Université de Caen — Année 2018 – 2019
UFR des Sciences

Licence Informatique deuxième année – Mathématiques discrètes
Examen Terminal- première session - décembre 2018

Exercice 1 Jeu du Mastermind
Fernand et Raoul jouent au mastermind. Le jeu comporte quatre trous que nous numéroterons $1, 2, 3, 4$ et des pions de six couleurs notées A, B, C, D, E, F. Fernand joue le premier coup et Raoul donne le nombre de pions bien placés et le nombre de pions mal placés sans indication de position. Voici ci-dessous un exemple de début de partie. Nous avons au premier tour 1 pion bien placé et 2 pions mal placés mais on ne sait pas lesquels ni où.

1	2	3	4	
A	F	C	B	premier tour, placé : 1, mal placé : 2
C	A	E	B	exemple de second tour

Pour jouer le second tour, Raoul a supposé que le pion bien placé est B et les pions mal placés sont A et C Il garde donc B et change A et C de place, et propose une couleur qu'il n'a pas encore jouée pour le quatrième pion.

Question 1. Donnez le nombre de solutions possibles pour ce second tour si l'on suppose que Fernand a choisi quatre couleurs différentes.

Quand il joue, Raoul a pour habitude de choisir toujours quatre couleurs différentes car il pense qu'il y a plus de possibilités. Fernand pense que c'est faux.

Question 2. Calculez le nombre de combinaisons pour le choix de départ avec quatre couleurs différentes.

Question 3. Calculez le nombre de combinaisons pour le choix de départ avec une couleur choisie deux fois et deux autres couleurs (par exemple, $D\ E\ D\ A$).

Question 4. Que conseillez-vous donc aux deux joueurs ?

Exercice 2 Induction sur les arbres

Question 1. Redonnez le schéma d'induction des arbres localement complets.

Question 2. On définit une fonction f telle que $f(\cdot) = 1$ et si $A = (\cdot, B, C)$ (A est constitué des deux sous-arbres B et C) alors $f(A) = 2\max(f(B), f(C))$. Montrez par induction sur les arbres localement complets que l'on a pour tout arbre localement complet A, $f(A) = 2^{h(A)}$, où $h(A)$ est la hauteur de A.

Exercice 3
Soient E un ensemble et A, B et C deux sous-ensembles de E. Nous noterons $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E et utiliserons la même notation pour tout sous-ensemble de E. Montrez que l'on a

$$A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = \Big((A \setminus B) \cup (A \setminus C)\Big).$$

Exercice 4 Injection, surjection, bijection

On considère la fonction f de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Question 1. Montrez que f est bijection. Vous donnerez la fonction réciproque f^{-1}.

Question 2. Si maintenant f est définie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, montrez que f n'est plus une bijection.

Exercice 5
On considère la chaîne de caractères "MERRY CHRISTMAS" (15 caractères dont un caractère espace).

Question 1. Combien y a -t-il d'anagrammes différents de cette chaîne ?

Question 2. On ne veut pas des anagrammes qui commencent ou finissent par un espace. Combien reste-t-il d'anagrammes différents ?

Question 3. Combien y a-t-il d'anagrammes différents qui ne contiennent ni CH ni AS ?

Exercice 6
Un joueur lance un dé à 6 faces. Si le dé tombe sur le 6 le joueur gagne 20 euros, si le dé tombe sur le 1 alors il perd 25 euros. Si le dé tombe sur une des autres faces le gain est de 5 euros.

Question 1. On suppose que le dé est bien équilibré. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain. Déterminer la distribution de cette variable aléatoire.
Que vaut l'espérance de cette variable ? Le jeu est-il équilibré ? Combien faut-il miser pour qu'il le soit ?

Question 2. En fait le dé n'est pas équilibré. La probabilité d'obtenir le 6 est 3 fois plus grande que celle d'obtenir les autres faces (qui elles ont toutes la même probabilité).
Quelle est la probabilité d'obtenir le 6 ? le 1 ?
Si Y est la variable aléatoire correspondant au gain dans ce cas du dé pipé, déterminer la distribution de Y et l'espérance de Y.

Exercice 7
Soit E un ensemble, x un élément fixé de E. On définit la relation $\mathfrak{R}$ sur l'ensemble des parties de E par : $A \,\mathfrak{R}\, B$ si et seulement si $x \in A \cup \overline{B}$ (où $\overline{B}$ désigne le complémentaire de B dans E).
Quelles les propriétés vérifiées par cette relation par mi les propriétés suivantes ?

1. réflexivité
2. irréflexivité
3. symétrie
4. antisymétrie

Exercice 8
Dans $\mathbb{N}$, on définit une relation $<<$ par $x << y$ s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $y = mx$. Montrer que est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$.

Exercice 9
Un site internet demande aux utilisateurs de définir un mot de passe de 8 caractères avec comme symboles des minuscules, des majuscules et des chiffres.

Question 1. Donnez le nombre de mots de passe possibles.

Question 2. Il ajoute maintenant la contrainte d'utiliser au moins une majuscule et un chiffre. Le terme "au moins" est souvent compris par les utilisateurs comme "exactement un".Donnez le nombre de mots de passe de 8 caractères contenant exactement une majuscule et un chiffre.

Question 3. La plupart des utilisateurs décide de mettre la majuscule en première position et le chiffre en dernière position. Combien de mots de passe de 8 caractères peut-on alors former ? Comparez avec le résultat des deux questions précédentes.