Temă Probabilități și Statistică

Alexandru Ionașcu, Grupa 235

6 Februarie, 2017

Exercițiul 1

Din șirul primelor 1000 de numere naturale se alege la întâmplare un număr. Fie A evenimentul ca numărul ales să fie divizibil cu 2, B evenimentul ca numărul ales să fie divizibil cu 3 iar C evenimentul ca numărul ales să se termine cu cifra zero. Ce reprezintă evenimentele:

$$a) C \cap (A \cup B)$$
$$b) A \cap (B \cup C)$$
$$c) (A \cap B) \cup (B \cap C)$$

$$Fie\ n\ număr\ natural\ între\ 1\ și\ 1000.$$
$$A \implies 2 \mid n$$
$$B \implies 3 \mid n$$
$$C \implies 10 \mid n$$

$$a) C \cap (A \cup B) \Leftrightarrow 20 \mid n\ sau\ 30 \mid n$$
$$b) A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow 6 \mid n\ sau\ 10 \mid n$$
$$c) (A \cap B) \cup (B \cap C) \Leftrightarrow 6 \mid n\ sau\ 20 \mid n$$

Exercițiul 2

a) Care este probabilitatea ca din 13 cărți oarecare 6 să fie de pică ?
b) S-a amestecat un pachet de 36 de cărți de joc numerotate 1, 2, . . . , 36. Care este probabilitatea ca deasupra să fie cartea 1?

$$a) \frac{52}{4} = 13\ cărți\ de\ pică$$
$$52 - 13 = 39\ cărți\ de\ alte\ culori$$
$$P(13, 6, 7) = \frac{\binom{13}{6} * \binom{39}{7}}{\binom{52}{13}} \approx 0.05$$
$$b) \frac{(36-1)!}{36!} = \frac{35!}{36!} = 0.02$$

Exerciţiul 3

În urma unei anchete efectuate în rândul studenților anului 2 s-a constatat că probabilitatea ca unui student să îi placă disciplina Probabilități și Statistică este 0.8, respectiv disciplina Geometrie Computațională este 0.7, iar probabilitatea ca un student oarecare să îndrăgească ambele discipline este 0.6. Care este probabilitatea ca un student oarecare:

- să îndrăgească cel puțin una dintre cele două discipline
- să nu îi placă niciuna
- să îi placă disciplina Probabilități și Statistică și nu Geometrie Computațională

$$P_{GC} = 0.7$$
$$P_{PS} = 0.8$$
$$a) P_{PS \cup GC} = \frac{n_{PS} + n_{GC} - n_{PS \cap GC}}{N} = 0.9$$
$$b) C(P_{PS \cup GC}) = 0.1$$
$$c) P_{PS \setminus GC} = \frac{n_{PS} - n_{PS \cap GC}}{N} = 0.2$$

Exerciţiul 4

Se aruncă la întâmplare patru zaruri. Să se determine:

a) Probabilitatea ca o anumită față să apară cel puțin o dată.

b) Probabilitatea de a obține o anumită față o singură dată.

$$a) P(n, a, n-a) = coeficientul\ lui\ t^a din\ Q(t)$$
$$Q(t) = (p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2)\ ...\ (p_n t + q_n)$$
$$1 - P(4, 0, 4) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0.5$$

$$b) Pentru\ a\ obține\ o\ singură\ față:$$
$$4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0.38$$

Exerciţiul 5

Într-o urnă sunt 24 de bile albe și 9 bile negre. Se extrag pe rând trei bile fără întoarcere. Care este probabilitatea ca bilele să fie extrase în ordinea alb, alb, negru? Dar alb, negru, alb? Dar negru, alb, alb ? Dar probabilitatea ca două din cele trei bile extrase să fie albe?

$$În\ total:\ 33\ bile.$$
$$P_{aan} = \frac{24}{33} \cdot \frac{23}{32} \cdot \frac{9}{31} = 0.148$$
$$P_{ana} = \frac{24}{33} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{23}{31} = 0.148$$
$$P_{naa} = \frac{9}{33} \cdot \frac{24}{32} \cdot \frac{23}{31} = 0.148$$
$$P_{2/3a} = P_{aan} + P_{ana} + P_{naa} = 0.445$$

Exerciţiul 6

Într-o fabrică lucrează trei mașini care realizează respectiv 30%, 25% și 45% din producție. Din producția primei mașini 1% sunt piese defecte, din producția celei de-a doua mașini 2% sunt piese defecte iar din producția ultimei mașini sunt 4% defecte. Se extrage la întâmplare o piesă. Care este probabilitatea ca piesa extrasă să fie defectă?

