Gestion de stock avec demande aléatoire[1]

1 Optimisation d'une commande

On considère un magasin proposant à la vente un article particulier. Les commandes au fournisseur s'effectuent au mois. Les nombres d'articles demandés par les clients chaque mois sont vus comme des réalisations de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Cette loi peut être estimée statistiquement et elle est supposée connue. Pour un mois donné, on note $p(i)$ la probabilité que i articles soient demandés.

1. Donner la probabilité que i articles au moins soient demandés, noté $r(i)$.

Le coût d'une commande se compose d'un coût fixe C et d'un coût unitaire c. Une commande de x unités coûte donc $C + cx$. Le prix de vente unitaire est v. Le coût unitaire de stockage est k. On suppose que ce coût est imputable à toute unité, qu'elle soit présente en stock au début du mois ou qu'elle ait été commandée. On suppose évidemment $v > c + k$ (le prix de vente est supérieur au coût unitaire de commande et de stockage).
Supposons que x_0 unités soient en stock au début du mois, et que la demande du mois soit la variable aléatoire D de loi $p = (p(i))_{i\in\mathbb{N}}$. Le gérant peut décider de ne rien commander, auquel cas son coût de stockage sera donc kx_0, son revenu sera $v\min\{D, x_0\}$, et son bénéfice espéré est :

$$b_{x_0}(0) = vx_0r(x_0) + v\sum_{i=0}^{x_0-1} ip(i) - kx_0$$

Il peut aussi décider de commander x unités supplémentaires.

2. Exprimer son bénéfice espéré $b_{x_0}(x)$ dans ce cas.
3. Pour $x > 0$, calculer $b_{x_0}(x+1) - b_{x_0}(x)$.
4. Chercher une condition vérifiée par la quantité optimale à commander x^* pour que l'on ait
$$b_{x_0}(x^*+1) - b_{x_0}(x^*) \leq 0$$
Notons donc :
$$S = \max\left\{ i \in \mathbb{N} : r(i) > \frac{k+c}{v} \right\} \qquad (1)$$

L'entier S représente le stock optimal théorique, celui qui maximiserait le bénéfice espéré si l'on ne tenait pas compte du coût forfaitaire de commande C. La stratégie du gérant consisterait alors à compléter son stock à hauteur de S, en commandant la quantité $\hat{x} = S - x_0$, si $x_0 \leq S$. Mais compte tenu du coût C, si la quantité x_0 est suffisamment élevée (tout en restant inférieure à S), il peut se faire que $b_{x_0}(0)$ soit supérieur à $b_{x_0}(\hat{x})$, et donc qu'il n'y ait pas intérêt à commander.

5. Illustrer cela par un exemple.
6. Vérifier que l'application $i \in [0, S] \cap \mathbb{N} \quad \mapsto \quad b_i(S-i) - b_i(0)$ est décroissante.

Ce qui nous incite donc à poser

$$s = \min\{0 \leq i \leq S : b_i(0) > b_i(S-i)\}$$

L'entier s est le stock plancher, à partir duquel il n'y a pas intérêt à commander. En résumé, la stratégie que suivra le gérant est la suivante : si en début de mois le stock est supérieur ou égal au stock plancher s, il ne commande rien. S'il est inférieur à s, il commande la quantité nécessaire pour compléter jusqu'au stock optimal théorique S.

7. Dans le cas où la loi de D est l'équiprobabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots, a\}$ avec $a \in \mathbb{N}$, calculer explicitement les valeurs de s et S, en fonction de a, v, k, c, C (on pourra prendre éventuellement des valeurs particulières pour certaines de ces quantités) ?
8. Même question si on considère la loi de probabilité définie sur $\mathbb{N}$ par

$$p(i) = \rho(1-\rho)^i$$

   où $\rho \in]0, 1[$.
9. Quelles sont alors les équations satisfaites par s, et S ? Comment feriez-vous pour les résoudre ?
10. Calculer numériquement le bénéfice espéré $b_{x_0}(x)$, on peut prendre $x_0 = 40$, $k = 0.08$, $c = 0.3$, $C = 10$, et $v = 1$.
11. Représenter graphiquement les variations de s, et S en fonction de k, et commenter les graphiques obtenus.

2 Modélisation markovienne

On suppose maintenant que les demandes mensuelles constituent une suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note X_n le nombre d'articles présents en stock à la fin du mois n, après la vente du mois, et avant la commande éventuelle du mois suivant. La stratégie de gestion est celle de la section précédente : si le nombre d'articles restants au début du mois est supérieur ou égal à s, rien n'est commandé. S'il reste strictement moins de s articles, une commande est effectuée de manière à compléter à hauteur de S.

1. Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, à valeurs dans l'ensemble fini $\{0, \ldots, S\}$.
2. Expliquer ce que signifie l'homogénéité de la chaîne X.
3. Donner sa matrice de transition pour le cas particulier $s = 3$, $S = 7$
4. Tracer le graphe de transition de la chaîne X.

On suppose que pour tout $i \in \{0, \ldots, S\}$, $p(i)$ est strictement positif.

5. La chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle irréductible et apériodique sur l'ensemble fini $\{0, \ldots, S\}$?

6. Justifier l'existence et l'unicité d'une mesure stationnaire que l'on notera $\pi = (\pi_i)_{i=0,\dots,S}$.
7. Générer une trajectoire de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$
8. Quelle information apporte la probabilité π_i.

On prend $S = 7$. Si $X_0, X_1, \dots, X_m$ est une trajectoire de longueur $m+1$, de la chaîne X, on estime π_k pour $k = 0, \dots, S$, par la quantité :

$$\hat{\pi}_k(m) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{(X_j=k)}$$

où $\mathbf{1}(c) = 1$ si la condition c est vérifiée et 0 sinon.

9. En générant une trajectoire de la chaîne de longueur $m = 100$, calculer une approximation de π_k pour les différentes valeurs de k.

Une fois connue la mesure stationnaire π, on peut évaluer les quantités d'intérêt économique sur le long terme.

10. En déduire que l'espérance du bénéfice mensuel en régime stationnaire est :

$$\bar{b} = \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i b_i(S-i) + \sum_{i=s}^{S} \pi_i b_i(0) \tag{2}$$

Il s'agit aussi de la limite (presque sûre)

$$\bar{b} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{0\le t\le n} B(t) \tag{3}$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B(n) = b_{X_n}(S - X_n)\mathbf{1}_{\{X_n<s\}} + b_{X_n}(0)\mathbf{1}_{\{X_n\ge s\}}$$

On dispose ainsi de deux accès possibles au bénéfice moyen $\bar{b}$, d'une part en calculant d'abord π comme solution du système d'équations correspondant et en appliquant la formule (2) et d'autre part en ayant plutôt recours à (3) à partir de la simulation d'une trajectoire de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11. Pour une loi de probabilité p à choisir (soit la loi uniforme, soit celle définie à la question 8), en fixant des valeurs (pas forcément optimales pour S et s) des paramètres, calculer numériquement la mesure stationnaire ainsi que le bénéfice moyen espéré $\bar{b}$.

[1] : Extrait d'un texte de modélisation issu d'une épreuve d'agrégation.