорема: (о существовании и единственности миним. многочлена оператора)

1. $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V) : \exists!$ - минимальный многочлен.
2. \forall аннул. оператора \mathcal{A} делится на миним. мн-н \mathcal{A}

Доказательство:

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V . Построим $\psi_j(t)$ - минимальный аннулятор e_j

Возьму $\varphi(t) = \text{Н.О.К. } \{\psi_j\}_{j=1}^n$, где $j = 1, \dots, n$. Покажем, что φ аннулятор \mathcal{A} :

Как мы знаем $\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$. Поэтому:

$$\varphi(\mathcal{A})v = \sum_{j=1}^n v_j \cdot \varphi(\mathcal{A}) \cdot e_j = \sum_{j=1}^n v_j \cdot (\psi_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{A}))e_j = 0 \iff \varphi(\mathcal{A}) \equiv 0$$

То есть такой многочлен существует. Теперь докажем единственность:

Пусть $\varphi_a(t)$ другой аннулятор \mathcal{A} : Тогда $\forall j = 1, \dots, n : \varphi_a(\mathcal{A})e_j = 0$.

Тогда φ_a аннулятор элемента e_j для любого j .

По теореме о линейном операторе мы знаем, что φ_a делится на ψ_j для любого j , то есть $\varphi_a \vdots \varphi$.

Откуда я получаю, что φ_a степени хотя бы такой же, что φ . То есть φ_a хотя бы Н.О.К.

Если мы предполагаем, что это многочлен минимальной степени, то он такой же степени, как и φ . При этом они оба делятся на Н.О.К., а $\varphi = \text{Н.О.К.}$. Так же их старшие коэффициенты равны. Поэтому: $\varphi_1 = \varphi$. Исходя из этого получаем, что такой многочлен единственный

Q.E.D.

Теорема (Кэли - Гамильтона)

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$ выполнено, что:

$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$ - аннулятор оператора \mathcal{A} .

Замечание $\det(\mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \varepsilon)$, $t \in K$. Сюда не предполагается подставлять матрицу.

Доказательство:

Пусть есть базис e_1, \dots, e_n . Тогда $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A$.

Пусть есть $\mu \in K$ - не корень $\chi(t)$, где $t \in K$. Посмотрим на $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - tE)$. Как мы знаем: $\chi(\mu) \neq 0$, поэтому $\det(A - \mu E) \neq 0$. Откуда существует обратная матрица (по теореме об обратной матрице), тк A - не вырожденная:

$$\exists! (A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B = \frac{1}{\chi(\mu)} B$$

где B - матрица из алгебраических дополнений.

Наша матрица B выглядит примерно так:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} c_{11i} \mu^i & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} c_{1ni} \mu^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} c_{n1i} \mu^i & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} c_{nni} \mu^i \end{pmatrix}$$

Давайте разложим нашу матрицу в сумму матриц так, что матрица B_k будет состоять из всех коэффициентов на k -ой позиции этих k функций:

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Тогда вернемся к тому, что было:

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\chi(\mu)} \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Или домножим на $(A - \mu E)$ и получим:

$$E \cdot \chi(\mu) = (A - \mu E) \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Пусть $\chi(t) = \alpha_n t^n + \dots + \alpha_0 t^0$. Давайте раскроем скобки, мы получим:

$$\begin{aligned} \mu^0 : & E\alpha_0 = AB_0 \\ \mu^1 : & E\alpha_1 = AB_1 - B_0 \\ \mu^2 : & E\alpha_2 = AB_2 - B_1 \\ & \dots\dots\dots \\ \mu^{n-1} : & E\alpha_{n-1} = AB_{n-1} - B_{n-2} \\ \mu^n : & E\alpha_n = -B_{n-1} \end{aligned}$$

Теперь умножим каждый $E\alpha_i$ на A^i и сложим. Получится:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \dots + A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = \mathbb{O}$$

$$\chi(A) = \mathbb{O} \Rightarrow \chi \text{ аннулятор } \mathcal{A}, \text{ т.к. } \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t).$$

Q.E.D.

Замечание: Очевидно, \forall матрицы $A_{n \times n}$ ее характеристический многочлен это аннулятор \mathcal{A} .

Следствие 1. $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$, φ - минимальный многочлен, тогда $x : \varphi$ (из теоремы о минимальном мн-не.)

Следствие 1.5. $\deg \varphi \leq n$, т.к. $\deg \chi = n$ и $\chi : \varphi$.

Следствие 2. $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$. Если $\deg \varphi = n = \deg \chi \Leftrightarrow \varphi \equiv \chi \cdot (-1)^n$

Теорема (о множестве корней характеристического многочлена)

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$ множество корней χ совпадает с множеством корней φ (без учета кратности)

Доказательство:

1. λ корень $\varphi \Rightarrow \lambda$ - корень χ . Очевидно.
2. Пусть λ корень χ . Мы должны показать, что и у φ есть такой корень. Тогда есть 2 варианта:
 - (a) $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$ - с.ч. $\Rightarrow \exists u$ - собственный вектор $\neq 0$

Так как u - случайный вектор, то $(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)u = 0$

$(t - \lambda)$ - минимальный аннулятор элемента u , φ - минимальный многочлен \Rightarrow аннулятор v , откуда $\varphi : (t - \lambda) \Rightarrow \lambda$ корень φ - победили

- (b) $\lambda \notin K \equiv \mathbb{R}$, т.е. λ - не собственное число. Прибегаем к комплексификации:

Для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ λ - корень. Как мы знаем $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \equiv \chi_{\mathcal{A}} = \chi$.

Тогда по пункту a это корень минимального многочлена в $\varphi_{\mathbb{C}}$.

Построим минимальный многочлен:

Пусть e_1, \dots, e_n базис. $\mathcal{A} \xrightarrow{e} A$. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{e} A$. Начнем строить по определению минимальный многочлен. Для этого мы должны найти $\psi_i(t)$ - аннулятор e_i .

Выпишу: $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \dots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$. Причем k такое, что $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \dots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{k-1} e_i$ - линейно независимы, а $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_i, \dots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$ - зависимы. Заметим, что $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_j = \mathcal{A}e_j$.

Поэтому по алгоритму построения мин. многочлена $\varphi_j = \varphi_j_{\mathbb{C}}$. А уже откуда λ корень φ - победили!

Q.E.D.

Замечание: $\chi(t) = \prod (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$ и $\varphi(t) = \prod (t - \lambda)^{m(\lambda)}$, верно, что: $1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство.

Пусть у нас есть $\varphi(t)$ - многочлен над полем K (все его коэффициенты в K).

Пусть все его корни $\varphi \in K$. Тогда давайте разложим его в произведение корней:

$$\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

давайте теперь вынесим один из корней за скобки. Получим:

$$\varphi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \cdot \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

Переобозначим $\varphi_\lambda(t) = \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$ и подставим:

$$\varphi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(t)$$

Возьмем P_{m-1} - множество всех многочленов над полем K степени $\leq m - 1$.

Зафиксируем φ и λ и назовем главным идеалом, порожденным многочленом φ_λ :

$$I_\lambda = \{p \in P_{m-1} | p : \varphi_\lambda\}$$

Очевидно I_λ линейное подпространство. Заметим, что $p : \varphi_\lambda \Leftrightarrow p(t) = a_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$

Поэтому на самом деле: $I_\lambda \cong \{a_\lambda\} = P_{m(\lambda)-1}$

Откуда $\dim I_\lambda = m(\lambda)$.

Теорема:

$$P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda - \text{корень } \varphi} I_\lambda.$$

Доказательство:

1. Проверим дизъюнктность:

$$0 = \sum_{\lambda - \text{корень } \varphi} p_\lambda \in I_\lambda = \sum_{\lambda} a_\lambda(t) \varphi_\lambda(t)$$

Зафиксируем какую-то λ и вынесем ее за скобки:

$$a_\lambda \varphi_\lambda(t) + \sum_{\mu \neq \lambda} a_\mu(t) \cdot \varphi_\mu(t)$$

Как мы знаем, для всех $\mu \neq \lambda : \varphi_\mu : (t - \lambda)^{m(\lambda)}$

А так же мы знаем, что $\varphi_\lambda(t)$ не делится на $(t - \lambda)^\mu$

Откуда получаем, что $a_\lambda : (t - \lambda)^{m(\lambda)}$. А это значит, что $a_\lambda \equiv 0$

Откуда дизъюнктно.

