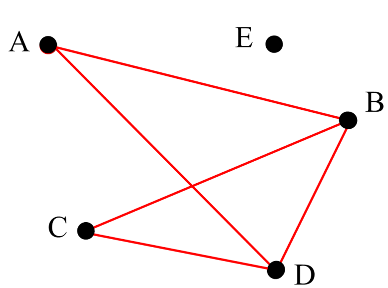
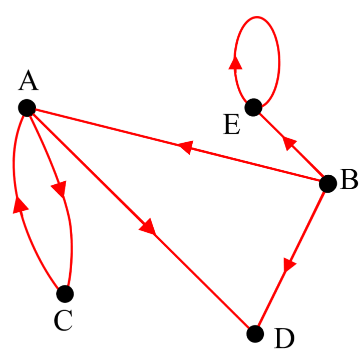
1 Vocabulaire de base

Définition 1.
- *Un* ***graphe*** *est un ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.*
- *Un* ***sommet*** *du graphe est un point du graphe. Le nombre de sommets est l'****ordre*** *du graphe.*
- *Une* ***arête*** *du graphe est une ligne reliant deux sommets. Une* ***boucle*** *est une arête reliant un sommet à lui-même.*
- *Un sommet est* ***isolé*** *lorsque aucune arête de le relie aux autres sommets.*
- *Un* ***graphe simple*** *est un graphe sans boucle tel que, entre deux sommets, il y ait au plus une arête. Deux sommets reliés par une arête sont* ***adjacents****.*
- *Un* ***graphe orienté*** *est un graphe dont les arêtes sont orientées. Une arête orientée va d'un sommet vers un autre sommet, elle est représentée par une flèche.*
- *Le* ***degré*** *d'un sommet est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.*

Exemples.



Graphe 1



Graphe 2

Le graphe 1 est un graphe simple d'ordre 5, de sommets A, B, C, D et E. Les sommets A et B sont adjacents, A et C ne le sont pas, E est un sommet isolé.

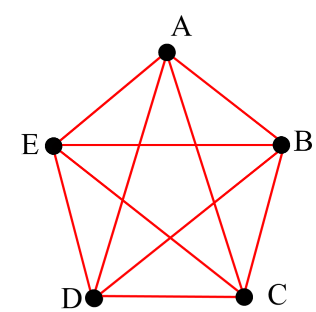
Le graphe 2 est un graphe orienté ayant sept arêtes. Le sommet E est de degré 3 car trois arêtes partent ou arrivent en e.

Théorème 1. *La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au double du nombre total d'arêtes.*

Exemple. Dans le graphe 1 précédent, il y a 5 arêtes. La somme des degrés est $2+3+2+3+0=10=2\times 5$.

Définition 2. *Un* ***graphe complet*** *est un graphe simple dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres*

Exemple.



Graphe 3

Le graphe 3 est un graphe complet d'ordre 5.

Dans le graphe complet d'ordre n :
- le degré de chacun des sommets est $n-1$
- le nombre d'arêtes est $\dfrac{n(n-1)}{2}$

2 Chaîne et cycle eulériens

Définition 3.
- *Une **chaîne**, dans un graphe non orienté, est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets du graphe.*
- *Une **chaîne orientée**, dans un graphe orienté, est une suite d'arêtes orientées telles que l'extrémité terminale de l'une est l'extrémité initiale de l'autre.*
- *Un **cycle**, dans un graphe, est une chaîne dont les extrémités coïncident, composée d'arêtes toutes distinctes. Une chaîne est notée par la liste des sommets où elle passe, reliés par un segment ou une flèche quand le graphe est orienté.*
- *Un graphe est **connexe** lorsque, pour chaque paire de sommets, il existe au moins une chaîne reliant les deux sommets.*

Exemples. Dans le graphe 1 précédent, (A, D, B, D, C) est une chaîne. Une chaîne orientée du graphe 2 est (B, A, C, A, D). Le graphe 1 n'est pas connexe puisqu'il posseède un sommet isolé.

