L3-INFO – INF6B
Structures discrètes
2021-2022

Semaine 9 -- Parcours Eulériens et Parcours -Hamiltoniens

1. Parcours Eulériens

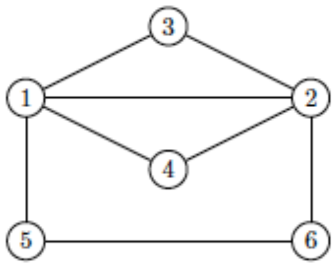
1.1 Définitions

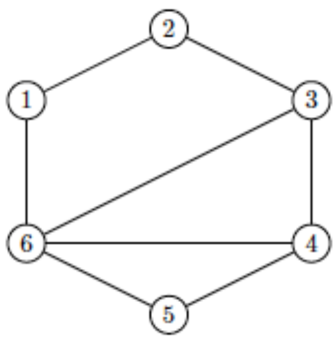
Soit G = (V, E) un graphe connexe non-orienté.
Un cycle eulérien de G est un cycle passant une fois et une seule par chacune des arêtes de E.
Une chaîne eulérienne de G est une chaîne passant une fois et une seule par chacune des arêtes de E.
G est un graphe eulérien s’il possède une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

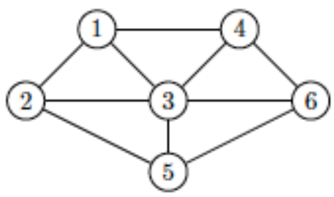
Autre vison. Plus simplement, on peut dire qu’un graphe est Eulérien s’il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

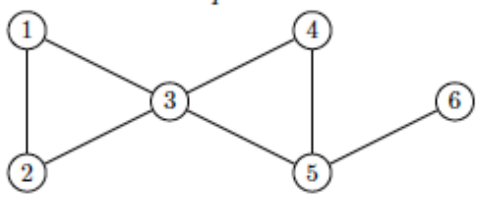
Exo. Pour chacun des quatre graphes ci-dessous,

- le graphe possède-t-il ou non un parcours eulérien ?
- si oui, indiquer s’il s’agit d’un cycle ou d’une chaîne.


Graphe 1


Graphe 2


Graphe 3


Graphe 4

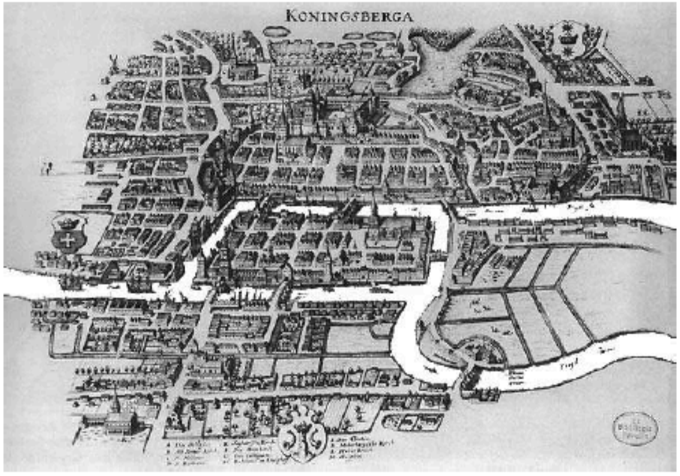
Applications : distribution du courrier, collecte des ordures ménagères

1.2 Le théorème d’EULER donne une **CNS** d’existence d’un parcours eulérien.

Soit G = (V, E) un graphe connexe **non-orienté**.
- si tous les sommets de G sont de degré pair, alors le parcours est un cycle
- si seuls 2 sommets (x, y) sont de degré impair, alors le parcours est une chaîne de x à y (ou de y à x)
- dans tous les autres cas, il n’existe pas de parcours eulérien de G.

1.3 Genèse

En 1652, la ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) possède sept ponts enjambant la Pregel, qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphof.

