Université de Caen Normandie
UFR des Sciences

Année 2021 – 2022
Licence Informatique deuxième année

Mathématiques discrètes

Contrôle continu 1 – jeudi 21 octobre de 9h45 à 10h45

Correction et Barème

Prenez soin de bien rédiger et justifier chacune de vos réponses.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1 ***(5 points)*** **: Induction sur les arbres binaires.**

Question 1. Redonnez le schéma d'induction de l'ensemble des arbres binaires.

1 point : 0,5 point pour chaque propriété.

Le schéma d'induction est le suivant

i) L'arbre vide est un arbre binaire

ii) Si A_g et A_d sont deux arbres binaires, alors $(\cdot, A_g, A_d)$ est un arbre binaire.

Question 2. On définit inductivement une application qui attribue une valeur $V(A)$ à tout arbre binaire A.

i) Si A est l'arbre vide alors $V(A) = 0$ et si A est l'arbre racine alors $V(A) = 1$.

i) soit $A = (\cdot, A_g, A_d)$ un arbre binaire différent de l'arbre vide et de l'arbre racine. $V(A) = |V(A_g) - V(A_d)|$.

Montrez par induction que tout arbre binaire A vérifie $V(A) = 0$ ou $V(A) = 1$

4 point : 0.5 point pour la pose de $P(A)$, 1 point pour l'initiation, 2 points pour l'induction et 0.5 point pour la conclusion.

Soit $\mathcal{P}(A)$ la propriété : $V(A) = 0$ ou $V(A) = 1$.
Montrons par induction que pour tout arbre binaire A, $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

i) Si A est l'arbre vide alors par définition $V(A) = 0$. Donc $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

ii) Soient A_g et A_d deux arbres binaires. Supposons $\mathcal{P}(A_g)$ et $\mathcal{P}(A_d)$ sont vraies. Soit $A = (., A_g, A_d)$, montrons que $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

Par hypothèse d'induction, $\mathcal{P}(A_g)$ est vraie donc $V(A_g) = 0$ ou $V(A_g) = 1$. De même $\mathcal{P}(A_d)$ est vraie donc on a $V(A_d) = 0$ ou $V(A_d) = 1$. On distingue quatre cas :

Cas 1 : $V(A_g) = 0$ **et** $V(A_d) = 0$. Par définition $V(A) = |V(A_g) - V(A_d)| = |0 - 0| = 0$ et donc $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

Cas 2 : $V(A_g) = 0$ **et** $V(A_d) = 1$. Par définition $V(A) = |V(A_g) - V(A_d)| = |0 - 1| = 1$ et donc $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

Cas 3 : $V(A_g) = 1$ **et** $V(A_d) = 0$. Par définition $V(A) = |V(A_g) - V(A_d)| = |1 - 0| = 1$ et donc $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

Cas 4 : $V(A_g) = 1$ **et** $V(A_d) = 1$. Par définition $V(A) = |V(A_g) - V(A_d)| = |1 - 1| = 0$ et donc $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

Dans tout les cas, $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

— D'après le principe d'induction, on en déduit que pour tout arbre binaire A, $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

Exercice 2 ***(6.5 points)*** **: Injection, surjection, bijection.**
Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B.

Question 1. Quand dit-on que f est une application injective ? surjective ? bijective ?

2 points

— f est injective si et seulement si tout élément b de B a **au plus** un antécédent par f dans A.

— f est surjective si et seulement si tout élément b de B a **au moins** un antécédent par f dans A.

— f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Question 2. On définit l'application f par

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) & \mapsto & (x + z,\ y + z) \end{array}$$

Montrer que f n'est pas injective. Est-elle surjective ? bijective ?

2.5 points : 1 point pour la non injectivité, 1 point pour la surjectivité et 0.5 pour la non bijcetivité

— On remarque que $f(1, 1, 1) = \mathbf{(2,\ 2)} = f(2, 2, 0)$. Par conséquent $\mathbf{(2,\ 2)}$ possède au moins deux antécédents. Donc f n'est pas injective.

— Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, nous avons $f(a, b, 0) = (a, b)$. Par conséquent (a, b) a au moins un antécédent $(x, y, z) = (a, b, 0)$ par f. f est donc surjective.

— f n'est pas bijective car elle n'est pas injective.

Question 3. On définit l'application g par

$$\begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & (2y - x,\ x + y) \end{array}$$

Montrer que g est une application bijective et déterminer l'application réciproque de g.

