Université de Caen
UFR des Sciences

Année 2021 – 2022

Licence Informatique deuxième année
Mathématiques discrètes
Examen Terminal- première session – jeudi 16 décembre de 15h à 17h
Durée 2 heures

Aucun document autorisé.
Calculatrices, ordinateurs , tablettes et téléphones portables sont interdits.

Les exercices peuvent être faits dans l'ordre de votre choix. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet. Ne bâclez donc pas les exercices abordés. Prenez soin de bien rédiger et de justifier chacune de vos réponses.
La notation prendra en considération la qualité de la rédaction.

Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie réservé à cet usage; il le cachettera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Sur chacune des copies intercalaires, il portera son numéro de place et numérotera chaque copie.

Exercice 1. Induction sur les arbres binaires.

Question 1. Redonnez la définition d'un arbre binaire localement complet.
Soit Alc l'ensemble des arbres binaires localement complets. Donnez le schéma d'induction de l'ensemble Alc .

Un arbre est **localement complet** lorsqu'il est non vide et que ses noeuds ont soit aucun fils soit deux fils.

D'où le shéma d'induction :

i) $\mathcal{A}_1 = \cdot$, l'arbre qui est réduit à sa racine appartient à Alc
ii) Si $A_g \in Alc$ et $A_d \in Alc$ alors l'arbre $A = (., A_g, A_d) \in Alc$.

On définit inductivement une application qui attribue une valeur $V(A)$ à tout arbre binaire A.

i) Si A est l'arbre vide alors $V(A) = 0$ et si A est l'arbre racine alors $V(A) = -1$.
i) soit $A = (\cdot, A_g, A_d)$ un arbre binaire différent de l'arbre vide et de l'arbre racine.
$V(A) = V(A_g) + V(A_d) + 1$.

Question 2. Donnez un arbre binaire à 5 nœuds A tel que $V(A) \neq -1$.
Soit $A_2 = (., A_1, \emptyset)$.
Alors $V(A_2) = V(A_1) + 0 + 1 = 0$

Soit $A_3 = (., A_2, A_2)$.
Alors $V(A_3) = 1 + V(A_2) + v(A_2) = 1$.

A_3 est donc un arbre binaire à 5 nœuds tel que $V(A_3) \neq -1$ (remarquons qu'il n'est pas localement complet).

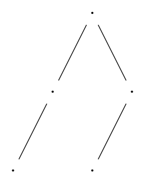

FIGURE 1 – Arbre A_3

Question 3 . Montrez par induction que tout arbre localement complet A vérifie $V(A) = -1$.
Soit A un arbre binaire, notons $P(A)$ la propriété $V(A) = -1$.
Montrons par induction que $P(A)$ est vraie pour tout arbre $A \in Alc$.

i) soit $A = \mathcal{A}_1$ qui est l'arbre réduit à sa racine alors par définition $V(\mathcal{A}_1) = -1$ et donc $P(\mathcal{A}_1)$ est vraie.
ii) Soient $Ag \in Alc$ et $Ad \in Alc$. Supposons que $P(Ag)$ et $P(Ad)$ sont vraies et soit $A = (., A_g, A_d)$. Montrons que $P(A)$ est encore vraie.
Par définition $V(A) = V(Ag) + V(Ad) + 1 = -1 + -1 + 1$ puisque $P(Ag)$ et $P(Ad)$ sont vraies.
Donc $V(A) = -1$ et $P(A)$ est vraie.

D'après le principe d'induction, $P(A)$ est donc vraie pour tout arbre localement complet.

Exercice 2. Relations binaires
Rappels sur la division euclidienne : on considère la division euclienne d'une entier $n \in Z$ par 10. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe deux uniques valeurs q et r tels que $n = 10q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, \ldots, 9\}$. r est appelé le quotient et r le reste.
On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire R par

$$xRy \text{ lorsque } x \text{ et } y \text{ ont le même quotient.}$$

Question 1. Rappelez les propriétés que vérifie une relation d'équivalence.
Redonnez à chaque fois la définition de la propriété.

