L3-INFO – INF6B
Structures discrètes
2021-2022

CM 01 - Introduction

Plan

1. **Définitions**

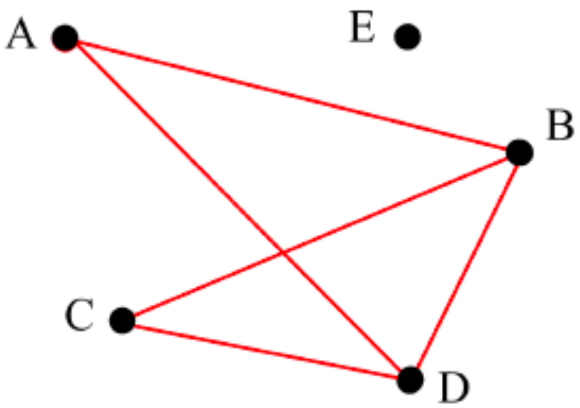
2. **Représentations d'un graphe**
    a. Matrice d'adjacence
    b. Listes de successeurs/prédécesseurs

3. **Premier aperçu (rapide) de problèmes résolus par les graphes**
    a. Parcours Eulérien
    b. Coloration des sommets d'un graphe

Définition 1.

- *Un **graphe** est un ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.*
- *Un **sommet** du graphe est un point du graphe. Le nombre de sommets est l'**ordre** du graphe.*
- *Une **arête** du graphe est une ligne reliant deux sommets. Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même.*
- *Un sommet est **isolé** lorsque aucune arête de le relie aux autres sommets.*
- *Un **graphe simple** est un graphe sans boucle tel que, entre deux sommets, il y ait au plus une arête. Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.*
- *Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées. Une arête orientée va d'un sommet vers un autre sommet, elle est représentée par une flèche.*
- *Le **degré** d'un sommet est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.*

Exemple cas non orienté :



Graphe 1

Le graphe 1 est un graphe simple d'ordre 5, de sommets A, B, C, D et E. Les sommets A et B sont adjacents, A et C ne le sont pas, E est un sommet isolé.

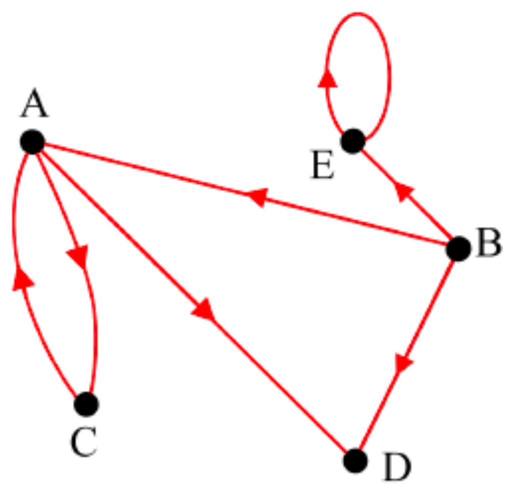
Un graphe est connexe lorsque, pour chaque paire de sommets, il existe au moins une chaîne reliant les deux sommets.

Graphe 1 n'est pas connexe car il possède un sommet isolé E

Définition 1.

- *Un* ***graphe*** *est un ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.*
- *Un* ***sommet*** *du graphe est un point du graphe. Le nombre de sommets est l'****ordre*** *du graphe.*
- *Une* ***arête*** *du graphe est une ligne reliant deux sommets. Une* ***boucle*** *est une arête reliant un sommet à lui-même.*
- *Un sommet est* ***isolé*** *lorsque aucune arête de le relie aux autres sommets.*
- *Un* ***graphe simple*** *est un graphe sans boucle tel que, entre deux sommets, il y ait au plus une arête. Deux sommets reliés par une arête sont* ***adjacents****.*
- *Un* ***graphe orienté*** *est un graphe dont les arêtes sont orientées. Une arête orientée va d'un sommet vers un autre sommet, elle est représentée par une flèche.*
- *Le* ***degré*** *d'un sommet est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.*

