Algorithmique et structures de données

CM 5 – structures arborescentes

Jean-Marie Le Bars
jean-marie.lebars@unicaen.fr

Plan du CM 5

Plan du CM 5

Préambule

Manipulation de données

On souhaite stocker des données et pouvoir les récupérer.
Les fonctions principales sont

- la recherche : on souhaite récupérer une donnée stockée
- l'insertion : on souhaite ajouter une nouvelle donnée
- la suppression : on souhaite supprimer une donnée

structures linéaires

Les structures linéaires telles que les tableaux et les listes chaînées permettent ces opérations, mais elles ne sont pas efficaces pour l'ensemble de ces fonctions

Exemples de structures arborescentes

Manipulation de données

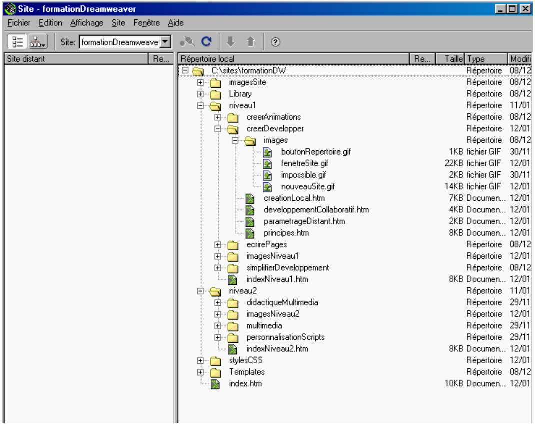
Les structures arborescentes comme les arbres binaires, les arbres généraux et les forêts peuvent permettre d'effectuer les opérations de recherche, d'insertion et de suppression de manière efficace.

De nombreuses utilisations en informatique

- systèmes d'exploitation
  $\rightarrow$ architecture, organisation des fichiers. . .
- document XML
  - arbres d'objets DOM (Document Object Model)
- linguistique
  $\rightarrow$ arbres syntaxiques, grammaires. . .
- mathématiques
  $\rightarrow$ expressions arithmétiques et logiques
- imagerie
  $\rightarrow$ quadtree

Répertoires

Exemple d’arbre de répertoires Windows



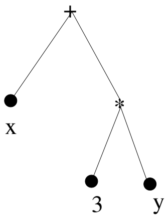
Arbre XML

Exemple d’arbre XML

```
- <employees>
  - <person id="1392">
      <name>John Smith</name>
      <dob>1974-07-25</dob>
      <start-date>2004-08-01</start-date>
      <salary currency="USD">35000</salary>
    </person>
  - <person id="1395">
      <name>Clara Tennison</name>
      <dob>1968-03-15</dob>
      <start-date>2003-05-16</start-date>
      <salary currency="USD">27000</salary>
    </person>
  </employees>
```

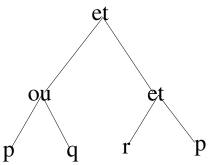
Expressions arithmétiques et logiques

Expression arithmétique



x+(3*y)

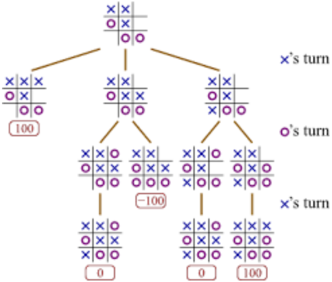
Expression logique



(p ou q) et (r et p)

Jeu

Tic tac toe ou morpion



Arbre général

Dans un premier temps, nous ne mettrons pas de valeur aux nœuds

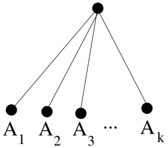
Schéma d'induction

Construction inductive des arbres généraux

(i) l'arbre vide $\emptyset$ est un arbre général.

(ii) L'arbre constitué
- d'une racine $\bullet$
- et d'une suite finie de sous-arbres généraux non vides $A_1, \ldots, A_k$

est un arbre général.



La suite finie peut être vide, on construit ainsi l'arbre racine $\bullet$

Arbre binaire

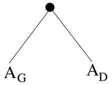
Dans un premier temps, nous ne mettrons pas de valeur aux nœuds

Schéma d'induction

Construction inductive des arbres binaires

(i) l'arbre vide $\emptyset$ est un arbre binaire.