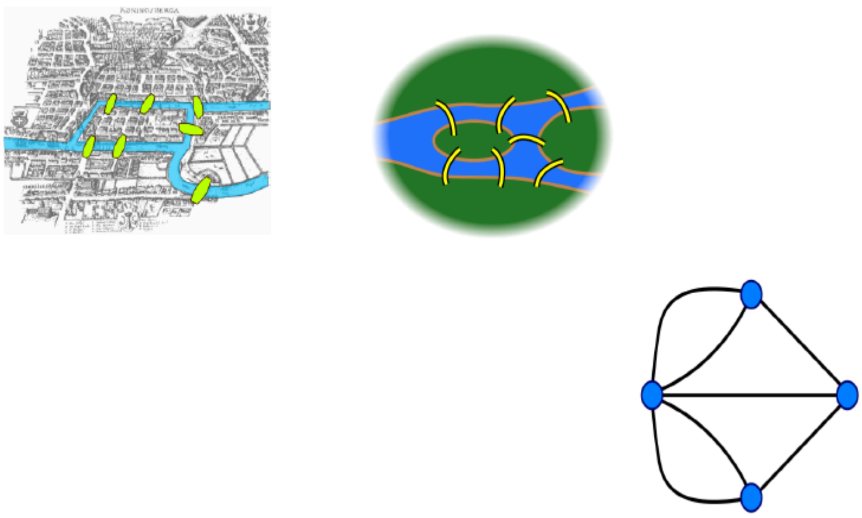


Königsberg en 1652

Au cours d'une promenade, est-il possible de passer sur tous les ponts de la ville une et une seule fois ?

Un article du mathématicien suisse Leonhard Euler, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 (puis publié en 1741) traite du problème des sept ponts de Königsberg (voir ci-dessous).

Leonhard Euler fut le premier à montrer que ce problème particulier n'avait pas de solution, en utilisant *pour la première fois la notion de graphe*. La preuve du théorème d'Euler (cas général) a été publiée par Carl Hierholzer en 1873.



Les 7 ponts de Königsberg

L'algorithme suivant permet de calculer un cycle eulérien dans un graphe G initialement connexe et sans sommet de degré impair :

Algorithm 1 CycleEulérien(G, x)

Require: un graphe G sans sommet de degré impair et x un sommet de G.
Ensure: une liste $(x, x_2, \ldots, x_k, x)$ de sommets de G formant un cycle eulérien.

$A \leftarrow$ ensemble des sommets adjacents à x dans G.
if $A = \emptyset$ **then**
  return (x)
else
  $C = (x = y_1, \ldots, y_\ell = x) \leftarrow$ un cycle quelconque d'origine x dans G.
  supprimer les arêtes de C dans G.
  $R \leftarrow ()$
  for $i = 1$ à ℓ **do**
    $R \leftarrow R \cdot$ CycleEulérien(G, y_i)
  end for
  return R
end if

L'algorithme suivant, quand à lui, permet de calculer une chaîne eulérienne dans un graphe G initialement connexe et avec exactement deux sommets x et y de degré impair :

Algorithm 2 ChaîneEulérienne(G, x, y)

Require: un graphe G ayant deux sommets de degré impair x et y.
Ensure: une liste $(x, x_2, \ldots, x_k)$ de sommets de G formant une chaîne eulérienne.

$C = (x = y_1, \ldots, y_\ell) \leftarrow$ une chaîne quelconque d'origine x et d'arrivée y dans G.
supprimer les arêtes de C dans G.
$R \leftarrow ()$
for $i = 1$ à ℓ **do**
  $R \leftarrow R \cdot$ CycleEulérien(G, y_i)
end for
return R

2. Problème du Postier Chinois

Ce problème consiste à trouver un cycle eulérien de poids minimal. Ce problème (étudié par le mathématicien chinois Meigu Guan en 1962) modélise la tournée d'un facteur devant effectuer le plus efficacement possible la distribution du courrier en passant au moins une fois par chaque rue de son secteur (et revenir à son point de départ).

