FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS INDONESIA

# Metode Pembuktian: Pengenalan

Diadaptasi dari:

Slides Discrete Mathematics and Its Applications (Rosen)

# Pembuktian Matematis

- Pembuktian menghasilkan sebuah argumentasi valid (disebut bukti/*proof*) yang menunjukkan kebenaran dari sebuah pernyataan.

- Dalam matematika, ilmu komputer, dan disiplin ilmu terkait, pembuktian biasanya dilakukan secara "informal" (vs. "formal" seperti yang dilakukan pada inferensi sebelumnya):
  - Menerapkan lebih dari satu aturan inferensi dalam satu langkah (beberapa aturan inferensi dapat diabaikan/diterapkan secara implisit)

(+) Lebih mudah dipahami dan untuk dijelaskan ke pembaca

(-) Tapi … juga lebih rentan terhadap kesalahan

# Aplikasi Pembuktian Matematis

- Verifikasi bahwa algoritma/program yang dibuat benar
- Verifikasi bahwa sistem operasi aman
- Pengembangan sistem cerdas berbasis pengetahuan

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

# Teorema

- Teorema adalah pernyataan yang dapat ditunjukkan kebenarannya melalui pembuktian menggunakan:
  - definisi
  - teorema lainnya (yang sudah dibuktikan)
  - aksioma (pernyataan yang tidak perlu dibuktikan)
  - aturan inferensi

- Contoh: “Unique Factorization Theorem”

  Every integer greater than 1 either is a prime number itself or can be represented as the product of prime numbers and that, moreover, this representation is unique, up to (except for) the order of the factors.

# Lemma

- Lemma adalah ‘teorema pembantu’ yang dibuktikan dan digunakan untuk membuktikan teorema.
  - Bukan hal utama yang ingin dibuktikan, tapi hanya memudahkan proses pembuktian teorema yang menjadi target.

- Contoh:
  - Untuk membuktikan “Unique Factorization Theorem” sebelumnya, dibuktikan lemma yang dikenal dengan nama “Euclid’s Lemma”:

    If a prime p divides the product ab of two integers a and b, then p must divide at least one of those integers a and b.

  - Euclid’s lemma (yang sudah dibuktikan) digunakan dalam dalam proses pembuktian “Unique Factorization Theorem” (memudahkan proses pembuktian teorema ini).

# Corollary

- Corollary adalah pernyataan yang dapat diturunkan secara langsung atau merupakan bentuk khusus dari teorema.

- Contoh:
  - Teorema:

    "Jika perkalian dua bilangan bulat n dan m merupakan bilangan genap, maka n atau m adalah bilangan genap"
  - Corrolary:

    "Diberikan bilangan bulat n. Jika $n^2$ merupakan bilangan genap, maka n adalah bilangan genap"

- Corollary di atas diperoleh dengan mengambil nilai n=m.

# Conjecture

- *Conjecture* adalah pernyataan yang dianggap benar namun masih perlu dibuktikan.

- Jika bukti dari conjecture ditemukan, maka menjadi teorema.
  - Ada kemungkinan conjecture terbukti salah.

- Contoh: Fermat's Last Theorem (diajukan tahun 1637)

"No three positive integers a, b, and c satisfy the equation $a^n + b^n = c^n$ for any integer value of n greater than 2"

- Baru terbukti pada tahun 1994 oleh Sir Andrew John Wiles!

# Apa yang sudah dipelajari?

- Pembuktian matematis
- Aplikasi pembuktian matematis
- Terminologi dalam pembuktian
  - Lemma, Teorema, Corollary, Conjecture

**Topik selanjutnya: Trivial, Vacuous, Direct Proof**

# Metode Pembuktian:
# Trivial Proof, Vacuous Proof, Direct Proof

Diadaptasi dari:

Slides Discrete Mathematics and Its Applications (Rosen)

## Bentuk Teorema

- Teorema umumnya menyatakan suatu sifat yang dipenuhi oleh setiap elemen dari suatu domain: bilangan bulat, bilangan riil, atau struktur diskret lainnya.

- Kuantor universal (yang diperlukan pada teorema) biasanya implisit.

Contoh:

"Jika $x > y$, di mana $x$ dan $y$ bilangan riil positif, maka $x^2 > y^2$ "

pada dasarnya yang dimaksud adalah:

"Untuk setiap bilangan riil positif $x$ dan $y$, jika $x > y$, maka $x^2 > y^2$ ."

