

תרגיל בית 11

הנחיות

1. יש לכתוב בעט כחול או שחור בלבד, בכתב יד אישי (אסור להגיש תרגיל מוקלד!).

1 יהיו k טבעי, n טבעי ואי-זוגי, $n > k$ ופונקציה $f(x, y) = x^{\frac{k}{n}} y^{\frac{n-k}{n}}$. הוכיחו שלפונקציה קיימת נגזרת מכוונת בכל כיוון בנקודה $(0, 0)$. האם הפונקציה גזירה בנקודה?

2. תהי $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה בעלת נ"ח רציפות עד סדר 2. נתון שהפונקציה מקיימת משוואת לפלס:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

הוכיחו שגם $u\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ מקיימת את משוואת לפלס.

3. תהי $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כל שמתקיים

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \geq a > 0, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

יהי $\gamma(t) = (-\cos t, \sin t, t), t \geq 0$ עקום ב- \mathbb{R}^3 .

הוכיחו כי $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\gamma(t)) = \infty$.

4

א. חשבו

$$\int_0^1 x^n \ln x \, dx$$

לכל n טבעי בעזרת כלל לייבניץ.

ב. חשבו

$$\int_0^1 x^n \ln^m(x) \, dx$$

לכל n, m טבעיים.

רמז - ניתן לגזור m פעמים.