Induction sur les mots :

Correction des Exercices 73 et 74

Exercice 1 (**73 du poly**)
Enoncé :
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des mots obtenus sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ avec le schéma d'induction suivant :

i) $\varepsilon \in \mathcal{D}$ (où ε désigne le mot vide).

ii) Si $u \in \mathcal{D}$ et $v \in \mathcal{D}$ alors $aubv$ appartient aussi à $\mathcal{D}$.

1. Donnez tous les mots de $\mathcal{D}$ de longueur inférieure ou égale à 6.
2. Montrez que tous les mots de $\mathcal{D}$ ont un nombre pair de lettres.
3. Montrez que tous les mots de $\mathcal{D}$ de longueur supérieure ou égale à 1 finissent par b.
4. Montrez que tous les mots de $\mathcal{D}$ contiennent autant de a que de b.

Une solution :

1. Les étapes pour construire les mots de l'ensemble $\mathcal{D}$ avec la règle donnée sont :
   — Étape 1 : $E_1 = \{\varepsilon\}$
   — Étape 2 : on a une possibilité $u = \varepsilon$ et $v = \varepsilon$ ce qui donne le mot $a\varepsilon b\varepsilon$ donc $E_2 = \{\varepsilon, ab\}$.
   — Étape 3 : on a trois possibilités :
      * $u = \varepsilon$ et $v = ab$ ce qui donne le mot : $a\varepsilon bab$
      * $u = ab$ et $v = \varepsilon$ ce qui donne le mot : $aabb\varepsilon$
      * $u = ab$ et $v = ab$ ce qui donne le mot : $aabbab$

   donc $E_3 = \{\varepsilon,\ ab, abab, aabb, aabbab\}$
   — Étape 4 : on a quatre possibiltés :
      * $u = \varepsilon$ et $v = abab$ ce qui donne le mot $a\varepsilon babab$
      * $u = abab$ et $v = \varepsilon$ ce qui donne le mot $aababb\varepsilon$
      * $u = \varepsilon$ et $v = aabb$ ce qui donne le mot $a\varepsilon baabb$
      * $u = aabb$ et $v = \varepsilon$ ce qui donne le mot $aaabbb\varepsilon$

   Donc $E_4 = \{\varepsilon,\ ab, abab, aabb, aabbab, ababab, aababb, abaabb, aaabbb\}$
   On remarque que dans cette étape, on ne compte que les mots dont la longueur ne dépasse pas 6, par exemple si $u = \varepsilon$ et $v = aabbab$, on a le mot $abaabbab$ qui est de longueur égale à 8. Donc E_4 est l'ensemble des mots de $\mathcal{D}$ de longueur inférieure ou égale à 6.
2. On note $n(m)$: le nombre de lettres du mot m.

   Soit $p(m)$ la propriété suivante :
   $$p(m) : n(m) \text{ est pair}$$
   Montrons par induction que $p(m)$ est vraie pour tout m de $\mathcal{D}$.

   (*i*) Base. Vérifions que $p(\varepsilon)$ est vraie. Soit $m = \varepsilon$ alors $n(m) = 0$ qui est un nombre pair. Donc $p(\varepsilon)$ est vraie.

   (*ii*) Induction. Soient $u \in \mathcal{D}$ et $v \in \mathcal{D}$ tels que $p(u)$ et $p(v)$ vraies. Soit $m \in \mathcal{D}$ tel que $m = aubv$. Montrons que $p(m)$ est vraie.

   On a par définition : $n(m) = 1 + n(u) + 1 + n(v) = 2 + n(u) + n(v)$. Par hypothèse d'induction, $n(u)$ et $n(v)$ sont pairs. Alors $n(m)$ est pair car c'est la somme de trois nombres pairs. On en déduit que $p(m)$ est vraie.

(iii) Conclusion. Par le principe d'induction, la propriété $p(m)$ est vraie pour tout m de $\mathcal{D}$.

3. On note $p(m)$: $m = \varepsilon$ ou le mot m finit par b.

   Montrons $\forall m \in \mathcal{D},\ p(m)$ par induction.
   Il s'agit en effet de ce que l'on veut démontrer, car nous souhaitons démontrer que pour tout mot de $\mathcal{D}$ de longueur supérieure ou égale à 1 (c'est-à-dire non vide), le mot termine par b. Cela revient donc à démontrer que pour tout mot m de $\mathcal{D}$, soit il est vide, soit il termine par b : c'est la définition de $p(m)$.

   (i) Base. Soit $m = \varepsilon$. Il est évident que $p(\varepsilon)$ est vraie car $\varepsilon = \varepsilon$ (nous n'avons donc pas à vérifier que le mot termine par b).