$$0.3P = \begin{cases} 0.3 \cdot P \cdot 0.001\ defecte \\ 0.3 \cdot P \cdot 0.99 \cdot P\ bune \end{cases}$$

$$0.25P = \begin{cases} 0.25 \cdot P \cdot 0.002\ defecte \\ 0.25 \cdot P \cdot 0.98 \cdot P\ bune \end{cases}$$

$$0.45P = \begin{cases} 0.45 \cdot P \cdot 0.004\ defecte \\ 0.45 \cdot P \cdot 0.96 \cdot P\ bune \end{cases}$$

$$\frac{0.3P \cdot 0.01 + 0.25P \cdot 0.02 + 0.45P \cdot 0.04}{P} = 0.026 = 2,6\%$$

Exerciţiul 7

Două variabile aleatoare independente au repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Să se scrie: a) repartița sumei X + Y b) repartița produsului XY

$$a)X + Y = \begin{pmatrix} 2+1 & 2+4 & 2+6 & 3+1 & 3+4 & 3+6 & 5+1 & 5+4 & 5+6 \\ 0.2 \cdot 0.6 & 0.2 \cdot 0.2 & 0.2 \cdot 0.2 & 0.3 \cdot 0.6 & 0.3 \cdot 0.2 & 0.3 \cdot 0.2 & 0.5 \cdot 0.6 & 0.5 \cdot 0.2 & 0.5 \cdot 0.2 \end{pmatrix}$$

$$X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 4 & 7 & 9 & 6 & 9 & 11 \\ 0.12 & 0.04 & 0.04 & 0.18 & 0.06 & 0.06 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$b)X \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 6 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 6 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 4 & 5 \cdot 6 \\ 0.2 \cdot 0.6 & 0.2 \cdot 0.2 & 0.2 \cdot 0.2 & 0.3 \cdot 0.6 & 0.3 \cdot 0.2 & 0.3 \cdot 0.2 & 0.5 \cdot 0.6 & 0.5 \cdot 0.2 & 0.5 \cdot 0.2 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 & 3 & 12 & 18 & 5 & 20 & 30 \\ 0.12 & 0.04 & 0.04 & 0.18 & 0.06 & 0.06 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Exercițiul 8

Variabila aleatoare X are repartiția:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 5 \end{pmatrix}$$

Să se scrie repartițiile variabilelor 2X + 3, X 2 , X 3 , X + X 2 și să se calculeze P(X > - 13), P(X < 14 |X >= -12).

$$2X + 3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.3 & 0.2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 5 \end{pmatrix} = X$$

$$X^2 + X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.06 & 0.28 & 0.26 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$P(X > -\frac{1}{3}) = 1 - P(X \leqslant -\frac{1}{3}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$Daca\ x < -1 \implies P(X \leqslant x) = 0.$$

$$Daca\ \ -1 \leqslant x < 0 \implies P(X \leqslant x) = 0.3.$$

$$Daca\ 0 \leqslant x < 1 \implies P(X \leqslant x) = 0.3 + 0.2$$

$$Daca\ x \geqslant 1 \implies P(X \leqslant x) = 1.$$

$$P(X < \frac{1}{4}|X \geqslant -\frac{1}{2}) = \frac{P(X < \frac{1}{4}) - P(X < -\frac{1}{2})}{P(X \geqslant -\frac{1}{2})} = 0.28$$

Exerciţiul 9

Fie v.a. independente:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

a) Să se determine E[X], E[Y].

b) Să se afle v.a. Z = XY și să se calculeze E[Z].

c) Ce relație există între valorile medii ale v.a. X, Y și Z ?

$$a)E[x] = -1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 = 0.2$$

$$E[y] = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 = 1.6$$

$$b)Z = X \cdot Y = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.12 & 0.03 & 0.06 & 0.44 & 0.1 & 0.05 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$E[z] = 0.32$$

$$c)E[x] * E[y] = E[z] \implies X\ si\ Y\ sunt\ independente$$

Exerciţiul 10

Se consideră v.a:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \end{pmatrix}$$

Să se afle constantele a și b astfel încât variabila Y = aX + 3b să aibă media 0 ș varianța 1.

