Université de Caen
UFR des Sciences

Année 2021 – 2022

Licence Informatique deuxième année
Mathématiques discrètes
Examen Terminal- seconde session –
Durée 2 heures

Aucun document autorisé.
Calculatrices, ordinateurs , tablettes et téléphones portables sont interdits.

Les exercices peuvent être faits dans l'ordre de votre choix. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet. Ne bâclez donc pas les exercices abordés. Prenez soin de bien rédiger et de justifier chacune de vos réponses.
La notation prendra en considération la qualité de la rédaction.

> Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie réservé à cet usage ; il le cachettera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Sur chacune des copies intercalaires, il portera son numéro de place et numérotera chaque copie.

Exercice 1 (Injections, surjections, bijections).
Soient x et $y \in \mathbb{Z}$, nous noterons x div y le quotient de la division euclidienne de x par y et x mod y son reste. On définit l'application f de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ qui à $x \in \mathbb{Z}$ associe $f(x) = (x \text{ div } 10, x \mod 10)$.

Autrement dit, x s'écrit de manière unique $x = q * 10 + r$, où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $f(x) = (q, r)$.

Par exemple, si $x = 35$ alors $x = 3 * 10 + 5$ et $f(x) = (3, 5)$ et si $x = 67 = 6 * 10 + 7$ alors $f(x) = (6, 7)$.

Question 1. Montrez que f est une injection.

Question 2. Montrez que f est une surjection.

Question 3. Montrez que f et donnez f^{-1}, son application réciproque.

Exercice 2 (Relations binaires).
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Pour tous f et g de $\mathcal{F}$, on définit sur $\mathcal{F}$ la relation binaire R par

$$f \; R \; g \text{ si et seulement si } f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{N}.$$

Question 1. Montrez que R est un ordre partiel large.

Question 2. Montrez que R n'est pas un ordre total.

Question 3. Montrez que $\mathcal{F}$ possède un plus petit élément f_0, c'est-à-dire $f_0 R f$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Exercice 3 (Combinatoire et probabilités).
Une application sécurisée demande la saisie d'un mot de passe composé de six chiffres (c'est-à-dire six valeurs entre 0 et 9).

Question 1. Soit N l'ensemble des mots de passe. Donnez la cardinalité de N.

Question 2. Soit N_1 l'ensemble des mots de passe composés avec six chiffres différents.
Calculez la cardinalité de N_1.

Question 3. Soit N_2 l'ensemble des mots de passe composés avec cinq chiffres différents. Nous avons donc un chiffre qui apparaît deux fois.
Calculez la cardinalité de N_2.

Question 4. Soit N_3 l'ensemble des mots de passe composés avec quatre chiffres différents et où deux chiffres apparaissent deux fois.
Calculez la cardinalité de N_3.

Question 5. Soit N_4 l'ensemble des mots de passe composés avec quatre chiffres différents et où un chiffre apparaît trois fois.
Calculez la cardinalité de N_4.

Question 6. On suppose que l'on génère le mot de passe avec la distribution uniforme.
Donnez l'espace de probabilité. Calculer la probabilité d'un évènement en fonction de sa cardinalité.

Question 7. Calculez p_1 (resp. p_2, p_3) la probabilité d'obtenir un mot à six chiffres (resp. cinq et quatre).

Exercice 4 (Ensembles, produit scalaire)**.**
Soient A et B deux ensembles.

Question 1. Redonnez la définition de $A \times B$ et $A \cap B$.

Question 2. Montrez que l'on a l'égalité suivante

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B).$$

Exercice 5 (induction sur les arbres)**.**

Question 1. Redonnez la définition inductive des arbres binaires `l.c.` (localement complets).
On définit inductivement une fonction C sur les arbres binaires par

(i) Si A est l'arbre vide alors $C(A) = 0$, si A est l'arbre racine alors $C(A) = 1$.
(ii) Soient B et C deux arbres binaires et $A = (\cdot, B, C)$.
$C(A) = C(B) \oplus C(C)$ (somme modulo 2).

Nous noterons $N(A)$ le nombre de nœuds d'un arbre A.

Question 2. Montrez que pour tout arbre `l.c.` nous avons

$$\begin{aligned} C(A) &= 0, \text{ lorsque } N(A) \text{ est pair} \\ &= 1, \text{ lorsque } N(A) \text{ est impair} \end{aligned}$$

Exercice 6 (Probabilités, variables discrètes)**.**
On jette un dé à six faces numérotées de 1 à 6.
On associe à cette expérience aléatoire une variable aléatoire X telle que $X = 1$ lorsque le résultat est $1, 2, 3$ ou 4 et $X = 3$ lorsque le résultat est 5 ou 6.

Question 1. Donnez D, l'espace de probabilité.
On suppose que nous avons la distribution uniforme sur D.
Quelle est la probabilité d'un évènement de E ?

Question 2. Donnez la distribution de probabilité de X.
Calculez l'espérance et la variance de X.

Question 3. On suppose que X correspond au gain d'un joueur que la banque doit lui verser lorsqu'il joue une fois. Quelle somme ce joueur doit-t-il miser à la banque à chaque fois afin que le jeu soit équitable entre ce joueur et la banque ?