TD #01 --- Introduction à la notion de graphes

Exercice #1.

Trois professeurs P_1, P_2, P_3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes C_1, C_2, C_3 :
P_1 doit donner 2 heures de cours à C_1 et 1 heure à C_2 ;
P_2 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 1 heure à C_3 ;
P_3 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 2 heures à C_3.
Comment représenter cette situation par un graphe ? Quel type de graphe obtenez-vous ?
Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum ?
Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire du lundi pour ces professeurs.

Exercice #2.

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
Quel type de graphe obtenez-vous ?
Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?
Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

Exercice #4.

Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice #5.

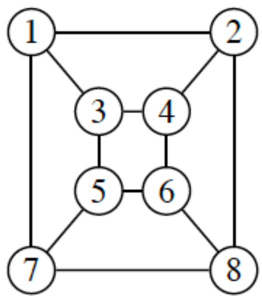
Montrez que dans une assemblée de n personnes, il y a toujours au moins 2 personnes qui ont le même nombre d'amis présents.

Exercice #6

Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Exercice #7.

Montrez que ce graphe est biparti :



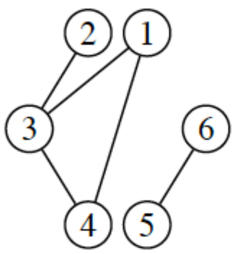
Exercice #3.

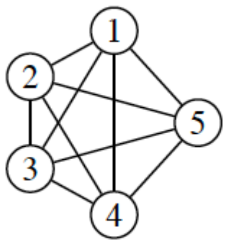
Cet exercice est inspiré de la nouvelle de Claude Berge ***Qui a tué le Duc de Densmore*** *(Bibliothèque Oulipienne n° 67, 1994, Réédition Castor Astral, 2000). Dans cette nouvelle policière, le lecteur peut découvrir le meurtrier grâce à un théorème combinatoire dû au mathématicien hongrois G. Hajós.*

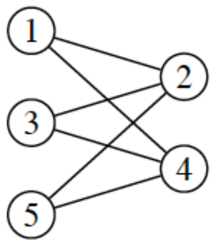
Un jour, Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de trois ans.
À l'époque, le Duc de Densmore avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait entièrement détruit le château de Densmore où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi dans l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses sept ex-épouses. Or, avant de mourir, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.
Holmes : Je me souviens de cette affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !
Watson : Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des femmes : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Densmore qu'une seule fois dans leur vie.
Holmes : Hum ! Leur avez-vous demandé à quelle période elles ont eu leur séjour respectif ?
Watson : Hélas ! Aucune ne se rappelait les dates exactes, après plus de trois ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles avaient rencontré :
Ann a rencontré Betty, Charlotte, Félicia et Georgia.
Betty a rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia et Helen.
Charlotte a rencontré Ann, Betty et Edith.
Edith a rencontré Betty, Charlotte et Félicia.
Félicia a rencontré Ann, Betty, Edith et Helen.
Georgia a rencontré Ann et Helen.
Helen a rencontré Betty, Félicia et Georgia.
Vous voyez, mon cher Holmes, les réponses sont concordantes !
C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin, avec des points marqué A, B, C, E, F, G, H et des lignes reliant certains de ces points. Puis, en moins de trente secondes, Holmes déclara :
– Tiens, tiens ! Ce que vous venez de me dire détermine d'une façon unique l'assassin.
Qui est l'assassin ?

Exercice #8. (Rappeler le théorème d'EULER)

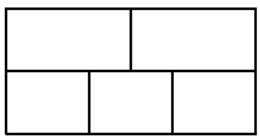
Les graphes suivants sont-ils eulériens (ou semi-eulériens) ?





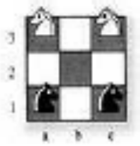


Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?



Exercice #9.

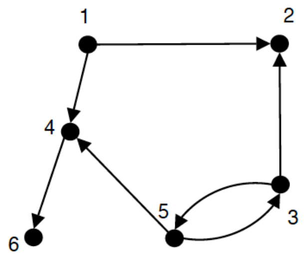
Sur un échiquier 3×3, les deux cavaliers noirs sont placés sur les cases a1 et c1, les deux cavaliers blancs occupant les cases a3 et c3.
Aidez-vous d'un graphe pour déterminer les mouvements alternés des blancs et des noirs qui permettront aux cavaliers blancs de prendre les places des cavaliers noirs, et vice versa. Les blancs commencent.



Exercice #10.

La fermeture transitive d'un graphe G est un graphe G* ayant un arc/arête du sommet i au sommet j ssi il existe un chemin/chaîne de i à j dans le graphe G.
On suppose, par la suite, que les sommets de G sont numérotés de 1 à n.

On considère le graphe orienté ci-dessous ainsi que sa matrice d'adjacence.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) On considère le produit booléen C de 2 matrices booléennes A et B de dimension (n, n) défini par

C(i, j) = ⋁ k=1 à n des A(i, k) ∧ B(k, j)

- Calculer M^2
- Que représentent M^2 ? M^3 ?
- On considère M* = M ∨ M^2 ∨ M^3 ∨ M^4 ∨ M^5 Que représente M* ? Pourquoi s'arrêter à M^5 ?

(b) On considère désormais le produit usuel de 2 matrices. Mêmes questions qu'au (a)

- Calculer M^2
- Que représentent M^2 ? M^3 ?
- On considère M*bis = M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 Que représente M*bis ? Pourquoi s'arrêter à M^5 ?