Modèle de Black-Scholes

Il s'agit de l'étude du modèle de Black-Scholes pour fixer le prix d'une option d'achat (call).

1 Définitions

— **Option d'achat (call)** : Un contrat financier qui donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) d'acheter un actif sous-jacent à un prix K (appelé prix d'exercice ou strike price) à une date future spécifiée (date d'expiration T), moyennant le paiement d'une prime à $t = 0$.

— **Call européen** : Une option d'achat qui ne peut être exercée qu'à la date d'expiration T.

— **Prix de l'option** V : Le prix payé par l'acheteur à $t = 0$ pour acquérir l'option. Ce prix dépend du prix de l'actif sous-jacent S_t, qui est une variable aléatoire positive ($S_t \in \mathbb{R}^+$). Le prix de l'option à l'instant t est noté $V(S_t, t)$.

— **Payoff d'une option** : La valeur que l'acheteur de l'option reçoit à l'expiration.

— **Absence d'arbitrage** : Une hypothèse fondamentale en finance qui stipule qu'il est impossible de réaliser un profit sans risque. Cela signifie qu'il n'existe pas de stratégie permettant de gagner de l'argent sans prendre de risque.

2 Hypothèses

— Le prix de l'actif sous-jacent S_t suit un processus stochastique en temps continu.

— Le prix de l'actif sous-jacent suit le modèle de Black-Scholes :

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t \tag{1}$$

où W_t est un mouvement brownien standard, r est le taux d'intérêt sans risque, et σ est la volatilité du sous-jacent (écart-type des rendements).

— Le taux d'intérêt r et la volatilité σ sont constants.

— Le marché est sans arbitrage, c'est-à-dire qu'il est impossible de réaliser un profit sans risque.

2.1 Notion de mouvement brownien

Définition 2.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

— *On appelle processus stochastique* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *une suite de variables aléatoires indexée par le temps* X_t *(i.e. pour tout* $t \geq 0, \omega \mapsto X_t(\omega)$ *est mesurable).*

— *On dit que le processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est à trajectoires continues si il existe un ensemble de probabilité nulle* N *tel que pour tout* $\omega \in \Omega \backslash N$ *l'application* $t \mapsto X_t(\omega)$ *est continue.*

Un processus stochastique représente l'évolution aléatoire d'une quantité dans le temps : la valeur $X_t(\omega)$ représente la quantité au temps t pour la réalisation ω.

Définition 2.2. *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique.*

— *On appelle accroissement de* X *entre les temps* t_1 *et* t_2 *la variable aléatoire* $X_{t2} - X_t$.

— *On dit que le processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est à accroissements indépendants si pour tout* $k \geq 2, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, *les variables* $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$, $1 \leq i \leq k$ *sont indépendantes.*

Définition 2.3. *On appelle mouvement Brownien standard* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique à trajectoires continues vérifiant*

1. $B_0 = 0$ *p.s.,*
2. *pour tout* $0 \leq t_1 < t_2, B_{t_2} - B_{t_1} \sim \mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$,
3. *pour tout* $k \geq 2, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, *les accroissements* $(B_t - B_{t-1})_{1\leq i\leq k}$ *sont indépendants.*

Lemme 2.4. *Lemme d'Itô : Soit* X_t *un processus stochastique suivant l'EDS :*

$$dX_t = \mu(X_t, t)\, dt + \sigma(X_t, t)\, dW_t.$$

Pour une fonction $f(X_t, t)$ *de classe* C^2, *le lemme d'Itô donne :*

$$df(X_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right) dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial X} dW_t.$$

3 Modélisation

1. **Payoff d'un call européen** : Donner l'expression du payoff à l'expiration T en fonction de S_T et K.
2. **Calcul de** dV : En utilisant le lemme d'Itô, calculer dV où $V = V(S_t, t)$.
3. **Portefeuille de couverture** : On considère un portefeuille $\Pi = V - \Delta S$, où Δ est la quantité d'actifs sous-jacents (stratégie de delta-hedging). Donner l'expression différentielle de la variation du portefeuille $d\Pi$.

4. **Substitution de dV et dS** : Remplacer dV et dS par leurs expressions dans $d\Pi$, et exprimer $d\Pi$ en fonction des dérivées partielles de V et du mouvement brownien dW_t.
5. **Élimination du risque** : Choisir Δ pour éliminer le terme en dW_t (risque).
6. **Équation de Black-Scholes** : Par absence d'arbitrage, le portefeuille doit rapporter le taux sans risque r, donc $d\Pi = r\Pi\, dt$. En déduire l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{2}$$

   Les conditions aux limites pour un call européen sont :

$$V(S,T) = \max(S-K,0). \tag{3}$$

7. **Changement de variables** : Poser $P = e^x$ et $u(x,t) = V(e^x, T-t)$. Établir l'EDP vérifiée par $u(x,t)$.
8. **Équation de la chaleur** : Montrer que la fonction $v(x,t) = \exp(Kt)u(x-ct,t)$ vérifie l'équation de la chaleur en déterminant les constantes K et c.
9. **Solution analytique** : Donner la solution analytique pour une option d'achat.
10. **Justification de la diffusion géométrique** : Justifier l'hypothèse de diffusion géométrique du prix du sous-jacent.
11. **Implémentation numérique** : Implémenter le schéma explicite pour résoudre l'équation de Black-Scholes.
12. **Visualisation** : Tracer le prix de l'option en fonction du sous-jacent.
13. **Comparaison** : Comparer la solution numérique avec la formule de Black-Scholes.
14. **Discussion** : Discuter les limites du modèle de Black-Scholes.