2. Проверим размерность $\dim(\bigoplus_{\lambda} I_\lambda) = \sum_{\lambda} \dim I_\lambda = \sum_{\lambda} m(\lambda) = \dim P_{m-1}$, откуда прямая сумма.

Q.E.D.

Следствие 1: $\forall p \in P_{m-1} : \exists! p = \sum_{\lambda} p_\lambda$, где $p_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$, $\deg \alpha_\lambda \leq m(\lambda) - 1$.

В частности, $1 = \sum_{\lambda \text{ корень}} p_\lambda$ - полиномиальное разложение единицы

Замечание:

1. Пусть $\lambda \neq \mu$ - корни φ

$$p_\lambda \in I_\lambda, p_\mu \in I_\mu, p_\lambda p_\mu : \varphi$$

$$p_\lambda(t) = \alpha_\lambda \varphi_\lambda(t), p_\mu(t) = \alpha_\mu \varphi_\mu(t)$$

$$p_\lambda(t) p_\mu(t) = \alpha_\lambda \varphi_\lambda(t) \alpha_\mu \varphi_\mu(t) : \varphi$$

2. Пусть $\forall \lambda, m(\lambda) = 1$, тогда $\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$.

$I_{\lambda} \ni p_{\lambda} = \alpha_{\lambda} \varphi_{\lambda}$, тогда $\alpha_{\lambda} = \text{const}$. Это можно понять так же из $0 \leq \deg \alpha_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1 = 0$

Теорема (Лагранж)

Пусть $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$, то есть $\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$. Тогда:

$$\forall p \in P_{m-1} : p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} \cdot \varphi_{\lambda}(t), \text{ где } p_{\lambda} \in I_{\lambda}$$

Доказательство:

Возьму многочлен p и посмотрю значение в λ .

$p(\lambda) = \sum_{\mu} p_{\mu}$ - я могу так разложить из следствия 1 (см. выше). Также заметим, что a_{μ} - константы. Тогда получается вот такая формула:

$$p(\lambda) = \sum_{\mu} p_{\mu} = \sum_{\mu} a_{\mu} \varphi_{\mu}(\lambda)$$

Заметим, что при $\mu \neq \lambda$ у нас зануляется сумма, так что $p(\lambda) = a_{\lambda} \varphi_{\lambda}(\lambda)$.

Откуда получаю, что $\alpha_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\varphi_{\lambda}(\lambda)}$.

Теперь про производную: $\varphi'(t) = ((t - \lambda) \cdot \varphi_{\lambda}(t))' = \varphi_{\lambda}(t) + (t - \lambda) \varphi'_{\lambda}(t)$

Зафиксируем λ . Получу, что в таком случае $\varphi'(\lambda) = \varphi_{\lambda}(\lambda)$. Откуда, если присмотреться, мы получаем формулу из теоремы.

Q.E.D.

Замечание. Эта теорема позволяет нам быстро искать $\alpha_{\lambda}(t)$, в случае всех m единиц, потому что в таком случае $\alpha_{\lambda}(t)$ - константа.

Следствие: $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$: Пусть $1 = \sum_{\lambda} \frac{1}{\varphi'(\lambda)} \varphi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) \Rightarrow t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}(t)$

Доказательство: $t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\varphi'(t)} \varphi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

Q.E.D.

Вернемся к операторам. Возьмем $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$:

$\varphi(t)$ минимальный многочлен, все корни $\varphi \in K (\Leftrightarrow \text{все корни } \chi \in K)$, то есть являются собственными числами.

$\exists! 1 = \sum_{\lambda - \text{ корни } \varphi} p_{\lambda}(t)$ — полиномиальное разложение единицы.

$\varepsilon = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(\mathcal{A}), \varepsilon = \sum_{\lambda} P_{\lambda}$ — оператор разложения единицы.

Позамечаем некоторые интересные факты:

1. $P_\lambda \in \text{End}(V)$
2. Возьму $\lambda \neq \mu$. Замечу, что $p_\lambda \cdot p_\mu : \varphi$. Тогда $p_\lambda(t)p_\mu(t) = \alpha(t)\varphi(t)$, откуда:
 $\forall v \in V : P_\lambda P_\mu v = a(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{A})v = 0$, из-за того, что φ - минимальный многочлен.
 Откуда $P_\lambda P_\mu$ - аннулятор \mathcal{A} или $P_\lambda P_\mu = 0$
3. $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \sum_\lambda P_\lambda \\ P_\lambda \cdot P_\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_\lambda$ - по теореме это проекторы на $\text{Im } P_\lambda$, $V = \bigoplus \text{Im } P_\lambda$

Такие проекторы называются спектральными. Это не те самые проекторы на V_λ . Пока что это проекторы на их собственные подпространства. Они обладают теми свойствами проекторов, что мы вывели до этого.

ЕСЛИ $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$, тогда по следствию из матрицы Лагранжа, мы знаем

$$\varepsilon = \sum_\lambda P_\lambda, \mathcal{A} = \sum_\lambda P_\lambda \cdot \lambda \Rightarrow \mathcal{A} \text{ о.п.с., } \lambda - \text{с.ч. } \mathcal{A}.$$

Откуда это будут проекторы на собственные подпространства.

Следствие: Т.е. \mathcal{A} о.п.с. достаточно удовлетворять: $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$ в минимальном многочлене.

def: $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$, λ - с.ч. \mathcal{A} . K_λ - корневое подпространство, если:

$$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}, \text{ где } m(\lambda) \text{ кратность } \lambda \text{ в мин. многочлене } \varphi. \varphi(t) = \prod_\lambda (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

Очевидно $V_\lambda \subseteq K_\lambda$.

Теорема (о корневом подпространстве)

1. K_λ - инвариантно относительно \mathcal{A} .
2. $\text{Im } P_\lambda = K_\lambda$, где $\varepsilon = \sum_\lambda P_\lambda$ - оператор разложение единицы.

Называются образами спектров проекторов.

$$\Rightarrow \bigoplus_\lambda K_\lambda = V$$

3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ - минимальный многочлен для $B = \mathcal{A}|_{K_\lambda} \in \text{End}(K_\lambda)$

Доказательство:

1. Возьмем $v \in K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$

Заметим, что $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$ - многочлен от \mathcal{A} . Тогда:

$$\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}\mathcal{A}$$

Умножим и левую и правую часть на v . Получим:

$$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}(\mathcal{A}v) = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = 0$$

Откуда $\mathcal{A}v \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda \Rightarrow K_\lambda$ инвариантно относительно \mathcal{A}

2. Вспомним, что: $\varepsilon = \sum_{\lambda} P_{\lambda}$, $P_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A})$, $p_{\lambda}(t) = \alpha_{\lambda}(t) \cdot \varphi_{\lambda}(t)$

Пусть $v \in V$. Тогда посмотрим на:

$$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot P_{\lambda}v =$$

Заменяем P_{λ} по формуле:

$$= ((\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \alpha_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \varphi_{\lambda}(\mathcal{A}))v =$$

Так как это все многочлены от \mathcal{A} , то они перестановочны:

$$= (\alpha_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_{\lambda}(\mathcal{A}))v = (\alpha_{\lambda}(\mathcal{A})\varphi_{\lambda}(\mathcal{A}))v = \mathbf{O}$$

Так как $\varphi(\mathcal{A})v = \mathbf{O}$ (минимальный многочлен).

Откуда $P_{\lambda}v \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_{\lambda}$. Следовательно $\text{Im } P_{\lambda} \subseteq K_{\lambda}$.

Теперь докажем, что они совпадают:

Возьму $\mu \neq \lambda$, а также $v \in K_{\lambda}$. Посмотрим на $P_{\lambda}v$:

$$P_{\mu}v = \alpha_{\mu}(\mathcal{A})\varphi_{\mu}(\mathcal{A})v =$$

Мы знаем, что в φ_{μ} содержится $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$. Давайте его вынесем за скобки, получим:

$$\alpha_{\mu}(\mathcal{A})\varphi_{\mu}(\mathcal{A})v = \alpha_{\mu}(\mathcal{A})\beta_{\mu}(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v$$

Так как $v \in K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$, то $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbf{O}$, откуда $P_{\mu}v = \mathbf{O}$.

Откуда получаю, что $\forall v \in K_{\lambda}$, $v = \varepsilon v = \sum_{\mu} P_{\mu}v = P_{\lambda}v$. Следовательно $K_{\lambda} \subseteq \text{Im } P_{\lambda}$, но мы уже сказали, что $\text{Im } P_{\lambda} \subseteq K_{\lambda}$, поэтому $K_{\lambda} = \text{Im } P_{\lambda}$.