Calcul de la solution optimale du problème du Postier Chinois

Soit G = (V, E, w) une graphe non orienté connexe valué.

1. Soit V' l'ensemble des sommets de degré impair[1] du graphe G.
2. Soit G' le graphe complet ayant comme ensemble de sommets V' et tel que chaque arête (u, v) de G' ait comme poids (w') la valeur du plus court chemin (dans G) entre u et v.
3. Soit M un couplage parfait de poids minimum de G' (selon w'). [2]
4. Construire le multi-graphe G'' à partir du graphe initial G de la façon suivante : Pour chaque arête (u, v) du couplage M, ajouter (au graphe G) chaque arête appartenant au plus court chemin (dans G) de u à v.
5. Rechercher un cycle eulérien de G'' (en effet, tout sommet de G'' est de degré pair)

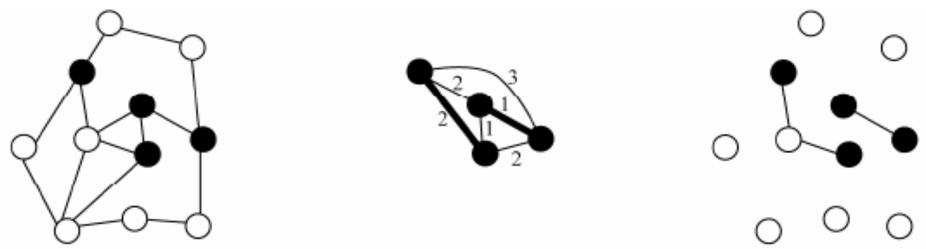
[1] Il y en a obligatoirement un nombre pair.
[2] En utilisant l'algorithme d'EDMONDS.

Algorithme 12 : PostierChinois

Entrées : le graphe $G = (X, A)$, un cout $c(xy)$ réel positif associé à chaque arête xy
Sorties : un cycle μ passant au moins une fois par chaque arête du graphe tel que μ soit de coût minimum

si *chaque sommet de* G *est de degré pair* **alors**
  // G est eulerien
  $\mu \leftarrow CycleEulerien(G)$
  retourner μ
// G n'est pas eulérien, il faut s'occuper des
// sommets de degré impair pour le "rendre eulérien"
$Impairs \leftarrow \{x \in X | x$ est de degré impair$\}$
soit G' une clique ayant comme ensemble de sommets l'ensemble Impairs
pour chaque $x, y \in Impairs$ **faire**
  $\mu(x, y)$ est un plus court chemin de x à y dans G
  $c'(x, y) \leftarrow longueur(\mu(x, y))$
calculer un couplage parfait M de G', tel que M soit de coût minimum pour la fonction de coût c'
pour chaque *arête* xy *du couplage* M **faire**
  dupliquer, dans G, le chemin $\mu(x, y)$
  // on duplique chaque arête de $\mu(xy)$,
  // donc G devient un multi-graphe
$\mu \leftarrow CycleEulerien(G)$
retourner μ

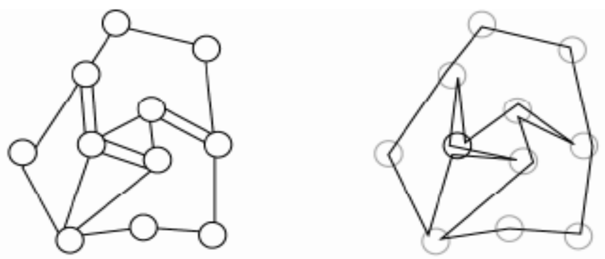
Exemple #1.