   (ii) Induction. Soient $u \in \mathcal{D}$ et $v \in \mathcal{D}$ tels que $p(u)$ et $p(v)$ vraies. Soit $m \in \mathcal{D}$ tel que $m = aubv$. Montrons que $p(m)$ est vraie.

   On distingue deux cas

   * $v \neq \varepsilon$. Comme $p(v)$ est vraie alors v finit par b ce qui implique que le mot m finit aussi par b. Donc $p(m)$ est vraie dans ce cas.
   * $v = \varepsilon$. Dans ce cas le mot m s'écrit : $m = aub$ et il finit bien par b. On déduit aussi que $p(m)$ est vraie.

   (iii) Conclusion. Par le principe d'induction, la propriété $p(m)$ est vraie pour tout mot m de $\mathcal{D}$.

   Remarque : On est en droit de se demander pourquoi il n'aurait pas mieux valu définir le prédicat $p'(m)$: m finit par b, et vérifier par induction la propriété $p'(m)$ pour tout élément m de l'ensemble $\mathcal{D}'$ constitué des mots de $\mathcal{D}$ de longueur supérieure ou égale à 1. C'est en effet ce qui est demandé !
   La raison est que l'on ne sait pas *a priori* si $\mathcal{D}'$ est un ensemble défini inductivement. C'est pourquoi nous avons plutôt voulu vérifier $p(m)$ sur l'ensemble défini inductivement $\mathcal{D}$. C'est une méthode usuelle : on définit $p(m)$ comme étant vraie si l'on est pas dans le sous-ensemble $\mathcal{D}'$ sur lequel on souhaite faire une démonstration, et vraie si elle vérifie la propriété que l'on souhaite démontrer sinon. Ainsi, d'après la remarque faite en début de correction, cela revient au même. Dans ce cas, on applique la méthode d'induction comme d'habitude (par exemple, ici, on est parti du mot vide ε quand bien même ce mot n'est pas de longueur supérieure ou égale à 1).
   Ce n'est toutefois pas toujours nécessaire de procéder ainsi. On aurait très bien pu démontrer $p'(m)$ par induction sur $\mathcal{D}'$ car il s'agit d'un ensemble défini inductivement. Mais encore faut-il le vérifier ! Pour ce faire, la seule méthode possible est de trouver un schéma d'induction. On peut être tenté de remplacer la base ε par ab, le premier mot de longueur supérieure ou égale à 1, mais attention ! On n'obtient pas tous les mots non vides de $\mathcal{D}$ de la sorte. En effet, le mot $aabb$ que l'on a obtenu en question 1 ne peut pas être construit inductivement si l'on supprime le mot vide. Par conséquent, nous devons palier à l'absence du mot vide en introduisant le schéma inductif ci-dessous :

   (i) Base. Le mot ab appartient à $\mathcal{D}'$.

   (ii) Induction. Soient u et v deux mots de $\mathcal{D}'$. Alors les mots $aubv$, aub et abv appartiennent à $\mathcal{D}'$.

   En utilisant ce schéma inductif, on peut alors procéder à une preuve par induction. Mais on peut facilement se convaincre que cela est plus difficile. La chose à retenir de cet exercice est donc que, contrairement à la récurrence sur les entiers naturels non nuls, il ne suffit pas de "décaler" les atomes afin d'obtenir l'induction sur l'ensemble voulu.

4. On note par $n_a(m)$ et $n_b(m)$ le nombre de a respectivement de b du mot m. Soit $P(m)$ la propriété :
$$p(m): \ \ n_a(m) = n_b(m).$$
Montrons par induction que $p(m)$ est vraie pour tout m de $\mathcal{D}$.
   (i) Base. Soit $m = \varepsilon$. On a $n_a(\varepsilon) = 0$ et $n_b(\varepsilon) = 0$ donc le mot ε contient autant de a que de b. Alors $P(\varepsilon)$ est vraie.
   (i) Induction. Soient $u \in \mathcal{D}$ et $v \in \mathcal{D}$ tels que $P(u)$ et $p(v)$ vraies. Montrons que $P(aubv)$ est vraie.
   $n_a(aubv) = 1 + n_a(u) + 0 + n_a(v)$ et $n_b(aubv) = 0 + n_b(u) + 1 + n_b(v)$. Par hypothèse d'induction $n_a(u) = n_b(u)$, on en déduit que $n_a(aubv) = n_b(aubv)$. Donc $P(aubv)$ est vraie.

   (iii) Conclusion. Par le principe d'induction, la propriété $p(m)$ est vraie pour tout m de $\mathcal{D}$.

Exercice 2 (**74 du poly**)
Enoncé :
On construit l'ensemble $\mathcal{F}$ des mots écrits sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ selon le schéma d'induction suivant :

i) le mot vide ε appartient à $\mathcal{F}$.
ii) Soient u un mot de $\mathcal{F}$. Alors les mots aua et bub appartiennent à $\mathcal{F}$.

