TD 2 : Suite des bases

Exercice 1 (Livre de recettes)**.** On considère un livre de recettes de cuisine. On considère le graphe des ingrédients de ce livre : les sommets sont des ingrédients, et une arête entre deux ingrédients (distincts) a et b indique combien de recettes utilisent ces deux ingrédients ensemble.

1. De quel type de graphe s'agit-il ?

2. Écrire le pseudo-code des fonctions qui renvoient les informations suivantes. On pourra récupérer le poids d'une arête via la fonction `poids(a)` ou `poids(s, s')`.

   (a) Nombre d'ingrédients avec lesquels un ingrédient donné peut être combiné.

   (b) Ingrédient pour lequel il existe le plus de recettes qui le combinent à un ingrédient donné (en supposant qu'il est unique).

   (c) Ingrédient pouvant être combiné avec le plus d'ingrédients différents (en supposant qu'il est unique).

Exercice 2 (Nombre de sommets et degré)**.**

1. Montrez qu'un graphe simple non orienté a un nombre pair de sommets de degré impair.

2. Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ? Si oui, construire le graphe, sinon, écrire une démonstration.

Exercice 3 (Tournoi d'échecs)**.** Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes ; chaque personne doit affronter toutes les autres.

1. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles. Quel type de graphe obtenez-vous ?

2. On suppose que chaque participant·e ne joue qu'une partie par jour. Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des parties, en essayant de minimiser la durée du tournoi.

3. Démontrer qu'il n'est pas possible de trouver un calendrier plus court que le vôtre.

Exercice 4 (Voisins de Hamming)**.** On dit que deux entiers sont des *voisins de Hamming* si leur écriture binaire ne diffère que d'un seul bit. Par exemple, 11 et 9 sont des voisins de Hamming (il suffit de changer le bit de poids 2 pour passer de l'un à l'autre), de même que 13 et 29 (bit de poids 16). En revanche, 12 et 9 ne le sont pas (deux bits diffèrent), et 0 et 31 encore moins (5 bits diffèrent) — alors que 0 et 32 sont, eux, voisins.

1. Dessiner le graphe des voisins de Hamming pour les entiers de 0 à 7.

2. De quel type de graphe s'agit-il ?

3. Quel est le degré minimal et maximal des sommets du graphe ? Quelle propriété du graphe peut-on en déduire ?

4. Orienter à présent les arêtes, de façon à ce que la source d'un arc soit inférieure à sa destination.

5. Comment le fait qu'il y ait un arc de x à y se traduit-il sur l'écriture binaire de x et y ?

6. À quoi correspondent les degrés entrant et sortant d'un entier x ? (NB: la réponse attendue n'est correcte que parce qu'on a inclus *tous et seulement* les entiers représentables sur trois bits.)

Exercice 5 (Compléments sur le complémentaire)**.** On se place dans le contexte des graphes simples non orientés.

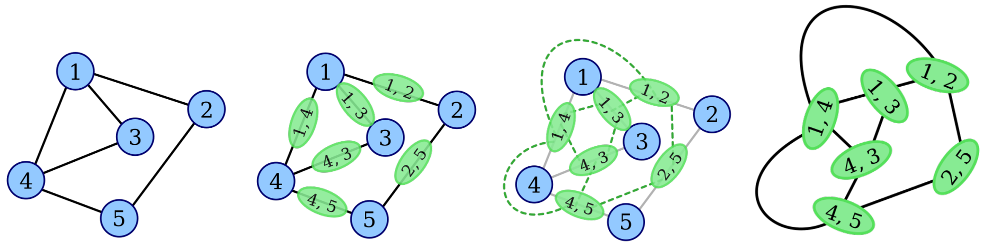
1. Existe-t-il un graphe G d'ordre 4 qui soit isomorphe à son complémentaire $\overline{G}$?

2. Existe-t-il un graphe G tel que $G = \overline{G}$? Justifier votre réponse par une démonstration.

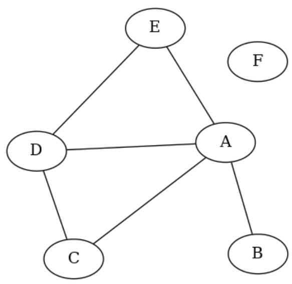
3. Écrire le pseudo-code d'une fonction qui renvoie le complémentaire d'un graphe donné en entrée. On pourra utiliser les fonctions suivantes :

   - créerGraphe() renvoie un nouveau graphe, sans sommet
   - ajouterSommet(G, s) ajoute un sommet s au graphe G (ou ne fait rien si s est déjà dans G)
   - ajouterArête(G, s, s') ajoute une arête entre les sommets existants s et s' dans G (ou ne fait rien si l'arête existe déjà dans G)
   - voisins(G, s, s') renvoie vrai si s et s' sont voisins dans G, et faux sinon.

Exercice 6 (Graphe adjoint)**.** On se place dans le contexte des graphes simples non orientés. Le graphe *adjoint* (*line graph*) d'un graphe $G = (S, A)$ est le graphe $L(G) = (S', A')$ où $S' = A$ et $x, y \in A' \iff x \cap y \neq \emptyset$. Autrement dit, les sommets de l'adjoint correspondent aux arêtes de G, et deux sommets sont adjacents ssi les arêtes correspondantes dans G sont incidentes à un sommet commun. Exemple de construction d'un graphe adjoint (piqué sur Wikipédia) :



1. Construire le graphe adjoint du graphe suivant :



2. Quel est le graphe adjoint de K_1 ?

3. Trouver un graphe G tel que $L(G)$ soit isomorphe à $\overline{K}_4$ (le graphe d'ordre 4 sans arête).

4. Trouver un graphe G tel que $L(G) = \overline{G}$.

5. Trouver un graphe G d'ordre 3 qui soit isomorphe à $L(G)$. Idem pour l'ordre 4.

6. Trouver un graphe G d'ordre 4 qui soit isomorphe à $L(L(G))$.

7. Écrire le pseudo-code d'une fonction qui construit le graphe adjoint d'un graphe donné en entrée. (On pourra s'aider d'un dictionnaire comme en Python.)