

Mathématiques discrètes

Contrôle continu 1 – jeudi 21 octobre de 9h45 à 10h45

Aucun document n'est autorisé
Calculatrices et objets connectés sont interdits
Les téléphones doivent être éteints au fond des sacs.

**Prenez soin de bien rédiger et justifier chacune de vos réponses.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.**

Exercice 1 : Induction sur les arbres binaires.

Question 1. Redonnez le schéma d'induction de l'ensemble des arbres binaires.

Question 2. On définit inductivement une application qui attribue une valeur $V(A)$ à tout arbre binaire A .

- i) Si A est l'arbre vide alors $V(A) = 0$ et si A est l'arbre racine alors $V(A) = 1$.
- i) soit $A = (\cdot, A_g, A_d)$ un arbre binaire différent de l'arbre vide et de l'arbre racine.
 $V(A) = |V(A_g) - V(A_d)|$.

Montrez par induction que tout arbre binaire A vérifie $V(A) = 0$ ou $V(A) = 1$

Exercice 2 : Injection, surjection, bijection.

Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B .

Question 1. Quand dit-on que f est une application injective ? surjective ? bijective ?

Question 2. On définit l'application f par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto (x + z, y + z) \end{aligned}$$

Montrer que f n'est pas injective. Est-elle surjective ? bijective ?

Question 3. On définit l'application g par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (2y - x, x + y) \end{aligned}$$

Montrer que g est une application bijective et déterminer l'application réciproque de g .

Exercice 3 : Relations d'ordre.

Question 1. Redonnez les propriétés que doit vérifier une relation R pour être une relation d'ordre partiel large.

Question 2. Redonnez les propriétés que doit vérifier une relation R pour être une relation d'ordre partiel stricte. Soit E un ensemble fini de cardinalité $n \geq 2$.

On définit sur $P(E)$ la relation binaire R par

$$A R B \text{ lorsque } A \subset B.$$

Question 3. Montrez que R est une relation d'ordre. Précisez si l'ordre est large ou strict.

Question 4. Montrez que l'ordre n'est pas total.

Exercice 4 Combinatoire

Des parents veulent offrir à leur enfant des bandes dessinées pour son anniversaire parmi les 25 nouveautés. Celles-ci sont rangées par catégories :

- humour – 7 nouveautés
- manga – 4 nouveautés
- comics – 5 nouveautés
- science fiction – 4 nouveautés
- aventure – 5 nouveautés

On étudie le nombre de possibilités pour chacun des cas suivants :

1. Supposons que ces parents peuvent acheter autant de livres qu'ils le souhaitent, mais au moins 1 (ils peuvent acheter un livre, ou deux livres, ou trois livres ...).
Combien de possibilités ont-ils ?
2. S'ils achètent un livre par catégorie combien ont-ils de possibilités ?
3. Ils décident d'acheter exactement deux livres.
Combien y-a-t-il de possibilités d'avoir les deux livres dans la même catégorie ?
4. (bonus) Ils décident de prendre 5 livres dont au moins 1 livre dans la catégorie humour.
Combien de possibilités ont-ils ?