DM : GÉNÉRATION ALÉATOIRE UNIFORME

Nom : Ahmat

Prénom : Mahamat Ahmat

Numéro étudiant : 21 91 29 49

Le but de ce devoir est d'étudier et de programmer un générateur uniforme pour les arbres hexabinaires.

Pour tester le code, vous pouvez utiliser le fichier ./Teste.ipynb

---

Un arbre plan est dit hexabinaire si tout nœud de l'arbre a 0 enfant (ce qui s'appelle une feuille) ou 2 enfants ou 6 enfants. On définit ici la taille d'un arbre hexabinaire comme le nombre de nœuds internes (i.e. nœuds différents d'une feuille).

PARTIE THÉORIQUE

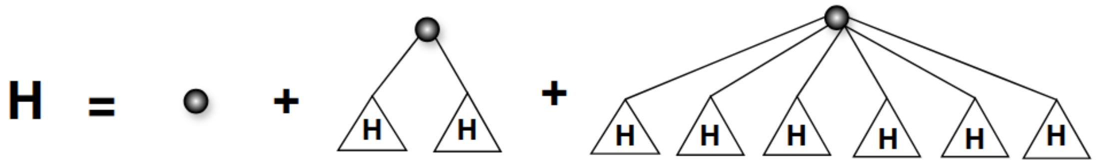
Question 1. Combien y a-t-il d'arbres hexabinaires de taille 2 ?

Réponse 1 :

Il y a 16 arbres hexabinaires de taille 2

Question 2. Décrire une spécification combinatoire pour les arbres hexabinaires. En déduire une équation satisfaite par leur série génératrice.

Réponse 2 :



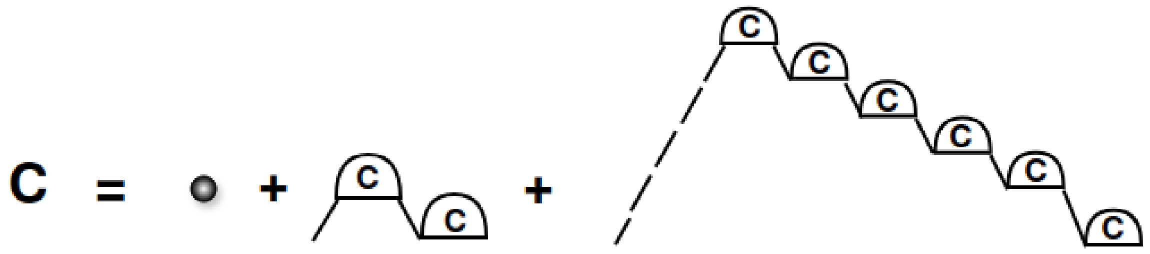
De cette spécification, on en déduit l'équation satisfaite par la série génératrice des arbres hexabinaires

D'où $H(z) = 1 + z * H(z)^2 + z * H(z)^6$

On considère **C** la classe combinatoire des chemins commençant en (0, 0), restant à une altitude positive, terminant sur l’axe des abscisses (altitude 0), et utilisant des pas montants (+5, +1), (+1, +1) et des pas descendants (−1, +1). La taille d’un élément de **C** est son nombre de pas montants.

Question 3. Montrer que C et les arbres hexabinaires sont comptés par les mêmes nombres. Pour cela, on pourra soit chercher une bijection entre les deux classes combinatoires, soit montrer que C satisfait la même spécification combinatoire que les arbres hexabinaires. (La méthode est selon votre préférence.)

$\color{green}{\text{Réponse 3}}$:



De cette spécification, on en déduit l'équation satisfaite par la série génératrice de la classe **C**.

D'où $C(z) = 1 + z * C(z)^2 + z * C(z)^6$

Par conséquent, la classe **C** et les arbres **Hexabinaires** sont comptés par les mêmes nombres, car ils ont la même spécification

---

Question 4. Pouvez-vous trouver une formule close pour le nombre d’arbres hexabinaires de taille n ?

$\color{green}{\text{Réponse 4}}$:

Formule close pour le nombre d'arbres hexabinaires (H_n)

Nous avons l'équation fonctionnelle suivante définissant les **arbres hexabinaires** :

$H(z) = 1 + z * H(z)^2 + z * H(z)^6$

Étape 1 : Transformation de l'équation

Définissons :

$$C(z) = H(z) - 1 \implies H(z) = C(z) + 1$$

Ainsi, l'équation devient :

$$C(z) = z * [(C(z) + 1)^2 + (C(z) + 1)^6]$$

Nous introduisons une nouvelle fonction $\Phi(w)$:

$$w = z \cdot \Phi(w)$$

où :

$$\Phi(w) = (w + 1)^2 + (w + 1)^6$$

Étape 2 : Extraction des coefficients

Nous cherchons l'expression des coefficients de la série génératrice $H(z)$. Nous avons :

$$[z^n]H(z) = \frac{1}{n}[w^{n-1}]\Phi(w)^n$$

$$\Phi(w)^n = [(w + 1)^2 + (w + 1)^6]^n$$

En développant avec le **binôme de Newton**, nous obtenons :

$$\Phi(w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(w + 1)^{2n-2k} * (w + 1)^{6k}$$

$$\Phi(w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(w + 1)^{2n+4k}$$

$$\Phi(w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{2n+4k} \binom{2n+4k}{i} w^{2n+4k-i}$$

Pour trouver le **coefficient de** w^{n-1} on a :

$$2n + 4k - i = n - 1 \implies i = n + 4k + 1$$

D'où la formule clause (H_n) est donnée par :

$$H_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n+4k}{n+4k+1}$$

$$H(z) = 1 + 2z + 16z^2 + 192z^3 + ...$$

PARTIE PRATIQUE

Question 5. Définir une classe pour les arbres hexabinaires.

