Calcul Scientifique

Cours 6: Dérivée et gradient de fonction

Alexis Lechervy

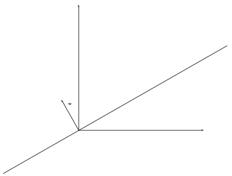
Sommaire

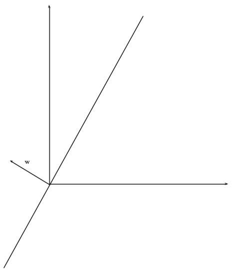
Droite

Définition d'une droite

Pour définir une droite, il nous faut un vecteur w orthogonale à la droite et un biais b correspondant au décalage de la droite à la droite parallèle passant par l'origine du repère.

Influence du vecteur normale w





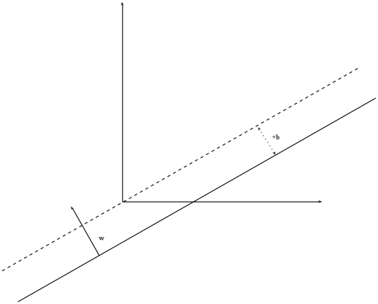
Remarque : il y a une infinité de vecteur orthogonaux à la droite qui conviennent tous.

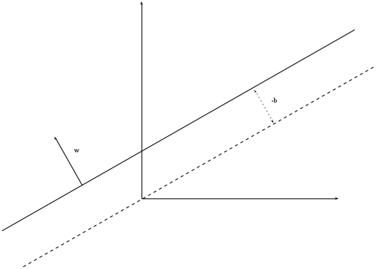
Droite

Définition d'une droite

Pour définir une droite, il nous faut un vecteur w orthogonale à la droite et un biais b correspondant au décalage de la droite à la droite parallèle passant par l'origine du repère.

Influence du biais b





Droite

Formulation mathématique

Soit le vecteur w et le biais b. Un point m appartient à la droite si $\langle w, m\rangle + b = 0$.

Équation en 2D

Soit le vecteur $w = [w_1, w_2]$ et le biais b. Un point $m = [x, y]$ appartient à la droite si et seulement si

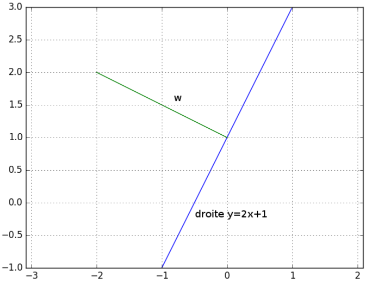
$$\begin{aligned}
\langle w, m\rangle + b &= 0 && (1)\\
w_1 x + w_2 y + b &= 0 && (2)\\
w_2 y &= -w_1 x - b && (3)\\
y &= -\frac{w_1}{w_2} x - \frac{b}{w_2} && (4)\\
y &= a' x + b' \text{en posant } a' = \frac{-w_1}{w_2} \text{ et } b' = \frac{-b}{w_2} && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}$$

Retrouver un vecteur normale à la droite en 2D

Comment retrouver un vecteur et le biais ?

Soit une droite définis par $y = a'x + b'$, il existe une infinité de vecteur w orthogonale à la droite, prenons en un en particulier, par exemple celui dont la coordonnée du second axe vaut 1. On a d'après le slide précédent :

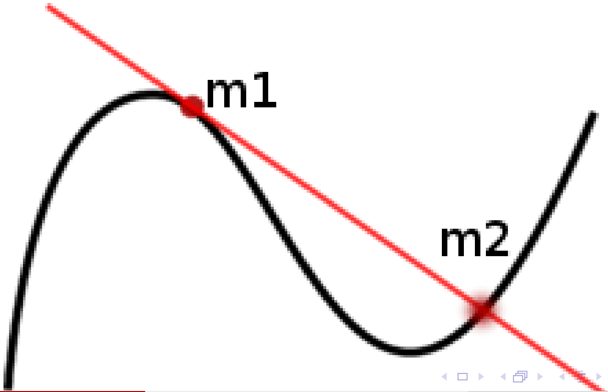
$$\begin{cases} a' = \frac{-w_1}{w_2} \\ b' = \frac{-b}{w_2} \\ w_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} w_1 = -a' \\ w_2 = 1 \\ b = -b' \end{cases}$$



Corde d'une fonction

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, m_1 et m_2 deux points de la courbe. La corde est le segment passant par m_1 et m_2.
Nous nous intéresserons à la droite passant par cette corde. On peut voir cette droite comme une approximation de la courbe par une droite.



