Table des matières

1 Analyse théorique des systèmes différentiels ordinaires :

1.1 Définitions et premières propriétés

Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q$ et

$$f : U \to \mathbb{R}^q$$

une application continue. On note ici $\|\cdot\|$ une norme dans $\mathbb{R}^q$.

Définition 1.1. *On appelle équation différentielle ordinaire une équation du type*

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

où $(t, y(t)) \in U$.

Définition 1.2. *Une solution de* (1) *sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *est une fonction dérivable* $y : I \to \mathbb{R}^q$ *telle que*

1. $\forall t \in I, \quad (t, y(t)) \in U$
2. $\forall t \in I, \quad y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 1.3. *L'«inconnue» de l'équation* (1) *est donc en fait une fonction. Le qualificatif «ordinaire» pour l'équation différentielle* (1) *signifie que la fonction inconnue* y *dépend d'une seule variable* t*. Lorsqu'il y a plusieurs variables* t_i *et plusieurs dérivées* $\partial y/\partial t_i$*, on parle d'équations aux dérivées partielles (EDP).*

Définition 1.4. *Etant donné un point* $(t_0, y_0) \in U$*, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution* $y : I \to \mathbb{R}^q$ *de* (1) *sur un intervalle* I *contenant* t_0 *dans son intérieur, telle que* $y(t_0) = y_0$*. On dit que* (t_0, y_0) *sont les données initiales du problème de Cauchy.*

Définition 1.5. *Soient* $y : I \to \mathbb{R}^q, \widetilde{y} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^q$ *des solutions de* (1)*. On dit que* $\widetilde{y}$ *est un prolongement de* y *si* $\widetilde{I} \supset I$ *et* $\widetilde{y}|_I = y$*.*

Définition 1.6. *- On dit qu'une solution* $y : I \to \mathbb{R}^q$ *est maximale si* y *n'admet pas de prolongement* $\widetilde{y} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^q$ *avec* $\widetilde{I} \underset{\neq}{\supset} I$*.*

Théorème 1.7. *Toute solution* y *se prolonge en une solution maximale* $\widetilde{y}$ *(pas nécessairement unique).*

Démonstration. Supposons que y soit définie sur un intervalle $I = |a, b|$ (cette notation désigne un intervalle ayant pour bornes a et b, incluses ou non dans I). Il suffira de montrer que y se prolonge en une solution $\widetilde{y} : |a, \widetilde{b}| \to \mathbb{R}^q(\widetilde{b} \geq b)$ maximale à droite, c'est-à-dire qu'on ne pourra plus prolonger $\widetilde{y}$ au delà de $\widetilde{b}$. Le même raisonnement s'appliquera à gauche. Pour cela, on construit par récurrence des prolongements successifs $y_{(1)}, y_{(2)} \ldots$ de y avec $y_{(k)} :] a, b_k [\to \mathbb{R}^q$. On pose $y_{(1)} = y, b_1 = b$. Supposons $y_{(k-1)}$ déjà construite pour un indice $k \geq 1$. On pose alors

$$c_k = \sup \left\{c; y_{(k-1)} \text{ se prolonge sur } \;] a, c[\right\}$$

On a $c_k \geq b_{k-1}$. Par définition de la borne supérieure, il existe b_k tel que $b_{k-1} \leq b_k \leq c_k$ et un prolongement $y_{(k)} :] a, b_k [\to \mathbb{R}^q$ de $y_{(k-1)}$ avec b_k arbitrairement voisin de c_k ; en particulier, on peut choisir

$$\begin{array}{lll} c_k - b_k < \frac{1}{k} & \text{si} & c_k < +\infty \\ b_k > k & \text{si} & c_k = +\infty \end{array}$$