2 points : 1 point pour la preuve de la bijectivité de g, 1 point pour la réciproque de g

g est bijective si et seulement si tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$ possède exactement un antécédent (x, y) par g dans $\mathbb{R}^2$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et cherchons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x, y) = (a, b)$. On obtient $(2y - x, x + y) = (a, b)$ ce qui est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} -x + 2y = a & L_1 \\ x + y = b & L_2 \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne : $y = \frac{1}{3}(a+b)$ et en remplaçant dans L_2, on a $x = \frac{1}{3}(2b-a)$.
Ainsi chaque $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}^2$ par g qui est $(\frac{1}{3}(2b-a), \frac{1}{3}(a+b))$. Donc g est bijective et son inverse est définie par

$$g^{-1}(a,b) = \frac{1}{3}(2b-a, a+b).$$

Exercice 3 ***(5.5 points)*** **: Relations d'ordre.**

Question 1. Redonnez les propriétés que doit vérifier une relation R pour être une relation d'ordre partiel large.

1 point

R est une relation d'ordre partiel large si R est réflexive, antisymétrique et transitive.

Question 2. Redonnez les propriétés que doit vérifier une relation R pour être une relation d'ordre partiel stricte.

1 point

R est une relation d'ordre partiel strict si R est irréflexive et transitive.

Soit E un ensemble fini de cardinalité $n \geq 2$. On définit sur $P(E)$ la relation binaire R par

$$A \; R \; B \text{ lorsque } A \subset B.$$

Question 3. Montrez que R est une relation d'ordre. Précisez si l'ordre est large ou strict.

2.5 points : 2 pour avoir vérifié que R est une relation d'ordre et 0.5 pour l'ordre large

(i) Réflexivité : R est réflexive si et seulement si $\forall A \in P(E),\ A\,R\,A$.
Soit $A \in P(E)$, il est clair que $A \subset A$. Donc R est réflexive.

(ii) Antisymétrie : R est symétrique si et seulement si ,

$$\forall A \in P(E), \forall B \in P(E), \quad (A\,R\,B \;\wedge\; B\,R\,A) \Longrightarrow A = B.$$

Soient $A, B \in P(E)$, supposons $A\,R\,B \wedge B\,R\,A$. Par définition de R, il vient $A \subset B \wedge B \subset A$ et donc $A = B$. Par conséquent R est antisymétrique.

(iii) Transitivité : R est transitive si et seulement si

$$\forall A \in P(E), \forall B \in P(E), \forall C \in P(E), \quad (A\,R\,B \;\wedge\; B\,R\,C) \Longrightarrow A\,R\,C.$$

Soient $A, B, C \in P(E)$, supposons $A\,R\,B \;\wedge\; B\,R\,C$. Par définition de R, il vient $A \subset B \;\wedge\; B \subset C$, ce qui entraîne $A \subset C$.
Alors R est bien transitive.

R est donc une relation d'ordre large.

Question 4. Montrez que l'ordre n'est pas total.

1 point

Contre exemple : Soit $E = \{1,2,3\}$, donc $P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Soit $A = \{1,3\}$ et $B = \{2,3\}$. On remarque que A et B sont deux éléments de $P(E)$ et qu'on a ni $A \subset B$ ni $B \subset A$. Donc on a ni $A\,R\,B$ ni $B\,R\,A$. L'ordre n'est donc pas total.

Exercice 4 *(4 points)* Combinatoire
Des parents veulent offrir à leur enfant des bandes dessinées pour son anniversaire parmi les 25 nouveautés. Celles-ci sont rangées par catégories :

- humour – 7 nouveautés
- manga – 4 nouveautés
- comics – 5 nouveautés
- science fiction – 4 nouveautés
- aventure – 5 nouveautés

On étudie le nombre de possibilités pour chacun des cas suivants :

1. Supposons que ces parents peuvent acheter autant de livres qu'ils le souhaitent, mais au moins 1 (ils peuvent acheter un livre, ou deux livres, ou trois livres ...).
   Combien de possibilités ont-ils ?

   1 point **Première méthode (la plus rapide) :**
   Soit $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$. Un achat de k livres parmi les 25 correspond à prendre une partie de k éléments de Ω avec $1 \leq k \leq 25$. Le nombre total de possibilités d'achats quel que soit le nombre de livres k achetés est égal au nombre de parties de Ω. D'après le cours on sait que $\text{Card}(P(\Omega)) = 2^{25}$. Soit maintenent

   A "acheter au moisn un livre". Donc

   $$\text{Card}(A) = \underbrace{\text{Card}(P(\Omega))}_{\text{Tout les cas possibles}} - \underbrace{\text{Card}(\overline{A})}_{\text{le cas contraire}} .$$

   $\text{Card}(\overline{A}) = 1$ car le contraire d'acheter au moins un livre est ne rien acheter ce qui correspond à choisir une partie de Ω à 0 élément. Donc on a une seule possibilité (c'est l'ensemble $\emptyset$). En résumé, le nombre de possibilités pour acheter au moins un livre est $\text{Card}(A) = \mathbf{2^{25} - 1}$.