Corde d'une fonction

Droite passant par une cordes

On sais que les vecteurs normales à la droite passant par la corde doit être normale au vecteur $\overrightarrow{m_1 m_2}$. On sais aussi que la droite doit passer par m_1 et m_2. Par conséquence :

$$\left\{\begin{array}{c} w_2 = 1 \\ \langle w, m_1 - m_2 \rangle = 0 \\ \\ \langle w, m_1 \rangle + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} w_2 = 1 \\ w_1(x_{m_1} - x_{m_2}) + w_2(y_{m_1} - y_{m_2}) = 0 \\ \\ w_1 x_{m_1} + w_2 y_{m_1} + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} w_2 = & 1 \\ w_1 = & -\dfrac{y_{m_1} - y_{m_2}}{x_{m_1} - x_{m_2}} \\ \\ b = & -w_1 x_{m_1} - y_{m_1} \end{array}\right.$$

Droite passant par une cordes sous la forme $y = ax + b$

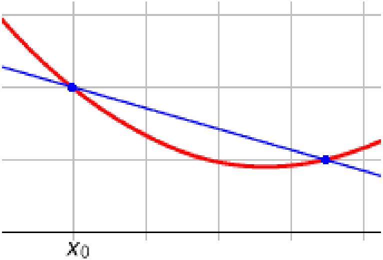
On avait $y = a'x + b'$en posant $a' = \frac{-w_1}{w_2}$ et $b' = \frac{-b}{w_2}$
Donc

$$y = \frac{y_{m_1} - y_{m_2}}{x_{m_1} - x_{m_2}}(x - x_{m_1}) + y_{m_1}$$

Définition de la tangente

Définition de la tangente

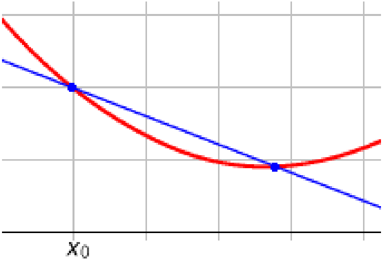
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

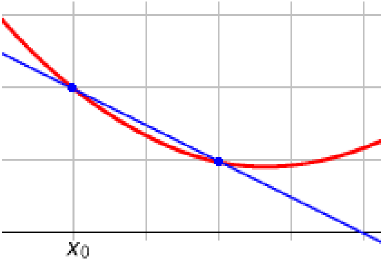
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

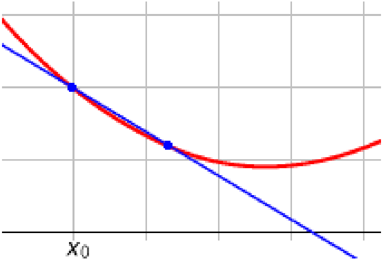
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

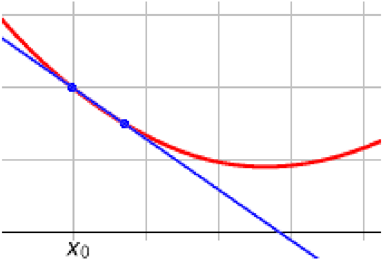
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

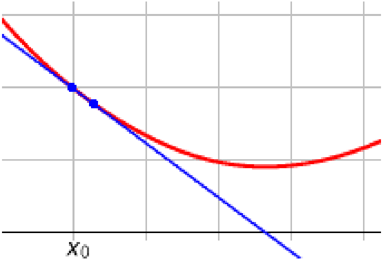
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

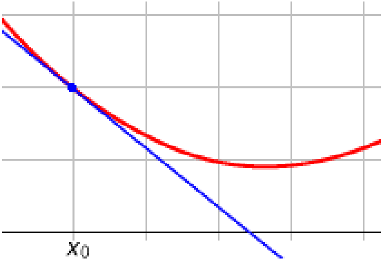
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Tangente et dérivée

Formulation mathématique de la tangente

$$y = \lim_{m_2 \longrightarrow m_1} \frac{y_{m_1} - y_{m_2}}{x_{m_1} - x_{m_2}}(x - x_{m_1}) + y_{m_1}$$

Définition de la dérivée

La dérivée f' d'une fonction f en x est le coefficient directeur de la tangente à la fonction f au point $(x, f(x))$.

$$f'(x_{m_1}) = \lim_{m_2 \longrightarrow m_1, m_2 \neq m_1} \frac{y_{m_1} - y_{m_2}}{x_{m_1} - x_{m_2}}$$

Formulation de la tangente avec la dérivée

$$y = f'(x_{m_1})(x - x_{m_1}) + f(x_{m_1})$$

Au point (x,f(x)) :

$$f'(x_{m_1})(x - x_{m_1}) - (f(x) - f(x_{m_1})) = 0$$

Calcul de la dérivée en informatique

Principe

En informatique, il n'est pas possible de faire des calculs directs de limite. La dérivée est approximée en calculant le coefficient directeur d'une corde entre deux points très proche du point pour lequel on cherche la dérivée.