La suite (c_k) est décroissante, car l'ensemble des prolongements de $y_{(k-1)}$ contient l'ensemble des prolongements de $y_{(k)}$; au niveau des bornes supérieures on a donc $c_k \geq c_{k+1}$. Si $c_k < +\infty$ à partir d'un certain rang, les suites

$$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_k \leq \ldots \leq c_k \leq c_{k-1} \leq \ldots \leq c_1$$

sont adjacentes, tandis que si $c_k = +\infty$ quel que soit k on a $b_k > k$. Dans les deux cas, on voit que

$$\widetilde{b} = \lim_{k \to +\infty} b_k = \lim_{k \to +\infty} c_k$$

Soit $\widetilde{y} : |a, \widetilde{b}| \to \mathbb{R}^q$ le prolongement commun des solutions $y_{(k)}$, éventuellement prolongé au point $\tilde{b}$ si cela est possible. Soit $z : |a, c| \to \mathbb{R}^q$ un prolongement de $\tilde{y}$. Alors z prolonge $y_{(k-1)}$ et par définition de c_k il s'ensuit $c \leq c_k$. A la limite il vient $c \leq \widetilde{c}$, ce qui montre que la solution $\widetilde{y}$ est maximale à droite. □

On suppose ici que l'ouvert U est de la forme $U = I \times \Omega$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^q$.

Définition 1.8. *Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle I tout entier.*

Remarque 1.9. *toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*

Exercice 1. *Cherchons les solutions de l'équation suivante*

$$y\prime(t) = y^2(t), \quad \text{sur } U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

Sont-elles globales ou maximale ?

1.2 Théorie locale

Définition 1.10. *La fonction $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^q$ est dite localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si : pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ il existe un voisinage $V_{(t_0,x_0)} = V$ et $C > 0$ tels que*

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq C \|x_1 - x_2\|, \quad \forall (t, x_i) \in V, \quad i = 1, 2$$

Remarque 1.11. *L'inégalité des accroissements finis montre que si $\partial_x f$ existe et si $(t, x) \mapsto \partial_x f(t, x)$ est continue (en particulier si f est C^1 sur $I \times \Omega$) alors f est localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.*

Lemme 1.12. ***Le lemme de Grönwall*** *: Soit φ une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$et $c \in [a,b]$. Supposons qu'il existe des constantes positives A, B telles que*

$$\varphi(t) \leq A + B\left|\int_c^t \varphi(s)ds\right|, \quad \forall t \in [a,b]$$

Alors

$$\varphi(t) \leq Ae^{B|t-c|}, \quad \forall t \in [a,b]$$

Démonstration. Supposons $t \geq c$. Posons $F(t) = A + B\int_c^t \varphi(s)ds$ alors $F \in C^1$ et $\varphi(t) \leq F(t)$ pour t dans $[c,b]$. On a $F'(t) = B\varphi(t) \leq BF(t)$. On en déduit

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-Bt}F(t)\right] = e^{-Bt}\left[F'(t) - BF(t)\right] \leq 0, \quad \forall t \in [c,b]$$

donc

$$e^{-Bt}F(t) \leq e^{-Bc}F(c) = Ae^{-Bc}, \quad \forall t \in [c,b]$$

d'où $\varphi(t) \leq F(t) \leq Ae^{B(t-c)}$.

Pour $t \leq c$ on pose $G(t) = A + B\int_t^c \varphi(s)ds$ alors $G \in C^1, \varphi(t) \leq G(t)$ et

$$G'(t) = -B\varphi(t) \geq -BG(t)$$

d'où $\frac{d}{dt}\left(e^{Bt}G(t)\right) \geq 0$ ce qui implique $e^{Bt}G(t) \leq e^{Bc}G(c)$ d'où

$$\varphi(t) \leq G(t) \leq Ae^{B(c-t)}.$$

□

Soient a, b deux réels positifs et (t_0, y_0) un point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q$. Posons

$$Q = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q : |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\} \tag{3}$$

On considère une fonction continue $f : Q \to \mathbb{R}^q$ et soit $M > 0$ tel que :

$$\|f(t,x)\| \leq M, \quad \forall (t,x) \in Q \tag{4}$$

On suppose d'autre part qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq C\|x - y\|, \quad \forall (t,x) \in Q, \forall (t,y) \in Q \tag{5}$$

On a alors le théoreme suivant :

Théorème 1.13. ***Cauchy-Lipschitz précisé*** *: Sous les conditions* (4) *et* (5) *l'équation* (1) *possède une solution* (y, J) *telle que*

1. $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ *avec* $T = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$,
2. $y(t_0) = y_0$,
3. $(s, y(s)) \in Q, \forall s \in J$.

Il n'y a pas d'autre solution qui vérifie 1, 2, 3.

