Université de Caen | Année 2020 – 2021
UFR des Sciences

Licence Informatique deuxième année
Mathématiques discrètes – groupes 2 - 3 - 4

Correction du contrôle continu du 15 octobre 2020

Exercice 1 : arbres binaires .

1. Soit A un arbre binaire ayant n noeuds et de hauteur h.
   Montrer par induction que $h \leq n-1$.
   Soit $\mathcal{P}(A)$ la propriété : $h \leq n-1$. Montrons par induction que pour tout arbre binaire A, $\mathcal{P}(A)$ est vraie.
   - Soit A l'arbre vide. Par définition $n = 0$ et par convention $h = -1$. Alors $h = -1 \leq 0 - 1$. Donc $\mathcal{P}(A)$ est vraie.
   - Soient A_g et A_d deux arbres binaires. Supposons $\mathcal{P}(A_g)$ et $\mathcal{P}(A_d)$ sont vraies. Montrons que si $A = (., A_g, A_d)$ alors $\mathcal{P}(A)$.
     Notons h_g la hauteur de A_g et n_g le nombre de noeuds de A_g. De même h_d est la hauteur de A_d et n_d est le nombre de noeuds de A_d.
     Par hypothèse, on a $h_g \leq n_g - 1$ et $h_d \leq n_d - 1$. Alors
     $$h_g + h_d \leq n_g + n_d - 2 \tag{1}$$
     Par définition, $h = \max(h_g, h_d) + 1$ et $n = n_g + n_d + 1$. Comme $h_g + h_d \geq \max(h_g, h_d)$, on déduit de (1) que
     $$\begin{array}{rcl} \max(h_g, h_d) & \leq & n_g + n_d - 2 \\ 1 + \max(h_g, h_d) & \leq & n_g + n_d - 1 \\ \underbrace{1 + \max(h_g, h_d)}_{h} & \leq & \underbrace{(n_g + n_d + 1)}_{n} - 2 \leq n - 1. \end{array}$$
     Donc $\mathcal{P}(A)$ est vraie.
   - D'après le principe d'induction, on en déduit que pour tout arbre binaire A, $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

2. Un arbre binaire est dit localement complet si il est non vide et si chaque nœud a 0 ou 2 descendants.
   (a) Ecrire le schéma d induction des arbres localement complets.
   - L'arbre réduit à une racine est un arbre localement complet
   - Soient A_g et A_d deux arbres localement complets. Alors l'arbre $A = (., A_g, A_d)$ est localement complet.

   (b) Dresser la liste des arbres binaires localement complets de hauteur 2.

```
      .             .                .
     / \           / \             /   \
    .   .         .   .           .     .
   / \               / \         / \   / \
  .   .             .   .       .   . .   .
```

Exercice 2 : Ensembles

Si X et Y sont des ensembles avec $X \subset Y$.
On notera $\mathcal{C}_Y^X$ le complémentaire de X dans Y .

Soient E un ensemble et A et B des sous-ensembles de E tous non vides.

1. Définir $\mathcal{C}_E^A$ et $\mathcal{C}_{E\times E}^{A\times B}$
   $\mathcal{C}_E^A = \{x \in E;\ x \notin A\}$
   $\mathcal{C}_{E\times E}^{A\times B} = \{(x,y) \in E \times E;\ (x,y) \notin A \times B\}$
2. On considère $F = \mathcal{C}_{E\times E}^{A\times B}$ et G$= \mathcal{C}_E^A \times \mathcal{C}_E^B$
   Montrer que $G \subset F$.
   Soit $(x,y) \in G = \mathcal{C}_E^A \times \mathcal{C}_E^B$.
   Alors $x \in \mathcal{C}_E^A$ et $y \in \mathcal{C}_E^B$
   Donc $x \in E;\ x \notin A$ et $y \in E;\ y \notin B$
   Donc $(x,y) \in E \times E;\ x \notin A$ et $y \notin B$
   Donc $(x,y) \in E \times E;\ (x,y) \notin A \times B$
   Donc $(x,y) \in \mathcal{C}_{E\times E}^{A\times B} = F$.
   Donc $G \subset F$.
3. L'inclusion inverse est-elle vérifiée ? (On justifiera la réponse donnée).
   L'inclusion inverse n'est pas vraie.
   Si $E = \{1,2,3\}$, $A = \{1,2\}$ et $B = \{3\}$ alors on a
   $\mathcal{C}_E^A = \{3\}$, $\mathcal{C}_E^B = \{1,2\}$, $\mathcal{C}_E^A \times \mathcal{C}_E^B = \{(3,1),(3,2)\}$, $A \times B = \{(1,3),(2,3)\}$ et
   $\mathcal{C}_{E\times E}^{A\times B} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.
   Il est clair que $\mathcal{C}_{E\times E}^{A\times B} \not\subset \mathcal{C}_E^A \times \mathcal{C}_E^B$ car par exemple $(1,2) \in \mathcal{C}_{E\times E}^{A\times B}$ mais $(1,2) \notin \mathcal{C}_E^A \times \mathcal{C}_E^B$.

