

احمد رضا قلی زاده تلیکانی - ۸۱۰۳۰۲۰۵۱

حسام عالمیان - ۸۱۰۳۰۲۰۴۲

موضوع تمرین: Constraint Satisfaction Problem

دانشگاه تهران - دانشکده نقشه‌برداری و سیستم‌های اطلاعات مکانی
(فروردین ۱۴۰۳)



دانشکده فنی دانشگاه تهران



گروه اول

IGTech

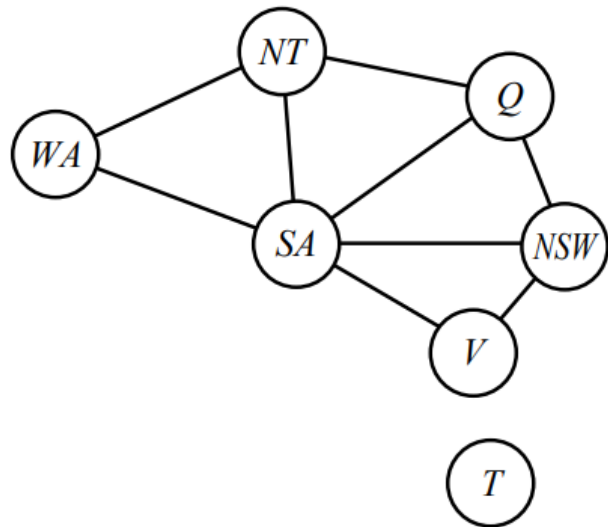


Constraint Satisfaction Problem

Constraint Satisfaction Problem یا CSP در AI توسط مجموعه‌ای از متغیرها (X_1, X_2, \dots, X_n) و مجموعه‌ای از محدودیت‌ها (C_1, C_2, \dots, C_m) تعریف می‌شود. هر یک از این متغیرها (X_i) دارای یک دامنه غیرتهی (D_i) است. هر محدودیت زیرمجموعه‌ای از متغیرها را درگیر می‌کند. هر State در این مسئله به معنی اختصاص مقدار به تعدادی از متغیرها یا همه آنها است.

$$\{X_i = \vartheta_i, X_j = \vartheta_j, \dots\}$$

Consistent یا Legal Assignment به State ای می‌گویند که محدودیتی را تجاوز نکرده باشد. Complete Assignment به Legal Assignment ای می‌گویند که همه متغیرها دارای مقدار باشند و می‌تواند Solution باشد. گاهی در مسائل CSP ما به دنبال بیشینه کردن یک Objective Function هستیم.



تصویر ۱. نمونه ای از مسئله Map Coloring و تعریف آن در یک گراف به صورت CSP

در مسئله بالا که قصد رنگ کردن نقشه را داریم می‌توانیم آن را به صورت یک CSP بیان کنیم.

متغیرها (ایالت های استرالیا): $\{WA, NT, Q, NSW, V, SA, T\}$

دامنه برای هر کدام از ایالت ها: $\{red, green, blue\}$

گراف بالا محدودیت‌ها را نمایش می‌دهد به طوری که هیچ یک از دو استان همسایه نباید رنگ یکسان به آن‌ها اختصاص داده

شود. به همین دلیل Edge ها بین متغیرهایی که نباید مقدار یکسان داشته باشند رسم شده است.

تعریف مسئله به صورت CSP منجر به کاهش Complexity و اجرای یک الگوی استاندارد برای پیدا کردن Solution می‌شود.

حال می‌خواهیم یک Standard Search Problem به صورت Incremental Formulation برای مسائل CSP در نظر بگیریم:

- Initial State: همه متغیرها بدون مقدار اختصاص داده شده هستند.
- Successor Function: یک مقدار می‌تواند به هریک از متغیرهای بدون مقدار از دامنه اختصاص داده شود که با مقادیر قبلی دارای Conflict نباشد.
- Goal Test: این Assignment کامل (Complete) است یا نه.
- Path Cost: یک هزینه ثابت برای هر گام

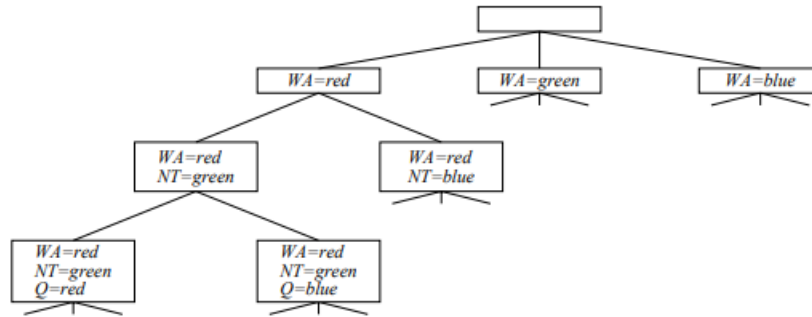
ساده ترین مسائل CSP آنهایی هستند که دارای متغیرهای گسسته و دامنه محدود برای آنها هستند که Map Coloring و 8-Queens از این نوع مسئله هستند. Boolean CSPs مسائلی هستند که دامنه در آنها به صورت True و False است که در حل برخی مسائل NP-Complete مثل 3SAT موثر است. دامنه می تواند با وجود گسسته بودن نامحدود باشد. مثل انتخاب یک روز در آینده در مسئله Scheduling Construction Jobs. در این شرایط تعریف محدودیت می تواند متفاوت باشد. مثلا اگر Job شماره یک پنج روز زمان صرف کند، Job بعدی باید ۵ روز بعد آغاز شود. در این شرایط نمی توان تمامی حالات را به دلیل بی شمار بودن دامنه بررسی کرد. در این حالت که شرایط محدودیت خطی است الگوریتمی برای حل مسئله موجود است اما درحالات غیر خطی برای حل مسئله دامنه را به یک دامنه محدود تبدیل می کنند.