Démonstration. Soit $T = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Définissons la suite de fonctions y_k par

$$y_0(t) = y_0, \quad y_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, y_{k-1}(s)\right) ds \ , \ k \geq 1, \quad |t - t_0| \leq T \tag{6}$$

Point 1 : Pour $k \in \mathbb{N}$ et $|s - t_0| \leq T$, $(s, y_k(s)) \in Q$.

C'est vrai pour $k = 0$, supposons le vrai pour $k - 1$. Alors

$$\|y_k(t) - y_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f\left(s, y_{k-1}(s)\right)\| ds \right| \leq M\,|t - t_0| \leq M \cdot \frac{b}{M} = b \tag{7}$$

Point 2 : On a

$$\|y_k(t) - y_{k-1}(t)\| \leq M \cdot \frac{C^{k-1}\,|t - t_0|^k}{k!}, \quad k \geq 1, \quad |t - t_0| \leq T \tag{8}$$

Cela est vrai pour $k = 1$, d'après (7). Supposons le vrai pour l'indice $k - 1$. Alors d'après (5)

$$\begin{aligned}
\|y_k(t) - y_{k-1}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f\left(s, y_{k-1}(s)\right) - f\left(s, x_{k-2}(s)\right)\| ds \right| \\
&\leq C \left| \int_{t_0}^{t} \|y_{k-1}(s) - y_{k-2}(s)\| ds \right| \\
&\leq C \left| \int_{t_0}^{t} M \cdot \frac{C^{k-2}\,|s - t_0|^{k-1}}{(k-1)!} ds \right| \leq M \cdot \frac{C^{k-1}\,|t - t_0|^k}{k!}
\end{aligned}$$

Point 3 : On déduit de (8), $\|y_k(t) - y_{k-1}(t)\| \leq \frac{M}{C}\frac{(CT)^k}{k!}$, $|t - t_0| \leq T$. La série de terme général $\frac{(CT)^k}{kl}$ étant convergente il s'ensuit que la suite (y_k) converge uniformément sur $[t_0 - T, t_0 + T] = J$ vers une fonction y continue telle que $\|y(t) - y_0\| \leq b$. Il résulte de (5) que $f\left(s, y_{k-1}(s)\right)$ converge uniformément vers $f(s, y(s))$ sur J. On peut donc passer à la limite dans (6) et on trouve que y vérifie

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

Il s'ensuit que y est C^1, que $y(t_0) = y_0$ et que y est solution de (1) avec la donnée initiale $y(t_0) = y_0$.

Montrons l'unicité. Supposons que $\tilde{y}$ soit une autre solution dans J de (1) telle que $\tilde{y}(t_0) = y_0$ et $(s, \tilde{y}(s)) \in Q, s \in J$. Alors

$$\begin{aligned} \|y(t) - \tilde{y}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))\| ds \right|, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T] \\ &\leq C \int_{t_0}^{t} \|y(s) - \tilde{y}(s)\| ds \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Grönwall (lemme (1.12)) à $\varphi(t) = \|y(t) - \tilde{y}(t)\|, A = 0$, $B = C$. On déduit que $\|y(t) - \tilde{y}(t)\| = 0, t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. □

Corollaire 1.14. ***Théorème de Cauchy-Lipschitz*** *: Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^q$ une fonction continue, localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Pour tout point $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ il existe une solution unique de l'équation* (1) *dans un voisinage de t_0 telle que*

$$y(t_0) = y_0$$

Démonstration. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. Il existe a et b positifs tels que

$$Q = \{(t, y) : |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\} \subset V_{(t_0, y_0)} = V$$

où V est le voisinage de (t_0, y_0) dans lequel f est localement Lipschitzienne par rapport à y. Comme f est continue sur $I \times \Omega$ elle est bornée sur Q par M. Alors (4) et (5) sont satisfaites. Il suffit d'appliquer le théorème (1.13). □

Nous allons voir que si f est seulement supposée continue on a encore existence locale d'une solution mais **on peut perdre l'unicité**.

Comme précédemment on commence par la situation modèle. Soient donc $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q$, a, b deux réels positifs et

$$Q = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q : |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$$

Soient f une fonction continue sur Q et $M > 0$ tels que (4) soit verifié.

