Université de Caen
UFR des Sciences

Année 2020 – 2021

Licence Informatique deuxième année
Mathématiques discrètes
Examen Terminal- seconde session – 23 juin 2021
Durée 2 heures

Aucun document autorisé.
Calculatrices, ordinateurs , tablettes et téléphones portables sont interdits.

Les exercices peuvent être faits dans l'ordre de votre choix. Le barème tiendra en compte de la longueur du sujet. Ne bâclez donc pas les exercices abordés. Prenez soin de bien rédiger et justifier chacune de vos réponses.
La notation prendra en considération la qualité de la rédaction.

Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie réservé à cet usage ; il le cachettera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Sur chacune des copies intercalaires, il portera son numéro de place et numérotera chaque copie.

Exercice 1. Combinatoire – Relations binaires
Dix sportifs d'un même club se retrouve pour préparer une compétition. Chacun possède un niveau selon les performances réalisées dans l'année. Il possède le niveau *Or* s'il a gagné une compétition, le niveau *Argent* s'il a fini deuxième à une compétition, le niveau *Bronze* s'il a fini troisième à une compétition. S'il n'a jamais fini dans les trois premières places, il a le niveau *Non classé*.

Question 1. Soit E l'ensemble des niveaux que peuvent avoir les dix sportifs. Un élément de E attribue donc un niveau à chacun des sportifs. Donnez la cardinalité de E. Vous utiliserez soit le principe des choix successifs, soit une relation sur les produits cartésiens.

Question 2. Soit A un sous-ensemble de E, nous noterons $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Redonnez la définition de $\overline{A}$ et la cardinalité de $\overline{A}$ en fonction de celle de A et de E.

Question 3. Soit A_1 l'ensemble des niveaux que peuvent avoir les dix sportifs lorsque aucun d'entre-eux n'a le niveau *or* et A_2 l'ensemble des niveaux que peuvent avoir les dix sportifs lorsque aucun d'entre-eux n'a le niveau *argent*. Donnez les cardinalités de A_1, A_2. Vous utiliserez soit le principe des choix successifs, soit une relation sur les produits cartésiens.

Déduisez de la question précédente, la cardinalité de $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$.

Question 4. Calculez le cardinal de $A_1 \cap A_2$. Utilisez le principe d'inclusion-exclusion pour calculer $A_1 \cup A_2$.

Question 5. Soit B l'ensemble des niveaux des dix sportifs tels qu'au moins un sportif a le niveau *or* et au moins un sportif a le niveau *argent*. Utilisez la réponse à la question précédente pour déterminer le cardinal de B.
Les questions 6, 7 et 8 peuvent être traitées indépendamment des cinq premières.

Question 6. Montrez que deux sportifs ont le même niveau.
Quel principe utilisez-vous ?

Question 7. Soient S_1 et S_2 deux de ces sportifs. On définit la relation binaire R par

$$S_1 R S_2 \text{ lorsque } S_1 \text{ et } S_2 \text{ ont le même niveau.}$$

Montrez que R est une relation d'équivalence et donnez les classes d'équivalence.

Question 8. Soient S_1 et S_2 deux des sportifs, on définit la relation binaire $\lhd$ par $S_1 \lhd S_2$ lorsque S_1 est non classé et S_2 a une médaille ou que S_2 a une meilleure médaille que S_1. Montrez que $\lhd$ est un ordre strict. Montrez que l'ordre est partiel (c'est-à-dire qu'il n'est pas total).

Exercice 2. Combinatoire – Probabilités
On jette trois fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
On définit une variable aléatoire Z qui prend les valeurs suivantes :

- 10 lorsque l'on a fait 3 six
- 5 lorsque l'on a fait deux six
- 2 lorsque l'on a fait un six
- -2 lorsque l'on ne fait aucun six

Question 1. Définissez E, l'espace de probabilité de l'expérience aléatoire.

Question 2. Donnez la distribution de probabilité sur E.
Soit A un évènement, donnez la probabilité de A, justifiez votre réponse.

Question 3. On considère les évènements suivants

$$\begin{array}{lcl} E_1 & = & \text{nous avons obtenu trois six} \\ E_2 & = & \text{nous avons obtenu deux six} \\ E_3 & = & \text{nous avons obtenu un seul six} \\ E_4 & = & \text{nous n'avons obtenu aucun six} \end{array}$$

Calculez la cardinalité de ces quatre évènements.
Vous devez impérativement justifier vos calculs.