La dérivée sous scipy

```
import scipy as sc
import scipy.misc
def f(x) :
    return x**3
x= np.arange(-1,1,1./100)
df = sc.misc.derivative(f,x, dx=1e-6)
```

Calcul de la dérivée par corde entre x et $x + h$

Formulation de la dérivée par variation de x

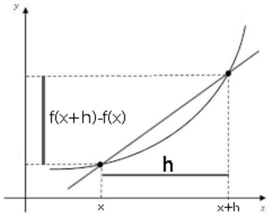
Soit h une léger décalage de x. La dérivée correspond à :

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Estimation de la dérivée en informatique

Pour h suffisamment petit :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Calcul de la dérivée par corde entre $x - h$ et x

Formulation de la dérivée par variation de x

Soit h une léger décalage de x. La dérivée correspond à :

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Estimation de la dérivée en informatique

Pour h suffisamment petit :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Calcul de la dérivée par corde entre $x - h$ et $x + h$

Formulation de la dérivée par variation de x

Soit h une léger décalage de x. La dérivée correspond à :

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Estimation de la dérivée en informatique

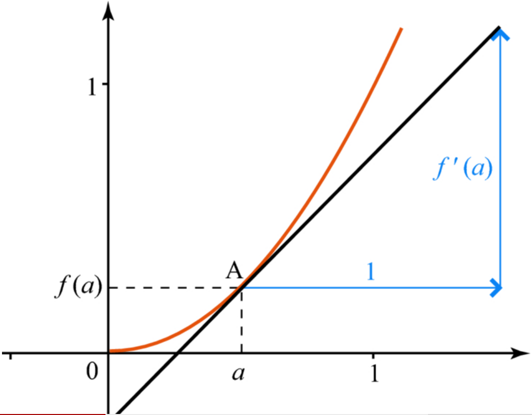
Pour h suffisamment petit :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Applications de la dérivée

Applications

- Approximation locale (à proximité de x_0) d'une fonction par une droite.
  $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- Étude des variations d'une fonction.



Approximation locale par un polynôme

Objectif

Nous venons d'approximer localement une fonction par sa tangente (une droite, soit un polynôme d'ordre 1). Comment approximer localement (au voisinage de x_0) cette fonction par un polynôme ?

$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i.$$

Théorème de Taylor-Young

Si f est n fois dérivable au point x_0 alors

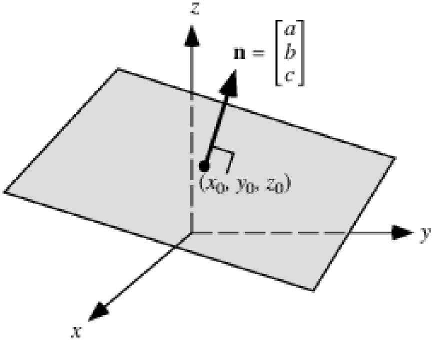
$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Sommaire

Définition d'une plan en 3D

Définition d'une droite

Pour définir une plan, il nous faut un vecteur w orthogonale au plan et un biais b correspondant au décalage du plan par rapport au plan parallèle passant par l'origine du repère.



Droite/Plan

Formulation mathématique

Soit le vecteur w et le biais b. Un point x appartient à la droite si $\langle w, x\rangle + b = 0$.

Équation en 3D

Soit le vecteur $w = [w_1, w_2, w_3]$ et le biais b. Un point $x = [x_1, x_2, x_3]$ appartient au plan si et seulement si

$$\langle w, x\rangle + b = 0 \tag{7}$$

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + b = 0 \tag{8}$$

Remarque

Le plan dans un espace 3D est "l'équivalent" de la droite dans l'espace 2D. On va pouvoir approximer localement une surface 3D par un plan tangent à la surface.

Plan tangent à une fonction 3D ($f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$)

Idée

Pour définir la tangente, on était partie de 2 points de la courbes que l'on avait fait tendre l'un vers l'autre. Pour définir un plan tangent, il faut trois points de la courbe que l'on va également faire tendre vers un unique point.

Plan tangent

$$\langle \triangledown f(a), x_{1,2} - a \rangle - (x_3 - f(a)) = 0$$

avec $\triangledown f(a)$ le gradient de f en a et $x_{1,2} = [x_1, x_2]$.
Au point $P = (x_1, x_2, f(x_{1,2}))$, on a

$$\langle \triangledown f(a), x_{1,2} - a \rangle - (f(x) - f(a)) = 0$$

Le gradient 2D de f en un point x

Le gradient f en $x \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur :

$$\triangledown f(m) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial f(x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Code

Déclaration d'une fonction

```
def f(x,y):
    return x**2+y**2
x= np.arange(-1,1,1./100)

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
X1, X2 = np.meshgrid(x,x)
Z = f(X1,X2)
surf = ax.plot_surface(X1, X2, Z,linewidth=0, antialiased=True)
plt.show()
```

Avec numpy

dfX,dfY = np.gradient(f(X1,X2))

Exemple d'application du gradient

Détection des contours dans une image

On peut utiliser la norme du vecteur gradient d'une image pour avoir une image de contours.