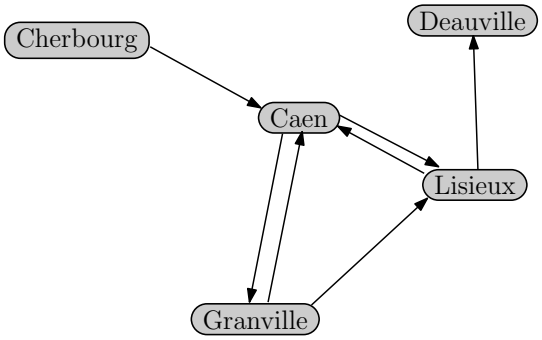
Structures des graphes

EXERCICE 1 – STRUCTURES DE DONNÉES À TRAVERS UN EXEMPLE

Soit G le graphe suivant :



Q1. Écrivez le tableau listant les nom des sommets triés selon l'ordre alphabétique. Puis représentez le graphe G sous forme de matrice d'adjacence. Pourquoi faut-il garder le tableau contenant les noms des sommets ? (Ne cherchez pas très loin pour la dernière question.)

Correction. Tableau : `["Caen","Cherbourg","Deauville","Granville","Lisieux"]`
Matrice d'adjacence :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

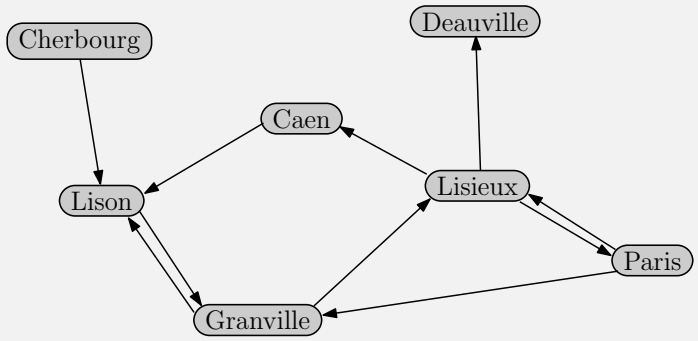
On garde le tableau des noms des sommets pour pouvoir retrouver à quelles villes correspondent les lignes et les colonnes de la matrice.

Q2. En prenant comme fonction de hachage :

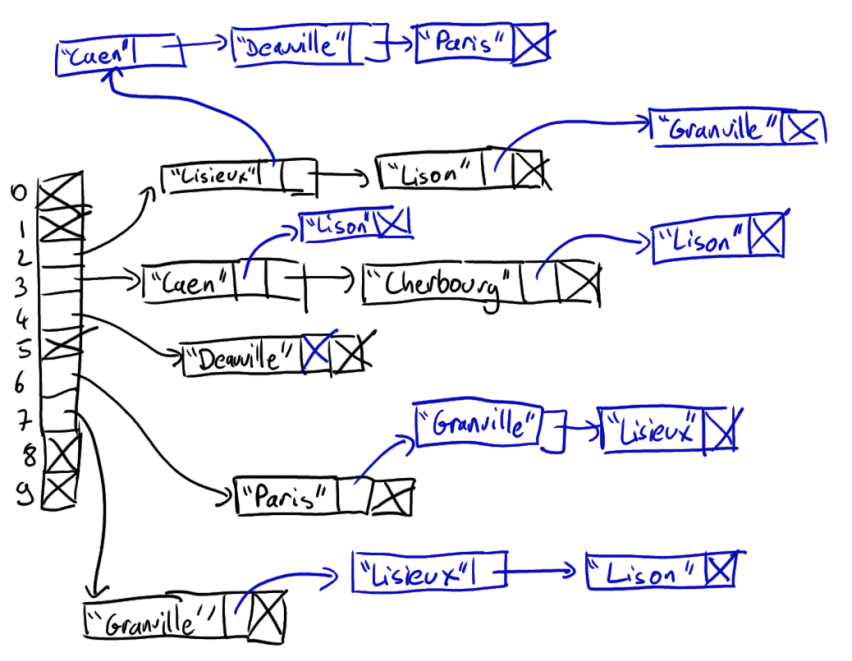
$$\text{chaine de caracteres} \mapsto \text{position de la première lettre dans l'alphabet modulo } 10$$

représentez le graphe comme un dictionnaire (table de hachage) où les clés sont le nom des villes et les valeurs les listes des successeurs des sommets sous forme de listes (simplement) chaînées.