3. $B = \mathcal{A}|_{K_{\lambda}} \in \text{End}(K_{\lambda})$

$\forall v \in K_{\lambda} : (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbf{O}$, откуда получаем, что $\psi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ - аннулятор \mathcal{B} .

Хотим понять: минимальный ли это многочлен?

Предположим, что он не минимальный, тогда есть $\psi_i(t)$ - минимальный многочлен \mathcal{B} : $\deg \psi_i < \deg \psi$. Заметим, что любой аннулятор \mathcal{B} делится на минимальный многочлен, поэтому $\psi_i(t) = (t - \lambda)^k$, причем $k \leq m(u) - 1$. Тогда заметим, что $\psi_1(t) = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)-1}$ - тоже аннулятор \mathcal{B} .

Если мы покажем, что $\varphi_1(t) = \psi_1(t) \cdot \varphi_{\lambda}(t)$ - минимальный многочлен \mathcal{A} , тогда наш искомым минимальный многочлен не был минимальным. Как мы знаем:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\mu} v_{\mu}, \text{ где } v_{\mu} \in \text{Im } P_{\mu} = K_{\mu}$$

Покажем, что $\varphi_1(t)$ - минимальный многочлен:

$$\varphi_1(\mathcal{A})v = \psi_1(\mathcal{A})\varphi_{\lambda}(\mathcal{A})v = \psi_1(\mathcal{A})\varphi_{\lambda}(\mathcal{A}) \sum_{\mu} v_{\mu} = \varphi_{\lambda}(\mathcal{A})\psi_1(\mathcal{A})v_{\lambda} + \sum_{\mu \neq \lambda} \psi_1(\mathcal{A})\varphi_{\lambda}(\mathcal{A})v_{\mu}$$

Как мы сказали выше: $\psi_1(t)$ - аннулятор B , откуда $\psi_1(\mathcal{A})v_{\lambda} = 0$ (тк $v_{\lambda} \in K_{\lambda}$). Также как мы знаем в $\varphi_{\lambda}(\mathcal{A})$ содержится $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\mu)}$. А $v_{\mu} \in K_{\mu} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\mu)}$. То есть наш многочлен и вправду минимальный. То есть мы пришли к противоречию.

Откуда $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ - минимальный многочлен для \mathcal{B} .

Q.E.D.

Следствие 1: Очевидно, что тогда $1 \leq m(\lambda) \leq \dim(K_\lambda)$.

Следствие 2: \mathcal{A} - о.п.с $\Leftrightarrow \varphi(t) = \prod_\lambda (t - \lambda)$, т.е $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$, (все корни $\varphi \in K$)

Доказательство:

\Rightarrow Пусть \mathcal{A} - о.п.с.. Тогда мы знаем, что:

$$V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч}} V_\lambda, \lambda - \text{корень } \varphi$$

$(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)v = 0 \Rightarrow (t - \lambda)$ - минимальный аннулятор v , где v - собственный вектор. Мы знаем, что:

$$\forall v \in V : \exists ! v = \sum_\lambda v_\lambda$$

Докажем, что $\varphi(t) = \prod_\lambda (t - \lambda)$ - минимальный многочлен:

$$\varphi(\mathcal{A}) \cdot v = \left(\prod_\lambda (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) \right) \sum_\mu v_\mu = \mathbb{O}$$

Это верно, потому что в это произведение входят аннуляторы собственных подпространств $(t - \lambda)$, которые будут занулять каждое из слагаемых. Откуда это аннулятор \mathcal{A} . А так как корни характеристического и минимального совпадают по теореме о множестве корней характеристического многочлена, а так же потому что λ - собственные числа - получаем, что данный многочлен - минимальный.

\Leftarrow Уже доказывали, смотрите **ЕСЛИ** над теоремой о корневом подпространстве.

Q.E.D.

1.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

!!! Не путать разложение жордана с жордановой формой матрицы !!!

def: $B \in \text{End}(V)$ называется нильпотентным, если его минимальный многочлен $= t^\nu$, (т.е. $B^\nu = 0$), где ν - индекс нильпотентности.

Теорема (Разложение Жардана)

$\forall A \in \text{End}(V)$, все корни $\chi, \varphi \in K$. Надо доказать, что:

$A = D + B$, где D - о.п.с, B - нильпотентный, причем $DB = BD$.

Доказательство:

Возьмем оператор A . У него есть $\varphi = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ - минимальный многочлен.

Разложим на операторы разложения единицы:

$$\varepsilon = \sum_{\lambda - \text{корень } \varphi} P_{\lambda}$$

Позже мы этим воспользуемся.

Возьму $D := \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda}$ — очевидно, D - о.п.с. (смотрите теоремы о.п.с).

Возьму $B := A - D$. Все, что осталось проверить - нильпотентность B .

Пусть $\nu = \max(m_{\lambda})$, где λ - корень φ . Тогда:

$$B^{\nu} = \left(A - \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda} \right)^{\nu} = \left(A \sum_{\lambda} P_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda} \right)^{\nu} = \left(\sum_{\lambda} (A - \lambda \varepsilon) P_{\lambda} \right)^{\nu}$$

Как мы помним $\forall \mu \neq \lambda : P_{\lambda} \cdot P_{\mu} = 0$, а также $P_{\lambda}^2 = P_{\lambda}$. Поэтому:

$$\left(\sum_{\lambda} (A - \lambda \varepsilon) P_{\lambda} \right)^{\nu} = \sum_{\lambda} (A - \lambda \varepsilon)^{\nu} P_{\lambda}$$

А как мы помним из определения $P_{\lambda} = a_{\lambda}(A) \varphi_{\lambda}(A)$. А также, так как $\nu = \max(m_{\lambda})$, то внутри каждой скобки есть множитель $(A - \lambda \varepsilon)^{m(\lambda)}$. Откуда B и вправду нильпотентно.

Теперь докажем перестановочность. $BD = \left(A - \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda} \right) \sum_{\mu} \mu P_{\mu}$

А так как это многочлены от A , то они перестановочны. Поэтому и получается наша перестановочность

Q.E.D.

Замечание: $AD = DA, AB = BA$

Теорема (единственность разложения Жордана):

$\forall A \in \text{End}(V)$. Доказать, что разложение Жордана единственно, то есть $\exists! D, B$.

Доказательство:

Пусть у нас есть еще одно разложение Жордана: $\mathcal{A} = \mathcal{D}' + C$, $\mathcal{D}'C = C\mathcal{D}'$, где \mathcal{D}' - о.п.с, а C - нильпотентный оператор.

$\mathcal{D}' = \sum_{\mu} \mu Q_{\mu}$, где Q_{μ} - проекторы.

Давайте разметим план доказательства:

1. Множество λ совпадает с множеством μ .
 - 1.1 Докажем, что $CQ_{\mu} = Q_{\mu}C$.
 - 1.2 Докажем, что $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_{\mu} = C^k Q_{\mu}$.
 - 1.3 Покажем для каждого μ аннуляторы $\text{Im } Q_{\mu}$. $\psi_{\mu} = (t - \mu)^{k(\mu)}$
 - 1.4 Покажем, что произведение ψ_{μ} - аннулятор \mathcal{A} .
 - 1.5 Покажем, что на самом деле это минимальный многочлен, откуда множество корней совпадет.
2. Докажем совпадение \mathcal{D} и \mathcal{D}' .

Начнем доказательство:

- 1.1 Возьмем μ . Докажем, что $CQ_{\mu} = Q_{\mu}C$

Посмотрим на $\mathcal{D}'Q_{\mu}$. Используя свойства проекторов, оно равно:

$$\mathcal{D}'Q_{\mu} = \left(\sum_{\xi} \xi Q_{\xi} \right) Q_{\mu} = \mu Q_{\mu}$$

Посмотрим на $Q_{\mu}\mathcal{D}'$. Используя свойства проекторов, оно равно:

$$Q_{\mu}\mathcal{D}' = Q_{\mu} \left(\sum_{\xi} \xi Q_{\xi} \right) = \mu Q_{\mu}$$

Откуда \mathcal{D}' и Q_{λ} - перестановочны.

