UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Metode Pembuktian: Proof by Contraposition, Proof by Contradiction

Diadaptasi dari:

Slides Discrete Mathematics and Its Applications (Rosen)

Membuktikan Pernyataan Berkondisi: $p \rightarrow q$ (Indirect Proof: Proof by Contraposition)

Buktikan:

"Jika $3n + 2$ *bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil."*

- *Proof by Contraposition :* Asumsikan $\neg q$ bernilai benar dan tunjukkan $\neg p$ benar dengan menggunakan direct proof.
- Dengan kata lain, kita buktikan dengan direct proof: $\neg q \rightarrow \neg p$
- Jika kita berhasil membuktikan $\neg q \rightarrow \neg p$ dengan direct proof, maka $p \rightarrow$ q juga terbukti.

Contoh: Proof by Contraposition

Buktikan:

"Jika $3n + 2$ bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil."

Bukti:

Untuk membuktikan pernyataan di atas, secara tidak langsung dibuktikan:

"Jika n adalah bilangan bulat genap, maka $3n + 2$ adalah bilangan bulat genap"

Asumsikan n bilangan bulat genap.

Berdasarkan definisi bilangan bulat genap, $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k.

Dengan demikian:

$$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1) = 2j \text{ , di mana } j = 3k + 1$$

Karena $3n + 2$ bisa dinyatakan sebagai $3n + 2 = 2j$, di mana $j = 3k + 1$, dan $j = 3k + 1$ adalah bilangan bulat, maka $3n + 2$ adalah bilangan bulat genap.

Kita berhasil membuktikan: "Jika n adalah bilangan bulat genap, maka $3n + 2$ adalah bilangan bulat genap"

Dengan demikian, secara tidak langsung dengan proof by contraposition, telah terbukti bahwa jika $3n + 2$ bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil.

QED

Latihan: Proof by Contraposition

Buktikan:

"Jika n^2 bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil."

Indirect Proof: Proof by Contradiction

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrational.

- *Proof by Contradiction (reductio ad absurdum)*.

  Untuk membuktikan *p*, asumsikan $\neg p$ dan tunjukkan kontradiksi melalui $r \wedge \neg r$ (bernilai F)

  Karena terjadi kontradiksi pada proses pembuktian ini, maka kita telah menunjukkan bahwa $\neg p \rightarrow \mathbf{F}$ berlaku/bernilai benar.

  Artinya, $\neg p$ bernilai salah, atau dengan kata lain *p* bernilai benar (kita telah berhasil membuktikan *p*).

Contoh: Proof by Contradiction

Buktikan bahwa √2 adalah bilangan irrational.

Bukti:

Asumsikan √2 adalah bilangan rasional.

Berdasarkan definisi bilangan rasional, terdapat bilangan bulat a dan b sehingga $\sqrt{2} = a/b$, di mana $b \neq 0$ dan khususnya a and b tidak memiliki faktor yang sama.

Mengambil kuadrat pada kedua sisi dari persamaan tersebut diperoleh

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \qquad 2b^2 = a^2 \qquad (1)$$

Berdasarkan definisi bilangan bulat genap, a^2 adalah bilangan bulat genap.

Jika a^2 adalah bilangan bulat genap maka a adalah bilangan bulat genap (2)

Sebagai latihan, buktikan teorema (2) ini!

Dengan modus ponens diperoleh a adalah bilangan bulat genap dan menggunakan definisi bilangan bulat genap, $a = 2c$ untuk suatu bilangan bulat c.

Berdasarkan hal ini dan persamaan (1) sebelunya, diperoleh:

$$2b^2 = 4c^2 \qquad b^2 = 2c^2$$

Dengan demikian, b^2 adalah bilangan bulat genap (berdasarkan definisi bilangan bulat genap).

Menggunakan teorema (2) dan modus ponens, dapat disimpulkan b adalah bilangan bulat genap.

Karena a adalah bilangan bulat genap dan b adalah bilangan bulat genap, maka maka a dan b pasti memiliki faktor yang sama, yaitu 2 (kedua bilangan tersebut habis dibagi 2).

Terjadi kontradiksi dengan pernyataan bahwa a dan b tidak memiliki faktor yang sama.

Artinya, asumsi awal √2 adalah bilangan rasional salah dan oleh karena itu, √2 adalah bilangan irrational. **QED**

Latihan: Proof by Contradiction

Buktikan dengan proof by contradiction:

“*Jika* $3n + 2$ *bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil*.”

