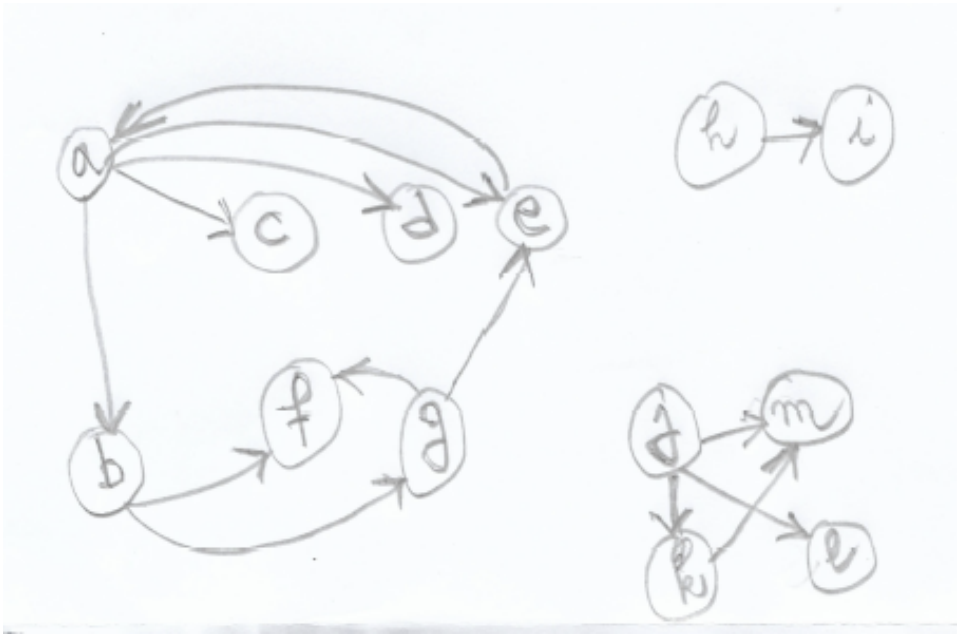
L3-INFO – INF6B
Structures discrètes
2020-2021

TD 03 – Parcours, Composantes connexes et Tri topologique

Exo 1. Parcours en Profondeur vs Parcours en Largeur

1. Appliquer les 2 parcours sur le graphe ci-dessous



2. Définir la procédure Numérotation (G : graphe) qui numérote chaque sommet d'un graphe G selon l'ordre du Parcours en Profondeur.

   Puis calculer la complexité de cette procédure.

   Indication. Partir de l'algo de parcours en Profondeur ci-dessous et l'ADAPTER.

```
Procédure DFS (G : graphe) ;
début
        pour tout sommet t de S faire
                PRED[t] := nil ;
                marquer t en blanc
        fpour
        tantque il existe (au moins) un sommet s de couleur blanche faire
                DFS_rec(G, s) ;
fin


Procédure DFS_rec (G : graphe, s : sommet source) ;
début
        marquer le sommet s en gris ;
        pour tout sommet t successeur de s faire
                si t est de couleur blanche
                        alors
                                PRED[t] := s ;
                                DFS_rec (G, t)
        fpour
        marquer s en noir
fin
```

---

3. Soit G un graphe orienté sans cycle. Définir la procédure NumérotерBis(G : graphe) qui numérote chaque sommet de G par couche/niveau. Puis calculer la complexité de cette procédure.

   Indications.

   - *Partir de l'algo de parcours en Largeur ci-dessous et l'ADAPTER.*
   - *Utiliser la propriété : tout graphe orienté sans cycle possède un ou plusieurs sommets sans prédécesseur (plusieurs s'il n'est pas connexe).*

```
Procédure BFS  (G : graphe) ;
début
        pour tout sommet t de S faire
                PRED[t] := nil ;
                marquer t en blanc
        fpour
tantque il existe (au moins) un sommet s de couleur blanche faire
                BFS_itératif(G, s) ;
fin


Procédure BFS_iteratif (G : graphe, s : sommet source)
début
        initQueue(Q) ;
        marquer s en gris ;
        enqueue(s, Q) ;
        tantque non emptyQueue(Q) faire
                dequeue(u, Q) ;
                pour tout sommet v successeur de u faire
                        si v est de couleur blanche
                                alors
                                        enqueue(v, Q) ;
                                        marquer v en gris ;
                                        PRED[v] := u
                fin pour ;
                marquer u en noir
        finttque
fin
```

Exo2. Détection de cycle/circuit

Un graphe possède un cycle/circuit s'il existe un sommet t qui est son propre ancêtre.