Une relation sur un ensemble E est une relation d'équivalence lorsqu'elle vérifie les trois propriétés suivantes

— réflexivité :
Une relation sur un ensemble E est dite réflexive lorsque

$$\forall e \in E \;\; e \,\Re\, e.$$

— symétrie :
Une relation sur un ensemble E est dite symétrique lorsque

$$\forall e \in E \; \forall f \in E \; e \,\Re\, f \implies f \,\Re\, e.$$

— transitivité :
Une relation sur un ensemble E est dite transitive lorsque

$$\forall e \in E \; \forall f \in E \; \forall g \in E \; (e \,\Re\, f \wedge f \,\Re\, g) \implies e \,\Re\, g.$$

Question 2. Montrez que R est une relation d'équivalence.

— Réflexivité : soit $x \in \mathbb{Z}$. x a le même quotient que lui même donc xRx.
— Symétrie : soient x et $y \in \mathbb{Z}$. Supposons xRy. Il existe $q \in \mathbb{Z}$, r_1 et $r_2 \in \{0, \dots, 9\}$ tels que $x = 10q + r_1$ et $y = 10q + r_2$.
Nous avons donc $y = 10q + r_2$ et $x = 10q + r_1$, par conséquent yRx.
— Transitivité : soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que xRy et yRz.
$x\Re y$, il existe donc $q_1 \in \mathbb{Z}$, r_1 et $r_2 \in \{0, \dots, 9\}$ tels que $x = 10q_1 + r_1$ et $y = 10q_1 + r_2$.
$y\Re z$, il existe donc $q_2 \in \mathbb{Z}$, r_3 et $r_4 \in \{0, \dots, 9\}$ tels que $y = 10q_2 = r_3$ et $z = 10q_2 + r_4$.
Comme la division euclidienne est unique, il vient $q_1 = q_2$ et $r_2 = r_3$. Donc x et z ont le même quotient, xRz.

Question 3. Déterminer la classe équivalence de 150.
La classe d'équivalence de 150 est l'ensemble des entiers qui sont en relation avec 150 c'est à dire qui ont le même quotient dans la division euclidienne par 10 que 150 c'est à dire 15.
La classe d'équivalence de 150 est donc l'ensemble des entiers de la forme $15 \times 10 + r$ avec $0 \leq r < 10$.
La classe d'équivalence de 150 est donc l'ensemble $\{150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159\}$

Exercice 3. **Probabilités**

On jette six fois un dé à cinq faces numérotées de 1 à 5.

Question 1. Donnez E, l'espace de probabilité.
On suppose que nous avons l'équiprobabilité. Donnez la probabilité pour chaque résultat possible de l'espace de probabilité. Donnez la probabilité que le dé tombe les six fois sur un entier pair. Expliquez votre calcul.
Notons $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, l'espace de probabilité est $E = D^6$ et $card(E) = card(D)^6 = 5^6$. Comme nous avons l'équiprobabilité sur E, nous avons $\Pr(r = e) = \frac{1}{card(E)} = \frac{1}{5^6}$, où r est le résultat de l'expérience aléatoire.
Pour tout évènement A sur E (c'est-à-dire $A \subset E$) $\Pr(r \in A) = \frac{card(A)}{card(E)}$, car nous sommes dans le cas de l'équiprobabilité. Ici $A = \{2, 4\}^6$ et donc $\Pr(r \in A) = \frac{2^6}{5^6}$.