Exemple cas orienté :



Graphe 2

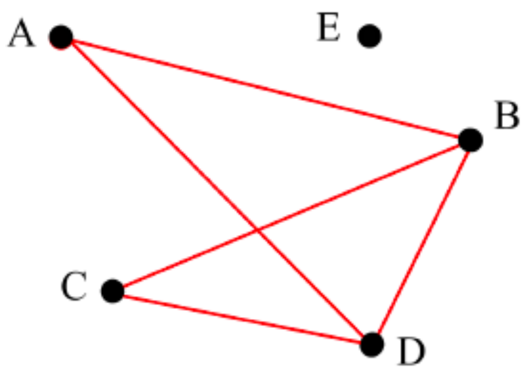
Le graphe 2 est un graphe orienté ayant 7 arcs.

Le sommet E est de degré 3 avec

- degré entrant 2
- degré sortant 1

> **Théorème 1.** *La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au double du nombre total d'arêtes.*

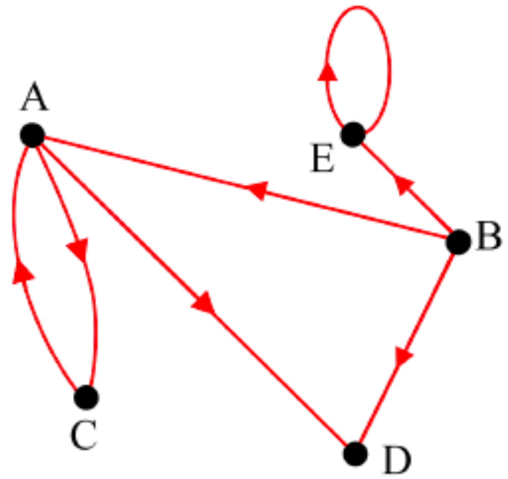
Exemple cas non orienté :



Graphe 1

Il y a 5 arêtes.
La somme des degrés est 2 + 3 + 2 + 3 + 0 = 2 x 5

Exemple cas orienté :



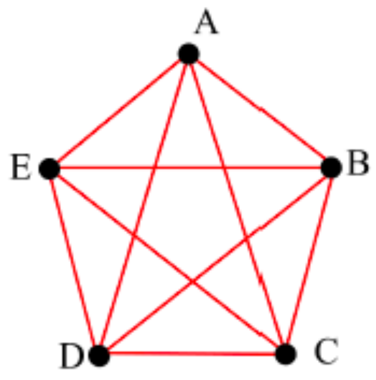
Graphe 2

Il y a 7 arcs.
La somme des degrés est 4 + 3 + 2 + 2 + 3 = 2 x 7

Quelle intuition pour démontrer théorème 1 ?

Définition 2. *Un* ***graphe complet*** *est un graphe simple dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres*

Exemple.



Graphe 3

Le graphe 3 est un graphe complet d'ordre 5.

Dans le graphe complet d'ordre n :

- le degré de chacun des sommets est $n - 1$
- le nombre d'arêtes est $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Le graphe 3 possède (5 x 4) / 2 = 10 arêtes

En effet,

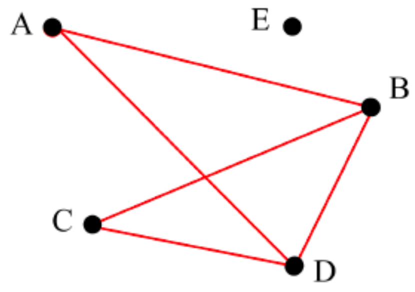
- A est relié à 4 sommets,
- B est relié à 3 autres sommets,
- C à 2 autres
- D à un seul autre.

Un graphe complet d'ordre n est aussi appelé clique d'ordre n

Définition 3. Cas non orienté :

Une chaîne est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets du graphe.

Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident, composée d'arêtes toutes distinctes.