Correction.
A l'origine, je l'avais fait pour ce graphe :



Voici la correction pour le graphe ci-dessus :



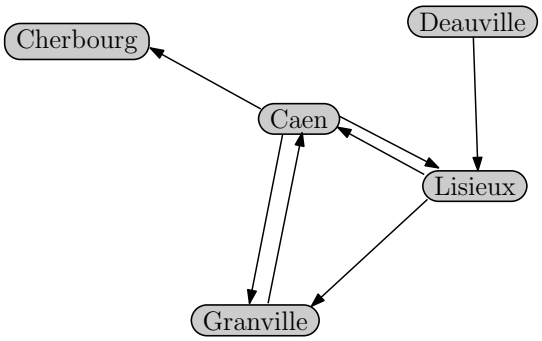
J'ai un peu la flemme de refaire la correction pour le graphe que j'ai rapetissé pour que ça prenne moins de temps en TD. Normalement, si vous avez compris la transformation du graphe ci-dessus en la table de hachage ci-dessus, il ne devrait pas y avoir de problème pour que vous trouviez la correction tout seul !

A noter qu'en pratique, une structure de graphes plus courante serait de stocker les listes des successeurs non pas sous forme de listes chaînées, mais sous forme de listes python (tableaux dynamiques).

EXERCICE 2 – RETOUR À L'ENVOYEUR

On veut écrire une fonction qui étant donné un graphe orienté G retourne le graphe miroir ; c'est-à-dire le graphe obtenu à partir de G en retournant le sens de chacune des arêtes.

Par exemple, pour le graphe de l'exercice précédent, on souhaite renvoyer



Q1. Écrire un algorithme qui prend un graphe M sous forme de matrice d'adjacence et qui renvoie le graphe miroir de M. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Correction.

```
Fonction Graphe_Miroir(M : matrice d'adjacence)
        n = taille(M)
        Miroir = matrice de taille n fois n remplie de 0
        Pour i allant de 1 à n
        Faire   Pour j allant de 1 à n
                Faire   Si (M[i][j] == 1)
                        Alors Miroir[j][i] = 1
        Renvoyer Miroir
```

La complexité de l'algorithme est en $O(|S|^2)$.

Q2. Maintenant on suppose qu'un graphe est un dictionnaire où les clefs sont les noms des sommets et les valeurs sont les listes des successeurs sous formes de listes.

Écrire un algorithme qui prend un tel graphe G et qui renvoie le graphe miroir de G. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Évidemment, dans le pseudo-code, on peut parcourir les clefs d'un dictionnaire, ainsi que les valeurs dans une liste, avec une boucle "Pour".

Correction.

```
Fonction Graphe_Miroir(G : dictionnaire)

        Miroir = dictionnaire vide

        Pour toute clef s dans G
        Faire   Miroir[s] = liste vide

        Pour toute clef s dans G
        Faire   Pour chaque t dans G[s]
                Faire   Ajouter s à la liste Miroir[t]

        Renvoyer Miroir
```

La complexité de l'algorithme est en $O(|S| + |A|)$. Pourquoi ? Clairement la première boucle est en $O(|S|)$; pour la seconde, elle est de complexité

$$\sum_{sommets} O(\text{nombre de successeurs de } s)$$

ce qui est bien égal grâce à la formule des poignées de mains à $O(|A|)$.
A noter que la première boucle est nécessaire car il peut y avoir des sommets isolés (par exemple).

Complexité chez les graphes

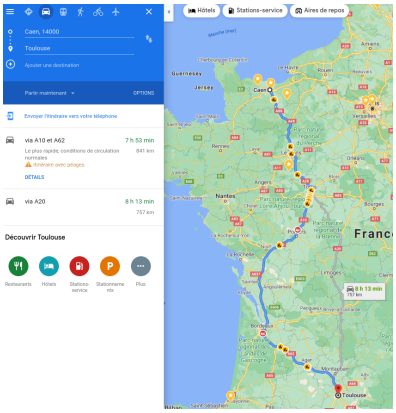
EXERCICE 3 – QUEL ALGORITHME DE PPC CHOISIR ?

Pour chacun des graphes suivants, indiquez s'il vaut mieux choisir :

- l'algorithme de Dijkstra avec une complexité en $O(|S|^2)$ (implémentation tableau).
- l'algorithme de Dijkstra avec une complexité en $O(|S|\log(|S|)+|A|)$ (implémentation tas binaire).
- ou l'algorithme de Bellman-Ford (complexité $O(|S| \times |A|)$).

Bien sûr, la complexité est primordiale !

