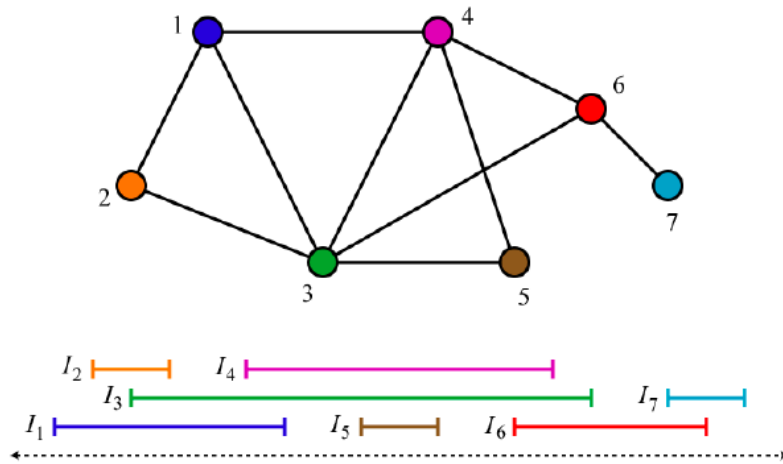


1. Graphes d'intervalles (cas général)

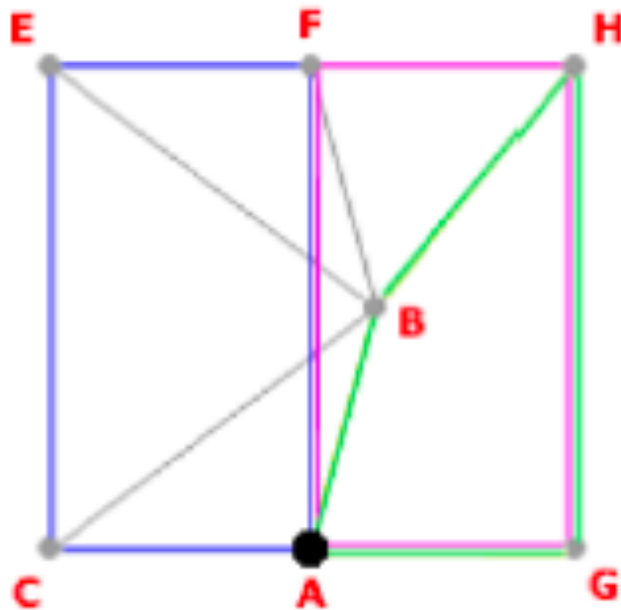
On construit un graphe G à partir des intervalles de la droite réelle I_1, \dots, I_n , où les sommets de G sont numérotés de 1 à n . Dans un **graphe d'intervalles**, il existe une arête entre les sommets i et j , $i \neq j$, si et seulement si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.



Autrement dit, deux sommets sont reliés si et seulement si les deux intervalles correspondants se chevauchent.

2. Modélisation du problème à résoudre sous forme d'un multi graphe

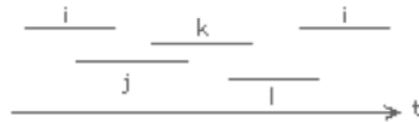
- Sommets \rightarrow les 7 personnes
- Arête $(i, j) \rightarrow$ la personne i dit avoir rencontré la personne j
- Dessin du graphe



Les carrés possibles (pour identifier la personne qui ment)

Pour découvrir laquelle des 7 femmes est venue plus d'une fois au château, il faut rechercher dans le graphe des cycles reliant quatre sommets, sans diagonale. En effet, un tel carré $ijkl$ sans diagonale indique que l'une des quatre suspectes est nécessairement venue plus d'une fois au château.

Pour s'en convaincre, on peut faire le petit schéma temporel ci-dessous :



On voit que i a dû venir deux fois au château pour qu'un cycle sans diagonale apparaisse dans le graphe.

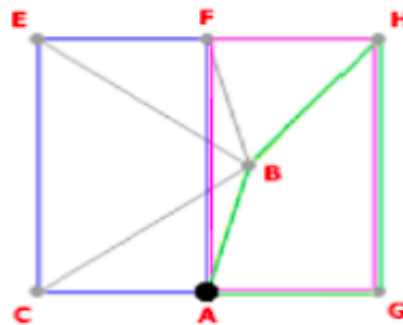
Rq 1. Dans un carré avec une seule diagonale, les rencontres sont possibles en venant une seule fois.

Soient (i, j, k, l) avec diagonale (i, k)



Rq 2. Un carré avec 2 diagonales forme une 4-clique ; les rencontres sont aussi possibles en venant une seule fois : tous les intervalles se chevauchent 2 à 2.

Conclusion



Ce graphe comporte en tout 3 carrés sans diagonales.

- A, C, E, F (bleu)
- A, G, H, F (rose)
- A, B, H, G (vert)

Le seul sommet appartenant à chacun de ces 3 carrés est le sommet A.

→ C'est donc Ann qui ment.