Возьмем ξ, μ . Для них выполнено:

$$(\xi - \mu)Q_{\xi}CQ_{\mu} = \xi Q_{\xi}CQ_{\mu} - Q_{\xi}C\mu Q_{\mu}$$

Как мы только что доказали: $\mu Q_{\mu} = \mathcal{D}'Q_{\mu}$. Поэтому:

$$\xi Q_{\xi}CQ_{\mu} - Q_{\xi}C\mu Q_{\mu} = \mathcal{D}'Q_{\xi}CQ_{\mu} - Q_{\xi}C\mathcal{D}'Q_{\mu}$$

А так же мы только что доказали, что \mathcal{D}' и Q_{μ} перестановочны для любого μ . Откуда:

$$\mathcal{D}'Q_{\xi}CQ_{\mu} - Q_{\xi}C\mathcal{D}'Q_{\mu} = Q_{\xi}\mathcal{D}'CQ_{\mu} - Q_{\xi}C\mathcal{D}'Q_{\mu} = Q_{\xi}(\mathcal{D}'C - C\mathcal{D}')Q_{\mu}$$

А как мы знаем из определения жорданового разложения C и D' перестановочны. Это значит, что $D'C - CD' = \mathbf{O}$. Откуда:

$$(\xi - \mu)Q_{\xi}CQ_{\mu} = \mathbf{O} = (\mu - \xi)Q_{\mu}CQ_{\xi}$$

То есть для $\xi \neq \mu : Q_\xi C Q_\mu = Q_\mu C Q_\xi = 0$ Теперь вернемся к тому, что мы изначально хотели - перестановочность C, Q_μ :

$$C Q_\mu = \varepsilon C Q_\mu = \left(\sum_{\xi} Q_\xi \right) C Q_\mu$$

Хочу использовать только что доказанный факт: $Q_\xi C Q_\mu = Q_\mu C Q_\xi$:

$$\left(\sum_{\xi} Q_\xi \right) C Q_\mu = \sum_{\xi} Q_\mu C Q_\xi = Q_\mu C \left(\sum_{\xi} Q_\xi \right) = Q_\mu C$$

Откуда $Q_\mu C = C Q_\mu$ — перестановочны.

1.2 Докажем, что $(A - \mu \varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$. Сначала посмотрим на случай $k = 1$:

$$(A - \mu \varepsilon) Q_\mu = (D' + C - \mu \varepsilon) Q_\mu = \left(\sum_{\xi} \xi Q_\xi + C - \mu \sum_{\xi} \xi \right) Q_\mu$$

Воспользуемся свойствами проекторов и получим, что:

$$\left(\sum_{\xi} \xi Q_\xi + C - \mu \sum_{\xi} \xi \right) Q_\mu = \mu Q_\mu + C Q_\mu - \mu Q_\mu = C Q_\mu$$

Воспользуемся индукцией:

База: $k = 1$ доказана сверху.

Индукционный переход: Пусть выполнено $(A - \mu \varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$, тогда выполнено: $(A - \mu \varepsilon)^{k+1} Q_\mu = C^{k+1} Q_\mu$. Докажем:

$$(A - \mu \varepsilon)^{k+1} Q_\mu = (A - \mu \varepsilon)^1 (A - \mu \varepsilon)^k Q_\mu = (A - \mu \varepsilon) C^k Q_\mu = C^k (A - \mu \varepsilon) Q_\mu = C^{k+1} Q_\mu$$

1.3 Посмотрим на $(A - \mu \varepsilon)^k Q_\mu$. Как мы доказали в пункте 1.2 $(A - \mu \varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$. Как мы помним, C - нильпотентная, откуда есть k начиная с которого $(A - \mu \varepsilon)^k Q_\mu = 0$. Давайте для каждого μ введем свое $k(\mu)$ - минимальная степень, чтобы получился ноль. Из перестановочности $C^j Q, Q C^j$ получаю, что $(A - \mu \varepsilon)^{k(\mu)} Q = Q (A - \mu \varepsilon)^{k(\mu)}$

То есть $Q_\mu (A - \mu \varepsilon)^{k(\mu)} = (A - \mu \varepsilon)^{k(\mu)} Q_\mu = C^{k(\mu)} Q_\mu = 0$. Это значит, что любой вектор из $\text{Im } Q_\mu$ применяя к нему $(A - \mu \varepsilon)^{k(\mu)}$ будет получаться ноль. То есть многочлен $(t - \mu)^{k(\mu)}$ - минимальный аннулятор векторов из $\text{Im } Q_\mu$.

Замечание: именно здесь применяется пункт 1.1.

1.4 Возьму $\psi = \prod_{\mu} (t - \mu)^{k(\mu)}$. Покажу, что это аннулятор A .

$\forall x : \exists! x = \sum_{\mu} x_\mu$, где $x_\mu \in Q_\mu$ - по определению проекторов.

Подействуем на x нашим минимальным многочленом:

$$\psi(A)x = \left(\prod_{\mu} (A - \mu \varepsilon)^{k(\mu)} \right) \sum_{\xi} x_\xi = \sum_{\xi} (q_\xi \cdot (A - \xi)^{k(\xi)} \cdot x_\xi) = 0$$

Это ноль потому что каждое слагаемое в сумме ноль, а каждое слагаемое ноль, потому что в $\psi(A)$ входит множитель $t(A - \xi)^{k(\xi)}$ - аннулятор векторов из $\text{Im } Q_\mu$.

Откуда ψ аннулятор A .

1.5 Как мы знаем минимальный многочлен делится на минимальные аннуляторы векторов, откуда φ делится на каждое ψ_λ . Также мы только что доказали, что ψ аннулятор \mathcal{A} , откуда ψ делится на φ . А раз ψ делится на φ и φ делится на ψ , то $\psi \equiv \varphi$ - минимальный аннулятор. Из этого следует, что множество λ и множество μ совпадает.

Замечание: совпадение λ и μ еще не говорит нам о том, что $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.

2. $k(\lambda) = m(\lambda)$ из того, что совпали ψ, φ .

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\lambda)} Q_\lambda = Q_\lambda (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\lambda)} = \mathcal{O}$$

Откуда векторы из $\text{Im } Q_m \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$. Но мы помним, что $\bigoplus_\lambda K_\lambda = V$ и $\bigoplus_\lambda \text{Im } Q_\lambda = V$, откуда они совпадают. Откуда $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

Q.E.D.

Теорема:

разложение Жордана $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$. Тогда $\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$

Доказательство:

По теореме о о.п.с у \mathcal{A} и \mathcal{D} совпадает множество корней.

Но нам надо теперь понять что-то про степени. $\nu = \max(m(\lambda)); \mathcal{B}^\nu = \mathcal{O}$. Тогда:

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu - \mathcal{B}^\nu t^\nu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon - \mathcal{B}t)((\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-2}\mathcal{B}t + \dots + (\mathcal{B}t)^{\nu-1})$$

Так как \mathcal{B} - многочлен от \mathcal{A} , то мы можем так разложить

Возьмем μ не корень. Посчитаем определители. С одной стороны это: $\det(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu = (\chi_{\mathcal{A}})^\nu$ - не зависит от t . С другой стороны это:

$$\det(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu = \det(\mathcal{A} - \mu\varepsilon - \mathcal{B}t) \det((\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-2}\mathcal{B}t + \dots + (\mathcal{B}t)^{\nu-1})$$

Тут два многочлена зависящих от t (оба не нули, иначе μ - корень).

Заметим, что слева многочлен нулевой степени t . Когда произведение двух многочленов от t дает в произведении многочлен нулевой степени? Когда это многочлены нулевой степени. Откуда это константы

Давайте посчитаем эти константы. Подставим в первый многочлен $t = 1$, а во второй подставим $t = 0$. Получим:

$$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}$$

Откуда $\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$. Получили, что в любой точке - не корне, у нас совпадение многочленов. В корнях они оба зануляются, откуда $\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$.

Q.E.D.

Следствие 1: $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{D} \Rightarrow \det \mathcal{A} = \det \mathcal{D}$

Следствие 2: $\forall \mathcal{A} : \alpha(\lambda) = \dim K_\lambda$

Доказательство:

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ - разложение Жордана. $\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$ из теоремы.

$D = \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda}$, \mathcal{D} - о.п.с. \forall с.ч $\lambda : \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$, а теперь вспомним, что проекторы это с одной стороны проекторы на K_{λ} , а с другой стороны на собственные подпространства $\mathcal{D} V_{\lambda}$.

Q.E.D.

1.10 Жорданова форма матрицы. Формула Фраббениуса.

