Université de Caen
UFR des Sciences

Année 2020 – 2021

Licence Informatique deuxième année
Mathématiques discrètes – groupes 2 - 3 - 4
Contrôle continu- 15 octobre 2020 – Durée 1 heure
Aucun document autorisé. Calculatrices, ordinateurs , tablettes objets connectés et téléphones portables sont interdits.

Les exercices sont indépendants et peuvent être faits dans un ordre quelconque. Attention à bien soigner la rédaction des exercices, le barème tient compte de cette rédaction !

Exercice 1 : arbres binaires .

1. Soit A un arbre binaire ayant n noeuds et de hauteur h.
   Montrer par induction que $h \leq n - 1$.
2. Un arbre binaire est dit localement complet si il est non vide et si chaque nœud a 0 ou 2 descendants.
   (a) Ecrire le schéma d induction des arbres localement complets.
   (b) Dresser la liste des arbres binaires localement complets de hauteur 2.

Exercice 2 : Ensembles

Si X et Y sont des ensembles avec $X \subset Y$.
On notera $\mathcal{C}_Y^X$ le complémentaire de X dans Y .

Soient E un ensemble et A et B des sous-ensembles de E tous non vides.

1. Définir $\mathcal{C}_E^A$ et $\mathcal{C}_{E\times E}^{A\times B}$
2. On considère $F = \mathcal{C}_{E\times E}^{A\times B}$ et G= $\mathcal{C}_E^A \times \mathcal{C}_E^B$
   Montrer que $G \subset F$.
3. L'inclusion inverse est-elle vérifiée ? (On justifiera la réponse donnée).

Exercice 3 : Injection, surjection, bijection

Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B.

1. Quand dit-on que f est une application injective ? surjective ? bijective ?
2. On définit l'application f par :
$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & (x^2,\, y) \end{array}$$
   Que peut-on dire de f ? Est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
3. On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :
$$g(x, y) \quad = \quad (x - y, x + y)$$
   Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer son application réciproque g^{-1}

Exercice 4 : relations

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par $a\mathcal{R}b$ si et seulement si 4 divise $a^2 - b^2$.

1. Quelles sont les propriétés que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'équivalence ? (on définira chacune d'entre elles).
2. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.