

Given a dataset :

$x$	-9	-8.5	-8	...	6	6.5	7
$y$	129.762	53.599	-2.125		24.263	42.123	78.599

Hubungan antara  $y$  dan  $x$  adalah:  $y = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4$

Carilah nilai  $w_0, w_1, w_2, w_3, w_4$  agar hubungan  $y$  dan  $x$  mereprestasikan data pada tabel!

Jawab:

Dalam tabel terdapat 33 pasang data.

$$\text{data ke-1} : 129.762 \approx w_0 + w_1(-9) + w_2(-9)^2 + w_3(-9)^3 + w_4(-9)^4$$

$$\text{data ke-2} : 53.599 \approx w_0 + w_1(-8.5) + w_2(-8.5)^2 + w_3(-8.5)^3 + w_4(-8.5)^4$$

$$\vdots$$

$$\text{data ke-33} : 78.599 \approx w_0 + w_1(7) + w_2(7)^2 + w_3(7)^3 + w_4(7)^4$$

ke-33 persamaan tsb bisa dinyatakan dalam sebuah persamaan matriks vektor:

$$\begin{bmatrix} 129.762 \\ 53.599 \\ \vdots \\ 42.123 \\ 78.599 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -9 & (-9)^2 & (-9)^3 & (-9)^4 \\ 1 & -8.5 & (-8.5)^2 & (-8.5)^3 & (-8.5)^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 6.5 & 6.5^2 & 6.5^3 & 6.5^4 \\ 1 & 7 & 7^2 & 7^3 & 7^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

↓  
vektor  $\underline{y}$   
ukuran:  $33 \times 1$

↓  
matrix  $\underline{X}$   
ukuran:  $33 \times 5$

↓  
vektor  $\underline{w}$   
ukuran:  $5 \times 1$

Persamaan matrix-vektor:  $\underline{y} \approx \underline{X} \underline{w}$

Pertanyaan: Diberikan vektor  $\underline{y}$  dan matrix  $\underline{X}$  yg didapat dari tabel, berapakah nilai vektor  $\underline{w}$  agar nilai  $\underline{X} \underline{w}$  "mendekati" nilai  $\underline{y}$ ?

Istilah "mendekati" disini perlu dirumuskan secara matematis agar tidak menimbulkan ambiguitas. Salah satu kriteria matematis untuk mengukur seberapa dekat vektor  $\underline{y}$  dg vektor  $\underline{X} \underline{w}$  adalah dg menggunakan least square (LS).

Least Square:

$$l_s = \|\underline{y} - \underline{X}\underline{w}\|_2^2 = \text{Tr}((\underline{y} - \underline{X}\underline{w})(\underline{y} - \underline{X}\underline{w})^T)$$

⇒ LS menghitung norm dari vektor  $\underline{y} - \underline{X}\underline{w}$ . Jika angka (entri atau elemen) pada vektor  $\underline{y} - \underline{X}\underline{w}$  kecil, maka  $\|\underline{y} - \underline{X}\underline{w}\|_2^2$  akan bernilai kecil.

Problem mencari nilai dari vektor  $\underline{w}$  agar  $\|\underline{y} - \underline{X}\underline{w}\|_2^2$  bernilai seminimal mungkin dapat dinyatakan secara matematis sebagai berikut:

$$\underset{\underline{w}}{\text{minimize}} \quad l_s = \text{Tr}((\underline{y} - \underline{X}\underline{w})(\underline{y} - \underline{X}\underline{w})^T)$$

Kita akan menggunakan metode turunan pertama sama dengan nol untuk mencari nilai  $\underline{w}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_s}{\partial w_n} &= \text{Tr}\left(\underline{X} \frac{\partial \underline{w}}{\partial w_n} (\underline{y} - \underline{X}\underline{w})^T\right) + \text{Tr}\left((\underline{y} - \underline{X}\underline{w})(\underline{X} \frac{\partial \underline{w}}{\partial w_n})^T\right) \\ &= \text{Tr}\left(\underline{X} \underline{e}_n (\underline{y} - \underline{X}\underline{w})^T\right) + \text{Tr}\left((\underline{y} - \underline{X}\underline{w})(\underline{X} \underline{e}_n)^T\right) \\ &= \text{Tr}\left(\underline{x}_n (\underline{y} - \underline{X}\underline{w})^T\right) + \text{Tr}\left((\underline{y} - \underline{X}\underline{w}) \underline{x}_n^T\right) \\ &= 2 \cdot \text{Tr}\left((\underline{y} - \underline{X}\underline{w}) \underline{x}_n^T\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial l_s}{\partial w_n} = 2 \underline{x}_n^T (\underline{y} - \underline{X}\underline{w})$$

dimana  $\underline{e}_n$  adalah sebuah standar unit vektor dengan angka 1 pada entri ke-n. Berdasarkan persamaan terakhir, maka

$$\frac{\partial l_s}{\partial \underline{w}} = 2 \underline{X}^T (\underline{y} - \underline{X}\underline{w})$$

Nilai  $\underline{w}$  agar  $l_s$  minimal didapat dengan cara  $\partial l_s / \partial \underline{w} = 0$ , maka

$$2 \underline{X}^T (\underline{y} - \underline{X}\underline{w}) = 0$$

$$\underline{X}^T \underline{y} - \underline{X}^T \underline{X} \underline{w} = 0$$

$$\underline{X}^T \underline{X} \underline{w} = \underline{X}^T \underline{y}$$

$$\underline{w} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{y}$$

Kembali pada soal, nilai  $\underline{X}$  dan  $\underline{y}$  telah diberikan, maka nilai  $\underline{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$

dapat dihitung menggunakan rumus diatas, hasilnya  $w_0 = 31.627$   $w_1 = 5.868$

$$w_2 = -5.325 \quad w_3 = 0.091 \quad w_4 = 0.098$$

Diberikan dataset yang terdiri atas  $M$  buah pasang data:

$x$				...		
$y$				...		

dan kita ingin melakukan polynomial regression yang memiliki bentuk

$$y = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots + w_N x^N \text{ (polynomial derajat } N\text{)}.$$

Bagaimana caranya untuk mendapatkan nilai  $\underline{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$ ?

Step 1: Definisikan vektor kolom  $\underline{y}$  yang berukuran  $M \times 1$

Step 2: Definisikan matrix  $\underline{X}$  yang berukuran  $M \times (N+1)$

cara menyusun matri  $\underline{X}$  bisa dilihat pada contoh sebelumnya

Step 3: hitung  $\underline{w}$  menggunakan rumus  $\underline{w} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X} \underline{y}$