

Interpolation

• هنجيب معادلة تمر بعدد من النقاط "هيدمانا في السؤال"
• عن طريقين

1- Lagrange Interpolating

2- Newton's Interpolating
polynomials

Lagrange Interpolating

الطريقة دي بتمشي كالتالي :-

* كل نقطة ليها "polynomial" متعددة حدود L (نسبة للعالم لاجرانج)

L_0 النقطة الاولى

L_1 الثانية

\vdots

\vdots

* الدالة اللي عايزة اجيبها $p(x)$
اللي هي

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x)$$

* مثلا

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \quad (1,3) (2,4) (7,11)$$

$$= 3L_0(x) + 4L_1(x) + 7L_2(x) \quad \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix} \right)$$

المصيغة العامة لـ L_k

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right)$$

حوب π
 $n = \frac{عدد}{2001} - 1$
 $i \neq k$ با $\frac{n}{2}$

الخطوة اللي بعدها اني اجيب L_0, L_1, L_2

نجيبها واحدة واحدة، بنبدأ L_0

L_0
 $n=2$
 $k=0$

$$L_0(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \times \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right)$$

بما ان $i=k$ في هيك skip

$$L_0(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right)$$

$$L_1 \quad n=2 \quad k=1$$

$$i=0 \quad i+1 \quad i=1 \quad i+1 \quad i=2$$

$$\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right) \times \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \right)$$

بما ان $i=k$ والشروط انهم متساويين skip

$$L_1(x) = \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right) \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \right)$$

كلنا احنا جيتا
 L_0, L_1, L_2

وعندنا $p(x)$

$$L_2 \quad n=2 \quad k=2$$

$$i=0 \quad i+1 \quad i=1 \quad i+1 \quad i=2$$

$$\left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0} \right) \times \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) \times \times$$

$$p(x) = 3L_0(x) + 4L_1(x) + 7L_2(x)$$

مغوف بالمعادلات التي جيتناهم

$$p(x) = 3 \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \right) \left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2} \right) + 4 \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right) \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \right)$$

$$L_2(x) = \left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0} \right) \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) + 11 \left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0} \right) \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right)$$

دلو قتي انا عندي املا قيم x_0, x_1, x_2

$$p(x) = \frac{3(x-2)(x-7)}{(1-2)(1-7)} + \frac{4(x-1)(x-7)}{(2-1)(2-7)} + \frac{11(x-1)(x-2)}{(7-1)(7-2)}$$

$$p(x) = x^2 + 12x + 32$$

15

هتسح "زي مانت عايز"