Apa yang sudah dipelajari?

Pembuktian Tidak Langsung (Indirect Proof)

- Proof by Contraposition
  - Pernyataan berkondisi $p \rightarrow q$
- Proof by Contradiction
  - Lebih umum, namun bisa dinyatakan sebagai pernyataan berkondisi

Topik selanjutnya:
Pembuktian Bikondisional, Proof by Cases, Counterexample

Metode Pembuktian:
Pembuktian Bikondisional, Proof by Cases, Counterexample

Diadaptasi dari slides:

- Slides Discrete Mathematics and Its Applications (Rosen)
- Diktat Matematika Diskret (Prof. Belawati Widjaja)

Membuktikan Pernyataan Bikondisional: $p \leftrightarrow q$

Untuk membuktikan teorema dalam bentuk pernyataan bikondisional $p \leftrightarrow q$, kita perlu buktikan $p \rightarrow q$ dan juga $q \rightarrow p$.

Buktikan:

n bilangan bulat ganjil jika dan hanya jika n^2 juga adalah bilangan bulat ganjil

Bukti:

Perlu dibuktikan dua hal:

(1) Jika n adalah bilangan bulat ganjil maka n^2 juga adalah bilangan bulat ganjil
(2) Jika n^2 bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil.

Untuk (1) sudah kita buktikan pada Contoh 1 Direct Proof.
Untuk (2) dibuktikan sebagai Latihan pada Proof by Contraposition.

Dengan membuktikan (1) dan (2), maka terbuktilah bahwa:
n bilangan bulat ganjil jika dan hanya jika n^2 juga adalah bilangan bulat ganjil **QED**

Proof by Cases

Buktikan $n^2 \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.

- Pernyataan yang ingin dibuktikan:

“Jika n adalah bilangan bulat, maka $n^2 \geq n$.

Proof by Cases

- Untuk membuktikan pernyataan kondisional dalam bentuk:

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q$$

- Gunakan ekivalensi:

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q] \equiv [(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)]$$

- Setiap implikasi $p_i \to q$ adalah kasus (*case*) yang harus dibuktikan.

Contoh: Proof by Cases (1)

Buktikan: $n^2 \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.

Bukti:

Ambil $p :=$ n adalah sebuah bilangan bulat,

dan $q := n^2 \geq n$.

Sedangkan p setara dengan $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ dengan

$p_1 :=$ n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \leq -1$

$p_2 := n = 0$

dan $p_3 :=$ n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \geq 1$.

Jadi yang ingin dibuktikan adalah $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$.

Untuk membuktikannya dipakai ***proof by cases***, yaitu dengan membuktikan

Contoh: Proof by Cases (1)

(i) $p_1 \rightarrow q$ atau
Jika n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \leq -1$ maka $n^2 \geq n$.
Ternyata, benar.

(ii) $p_2 \rightarrow q$ atau Jika $n = 0$ maka $n^2 \geq n$. Ternyata benar.

(iii) $p_3 \rightarrow q$ atau Jika n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \geq 1$ maka $n^2 \geq n$.
Ternyata, benar.

Maka $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$ terbukti.

Counterexamples

- Ingat kembali:

$$\exists x \neg P(x) \equiv \neg \forall x P(x)$$

- Untuk menunjukkan pernyataan $\forall x P(x)$ tidak berlaku/salah (atau $\neg \forall x P(x)$ berlaku/benar), cukup temukan sebuah nilai *c* dari domain sehingga: *P*(*c*) bernilai salah (atau $\neg$*P*(*c*) bernilai benar).

- Dalam hal ini, *c* disebut *counterexample* untuk pernyataan $\forall x P(x)$

Contoh: “Setiap bilangan bulat positif dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan kuadrat dari tiga bilangan bulat.

Pernyataan ini tidak benar dengan mengambil bilangan 7 sebagai counterexample, karena bilangan 7 tidak dapat dinyatakan sebagai jumlahan kuadrat dari tiga bilangan bulat.

Apa yang sudah dipelajari?

- Pembuktian pernyataan bikondisional

$$p \leftrightarrow q$$

- Proof by cases
  - Kondisi sebagai disjungsi kasus

- Counterexample

Topik selanjutnya: Himpunan & Fungsi