שאלה 1)
סעיף א)

$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\\-1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\3\\5\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}4\\1\\-3\\3\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4 = 2a + b + 4c - d \\ 5 = 3a - 2b + c \\ 6 = 5a + b + 3c + 2d \\ -1 = -a + 3b + 3c - d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{76} & \frac{109}{76} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{38} & \frac{-7}{38} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-22}{76} & \frac{25}{76} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} 109/76 \\ -7/38 \\ 25/76 \\ 0 \end{bmatrix}$$

סעיף ב 2)

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -2x-7y-6z=0 \\ 5x+10y+15z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=-3z-2y$$

$$\Rightarrow \ker(T)=\mathrm{span}\left(\begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\right)$$

נחשב $[v]_B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -7 & -6 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7+4+3 \\ 14-8-6 \\ -35+20+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

הווקטור v סייך ל $\ker T$

סעיף ב)

ט הוכחנו מרחב הפולינומים כך שמייצג ב $P(x)$
שניתן לבחור אותם בדוק

$P(x) = q'(x)(x-1)$

$(q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, $v(x) = x^2 - 1$

$q(x) = ax^2 + bx + c$

$q'(x) = 2ax + b$

$P(x) = (2ax+b)(x-1) = 2ax^2 - 2ax + bx - b$

$= 2ax^2 + x(b-2a) - b$

$v(x) = x^2 - 1 \quad (2a = 1 ,\ b - 2a = 0 ,\ -b = -1)$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2} ,\ b = 1$

$\Rightarrow q(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + c$

$q'(x) = x + 1$

$P(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$ ✓

שאלה 2)

סעיף א)

$$[T]_B \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9+2+3 \\ 3+2+3 \\ 3+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

סעיף ב)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 2 = -\alpha + \beta \\ 1 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \overset{(1+2)}{\Rightarrow} 3 = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}, \ \alpha = 1 - \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \gamma = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha + \beta \\ 1 = -\alpha + \beta \\ 0 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \overset{(1+2)}{\Rightarrow} 1 = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}, \ \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 2 = -\alpha + \beta \\ -1 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \overset{(1+2)}{\Rightarrow} 3 = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}, \ \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = -2$$

$$\Rightarrow [M]_{B-X} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[M]_{C\to B} = \left[M_{B\to C}\right]^{-1}$$

(2 f'ro

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$M_{C\to B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(8 f'or

$$[T]_C = M^{-1}_{B\to C}\,[T]_B\,M_{B\to C}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} [T]_B \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{13.5}{2} & \frac{1.5}{2} & \frac{3.5}{2} \\ -7 & 1 & 1 \\ \frac{-5.5}{2} & \frac{-1.5}{2} & \frac{-3.5}{2} \end{bmatrix}$$

שאלה 3)

מצאו בסיס ומימד למרחב $\dim T$, $KerT$ עבור ההעתקה הלינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}}_{v_1}, \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}}_{v_2}, \quad T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{v_3}$$

נוכיח המערך הוא בסיס R^3 אם כל $v\in R^3$ ניתן להציג כך:

$\alpha, \beta, \gamma \in R$

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Rightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma = x\\ \alpha+\beta = y\\ \alpha = z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma = x-\overbrace{(\alpha+\beta)}^{y}\\ \beta = y-\alpha\\ \alpha = z\end{cases} \Rightarrow \# \begin{cases}\gamma = x-y\\ \beta = y-z\\ \alpha = z\end{cases}$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

נציב את # ונבין את ההעתקה הכללית.

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + (y-z)\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2\cancel{z} + 2y - 2\cancel{z} + x - y\\ 3z + \cancel{2y} - 2z + 2x - \cancel{2y}\\ 5z + 4y - 4z + 3x - 3y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\ z+2x\\ z+3x+y\end{bmatrix}$$

עכשיו נמצא בסיסים בפרוטרוט.

$$= \begin{pmatrix} x+y \\ z+2x \\ z+3x+y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -y \Rightarrow y = -x \\ x = -\frac{z}{2} \\ z = -3x-y = -3(-y)-y = 2y = -2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 2y \end{cases} \Rightarrow \ker T = sp\Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_3} \Big\}$$

עכשיו נמצא בסיס IMT

$$= \begin{pmatrix} x+y \\ z+2x \\ z+3x+y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} T = sp\Big(\underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{v_2} \Big)$$

כדי למצוא $\ker T \cap \operatorname{im} T$

$$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 = \gamma v_3 \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -\gamma \\ \alpha + \beta = -2\gamma \Rightarrow \alpha - \alpha = -2\alpha \Rightarrow 0 = -2\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} T \cap \ker T = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}, \quad \underline{0} = \text{מימד}$$

שאלה 4)

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 3a \\ b-a \end{pmatrix} \qquad T: R \to R^3$$

א) נמצא את $kerT$ ונבדוק אם $\dim kerT = 0$

$$\# \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow kerT = sp\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim kerT = 1$$

ולכן לפי ההגדרות נגיע שהיא אינה חדחד ערכית

ב) מה מטריצה $\#$ $\Rightarrow$

$$IMT = sp = \left(\left\{\begin{matrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\}\right)$$

$$\Rightarrow \dim IMT = 2 \neq 3$$

ולכן T אינה על

$T : V \to V$ 5) יהי מרחב וקטורי ממימד 3

$$T(V_1) = V_2 \;,\quad T(V_2) = V_3 \;,\quad T(V_3) = V_1 + V_2 + V_3$$

$$T(V_1) \Rightarrow \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0V_1 + 1 \cdot V_2 + 0V_3 = V_2$$

$$T(V_2) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0V_1 + 0V_2 + 1V_3 = V_3$$

$$T(V_3) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \alpha V_3 = 1V_1 + 1V_2 + 1V_3 = V_1 + V_2 + V_3$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{det} 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1 \cdot 1) - (0 \cdot 0) = 1$$

הדטרמיננטה לא שווה לאפס לכן T הפיכה

$$T^{-1} = \frac{1}{det(T)} adj(T) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{-1}(V_1) = (-1)V_1 + (-1)V_2 + (1 \cdot V_3) = -V_1 - V_2 + V_3$$

$$T^{-1}(V_2) = (-1)V_1 + 0V_2 + 0V_3 = -V_1$$

$$T^{-1}(V_3) = 0V_1 + 0V_2 + 0V_3 = V_1$$