Théorème 1.15. ***Arzela, Péano*** *Le problème* (1) *admet une solution* (y, J)*, où* $J = [t_0 - T, t_0 + T]$, $T = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$*, telle que* $y(t_0) = y_0$.

Démonstration. Admis (voir [1] p.359). □

Corollaire 1.16. *Soit* $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^q$ *une fonction continue. Pour tout point* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ *il existe une solution de l'équation* (1) *dans un voisinage de* t_0 *telle que* $y(t_0) = y_0$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème (1.15). □

Exemple 1.17. *Ce problème de Cauchy admet deux solutions sur* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 3x^{\frac{2}{3}}(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1.3 Théorie globale

Théorème 1.18. *(Unicité globale) Supposons* f *continue sur* $I \times \Omega$ *et localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Soient* (y_1, J_1) *et* (y_2, J_2) *deux solutions de* (1) *telles que* $J_1 \cap J_2 \neq \phi$*. Si il existe un point* $t_0 \in J_1 \cap J_2$ *tel que* $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ *alors* $y_1(t) = y_2(t)$ *sur* $J_1 \cap J_2$.

Démonstration. Si $J_1 \cap J_2 = \{t_0\}$, il n'y a rien à prouver. Sinon $J_1 \cap J_2$ est un intervalle $]\alpha, \beta[$. Supposons $t_0 \in]\alpha, \beta[$. Notons $A = \{t \in]\alpha, \beta[: y_1(t) = y_2(t)\}$.

— $t_0 \in A$ par hypothèse.

— A est fermé dans $]\alpha, \beta[$ car $y_1 - y_2$ est continue.

— A est ouvert : soit $t_1 \in A$. Il existe ε positif tel que $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[\subset]\alpha, \beta[$.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz le problème $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_1) = y_1(t_1)$ admet une solution unique dans un petit voisinage de t_1 contenu dans $]\alpha, \beta[$, donc dans $J_1 \cap J_2$. Comme y_1 et y_2 sont aussi solutions de ce problème, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de t_1 dans lequel $y_1 = y_2$ i.e. $\mathcal{O}$ est contenu dans A. On en déduit que $A =]\alpha, \beta[$. Par continuité, $y_1 = y_2$ dans $J_1 \cap J_2$. Supposons $J_1 \cap J_2 = [t_0, \beta[$. Le problème $y'(t) = f(t, y(t))$,

$y(t_0) = y_1(t_0)$, admet une solution unique dans $[t_0, t_0 + \delta]$. Donc il existe t_0' intérieur à $J_1 \cap J_2$ tel que $y_1(t_0') = y_2(t_0')$. D'après ci-dessus, $y_1 = y_2$ dans $]t_0, \beta[$ et donc dans $[t_0, \beta)$. □

Théorème 1.19. *(Existence d'une solution maximale) Soit f une fonction continue de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^q$. Par tout point (t_0, y_0) de $I \times \Omega$ il passe une solution maximale (y, J) où J est un intervalle ouvert dans I. Si de plus f est localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, cette solution maximale est unique.*

Démonstration. Admis (voir [1] p.371). □

Cas où f est définie sur $]a, b[\times\mathbb{R}^q$:

Théorème 1.20. *Soit (y, J) une solution maximale de (1), où $J =]T_*, T^*[$. Alors*

$$\begin{cases} \text{ou bien } T^* = b \\ \text{ou bien } T^* < b \text{ et } \lim\limits_{t \to T^*} \|y(t)\| = +\infty \end{cases}$$

de même

$$\begin{cases} \text{ou bien } T_* = a \\ \text{ou bien } T_* > a \text{ et } \lim\limits_{t \to T_*} \|y(t)\| = +\infty \end{cases}$$