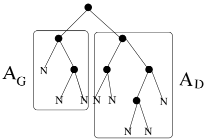
(ii) L'arbre constitué d'une racine $\bullet$, d'un arbre binaire gauche A_G et d'un arbre binaire droit A_D est un arbre binaire.



Notation de l'arbre vide

Sur les figures, nous noterons l'arbre vide avec la lettre N.

Exemple d'arbre binaire



Plan du CM 5

Nœuds, nœuds internes et feuilles

Soit x un nœud d'un arbre (cela peut être un arbre général ou un arbre binaire).

Descendants et ascendants

- descendant
  - Les descendants de x sont les nœuds du sous-arbre de racine x (sauf x)
- ascendant
  - x est un ascendant de y lorsque y est un descendant de x.

Parents et enfants

- enfant
  - un nœud y est un enfant (ou fils, ou fille) de x lorsque c'est son descendant direct
- parent
  - un nœud y est un parent (ou père, ou mère) de x lorsque c'est son ascendant direct

La racine est le seul nœud qui ne possède pas de parent.

Nœuds, nœuds internes et feuilles

Nœud interne

Un nœud interne est un nœud ayant au moins un enfant.

Feuille

Une feuille est un nœud sans enfant.

Nombre de nœuds

Nous noterons

- $N(A)$ le nombre de nœuds de A
- $N_i(A)$ le nombre de nœuds internes de A
- $N_f(A)$ le nombre de feuilles de A

Taille d'un arbre

Nous appelerons taille d'un arbre le nombre de nœuds de celui-ci.

Nœuds, nœuds internes et feuilles

Partition

Notons

- $\mathcal{N}(A)$ l'ensemble des nœuds de A
- $\mathcal{N}I(A)$ l'ensemble des nœuds internes de A
- $\mathcal{F}(A)$ l'ensemble des feuilles de A.

$(\mathcal{N}I(A), \mathcal{F})$ forme un partition de $\mathcal{N}(A)$.

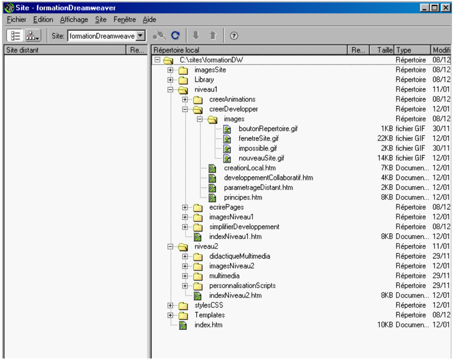
Relation

On en déduit une relation reliant le nombre de nœuds, le nombre de nœuds internes et le nombre de feuilles.

$$N(A) = N_i(A) + N_f(A).$$

Répertoires

Exemple d'arbre de répertoires Windows



Nœuds

- nœuds internes répertoires ou dossiers
- feuilles fichiers ou documents (texte, image, vidéo. . .)

Arbre XML

Exemple d'arbre XML

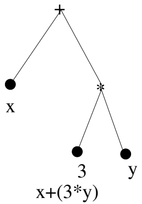
```
- <employees>
  - <person id="1392">
      <name>John Smith</name>
      <dob>1974-07-25</dob>
      <start-date>2004-08-01</start-date>
      <salary currency="USD">35000</salary>
    </person>
  - <person id="1395">
      <name>Clara Tennison</name>
      <dob>1968-03-15</dob>
      <start-date>2003-05-16</start-date>
      <salary currency="USD">27000</salary>
    </person>
  </employees>
```

Nœuds

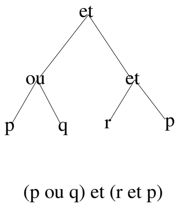
- nœuds internes balises
- feuilles contenu (nom, date, salaire. . .)

