Université de Caen — Année 2018 – 2019

UFR des Sciences

Licence Informatique deuxième année – Mathématiques discrètes

Examen Terminal- première session - 20 décembre 2018 – Durée 2 heures – Correction

Exercice 1 Jeu du Mastermind

Fernand et Raoul jouent au mastermind. Le jeu comporte quatre trous que nous numéroterons $1, 2, 3, 4$ et des pions de six couleurs notées A, B, C, D, E, F. Pour cette partie, c'est à Fernand de trouver la bonne combinaison. Fernand joue le premier coup et Raoul donne le nombre de pions bien placés et le nombre de pions mal placés sans indication de position. Voici ci-dessous un exemple de début de partie. Nous avons au premier tour 1 pion bien placé et 2 pions mal placés mais on ne sait pas lesquels ni où.

1	2	3	4	
A	F	C	B	premier tour, nombre de pions placés : 1, nombre de pions mal placés : 2
C	A	E	B	exemple de second tour

Dans cet exemple, pour jouer le second tour, Raoul a supposé que le pion bien placé est B et les pions mal placés sont A et C Il garde donc B et change A et C de place. Il propose ensuite une couleur qu'il n'a pas encore jouée pour le quatrième pion (la lettre E).

Question 1. Donnez le nombre de solutions possibles pour ce second tour si l'on suppose que Fernand sait que Raoul a choisi quatre couleurs différentes.

Solution principe des choix successifs : quatre choix successifs
le choix du pion bien placé : 4 possibilités
le choix des deux pions mal placés : 2 parmi 3, 3 possibilités
la place de ces deux pions : 3 possibilités (échange de place des deux ou l'un des deux seulement prend la place de l'autre)
choix du quatrième pion : il reste deux couleurs possibles, donc 2 possibilités
Au total : $4 * 4 * 3 * 2 = 96$ possibilités

Quand il joue, Raoul a pour habitude de choisir toujours quatre couleurs différentes car il pense qu'il y a plus de possibilités. Fernand pense que c'est faux.

Question 2. Calculez le nombre de combinaisons pour le choix de départ avec quatre couleurs différentes.

Solution Principe des choix successifs. Deux choix successifs.
Choix des quatre couleurs, 2 parmi 6, 15 possibilités
Choix des places des quatre pions, nombre de permutations, $4! = 24$
Au total : $15 * 24 = 360$

Question 3. Calculez le nombre de combinaisons pour le choix de départ avec une couleur choisie deux fois et deux autres couleurs (par exemple, $D\ E\ D\ A$).

Solution Choix de la couleur choisie deux fois, 6 possibilités
Choix de la place des deux pions de cette couleur, 2 parmi 4, 6 possibilités
Choix des deux autres couleurs, 2 parmi 5, 10 possibilités
Choix de la place des deux derniers pions, 2 possibilités
Total $6 * 6 * 10 * 2 = 720$ possibilités.

Question 4. Que conseillez-vous donc aux deux joueurs ?

Solution Je conseille aux deux joueurs de faire comme Fernand, de prendre deux pions de la même couleur.

Exercice 2 Induction sur les arbres
On rappelle qu'un arbre binaire est localement complet lorsqu'il n'est pas vide et que chaque noeud soit est une feuille, soit possède deux fils (c'est à dire que ses noeuds ont soit aucun soit deux fils.)

Question 1. Redonnez le schéma d'induction des arbres localement complets.
Solution (i) $\cdot$ est un arbre localement complet, $\cdot$ appartient à LC.
(ii) Soit B et C deux arbres de LC, alors $A = (\cdot, B, C)$ appartient à LC.

