Modèle SIRS

Il s'agit de l'étude d'un modèle d'évolution d'une épidémie (non mortelle !) dans une population donnée.

Modélisation :

On souhaite étudier la propagation d'une épidémie au sein d'une population constante de $N > 0$ individus, divisée en trois compartiments au temps t : Chaque individu peut, à chaque instant, être dans trois états différents (on parle de modèle compartimenté) :

— État infecté : Individu malade et contagieux.

— État résistant : Individu qui a contracté la maladie, qui a guéri et qui est maintenant résistant au virus.

— État susceptible : Individu non-malade susceptible de contracter la maladie au contact d'un individu contagieux.

Les nombres d'individus dans chacun des états à chaque instant t sont notés $I(t)$, $R(t)$, et $S(t)$ respectivement.

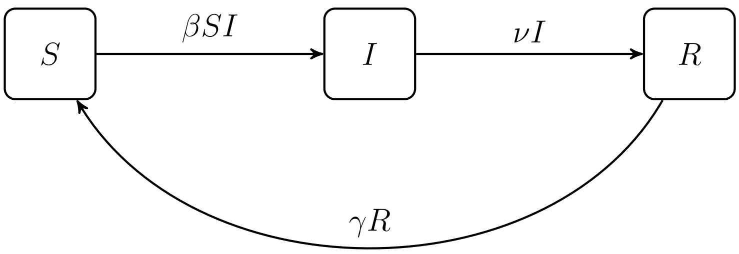

FIGURE 1 – Représentation schématique du modèle compartimental SIRS

où

— ν est taux de rétablissement.

— β est le facteur de contamination (probabilité d'infection par contact).

— γ est le taux de perte d'immunité.

Ces nombres représentent donc les taux instantanés de passage d'un compartiment à l'autre par individu (sont des constantes strictement positives). On suppose un système fermé, sans naissance ni décès autres que ceux causés par la maladie.

1. Donner le système d'équations différentielles vérifiées par ces fonctions.
2. Justifier les équations du modèle en expliquant chaque terme.
3. Commenter/critiquer le formalisme adopté.
4. Montrer que $N = S + I + R$ est constant.

Analyse théorique :

On considère des conditions initiales positives $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$.

5. Écrire le système sous la forme $\frac{dX}{dt} = f(X)$ avec $X = (S, I, R)^T$.
6. Vérifier que la fonction $f(X)$ satisfait les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.
7. En déduire l'existence et l'unicité des solutions maximales.
8. Montrer que pour toutes données initiales positives S_0, R_0, l_0, il existe une unique solution définie sur $[0, +\infty[$, et cette solution vérifie

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad S(t) \geqslant 0, R(t) \geqslant 0, I(t) \geqslant 0$$

et

$$\forall t \in [0, +\infty\,[, \quad S(t) + R(t) + I(t) = S_0 + R_0 + I_0.$$

9. Réduire le modèle en donnant le système différentiel vérifié par les deux fonctions S et I.
10. Quels sont les points d'équilibre du système obtenu ?
11. Étudier la stabilité de ces points.

Analyse numérique :

On utilise la méthode d'Euler explicite pour résoudre ce système avec un pas h.

$$X_{n+1} = X_n + hf(X_n), \tag{1}$$

12. Effectuer l'analyse numérique de ce schéma (consistance, stabilité, convergence).
13. Implémenter ce schéma en Python.
14. Simuler l'évolution de l'épidémie avec des valeurs numériques données : Population infectée à l'instant initial : $I_0 = S_0 = \frac{1}{2}$, $R_0 = 0$, durée moyenne d'infection de $\nu = \frac{1}{2}$, taux de contagion : $\beta = \frac{1}{30}$, $\gamma = \frac{1}{10}$.
15. Tracer l'évolution des différentes populations S, I, R.
16. Tracer la trajectoire dans le plan de phase (I, S), i.e. S en fonction de I.
17. Comparer les résultats pour différents β et discuter leur impact.
18. Visualiser les résultats de la question 12.
19. Tracer un cas d'immunité permanente.