Возьмем какое-то λ и рассмотрим сужение. Введем некоторые локальные обозначения:

$$K = K_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda)^{m(\lambda)}, B = (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)|_K, m = m(\lambda), \alpha = \alpha(\lambda), \gamma = \gamma(\lambda).$$

Возьмем $K_r = \text{Ker}(B^r) = \text{Ker}((\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)^r)$, $r = 1, \dots, m$: $K_\lambda = K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m = K$. Заметим, что m - минимальная степень, когда он зануляется. Докажем, что там строгое включение:

Доказательство:

Пусть существует: $K_r \equiv K_{r+1}$. $\text{Ker} B^r = \text{Ker} B^{r+1}$. Тогда по теорема о ранге и дефекте:

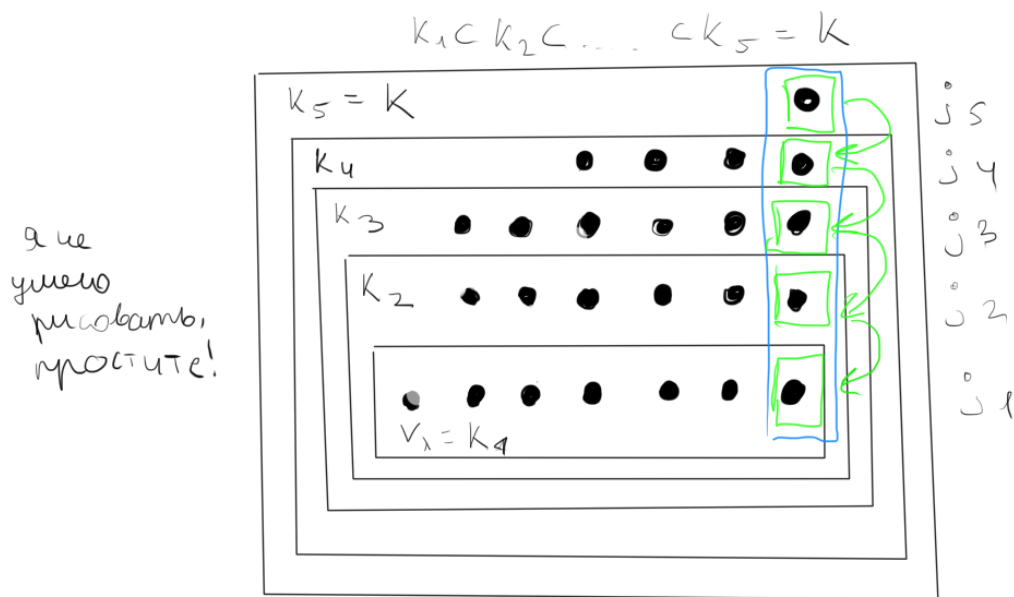
$$\text{rg} B^r = \text{rg} B^{r+1}, \text{Im } B^{r+1} \subseteq \text{Im } B^r \Rightarrow \text{Im } B^{r+1} = \text{Im } B^r$$

Что это значит? Пусть $X = \text{Im } B^r$. Тогда $BX = X$, $B^2X = X$, \dots , $B^mX = X$.

Вспомним, что $B^m = 0$, откуда $X = 0$, но в таком случае (так как r от 1 до $m-1$, то мы нашли число $r < m$, что $B^r = 0$. Но такого не может быть, так как m - минимальная степень, чтобы оператор занулился. Противоречие. Откуда все K_i различны.

Q.E.D.

Доказали, что включения строгие. А теперь объясним все на рисунке, а позже введем более формальную терминологию:



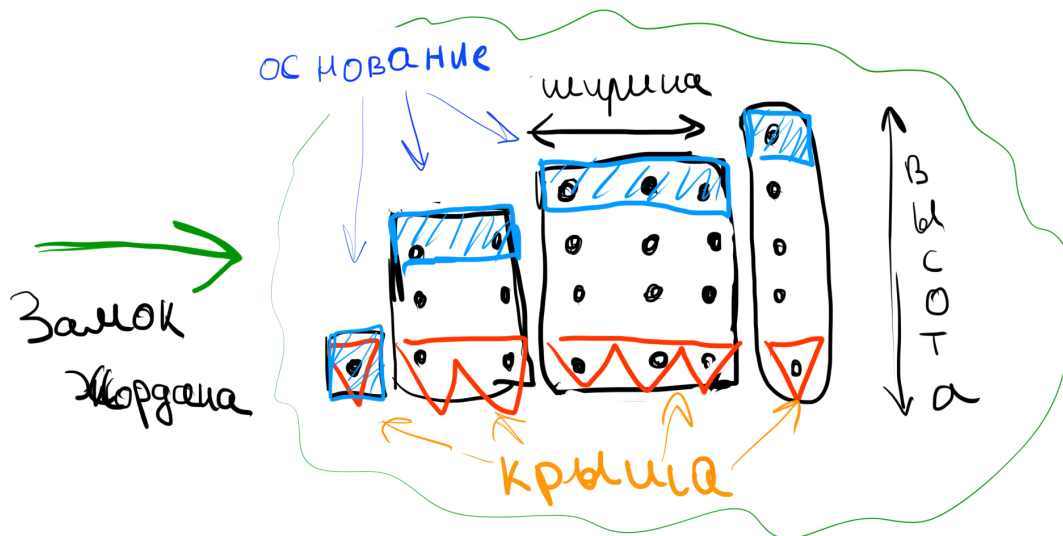
Рассмотрим такое K , что его ранг 24. И давайте сопоставим точкам на рисунке базисные вектора. Тогда у K_1 будет 6 базисных векторов, у K_2 будет 11 и так далее. Тогда давайте введем новое определение: \bar{K}_5 , такое подпространство, что $(KB + K_4) \oplus \bar{K}_5 = K$. Возьму оттуда первый базисный вектор. Назову его j_5 . На картинке вы можете это отчетливо видеть. Тогда возьму $j_4 = Bj_5$, $j_3 = Bj_4$, $j_2 = Bj_3$, $j_1 = Bj_2$. Причем заметим, что в таком случае $j_i \in K_i$.

Такие j_5, j_4, j_3, j_2, j_1 мы будем называть циклическим базисом длины 5, а j_4, j_3, j_2, j_1 будут называться присоединяемыми.

Пока упустим, почему эти векторы линейно независимы, это потом докажется. Давайте сузим наш оператор до $S = \text{span}(j_1, \dots, j_5)$ и попытаемся понять: какая будет матрица оператора. Заметим, что $K_1 = V_\lambda$, откуда мы знаем, что j_1 - собственное число λ , то есть $Aj_1 = \lambda j_1$. $j_1 = Bj_2$, то есть $Aj_2 = j_1 + \lambda j_2$. Таким образом получаю, что моя матрица будет:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Такая матрица называется жордановой клеткой, порожденной циклическим базисом размерности 5. Обозначается $J_5(\lambda) = \lambda E + I_5$, где I_5 - матричка из единиц на диагонали, расположенной выше главной. По-другому еще называется блок нижнего уровня.



Давайте теперь возьмем все такие циклические базисы (столбики) одной высоты и объединим их. Получатся башни. Или более формально башня - подпространство, порожденное циклическими базисами одной длины. У башни есть опорные подпространства (основание башни), а так же у каждой башни есть крыша. Они подписаны на рисунках сверху. Башни мы будем обозначать τ_h , где h высота башни. То есть на данном рисунке присутствует башня $\tau_1, \tau_3, \tau_4, \tau_5$, но не присутствует башня τ_2 .