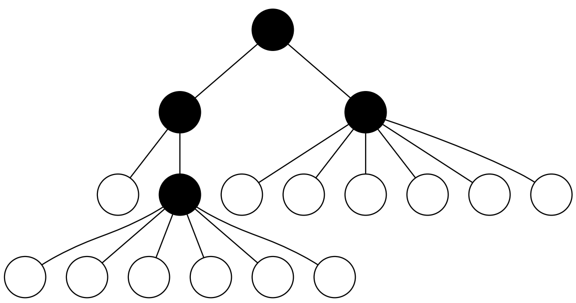
Réponse 5 :

voir le fichier **ArbreHexabinaire.py**

```python
from helpers import draw_tree_unlabelled
from ArbreHexabinaire import *

root = HexabinaryTree()  # Racine
node1 = HexabinaryTree()  # Premier nœud enfant de la racine
node2 = HexabinaryTree()  # Deuxième nœud enfant de la racine
node3 = HexabinaryTree()  # Nœud enfant de node1
node3.add_children([HexabinaryTree() for _ in range(6)])
node2.add_children([HexabinaryTree() for _ in range(6)])
node1.add_children([HexabinaryTree(), node3])
root.add_children([node1, node2])

#print(root)
draw_tree_unlabelled(tree=root)
print("\nLes 10 premiers nombres des arbres Hexabinaire\n")
print(coefficients_hexa_tree(9))
```



```
Les 10 premiers nombres des arbres Hexabinaire

[1, 2, 16, 192, 2720, 42224, 694848, 11907648, 210240256, 3797869056]
```

Question 6. Écrire un algorithme de génération uniforme pour les arbres hexabinaires.

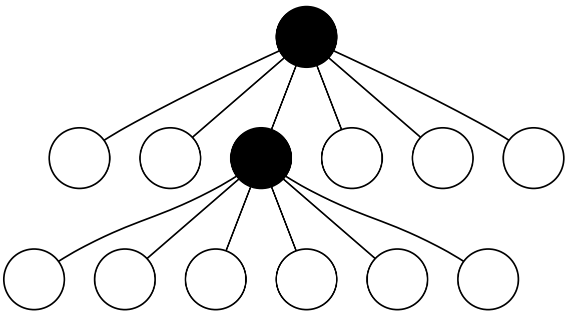
Réponse 6 :

voir le fichier **GenerateurUniformeHex.py**

```
from GenerateurUniformeHex import *
from helpers import draw_tree_unlabelled

n = 2 # Taille de l'arbre à générer
generator = UniformHexabinaryGenerator(n)
arbre = generator.generate()
#print(f"Arbre hexabinaire généré : {arbre}")
#print(f"Chemin généré : {arbre.tree_to_path()}")
print(f"Arbre hexabinaire généré : \nTaille = {arbre.size}")
draw_tree_unlabelled(tree=arbre)
```

```
Arbre hexabinaire généré :
Taille = 2
```



Question 7. Écrire un générateur de Boltzmann pour les arbres hexabinaires. (Ne pas oublier de préciser la valeur maximale du paramètre.)

Réponse 7 :

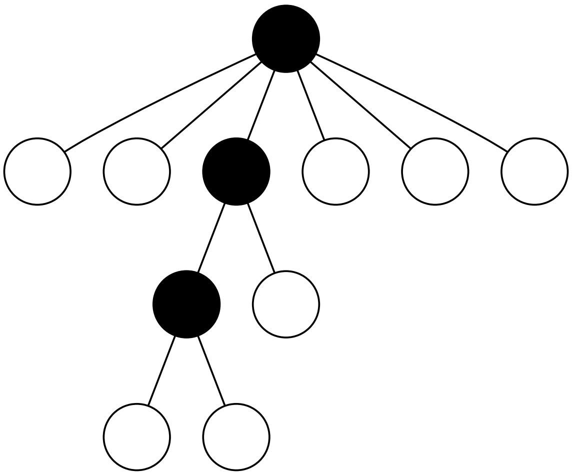
voir le fichier **GenerateurDeBolthmann.py**

$$rayon - de - convergence = 0.046519412844859O8$$

```
from GenerateurDeBolthmann import *
from helpers import draw_tree_unlabelled

generator = BoltzmannGenerator()
rayon_de_convergence = 0.04651941284485908
z = 0.04 # z <= rayon_de_convergence
n = 3
arbre = generator.tree_of_size_n(z,n)
print(f"Arbre hexabinaire généré : \nTaille = {arbre.size}")
draw_tree_unlabelled(tree=arbre)
```

```
426 tirages nécessaires pour obtenir un arbre de taille 3
Arbre hexabinaire généré :
Taille = 3
```



Références

- **L'affichage des arbres est inspiré de ce repo GitHub** $Alea2023Notebooks - Générationuniforme$

Merci énormément pour ce DM ! j'ai pu apprendre beaucoup de choses.

J'ai passé trois semaines à m'acharner sur la formule clause à cause d'une petite erreur, mais au final, j'ai fini par la repérer !