Question 2. On définit sur E une variable aléatoire Y donnant le nombre de valeurs paires. Calculez l'espérance et la variance de Y.
Soit $r = (r_1, \dots, r_6)$, r_i est donc le résultat du ième jet de dé.
On définit la variables aléatoires élémentaires Y_i, pour $i \in \{1, \dots 6\}$, par

$$\begin{aligned} Y_i &= 1 \text{ lorsque le } r_i \in \{2, 4\} \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

$E[Y_i] = \Pr(r_i \in \{2, 4\}) = \frac{2}{5}$. Nous avons $Y = Y_1 + \ldots + Y_6$.
Par linéarité de l'espérance, $E[Y] = E[Y_1] + \ldots + E[Y_6] = 6 * \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$.
Pour chaque variable aléatoire élémentaire Y_i, nous avons $E[Y_i^2] = E[y_i] = \frac{2}{5}$.
D'où $var(Y_i) = E[Y_i^2] - E[Y_i]^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.
Comme les jets de dé sont indépendants, les variables aléatoires Y_i sont indépendantes et donc $var(Y) = var(Y_1) + \ldots var(Y_6) = 6 * \frac{6}{25} = \frac{36}{25}$.

Question 3. On suppose maintenant que le dé est truqué. Il a une chance sur deux de tomber sur 1, les autres faces restent équiprobable pour ce dé.
Calculez à nouveau l'espérance et la variance de Y.
Nous avons $\Pr(r_i = 1) = \frac{1}{2}$ et $\Pr(r_i = j) = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, pour $j \in \{2, 3, 4, 5\}$.

$E[Y_i] = \Pr(r_i = 2) + \Pr(r_i = 4) = \frac{1}{4}$ et $var(Y_i) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$.
D'où $E[Y] = 6 * \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ et $var(Y) = 6 * \frac{3}{16} = \frac{9}{8}$.

Exercice 4. Combinatoire et probabilités

On suppose que les naissances sont réparties uniformément sur les jours de la semaine (du lundi au dimanche). Soit n un entier naturel et on s'intéresse au jour de semaine correspondant à la date de naissance d'une personne. Considérons un groupe de n personnes.

Question 1. Donnez l'espace probabilisé et la distribution de probabilité.
On pose $J = \{lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche\}$.
L'espace de probabilité est alors $E = J^n$ et $card(E) = card(J)^n = 7^n$.
Pour tout $e \in E$, $\Pr(r = e) = \frac{1}{card(E)} = \frac{1}{7^n}$ car nous supposons l'équiprobabilité entre les 7 jurs.
Nous noterons p_n la probabilité que deux personnes de ce groupe soient nées le même jour de la semaine pour $n \geq 2$.

Question 2. Calculez p_n lorsque $n > 7$.
Pour $n > 7$, on applique le principe des tiroirs, nous avons plus de personnes que de jours de la semaine, donc nous avons deux personnes qui sont nés le même jour.

Question 3. Calculez p_2 probabilité que deux personnes soient nées le même jour de la semaine.
$E = J^2$. On utilise le principe des choix successifs.
Choix 1 : jour de la semaine pour la personne 1, nous avons 7 possibilités.
Choix 2 : jour de la semaine pour la personne 2, une seule possibilité.
Donc 7 possibilités en tout. Soit A l'évènement "les deux personnes sont nés le même jour de la semaine". $card(A) = 7$ et $P(A) = \frac{card(A)}{card(E)} = \frac{1}{7}$.

Question 4. On suppose maintenant que $n \leq 7$, calculez p_n.
Nontons q_n la probabilité que les n personnes soient nées des jours différents. On utilise le principe des choix successifs.
Choix 1 : jour de la semaine pour la personne 1, nous avons 7 possibilités.
Choix 2 : jour de la semaine pour la personne 2, nous avons 6 possibilités.
$\vdots$
Choix n : jour de la semaine pour la personne n, nous avons $7 - (n - 1)$ possibilités.

$$q_n = \frac{7 * 6 * \ldots * (7 - n + 1)}{7^n} \text{ et } p_n = 1 - q_n.$$

Question 5. Déterminez n_0 le plus petit entier n tel que $p_n \geq 1/2$.
$q_3 = \frac{7*6*5}{7^3} = \frac{30}{49}$, $p_3 = \frac{19}{49} < \frac{1}{2}$.
$q_4 = \frac{7*6*4*3}{=} \frac{120}{343}$, $p_4 = \frac{223}{364} > \frac{1}{2}$.
Donc $n_0 = 4$.

