תרגיל בית 2
מודילים חישוביים

אגבאריה אחמד 322751041
אגבאריה אחמד 212352504

שאלה 1)

סעיף א) נוכיח שקיים אוטומט בגודל n+1 מצבים שמקבל את L_n

עבור מספר טבעי n נגדיר את השפה המוגדרת הבאה מעל הא"ב $n=\{1,2,\dots,n\}$

$L_n = \{ w\in\Sigma^* \mid$ לא מופיעה ב-w $\}$

בנית האוטומט M_n:

קודם כל נגדיר מצב התחלתי (start) q_0 וממנו n מעברי אפסילון ל-n מצבים מקבלים $q_1,\dots,q_n$.

אחר כך עבור q_i נבנה לולאות עצמאיות כלומר שחוזרת לאותו מצב עם כל האותיות $\{1,2,3,\dots\}$ וכן הלאה

כלומר, עבור כל מצב q_i נבנה לולאה עצמאית שכוללת כל האותיות חוץ מהאות i.

נוכיח את הנכונות דרך הכלה דו כיוונית.

כיוון ראשון:

נניח כי w מתקבלת על ידי האוטומט M_n, נוכיח כי $w\in L_n$
האוטומט M_n מכיל מצבים מעל Σ בלבד ולכן w היא בהכרח מעל Σ

אם המילה w התקבלה על ידי M_n זה אומר שמסלול החישוב שלה הסתיים באחד המצבים המקבלים.
לפי הבנייה שהסברנו לעיל, כל אחד מהמצבים המקבלים מכיל לולאות עצמאיות עם כל האותיות חוץ מאות אחת.

לכן w בהכרח אינה מכילה את כל האותיות ואינה מכילה לפחות אות אחת מתוך $\{1,\dots,n\}$
מכאן $w\in L_n$

כיוון שני: נניח כי $w\in L_n$, נוכיח כי w מתקבלת על ידי M_n.
נניח כי w היא מילה מעל Σ ואינה מכילה כל האותיות
נניח כי i היא האות הראשונה שלא מופיעה $\{1,\dots,n\}$ שאינה מופיעה ב-w.

נתחיל במצב q_0 ונעבור במעבר אפסילון למצב q_i.
במצב q_i נקרא את כל האותיות של המילה w דרך הלולאות העצמיות ונישאר במצב המקבל q_i.

⟸ הוכחנו הכלה דו כיוונית ולכן $L(M_n)=L_n$ ⟸ יש n+1 מצבים לאוטומט

ב) עלינו להוכיח שלכל n אין אוטומט סופי דטרמיניסטי שמקבל את L_n
עם פחות מ 2^n מצבים.

נב׳: להוכיח נשתמש במשפט הכזב
״ אם קיימת 2^n מילים שונות $w_1,w_2,\dots,w_{2^n}$ כך שלכל $i\neq j$, $w_i \not\equiv_L w_j$
אז אין לשפה L אס״ד עם פחות מ 2^n מצבים.״

נסתכל על ההרכבה של מספר האפשרויות הסופיות מתוך $\{1,2,\dots,n\}$ אשר מופיעות במילה w, לכל מילה בשפה L_n יש 2^n קומבינציות אפשריות של אותיות מתוך $\{1,2,\dots,n\}$ שיכולות להופיע בה, כי כל אות יכולה או לא להיכלל במילה, או להיכלל.
מתוך 2^n הקבוצות האפשריות רק קבוצה אחת מכילה כל האותיות, כל השאר ה- 2^n-1 הקבוצות אינן מכילות את כל האותיות ולכן נמצאות ב L_n.

ניקח w_i, w_j שכל אחת מהן מייצגת קבוצה שונה מ 2^n-1 הקבוצות. בה״כ אות σ מופיעה ב w_i ולא מופיעה ב w_j, נבחר מילה z שמכילה את כל האותיות $\{1,2,\dots,n\}$ שאינן מופיעות ב w_i.