Question 2. On définit une fonction f telle que $f(\cdot) = 1$ et si $A = (\cdot, B, C)$ (A est constitué des deux sous-arbres B et C) alors $f(A) = 2\max(f(B), f(C))$.
Montrez par induction sur les arbres localement complets que l'on a, pour tout arbre localement complet A, $f(A) = 2^{h(A)}$, où $h(A)$ est la hauteur de A.
Solution Posons $P(A)$ la propriété $f(A) = 2^{h(A)}$.
Montrons par induction que tout arbre A de LC vérifie $P(A)$.
(i) Soit $A = \cdot$. On a $f(A) = 1$ et $h(A) = 0$ donc $P(A)$ est vraie.
(ii) Soient B et C de LC et $A = (\cdot, B, C)$. Supposons que $P(B) et P(C)$ soient vraies. Nous avons donc $f(B) = 2^{h(B)}$ et $f(C) = 2^{h(C)}$. Par définition, $f(A) = 2\max(f(B), f(C))$. Supposons $f(A) = 2f(B)$. Donc $h(B) \geq h(C)$ par HI. Il vient

$$f(A) \quad = \quad 2f(B) = 2 * 2^{h(B)} = 2^{h(B)+1}.$$

Or, par définition de la hauteur, $h(A) = h(B) + 1$. Par conséquent, $P(A)$ est vraie.
Par le principe de la démonstration par induction, nous avons montré $P(A)$ vraie pour tout $A \in LC$.

Exercice 3
Soient E un ensemble et A, B et C deux sous-ensembles de E. Nous noterons $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E et utiliserons la même notation pour tout sous-ensemble de E.
Montrez que l'on a

$$A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = \Big((A \setminus B) \cup (A \setminus C)\Big).$$

Solution Montrons $A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \subset \Big((A \setminus B) \cup (A \setminus C)\Big)$.
Soit $x \in A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$. Nous avons donc $x \in A$ et $x \in (\overline{B} \cup \overline{C})$. Il vient $x \in \overline{B}$ ou $x \in \overline{C}$.

cas 1 : supposons que $x \in \overline{B}$. Il vient $x \notin B$ donc $x \in A \setminus B$.
cas 2 : Supposons que $x \in \overline{C}$. Il vient $x \notin C$ donc $x \in A \setminus C$.

Donc dans les deux cas, nous avons $x \in \Big((A \setminus B) \cup (A \setminus C)\Big)$.

Montrons maintenant $\Big((A \setminus B) \cup (A \setminus C)\Big) \subset A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$.
Soit $x \in \Big((A \setminus B) \cup (A \setminus C)\Big)$. Nous avons donc $x \in A \setminus B$ ou $x \in A \setminus C$.

cas 1 : supposons que $x \in A \setminus B$. Il vient $x \in A$ et $x \notin B$ et donc $x \in \overline{B}$.
cas 2 supposons $x \in A \setminus C$ alors $x \in A$ et $x \notin C$ et donc $x \in \overline{C}$.

Dans les deux cas, nous avons $x \in A$ et soit $x \in \overline{B}$, soit $x \in \overline{X}$, par conséquent $x \in A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$.

Exercice 4 Injection, surjection, bijection
On considère la fonction f de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Question 1. Montrez que f est bijection. Vous donnerez la fonction réciproque f^{-1}.
Solution f est une bijection si elle est injective et surjective.
Montrons que f est injective.
Soient (x_1, y_1) et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Nous avons donc le système

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x_1 - y_1 & = & x_2 - y_2 & \quad (1) \\ x_1 + y_1 & = & x_2 + y_2 & \quad (2) \end{array} \right.$$

Ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{lcll} 2x_1 & = & 2x_2 & \quad (1) + (2) \\ 2y_1 & = & 2y_2 & \quad (2) - (1) \end{array} \right.$$

Et donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x_2 \\ y_1 & = & y_2 \end{array} \right.$$

Donc $x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Par conséquent f est injective.
Montrons maintenant que f est surjective.
Soit $(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x - y & = & X \\ x + y & = & Y \end{array} \right.$$

Nous obtenons l'unique solution

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \frac{X+Y}{2} \\ y & = & \frac{Y-X}{2} \end{array} \right.$$

Par conséquent f est surjective.
Comme f est à la fois injective et surjective, c'est donc une bijection.
Le dernier système nous permet d'obtenir la fonction réciproque,

$$f^{-1}(x, y) = ((x + y)/2, (y - x)/2)).$$

Question 2. Supposons maintenant que f est définie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, montrez que f n'est plus une bijection.
Solution Prenons $(X, Y) = (1, 0)$. L'antécédent par f doit être $(1/2, -1/2)$ qui n'appartient à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donc f n'est pas surjective. Par conséquent, f n'est pas une bijection.