graphe G avec 4 sommets de degré impair (en noir)

graphe H en supposant que toutes les distances dans G sont unitaires; le couplage de coût minimum est en traits épais

arêtes à rajouter dans G



graphe G avec les arêtes rajoutées; tous les sommets sont de degré pair

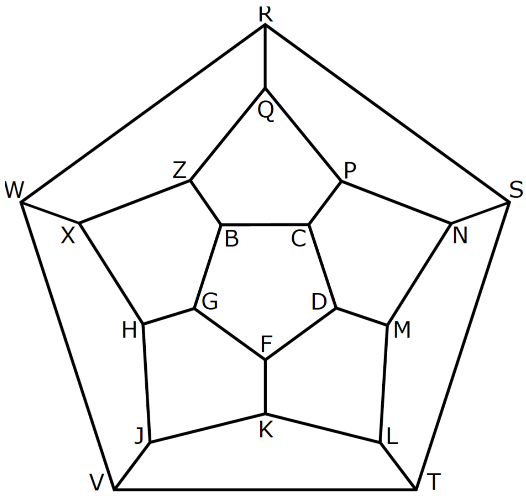
tournée optimale du problème du postier chinois

3. Parcours hamiltoniens

Définitions. Soit G = (V, E) un graphe connexe non-orienté.
Un parcours hamiltonien de G est une chaine/chemin passant une fois et une seule par chacun des sommets de V.

Un graphe G connexe est dit hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien.

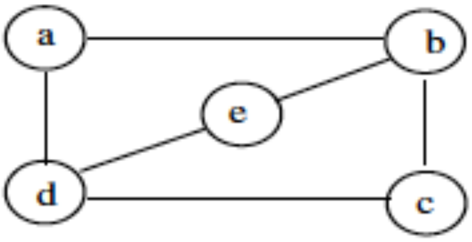

Lord W. R. Hamilton (1805-1865)



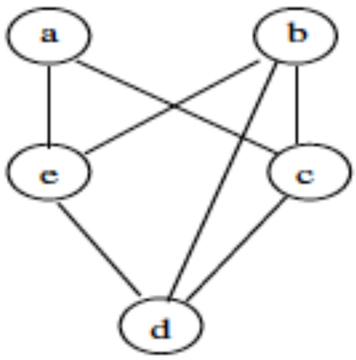
Le dodécaèdre de Lord Hamilton

Déterminer l'existence d'un parcours hamiltonien est un problème difficile. Pour s'en convaincre, traiter le graphe #3 ci-dessous. Contrairement au cas eulérien, il n'existe pas de caractérisation simple.

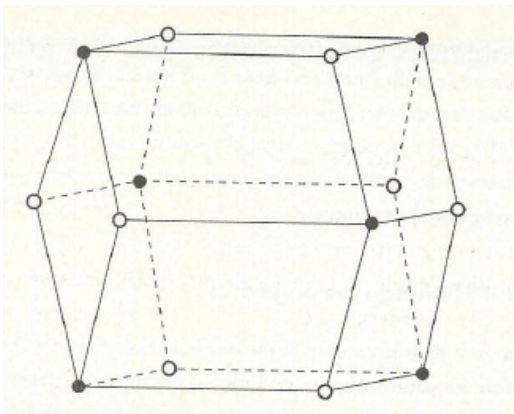
Exo. Les graphes ci-dessous possèdent-t-il (ou non) un parcours hamiltonien ?



Graphe #1



Graphe #2


Graphe #3

Quelques propriétés sous forme de CS *(pour le cas eulérien, nous avions une **CNS**)*

- Soit x un sommet de degré 2. Alors les deux arêtes incidentes à x appartiendront à tout cycle hamiltonien.
- Les graphes complets *K_n* possèdent plusieurs cycles hamiltoniens → *(n-1)! si le sommet de départ est fixé.*
- ***Théorème (Ore).*** Soit G = (V, E) un graphe d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire {x, y} de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.
- ***Théorème (Dirac).*** Soit G = (V, E) un graphe d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet x de G, on a degré(x) $\geq n/2$, alors G est hamiltonien.
- ***Remarque.*** La théorème de *Dirac* peut être vu comme un corollaire du théorème de *Ore*. En effet, il suffit de remarquer que pour 2 sommets x et y qui ne sont pas adjacents, $d(x) + d(y) \geq n/2 + n/2 = n$. Puis, appliquer le théorème de *Ore*.