$w_i z$ מכילה את כל האותיות ולכן לא בשפה L_n. ($w_i z \notin L$)
$w_j z$ חסרה האות σ ולכן כן היא בשפה L_n.

מכאן ש $w_i z \not\equiv_L w_j z$ כלומר, הן לא שקולות בשפה L_n.

⇐ קיימות 2^n-1 מחלקות שקילות שונות ב L_n
לפי המשפט שהוכחנו, אין אס״ד שיכול לקבל את L_n
עם פחות מ 2^n מצבים,
לכן לכל n, כל אס״ד שמקבל את L_n יש בו לפחות 2^n מצבים, כנדרש.

שאלה 2 סעיף א

סעיף א:

נניח כי L שפה חס"ה ונוכיח כי L^R חס"ה.
בגלל ש L היא חס"ה, יש אוטומט מחסנית מקבל אותה. נסמן את האוטומט ב M כך ש
$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,F)$
נבנה אוטומט N כך שהוא הפוך של M עם השינויים הבאים:

- לכל שני מצבים q_i,q_j אם ב M $q_i\rightarrow q_j$ אז ב N $q_i\leftarrow q_j$
- המצב ההתחלתי q_0 ב M יהפוך למצב מקבל ב N
- כל מצב $q_i\in F$ יהפוך למצב רגיל (כלומר לא מקבל)
- נוסיף מצב חדש q_0' כך ש לכל $q_i\in F$ (קבוצת המצבים המקבלים ב M שהם עכשיו מצבים רגילים) יש מעבר ε בין q_0' לכל $q_i\in F$ כלומר $q_0'\xrightarrow{\varepsilon}q_i$ לכל $q_i\in F$

עכשיו נוכיח כי $L(N)=L^R$:
נוכיח שני כיוונים ש $L(N)\subseteq L^R$ וגם $L^R\subseteq L(N)$

כיוון I: אם $w\in L(N)$ אז $w\in L^R$, בגלל ש $w\in L(N)$ קיים מסלול חישוב של w ב N שמסתיים ב מצב מקבל והמחסנית ריקה. נסמן את המסלול ב $q_{w|},\ldots,q_1,q_0'$
לפי בניית N, q_1 הוא מצב מקבל ב M ! ו $q_{w|}$ הוא המצב ההתחלתי של M ; המעבר $q_0'\rightarrow q_1$ הוא מעבר ε כלומר לא קוראים שום אות ולא מכניסים למחסנית, ואם נסתכל על המסלול $q_{w|},\ldots,q_1$ המסלול ב M הוא אותו דבר: $q_1,\ldots,q_{w|}$ כאשר $q_{w|}$ הוא q_0 ! $q_1\in F$ (לפי אופן בניית N) כלומר המסלול הזה מסלול שמקבל מילה. נסמנה ב u, ובגלל ש המילה נקראת באותו מסלול רק בכיוון ההפוך אז $w=u^R$ כי המעבר $q_0'\rightarrow q_1$ הוא מעבר ε ולכן $w\in L^R$.

כיוון II: אם $w\in L^R$ אז $w\in L(N)$, בגלל ש $w\in L^R$ לכן קיים מילה $u\in L$ כך ש $w=u^R$ (לפי הגדרת L^R). נסמן מסלול החישוב של u ב M ונסמנו ב $q_0,\ldots,q_{w|}$
כך ש q_0 הוא מצב התחלתי ! $q_{w|}\in F$ לכן המסלול ההפוך קיים ב N אבל בסדר ההפוך (לפי בניית N) ולכן אם נוסיף את המסלול $q_0,\ldots,q_{w|},q_0'$ ב N מתקיים שהמסלול מתחיל ב q_0' שהוא מצב ההתחלתי ומסתיים ב q_0 שהוא מצב מקבל ב N. המסלול הזה קורא את המילה u^R בגלל ש $q_{w|}\rightarrow q_0'$ הוא מעבר ε כלומר לא קוראים כלום ולא משנים את המחסנית ואז קוראים את u מהסוף להתחלה, ולכן הקלט $u^R\in L(N)$ ומכיוון ש $w=u^R$ ולכן $w\in L(N)$ כנדרש.

