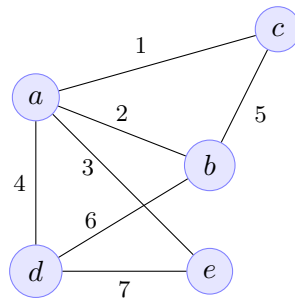


TD 3 : Sous-graphes, cliques, stables

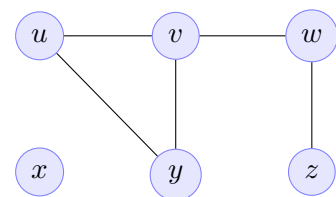
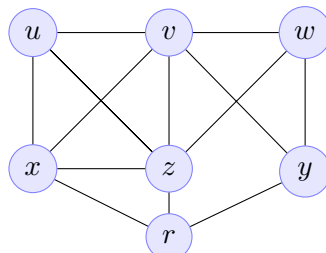
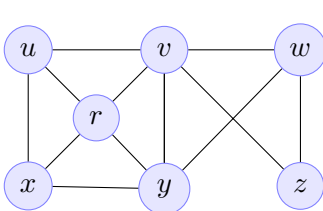
Exercice 1 (Sous-graphes). On considère le graphe simple non orienté G suivant, dont on a numéroté les arêtes (ce ne sont pas des poids) :



- Pour chacun des ensembles de sommets et d'arêtes suivants, indiquer s'ils constituent un sous-graphe de G .
 - $S = \{a, b, d, e\}$, $A = \{2, 6, 7\}$
 - $S = \{a, b, d, e\}$, $A = \{3, 4, 5\}$
 - $S = \{a, b, d, e\}$, $A = \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{a, b\}\}$
 - $S = \{a, b, d, e\}$, $A = \{\{a, d\}, \{d, e\}, \{b, e\}\}$
- Dessiner les sous-graphes de G induits par les ensembles de sommets suivants :
 - $\{a, b, c, d\}$
 - $\{a, c, d\}$
 - $\{c, d, e\}$
 - $\{a\}$
- Dessiner les voisinages de chacun des sommets de G .

Exercice 2 (Cliques et stables). Répondez aux questions suivantes pour chacun des trois graphes suivants.

- Lister toutes les cliques maximales du graphe.
- Donner la taille d'une clique maximum du graphe.
- Lister tous les stables maximaux du graphe.
- Donner la taille d'un stable maximum du graphe.



Exercice 3. On se place dans le contexte des graphes simples non orientés. Prouver que si le voisinage d'un sommet s est une clique, alors c'est une clique maximale.

Exercice 4 (Test de cliques). On se place dans le contexte des graphes simples non orientés. On suppose qu'on dispose des fonctions `taille(G)` et `ordre(G)`, ainsi que d'une fonction complémentaire `(G)`. Comme d'habitude, on ne se préoccupera pas de l'efficacité.

1. Écrire une fonction `induit(G, C)` qui prend en entrée un graphe G et un ensemble de sommets C , et qui renvoie $G|_C$, le sous-graphe de G induit par C .
2. Écrire une fonction `estUneClique(G, C)` qui prend en entrée un graphe G et un ensemble de sommets C , et qui renvoie vrai si et seulement si C est une clique dans G .
3. Écrire une fonction `estUneCliqueMaximale(G, C)` qui prend en entrée un graphe G et un ensemble de sommets C , et qui renvoie vrai si et seulement si C est une clique maximale dans G .
4. Écrire une fonction `estUnStableMaximal(G, C)` qui prend en entrée un graphe G et un ensemble de sommets C , et qui renvoie vrai si et seulement si C est un stable maximal dans G .

Exercice 5. On se place dans le contexte des graphes simples non orientés. On considère la proposition suivante :

Pour tout sous-graphe H d'un graphe $G = (S, A)$, il existe un ensemble de sommets $S' \subseteq S$ tel que $H = G|_{S'}$.

Démontrer soit que cette proposition est vraie, soit qu'elle est fausse.

Exercice 6 (Degrés tous différents). Prouver que tout graphe simple non orienté d'ordre supérieur ou égal à 2 possède au moins deux sommets de même degré.

Exercice 7 (Test de clique maximum). On prend la suite de l'exercice 4.

1. Écrire le pseudo-code d'une fonction `sousEnsembles(E)` qui renvoie l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble E .
2. En utilisant cette fonction, écrire le pseudo-code d'une fonction qui renvoie la taille d'une clique maximum d'un graphe G .