Exercice 5. Ensembles Soit E un ensemble. Si A est un sous-ensemble de E on notera $\mathcal{C}_E^A$ le complémentaire de A dans E. Soit A et B deux sous ensembles de E.

Question 1. Redonnez la définition de $A \Delta B$.

Si A et B sont deux parties d'un ensemble E alors $A \Delta B$ est l'ensemble des éléments de E appartenant soit à A, soit à B, mais pas aux deux :

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A.$$

avec $A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}$

On a $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Question 2. Que peut-on dire des ensembles $A\Delta A$, $A\Delta\mathcal{C}_E^A$, $A\Delta E$ et $A\Delta\emptyset$?

$A\Delta A = (A\cup A)\setminus(A\cap A) = A\setminus A = \emptyset$
$A\Delta\mathcal{C}_E^A = A\cup\mathcal{C}_E^A\setminus A\cap\mathcal{C}_E^A = E\setminus\emptyset = E$

$A\Delta E = (A\cup E)\setminus(A\cap E) = E\setminus A = \mathcal{C}_E^A$
$A\Delta\emptyset = (A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset) = A\setminus\emptyset = A$

Question 3. Soit A et B deux sous ensembles de E. Montrer que $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \emptyset$.

Supposons $A = \emptyset$. Alors $A\Delta B = \emptyset\cup B\setminus\emptyset\cap B = B$

Réciproquement, supposons $A\Delta B = B$. Supposons que $x\in A$
Alors si $x\in B$ on a $x\in A$ et $x\in B$ donc $x\notin A\Delta B$ or $A\Delta B = B$ donc $x\notin B$ ce qui est contradictoire.
Si $x\notin B$ alors $x\in A\Delta B$ car $x\in A$ et $x\notin B$ or $A\Delta B = B$ donc $x\in B$ ce qui est contradictoire.
Donc il n'est pas possible que $x\in A$. Donc $A = \emptyset$.
Donc $A\Delta B = B \to A = \emptyset$.

On a donc prouvé que $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \emptyset$.

Exercice 6. Anagrammes

Question 1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot PIKACHU ?
Le mot PIKACHU est composé de 7 lettres distinctes. Un anagramme de PIKACHU est une permutation des 7 lettres. Il y a donc 7! anagrammes du mot PIKACHU.

Question 2. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot PIKACHU tels que les 4 consonnes (P,K,C,H) et les 3 voyelles (I,A,U) soient alternées comme dans KIPACUH ?

Pour que les consonnes (4) et les voyelles (3) puissent s'alterner il faut commencer par une consonne. Les 4 consonnes sont aux places 1,3,5 et 7 ; il y a 4 consonnes différentes donc 4! façons de les placer (4 ! permutations). Les 3 voyelles sont aux places 2, 4 et 6. Il y a 3 voyelles différentes donc 3 ! façons de les placer. D'après le principe des choix successifs il y a donc $4!\times 3!$ anagrammes du mot PIKACHU tels que les 4 consonnes (P,K,C,H) et les 3 voyelles (I,A,U) soient alternées.

Question 3. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot RONDOUDOU ?

Il y a plusieurs méthodes possibles (voir TD).Le mot RONDOUDOU comporte 9 lettres dont 3 lettres O, 2 lettres U et 2 lettres D.
Pour faire un anagramme on peut commencer par placer les 3 lettres 0 parmi les 9 places possibles. Il y a $\binom{9}{3}$ façons de le faire. On positionne ensuite les 2 lettres U parmi les 6 places restantes avec $\binom{6}{2}$ façons de le faire puis les 2 lettres D parmi les 4 places restantes avec $\binom{4}{2}$ façons de le faire. Il reste ensuite les 2 lettres R et N qu'on peut positionner dans les places restantes de 2! façons.

D'après le principe des choix successifs on a donc $\binom{9}{3}\times\binom{6}{2}\times\binom{4}{2}\times 2!$ anagrammes de RONDOUDOU.