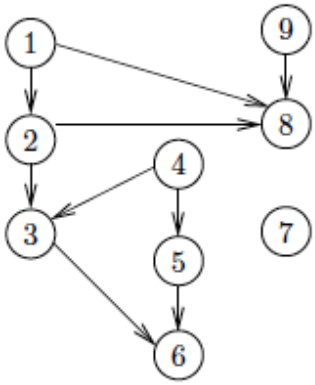
Indication. Partir de l'algo de parcours en Profondeur ci-dessous et l'ADAPTER en raisonnant sur les couleurs des sommets.

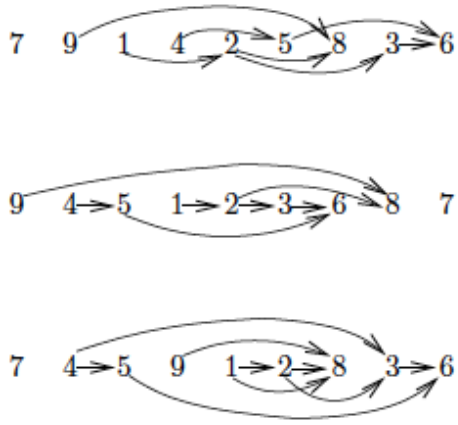
```
Procédure DFS (G : graphe) ;
début
        pour tout sommet t de S faire
                PRED[t] := nil ;
                marquer t en blanc
        fpour
        tantque il existe (au moins) un sommet s de couleur blanche faire
                DFS_rec(G, s) ;
fin


Procédure DFS_rec (G : graphe, s : sommet source) ;
début
        marquer le sommet s en gris ;
        pour tout sommet t successeur de s faire
                si t est de couleur blanche
                        alors
                                PRED[t] := s ;
                                DFS_rec (G, t)
        fpour
        marquer s en noir
fin
```

Exo 3. Effectuer sur les 2 graphes donnés en exemples :

1. Parcours en profondeur,
2. Parcours en largeur,
3. Etiquetage des sommets,
4. Tri Topologique (remarquer qu'il existe plusieurs ordres topologiques possibles).

(1)





(2) La recette du TIRAMISU

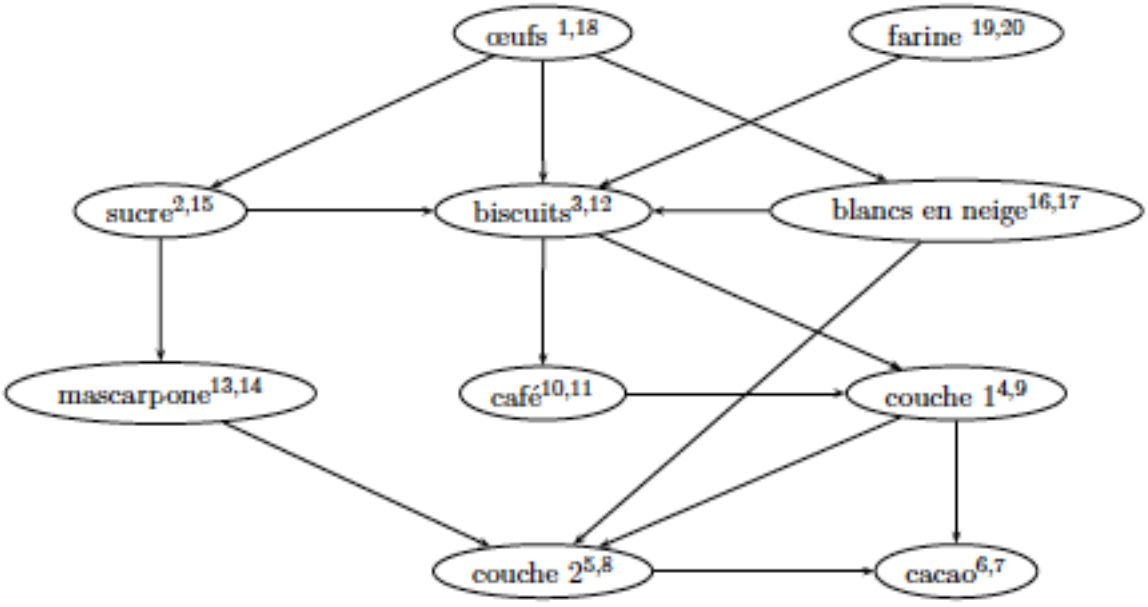


FIGURE 1 – Les dépendances de la recette

Exo 4. Gestion de projets / Ordonnancement

4.1 On considère le problème d'ordonnancement suivant :

1. La tâche `b` ne peut commencer qu'après l'instant `2`.
2. Durées des tâches et contraintes de précédence sont définies par le tableau suivant :

Tâches	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Durées	10	4	2	8	6	5	9	2	7	4
Précédence	-	-	-	a,b	b	c	d,e	e,f	g,h	f

Questions.