1. Donnez tous les mots de $\mathcal{F}$ de longueur inférieure ou égale à 6.
2. Montrez par induction que tout mot w de $\mathcal{F}$ possède un nombre pair de lettres.
3. Montrez par induction que tout mot w de $\mathcal{F}$ est un palindrome. (On rappelle qu'un palindrome est un mot qui se lit de la même façon de gauche à droite ou de droite à gauche ; le mot vide est un palindrome).

Une solution :

1. Les étapes pour construire les mots de l'ensemble $\mathcal{F}$ avec les deux règles données sont :
   — Étape 1 : $E_1 = \{\varepsilon\}$
   — Étape 2 : on a une possibilité $u = \varepsilon$ ce qui donne les mots $a\varepsilon a$ et $b\varepsilon b$ donc $E_2 = \{\varepsilon, \, aa, bb\}$.
   — Étape 3 : on a deux possibilités :
      ∗ $u = aa$ ce qui donne les mots : $aaaa$ et $baab$.
      ∗ $u = bb$ ce qui donne les mots : $abba$ et $bbbb$
   donc $E_3 = \{\varepsilon, \ aa, bb, aaaa, baab, abba, bbbb\}$
   — Étape 4 : on a quatre nouvelles possibiltés :
      ∗ $u = aaaa$ ce qui donne les mots $aaaaaa$ et $baaaab$.
      ∗ $u = baab$ ce qui donne les mots $abaaba$ et $bbaabb$.
      ∗ $u = abba$ ce qui donne les mots $aabbaa$ et $babbab$.
      ∗ $u = bbbb$ ce qui donne les mots $abbbba$ et $bbbbbb$.
   Donc $E_4 = \{\varepsilon, \ aa, bb, aaaa, baab, abba, bbbb, aaaaaa, baaaab, abaaba, bbaabb, aabbaa, babbab, abbbba, bbbbbb\}$
   On remarque que à cette étape, on a déjà des nouveaux mots de longueur 6, si on passe à l'étape suivante on aura des des nouveaux mots de longueur 8. Donc E_4 est l'ensemble des mots de $\mathcal{F}$ de longueur inférieure ou égale à 6.

2. On note $n(m)$: le nombre de lettres du mot m.

   Soit $p(m)$ la propriété suivante :

$$p(m) : n(m) \text{ est pair}$$

   Montrons par induction que $p(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathcal{F}$.

   (*i*) <u>Base</u>. Vérifions que $p(\varepsilon)$ est vraie. Soit $m = \varepsilon$ alors $n(m) = 0$ qui est un nombre pair. Donc $p(\varepsilon)$ est vraie.

   (*ii*) <u>Induction</u>. Soit $u \in \mathcal{F}$ tel que $p(u)$ est vraie. Soit $m_1 = aua$ et $m_2 = bub$ deux mots de $\mathcal{F}$. Montrons que $p(m_1)$ et $p(m_2)$ sont vraies.

   On a par définition : $n(m_1) = 1+n(u)+1 = 2+n(u) = n(m_2)$. Par hypothèse d'induction, $n(u)$ est pair. Alors $n(m_1)$ et $n(m_2)$ sont pairs car c'est la somme de deux nombres pairs. On en déduit que $p(m_1)$ et $p(m_2)$ sont vraies.

   (*iii*) <u>Conclusion</u>. Par le principe d'induction, la propriété $p(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathcal{F}$.

3. On dénote par $\widetilde{m}$ le mot miroir de m. Donc m est un palindrome si $\widetilde{m} = m$. Montrons la propriété $Q(m)$ suivante :

$$Q(m) : \widetilde{m} = m$$

   Montrons par induction que $Q(m)$ est vraie pour tout m de $\mathcal{F}$.

   (*i*) <u>Base</u>. Vérifions que $Q(\varepsilon)$ est vraie. Soit $m = \varepsilon$, alors $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Donc $Q(\varepsilon)$ est vraie.

   (*ii*) <u>Induction</u>. Soit $u \in \mathcal{F}$ tel que $Q(u)$ est vraie. Soit $m_1 = aua$ et $m_2 = bub$ deux mots de $\mathcal{F}$. Montrons que $Q(m_1)$ et $Q(m_2)$ sont vraies.

   On a par définition : $\widetilde{m_1} = \widetilde{aua} = a\widetilde{u}a$ et $\widetilde{m_2} = \widetilde{bub} = b\widetilde{u}b$. Par hypothèse d'induction, $\widetilde{u} = u$. Alors $\widetilde{aua} = aua$ et $\widetilde{bub} = bub$. On en déduit que $Q(m_1)$ et $Q(m_2)$ sont vraies.

   (*iii*) <u>Conclusion</u>. Par le principe d'induction, la propriété $Q(m)$ est vraie pour tout m de $\mathcal{F}$.