

Algorithme de simplexe à l'aide des variables artificielles

En regardant la forme canonique d'un PL, nous remarquons dans les contraintes l'existence des inégalités d'infériorités ' \leq ' et des variables de décisions non négatives.

Souvent, on commence l'algorithme de simplexe au sommet $x = (0, 0, \dots, 0)$ qui appartient à l'espace de solution réalisable.

Si la forme canonique n'est pas respectée et s'il existe une contrainte de supériorité ' \geq ' on remarque ce qui suit :

En premier temps, pour atteindre la forme standard on ajoute des variables d'écart non négatives. Puisqu'on a une inégalité ' \geq ', ces variables d'écart sont d'un signe négatif.

Ex : $x_1 + 3x_2 \geq 4$ ($x_1, x_2 \geq 0$)

Devient : $x_1 + 3x_2 - t_1 = 4$ ($x_1, x_2, t_1 \geq 0$)

Si on souhaite initier l'algorithme de simplexe à l'origine (0,0) on aura :

$-t_1 = 4$ càd $t_1 = -4 \rightarrow$ contradiction avec la contrainte de non négativité de t_1

Conclusion : le point origine $X = (0,0,\dots,0)$ ne peut pas appartenir à l'espace de solution réalisable, d'où le lancement de l'algorithme avec une solution artificielle.

Résultat : introduction aux équation(s) semblables, des variable(s) dites **artificielle(s)** pour contourner le problème.

Pour résoudre le nouveau PL, deux méthodes étroitement liées sont les plus citées dans la littérature: les M-Méthodes et le simplexe en 2-Phases.

M-Méthodes : (appelées aussi Méthodes des grands M)

Après avoir inséré les variables artificielles dans la partie des contraintes, il faut modifier la fonction objectif de la manière suivante :

Etant donnée une valeur M très grande ($M \rightarrow +\infty$), on ajoute à la fonction objectif les variables artificielles avec des coefficients -M si le PL est un problème de maximisation et avec des coefficients M si le PL est un problème de minimisation et on résout le nouveau PL.

Exemple :

$$\text{Min } x_1 + x_2$$

Sc

$$2x_1 + x_2 \geq 12$$

$$5x_1 + 8x_2 \geq 74$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

après insertion des variables d'écart et des variables artificielles, le PL devient

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

Sc

$$2x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 12$$

$$5x_1 + 8x_2 - S_2 + A_2 = 74$$

$$x_1 + 6x_2 - S_3 + A_3 = 24$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2 \geq 0$$

Le tableau initial de simplexe devient (après remplacement des expressions des A_i dans la fonction objectif)

Iter 1	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
A_1	2	1	-1	0	0	1	0	0	12
A_2	5	8	0	-2	0	0	1	0	74
A_3	1	6	0	0	-3	0	0	1	24
Z	1-8M	1-15M	M	M	M	0	0	0	110M

Puisqu'on est face à un problème de minimisation, on choisit le coefficient négatif qui a la plus grande valeur absolue : 1-15M (puisque M est très grand)

Iter 2	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
A_1	<u>11/6</u>	0	-1	0	1/2	1	0	-1/6	8
A_2	22/6	0	0	-2	4	0	1	-10/6	42
x_2	1/6	1	0	0	-1/2	0	0	1/6	4
Z	(5-33M)/6	0	M	M	(1-13M)/2	0	0	(15M-1)/6	4+50M

Iter 3	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
x_1	1	0	-6/11	0	6/22	6/11	0	-1/11	48/11
A_2	0	0	2	-2	<u>3</u>	-2	1	-8/6	26
x_2	0	1	1/11	0	-12/22	-1/11	0	12/66	36/11
Z	0	0	5-2M	M	3/11-5M	3M-5/11	0	2M-1/11	48/11+26M

Puis, après itération(s) on trouve le tableau final :

Iter n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
x_1	1	0	-8/11	1/11	0	8
S_3	0	0	2	-1	1	26
x_2	0	1	5/11	-2/11	0	2
Z	0	0	3/11	1/11	0	10

On remarque que pour cette itération, il n'y a pas un coefficient non positif de variable hors base (Puisque on est devant un problème de minimisation), d'où l'itération actuelle est finale et la solution optimale est atteinte via les coordonnées (8,2) et sa valeur est 10.

Remarque: cette méthode entraîne des erreurs d'arrondi lors de son automatisé.

Méthodes en deux phases:

Cette méthode, remédie au problème des erreurs d'arrondi entraîné par les calculs de la M-Méthode.

Après avoir inséré les variables artificielles dans la partie des contraintes, on résout le PL en 2 phases:

Phase 1 :

La partie des contraintes est la même qui contient éventuellement les variables artificielles (et les variables d'écart aussi).

Quant à la fonction objectif elle représente la minimisation de la somme des variables artificielles insérées :

Minimiser $r = R_1 + R_2 + \dots + R_k / k$ est le nombre de variable artificielles.

Si la valeur minimale de la somme (des variables artificielles) est positive, le problème de LP n'a pas de solution possible, d'où la terminaison du processus. (rappelons qu'une variable artificielle positive signifie qu'une contrainte d'origine n'est pas satisfaite).

Sinon, passez à la phase 2.

Remarque : la fonction objectif de la Phase 1 est toujours une minimisation, indépendamment du fait que le LP initial est un PL de maximisation ou de minimisation.

Phase 2 :

Utiliser la solution réalisable issue de la phase 1 comme solution de base de départ pour le PL qui possède la fonction objectif du PL initial et les contraintes arrêtés à la phase 1.