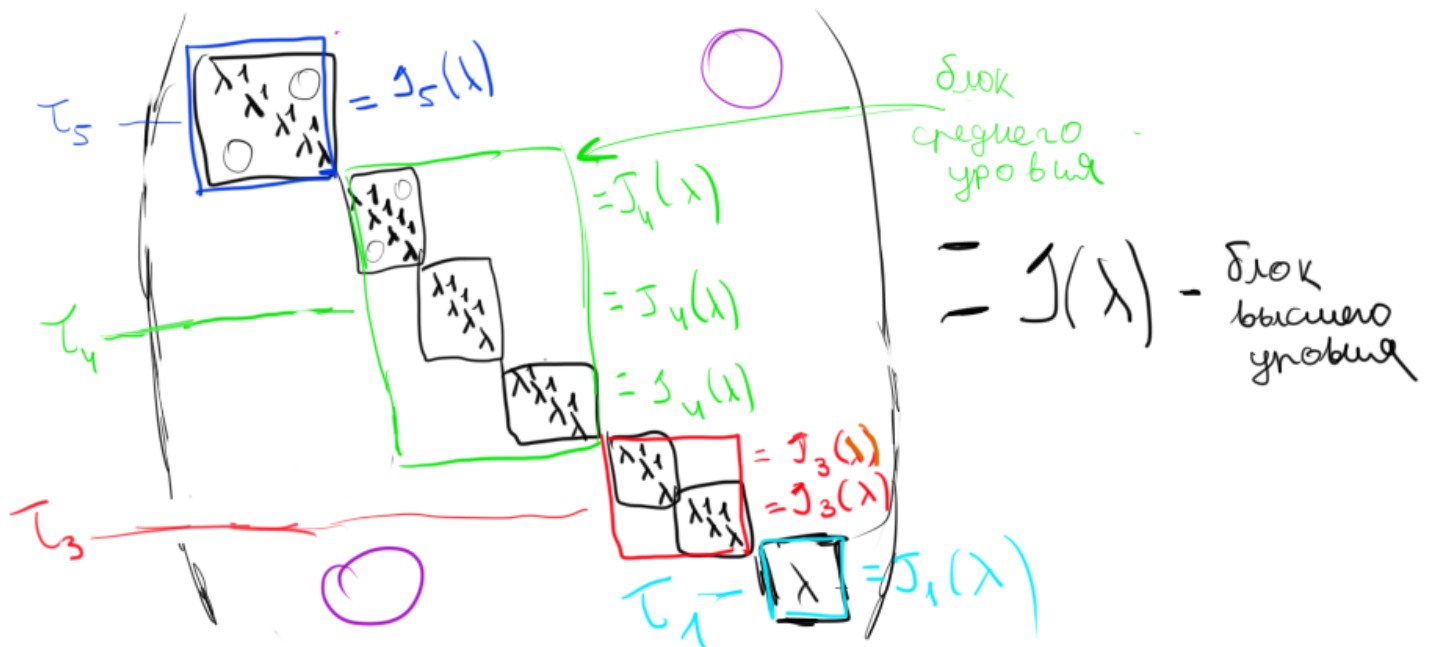
Замок Жордана, возвышающийся над живописными холмами Прованса, хранит немало тайн. Говорят, что в 15 веке в нем жил загадочный алхимик по имени Пьер. Местные жители часто видели странное зеленоватое свечение в окнах замка по ночам...

Так о чем это я? Вся эта конструкция величается ЗАМКОМ ЖОРДАНА. А если у нас $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$, то наш замок будет просто полоской, поэтому мы его будем называть деревней Жордана.

Так вот матрица, соответствующая этой K_λ , выраженной через циклические базисы:

$$\begin{pmatrix} J_5(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix} = J(\lambda)$$

Называется блоком верхнего уровня, причем m - размер самой большой клетки. При этом, если раскрыть все J , то получится:



Теперь мы приходим к матрице в форме Жордана, она состоит блоков верхнего уровня, соответствующих собственным числам

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda) & & & \\ & J(\mu) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\xi) \end{pmatrix}$$

$T = T_{\text{кан}} \rightarrow \text{жорд. базис} = \text{объединение всех циклических базисов.}$

И если A - матрица \mathcal{A} , то: $T^{-1}AT = J$.

А ТЕПЕРЬ НА ЯЗЫКЕ МАТЕМАТИКИ:

$B = (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) \Big|_K$. Введу $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r \subset \dots \subset K_m = K$, где $K_r = \text{Ker} B^r$.

Введем временное обозначение:

$$\begin{aligned} z_0 &= BK = \text{Im } B \\ z_1 &= BK + K_1 \\ &\vdots \\ z_r &= BK + K_r \\ &\vdots \\ z_m &= BK + K_m = K \end{aligned}$$

Заметим, что в таком случае: $z_0 \subseteq z_1 \subseteq \dots \subseteq z_m$, а также $z_{r+1} = z_r \oplus \overline{K}_{r+1}$, где \overline{K}_r - **опорное подпространство**. Тогда заметим вот такую формулу:

$$K = z_m = BK + K_m = z_{m-1} \oplus \overline{K}_m = BK \oplus \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m$$

Прямую сумму K_λ называют **прямой суммой опорных подпространств**.

Теорема:

$\forall r : 1 \leq r \leq m-1$ будет выполнено: $B^r K = B^{r+1} K \oplus B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m$

Доказательство:

Пусть $x_* \in K$. Тогда существует и единственно представление в прямой сумме опорных подпространств и BK :

$$x_* = Bx + x_1 + x_2 + \dots + x_n, \text{ где } x_j \in \overline{K}_j$$

Теперь умножим правую и левую часть на B^r :

$$B^r x_* = B^{r+1} x + B^r x_1 + \dots + B^r x_r + \dots + B^r x_m$$

Заметим, что в таком случае все x_j , где $j \leq r$ уйдут, потому что $x_j \in \overline{K}_j$, то есть $B^j x_j = 0$.

$$B^r K = B^{r+1} K + B^r \overline{K}_{r+1} + B^r \overline{K}_{r+2} + \dots + B^r \overline{K}_m$$

Осталось проверить дизъюнктность, то есть проверить тривиальность разложения нуля:

$$0 = B^{r+1} x + B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m = B^r (Bx + \dots + x_m)$$

Заметим, что то, что находится внутри скобок находится в $\text{Ker} B^r \subset z_r = BK \oplus \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_r$. Откуда существует единственное разложение через эту прямую сумму:

$$Bx + x_{r+1} \dots + x_m = By + x_1 + \dots + x_r$$

Но, как мы помним BK и \overline{K}_j - дизъюнкты из прямой суммы опорных пространств и $\text{Im } B = BK$. То есть $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$. Откуда получаем, что Bx тоже ноль, откуда разложение нуля - тривиально.

Q.E.D.

Следствие:

$$K = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus B\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m \oplus B^2\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus B^{m-1}\overline{K}_{m-1}$$

Пусть $x \in \text{Ker} B^j$ и $x \in \overline{K}_r$, тогда $x \in \text{Ker} B^j \cap \overline{K}_r = K_j \cap \overline{K}_r$. А как мы знаем $K_j \cap \overline{K}_r = \{0\}$. Если бы был x в их пересечении, то тогда $x \in \text{Ker} B^j = K_j$ и $x \in \overline{K}_r$. Но как мы знаем x находится именно в \overline{K}_r , поэтому $B^{r-1}x \neq 0$, но как я сказал ранее: $x \in \text{Ker} B^j$. Противоречие.

То есть А это значит, что $x \in \{0\} \Leftrightarrow x = 0$, откуда ядро тривиально, наша функция инъективна, а из этого уже следует изоморфность, то есть биекция.

Q.E.D.

Следствие 1. $\sum_{r=1}^n d_r = \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$.

Следствие 1.5. $\sum_{r=1}^m r \cdot d_r = \alpha(\lambda) = \dim K_\lambda$

Следствие 2. (Теорема Фробениуса.)

$$d_r = \text{rg} B^{r-1} - 2\text{rg} B^r + \text{rg} B^{r+1}$$

Доказательство:

$$B^r K = B^{r+1} K \oplus B^r \overline{K}_{r+1} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m$$

Введем обозначение $p_r := \dim \text{Im } B^r = \dim B^r K = \text{rg} B^r$. Тогда:

$$p_r - p_{r+1} = d_{r+1} + d_{r+2} + \dots + d_m$$

Давайте напишем разности:

$$p_0 - p_1 = d_1 + d_2 + \dots + d_m$$

$$p_1 - p_2 = d_2 + \dots + d_m$$

$$\vdots$$

$$p_{m-1} - p_m = d_m$$

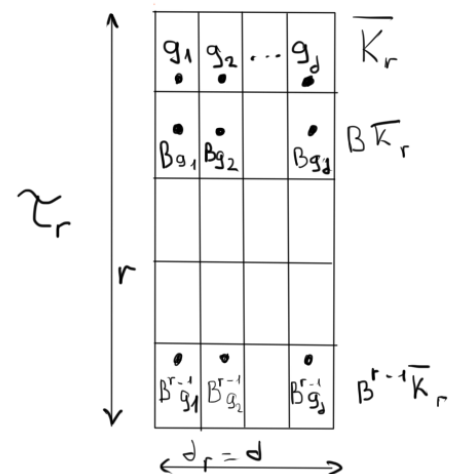
А теперь получаем, что $d_1 = p_0 - 2p_1 + p_2$, $d_2 = p_1 - 2p_2 + p_3$, а откуда если заметить, то мы получаем нужную мне формулу!