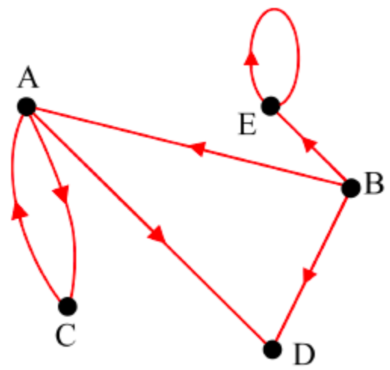
Graphe 1

A-D-B-C-D est une chaîne. B-C-D-A-B est un cycle.

Définition 3. Cas orienté :

Un chemin est une suite d'arcs mis bout à bout reliant deux sommets du graphe.

Un circuit est un chemin dont les extrémités coïncident, composée d'arcs tous distincts.



Graphe 2

B-A-C-A-D est un chemin.

A-C-A est un circuit.

2. Représentations d'un graphe

(Extrait du Cours d'Algo en L2-INFO d'Etienne Grandjean)

Matrice d'adjacence

On représente un graphe $G = (S, A)$ à n sommets avec une matrice M carrée $n \times n$ telle que

$$M[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i \to j \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Si le graphe est non orienté la matrice est symétrique.

Tableau des listes de successeurs

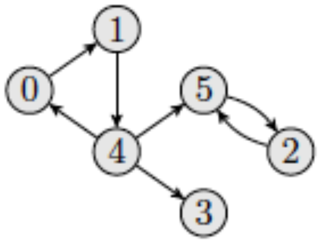
On représente un graphe $G = (S, A)$ à n sommets avec un tableau de n listes chaînées; la i-ème liste est la liste des successeurs du sommet i.

Tableau des listes de prédécesseurs

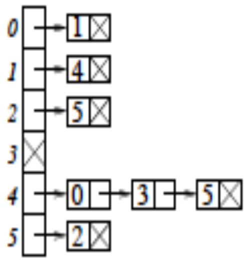
Autres points (traités par la suite du cours)

- Complexité spatiale de chacune des deux représentations
- Complexité temporelle induite par chacune des représentations
- Pour un problème donné, comment choisir la « bonne » représentation ?

Exemple. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{(0,1), (1,4), (2,5), (4,0), (4,3), (4,5), (5,2)\}$

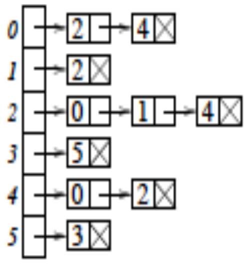


	0	1	2	3	4	5
0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	0	0



Graphe non orienté : $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{\{0,2\}, \{0,4\}, \{1,2\}, \{2,4\}, \{3,5\}\}$

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
2	1	1	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	1
4	1	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0



3. Parcours Eulérien

Définitions 4.

Soit G = (V, E) un graphe connexe non-orienté.

Un cycle eulérien de G est un cycle passant une fois et une seule par chacune des arêtes de E.

Une chaîne eulérienne de G est une chaîne passant une fois et une seule par chacune des arêtes de E.

G possède un parcours eulérien s'il possède une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

Théorème d'EULER *(graphe non-orienté)*

Soit G = (V, E) un graphe connexe non-orienté.

- si tous les sommets de G sont de degré pair, alors le parcours est un cycle

- si seuls 2 sommets (x, y) sont de degré impair, alors le parcours est une chaîne de x à y (ou de y à x)

- dans tous les autres cas, il n'existe pas de parcours eulérien de G.