Q1. le graphe constitué des 10000 plus grandes communes françaises, où tout couple de sommets est reliée par une arête dont le poids est égal au temps de trajet en voiture entre les deux communes (avec comme référence Google Maps – par exemple)

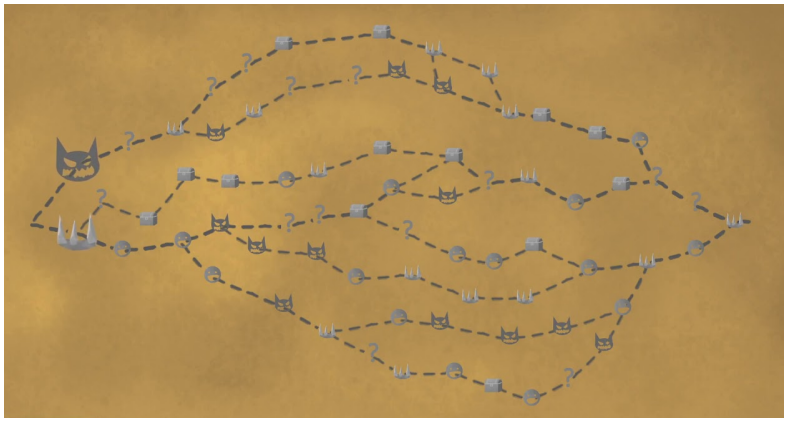


Correction. Le graphe en question est un graphe complet aux poids positifs. Donc $|A| = \frac{|S|(|S|-1)}{2} = O(|S|^2)$.
L'algorithme de Dijkstra avec implémentation tableau est le meilleur car la complexité est en $O(|S|^2)$ (alors que les autres sont respectivement $O(|S|^2\log(|S|))$ et $O(|S|^3)$.

Q2. le graphe de la ville de Caen, où chaque sommet est une intersection et où les arêtes représentent les rues reliant les intersections

Correction. Très certainement le degré moyen est très petit : le nombre de rues incidentes à une intersection dépasse rarement 8 !. Donc $|A| = O(|S|)$.
L'algorithme de Dijkstra avec implémentation tas binaire min est le meilleur car la complexité est en $O(|S|\log(|S|))$ (alors que les autres sont en $O(|S|^2)$).

Q3. un graphe provenant d'un donjon dans un jeu vidéo. Certaines salles nous font perdre des points de vie, d'autres nous en fait gagner. On veut accéder à la salle au trésor depuis l'entrée du donjon en minimisant la perte totale de points de vie.



Correction. Le graphe peut avoir des poids négatifs, donc on est obligés d'utiliser Bellman-Ford !

Q4. un graphe non orienté avec des arêtes au poids positifs où le degré moyen serait $\sqrt{|S|}$ où $|S|$ est le nombre de sommets.

Correction. On a donc $|A| = O(|S|\sqrt{|S|})$.
L'algorithme de Dijkstra avec implémentation tas binaire min est le meilleur car la complexité est en $O(|S|\sqrt{|S|}\log(|S|))$ (alors que les autres sont en $O(|S|^2)$ et $O(|S|^2\sqrt{|S|})$).

EXERCICE 4 – UNE FONCTION MYSTÈRE

Voici une fonction mystère sur un graphe non orienté G et un sommet s appartenant à G :

```
Fonction Mystère_mystérieux(G : graphe, s : sommet){
        Pour tout sommet u de G
        Faire Colorier u en blanc

        Colorier s en noir

        P = pile contenant uniquement s
        nb = 1

        Tant que P n'est pas vide
        Faire    t = sommet de P
                 Dépiler P
                 Pour tout voisin v de t
                 Faire    Si v est colorié en blanc
                          Alors    Empiler v dans P
                                   Colorier v en noir
                                   nb = nb + 1

        Renvoyer nb
```

Q1. Que fait la fonction mystère ? (On ne demande pas de justifier.)

Correction. Elle compte le nombre de sommets se situant dans la composante connexe de G.

Q2. Quelle est la complexité de la fonction mysère ?

Correction. Un sommet v ne peut être ajouté qu'une seule fois dans la pile P. En effet, pour être ajouté dans P, il faut être colorié en blanc ; mais une fois ajouté dans P, on est colorié en noir. On ne peut donc pas être ajouté deux fois dans P.
On en déduit que le nombre d'itérations de la boucle "Tant que" est au plus égal au nombre de sommets.
De plus, chaque passage de la boucle est proportionnel au degré de t (plus un grand $O(1)$ pour les opérations sur les piles).
Donc la complexité de la fonction est borné par

$$O\left(\sum_{\text{sommet } t}(deg(t)+O(1))\right) = O\left(\sum_{\text{sommet } t} deg(t)\right) + O(|S|) = O(|A|+|S|)$$

où la dernière égalité provient de la formule des poignées de mains. (On rappelle que $\sum_{sommets} deg(s)$ est égal à deux fois le nombre d'arêtes.)