Замечание: Такое равенство в теореме не очень удобно, потому что B - суженное изображение. todo: дописать формулу с практики

Пусть $\overline{K}_r = \text{span}(g_1, g_2, \dots, g_d)$ - на рисунке это показано точечками. Давайте к этим векторам будем применять наше отображение. Сначала получим Bg_1, \dots, Bg_d , а в теореме о размерности башни мы доказали, что у нас изоморфны \overline{K}_r и $B\overline{K}_r$, то есть мы получили еще один базис, только теперь $B\overline{K}_r$. Будем так проделывать и получим, что у нас базис $B^i \overline{K}_r$ это $B^i g_1, \dots, B^i g_d$.

def: Циклическим базисом, порожденным вектором длины r называются $g_p, Bg_p, \dots, B^{r-1}g_p$. В таком случае $Bg_p, \dots, B^{r-1}g_p$ называют **присоединяемыми**.

$$S = \text{span}(B^{r-1}g_p = j_1, B^{r-2}g_p = j_2, \dots, g_p = j_p).$$



Как мы помним из рассуждений наверху в самом начале этого параграфа:

$$A|_S \xleftrightarrow{j} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч.}} K_\lambda = \bigoplus_{\lambda} \bigoplus_r \bigoplus_p S_{p,\lambda,r}$ - объединение всех базисов называется **Жордановым базисом**.

1.11 Функция оператора матрицы, приводимой к Жордановой форме.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, |x| < r$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m, |\lambda| < r - \text{все случайные числа.}$$

Как мы знаем матрицу можно привести к жордановой форме. $A = T J T^{-1}$.

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & J(\mu) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & J(\xi) \end{pmatrix}$$

Давайте посчитаем функцию от матрицы A :

$$f(A) = f(T J T^{-1}) = T \begin{pmatrix} f(J(\lambda)) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & f(J(\mu)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & f(J(\xi)) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Посмотрим на блок высшего уровня. Он состоит из клеток:

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} K_1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & K_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & K_k \end{pmatrix}, \text{ где } K_i - \text{жорданова клетка.}$$

$$\text{Тогда } f(J(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(K_1) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & f(K_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & f(K_{ind}) \end{pmatrix}$$

Посмотрим ситуацию для одной клетки. $J_k = \lambda E + I_k$.

$$(\lambda E + I_k)^m = \sum_{j=0}^m C_m^j \lambda^{m-j} (I_k)^j$$

Теперь мы можем показать соответствующую матрицу (туда была добавлена t):

$$J_k^m t^m = \begin{pmatrix} \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1}t^m & \frac{m(m-1)}{2}\lambda^{m-2}t^m & \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\lambda^{m-3}t^m & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{(k-1)!}\lambda^{m-k+1}t^m \\ & \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1}t^m & \lambda^m t^m & \ddots & & & & 0 \\ & & \lambda^m t^m & \ddots & & & & & 0 \\ & & & \ddots & & & & & 0 \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1}t^m & \lambda^m t^m \end{pmatrix}$$

Теперь посмотрим $f(J_k t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_k^m t^m =$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m \lambda^m & t \sum_{m=1}^{\infty} c_m m (\lambda t)^{m-1} & \frac{t^2}{2!} \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1) (\lambda t)^{m-2} & \frac{t^3}{3!} \sum_{m=3}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2) (\lambda t)^{m-3} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots & & & \\ & & 0 & 0 & \ddots & & & \\ & & & 0 & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & & \end{pmatrix}$$

У ряда мы можем брать производную сколько угодно раз (факт из математического анализа) (от функции в которую подставлен λt)

Откуда наша страшная формула равна $f(\lambda t) = \begin{pmatrix} f(\lambda t) & \frac{t}{1} f'(\lambda t) & \frac{t^2}{2} f^{(2)}(\lambda t) & \dots & \dots \\ 0 & f(\lambda t) & \frac{t}{1} f'(\lambda t) & \ddots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \end{pmatrix}$

Пример:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f^{(2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(x) = \sin x$$

$$f'(\lambda t) = -\sin \lambda t$$

$$\cos(J_4 t) = \begin{pmatrix} \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) & \frac{t^2}{2!}(-\cos \lambda t) & \frac{t^3}{3!}(-\sin \lambda t) \\ \vdots & \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) & \frac{t^2}{2!}(-\cos \lambda t) \\ \vdots & \ddots & \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) \\ 0 & \dots & \dots & \cos \lambda t \end{pmatrix}$$

2 Тензоры.

2.1 Линейные формы (функционалы). Сопряженное (дуальное) пространство. Контрвариантный и ковариантный законы преобразования координат.

def: V - линейное пространство над полем K , $f : V \rightarrow K$ - линейная:

$$\forall \lambda \in K : \forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2)$$

Такое f называется линейной формой или функционалом.

Примеры:

1. $\bar{b} = const : \forall \bar{a} : \in V_3 : f(\bar{a}) = (\bar{a}, \bar{b})$ - очевидно линейная форма
2. $A_{n \times n} : f(A) = tr(A)$ - очевидно линейная.
3. $p \in P, t_0 \in k$ фикс. $f(p) = \frac{p^{(m)}t_0}{m!}$ - линейная форма.
4. $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ - бесконечномерное линейное пр-во. $\delta(f) = f(0)$ — дельта-функция Дирака.

f_1, f_2 - линейные формы. Введем операции:

1. **Сложение:** $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$
2. **Умножение на скаляр:** $(\lambda f_1)(v) = \lambda f_1(v)$

Очевидно существует ноль и противоположные. Откуда выполнены аксиомы 1-8, откуда линейное пространство.

$V^* = \{f : V \rightarrow K \text{ - линейная форма}\}$ - называется сопряженным пр-во к V или дуальное.

Возьмем V , зафиксируем e_1, \dots, e_n - базис.

$\forall X \in V : X = \sum_{i=1}^n x_i e_i = x^i e_i$ - вспоминаем правило Эйнштейна из первого семестра. Тогда:

$$X \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x$$

$f(X) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i) = x^i a_i$, где $f(e_i) = a_i \in K$. $f(X) = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$.

$f \leftrightarrow a = (a_1, \dots, a_n)$ строка. $V^* = (K^n)^T$.

Откуда $\dim V^* = n$. Это взаимнооднозначное соответствие, оно очевидно линейно, откуда это изоморфизм.

То есть теперь на самом деле функции описываются строками — значениями на базисных векторах.

Пример:

Возьмем и посмотрим на скалярное произведение в V_3 , $\bar{b} = const$. $\forall X \in V_3, f(\bar{X}) = (\bar{X}, \bar{b})$.

$$f(\bar{i}) = (\bar{i}, \bar{b}) = b_1, f(\bar{j}) = (\bar{j}, \bar{b}) = b_2, f(\bar{k}) = (\bar{k}, \bar{b}) = b_3$$

$$\bar{X} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$$

$$f(\bar{X}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \text{ у нас строка } f \leftrightarrow (b_1, b_2, b_3)$$

def: V , $e = (e_1, \dots, e_n)$ базис.

$\forall x \in V : w^i(x) = x^i$ — i -ая координата вектора x относительно базиса e .

w^i называется координатной функцией.

Не трудно заметить, что w^i — линейная форма $\in V^*$.

Теорема 1: (о базисе V^*)

Доказать w^1, \dots, w^n — базис V^* .

Доказательство:

Докажем порождаемость:

$\forall f \in V^* : \forall x \in V : f(x) = x^i a_i = w^i(x) a_i$, где $a_i \in K$ — порождаемое

Докажем линейную независимость, показав единственность разложения нуля:

$0 = \alpha_i w^i$, где $\alpha_i \in K$. Посмотрим на $\forall x \in V : \alpha_i w^i(x) = 0$.

Пусть $x = e_j$ для $j = 1, \dots, n$. Как мы знаем, для $i \neq j : w^i(e_j) = 0$. Тогда $\alpha_i w^i(e_j) = \alpha_j = 0$, $\forall j \Rightarrow$ лин. независим.

Q.E.D.

Следствие: w^i координатные формы относительно базиса $e \Rightarrow \forall f \in V^* : f = a_i w^i$, т.е $a = (a_1, \dots, a_n)$ координаты f в базисе $w = (w^1, \dots, w^n)$ пространства V^*

def: w^1, \dots, w^n называется сопряженным (дуальным) к базису e пространства V .

Очевидно $w^j(e_j) = \sigma_j^i$.

Теорема 2:

\forall базиса w^1, \dots, w^n пространства V^* .

$\exists!$ базис e'_1, \dots, e'_n пространства V такой, что w' базис, сопряженный к e' . То есть w'^i координаты формы относительно e' .

