Université de Caen
UFR des Sciences

Année 2021 – 2022

Licence Informatique deuxième année
Mathématiques discrètes
Examen Terminal- première session – jeudi 16 décembre de 15h à 17h
Durée 2 heures

Aucun document autorisé.
Calculatrices, ordinateurs , tablettes et téléphones portables sont interdits.

Les exercices peuvent être faits dans l'ordre de votre choix. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet. Ne bâclez donc pas les exercices abordés. Prenez soin de bien rédiger et de justifier chacune de vos réponses.
La notation prendra en considération la qualité de la rédaction.

> Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie réservé à cet usage ; il le cachettera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Sur chacune des copies intercalaires, il portera son numéro de place et numérotera chaque copie.

Exercice 1. **Induction sur les arbres binaires.**

Question 1. Redonnez la définition d'un arbre binaire localement complet.
Soit *Alc* l'ensemble des arbres binaires localement complets. Donnez le schéma d'induction de l'ensemble *Alc* .

On définit inductivement une application qui attribue une valeur $V(A)$ à tout arbre binaire A.

i) Si A est l'arbre vide alors $V(A) = 0$ et si A est l'arbre racine alors $V(A) = -1$.
i) soit $A = (\cdot, A_g, A_d)$ un arbre binaire différent de l'arbre vide et de l'arbre racine.
$V(A) = V(A_g) + V(A_d) + 1$.

Question 2. Donnez un arbre binaire à 5 nœuds A tel que $V(A) \neq -1$.

Question 3 . Montrez par induction que tout arbre localement complet A vérifie $V(A) = -1$.

Exercice 2. **Relations binaires**

Rappels sur la division euclidienne : on considère la division euclienne d'une entier $n \in Z$ par 10. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe deux uniques valeurs q et r tels que $n = 10q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, \ldots, 9\}$. r est appelé le quotient et r le reste.
On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire R par

$$xRy \text{ lorsque } x \text{ et } y \text{ ont le même quotient.}$$

Question 1. Rappelez les propriétés que vérifie une relation d'équivalence.
Redonnez à chaque fois la définition de la propriété.

Question 2. Montrez que R est une relation d'équivalence.

Question 3. Déterminer la classe équivalence de 150.

Exercice 3. Probabilités

On jette six fois un dé à cinq faces numérotées de 1 à 5.

Question 1. Donnez E, l'espace de probabilité.
On suppose que nous avons l'équiprobabilité. Donnez la probabilité pour chaque résultat possible de l'espace de probabilité. Donnez la probabilité que le dé tombe les six fois sur un entier pair. Expliquez votre calcul.

Question 2. On définit sur E une variable aléatoire Y donnant le nombre de fois où le dé est tombé sur un entier pair. Calculez l'espérance et la variance de Y.

Question 3. On suppose maintenant que le dé est truqué. Il a une chance sur deux de tomber sur 1, les autres faces restent équiprobable pour ce dé.
Calculez à nouveau l'espérance et la variance de Y.

Exercice 4. Combinatoire et probabilités

On suppose que les naissances sont réparties uniformément sur les jours de la semaine (du lundi au dimanche). Soit n un entier naturel et on s'intéresse au jour de semaine correspondant à la date de naissance d'une ersonne. Considérons un groupe de n personnes.

Question 1. Donnez l'espace probabilisé et la distribution de probabilité.

Nous noterons p_n la probabilité que deux personnes de ce groupe soient nées le même jour de la semaine pour $n \geq 2$.

Question 2. Calculez p_n lorsque $n > 7$.

Question 3. Calculez p_2 probabilité que deux personnes soient nées le même jour de la semaine.

Question 4. On suppose maintenant que $n \leq 7$, calculez p_n.

Question 5. Déterminez n_0 le plus petit entier n tel que $p_n \geq 1/2$.

Exercice 5. Ensembles Soit E un ensemble. Si A est un sous-ensemble de E on notera $\mathcal{C}_E^A$ le complémentaire de A dans E. Soit A et B deux sous ensembles de E.

Question 1. Redonnez la définition de $A\Delta B$.

Question 2. Que peut-on dire des ensembles $A\Delta A$, $A\Delta\mathcal{C}_E^A$, $A\Delta E$ et $A\Delta\emptyset$?

Question 3. Soit A et B deux sous ensembles de E. Montrer que $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \emptyset$.

Exercice 6. Anagrammes

Question 1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot PIKACHU ?

Question 2. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot PIKACHU tels que les 4 consonnes (P,K,C,H) et les 3 voyelles (I,A,U) soient alternées comme dans KIPACUH ?

Question 3. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot RONDOUDOU ?

Question 4. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot PIKACHU pour lesquels les 3 voyelles I, A et U sont les unes à côté des autres ?

Question 5. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot PIKACHU dans lesquels il n'y a pas le mot PIK ni le mot CHU ?

Exercice 6. **Injection, surjection, bijection** : Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B.

Question 1. Quand dit-on que f est une application injective ? surjective ? bijective ?

Question 2. On définit l'application f par

$$f \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (xy,\, x-y) \end{array}$$

Montrer que f n'est pas surjective. Est-elle injective ? bijective ?

Question 3. On définit l'application g par

$$g \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x+y+1,\, 2x-y-1) \end{array}$$

Montrer que g est une application bijective et déterminer l'application réciproque de g.