**É**cole **S**upérieure **Pri**vée d'**I**ngénierie et de **T**echnologies

## Analyse Numérique

### Série d'exercices N$^o$3 : Résolution numérique des équations non linéaires.

Niveau : 3$^{\text{ème}}$ année

---

**Exercice 1:**

On se propose de résoudre numériquement l'équation $(E)$ : $f(x) = 0$ dans l'intervalle $I = [1, 2]$, avec $f(x) = e^x - 2x - 2$.

1. Montrer que $(E)$ admet une unique solution $x^* \in ]1, 2[$.
2. Déterminer le nombre des itérations nécessaires par la méthode de dichotomie pour avoir une valeur approchée de $x^*$ avec une précision de $10^{-2}$.
3. Calculer $c_0, c_1$ et $c_2$ les premiers itérés de la méthode de dichotomie dans l'intervalle $]1, 2[$.
4. Montrer qu'on peut trouver deux fonctions $g_1$ et $g_2$ telles que
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g_1(x) = x \Leftrightarrow g_2(x) = x.$$
5. Pour approcher $x^*$, on définit la suite suivante:
$$\begin{cases} x_0 \in [1, 2], \\ x_{n+1} = g_i(x_n) \quad \text{avec } i = 1, 2. \end{cases}$$
   Vérifier la convergence de la méthode du point fixe pour les deux fonctions.
6. Ecrire le schéma itératif de la méthode de Newton pour la résolution de (E).
7. Donner un choix convenable de $x_0$ pour assurer la convergence de la méthode Newton.
8. Déterminer les deux premiers itérés par la méthode de Newton.

**Exercice 2:**

On se propose de résoudre numériquement l'équation $(E)$ : $f(x) = 0$ dans l'intervalle $I = [0, 1]$ avec :
$$f(x) = x^3 + 3x - 3,\ x \in I.$$

1. Montrer que $(E)$ admet une unique solution $x^*$ dans $]0, 1[$.
2. Montrer que la fonction $g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 3}$ vérifie la relation suivante :
$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = x.$$

3. Pour approximer $x^*$, on définit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1], \\ x_{n+1} = g(x_n). \end{cases}$$

   a) Faire une comparaison pour vérifier que $\forall x \in [0,1], |g'(x)| \leqslant M_0$, avec $M_0 = \frac{2}{3}$.
   b) Montrer que cette suite converge vers $x^*$.
   c) Estimer $n_0$, le nombre d'itérations nécessaires pour déterminer $x^*$ avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.
   d) Pour $x_0 = 0{,}5$, calculer les trois premières itérations.

4. a) Application de la méthode de dichotomie : estimer $n_1$, le nombre d'itérations nécessaires pour déterminer $x^*$ avec la même précision $\varepsilon = 10^{-3}$.
   b) Expliquer la différence entre $n_0$ et $n_1$.
   c) Calculer $c_0$, $c_1$ et $c_2$, les trois premières itérations de la méthode de dichotomie dans l'intervalle $]0,1[$.

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'importance de trouver une bonne majoration de la fonction $|g'(x)|$ afin de déterminer le nombre minimal d'itérations pour estimer la solution unique par la méthode du point fixe, en donnant une précision $\varepsilon$.

5. a) Montrer que $M_1 = \dfrac{3}{8}$ est un maximum de la fonction $|g'(x)|$ sur l'intervalle $I$.
   b) En déduire qu'on peut approximer $x^*$ avec la même précision $\varepsilon = 10^{-3}$ par un nombre d'itérations $n_2$ inférieur à $n_0$.
   c) $n_2$ est-il le nombre minimal d'itérations pour estimer $x^*$ avec la tolérance $\varepsilon = 10^{-3}$ ? Justifier votre réponse.

**Exercice 3:**

On se propose de résoudre numériquement l'équation (E) : $f(x) = 0$ dans $I = [0, \dfrac{\pi}{3}]$, où la fonction $f$ est donnée par:

$$f(x) = \cos(x) - 3x \qquad \forall x \in I.$$

Il est á noter que la variable x est exprimée en radian.

1. Montrer que l'équation $(E)$ admet une solution unique $x^* \in ]0, \frac{\pi}{3}[$.

## En utilisant la méthode de dichotomie :

2. Estimer le nombre d'itérations nécessaire pour déterminer $x^*$ avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. déterminer $x^*$ avec une tolérence de $\varepsilon = 10^{-3}$.

## En utilisant la méthode du point fixe :

Pour approcher $x^*$, on définit la suite suivante:

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \frac{\pi}{3}] & , \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

avec $g(x) = \dfrac{cos(x)}{3}$

4. Montrer que cette suite converge vers $x^*$.

5. Pour $x_0 = 0$, calculer les quatre premières itérations.

## Application de la méthode de Newton :

6. Ecrire le schéma itératif de la méthode de Newton.

7. Choisir une valeur intitiale $x_0$ assurant la convergence de la méthode.

8. Déterminer $x^*$ avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.

**Exercise 4**

On se propose de résoudre numériquement l'équation $(E)$ : $f(x) = 1 - x$ sur $[0, 1]$, où la fonction $f$ est définie par :

$$f(x) = x^3 \qquad \forall x \in [0, 1].$$

1. Montrer que l'équation $(E)$ admet une unique solution $x^* \in ]0, 1[$.

2. Application de la méthode de dichotomie : estimer le nombre d'itérations nécessaires pour déterminer $x^*$ avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Application de la méthode de Newton :

   a) Écrire le schéma itératif de la méthode de Newton pour résoudre $(E)$ et déterminer $x_0$, une valeur initiale assurant la convergence de cette méthode.

   b) Déterminer $x^*$ avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.