Question 4. Calculez l'espérance de Z.

Question 5. Supposons que Z corresponde au gain d'un joueur, montrez que le jeu n'est pas équitable.

Question 6. Nous souhaitons obtenir un jeu équitable en modifiant le gain lorsque le résultat n'a pas de six. Quelle valeur faut-il mettre ?

Exercice 3. Combinatoire
Il faut impérativement justifier les réponses. Les applications numériques ne sont pas demandées.
On considère la phrase : "VIVENT LES VACANCES !" composée de 21 caractères dont 3 espaces.

Question 1. Combien y a-t-il d'anagrammes de cette phrase ?

Question 2. Combien y a-t-il d'anagrammes qui ne commencent pas et ne finissent pas par un espace ?

Question 3. Combien y a-t-il d'anagrammes qui ne contiennent ni 3V successifs ni 3E successifs ?

Exercice 4. Fonctions

Question 1. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
Quand dit-on que f est une application injective ? surjective ? bijective ?

Question 2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, x + z)$.
Que peut-on dire de f ?

Question 3. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$.
Que peut-on dire de f ?

Question 4. Montrer que la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (2y - x, x + y)$ est une fonction bijective dont on donnera la fonction réciproque.

Exercice 5. Arbres binaires et induction

Nous noterons $h(A)$ la hauteur d'un arbre binaire A et $N(A)$ son nombre de nœuds.

Question 1. Redonnez le schéma d'induction de $\mathcal{L}$, l'ensemble des arbres localement complets.

Question 2. Soit $A = (\cdot, B, C)$ un arbre de $\mathcal{L}$ avec B et C différents de l'arbre vide.
Redonnez la relation reliant $h(A)$, $h(B)$ et $h(C)$.
En déduire que l'on a $h(B) + h(C) \geq h(A) - 1$.

Question 3. Montrez en utilisant le schéma d'induction sur $\mathcal{L}$ que tout arbre A de $\mathcal{L}$ vérifie la propriété $N(A) \geq 2h(A) + 1$.

Exercice 6. Ensembles et applications

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On rappelle que $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E. Soit f une application définie par

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ & & X & \longmapsto & (X \cap A\,,\, X \cap B). \end{array}$$

Question 1. On suppose pour cette question **uniquement** que $E = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 2\}$.

(a). Compléter le tableau suivant avec l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ et les valeurs de f pour chaque élément de $\mathcal{P}(E)$

$x \in \mathcal{P}(E)$	$f(x)$
$\emptyset$	$(\emptyset, \emptyset)$
$\{0\}$	$(\{0\}, \emptyset)$
$\{0, 1, 2\}$	$(\{0, 1\}, \{1, 2\})$

(b). Cette fonction est-elle injective ? surjective ?

Question 2. Pour la suite de l'exercice on considère E, A et B quelconques tels que $A \subset E$ et $B \subset E$.

(a). Donner les valeurs de $f(\emptyset)$ et de $f(\overline{A \cup B})$.

(b). Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

(c). Le couple $(\emptyset, B)$ possède-t-il un antécédent par f ?

(d). Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 7. Ensembles et applications

Soit $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ muni de l'addition et de la multiplication définies sur $\mathbb{Z}$. Soit X un ensemble quelconque et A et B deux parties de X. La fonction indicatrice de A est la fonction de X vers $\mathcal{B}$ suivante :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Question 1. Que peut-on dire des ensembles A et B si $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Question 2. Vérifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\bar{A}}(x) &= 1 - \mathbf{1}_A(x) \\ \mathbf{1}_{A \cap B}(x) &= \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x) \end{aligned}$$

Question 3. On suppose que les ensembles A et B sont **disjoints**.
Montrer que

$$\mathbf{1}_{A \cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x).$$

Question 4. On suppose maintenent que A et B sont **quelconques**.
Montrer que $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$ et que A et $\overline{A} \cap B$ sont deux ensembles disjoints.

Question 5. Déduire des questions précédentes l'expression suivante

$$\mathbf{1}_{A \cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x).$$