Exemple du parcours du cavalier sur un échiquier : *« déterminer un trajet parcouru par un cavalier qui part d'une case quelconque de l'échiquier et qui visite toutes les cases une et une seule fois. On exige parfois le retour sur la première case ».*

https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_du_cavalier

https://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe_hamiltonien#/media/File:Knight%27s_tour_anim_2.gif

4. Problème du Voyageur de Commerce (PVC)

Définition. Le Problème du Voyageur de Commerce (PVC) consiste à déterminer un cycle hamiltonien de coût minimal.

Ce problème est souvent formulé comme celui d'un voyageur de commerce qui doit visiter un ensemble de clients situés dans des villes différentes.

- Le graphe a pour sommets l'ensemble des villes des clients et le domicile du représentant.
- Le poids d'une arête $w(i, j)$ représente le coût pour se déplacer de la ville i à la ville j. Ce coût peut être lié à la distance entre les 2 villes, au temps de trajet nécessaire et/ou à d'autres grandeurs.
- Le voyageur doit partir de son domicile (sommet source), puis visiter une fois et une seule chaque client, et revenir à son domicile.
- Evidemment, on cherche à minimiser le poids/coût d'un tel parcours.

Applications. Le PVC permet de modéliser de nombreux problèmes dans des domaines aussi différents que la constitution de tournées (bus scolaires, collecte du lait, distribution de colis, …), l'ordonnancement de production, le câblage de circuits, la synthèse de circuits logiques, …

En savoir plus :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_du_voyageur_de_commerce

https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem

http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/

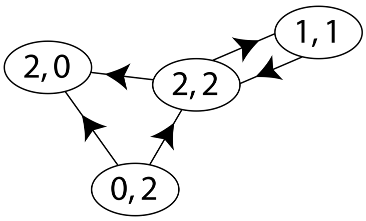
Annexe : Théorème d’EULER dans le cas d’un graphe orienté

Rappel : dans le cas d'un graphe orienté, on distingue :

a) le degré entrant d’un sommet s qui est le nombre d'arcs arrivant en s, noté deg-(s)

b) le degré sortant d’un sommet s qui est le nombre d'arcs partant de s, noté deg+(s)

Ci-dessous, un exemple de graphe orienté où chaque sommet est étiqueté par son degré entrant et son degré sortant :

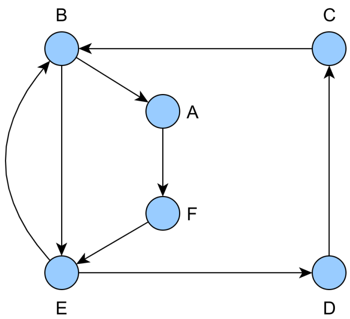


Graphe #1

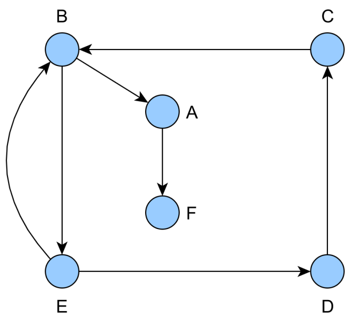
Q1. Dans le cas d’un graphe non-orienté, rappeler la relation entre la somme des degrés des sommets et le nombre d’arêtes.

Q2. Dans le cas d’un graphe orienté, proposer une relation analogue entre degrés sortants, degré entrants et nombre d’arcs.

On considère aussi les 2 graphes orientés ci-dessous :



Graphe #2



Graphe #3

Q3. Les graphes #1, #2 et #3 possèdent-ils un parcours eulérien ?

Soit G = (S, A) un graphe connexe orienté

Q4. Compléter : G possède un circuit eulérien ssi ….

Q5. Compléter : G possède un chemin eulérien entre le sommet x et le sommet y ssi ….