# Membuktikan Teorema

- Teorema umumnya dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

- Untuk membuktikan, kita tunjukkan untuk sembarang elemen *c* dari domain:

$$P(c) \to Q(c)$$

  – Artinya, kita membuktikan pernyaataan berkondisi (formula berbentuk implikasi):

$$p \to q$$

- Dengan aturan inferensi “universal generalization”, dapat disimpulkan bahwa teorema yang diberikan $\forall x(P(x) \to Q(x))$ berlaku.

# Membuktikan Pernyataan Berkondisi: $p \rightarrow q$ (Trivial Proof dan Vacuous Proof)

- *Trivial Proof* : Jika diketahui *q* benar, maka

  $p \rightarrow q$ bernilai benar.

  "Jika hari ini hujan maka $1=1$."

- *Vacuous Proof* : Jika diketahui *p* salah, maka

  $p \rightarrow q$ bernilai benar.

  "Jika saya miskin dan kaya maka $2 + 2 = 4$."

- Trivial and vacuous proofs sering bermanfaat pada pembuktian induksi matematis yang akan kita pelajari.

# Membuktikan Pernyataan Berkondisi: $p \rightarrow q$ (Direct Proof)

Buktikan:

"Jika $n$ bilangan bulat ganjil, maka $n^2$ juga adalah bilangan bulat ganjil."

- *Direct Proof* : Asumsikan $p$ bernilai benar. Gunakan definisi, aksioma, aturan inferensi, dan ekivalensi untuk menunjukkan $q$ benar.

# Contoh 1: Direct Proof

Buktikan:

"Jika $n$ bilangan bulat ganjil, maka $n^2$ juga adalah bilangan bulat ganjil."

Untuk membuktikan, kita manfaatkan definisi bilangan bulat ganjil & genap:

Bilangan bulat $n$ genap jika terdapat bilangan bulat $k$ sedemikian hingga $n = 2k$, sedangkan $n$ adalah bilangan ganjil jika terdapat bilangan bulat $k$, sedemikian hingga $n = 2k + 1$. Setiap bilangan bulat adalah bilangan genap atau ganjil, namun tidak kedua-duanya.

Bukti:

Asumsikan $n$ bilangan bulat ganjil.

Berdasarkan definisi bilangan bulat ganjil, $n = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat $k$.

Mengambil kuadrat pada kedua sisi dari persamaan tersebut diperoleh:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2r + 1,$$

Karena $n^2$ bisa dinyatakan sebagai $n^2 = 2r + 1$ di mana $r = 2k^2 + 2k$, dan $r$ adalah bilangan bulat, maka $n^2$ adalah bilangan bulat ganjil.

Terbukti bahwa, jika $n$ bilangan bulat ganjil, maka $n^2$ juga adalah bilangan bulat ganjil. **QED**

# Contoh 2: Direct Proof

Buktikan bahwa penjumlahan dua bilangan rasional adalah juga bilangan rasional.

Untuk membuktikan, kita manfaatkan definisi bilangan rasional:

> Bilangan riil *r* adalah bilangan rasional jika terdapat bilangan bulat *p* dan *q* di mana $q \neq 0$, sedemikian hingga *r* = *p*/*q*.

Pernyataan: "Jika *r* dan *s* adalah bilangan rasional, maka *r*+*s* juga bilangan rasional"

Bukti:

Asumsikan *r* dan *s* bilangan rasional.

Berdasarkan definisi bilangan rasional, terdapat bilangan bulat *p, q* dan juga *t, u*, sehingga:

$$r = p/q, \quad s = t/u, \quad u \neq 0, \; q \neq 0$$

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu+qt}{qu} = \frac{v}{w}$$

Karena *r*+*s* bisa dinyatakan dalam $r + s = \frac{v}{w}$ di mana $v = pu + qt$ $dan$ $w = \mathrm{qu} \neq 0$ maka *r*+*s* adalah bilangan rasional.

Terbukti bahwa, penjumlahan dua bilangan rasional adalah juga bilangan rasional.

**QED**

# Apa yang sudah dipelajari?

Pembuktian Pernyataan Berkondisi $p \rightarrow q$

- Trivial Proof
- Vacuous Proof
- Direct Proof

**Topik selanjutnya: Indirect Proof**