Définition 4.
- *Une **chaîne eulérienne** est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, prises une seule fois.*
- *Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident*

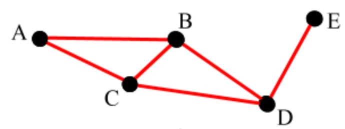
Théorème 2 (Théorèmes d'Euler)**.**
(i) Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne entre les sommets A et B si et seulement si A et B sont les seuls sommets de degré impair.
(ii) Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.

Exemple. Le graphe 1 admet (B, C, D, B, A, D) pour chaîne eulérienne mais d'admet pas de cycle eulérien.

3 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition 5.
- *La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui la composent.*
- *La **distance** entre deux sommets d'un graphe connexe est la longueur de la chaîne qui les relie, ayant le moins d'arêtes.*
- *Le **diamètre** d'un graphe connexe est la plus grande distance constatée entre deux sommets de ce graphe parmi toutes les paires de sommets.*

Exemple.



Graphe 4

Dans le graphe 4, la distance entre A et D est 2. Le diamètre du graphe est 3 (distance entre A et E).

Définition 6. *La **matrice d'adjacence** d'un graphe d'ordre n (resp. graphe orienté d'ordre n) est la matrice carrée A de taille $n \times n$, dont l'élément $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j. (resp. allant du sommet i vers le sommet j).*

Exemple. Reprenons le graphe 4. Sa matrice d'adjacence est la suivante. Elle est symétrique puisque le graphe n'est pas orienté.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3. *Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe et soit $p \geq 1$. Alors, l'élément $p_{i,j}$ de la matrice A^p est égal au nombre de chaînes de longueur p reliant le sommet i au sommet j.*

4 Coloriage des sommets d'un graphe

Définition 7.
- *Un* ***sous-graphe*** *d'un graphe G est un graphe composé de sommets de G et de certaines arêtes qui relient ces sommets.*
- *Un sous-graphe est dit* ***stable*** *lorsqu'il ne comporte aucune arête, autrement dit si deux sommets quelconques ne sont pas adjacents.*

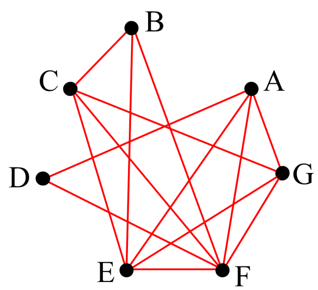
Définition 8.
Colorier les sommets d'un graphe G non orienté, c'est leur attribuer une couleur de façon à ce que deux sommets adjacents ne soient pas coloriés de la même couleur.
Le nombre minimal de couleurs nécessaires est le ***nombre chromatique*** *du graphe, noté $\gamma(G)$.*

Théorème 4.
(i) Le nombre chromatique d'un graphe complet est égal à l'ordre du graphe.
(ii) Soit D le degré maximal des sommets d'un graphe G, alors

$$\gamma(G) \leq 1 + D.$$

(iii) Soit p l'ordre d'un sous-graphe complet d'ordre maximal contenu dans un graphe, alors

$$p \leq \gamma(G).$$



Graphe 5

Exemple : Pour le graphe 5, (B, C, E, F) est un sous-graphe complet d'ordre $p = 4$ (il est maximal).

De plus, voici les degrés des sommets :

sommet	A	B	C	D	E	F	G
degré	4	3	4	2	5	6	4

Ainsi, le plus haut degré est $D = 6$. On sait donc que

$$4 \leq \gamma(G) \leq 6 + 1 = 7$$

Algorithme de Welsh et Powell : algorithme de coloriage d'un graphe.

1. *On liste les sommets par ordre décroissant des degrés* (plusieurs possibilités).
   Par exemple ici, une liste possible est
   $$F - E - C - A - G - B - D$$
2. *On attribue une couleur c_1 au premier sommet de la liste, et on attribue cette même couleur aux sommets qui ne lui sont pas adjacents.*
   Ici, par exemple, on met une couleur c_1 pour F. Aucun sommet ne lui est pas adjacent.
3. *On attribue une couleur c_2 au premier sommet non colorié de la liste et on recommence comme en 2. tant qu'il reste des sommets non coloriés dans la liste.*
   Dans notre exemple, on met
   – une couleur c_2 à E et D.
   – une couleur c_3 à C et A.
   – une couleur c_4 à G et B.