Exercice 3 : Injection, surjection, bijection

Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B.

1. Quand dit-on que f est une application injective ? surjective ? bijective ?

   — f est injective si et seulement si tout élément b de B a **au plus** un antécédent par f dans A.

   — f est surjective si et seulement si tout élément b de B a **au moins** un antécédent par f dans A.

   — f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.
2. On définit l'application f par :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x^2,\, y) \end{array}$$

   Que peut-on dire de f ? Est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

   — On remarque que $f(-1,0) = \mathbf{(1,\ 0)} = f(1,0)$. Alors $\mathbf{(1,\ 0)}$ possède au moins deux antécédents. Donc f n'est pas injective et donc f n'est pas bijective.

   — On remarque que $(-1,1)$ n'a pas d'antécédent par f car si on cherche (x,y) tel que $f(x,y) = (-1,1)$ on a $y = 1$ et $x^2 = -1$ qui est impossible dans $\mathbb{R}^2$. Alors f n'est pas surjective.

3. On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$g(x,y) \quad = \quad (x-y, x+y)$$

Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer son application réciproque g^{-1}

g est bijective si et seulement si tout élément (a,b) de $\mathbb{R}^2$ possède exactement un antécédent (x,y) par g dans $\mathbb{R}^2$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et cherchons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x,y) = (a,b)$. On obtient $(x-y, x+y) = (a,b)$ ce qui est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} x - y = a & L_1 \\ x + y = b & L_2 \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne : $x = \frac{1}{2}(a+b)$ et $L_2 - L_1$ donne : $y = \frac{1}{2}(b-a)$.

Alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique antécédent dans $\mathbb{R}^2$ par g qui est $(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(b-a))$. Donc g est bijective et son inverse est définie par

$$g^{-1}(a,b) = (\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(b-a)).$$

Exercice 4 : relations

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par $a\mathcal{R}b$ si et seulement si 4 divise $a^2 - b^2$.

1. Quelles sont les propriétés que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'équivalence ? (on définira chacune d'entre elles).

   $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

2. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   (i) Réflexivité : $\mathcal{R}$ est réflexive si et seulement si $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}a$.
   Il est clair que $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a^2 - a^2 = 0$ et 4 divise 0. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

   (ii) Symétrie : $\mathcal{R}$ est symétrique si et seulement si $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\forall b \in \mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$.
   $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\forall b \in \mathbb{Z}$ on a

   $$a\mathcal{R}b \iff 4 \text{ divise } a^2 - b^2 \iff \exists k \in \mathbb{Z};\ a^2 - b^2 = 4k.$$

   Alors $b^2 - a^2 = 4(-k)$. Il existe donc $k' = -k \in \mathbb{Z}$ tel que $b^2 - a^2 = 4k'$. Donc 4 divise $b^2 - a^2$ et $\mathcal{R}$ est symétrique.

   (iii) Transitivité : $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si
   $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, \forall c \in \mathbb{Z};\ \ (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Longrightarrow a\mathcal{R}c.$
   $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, \forall c \in \mathbb{Z}$, si $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c$ alors 4 divise $a^2 - b^2$ et 4 divise $b^2 - c^2$
   Donc $\exists k_1 \in \mathbb{Z};\ a^2 - b^2 = 4k_1$ et $\exists k_2 \in \mathbb{Z};\ b^2 - c^2 = 4k_2$.
   Donc par addition, $a^2 - c^2 = 4(k_1 + k_2)$. Il existe donc $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $a^2 - c^2 = 4k$. Alors $a\mathcal{R}c$ et $\mathcal{R}$ est transitive.

   $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.