Démonstration. Si $T^* = b$ il n'y a rien à démontrer. Supposons $T^* < b$. Si $\|y(t)\|$ ne tend pas vers $+\infty$ c'est que : $\exists C > 0 : \forall \delta > 0, \exists t : |t - T^*| \leq \delta$ et $\|y(t)\| \leq C$. Par conséquent il existe une suite (t_k) tendant vers T^* telle que $\|y(t_k)\| \leq C$. Soient α et β deux réels tels que : $T_* < \alpha < T^* < \beta < b$. Soient d un nombre positif quelconque et $M > 0$ tels que $\|f(t, y)\| \leq M$ pour $t \in [\alpha, \beta]$ et $\|y\| \leq C + d$. Fixons k_1 tel que $t_{k_1} \geq \alpha$ et $t_{k_1} + \frac{d}{M} > T^*$; cela est possible car $(t_k) \to T^*$. Notons

$$Q_{k_1} = \{(t, y) : 0 \leq t - t_{k_1} \leq \beta - t_{k_1}, \|y - y(t_{k_1})\| \leq d\}.$$

On a : $\sup\limits_{Q_{k_1}} \|f(t, y)\| \leq M$. En effet si $(t, y) \in Q_{k_1}$ on a $t \in [\alpha, \beta]$ et $\|y\| \leq \|y(t_{k_1})\| + \|y - y(t_{k_1})\| \leq C + d$. Le point $(t_{k_1}, y(t_{k_1}))$ est dans Q_{k_1} où f est continue et bornée par

M ; on déduit du théorème (1.15) que le problème

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_{k_1}) = y(t_{k_1}) \end{cases}$$

admet une solution x sur $[t_{k_1}, t_{k_1} + T]$ où $T = \min\left(\beta - t_{k_1}, \frac{d}{M}\right)$. Montrons que $t_{k_1} + T > T^*$. Si $T = \beta - t_{k_1}, t_{k_1} + T = \beta > T^*$. Si $T = \frac{d}{M}, t_{k_1} + \frac{d}{M} > T^*$ par hypothèse. La fonction

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & t \in]T_*, t_{k_1}] \\ x(t) & t \in [t_{k_1}, t_{k_1} + T] \end{cases}$$

est une solution de (1) qui prolonge y au delà de T^*, ce qui contredit la maximalité de T^*. □

Corollaire 1.21. ***Critère de prolongement*** *: Soit* (y, J) *une solution de* (1) *où* $J =]\alpha, \beta[, a < \alpha < \beta < b$. *Supposons qu'il existe* $\delta > 0, A > 0$ *tels que* $\|y(t)\| \leq A$ *pour tout* $t \in [\beta - \delta, \beta[$ *(respectivement* $]\alpha, \alpha + \delta]$ *) alors* y *peut être prolongée au delà de* β *(resp. au delà de* α *) en une solution de* (1).

Le corollaire (1.21) est une conséquence du théorème (1.20) ; cependant il peut se démontrer plus simplement.

Démonstration. Puisque $\beta < b, f$ est continue sur $[\beta - \delta, \beta] \times \mathbb{R}^q$. Notons K le compact

$$K = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q : t \in [\beta - \delta, \beta], \|y\| \leq A\}$$

Par hypothèse, si $t \in [\beta - \delta, \beta[, (t, y(t)) \in K$. Notons C_0 le sup de f sur K. Si $t_1, t_2 \in [\beta - \delta, \beta[$, l'équation (1) fournit

$$\|y(t_1) - y(t_2)\| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \|f(t, y(t))\| dt \right| \leq C_0 |t_1 - t_2|$$

On en déduit que $(y(t))$ est de Cauchy pour t tendant vers β. Par conséquent $\lim_{t \to \beta} y(t) = \ell$. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x\prime(t) = f(t, x(t)) \\ x(\beta) = \ell \end{cases}$$

La fonction f étant continue sur $]a, b[\times \mathbb{R}^q$ ce problème admet une solution x définie sur $[\beta, \beta + \varepsilon]$. La fonction

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & t \in]\alpha, \beta[\\ x(t) & t \in [\beta, \beta + \varepsilon] \end{cases}$$

est alors une fonction C^1 sur $]\alpha, \beta+\varepsilon]$. En effet $\lim_{t\to\beta} y(t) = \ell = x(\beta)$ et

$$\lim_{\substack{t\to\beta\\ t<\beta}} y'(t) = \lim_{\substack{t\to\beta\\ t<\beta}} f(t, y(t)) = f(\beta, \ell) = x'(\beta).$$

En outre c'est une solution de (1) sur $]\alpha, \beta+\varepsilon]$. □

Remarque 1.22. *Le théorème* (1.20) *renforce la conclusion du corollaire* (1.21)*. En effet ce dernier montre que* $\overline{\lim_{t\to T^*}} \|y(t)\| = +\infty$ *tandis que le théorème* (1.20) *montre que* $\|y(t)\|$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* t *tend vers* T^*.