שאלה 2 סעיף ב

נסמן את R = אוטומט $M_R=(Q_R,\Sigma_R,q_{0R},F_R,\delta_R)$ ו-S את מ"ט $M_S=(Q_S,\Sigma_S,\Gamma_S,\delta_S,q_{0S},F_S)$

נבנה אוטומט מכפלה M כך ש:

$\Sigma=\Sigma_R\cap\Sigma_S$

$\Gamma=\Gamma_S$

Q מכפלה קרטזית של כל $q_r\in Q_R$ עם כל $q_s\in Q_S$

F היא קבוצת המצבים המקבלים $F\subseteq Q$ כלומר $(q_r,q_s)\in F$ אם $q_r\in Q_R$ ו-$q_s\in Q_S$

$q_0=(q_{0R},q_{0S})\in Q$

δ - $\delta((q_r,q_s),c,\gamma_1)=\{((p_r,p_s),\gamma_2)\}$ $\Leftarrow$ $\delta_R(q_r,c)=p_r$ כלומר אם האוטומט יכול לעבור ממצב q_r למצב p_r ע"י קריאת האות $c\in\Sigma_R$ בלי שינוי במחסנית וגם $\delta_S(q_s,c,\gamma_1)=\{(p_s,\gamma_2)\}$ כלומר אם מ"ט יכול לעבור ממצב q_s למצב p_s ע"י קריאת c והוצאת γ_1 מהמחסנית והכנסת γ_2

$\delta((q_r,q_s),c,\gamma_1)=\{(\delta_R(q_r,c),\delta_S(q_s,c,\gamma_1))\}$ שזה אומר מבצע את צעד של R ו-S בזמן שהאוטומט M_S מבצע במחסנית

צריך להוכיח: $L(M)=L(M_R)\cap L(M_S)$

נוכיח באמצעות אינדוקציה על $|w|$

בסיס: $|w|=0$ כלומר $\varepsilon=w$ ולכן לפי הגדרת האוטומט, אנחנו נקבל את המצב ההתחלתי $q_0=(q_{0R},q_{0S})$

הנחה: נניח שהטענה נכונה לכל מילה עם פחות מ-n אותיות וצריך להוכיח שהיא נכונה על כל מילה w באורך n+1

נגדיר w מילה באורך n+1. אפשר לרשום אותה $w=ua$ כאשר $a\in\Sigma$ ו-u היא מילה באורך n שבה היא קיימת לפי הנחת האינדוקציה.

ולכן מתקיים ש $\delta_M(w)=\delta_M(ua)$. לפי הגדרת מעבר של M:

$\delta_M(ua)=\delta(\delta_M(u),a,\gamma_1)=\delta((\delta_{M_R}(u),\delta_{M_S}(u)),a,\gamma_1)=(\delta_R(\delta_{M_R}(u),a),\delta_S(\delta_{M_S}(u),a,\gamma_1))$
$=(\delta_{M_R}(w),\delta_{M_S}(w))$

ובכל מילה $w\in\Sigma^*$ האוטומט M מגיע למצב $\delta_M(w)=(\delta_{M_R}(w),\delta_{M_S}(w))$ כאשר הוא קורא את w ולכן נקבל שלפי חיוב של w מתקבלת בכניסה.

