UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Logika Predikat

Pengenalan Kuantor (Bagian 2)

Kuantor dengan Domain Terbatas

- Contoh:

Diberikan formula logika predikat $\forall x(x^2 > 0)$ untuk x bilangan riil negatif

Formula tersebut dapat dinyatakan sebagai $\forall x < 0(x^2 > 0)$ dengan $x \in \mathbb{R}$
yang sama artinya dengan $\forall x(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$ dengan $x \in \mathbb{R}$

Domain bilangan riil untuk variabel x dibatasi oleh kondisi $x < 0$.

Contoh lain: Apa maksud dari formula berikut jika domain x adalah bilangan riil?

- $\forall y \neq 0(y^3 \neq 0)$
- $\exists z > 0(z^2 = 2)$

Penggunaan Kuantor dalam Logika Predikat

- Presedensi Kuantor
  - Kuantor universal maupun eksistensial memiliki presedensi tertinggi dibandingkan dengan operator logika yang lain. Hati-hati dalam penulisannya.
  - Contoh:
    - $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ menunjukkan bahwa kuantor $\forall$ hanya membatasi predikat $P(x)$
    - Jika yang dimaksud adalah kuantor $\forall$ membatasi predikat $P(x)$ dan $Q(x)$, maka perlu digunakan tanda kurung, menjadi $\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$

- Perhatikan bahwa setiap variabel yang digunakan pada predikat bersifat **terikat/*binding variable.***
  - Contoh:
    - $\forall x(x + y > 2)$ tidak tepat karena formula ini tidak memiliki nilai kebenaran, variabel y tidak terikat/dibatasi oleh nilai tertentu maupun kuantor *(free variable)*.

Kesetaraan Logika yang Melibatkan Kuantor

Contoh:

Tunjukkan bahwa $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ setara.

– Sesuai dengan definisi kesetaraan logika, kita perlu menunjukkan bahwa berntuk $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ merupakan tautology (valid).

– Kita tunjukkan bahwa berlaku implikasi dua arah, yaitu:

$$\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$$
$$\forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \rightarrow \forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$$

Kesetaraan Logika yang Melibatkan Kuantor

Langkah 1: Menunjukkan bahwa jika $\forall x\big(P(x) \land Q(x)\big)$ berlaku, maka $\forall x P(x) \land \forall x\, Q(x)$ juga berlaku.

– Misalkan pernyataan $\forall x\big(P(x) \land Q(x)\big)$ benar.

– Jika a berada dalam domain maka pernyataan $P(a) \land Q(a)$ benar. Berdasarkan sifat konjungsi, maka $P(a)$ benar dan $Q(a)$ juga benar.

– Karena $P(a)$ benar untuk **setiap nilai $\boldsymbol{a}$ dalam domain** seperti halnya $Q(a)$, maka $\forall x P(x)$ benar, demikian juga dengan $\forall x Q(x)$.

– Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$ juga benar.

Kesetaraan Logika yang Melibatkan Kuantor

Langkah 2: Menunjukkan bahwa jika $\forall x P(x) \land \forall x\, Q(x)$ berlaku, maka $\forall x\big(P(x) \land Q(x)\big)$ juga berlaku.

– Misalkan pernyataan $\forall x P(x) \land \forall x\, Q(x)$ benar, maka berlaku $\forall x P(x)$ benar dan juga $\forall x Q(x)$ benar.

– Jika a berada dalam domain, maka $P(a)$ benar dan $Q(a)$ juga benar. Sehingga $P(a) \land Q(a)$ benar **untuk setiap a dalam domain**.

– Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\forall x\big(P(x) \land Q(x)\big)$ juga benar.

Apa yang sudah dipelajari…

- Kuantor (Universal & Eksistensial)
  - Penggunaan kuantor dengan domain terbatas.
  - Aturan penggunaan kuantor untuk mengkuantifikasi variabel pada predikat.
  - Kesetaraan logika pada logika predikat.

Materi selanjutnya: Negasi pada formula predikat