1. Construire le graphe potentiels/tâches associé à l'exemple.
2. A quelle condition existe-t-il un ordonnancement ?
3. Exprimer la durée minimale de l'ordonnancement en termes de calcul du plus long chemin dans un graphe.
4. En déduire, pour une tâche `t_i`, un moyen de calculer les valeurs `a_i` et `b_i`.
5. Que se passe-t-il si pour toute tâche `t_i` on a : $a\_i \leq T\_i \leq b\_i$? Dans le cas contraire ?
6. Une tâche `t_i` est une tâche critique ssi $a\_i = b\_i$. Appliquer à l'exemple traité.
7. Représenter l'ordonnancement obtenu à l'aide d'un diagramme de GANTT.

4.2 Calcul du plus long chemin dans un graphe orienté sans cycle

Si une tâche i doit être réalisée avant une tâche j, alors le sommet associé à i sera placé avant le sommet correspondant à j dans l'ordre topologique. Au passage, on pourra vérifier que le graphe des contraintes est effectivement acyclique.

Pour cela, compléter l'algorithme ci-dessous :

---

début

pour chaque sommet/tâche i faire

pour chaque sommet/tâche i ***selon l'ordre topologique*** faire

fpour

fin

Exo 5.

Exercice : En l'an de grâce 1479, le sire Gwendal, paludier à Guérande, désire aller vendre sa récolte de sel à l'une des grandes foires du Duché. Il connaît les gains qu'il pourra réaliser dans chacune des foires, mais ceux-ci seront diminués des octrois qu'il devra acquitter le long du chemin emprunté pour s'y rendre. A quelle foire, et par quel chemin le paludier doit-il se rendre de façon à réaliser le plus grand bénéfice possible ?

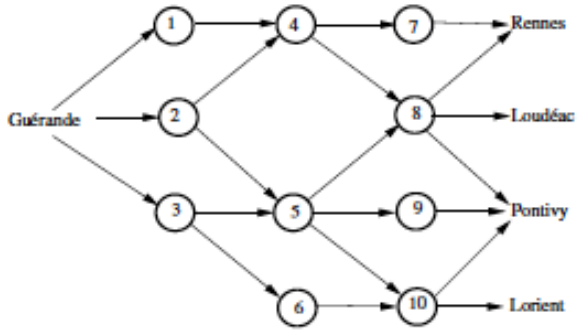
Tableau des gains en écus dans les différentes foires :

Foires	Rennes	Loudéac	Pontivy	Lorient
Gains	550	580	590	600

Tableau des octrois en écus dans les différentes villes :

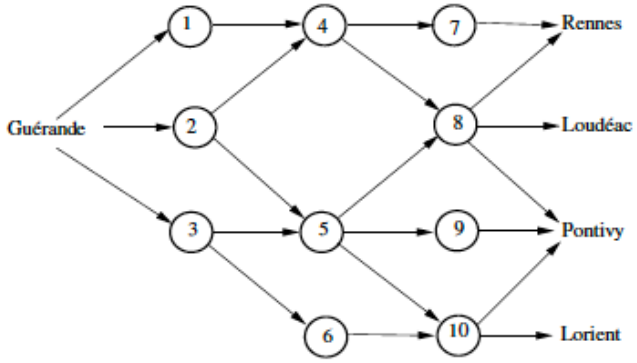
Villes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Rennes	Loudéac	Pontivy	Lorient
Octrois	10	12	15	5	15	10	3	10	5	20	4	5	20	7

Graphe des chemins possibles de Guérande aux différentes foires :



Indications. Pour modéliser et résoudre ce problème :

(1) le formuler sous la forme d'une recherche de chemin en ajoutant une tâche fictive de fin et en valuant les arcs.



(2) proposer un algorithme pour déterminer un tel chemin