שאלה 3:

סעיף ג:

$S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa$

$A \to Aa \mid Ab \mid \varepsilon$

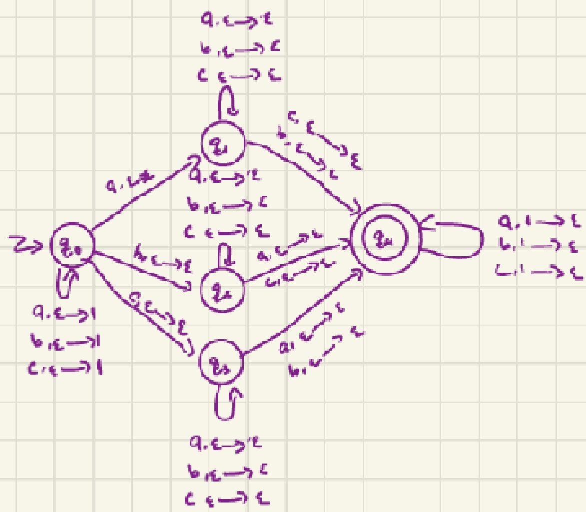
הסבר:

שמתחילים מ S אפשר לקבל aSa או bSb שזה דקדוק של פלינדרום אבל זה לא מסתיים ב
טרמינלים ואין S צריך לבחור בכללים aAb או bAa שזה תמיד שובר את הפלינדרום
שלנו סימטרי בגלל שמשתמשים בכללים האלו הפלינדרום נשבר תמיד ואין אפשרות לקבל
כללים של A רק מגדילים טרמינלים שמוסיפים לקראת המילה ובגלל הכללים aAb ! bAa
תמיד מבטיחים שהמילה לא פלינדרום.

שאלה 3 סעיף ב

סעיף ב:

לא קיימת שפה שכזאת עבור $\Sigma=\{a,b\}$. רק עם תוספת התו [illegible]



הסבר: נניח שהאוטומט לא דטרמיניסטי אז הוא ינחש את i מתחילה ו i מסוים
ונקבל שהמילה לא תהיה בלנקרים אז צריך לקחת ש [illegible] i מתחילה
! ו מסוים שונים. לכן בניית האוטומט נקודה ו למחסנית עם שנקרא הזה
ה i ונעביר למצב המתאים של הזו הבא ואז נקרא זוגות [illegible]
למחסנית עם הבאים למצב i מסוים. ונעביר למצב המקביל q_4 רק אם
קראנו את שונה. למשל אם נקרא "b" נעבור למצב q_2 ונרצה שנקרא
את i מסוים לעבור ל q_4 רק אם נקרא "a" או "c" שהם שונים מ b
ולכן בכה נבטיח שהזו ה i מתחילה, ומסוים שונים.
כמו כן אפור כל התווים

שאלה 4

שפה L היא לא רגולרית, נראה זאת בעזרת תכונות סגירה.
נניח בשלילה ש L היא רגולרית, (נסמן) בשפה
$L_1 = L(0^*1^*)$. השפה L_1 היא רגולרית כי ניתן לייצג אותה ע"י ביטוי רגולרי זה
נגדיר אבחנה $L_2 = L_1 \cap L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
L_1 היא רגולרית, ו- L הנחנו שהיא רגולרית, ולכן לפי סגירות החיתוך L_2 גם כן
רגולרית, אבל ראינו בהרצאה ש L_2 לא רגולרית, סתירה.
בכך הוכחנו ש L לא רגולרית.

<u>דקדוק לשפה:</u>

$S \rightarrow 0B \mid 1A$
$A \rightarrow 0 \mid 0S \mid 1AA$
$B \rightarrow 1 \mid 1S \mid 0BB$

