

TD 10 – Coloration des sommets d'un graphe

Exo 1. Un lycée doit prévoir les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs :

1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7,
2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7,
3 et 4, 3 et 6, 3 et 7,
4 et 5, 4 et 6,
5 et 6, 5 et 7
6 et 7.

On souhaite planifier les examens sur un nombre minimal de créneaux (noté nb_opt).

1. Modéliser ce problème sous la forme d'un problème de coloration des sommets d'un graphe (que l'on dessinera). On indiquera quels sont les sommets ? les arêtes ? et à quoi correspond nb_opt ?
2. Appliquer l'algorithme de Welsh et Powell sur ce graphe. On indiquera les différentes étapes.
3. En analysant la structure du graphe, proposer un minorant de nb_opt .
4. A l'aide des questions (2) et (3), déduire la valeur de nb_opt .

Exo 2. Tout graphe contenant un triangle (K_3) ne peut pas être *coloré en moins de trois couleurs*.

- 1) Construire un graphe sans K_3 qui nécessite également trois couleurs.
- 2) Comment, à partir du graphe précédent, construire un graphe sans K_4 nécessitant 4 couleurs ?
- 3) Comment construire un graphe sans K_5 nécessitant 5 couleurs ?

Exo 3. Exprimez la résolution d'un Sudoku classique en termes de coloration de graphe. Décrivez le graphe (nombre de sommets, nombre d'arêtes, etc.). Combien faut-il de couleurs ?

Exo 4.

On veut transporter des produits chimiques par le rail. A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit produits chimiques. Dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les produits ne peuvent pas être entreposés dans le même wagon, car il y aurait risque d'explosion :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		✕	✕	✕			✕	✕
B	✕				✕	✕	✕	
C	✕			✕		✕	✕	✕
D	✕		✕		✕			✕
E		✕		✕		✕	✕	
F		✕	✕		✕			
G	✕	✕	✕		✕			
H	✕		✕	✕				

Quel nombre minimum de wagons faut-il ?