Induction sur les mots : Exemples d'exercices corrigés

Exercice 1 *(76 du poly)*
Enoncé :
On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ défini par le shéma d'induction suivant :

i) Le mode vide ε appartient à $\mathcal{D}$.

ii) Soit W un mot de $\mathcal{D}$. Les mots aWb et bWa appartiennent à $\mathcal{D}$.

1. Donnez les mots de longueur inférieure ou égale à 4.
2. Montrez par induction que tout mot de $\mathcal{D}$ contient autant de a que de b.

Une solution :

1. $m_0 = \varepsilon \in \mathcal{E}$. Ensuite $m_1 = am_0b = ab$ et $m_2 = bm_0a = ba$ appartiennent à $\mathcal{E}$. Puis $m_3 = am_1b = aabb$, $m_4 = am_2b = abab$ appartiennent à $\mathcal{E}$ ainsi que $m_5 = bm_1a = baba$ et $m_6 = bm_2a = bbaa$.
   Ensuite les mots auront plus de 4 lettres.
2. On notera $n_a(m)$ et $n_b(m)$ le nombre de a respectivement de b du mot m. Soit $P(m)$ la propriété le mot m contient autant de a que de b c'est à dire $n_a(m) = n_b(m)$.

   * pour $m = \varepsilon$: $n_a(\varepsilon) = 0$ et $n_b(\varepsilon) = 0$ donc $P(\varepsilon)$ est vraie.
   * soient u un mot de $\mathcal{E}$ tel que $P(u)$ est vraie. Alors $n_a(u) = n_b(u)$. Montrons que $P(aub)$ et $P(bua)$ sont vraies.

   $n_a(aub) = 1 + n_a(u) + 0$ et $n_b(aub) = 0 + n_b(u) + 1$. Comme $n_a(u) = n_b(u)$, on en déduit que $n_a(aub) = n_b(aub)$. De la même façon on a $n_a(bua) = 0 + n_b(u) + 1 = n_a(u) + 1 = n_a(bua)$ donc $P(bua)$ est vraie.

   * D'après le principe d'induction, on en déduit que $P(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathcal{E}$. Tous les mots de $\mathcal{E}$ contiennent autant de a et de b.

Exercice 2 *(110 du poly)*
Enoncé :
On considère l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$. On définit $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}^*$ avec le schéma d'induction suivant :

(i) $c \in \mathcal{N}$.

(ii) Soit u et v deux mots de $\mathcal{N}$. Alors $m_1 = ubv$ et $m_2 = uav$ sont deux mots de $\mathcal{N}$.

1. Quels sont les mots de $\mathcal{N}$ de moins de 6 lettres ?
2. Montrez par induction que tout mot de $\mathcal{N}$ est de longueur impaire.
3. Pour tout mot m de $\mathcal{A}^*$, notons $n_a(m)$ (resp. $n_b(m)$ et $n_c(m)$) le nombre d'occurrences de la lettre a (resp. b, c) dans m.
   Montrez par induction que $n_c(m) = n_b(m) + n_a(m) + 1$, pour tout mot m de $\mathcal{N}$.

Une solution :

1. $m_0 = c \in \mathcal{N}$
   puis $m_1 = cbc \in \mathcal{N}$ et $m_2 = cac \in \mathcal{N}$ sont les premiers mots qu'on peut construire (en prenant $u = v = c$
   Ensuite on peut construire $m_3 = m_0bm_1$, $m_4 = m_1bm_0$, $m_5 = m_0am_1$, $m_6 = m_1am_0$ ainsi

que $m_7 = m_0bm_2$, $m_8 = m_2bm_0$, $m_9 = m_0am_2$, $m_{10} = m_2am_0$ ce qui donne en supprimant ceux obtenus plusieurs fois $c, cbc, cac, cbcbc, cacbc, cbcac, cacac$.
Les mots suivants sont obtenus avec m_1 et m_2 donc auront 7 lettres.
On a donc 7 mots de 6 lettres ou moins dans $\mathcal{N}$

2. Notons $n(m)$ le nombre de lettres du mot m.
* Soit $P(m)$ la propriété : $n(m)$ est impaire.
* pour $m = m_0 = c$: $n(c) = 1$ donc $P(c)$ est vraie.
* soient u, v des mots de $\mathcal{N}$ tels que $P(u)$ et $P(v)$ soient vraies. Montrons que $P(ubv)$ et $P(uav)$ sont vraies.
On a : $n(ubv) = n(u) + 1 + n(v) = n(uav)$
Or $P(u)$ et $P(v)$ sont vraies donc $n(u)$ et $n(v)$ sont impaires.
La somme de 3 nombres impairs est impaire donc $n(ubv)$ et $n(uav)$ sont impaires. Donc $P(ubv)$ et $P(uav)$ sont vraies.
* d'après le principe d'induction on en déduit que $P(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathcal{N}$.

3. Soit $Q(m)$ la propriété $n_c(m) = n_b(m) + n_a(m) + 1$.
* pour $m = m_0 = c$: $n_c(c) = 1$ et $n_b(c) = 0 = n_a(c)$ donc $n_b(c) + n_a(c) + 1 = 1$ et donc $Q(c)$ est vraie.
* soient u, v des mots de $\mathcal{N}$ tels que $Q(u)$ et $Q(v)$ soient vraies. Montrons que $Q(ubv)$ et $Q(uav)$ sont vraies.
$n_c(ubv) = n_c(u) + n_c(v)$
$n_b(ubv) = 1 + n_b(u) + n_b(v)$
$n_a(ubv) = n_a(u) + n_a(v)$
Or $Q(u)$ et $Q(v)$ sont vraies donc $n_c(u) = n_b(u) + n_a(u) + 1$ et $n_c(v) = n_b(v) + n_a(v) + 1$

Donc $n_c(ubv) = n_b(u)+n_a(u)+1+n_b(v)+n_a(v)+1 = 1+n_b(u)+n_b(v)+1+n_a(u)+n_a(v) = n_b(ubv) + n_a(ubv) + 1$
Donc $Q(ubv)$ est vraie.
De même $n_c(uav) = n_c(u) + n_c(v)$
$n_b(uav) = n_b(u) + n_b(v)$
$n_a(uav) = n_a(u) + n_a(v) + 1$
Or $Q(u)$ et $Q(v)$ sont vraies donc $n_c(u) = n_b(u) + n_a(u) + 1$ et $n_c(v) = n_b(v) + n_a(v) + 1$

Donc $n_c(uav) = n_b(u)+n_a(u)+1+n_b(v)+n_a(v)+1 = 1+n_b(u)+n_b(v)+1+n_a(u)+n_a(v) = n_b(ubv) + n_a(ubv) + 1$
Donc $Q(uav)$ est vraie.

* d'après le principe d'induction on en déduit que $Q(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathcal{N}$.