En développant on obtient $\frac{9!}{6!3!}\times\frac{6!}{4!2!}\times\frac{4!}{2!2!}\times 2! = \frac{9!}{2!2!3!}$

Question 4. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot PIKACHU pour lesquels les 3 voyelles I, A et U sont les unes à côté des autres ?

Il y a 3! anagrammes formés des lettres IAU (3 lettres distinctes). Ces 3 lettres étant positionnée entre elles, on choisit ensuite une permutation des 4 lettres restantes (P,K,C,H) et du "bloc" des 3 voyelles. Il y a 5! permutations pour chaque permutation des 3 voyelles d'où $3! \times 5!$ anagrammes du mot PIKACHU pour lesquels les 3 voyelles I, A et U sont les unes à côté des autres (principe des choix successifs).

Question 5. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot PIKACHU dans lesquels il n'y a pas le mot PIK ni le mot CHU ?

Soit E l'ensemble des anagrammes du mot PIKACHU
Soit A l'ensemble des anagrammes du mot PIKACHU contenant le mot PIK
Soit B l'ensemble des anagrammes du mot PIKACHU contenant le mot CHU
Soit $A \cap B$ est l'ensemble des anagrammes du mot PIKACHU contenant le mot PIK et le mot CHU

Soit X l'ensemble des anagrammes du mot PIKACHU dans lesquels il n'y a pas le mot PIK ni le mot CHU
Alors $X = \mathcal{C}_E^{A \cup B}$
Donc $card(X) = card(E) - card(A \cup B)$

D'après le principe d'inclusion exclusion on a $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.
Donc $card(X) = card(E) - card(A) - card(B) + card(A \cap B)$

Si on considère le bloc PIK comme une lettre, on obtient tous les anagrammes de PIKACHU contenant le mot PIK avec toutes les permutations de PIK et des 4 lettres A, C, H, U. Il y a donc 5! anagrammes.
De la même façons il y a 5! anagrammes de PIKACHU contenant CHU.

Pour les anagrammes du mot PIKACHU contenant le mot PIK et le mot CHU, il y a permuter le bloc CHU, le bloc PIK et la lettre A donc 3! anagrammes.

Finalement $card(X) = 7! - 2 \times 5! + 3!$.

Exercice 6. **Injection, surjection, bijection** : Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B.

Question 1. Quand dit-on que f est une application injective ? surjective ? bijective ?

f est injective si et seulement si tout élément b de B a **au plus** un antécédent.

f est surjective si et seulement si tout élément b de B a **au moins** un antécédent.

f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Question 2. On définit l'application f par

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (xy,\, x - y) \end{array}$$

Montrer que f n'est pas surjective. Est-elle injective ? bijective ?

Soit $(-1,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: (x,y) est un antécédent de $(-1,0)$ par f implique que $xy = -1$ et $x - y = 0$ donc $x^2 = -1$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$. Donc $(-1,0)$ n'a pas d'antécédent et donc f n'est pas surjective et donc n'est pas non plus bijective.

Par ailleurs $f(1,0) = (0,1) = f(0,-1)$ donc $(0,1)$ possède au moins deux antécédents et f n'est pas injective.

Question 3. On définit l'application g par

$$\begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & (x+y+1,\, 2x-y-1) \end{array}$$

Montrer que g est une application bijective et déterminer l'application réciproque de g. Soit$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On cherche ses antécédents par g donc les couples $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $g(x,y) = (a,b)$.

On obtient les équations $x+y+1 = a$ et $2x - y - 1 = b$.
En additionnant les équations il vient $3x = a+b$ puis en remplaçant on obtient $y = 1/3(2a-b-3)$

On en déduit que tout élément $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ possède exactement un antécédent par g.
Donc g est bijective et g^{-1} est définie par

$$\begin{array}{rcccc} g^{-1} & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & (1/3(x+y),\, 1/3(2a-b-3)) \end{array}$$