

1. איך תפתרו את מערכת המשוואות (המופרדת) הבאה? $\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ B & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ כאשר L_1, L_2 הן מטריצות משולשיות תחתונות, ה-0 מתאר תת-מטריצה שכולה אפסים, B תת מטריצה, ו- x, y, b, c הם ווקטורים במימדים המתאימים.
- תארו את הצעדים המדויקים שתעשו בדרך לפתרון (שאלה 2.13 בספר)
2. נתון: A, B, C הן מטריצות בגודל חאח ו- B, C הן לא סינגולריות, ו- b וקטור באורך n . איך תממשו את הנוסחא:
- $$x = B^{-1}(2A + I)(C^{-1} + A)b$$
- בלי לחשב אף הופכי של מטריצה (matrix inverse) (שאלה 2.21 בספר)
3. מטריצה A בגודל חאח נקראת אלמנטרית (elementary) אם היא שונה ממטריצת היחידה I במטריצה מ-rank 1, כלומר אם $A = I - uv^T$ עבור ווקטורים (באורך n) u, v . אם A היא אלמנטרית, מהם התנאים על u, v שמבטיחים ש- A היא לא סינגולרית? ב. אם A אלמנטרית ולא סינגולרית, הוכיחו שגם A^{-1} היא אלמנטרית. עשו זאת על ידי הוכחה ש- $A^{-1} = I - \sigma uv^T$ עבור סקלר σ . מהו הערך של σ (במונחי u, v)?
- (שאלה 2.26 בספר)
4. הוכיחו את נוסחת שרמן מוריסון (רמז: הכפילו את שני הצדדים ב- $(A - uv^T)$)
- $$(A - uv^T)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}u(1 - v^T A^{-1}u)^{-1}v^T A^{-1}$$
- (שאלה 2.27 בספר)
5. תהא A מטריצה סימטרית מוגדרת חיובית (symmetric positive definite) הראו שהפונקציה $\|x\|_A = (x^T A x)^{1/2}$ מקיימת את שלושת הדרישות של vector norms שלמדנו. נאמר שה- vector norm הזה מושרה על ידי המטריצה A (שאלה 2.31 בספר)
6. א. הראו שהמטריצה A היא סינגולרית, ותארו את אוסף הפתרונות של מערכת המשוואות $Ax=b$
- עבור, $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$
- ב. אם אתם משתמשים באלימנציה גאוס עם partial pivoting בעזרת אריתמטיקה מדויקת, באיזה שלב יכשל התהליך?
- ג. בגלל שחלק מהערכים ב- A לא מיוצגים במדויק במערכת בינארית של floating points, השגיאה ביוצג גורמת לכך שהפתרון של המערכת עם אלימנציה גאוס לא תכשל

בהכרח. פתרו את המערכת עם פונקציית ספריה של אלימנציית גאוס (איזו השתמשתם?) והראו שהמערכת נפתרת. מהו ה- condition של המטריצה במערכת שלכם?

(שאלה 2.1)

7. כתבו שתי תכניות שממשות הכפלת מטריצות $C=AB$ כאשר A מטריצה בגודל $n \times m$ ו- B מטריצה בגודל $m \times n$
- (א) חשבו את AC הערכים של C בתור מכפלות פנימיות של השורות של A והעמודות של B .
- (ב) חשבו את כל אחת מהעמודות של C בתור צירוף לינארי של העמודות של A .

השוו את הביצועים של שני מימושים אלו על המחשבים שלכם. יתכן ותצטרכו להריץ הכפלות של מטריצות גדולות מאד כדי לראות הבדל בביצועים. מה ראיתם? למה אתם חושבים שזה מה שקורה? (שאלה 2.14)