On a ainsi un coloriage du graphe 5 en 4 couleurs, donc $\gamma(G) \leq 4$. On peut donc en déduire que le nombre chromatique du graphe 5 est égal à 4.

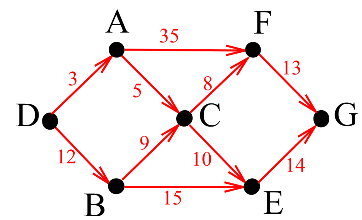
5 Graphes pondérés

Définition 9.
- *Un graphe (orienté ou non) est dit* ***pondéré*** *lorsque ses arêtes sont affectées de nombres positifs.*
- *Le* ***poids d'une arête*** *est le nombre positif qui lui est affecté.*
- *Le* ***poids d'une chaîne*** *est la somme des poids des arêtes qui la composent.*
- *Une* ***plus petite courte chaîne*** *entre deux sommets donnés est une chaîne de poids minimal parmi toutes les chaînes reliant les deux sommets.*

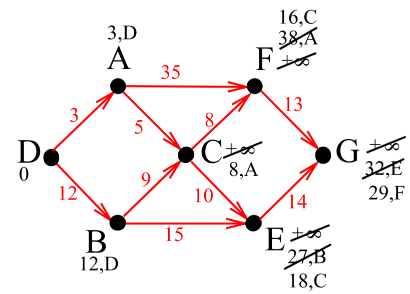
Algorithme de Dijkstra : algorithme de détermination d'une plus courte chaîne d'un graphe pondéré entre un sommet D et un sommet G.

1. *Etape d'initialisation.*
   - On fixe le poids du sommet D à 0.
   - On marque provisoirement chaque sommet adjacent à D du poids de l'arête reliant D à ce sommet. Ces sommets sont des **successeurs** de D.
   - On marque provisoirement les autres sommets du poids $+\infty$.
2. *Etapes d'itérations.*
   On note S l'ensemble des sommets fixés, et $\overline{S}$ l'ensemble des sommets marqués provisoirement.
   Tant que l'ensemble $\overline{S}$ n'est pas vide, on choisit dans $\overline{S}$ le sommet X dont le poids marqué provisoirement p_X est le plus petit.
   - On marque définitivement ce sommet X du poids p_X. On enlève X de $\overline{S}$ et on le place dans $\overline{S}$.
   - On marque provisoirement chaque sommet Y successeur du sommet X par le poids $p_Y = p_X + p_{X,Y}$ où $p_{X,Y}$ est le poids de l'arête reliant X à Y. Si le poids obtenu p_Y est plus petit que le poids marqué provsoirement au sommet Y, alors on barre ce poids marqué et on marque Y du poids p_Y.
   - On réitère le procédé tant que l'ensemble des sommets non fixés n'est pas vide.
3. *Conclusion.*
   On obtient un graphe dont tous les sommets sont fixés. Le poids fixé du sommet G est le poids de la plus courte chaîne du sommet D vers le sommet G dans le graphe.

Exemple : On cherche à déterminer le plus court chemin entre D et G.



Voici le graphe obtenu après l'algorithme. On écrit à côté de chaque sommet le poids (provisoire ou fixé), et le sommet précédent.



On peut présenter également le résultat dans un tableau où chaque ligne représente une étape de l'algorithme.

D	A	B	C	E	F	G
0	$3, D$	$12, D$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$3, D$	$12, D$	$8, A$	$+\infty$	$38, A$	$+\infty$
		$12, D$	$8, A$	$18, C$	$16, C$	$+\infty$
		$12, D$		$18, C$	$16, C$	$+\infty$
				$18, C$	$16, C$	$29, F$
				$18, C$		$29, F$
						$29, F$

La chaîne la plus courte est donc $D - A - C - F - G$