Exercice 2. *Soit* $f : I \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ *où* $I =]a, b[$. *Supposons que* f *soit continue et bornée i.e.*

$$\exists M > 0 : |f(t, y)| \leq M, \quad \forall (t, y) \in I \times \mathbb{R}^q$$

Montrer que toute solution du problème (1) *est globale.*

Par exemple le problème sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x^2(t)}{1+x^2(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admet pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ *une solution unique définie sur* $]-\infty, +\infty[$.

Exercice 3. *Soit* $\mathrm{I} =]\alpha, \beta[$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, a *et* b *deux fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}^+$ *et* $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$\forall (t, y) \in \mathrm{I} \times \mathbb{R}^n, \quad \langle f(t, y), y \rangle \leqslant a(t)\|y\|^2 + b(t)$$

Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ *et* y *la solution maximale de*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que y *est définie sur* $[t_0, \beta[$ *(on pourra étudier* $t \longrightarrow \|y(t)\|^2$*).*

Cas où f est définie sur $]a, b[\times\Omega$:

> **Théorème 1.23.** *Soit* (x, J) *une solution de* (1) *où* $J =]\alpha, \beta[$, $a < \alpha < \beta < b$. *Supposons qu'il existe* $\delta > 0$ *et un compact* K_0 *de* Ω *tels que* $x(t) \in K_0$ *pour tout* $t \in [\beta-\delta, \beta[$ *(resp.* $t \in]\alpha, \alpha+\delta[$ *) alors* x *peut être prolongée au delà de* β *(resp. au delà de* α *) en une solution de* (1).

Corollaire 1.24. *Soit* $(x, J), J =]T_*, T^*[$*, une solution maximale de* (1)*. Alors*

1. *ou bien* $T^* = b$*, ou bien* $T^* < b$ *et pour tout compact de* Ω *il existe* $t < T^*$ *tel que* $x(t) \notin K$*.*
2. *Énoncé analogue pour* T_**.*

Le corollaire peut être aussi énoncé en disant : si $T^* < b$ il existe une suite $(t_n) \subset]T_*, T^*[$ telle que $(x(t_n))$ converge vers un point de la frontière de Ω ou vers l'infini (si Ω est non borné).

Exercice 4. *On considère l'équation différentielle* $x' = -1/x$*, c'est-à-dire* $F(t, x) = -1/x$*, pour* $(t, x) \in \mathbb{R}\times]\,0, +\infty[$*, donc* $I = \mathbb{R}$ *et* $\Omega =]0, +\infty[$*. Soit* $x_0 \in \Omega$*, on veut résoudre le problème de Cauchy pour la donnée* $x(0) = x_0$*. Determiner l'expression explicite de la solution maximale, est-elle globale ? Trouver* t *vérifiant* $x(t) \notin K$ *pour tout* K *compact de* Ω*.*

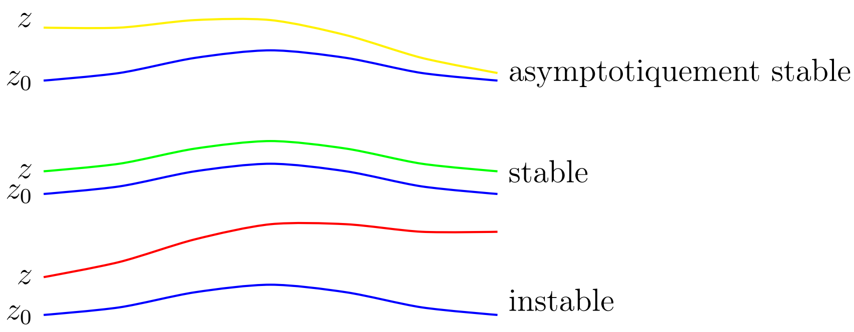
1.4 Étude qualitative

Définition 1.25. *On note* y_z *la solution de*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = z \end{cases}$$