ساده ترین حالت برای Constraint ها حالت Unary Constraint است که بر روی یک تک متغیر اعمال می شود. مثلا یک ایالت در استرالیا نباید به رنگ سبز درآید که به راحتی با حذف این رنگ از دامنه شرط به طور حتم در Solution برقرار می شود. حالت دیگر Binary Constraint است که دو متغیر را درگیر میکند. مثلا دو استان به دلیل همسایگی نباید دارای رنگ یکسان باشند که به صورت Edge در گراف نمایش داده می شود. محدودیت با بعدهای بالاتر در برخی مسائل مانند Cryptarithmic Puzzles دیده می شود.

Backtracking Search FOR CSPs

در قسمت قبل با Formulation انجام Search در CSPs آشنا شدیم و می دانیم که با همه الگوریتم های Search می توانیم این مسئله را حل کنیم. فرض کنیم که ما از Breath First Search برای حل CSP استفاده کنیم. در این حالت در مرحله اول برای اختصاص یک مقدار (Branching Factor) در درخت nd زیر درخت تولید می شود که n تعداد متغیرها و d تعداد مقادیر است. در مرحله بعد این مقدار به $(n-1)d$ کاهش پیدا می کند که در نهایت ما به درختی با d^n برگ می رسیم در حالی که به طور کلی فقط d^n حالت موجود است و این بسیار روش نامناسبی است.

یک راه حل Naive، یک ویژگی مهم CSPs را در نظر نمی گیرد و آن هم Commutativity است. یعنی این که ترتیب Action ها تاثیری در خروجی مسئله ندارد. در مسئله CSP نیز ترتیب اختصاص دادن مقدار به متغیرها تاثیری در خروجی آن ندارد. به همین دلیل به عنوان مثال در ریشه درخت Search از بین مقادیر قرمز، سبز و آبی برای متغیر SA خواهد بود و دیگر متغیرها شرکت نمی کنند.



تصویر ۲. نمونه ای از Backtracking به منظور Map Coloring و نمایش به صورت درخت

اصطلاح Backtracking برای Depth First Search ای به کار می‌رود که در هر مرحله به هر متغیر یک مقدار را اختصاص

می‌دهد و زمانی که به Illegal State برسد Backtrack می‌کند.

```

function BACKTRACKING-SEARCH(csp) returns a solution, or failure
  return RECURSIVE-BACKTRACKING({ }, csp)

function RECURSIVE-BACKTRACKING(assignment, csp) returns a solution, or failure
  if assignment is complete then return assignment
  var ← SELECT-UNASSIGNED-VARIABLE(VARIABLES[csp], assignment, csp)
  for each value in ORDER-DOMAIN-VALUES(var, assignment, csp) do
    if value is consistent with assignment according to CONSTRAINTS[csp] then
      add {var = value} to assignment
      result ← RECURSIVE-BACKTRACKING(assignment, csp)
      if result ≠ failure then return result
      remove {var = value} from assignment
  return failure
  
```

تصویر ۳. Pseudocode اجرای Backtracking Search

Variable and value ordering

ترتیب انتخاب متغیر و ترتیب انتخاب در دامنه یکی از مسائل مهم در CSP است که در بهینه سازی زمان پیدا شدن Solution موثر است. به عنوان مثال در مسئله Map Coloring زمانی که در فرایند انتخاب، یک متغیر وجود دارد که تنها یک دامنه قابل قبول دارد (مثلا به دلیل رنگ همسایه ها فقط می تواند رنگ آبی بگیرد) موثر است که در ابتدا این متغیر انتخاب شود. (Minimum Remaining Values) در حالتی که تعداد زیادی متغیر داریم که دارای کمترین تعداد Value در دامنه خود هستند (مثلا چند استان که فقط یک رنگ می توانند بگیرند) متغیری را انتخاب می کنیم که دارای درجه بیشتر Node در گراف باشد. (Degree Heuristic) در واقع می تواند یک Tie-breaker باشد. به عنوان مثال برای شروع SA را انتخاب می کنیم که دارای درجه ۵ در تصویر ۱ است. (اختصاص مقدار به آن منجر به حذف مقادیر بیشتری از سایر دامنه ها می شود). این فرایند ها به ما کمک می کنند که با Back Tracking کمتری به Solution برسیم.

یک ابتکار دیگر Least Constraining Value است که انتخاب هایی را دنبال می کند که تمام دامنه های یک متغیر را از بین نبرد. مثلا زمانی که WA قرمز و NT سبز است؛ برای Q آبی را انتخاب نمی کند که تمامی مقادیر ممکن برای SA از بین برود.

منبع:

CONSTRAINT SATISFACTION PROBLEMS



University of California, Berkeley