Expressions arithmétiques et logiques

Expression arithmétique



Expression logique

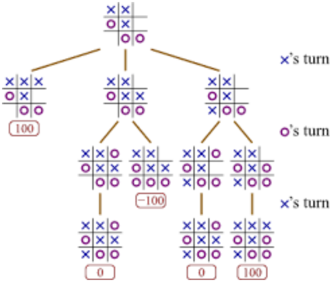


- nœuds internes
  opérateurs arithmétiques
- feuilles
  nombres

- nœuds internes
  opérateurs logiques
- feuilles
  variables propositionnelles

Jeu

Tic tac toe ou morpion



Nœuds

- nœuds internes configurations du jeu pendant la partie

- feuilles configuration du jeu en fin de partie (l'un des deux joueurs gagnent ou partie nulle)

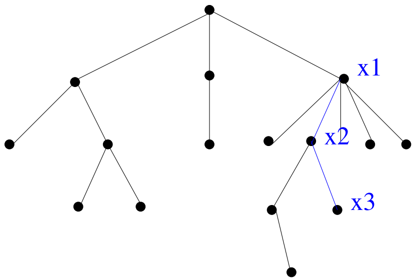
Plan du CM 5

Chemins

Chemin

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_k$ k nœuds d'un arbre.

- $(x_1, \ldots, x_k)$ forme un chemin lorsque
  - x_2 est l'enfant de x_1,
  - x_3 est l'enfant de x_2,
  - $\vdots$
  - x_k est l'enfant de x_{k-1}.



Longueur d'un chemin

- la longueur d'un chemin est le nombre de nœuds -1
- $(x_1, \ldots, x_k)$ forme donc un chemin de longueur $k - 1$

Chemins

Profondeur d'un nœud

La profondeur d'un nœud –notée $p(x)$– est la longueur du chemin allant de la racine jusqu'à x.

Définition inductive de la profondeur

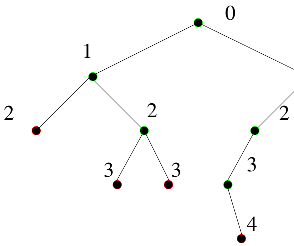
(i) la racine est de profondeur 0.

(ii) si x est le parent de y, alors

$$p(y) = p(x) + 1.$$

Exemple

On colorie en vert les nœuds internes et en rouge les feuilles.

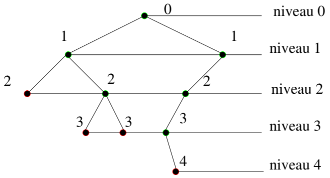


Chemins

Niveau d'un arbre

Soit $i \in \mathbb{N}$, le niveau i est formé de tous les nœuds de profondeur i.

Exemple



Hauteur d'un arbre

La hauteur d'un arbre A est la plus grande profondeur d'un nœud de A.

$$h(A) = Sup\{p(x) \mid x \text{ nœud de } A\}.$$

Sur l'exemple, l'arbre est de hauteur 4 car le plus haut niveau atteint est 4.

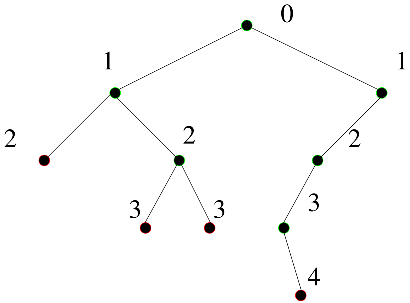
Chemins

longueur de cheminement

La longueur de cheminement d'un arbre A est la somme des profondeurs de ses nœuds.

$$LC(A) = \sum_{x \in \mathcal{N}(A)} p(x).$$

Exemple



$$\begin{array}{lcl} LC(A) & = & 0+1+1+2+2+2 \\ & + & 3+3+3+4 \\ & = & 21 \end{array}$$

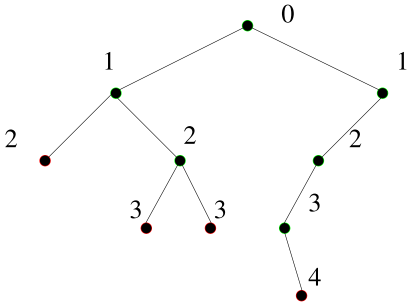
Chemins

longueur de cheminement externe

La longueur de cheminement externe d'un arbre A est la somme des profondeurs de ses feuilles.

$$LCE(A) = \sum_{x \in \mathcal{F}(A)} p(x).$$

Exemple



$$\begin{aligned} LCE(A) &= 2+3+3+4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Branches

Branche d'un arbre

- chemin allant de la racine jusqu'à une feuille.