Exercice 5
On considère la chaîne de caractères "MERRY CHRISTMAS" (15 caractères dont un caractère espace).
Question 1. Combien y a -t-il d'anagrammes différents de cette chaîne ?
Solution Notons E l'ensemble des anagrammes. Lorsque toutes les lettres sont différentes, un anagramme est une permutation et nous avons 15! permutations donc 15! anagrammes.
Regardons maintenant les lettres qui apparaissent plusieurs fois. R apparait trois fois et S et M apparaissent chacune deux fois. Il faut diviser par le nombre de permutations possibles entre ces lettres.
Le total est donc $n_1 = card(E) = \dfrac{15!}{2 \times 2 \times 3!} = \dfrac{15!}{24}$.

Question 2. On ne veut pas des anagrammes qui commencent ou finissent par un espace. Combien reste-t-il d'anagrammes différents ?
Solution un anagramme obtenu en retirant l'espace est un anagramme sur 14 caractères avec trois fois la lettre R et deux fois la lettre S.

Soit m_2 le nombre de tels anagrammes. En reprenant le raisonnement de la question 1, on obtient $m_2 = \frac{14!}{24}$. Pour chacun de ces anagrammes, on obtient un anagramme avec un espace devant et un anagramme avec un espace derrière. Donc le nombre d'anagrammes avec un espace au début ou à la fin vaut $2m_2$. L'ensemble des anagrammes ne commençant pas et ne finissant pas par un espace est le complémentaire de l'ensemble des anagrammes avec un espace au début ou à la fin. Son cardinal vaut donc $n_1 - 2m_2$.

Question 3. Combien y a-t-il d'anagrammes différents qui ne contiennent ni CH ni TA ?
Solution Nous allons utiliser le principe d'inclusion-exclusion.
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des anagrammes contenant CH, $\mathcal{B}$ l'ensemble des anagrammes contenant TA. Comme nous pouvons pour calculer $card(\mathcal{A})$ remplacer CH par une lettre, il vient $card(\mathcal{A}) = m_2$. De même, $card(\mathcal{B}) = m_2$.
Pour dénombrer l'ensemble $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, on remplace CH et TA par une lettre et l'ensemble correspond donc aux anagrammes avec 13 caractères, d'où $card(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = m_3 = \frac{13!}{24}$.
En appliquant le principe d'inclusion-exclusion, nous obtenons

$$\begin{aligned} card(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) &= card(\mathcal{A}) + card(\mathcal{B}) + card(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}). \\ &= m_1 + m_2 - m_3. \end{aligned}$$

L'ensemble des mots ne contenant ni CH ni TA, est le complémentaire de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.
Soit n_3 le nombre d'anagrammes ne contenant ni CH ni TA. Il vient

$$\begin{aligned} n_3 &= card(E) - card(A \cup B). \\ &= n_1 - (m_2 + m_2 - m_3) \\ &= \frac{15!}{24} - \frac{14!}{12} + \frac{13!}{24} \end{aligned}$$

Exercice 6
Un joueur lance un dé à 6 faces. Si le dé tombe sur le 6 le joueur gagne 20 euros, si le dé tombe sur le 1 alors il perd 25 euros. Si le dé tombe sur une des autres faces le gain est de 5 euros.

Question 1. On suppose que le dé est bien équilibré. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain. Déterminer la distribution de probabilité de cette variable aléatoire.
Que vaut l'espérance de cette variable ? Le jeu est-il équitable ? Si ce n'est pas le cas, combien faut-il miser pour qu'il le soit ?
Solution L'espace de probabilité est $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Soit r le résultat du dé, comme le dé est équilibré, la distribution de probabilités P est la distribution uniforme. Nous avons

$$\Pr(r = i) = 1/6,$$

pour tout $i \in D$.
On rappelle qu'un évènement E de D est un sous-ensemble de D, $E \subset D$ ou encore une partie de D, $E \in P(D)$. Dans le cas de la distribution uniforme, la probablité d'un évènement E ne dépend que de son cardinal :

$$\Pr(r \in E) = \frac{card(E)}{cardD}.$$

Pour chaque valeur i prise par la variable aléatoire X, nous avons « X = i » qui constitue un évènement. IL vient donc