دي كثرية الحدود التي انت هتلقاها

في السؤال هيقولك مثلا عند $x=20$

القيمة كام؟؟

مغوف $x=20$

$$p(x) = \frac{(20)^2 + 12(20) + 32}{15}$$

$$= 44.8$$



* حاجة تساع

دلو قتي بعد ما تكمل عايز تسألك

اننا المعادلة $p(x)$ التي جيتنا مع

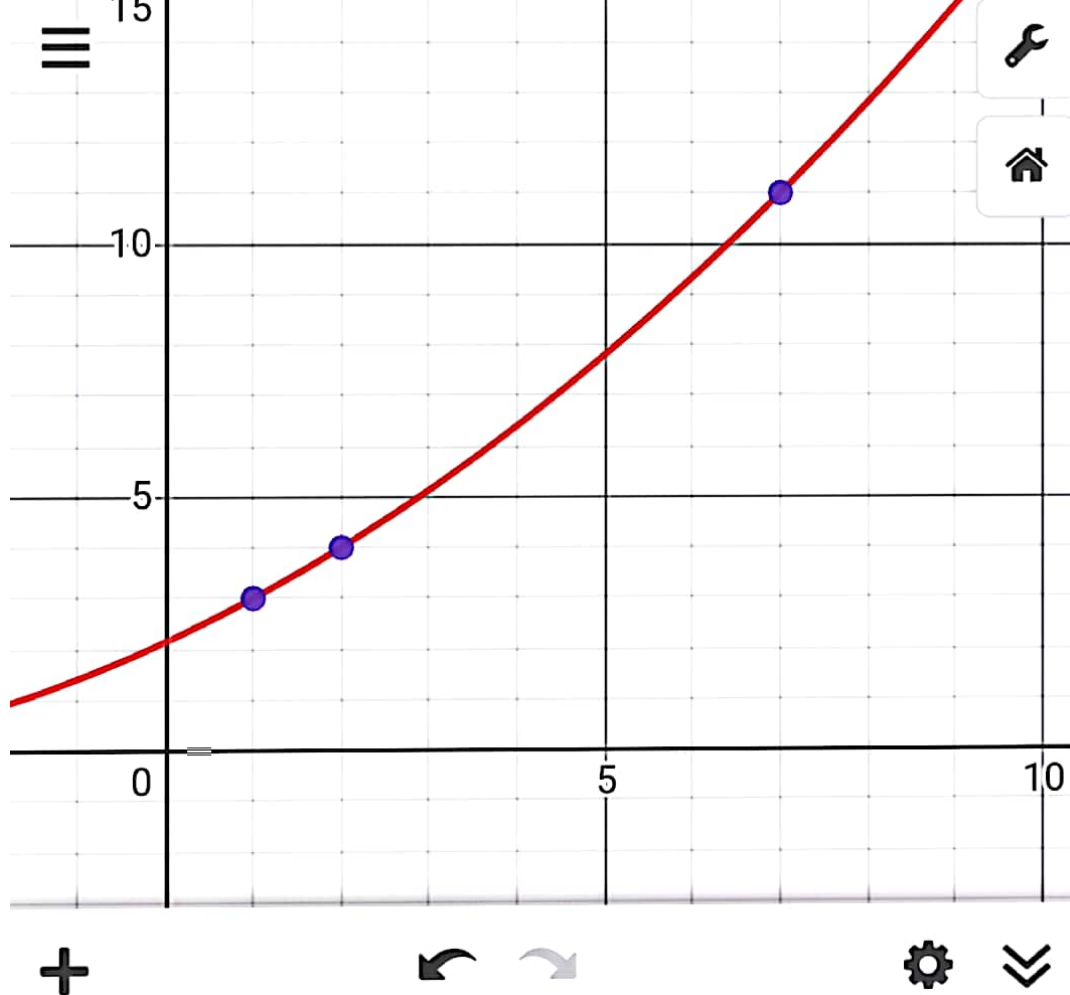
تقدر تستخدم برنامج desmos



أو اي حاجة ثانية لتمثيل النوا



هتكتب $p(x)$ والنقطة التي في

المسألة والمغوف ان يكون المعادلة

يقم بالنقطة



1 
$$\frac{(x^2 + 12x + 32)}{15}$$
 

2  

x_1	y_1
1	3
2	4
7	11

3  

4

Newton's Interpolating polynomials

$$(x_0, y_0) \Rightarrow f(x) = a_0 n_0(x) \\ = a_0$$

الصيغة العامة لكثيرة الحدود $f(x)$ $n = \frac{x_{\text{end}} - x_{\text{start}}}{\text{step}} - 1$

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i n_i(x)$$

$$(x_0, y_0)(x_1, y_1) \Rightarrow f(x) = a_0 n_0(x) + a_1 n_1(x) \\ = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$n_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$(x_0, y_0)(x_1, y_1)(x_2, y_2) \Rightarrow f(x) = a_0 n_0(x) + a_1 n_1(x) + a_2 n_2(x) \\ = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

لوا الصيغة العامة بتدخلنا
امشي مع الشغل اللي هو $a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
عندنا اربع نكبات يبقى عندنا a_4
 $3 = 4 - 1$ 3 1 2

دلو قتي المفروض اني اطلع ال a (ها اكون كثيرة اجيب a_0 $x = x_0$
 $x = x_1 \in a_1$

في مثال عندي ثلاث نقاط $(x_0, y_0)(x_1, y_1)(x_2, y_2)$

المعادلة دي $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

① To get a_0 set $x = x_0$

$$f(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) \\ f(x_0) = a_0 = y_0$$

② To get a_1 set $x = x_1$

$$f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) \\ f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

③ To get a_2 set $x = x_2$

$$f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$y_2 = y_0 + \left[\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right] (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_i, x_{i-1}] = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

"دلو قتي لوعندي سبع نقلا متخيل عشان اجيب هسقى المعادلة ازاي"
 الفها اللي ماشي بيها معادلات الـ a اسمها
 Divided differences