$$Y = ax + 3b = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+3b & 3a+3b & 4a+3b \\ 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \end{pmatrix}$$

$$E[y] = \frac{11}{6}a + 3b = 0$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2$$

$$E[Y^2] = \frac{1}{2}(a+3b)^2 + \frac{1}{4}(2a+3b)^2 + \frac{1}{6}(3a+3b)^2 + \frac{1}{12}(4a+3b)^2 = \frac{26}{6}a^2 + 11ab + 9b^2$$

$$\implies a = \pm\frac{6}{\sqrt{35}} \implies b = -\frac{11}{18}$$

Exerciţiul 11

a) Fie X o v.a. a cărei densitate este:

$$f(x) = \begin{cases} cln(\frac{a}{x}) & 0 < x < a, a > 0 \\ 0 & altfel \end{cases}$$

Să se determine constanta c astfel încât f să fie densitate de probabilitate.

$$f \text{ densitate de probabilitate } \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0 \text{ și} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} c{\cdot}ln(\frac{a}{x})dx = c[ln\ a \cdot x\ |_0^a] - (x{\cdot}lnx)|_0^a] = \ = c(a{\cdot}lna\ a - a{\cdot}ln\ a + a) = c{\cdot}a = 1 \implies c = \frac{1}{a} \implies c \in (0, 1]$$

b) Să se determine constanta c din intervalul (0, 1) astfel încât funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1-c,\ 1+c] \\ 0 & altfel \end{cases}$$

Să fie densitate de probabilitate.

$$c \in (0, 1]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1-c} f(x)dx + \int_{1-c}^{1+c} f(x)dx + \int_{1+c}^{\infty} f(x)dx = ln\ x|_{1-c}^{1+c} = ln(\frac{1+c}{1-c}) = 1$$

$$\frac{1+c}{1-c} = e \implies c = \frac{e-1}{e+1}$$

Exercitiul 12

Se consideră v.a. X cu densitatea de probabilitate:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) Să se determine constanta α.
b) Să se afle funcția de repartiție.
c) Să se calculeze P(0 < X < k - 1).

$$a) f \ densitate \ de \ probabilitate \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \implies \alpha > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \alpha \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-kx} dx = \frac{2\alpha}{k^3} = 1 \implies \alpha = \frac{k^3}{2}$$

$$b) F[X] = \int_{-\infty}^{X} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} dt + \int_0^X \alpha \cdot t^2 \cdot e^{-kt} dt = \alpha \int_0^X t^2 \cdot e^{-kt} dt = \frac{2\alpha}{k^3}(1 - e^{-kX}) \ , \ X \geqslant 0$$

$$X < 0 \implies F[X] = 0$$

$$c) P(0 < X < k^{-1}) = P(k^{-1}) - P(0) = f(k^{-1}) - f(0) = \alpha \cdot k^{-2} \cdot e^{-k\frac{1}{k}} - 0 = \alpha \frac{1}{k^2 \cdot e}$$

Exercitiul 13

Există v.a. X pentru care $V[X] = \sigma^2$ și $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.6$?

$$V[X] = \sigma^2$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.6$$

$$E[X] = \mu \ și \ V[X] = \sigma^2 \ aplicând \ Chebyshev \implies P(|X - \mu|) = a \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2} \ , \ \forall a > 0$$

Exerciţiul 14

Fie X și Y două variabile aleatoare cu repartițiile date de:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2.5 & 4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \ și \ Y \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \ cu \ p_1, p_2 \in (0, 1).$$

a) Aflați p_1 și p_2 știind că P(X = 2.5, Y = -1) = 0.2 și E[X|Y = -1] = 3.
b) Considerând valorile lui p_1 ș p_2 aflate anterior, calculați coeficientul de corelație al lui X și Y.

$$a) P(X = 2.5, Y = -1) = 0.2 = y \implies x = 0.2$$

$$E[X|Y = -1] = 2.5 \cdot y + 4 \cdot w = 3 \implies w = \frac{3 - 0.5}{4} = 0.62 \implies z = -0.02$$

$$p_1 = 0.2 - 0.02 = 0.18$$

$$p_2 = 0.2 + 0.62 = 0.82$$

$$b)\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_X}$$

$$Cov(X,Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E[X^2] - E^2[X]}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{E[Y^2] - E^2[Y]}$$