Q3. A-t-on procédé à un parcours en largeur ? en profondeur ?

Correction. Non, il s'agit d'un parcours hybride (ni largeur, ni profondeur).

Problèmes algorithmique sur les graphes

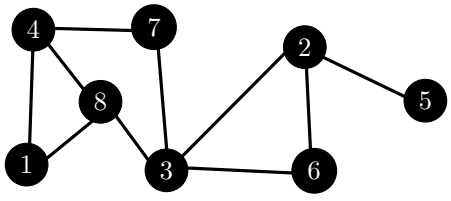
EXERCICE 5 – NOMBRE D'ARÊTES INTERNES

Soit G un graphe non orienté.

Écrire en pseudo-code une fonction qui étant donnés un graphe non orienté sans boucle G et une liste de sommets X donne le nombre d'arêtes qui ont leurs deux extrémités dans X.

Par exemple, pour le graphe ci-dessous, et pour `X = [1,2,3,6]`, la fonction doit renvoyer `T`.

Quelle est la complexité de votre algorithme ?



Correction.

```
Fonction nombre_aretes_internes(G : Graphe, X : Liste de Sommets)
        cpt = 0
        E = ensemble obtenu à partir de la liste X
        Pour chaque sommet s de G
        Faire   Si s appartient à E
                Alors   Pour chaque voisin t de s
                        Faire   Si (t appartient à E)
                                Alors cpt = cpt + 1
        // Ne pas oublier de diviser par 2 car on compte deux fois les arêtes
        Renvoyer cpt/2
```

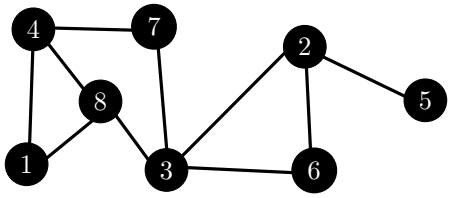
Changer une liste en ensemble nous permet de tester l'appartenance en $O(1)$. La transformation de la liste en ensemble se fait en $O(|X|)$.
La boucle "Pour chaque voisin de s" a un nombre de passages égal au degré de s.
Cette boucle n'est exécutée que si s appartient à E. Le nombre de fois que la boucle "Pour chaque voisin de s" est répétée pour la totalité des s est alors égale au nombre d'arêtes qui sortent d'un sommet de X. Ce nombre est plus généralement borné par un $O(|A|)$.
Le nombre de tests d'appartenance "s appartient à E" est égal à $O(|S|)$.
Au final, la complexité de l'algorithme est en $O(|X| + |S| + |A|) = O(|S| + |A|)$.

EXERCICE 6 – ENSEMBLE DOMINANT

Soit G un graphe non orienté.

Un ensemble D de sommets est dit dominant pour G si tout sommet du graphe G est soit dans D, soit voisin d'un sommet de D.

Q1. Existe-t-il un ensemble dominant à deux sommets pour le graphe ci-dessous?



Correction. Oui, l'ensemble $\{2, 4\}$.

Q2. Ecrire en pseudo-code une fonction qui prend un graphe G et une liste de sommets D, et qui renvoie vrai si D est dominant ; faux sinon.

Votre algorithme doit être efficace !

Correction. Voici la version naïve que beaucoup risquent de faire :

```
Fonction est_dominant(G : Graphe, D : Liste de Sommets)
        Pour chaque sommet s de G
        Faire   b = Faux
                Pour chaque sommet d de D
                Faire Si (d == s)
                        Alors b = vrai
                        Pour chaque voisin t de d
                        Faire   Si (t == s)
                                Alors b = Vrai
                        FinFaire
                FinFaire
                Si non(b)
                Alors Renvoyer Faux
        FinFaire
        Renvoyer Vrai
```