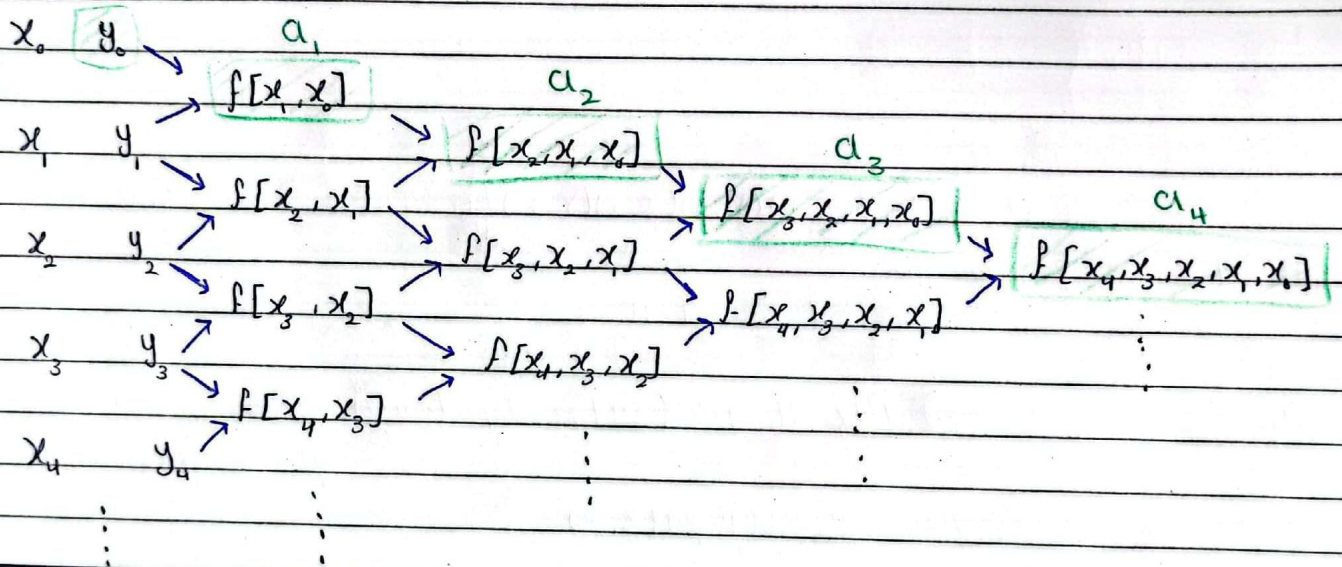
$$* f[x_0] =$$

$$* f[x_1, x_0] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$* f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Divided differences Table نقدر نختصرها ونستخدم



(1,1)(2,5)(3,2)(5,13)

↓ ↓ ↓ ↓

(x0, y0) (x1, y1) (x2, y2) (x3, y3)

نعملها بأرقام عشان توخج عشانها اربع نقلا

x	y
1	1
2	5
3	2
5	13

①

$$\frac{5-1}{2-1} = 4$$

x	y
1	1
2	5
3	2
5	13

②

$$\frac{2-5}{3-2} = -3$$

x	y
1	1
	4
2	5
	-3
3	2
	$13 - 2 = 5.5$
5	13
	$5 - 3$

③

x	y
1	1
	4
2	5
	-3
3	2
	$\frac{-3 - 4}{3 - 1} = -3.5$
5	13
	5.5

④

x	y
1	1
	4
2	5
	-3.5
	-3
3	2
	$5.5 - (-3) = 2.8$
	$5 - 2$
5	13

⑤

x	y
1	1
	4
2	5
	-3.5
	-3
3	2
	$\frac{2.8 - (-3.5)}{3 - 1} = 1.6$
	2.8
5	13
	5.5

حليها كلها اسماء مرة واحدة دول للتوضيح : النقطة = (1,1) (2,5) (3,2) (5,13)
كل الجدول المفروض كلها =

x	y
1	1 ^{a₀}
	a ₁
	4
2	5
	a ₂
	-3.5
	-3
3	2
	a ₃
	1.6
	2.8
	5.5
5	13

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$P(x) = 1 + 4(x-1) + 3.5(x-1)(x-2) + 1.6(x-1)(x-2)(x-3)$$