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} -10 & -2.5 & -16 & -4 \\ 0.072 & 0.328 & 0.108 & 0.492 \end{pmatrix}$$

$$E[X \cdot Y] = -0.72 - 0.82 - 1.728 - 1.968 = -5.236$$

$$E[X] = 1 + 2.4 = 3.4$$

$$E[Y] = -0.72 - 0.82 = -1.54$$

$$Cov(X,Y) = -5.236 + 5.236 = 0 \implies \rho(X,Y) = 0$$

Exercitiul 15

Fie cuplul de v.a. (X, Y) cu densitatea de repartițe $f(X,Y) : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$, unde:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k(x+y+1) & x \in [0,1],\ y \in [0,2] \\ 0 & altfel \end{cases}$$

a) Să se determine constanta k.
b) Să se determine densităţle marginale.
c) Să se verifice dacă X și Y sunt independente.
d) Să se afle funcțiile de repartițe marginale și funcţa de repartiție a vectorului (X, Y).
e) Să se determine densitățile v.a. X|Y = y și Y |X = x.

$$a) f\ densitate\ de\ repartiție \Leftrightarrow \begin{cases} f_{(X,Y)}(x,y) \geqslant 0 \\ \int\int_{R\times R} f_{(X,Y)}](x,y) dx\ dx = 1 \end{cases}$$

$$x \notin [0,1]\ și\ y \notin [0,2] \implies f_{(X,Y)}(x,y) = 0 \geqslant 0$$

$$x \in [0,1]\ și\ y \in [0,2]\ f_{(X,Y)}(x,y) = k(x+y+1), k \geqslant 0$$

$$\int_0^2 f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_0^2 k(x+y+2)\ dy = 4k + 2 \cdot kx$$

$$\int_0^1 (4k + 2 \cdot kx) dx = 5k = 1 \implies k = \frac{1}{5}$$

$$b) f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx$$

$$f_X(x) = 4k + 2 \cdot kx = \frac{1}{5}(2x+4)$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{1}{5}(x+y+1)\ dx = \frac{3+2y}{10}$$

$$c)\mathbb{P}(X \in A,\ y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\ \cdot\ \mathbb{P}(X \in B)\ \forall A, B \Leftrightarrow X, Y\ independente$$

$$\mathbb{P}(X \in A,\ y \in B) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx\ dy = 1$$

$$\int_0^1 f_X(x)\ dx = 1$$

$$\int_0^2 f_Y(y)\ dy = 1$$

$$d)f_X(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)}{5} & x \in [0,1] \\ 0 & altfel \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2y+3}{10} & y \in [0,2] \\ 0 & altfel \end{cases}$$

$$F_X X = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\ dt$$

$$Dacă\ x < 0 \implies F_X[X] = 0$$

$$Dacă\ x \in [0,1] \implies F_X[X] = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_0^x \frac{2(t+2)}{5} dt = \frac{x^2+4x}{5}$$

$$Dacă\ x > 1 \implies F_X[X] = 1$$

$$F_Y[Y] = \int_{-\infty}^{y} f_y(t)\ dt$$

$$Dacă\ y < 0 \implies F_Y[Y] = 0$$

$$Dacă\ y \in [0,2] \implies F_Y[Y] = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_0^y \frac{2t+3}{10} dt = \frac{y^2+3}{10}$$

$$Dacă\ y > 2 \implies F_Y[Y] = 1$$

Exercițiul 16

De câte ori trebuie aruncată o monedă pentru ca să putem spune cu o probabilitate de 0.6 că abaterea frecvenței de apariție a stemei de la probabilitatea p = 0.5 este mai mică decât 0.01?

$$\mathbb{P} = \frac{30}{100} \cdot \frac{1}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{45}{100} \cdot \frac{4}{100} = 0.026$$

Exerciţiul 17

Nivelul de zgomot al unei maşini de spălat este o v.a. de medie 44 dB şi de abatere standard 5 dB. Admiţand aproximarea normală care este probabilitatea să găsim o medie a zgomotului superioară la 48 dB intr-un eşantion de talie 10 maşini de spălat?

$$\mu = 44\ dB$$

$$\sigma = 5\ dB$$

$$z_{score} = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{48 - 44}{5} = 0.8 \implies \mathbb{P} = 0.2881$$

Exerciţiul 18

O telecabină are o capacitate de 100 de persoane. Ştiind că greutatea populaţiei (ţarii) este o v.a. de medie 66.3 Kg şi o abatere standard de 15.6 Kg şi presupunand că persoanele care au urcat in telecabină au fost alese in mod aleator din populaţie, care este probabilitatea ca greutatea totală acestora să depăşească 7000 Kg?

$$\mu = 66.3\ kg$$

$$\sigma = 15.6\ kg$$

$$t_{score} = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{70 - 66.3}{\frac{15.6}{10}} = 2.371 \implies \mathbb{P} \approx 2,90$$