On dira que y_{z_0} *est stable s'il existe deux constantes positives* ϵ *et* C *telles que pour tout* $z \in \mathbb{R}^q$ *tel que* $\|z - z_0\| \leq \epsilon$ *et* $t \geq t_0$ *on a* $\|y_z(t) - y_{z_0}(t)\| \leq C\,\|z - z_0\|$*. La solution est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si il existe une fonction* $\gamma : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *continue avec* $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = 0$ *telle que pour tout* $z \in \mathbb{R}^q$ *tel que* $\|z - z_0\| \leq \epsilon$ *et* $t \geq t_0$ *on a* $\|\, y_z(t) - y_{z_0}(t)\| \leq \gamma(t)\|z - z_0\|$*.*

Remarque 1.26. *Plus intuitivement, une solution* y_{z_0} *est dite stable si les solutions dont la condition initiale est proche de* z_0 *restent proches de* y_{z_0} *au cours du temps.* y_{z_0} *est dite asymptotiquement stable si en plus les solutions convergent vers* y_{z_0} *(Une solution non stable est dite instable).*



Définition 1.27. *Un système différentiel autonome est un système de la forme*

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \tag{9}$$

Un point d'équilibre (ou point critique, ou point stationnaire) du système est un point y_0 tel que $f(y_0) = 0$.

Lemme 1.28. *Supposons que le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \geq 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admette une unique solution notée $(\ I_{y_0}, \varphi_{y_0}(t)\ )$ alors

1. $\varphi_{y_0}(t) < \varphi_{x_0}(t), \forall t \in I_{y_0} \cap I_{x_0}$ *si* $y_0 < x_0$.
2. *Si $\varphi_{y_0}(t)$ est bornée alors la solution est définie sur $[t_0, +\infty[$ et $\lim_{t \to +\infty} \varphi_{y_0}(t) = \bar{y}$ où $\bar{y}$ est un point stationnaire.*

Remarque 1.29. *Le 1) du lemme signifie que : deux trajectoires ne peuvent pas se couper.*

Définition 1.30. *Soit y_0 un point d'équilibre du système* (9).

— *y_0 est dit stable si : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, si y est une solution de* (9) *qui à un instant t_0 vérifie $\|y(t_0) - y_0\| < \delta$, on a*
  1. *y est définie pour tout $t \geq t_0$,*
  2. *$\|y(t) - y_0\| < \epsilon$ pour tout $t \geq t_0$*

— *y_0 est dit instable si il n'est pas stable.*

— *y_0 est dit asymptotiquement stable si : il existe $\delta > 0$ tel que si y est une solution de* (9), *qui à un instant t_0 vérifie $\|y(t_0) - y_0\| < \delta$ on a*
  1. *y est définie pour $t \geq t_0$*
  2. *$\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.*

Remarque 1.31. *Ici le temps $t = t_0$ ne joue pas de rôle particulier ; on pourrait le remplacer par le temps $t = 0$ sans changer la définition car, le système étant autonome, si $y(t)$ est une solution $y(t + t_0)$ est encore une solution.*

Si y_0 est un point d'équilibre du système (9) *en posant $\tilde{y}(t) = y(t) - y_0$ et $g(y) = f(y + y_0)$ on se ramène au cas où $y_0 = 0_q$.*

Si l'origine est un point d'équilibre du système, au voisinage, la fonction f est approximée par premier terme de son développement de Taylor c'est-à dire $f'(0_q)y$ où $f'(0_q) = J_f(0_q)$ est une matrice carrée (matrice jacobienne de f).

Théorème 1.32. *Soit $y^* \in \mathbb{R}^q$ tel que $f(y^*) = 0$. On note $A = J_f(y^*)$ la matrice jacobienne de f en y^*.*

1. *Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative, alors y^* est un équilibre asymptotiquement stable de l'équation* (9).
2. *Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement positive, alors y^* est un équilibre instable de l'équation* (9).

Démonstration. Admis. □

Références

[1] Hervé Queffélec, Claude Zuily, *Analyse pour l'agrégation*. Dunod (2013).

[2] Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 4*.

[3] Xavier Gourdon, *Les Maths en Tête. Analyse*. Ellipses.

N'hésitez pas à me signaler toute erreur ou suggestion ✉