   Deuxième méthode :
   Au total il y a 25 livres différents. Acheter au moins un livre c'est choisir 1 livre parmi 25 donc C_{25}^1 ou 2 livres parmi 25 donc C_{25}^2 ou, ..., ou 25 livres parmi 25 donc C_{25}^{25}. Alors on a $C_{25}^1 + C_{25}^2 + \ldots + C_{25}^{25}$ possibilités pour acheter au moins un livre. Mais $C_{25}^1 + C_{25}^2 + \ldots + C_{25}^{25} = \sum_{k=0}^{25} C_{25}^k - C_{25}^0$. D'après le cours on sait que $\sum_{k=0}^{25} C_{25}^k = 2^{25}$. Donc le nombre de possibilités pour acheter au moins un livre est $\mathbf{2^{25} - C_{25}^0 = 2^{25} - 1}$.

2. S'ils achètent un livre par catégorie combien ont-ils de possibilités ?

   1 point
   Il s'agit de choisir un livre dans la catégorie humour avec 7 possibilités **et** choisir un livre dans la catégorie manga avec 4 possibilités **et** choisir un livre dans la catégorie comics avec 5 possibilités **et** choisir un livre dans la catégorie science fiction avec 4 possibilités **et** choisir un livre dans la catégorie aventure avec 5 possibilités. D'après le principe des choix successifs, on a $7 \times 4 \times 5 \times 4 \times 5 = 2800$ possibilités

3. Ils décident d'acheter exactement deux livres.
   Combien y-a-t-il de possibilités d'avoir les deux livres dans la même catégorie ?

   1 point
   Il s'agit de choisir 2 livres dans la catégorie humour parmi 7, donc C_7^2 possibilités **ou** choisir 2 livres dans la catégorie manga parmi 4, donc C_4^2 possibilités **ou** choisir 2 livres

dans la catégorie comics parmi 5, donc C_5^2 possibilités **ou** choisir 2 livres dans la catégorie science fiction parmi 4, donc C_4^2 possibilités **ou** choisir 2 livres dans la catégorie aventure parmi 5, donc C_5^2 possibilités. Alors on a $C_7^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_4^2 + C_5^2$ possibilités d'acheter deux livres dans la même catégorie.

4. (bonus) Ils décident de prendre 5 livres dont au moins 1 livre dans la catégorie humour. Combien de possibilités ont-ils ?

   1 point **Première Méthode (la plus rapide) :**

   Soit B_1 l'ensemble des combinaisons de 5 livres parmi les 25 livres.
   Nous avons $card(B_1) = C_{25}^5$.
   B_2 l'ensemble des combinaisons de 5 livres parmi les 18 livres qui ne sont pas dans la catégorie humour.
   Il vient $card(B_2) = C_{18}^5$.
   B_3 l'ensemble recherché est le complémentaire de B_2 dans B_1, nous avons donc

$$card(B_3) = card(B_1) - card(B_2) = C_{25}^5 - C_{18}^5.$$

   Deuxième méthode
   on a 5 cas :

   - Acheter exactement 1 livre dans la catégorie humour : donc on choisit 1 livre parmi les 7 nouveautés humour et les 4 autres livres parmi les $25 - 7 = 18$ livres dans des catégories autres que humour. Alors on a $C_7^1 \times C_{18}^4$.
   - Acheter exactement 2 livres dans la catégorie humour : donc on choisit 2 livres parmi les 7 nouveautés humour et les 3 autres livres parmi les $25 - 7 = 18$ livres dans des catégories autres que humour. Alors on a $C_7^2 \times C_{18}^3$.
   - Acheter exactement 3 livres dans la catégorie humour : donc on choisit 3 livres parmi les 7 nouveautés humour et les 2 autres livres parmi les $25 - 7 = 18$ livres dans des catégories autres que humour. Alors on a $C_7^3 \times C_{18}^2$.
   - Acheter exactement 4 livres dans la catégorie humour : donc on choisit 4 livres parmi les 7 nouveautés humour et le cinquième livre parmi les $25 - 7 = 18$ livres dans des catégories autres que humour. Alors on a $C_7^4 \times C_{18}^1$.
   - Acheter exactement 5 livres dans la catégorie humour : donc on a $C7^5$.

   Au total on a $C_7^1 \times C_{18}^4 + C_7^2 \times C_{18}^3 + C_7^3 \times C_{18}^2 + C_7^4 \times C_{18}^1 + C_7^5$.