

TD 1

Ensembles

EXERCICE 1 - Ensemble des opérateurs

Traduire les phrases suivantes dans leur notation mathématique:

1. Soient deux ensembles P et R , pour tout élément appartenant à l'ensemble P , l'élément appartient également à l'ensemble R .
2. Tous les pokémons ont des noms ridicules.
3. Soient E un ensemble d'étudiants et $note : E \rightarrow [0, 20]$ la fonction qui attribue une note de projet à un étudiant. Soient P l'ensemble des tâches à effectuer dans le projet et $travail : E \rightarrow \mathcal{P}(P)$. Si un étudiant n'a rien fait, sa note est de 0.
4. Soit $compile : \mathcal{P}(P) \rightarrow \{Vrai, Faux\}$, une fonction qui détermine si un ensemble de tâche effectuée pour un projet compile. Si l'ensemble des tâches effectuées par un binôme d'étudiants ne compile pas, leur note est de 0.
5. Il existe des pokémons de type feu qui peuvent gagner contre des pokémons de type eau.
6. Il existe des contenus Netflix que tous les utilisateurs ont déjà vu (on utilisera la notion d'ensemble des parties pour cette question).

EXERCICE 2 - Exemples d'image directe et d'image réciproque

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Déterminer
 - (a) l'image directe de $A = \{-2, 3\}$ par f ;
 - (b) l'image de f .
 - (c) l'image réciproque de $A = \{4, 9\}$ par f ;
 - (d) l'image réciproque de \mathbb{R}_- par f ;
 - (e) l'image directe de $[-1, 4]$ par f ;
 - (f) l'image réciproque de $[-1, 4]$ par f .
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer selon la valeur de a , l'image réciproque $f^{-1}(\{a\})$.
3. On considère la fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Quelle est l'image directe, par \sin , de \mathbb{R} ? De $[0, 2\pi]$? de $[0, \pi/2]$? Quelle est l'image réciproque, par \sin , de $[0, 1]$? de $[3, 4]$? de $[1, 2]$?

EXERCICE 3 - Fonction ou application?

Pour les fonctions suivantes, donnez l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et le domaine de définition de la fonction. En déduire s'il s'agit d'une application.

```
int addition(int x, int y){
    return x+y;
}

double racine(double x){
    return sqrt(x);
}

int recherche(int [] tab, int n, int x){
    int pos = 0;
    while(pos < n){
        if(tab[pos] == x)
            return pos;
        pos++;
    }
    return -1;
}
```

EXERCICE 4 - Ensembles et images réciproques

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$. Soient également A et B deux parties de F .

1. Démontrer que $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque est-elle vraie?
2. Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. Démontrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.