Nombre de branches

- nous avons autant de branches que de feuilles, car à chaque feuille correspond une et une seule branche.

Hauteur de l'arbre – Nouvelle définition

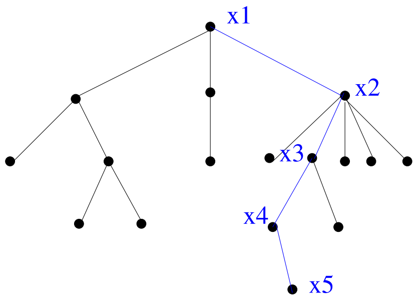
- la hauteur de l'arbre est la longueur d'une des plus longues branches de l'arbre.

Branches

Branche d'un arbre

- chemin allant de la racine jusqu'à une feuille.

Exemple sur un arbre général

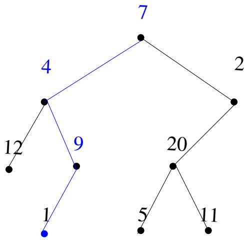


Branches

Branche d'un arbre

- chemin allant de la racine jusqu'à une feuille.

Exemple sur un arbre binaire (avec des valeurs sur les nœuds)



Plan du CM 5

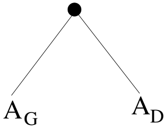
Arbre binaire

Schéma d'induction

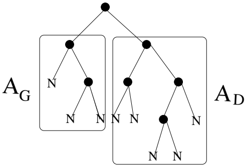
Construction inductive des arbres binaires

(i) l'arbre vide $\emptyset$ est un arbre binaire.

(ii) L'arbre constitué d'une racine $\cdot$, d'un arbre gauche A_G et d'un arbre droit A_D est un arbre binaire.



Exemple



Nombre de nœuds

On utilise la définition inductive des arbres binaires.

(i) Base ou initialisation

- l'arbre vide $\emptyset$ contient 0 nœud

(ii) Induction

On calcule inductivement le nombre de nœuds.

Soit $A = (\bullet, A_G, A_D)$ un arbre binaire différent de l'arbre vide.

$$N(A) = N(A_g) + N(A_d) + 1.$$

Nombre de feuilles

(i) Base ou initialisation

- l'arbre vide $\emptyset$ contient 0 feuille
- l'arbre racine $\bullet$ contient 1 feuille

(ii) Induction

On calcule inductivement le nombre de feuilles.

Soit $A = (\bullet, A_G, A_D)$ un arbre binaire différent de l'arbre vide et de l'arbre racine.

$$N_f(A) = N_f(A_g) + N_f(A_d).$$

Nombre de nœuds internes

(i) Base ou initialisation

- l'arbre vide $\emptyset$ contient 0 nœud interne
- l'arbre racine $\bullet$ contient 0 nœud interne

(ii) Induction

On calcule inductivement le nombre de nœuds internes.

Soit $A = (\bullet, A_G, A_D)$ un arbre binaire différent de l'arbre vide et de l'arbre racine.

$$N_i(A) = 1 + N_i(A_g) + N_i(A_d).$$

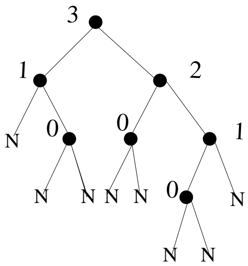
Hauteur d'un arbre binaire

Définition inductive

- l'arbre racine $\bullet$ est de hauteur 0
- par convention, l'arbre vide $\emptyset$ est de hauteur -1.
- soit A un arbre binaire de sous-arbre gauche A_g et de sous-arbre droit A_d.