Доказательство:

Пусть e_1, \dots, e_n базис V . Тогда, как мы говорили ранее: w^1, \dots, w^n координатные функции относительно e , базис V^* сопряженный к e .

Возьмем w' . Так как он базис и w базис, то:

$$w' = w T_{w \rightarrow w'}$$

$(T_{w \rightarrow w'})^T = S = (S_j^i)_{n \times n}$. Заметим, что S не вырожденная, т.к. T матрица перехода. Строки матрицы S — это координаты элементов нового базиса w' в старом базисе(w).

$$(w'^1, \dots, w'^n) = (w^1, \dots, w^n) T_{w \rightarrow w'}$$

Давайте все транспонируем:

$$\begin{pmatrix} w'^1 \\ \vdots \\ w'^n \end{pmatrix} = (T_{w \rightarrow w'})^T \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$$

Пусть $T_{e \rightarrow e'} = S^{-1} = T = (t_j^i)_{n \times n}$ - невырожден. $\Rightarrow e' = eT$ базис в пр-ве V .

Осталось показать, что w' будет сопряженным к e' , т.е. показать $w'^i(x) = x'^i$, $x = x'^i e'_i$, для всех $x \in V$. Тк w'^i - линейная форма, то:

$$w'^i(x'^i e'_j) = x'^j w'^i(e'_j)$$

Теперь, давайте заметим, что $w'^i = S_k^i w^k$, $e'_j = t_j^m e_m$. Откуда

$$w'^i(e'_j) = S_k^i w^k(t_j^m e_m) = S_k^j t_j^m w^k(e_m) = S_m^i t_j^m = (ST)_j^i =$$

Q.E.D.

Следствие. e, e' базисы V . w, w' соотв. сопряженные базисы к e, e' в V^* .

$$T = T_{e \rightarrow e'}, S = T^{-1} \Rightarrow \forall x \in V : \forall f \in V^*$$

$$x' = SX$$

$$a' = aT$$

Доказательство:

$$T = T_{e \rightarrow E'}$$

$$(T_{w \rightarrow w'})^T = S - \text{связь координат в старых и новых координатах}$$

$$a^T = T_{w \rightarrow w'}(a')T$$

$$a = a'(T_{w \rightarrow w'})^T = a'S$$

$$\text{Откуда } a' = aS^{-1} = aT.$$

Преобразование координат, согласованных по тому же закону, что и базис: $a' = aT$

Преобразование координат, согласованных по противоположному закону: $x' = Sx$

def: Преобразование координат векторов пространства V происходит по закону, противоположному преобразованию базисов — называется **контрвариантным**, а координаты векторов пространства V называется **контрвариантами** (индексы координат пишутся сверху)

def: Преобразование координат векторов пространства V происходит по тому же закону, что преобразованию базисов в пространстве V (т.е. согласованно) называется **ковариантным** преобразования. Координаты векторов пространства V^* называется **ковариантным** (индексы пишутся внизу)

$$\forall f \in V^* \leftrightarrow (a_1, \dots, a_n), a_j = f(e_j).$$

$$\forall f^1, \dots, f^n \in V^* : f^j \xrightarrow{w} a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$$

$$\forall x_1, \dots, x_n \in V : x_i \xleftrightarrow{e} x_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^n \end{pmatrix}$$

$$(f^j(x_i))_{n \times n} = \begin{pmatrix} f^1(x_1) & f^1(x_2) & \dots & f^1(x_n) \\ f^2(x_1) & f^2(x_2) & \dots & f^2(x_n) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f^n(x_1) & f^n(x_2) & \dots & f^n(x_n) \end{pmatrix} = f^j(x_i) = a^j x_i$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \ddots & \ddots & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & \ddots & \ddots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \dots & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

$$w^i(e_j) = \sigma_j^i$$

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} \cdot (e_1 e_1 \dots e_n) = E$$

def: $V^{**} = (V^*)^*$ дважды сопряженное пространство.

$\forall f \in V^*$. Пусть $x \in V$:

$${}^{\prime\prime}x^{\prime\prime}(f) = f(x). \quad {}^{\prime\prime}x^{\prime\prime} : V^* \rightarrow K.$$

$$\forall \lambda \in K : \forall f^1, f^2 \in V^*$$

$${}^{\prime\prime}x^{\prime\prime}(\lambda f^1 + f^2) = (\lambda f^1 + f^2)(x) = \lambda f^1(x) + f^2(x) = \lambda_1 {}^{\prime\prime}x^{\prime\prime}(f^1) + {}^{\prime\prime}x^{\prime\prime}(f^2)$$

$$\Rightarrow {}^{\prime\prime}x^{\prime\prime} \text{ линейное отображение } \Rightarrow {}^{\prime\prime}x^{\prime\prime} \in (V^*)^*$$

Дальше у ${}^{\prime\prime}x^{\prime\prime}$ будут упускаться :))

Теорема 3 (О естественном изоморфизме)

Естественный - не зависит от введения базиса.

$$V \cong V^{**}$$

Доказательство:

$\forall x \in V \rightarrow {}^{\prime\prime}x^{\prime\prime} \in V^{**}$. Назовем это отображение φ .

Покажем, что наше взаимоднозначное сопоставление линейно.

$$x_1 + \lambda x_2 \in V : x_1 \rightarrow {}^{\prime\prime}x_1^{\prime\prime}, x_2 \rightarrow {}^{\prime\prime}x_2^{\prime\prime}$$

$\forall f \in V^* : {}^{\prime\prime}x_1 + \lambda x_2^{\prime\prime}(f) = f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2) = {}^{\prime\prime}x_1^{\prime\prime}(f) + \lambda {}^{\prime\prime}x_2^{\prime\prime}(f)$. Откуда φ линейно.

Пусть e_1, \dots, e_n базис V

$\rightarrow {}^{\prime\prime}e_1, \dots, {}^{\prime\prime}e_n^{\prime\prime}$. Покажем, что это базис в V^{**} .

Мы знаем, что $\dim(V^*)^* = \dim V^* = \dim V = n$. Откуда достаточно показать, что " $e_1 \dots, e_n$ " - линейно независимы.

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i(w_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w^j(e_j) = \alpha_j \Rightarrow \text{линейно независимы, откуда базис.}$$

$x \in V \leftrightarrow "x" \in V$ - изоморфизм

$$f \in V^*, x \in V$$

$$x(f) = f(x) = x^i a_i = w^i(x) a_i = x(w^i) a_i = x^i a_i = x^i f(e_i) = x^i e_i(f)$$

e и w взаимно сопряж.

$$x = x^i e_i, w^i(x) = x^i, \text{ где } x \in V$$

$$e_j(f) = f(e_j) = a_j(f \in V^*)$$

$e_j \in V^{**}$ - коорд. формы относительно базиса w^i .

Пример:

A - о.п.с, A - диагонализируема.

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

w^1, \dots, w^n сопряж. базис к v

$$\Rightarrow \forall x \in V : w^j(x) = x^i : x^i v_j = x$$

2.2 Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица тензоров.

def: Есть V, V^* и $p, q \in N$.

Тензором типа (p, q) (p -раз ковариантная, q -раз контрвариантная) называется полилинейная функция $f : V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$. p, q называются **валентностями** тензора, $r = (p + q)$ ранг тензора.

Если $r = 0, f = \text{const}$. Если тензор $(p, 0)$ - **ковариантный** тензор валентности p . Если тензор $(0, q)$ - **контрвариантный** тензор валентности q . $p \neq 0$ и $q \neq 0$ - тензор смешанного типа.

$$\xi_j \in v, \eta^i \in V^*$$

$f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)$ - линейно по каждому аргументу

$$e = (e_1, \dots, e_n) - \text{базис } V$$

$$w = (w^1, \dots, w^n) - \text{базис } V^*$$

$$\xi_j = \xi_j^{j_k} e_{j_k}$$

$$\eta^i = \eta_{i_m}^i w^{i_m}$$

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q \cdot f(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q})$$

def: M - многомерная матрица $r = (p + q)$ мерная размерности n .

$$M = \begin{pmatrix} & i_1 \dots i_q \\ \alpha & \\ & j_1 \dots j_p \end{pmatrix}$$

$$i_m \in (1, \dots, n)$$

$$j_k \in (1, \dots, n)$$

Пример:

3 Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3138-М3139.

Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Не сдавайтесь, изучая лин. ал. Это реально!

Upd: 13.02 слава устал

Upd: 06.03 что за пипяу происходит