Non seulement c'est délicat, mais ce n'est pas efficace !
La complexité est en $O(|S| \times |A|)$. En effet, en se référant au cours on voit que la complexité est en

$$\sum_{s \in G} \sum_{d \in D} \sum_{t \text{ voisin de } d} O(1) = |S| \times \sum_{\text{sommet } d \in D} \text{degré(s)} \leq |S| \times \sum_{\text{sommet } s \in G} \text{degré(s)} = O(|S||A|)$$

où la dernière égalité provient de la formule des poignées de main.
Voici le bon algo :

```
Fonction est_dominant(G : Graphe, D : Ensemble de Sommets)
        est_marque = dictionnaire initialisé à Faux pour tous les sommets
        Pour chaque sommet d de D
        Faire   est_marque[d] = Vrai
                Pour chaque voisin t de d
                Faire   est_marque[t] = Vrai
                FinFaire
        FinFaire
        Pour chaque sommet s de G
        Faire Si non(est_marque[s])
                Alors Renvoyer Faux
        FinFaire
        Renvoyer Vrai
```

Q3. Montrez la complexité de votre algorithme. Il devrait être en $O(|S| + |A|)$.

Correction. La seconde boucle est clairement en $O(|S|)$.
Le coeur de la première double boucle est en $O(1)$ (accession à un élément dans un dictionnaire).
Donc la complexité de cette double boucle (Revoir cours complexité) est :

$$\sum_{\text{sommet } d \in D} \sum_{t \text{ voisin de } d} O(1) = \sum_{\text{sommet } d \in D} \text{degré(d)} \leq \sum_{\text{sommet } s \in G} \text{degré(s)} = O(|A|)$$

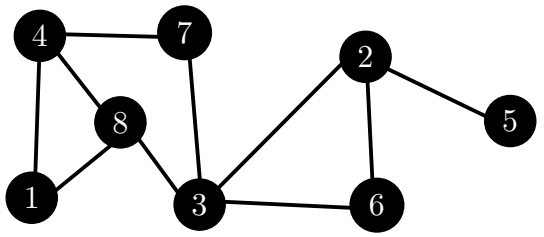
où la dernière égalité provient de la formule des poignées de main.
La complexité de cette fonction est donc $O(|S| + |A|)$.

EXERCICE 7 – MEILLEUR SCORE (CT 2021 DEUXIÈME SESSION)

Pour cet exercice, les graphes sont non orientés et chaque sommet porte une étiquette, qui est un nombre.

Le **score d'un sommet** est le produit de son étiquette avec le nombre de ses voisins qui portent une étiquette plus grande que lui.

Par exemple, pour le graphe :



le sommet 4 a pour score 4 (son étiquette) fois 2 (seuls 2 voisins de 4 ont une étiquette plus grande que 4 : il s'agit de 7 et 8), c'est-à-dire 8. Dans le même ordre d'idée, le score de 1 est 2, le score de 2 est 6, le score de 3 est 9 et les scores de 5, 6, 7 et 8 valent 0.

Q1. Écrire une fonction `score` qui prend en paramètre un graphe étiqueté `G` et un sommet `s` et qui renvoie le score de `s`.

Correction.

```
Fonction score(G : Graphe, s : sommet)
        cpt = 0

        Pour chaque voisin t dans G de s
        Faire   Si étiquette(s) < étiquette(t)
                Alors   cpt = cpt + 1

        Renvoyer étiquette(s)*cpt
```

Q2. Écrire une fonction `sommet_score_maximum` qui prend en paramètre un graphe étiqueté `G` qui renvoie un des sommets de score maximal. Par exemple, pour le graphe ci-dessus, le score maximal est 9, donc il doit renvoyer 3.

Correction.

```
Fonction sommet_score_maximum(G : Graphe)
        score_max = -1

        Pour chaque sommet s de G
        Faire   Si score(s) > score_max
                Alors   score_max = score(s)
                        s_max = s

        Renvoyer s_max
```

Q3. Quelle est la complexité de votre fonction `sommet_score_maximum` ? Justifiez.

Correction. La fonction `score` appliqué à un degré s a une complexité en $O(degre(s))$ car c'est le nombre de passage de la boucle.
Dans la fonction `sommet_score_maximum`, on a donc une boucle indexée par s dont le corps de la fonction prend un temps $O(degre(s)) + O(1)$ (le $O(degre(s))$ provenant de l'appel de la fonction `score` et le $O(1)$ est induite par les autres instructions : comparaison avec `score_max`, affectations de variable.
Donc la complexité de la boucle est en $O(\sum_{s\in S}(1 + degre(s)) = O(|S| + |A|)$, où on a utilisé la formule des poignées de main $\sum_s degre(s) = 2 \times (A)$.