$$h(A) = 1 + max(h(A_g), h(A_d)).$$

Exemple



Structure de nœud et type arbreBinaire

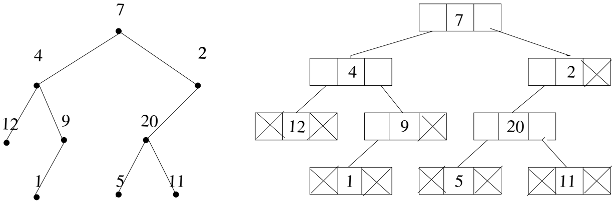
Structure de nœud

Un nœud est constitué d'une valeur (ici un entier), d'un pointeur sur le sous-arbre gauche et d'un pointeur sur le sous-arbre droit.

```
structure noeud
     valeur : entier
     gauche : pointeur sur noeud
     droit : pointeur sur noeud
```

type arbreBinaire = pointeur sur noeud

Exemple



Plan du CM 5

Parcours des nœuds d'un arbre

Objectif

Il s'agit de parcourir systématiquement tous les nœuds d'un arbre dans un ordre préablement fixé.

Parcours en largeur

- on effectue le parcours par niveau.
- on parcourt d'abord les nœuds de niveau 0, puis de niveau 1, de niveau 2. . . .
- chaque niveau est parcouru de gauche à droite.

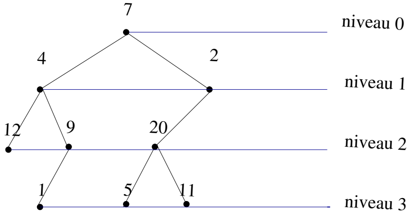
Parcours en profondeur

On part de la racine, on descend le plus à gauche possible et on retourne en arrière pour explorer les autres branches.

Parcours en largeur

Méthode

- on parcourt d'abord les nœuds de niveau 0,
  puis de niveau 1, de niveau 2, . . .
- chaque niveau est parcouru
  de gauche à droite.



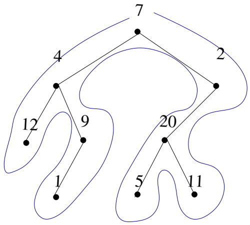
Ordre de parcours

7 4 2 12 9 20 1 5 11

Parcours en profondeur

Parcours en profondeur

- on part de la racine
- on descend le plus à gauche possible
- on retourne en arrière pour explorer les autres branches.



Ordre de parcours

Chaque nœud est visité trois fois

1. première visite premier passage sur le nœud
2. seconde visite après l'exploration du sous-arbre gauche
3. troisième visite après l'exploration du sous-arbre droit

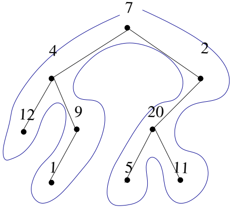
7 4 12 12 12 4 9 1 1 1 9 9 4 7 2 20 5 5 5 20 11 11 11 20 2 2 7

Ordre préfixe

Ordre préfixe

Première visite avec le parcours en profondeur

On effectue le traitement (par exemple afficher la valeur du nœud) à la première visite.



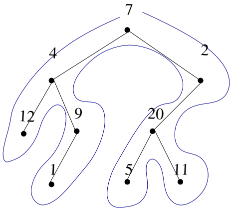
7 4 12 12 12 4 9 1 1 1 9 9 4 7 2 20 5 5 5 20 11 11 11 20 2 2 7

Ordre infixe

Ordre infixe

Seconde visite avec le parcours en profondeur

On effectue le traitement à la seconde visite.



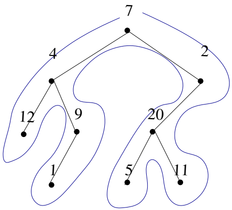
7 4 12 12 12 4 9 1 1 1 9 9 4 7 2 20 5 5 5 20 11 11 11 20 2 2 7

Ordre suffixe ou postfixe

Ordre suffixe ou postfixe

Troisième visite avec le parcours en profondeur

On effectue le traitement à la troisième visite.



7 4 12 12 12 4 9 1 1 1 9 9 4 7 2 20 5 5 5 20 11 11 11 20 2 2 7

Prochaine étape

Définir des procédures pour effectuer des opérations sur les arbres

- parcourir les nœuds d'un arbre (affichage, traitement. . .)
- rechercher un nœud d'une certaine valeur dans un arbre
- ajouter un nœud dans un arbre
- supprimer un nœud dans un arbre