$\ll X = 20 \gg = \{6\}$, $\Pr(X = 20) = \Pr(r = 6) = 1/6$.
$\ll X = -25 \gg = \{1\}$, $\Pr(X = -25) = \Pr(r = 1) = 1/6)$.
$\ll X = 5 \gg = \{2, 3, 4, 5\}$, $\Pr(X = 5) = \Pr(r \in \{2, 3, 4, 5\}) = 4/6$.

$$E[X] = 20 * 1/6 - 25 * 1/6 + 5 * 4/6 = (20 - 25 + 20)/6 = 15/6.$$

Pour que le jeu soit équitable, il faut que l'espérance soit nulle. En misant $15/6$ à chaque fois nous obtenons comme gain la variable aléatoire $Z = X - 15/6$.
Par linéarité de l'espérance, $E[Z] = E[X] - 15/6 = 0$. Le jeu est donc équitable.

Question 2. En fait le dé n'est pas équilibré. La probabilité d'obtenir le 6 est 3 fois plus grande que celle d'obtenir les autres faces (qui elles ont toutes la même probabilité).
Quelle est la probabilité d'obtenir le 6 ? le 1 ?
Déterminez la distribution de probabilité de X et l'espérance de X dans ce cas.
Solution Il existe $t \in [0, 1]$ tel que $P(r = 6) = t$ et $P(r = i) = t/3$, pour $i \neq 6$. Comme cela définit une distribution de probabilité, nous avons $t + 5 \times t/3 = 1$ et comme $t(1 + 5/3) = t \times 8/3$, il vient $t = 3/8$. Nous pouvons maintenant calculer l'espérance de X.

$$E[X] = 20 * 3/8 + 5 * 4 * 1/8 - 25 * 1/8 = (60 + 20 - 25)/8 = 55/8.$$

Exercice 7
Soit E un ensemble, x un élément fixé de E. On définit la relation $\mathfrak{R}$ sur l'ensemble des parties de E par : $A \,\mathfrak{R}\, B$ si et seulement si $x \in A \cup \overline{B}$ (où $\overline{B}$ désigne le complémentaire de B dans E).
Quelles sont les propriétés vérifiées par cette relation parmi les propriétés suivantes ?
1) réflexivité, 2)irréflexivité, 3) symétrie, 4) antisymétrie, 5) transitivité.
Solution

1. réflexivité : soit $A \in \mathcal{P}(E)$, nous avons donc $A \cup \overline{A} = E$ et par conséquent $x \in A \cup \overline{A}$ et $A\mathfrak{R}A$. Donc la relation est réflexive.
2. irréflexivité : comme $\mathfrak{R}$ est réflexive, elle n'est pas irréflexive.
3. symétrie : soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A\mathfrak{R}B$. Supposons $x \in A$ et $x \notin B$ (c'est possible car A et B peuvent être n'importe quels sous-ensembles de E).
   Nous avons alors $x \notin B \cup \overline{A}$ et donc non $B\mathfrak{R}A$.
   Par conséquent, $\mathfrak{R}$ n'est pas symétrique.
4. antisymétrie : soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A\mathfrak{R}B$. Supposons $x \in A$ et $x \in B$ (c'est possible car A et B peuvent être n'importe quels sous-ensembles de E).
   Nous avons alors $x \in B \cup \overline{A}$ et donc $B\mathfrak{R}A$.
   Par conséquent, $\mathfrak{R}$ n'est pas antisymétrique.
5. transitivité : soient A, B et $C \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A\mathfrak{R}B$ et $B\mathfrak{R}C$.
   Donc $x \in A \cup \overline{B}$ et $x \in B \cup \overline{C}$.
   Nous allons considérer deux cas, $x \in A$ et $x \in \overline{B}$.
      cas 1, $x \in A$: $x \in A \cup \overline{C}$ et par conséquent $A\mathfrak{R}C$.
      cas 2, $x \notin A$: $x \in A \cup \overline{B}$ et comme $x \notin A$, nous avons $x \in \overline{B}$, autrement dit $x \notin B$.
      Comme $x \in B \cup \overline{C}$, nous avons $x \in \overline{C}$ et donc $x \in A \cup \overline{C}$.
      Par conséquent nous avons $A\mathfrak{R}C$.
   Dans les deux cas $A\mathfrak{R}C$, par conséquent $\mathfrak{R}$ est transitive.