Partie TP

EXERCICE 8

Le but de cette partie TP est de voir l'influence de la structure de données (matrice d'adjacence ou listes d'adjacence) sur l'efficacité des algorithmes de graphe. Un sujet `python` est disponible depuis `ecampus`.

Q1. Écrire une fonction `construire_graphe` où :

- **Entrée :** liste de triplets $(sommet1, sommet2, poids)$
- **Sortie :** un dictionnaire de dictionnaires G tel que si un triplet $(s1, s2, p)$ existe, alors $G[s1][s2]$ vaut le poids p.

Exemple. Si L vaut :

```
[("CHU","Campus 2",12),("Café des images","CHU",8),
("Campus 1","Saint-Pierre",5), ("CHU","Saint-Pierre",24),
("CHU","Campus 1",14),("Saint-Pierre","Campus 1",6),
("Campus 1","CHU",14),("Saint-Pierre","Gare",11)]
```

alors la sortie de la fonction est le dictionnaire :

```
{'CHU': {'Campus 2': 12, 'Saint-Pierre': 24, 'Campus 1': 14}, 'Campus 2': {},
'Café des images': {'CHU': 8}, 'Campus 1': {'Saint-Pierre': 5, 'CHU': 14},
'Saint-Pierre': {'Campus 1': 6, 'Gare': 11}, 'Gare': {}}
```

Q2. Écrire une fonction `construire_matrice_adjacence` où :

- **Entrée :** liste de triplets $(sommet1, sommet2, poids)$
- **Sortie :** un couple (S, M) où S est la liste des sommets et M est une matrice de sorte que :
  - $M[i][j] = p$ s'il existe un triplet $(S[i], S[j], p)$ dans `L` ;
  - $M[i][j] = +\infty$ sinon.

Exemple. Si L vaut :

```
[("CHU","Campus 2",12),("Café des images","CHU",8),
("Campus 1","Saint-Pierre",5), ("CHU","Saint-Pierre",24),
("CHU","Campus 1",14),("Saint-Pierre","Campus 1",6),
("Campus 1","CHU",14),("Saint-Pierre","Gare",11)]
```

alors la sortie de la fonction peut être le couple (S, M) où S vaut :

```
['CHU', 'Campus 2', 'Café des images', 'Campus 1', 'Saint-Pierre', 'Gare']
```

et

$$M = \begin{pmatrix} +\infty & 12 & +\infty & 14 & 24 & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ 8 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ 14 & +\infty & +\infty & +\infty & 5 & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & 6 & +\infty & 11 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix}$$

Q3. Écrire une fonction `sommet_minimal_matrice_adjacence` où :

- **Entrée :** deux paramètres S, M comme à la question 2
- **Sortie :** le sommet tel que la somme des poids des arêtes entrantes est minimale.

Exemple. Si S vaut :

```
['CHU', 'Campus 2', 'Café des images', 'Campus 1', 'Saint-Pierre', 'Gare']
```

et

$$M = \begin{pmatrix} +\infty & 12 & +\infty & 14 & 4 & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ 8 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 \\ 14 & +\infty & +\infty & +\infty & 3 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 20 & +\infty & +\infty & 11 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 2 & +\infty \end{pmatrix}$$

alors `sommet_minimal_matrice_adjacence (S,M)` doit renvoyer `'Saint-Pierre'` car trois arêtes arrivent à `'Saint-Pierre'` et sont de poids respectifs 4, 3, 2. La somme vaut 9 et est minimale. En effet, la somme des poids des arêtes entrantes des autres sommets sont 22 (`'CHU'`), 12 (`'Campus 2'`), 20 (`'Café des images'`), 14 (`'Campus 1'`) et 12 (`'Gare'`).

Q4. Écrire une fonction `sommet_minimal` où :

- **Entrée :** un graphe G comme la sortie de la question 1
- **Sortie :** le sommet tel que la somme des poids des arêtes entrantes est minimale. (pareil qu'avant)

Q5. Écrire une fonction `bellman_ford_matrice_adjacence` où :

- **Entrée :** trois paramètres S, M, s_0 où (S, M) désigne un graphe comme à la question 2 et $s_0 \in S$.
- **Sortie :** un dictionnaire où les clefs sont les sommets et les valeurs sont les distances à s_0. Comme le nom l'indique, on utilisera Bellman-Ford !

Q6. Écrire une fonction `bellman_ford` où :

- **Entrée :** deux paramètres G, s_0 où G désigne un graphe comme à la question 1 et $s_0 \in S$.
- **Sortie :** pareil que précédemment !