Université de Caen — Année 2019 – 2020
UFR des Sciences

Licence Informatique deuxième année
Mathématiques discrètes
Examen Terminal- première session - décembre 2019
Durée 2 heures

Aucun document autorisé.
Calculatrices, ordinateurs , tablettes et téléphones portables sont interdits.

Les excercices peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.
Prenez soin de bien rédiger et justifier chacune de vos réponses.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

> Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie réservé à cet usage ; il le cachettera par collage après la signature de la feuille d'émargement.
> Sur chacune des copies intercalaires, il portera son numéro de place et numérotera chaque copie.

Exercice 1 Mots de passe
On considère $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots de longueur 10 construit sur l'alphabet $\mathcal{A} = L \cup U \cup D \cup S$, où

- L est l'ensemble des 26 lettres minuscules.
- U est l'ensemble des 26 lettres majuscules.
- D est l'ensemble de chiffres $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- S est l'ensemble des caractères spéciaux $\{\$, \#, !, @\}$.

Question 1. Donnez la cardinalité (nombre d'éléments) de $\mathcal{M}$.
On découpe un mot de $\mathcal{M}$ en blocs de lettres d'un même sous-ensemble L, U, D ou S en précisant le nombre de lettres pour chaque bloc, on appellera classe un tel découpage. Par exemple, $U_1L_7D_1S_1$ est la classe des mots de $\mathcal{M}$ commençant par une majuscule, suivi de 7 lettre minuscules, puis d'un chiffre et enfin d'un caractère spécial. Par exemple, $Motpasse0\$$ et $Azertyui1\#$ sont des mots de $U_1L_7D_1S_1$.

Question 2. Donnez le nombre de mots des classes $U_1L_7D_1S_1$, $U_1L_8D_1$, L_8S_2.

Question 3. On sait qu'un mot appartient à la classe $U_1L_8D_1$. On génère les mots de la classe un par un. Combien de mots doit-on générer en moyenne pour retrouver ce mot ?

Question 4. Combien de mots peut-on former avec des classes utilisant les blocs L_6, U_1, D_2 et S_1 ? Les blocs peuvent être dans n'importe quel ordre.

Question 5. Soient n et $r \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que le nombre de r-uplet $(x_1, \ldots, x_r)$, r d'éléments de $\mathbb{N}^*$, vérifiant l'équation :

$$x_1 + \ldots + x_r = n. \tag{1}$$

vaut $\binom{n-1}{r-1}$.

Calculez le nombre de classes que l'on peut former avec un bloc de U, suivi d'un bloc de L, puis d'un bloc de D (par exemples, $U_1L_8D_1, U_2L_5D_3$).

Calculez le nombre de classes lorsque les trois blocs de U, L et D peuvent être dans n'importe quel ordre.

Exercice 2

Question 1. Redonnez la définition d'un arbre localement complet.

Question 2. Redonnez le shéma d'induction de $\mathcal{L}$, l'ensemble des arbres localement complets.

Question 3. Soit $A = (\cdot, B, C)$ un arbre de $\mathcal{L}$ avec B et C différents de l'arbre vide. Redonnez la relation reliant $h(A)$, $h(B)$ et $h(C)$.
En déduire que l'on a $h(B) + h(C) \geq h(A) - 1$.

Question 4. Montrez en utilisant le shéma d'induction sur $\mathcal{L}$ que tout arbre A de $\mathcal{L}$ vérifie la propriété $N(A) \geq 2h(A) + 1$.

Exercice 3 Ensembles
Soient A, B et C trois ensembles non vides.

1. Donner un exemple où $A \cup B = A \cup C$ et $B \neq C$.
2. Donner un exemple où $A \cap B = A \cap C$ et $B \neq C$.
3. Montrer que :

$$\big(A \cup B = A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B = A \cap C\big) \Longrightarrow B = C.$$

Exercice 4
Soient E et F deux ensembles, A un sous-ensemble de E, B un sous-ensemble de F. On suppose A,B non vides. Soit f une application de E dans F.

1. Redonnez les définitions de $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
2. Montrer que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

Exercice 5

Question 1. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Quand dit-on que f est une application injective ? surjective ? bijective ?

Question 2. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y, z) = (x + z, y + z)$. Que peut-on dire de f ?

Question 3. Montrer que la fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par$g(x, y) = (2y - x, x + y)$ est une fonction bijective dont on donnera la fonction réciproque

Exercice 6

On dit qu'une relation $\Re$ sur un ensemble E est circulaire si pour tous a, b, c éléments de E : $(a\Re b \text{ et } b\Re c) \implies (c\Re a)$.

Montrer qu'une relation est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive et circulaire.

Donner un exemple de relation circulaire qui n'est pas une relation d'équivalence.

Exercice 7

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble fixé de E non vide. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\Re$ par $X\Re Y$ lorsque $A \cap X \subset A \cap Y$

1. Montrer que cette relation est réflexive et transitive. On donnera la définition de ces propriétés.
2. On suppose $E = \{a, b, c, d, e\}$ et $A = \{a\}$; montrer que la relation $\Re$ n'est pas anti-symétrique.
3. La relation $\Re$ est-t-elle une relation d'ordre ? (vous justifierez votre réponse).

Exercice 8 On joue avec deux dés à 5 faces prenant les valeurs $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, un dé blanc et un dé rouge. On lance les deux dés et on suppose que les deux dés sont bien équilibrés.

1. Quel est l'univers des possibles (ou espace de probabilité) ?
   Quel est la distribution de probabilité ?
2. Le premier jeu est le suivant : on gagne la somme des deux dés s'ils sont différents, et on doit payer cette somme si on fait un double (deux dés identiques). Soit X la variable aléatoire correspondante.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable X ?
   Déterminer la distribution de cette variable aléatoire.
   (b) Que vaut l'espérance de cette variable aléatoire X. Vous donnerez la définition de l'espérance.
   Le jeu est-il équilibré ?
3. En fait les dés ne sont pas équilibrés mais ils ont le même biais : le 5 et le 1 tombent 4 fois plus que les autres faces.
   (a) Donner la distribution de probabilité pour chaque dé.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir le double i pour chaque $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
   (c) On définit un deuxième jeu en lançant 20 fois ces deux dés.
   À chaque lancer, on gagne si on fait un double (n'importe lequel) et on perd si on obtient deux dés différents. On notera Y la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on gagne.
      i. Quelle est la loi suivie par Y ?
      ii. Quelle est la probabilité de gagner exactement 10 fois ? (on demande une formule)
      iii. Quelle est l'espérance de Y ?