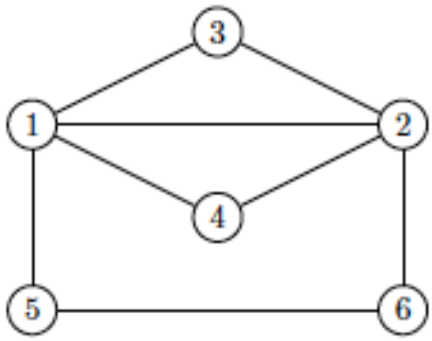
Applications : distribution du courrier, collecte des ordures ménagères

Théorème d’EULER ***(graphe non-orienté)***

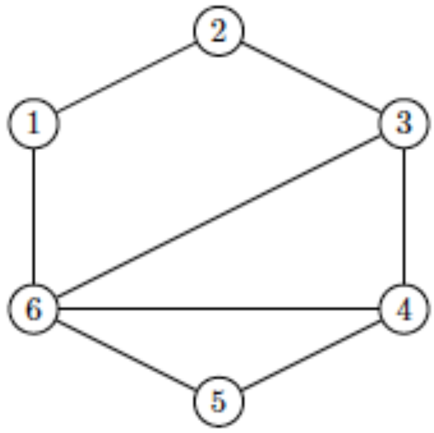
Soit G = (V, E) un graphe connexe non-orienté.

- si tous les sommets de G sont de degré pair, alors le parcours est un cycle
- si seuls 2 sommets (x, y) sont de degré impair, alors le parcours est une chaîne de x à y (ou de y à x)
- dans tous les autres cas, il n’existe pas de parcours eulérien de G.

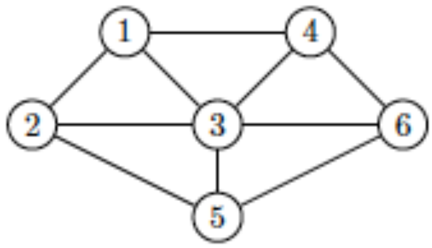
Chacun des graphes ci-dessous possède-t-il ou non un parcours eulérien ? Si oui, indiquer s’il s’agit d’un cycle ou d’une chaîne.



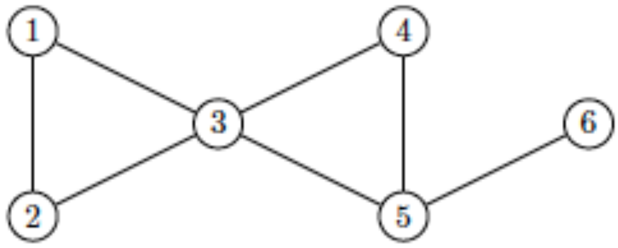
Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3



Graphe 4

Quelle intuition pour démontrer le théorème d’EULER (graphe orienté) ?

Quid du passage au cas orienté ?

4. Coloration des sommets d'un graphe

Exemple. Cinq étudiants doivent passer des écrits d'examen :

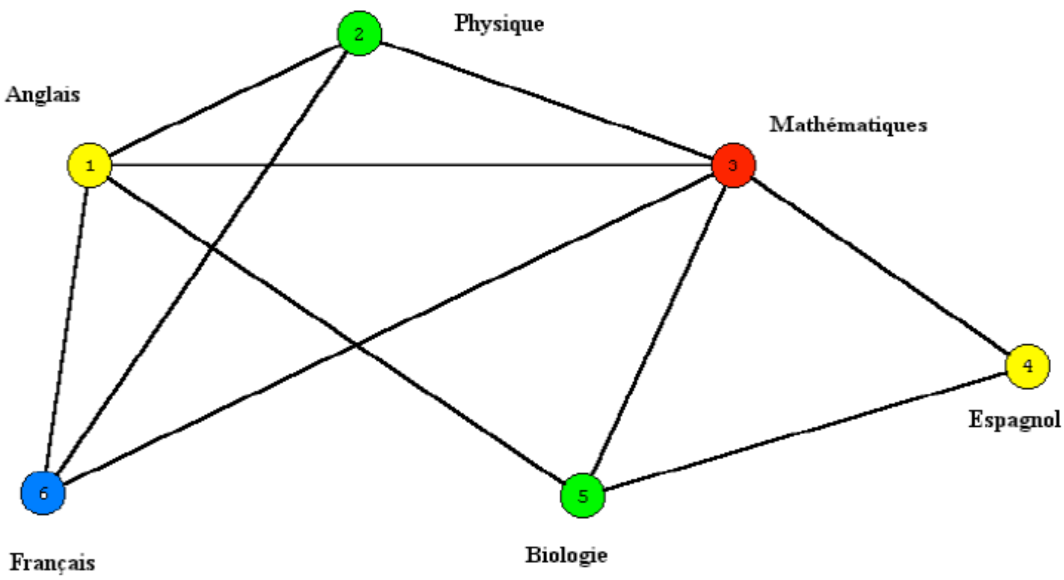
- Maxime en Anglais, Physique, Math
- Aude en Espagnol, Biologie, Math
- Marion en Math, Français, Anglais
- Amélie en Anglais, Biologie
- Laurent en Physique, Français

