

TD 1 : Bases

Remarque : quand on demande quel est le type d'un graphe, la réponse est de la forme : graphe orienté ou non, avec ou sans arêtes multiples, avec ou sans boucles, valué ou non...

Exercice 1 (Graphes sur le web). On considère les graphes suivants :

- le graphe des *followers* sur Twitter (chaque compte peut suivre n'importe quel autre compte)
- le graphe des ami·es sur Facebook (deux personnes ne peuvent être amies que si elles sont d'accord toutes les deux)
- le graphe de tous les liens entre pages sur Wikipédia
- le graphe indiquant quelles pages sont liées à quelles autres sur Wikipédia

1. Répondre aux questions suivantes pour chacun des graphes.
 - (a) que représentent les sommets et les arêtes/arcs ?
 - (b) de que type de graphe s'agit-il ?
 - (c) à quoi correspond l'ordre du graphe ?
 - (d) à quoi correspond le degré d'un sommet (ou les degrés entrant et sortant) ?
2. On va maintenant écrire des algorithmes pour répondre à des questions sur le graphe de Twitter. On s'autorise les opérations suivantes sur un graphe orienté :
 - parcourir ses sommets ;
 - parcourir ses arcs ;
 - parcourir les arcs sortants ou entrants d'un sommet donné ;
 - récupérer les extrémités d'un arc donné via des fonctions `source()` et `dest()`.Écrire le pseudo-code des fonctions renvoyant les informations suivantes. (NB : elles prennent toutes en entrée le graphe, en plus de leur éventuel paramètre).
 - (a) Nombre de comptes Twitter.
 - (b) Nombre de comptes suivis par un compte donné en entrée.
 - (c) Nombre de *followers* d'un compte donné en entrée.
 - (d) Nombre de comptes ayant plus de 1000 *followers*.
 - (e) Nombre maximal de *followers*.
 - (f) Compte le plus suivi (en supposant qu'il est unique).

Exercice 2 (Bises du nouvel an). Un groupe de n ami·es provenant de différentes régions fêtent ensemble le nouvel an. À minuit, tout le monde se fait la bise.

1. Supposons tout d'abord que chaque personne fasse exactement une bise à chaque autre personne.
 - (a) Représenter la situation par un graphe quand $n = 4$.
 - (b) De quel type de graphe s'agit-il ?
 - (c) Ce graphe fait partie d'une classe particulière, laquelle ?
 - (d) Quel est le nombre total de bises échangées dans le cas général (en fonction de n) ?
2. Fixons maintenant $n = 5$, mais cette fois les personnes ne font pas toutes le même nombre de bises (en fonction de leur région d'origine) :
 - Anaïs et Bertrand ont l'habitude de faire une seule bise ;
 - Claude et Dominique ont l'habitude de faire deux bises ;
 - Étienne a l'habitude de faire trois bises.

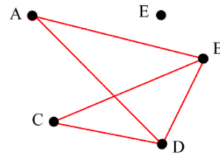
La convention du groupe est que lorsqu'une paire d'amis se font la bise, c'est le nombre de bises le plus grand qui est choisi.

- Représenter la situation par un graphe. De quel type de graphe s'agit-il ?
- Quel est le nombre total de bises échangées ?
- On va écrire des algorithmes sur de tels «graphes des bises» (de taille quelconque), en s'autorisant les opérations suivantes sur un graphe :
 - parcourir ses sommets ;
 - parcourir ses arêtes ;
 - parcourir les arêtes incidentes et/ou les sommets adjacents d'un sommet donné ;
 - récupérer les extrémités et le poids d'une arête donné via des fonctions `extremites()` et `poids()`.
 Écrire le pseudo-code des fonctions qui renvoient les informations suivantes.
- Nombre total de bises échangées.
- Nombre de bises échangées par une personne donnée.
- Nombre de bises échangées par la personne en ayant échangé le moins.
- Ensemble des personnes ayant échangé le plus de bises.

Exercice 3 (Graphe complémentaire). On se place dans le contexte des graphes simples non orientés (donc sans arêtes multiples et sans boucle).

Soit un graphe $G = (S, A)$. Le graphe *complémentaire* de G , noté \overline{G} , est le graphe avec les mêmes sommets que G , tel qu'il y a une arête entre les sommets s et s' dans \overline{G} si et seulement s'il n'y a pas d'arête entre s et s' dans G .

- Dessiner le complémentaire du graphe suivant :



- Que peut-on dire du complémentaire de \overline{G} ? Le prouver formellement.
- Que peut-on dire du complémentaire du graphe complet K_n ?

Exercice 4 (Retour du graphe de Wikipédia). On se penche à nouveau sur le graphe de Wikipédia (deuxième version), cette fois pour écrire des algorithmes.

- Écrire un pseudo-code pour la fonction `atteignableParEtapes(G, s1, s2, n)`, qui prend en entrée le graphe, deux pages, et un entier positif, et qui renvoie vrai si et seulement si la page `s2` est atteignable depuis la page `s1` en au plus `n` clics sur des liens. **Attention** : on ne se préoccupe absolument pas de faire du code efficace, juste un algorithme qui renvoie le résultat correct.
- Écrire un pseudo-code pour la fonction `atteignable(G, s1, s2)` qui prend en entrée le graphe et deux pages, et qui renvoie vrai si et seulement si la page `s2` est atteignable depuis la page `s1` en cliquant sur des liens. (On se préoccupera encore moins de questions d'efficacité, et on s'appuiera sur la fonction de la question précédente.)