

TD 3

Injections, surjections, bijections

EXERCICE 1 - Injections, surjections, bijections : sur un téléphone

Soit C l'ensemble des caractères composé de lettres (A, B, \dots, Z), de chiffres ($0, 1, 2, \dots, 9$), du dièse ($\#$) et de l'étoile ($*$). On définit f comme la fonction qui associe à un élément de C une touche de téléphone selon le clavier suivant :



Par exemple, $f(A)$ est la touche en haut au milieu.

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. la fonction f ;
2. la fonction f dont l'ensemble de départ est restreint aux lettres A, B, \dots, Z ;
3. la fonction f dont l'ensemble de départ est restreint aux chiffres $0, 1, \dots, 9$;
4. la fonction f dont l'ensemble de départ est restreint au dièse, à l'étoile et aux chiffres $0, 1, \dots, 9$.

EXERCICE 2 - Bijections

Montrer qu'il existe une bijection entre

1. \mathbb{N} et $\mathbb{N} \setminus \{0\}$,
2. l'ensemble des nombres entiers pairs et l'ensemble des nombres entiers impairs,

EXERCICE 3 - Encore des bijections

Montrer que les fonctions suivantes sont des bijections:

1. $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - 1$ est une bijection.
2. $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\text{ent}(x)}{2} + \text{dec}(x), & \text{si } \text{ent}(x) \text{ est pair} \\ -\frac{\text{ent}(x)+1}{2} - \text{dec}(x), & \text{si } \text{ent}(x) \text{ est impair} \end{cases}$$

où $\text{ent}(x)$ est la partie entière du nombre et $\text{dec}(x)$ est sa partie décimale.

En déduire qu'il existe une bijection en l'ensemble $[0, 1[$ et \mathbb{R}