Chaque examen nécessitant une 1/2 journée, quelle est la durée minimale de la période des examens ?

Modélisation sous forme d'un problème de coloration.

- sommets = {Anglais, Physique, Math, Espagnol, Biologie, Français}
- arête entre 2 sommets i et j ssi il existe au moins un étudiant devant passer à la fois l'examen i et l'examen j
- 2 sommets adjacents ne peuvent être colorés de la même couleur.

Ci-dessous une solution avec 4 couleurs :

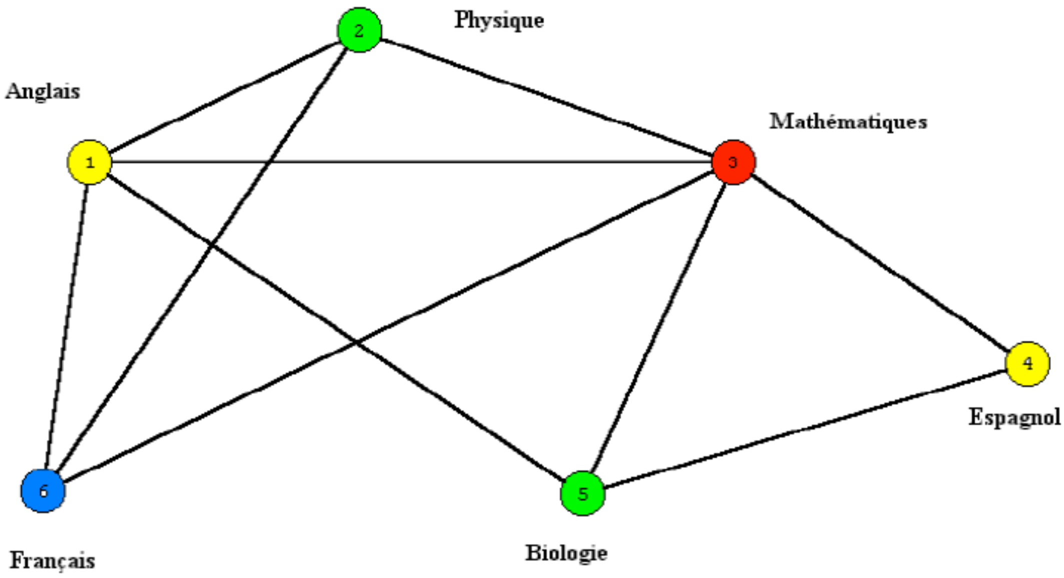


Définitions 5.

- Une k-coloration est une coloration des sommets utilisant k couleurs différentes, sachant que 2 sommets adjacents ne peuvent être colorés de la même couleur.

- Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit entier k pour lequel il existe k-coloration.

Reprenons la solution avec 4 couleurs :



Déterminer le nombre chromatique

Théorème : Pour colorer les sommets d'une k-clique, il faut utiliser k couleurs différentes.

(a) Les sommets Anglais, Math, Physique et Français forment une 4-clique.

→ le nombre chromatique est supérieur ou égal à 4.

(b) La solution obtenue utilise 4 couleurs.

→ le nombre chromatique est inférieur ou égal à 4.

(a) et (b) → le nombre chromatique est égal à 4.