Exercice 8
Dans $\mathbb{N}$, on définit une relation $<<$ par $x << y$ s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $y = mx$.
Montrer que $<<$ est une relation d'ordre partiel large sur $\mathbb{N}$.

Pour montrer que $<<$ est une relation d'ordre partiel large sur $\mathbb{N}$ nous devons montrer qu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
Solution

— réfléxivité : soit $x\mathbb{N}$, nous avons $x = 1 * x$ par conséquent $x << x$ et x est réflexive.
— antisymétrie : soient x et $y \in \mathbb{N}$ tels que $x << y$. Par définitionde $<<$, il existe $m \in N$ tel que $y = mx$. Supposons $y << x$. Alors $x = 1/my$. Donc on doit avoir $1/m \in \mathbb{N}$ ce qui entraîne $m = 1$ et donc $y = x$. Donc la relation est antisymétrique.
— transitivité : soient x, y et $z \in \mathbb{N}$ tels que $x << y$ et $y << z$. Par définition de $<<$, il existe m_1 et $m_2 \in \mathbb{N}$ tels que $y = m_1x$ et $z = m_2y$. ill vient $z = m_1m_2x$ et donc $x << z$, la relation est transitive.

La relation est réflexive, antisymétrique et transitive, donc une relation d'ordre partiel large.

Exercice 9
Un site internet demande aux utilisateurs de définir un mot de passe de 8 caractères avec comme symboles des minuscules, des majuscules et des chiffres.
Nous noterons $N_l = 26$ le nombre de minuscules (qui est aussi le nombre de majuscules) et $N_C = 10$ le nombre de chiffres.

Question 1. Donnez le nombre de mots de passe possibles pour les utilisateurs de ce site internet.
Solution Le nombre de mots de longueur k que l'on peut former à partir d'un alphabet de cardinal n est n^k. Nous avons donc $n_1 = (26 + 26 + 10)^8 = 62^8$.

Question 2. Le site internet ajoute maintenant la contrainte d'utiliser au moins une majuscule et au moins un chiffre. Donnez le nombre de mots de passe de 8 caractères ayant au moins une majuscule et au moins un chiffre.
Solution On utilise le principe d'inclusion-exclusion.
— le nombre de mots de passe sans majuscule vaut $k_1 = (26 + 10)^8 = 32^8$.
— le nombre de mots de passe sans chiffre vaut $k_2 = (26 + 26)^8 = 52^8$.
— le nombre de mots de passe sans majuscule et sans chiffre vaut $k_3 = 26^8$.
— soit n_2 nombre de mots de passe avec au moins une majuscule et un chiffre

$$n_2 = n_1 - (k_1 + k_2 - k_3) = 62^8 - 32^8 - 52^8 + 26^8.$$

Question 3. Le terme "au moins un" est souvent compris par les utilisateurs comme « exactement un ». Donnez le nombre de mots de passe de 8 caractères contenant exactement une majuscule et un chiffre.
Solution On applique le principe des choix successifs
Choix de la majuscule, 26 possibilités
Choix de la place de la majuscule, 8 possibilités
Choix du chiffre, 10 possibilités
Choix de la place du chiffre, 7 possibilités
Choix du mot avec des minuscules, 26^6 possibilités
Total $n_3 = 26 * 8 * 10 * 7 * 26^6 = 560 * 26^7$.

Question 4. La plupart des utilisateurs décide de mettre la majuscule en première position et le chiffre en dernière position.
Combien de mots de passe de 8 caractères contenant exactement une majuscule et un chiffre à ces positions peut-on alors former ?
Comparez avec le résultat des trois questions précédentes.
Solution Soit n_4 le nombre recherché.

$$n_4 = n_3/(8 * 7) = n_3/56 = 10 * 26^7.$$

Nous avons 56 fois moins de possibilités qu'avec n_2. La contrainte donnée par le site internet n'est donc pas pertinente pour tous ceux qui vont l'appliquer avec « exactement un ».