Домашнее задание № 2

1. Рассмотрим задачу бинарной классификации ($Y = \{+1, -1\}$). Вектор правильных ответов:
   $(y_1, \ldots, y_{10}) = (-1, +1, -1, -1, +1, -1, +1, -1, -1, +1)$.
   Вектор решений некого классификатора:
   $(a_1, \ldots, a_{10}) = (+1, +1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, +1)$.
   Не используя пакет scikit-learn, **подсчитайте**: true positive rate, false positive rate, true negative rate, false negative rate, accuracy, precision, recall, F_1-score.

2. **Объяснить**, почему добавление l_1-регуляризации в задачах классификации либо регрессии приводит к отбору (выбросу несущественных) признаков.

3. **Опишите** процедуру **наискорейшего** градиентного спуска для задачи восстановлении регрессии с квадратичной функцией потерь. **Зачем** она применяется?

4. Предположим, что выборка для решения задачи бинарной классификации ($X^m = (x_i, y_i)_{i=1}^m$, $Y = \{+1, -1\}$) линейно разделима: $\exists w, w_0$ т.ч. $(\langle w, x_i \rangle - w_0) y_i > 0$ для всех $i = 1, \ldots m$. **Доказать**, что существует вектор параметров w и свободный член w_0 т.ч.: а) $(\langle w, x_i \rangle - w_0) y_i \geq 1$; б) существует по крайней мере одна точка на каждой из границ: $\exists x_\pm \in X^m : \langle w, x_\pm \rangle - w_0 = \pm 1$

5. **Доказать**, что любые $m+1$ точек размерности n из $X = \mathbb{R}^n$ могут быть линейно разделены на любые два класса после перехода в новое пространство с помощью мономиального отображения $\varphi : X \to Y, Y = \mathbb{R}^k, z \in Y, z_{(i)} = x_{(1)}^{i_1} x_{(2)}^{i_2} \ldots x_{(n)}^{i_n} |_{i_1 + i_2 + \cdots + i_n \leq m}, 1 \leq i \leq k$, степени не больше m

6. Методом опорных векторов **найти аналитическое решение** для разделения классов $A = \{x_1, x_2\}$ и $B = \{x_3\}$, если $x_1 = (1, 1), x_2 = (1, 5), x_3 = (1, 3)$. Указание: можно использовать полиномиальное ядро.

7. **Свести** изначальную постановку задачи бинарной классификации для LASSO SVM к двойственной задаче.

8. Предположим, что в задаче бинарной классификации точек на плоскости все точки одного класса лежат внутри эллипса $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, a, b > 0$, а все точки другого класса – снаружи этого эллипса. **Постройте** отображение в спрямляющее пространство, которое позволит линейному классификатору в новом пространстве разделить эти два класса без ошибки. **Предоставьте** для этого отображения разделяющую поверхность. **Какая** будет **размерность** спрямляющего пространства H?

9. **Найти** размерность спрямляющего пространства H для ядра $K(x_1, x_2) = (\langle x_1, x_2 \rangle + 1)^2$, если $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.

10. **Доказать**, что радиальная функция $K(x_1, x_2) = e^{-\gamma \|x_1 - x_2\|^2}$ является ядром.