<u>נוכיח בעזרת אינדוקציה:</u>
<u>בסיס:</u> בסיס יש שתי מילים 10 ו- 01
<u>עבור 01:</u> $S \rightarrow 0B, B \rightarrow 1$
<u>עבור 10:</u> $S \rightarrow 1A, A \rightarrow 0$
מניחים שמספר ה-"0" שווה למספר ה-"1"
<u>צעד:</u> נניח שכל נגזרת עבור w הם בחצי הראשון ... של w מספר "0" שווה למספר "1"
ונראה שאחרי כל רגע ... שלילה ... נקבל שמספר "0" שווה
מספר "1"
נראה שכל גזירה עבור $S \rightarrow 0B$ ועבור $S \rightarrow 1A$ זהה קבוע
10 $\Leftarrow$ $S \rightarrow 0B, B \rightarrow 1$ כלומר $w01$, מספר ה-"0" עדיין שווה למספר ה-"1"
$S \rightarrow 0b, b \rightarrow 1S \Rightarrow 01S$ כלומר $w01S$ שזה סוג של רקורסיה של S שכבר בדקנו
נניח ש 10 ולכן נסתכל על המקרים
$S \rightarrow 0B, B \rightarrow 0BB, \ldots, B \rightarrow 00\ldots0BB\ldots B$
נניח שהפעלנו את החוק x פעמים ולכן קיבלנו x פעמים אפסים B ועוד B מיותר
ל- 1 ... $B \rightarrow 1$ או $B \rightarrow 1S$ ושם נקבל שמספר ס"ם שווה למספר 1 וגם
S ... שלא ... לרגל הראשון שכבר הוכחנו)
לכן הוכחנו שכל גזירה מקיימים את התנאי שמספר ה-0 שווה למספר ה-1

שאלה 5

נוכיח שקיים מספר קבוע n_0 כך שלכל מילה $w \in L$ קיים $u,v,x,y,z \in \Sigma^*$ כך שאפשר לייצג $w=uvxyz$ ומתקיים:

1. $|vxy| \le n_0$
2. $vy \ne \varepsilon$
3. לכל $k \ge 0$ $uv^kxy^kz \in L$

נבחין כי מספר את הקטן ביותר עבור השפה הוא $n_0=3$, כי אחרת לא יתקיים ש
$j \ne i$, $i \ne k$, $j \ne k$

נבחר $n_0=6$ ולכל מילה $w \in L$ נבחר ש $x=y=\varepsilon$ לכן:
v תכיל אך ורק בדיוק את מספר ההופעות המקסימלי במילה w, שכן מתקיים בגלל שבהכרח ב $w \in L$ מתקיים $j \ne k$, $i \ne k$, $j \ne i$ לפי הגדרת השפה L
כמו כן מספר ההופעות של אות זו כאשר v נמחק היא לא כל אחד נמוך אינו המספר הגדול לא נקבל מספר הופעות של אות אחר, מספר זה מתקיים בגלל
שיש 3 סוגי אותיות ; ו 4 אפשרויות שונות של מספר הופעות במילה 0,1,2,3 אפשר לכן
u ו z משלימות את המילה כאשר u מכיל את כל האותיות שקודמות ל v ו z מכיל האותיות שבאות אחרי v
ולכן נקבל בבירור ש $w=uvxyz$ וגם $|vxy| \le |v| \le 6 \le n_0$! ולכן תנאי "1" מתקיים
וגם $v \ne \varepsilon$ ולכן $vy \ne \varepsilon$ ולכן תנאי "2" מתקיים
ובשביל להראות שלכל $k \ge 0$ $uv^kxy^kz \in L$ נחלק למקרים:

- עבור $k=0$: אחרי ההצבות המילה $uv^kxy^kz=uv^kz=uv^0z=uz \in L$ שכן כמעט רק את האותיות שבגלל ב v ולכן כמות v לא, נקבל מספר הופעות חדש
- עבור $k=1$: כמו נתון $uvxyz \in L$
- עבור $k \ge 2$: $uv^kxy^kz=uv^kz$ כי $x=y=\varepsilon$ ולכן נוסיף את כל מספר ההופעות שלו הוא מקסימלי ולכן זה בהכרח יגדל ל מספר שונה גבוה יותר משני התווים האחרים ולכן $uv^kxy^kz \in L$