دي المعادلة والسؤال هيقدر يا لها تكتبها

او اوبسأل لك عند $x=14$ ؟ $P(x)=?$

اتأكد انك فهمت الدالة على برنامج وان النقطة كلها

سؤال 2

المفروض اننا نعملها على الترتيب التالي
 يطالع نفس المعادلة الى ما كنا بالاستخدام Lagrang

x y
 1 3

 a_1

1

 a_2 $\frac{1}{15}$

2 4

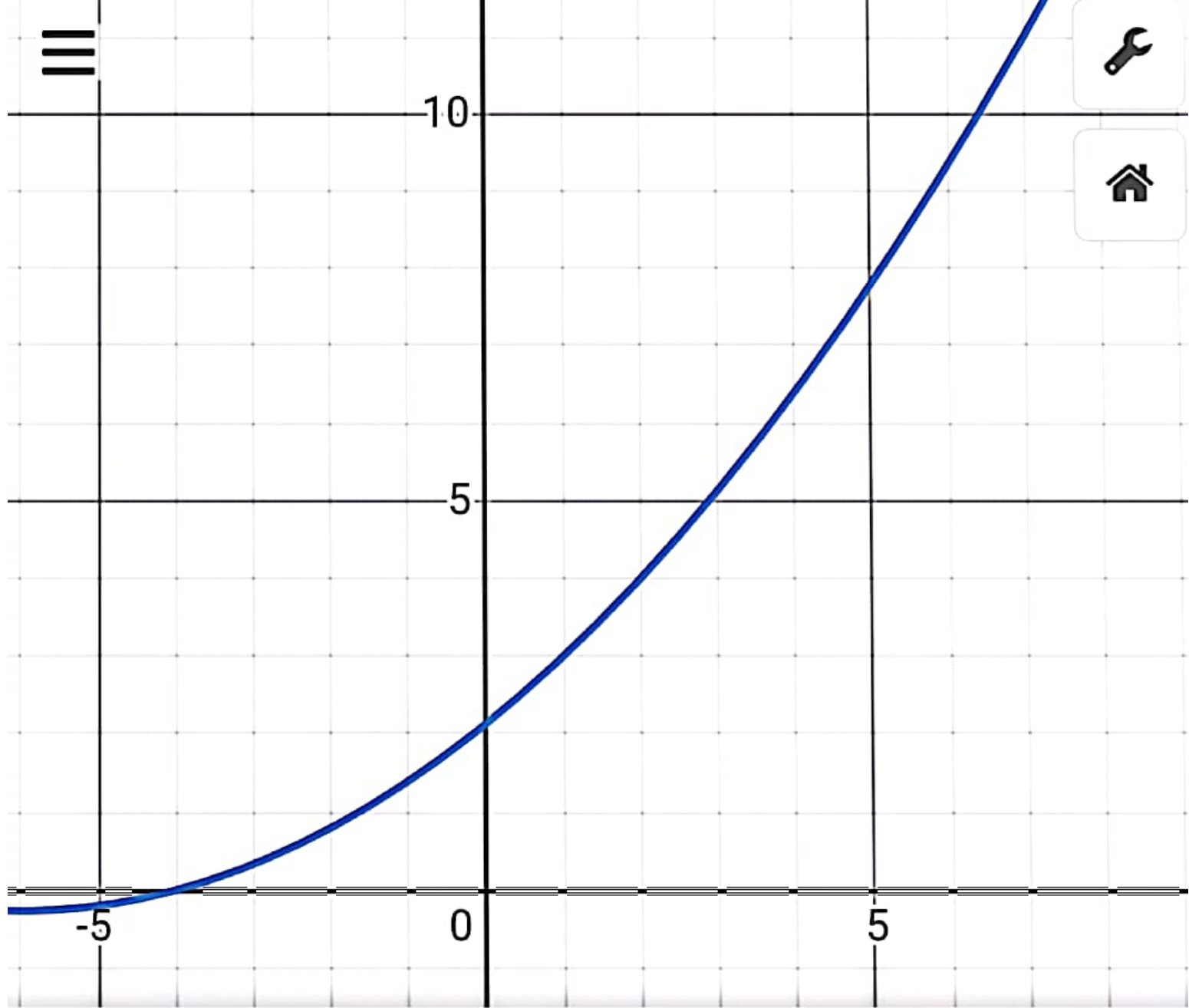
 $\frac{7}{5}$

7 11

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$f(x) = 3 + 1(x-1) + \frac{1}{15}(x-1)(x-2)$$

ولو كانتنا نطالع هذا

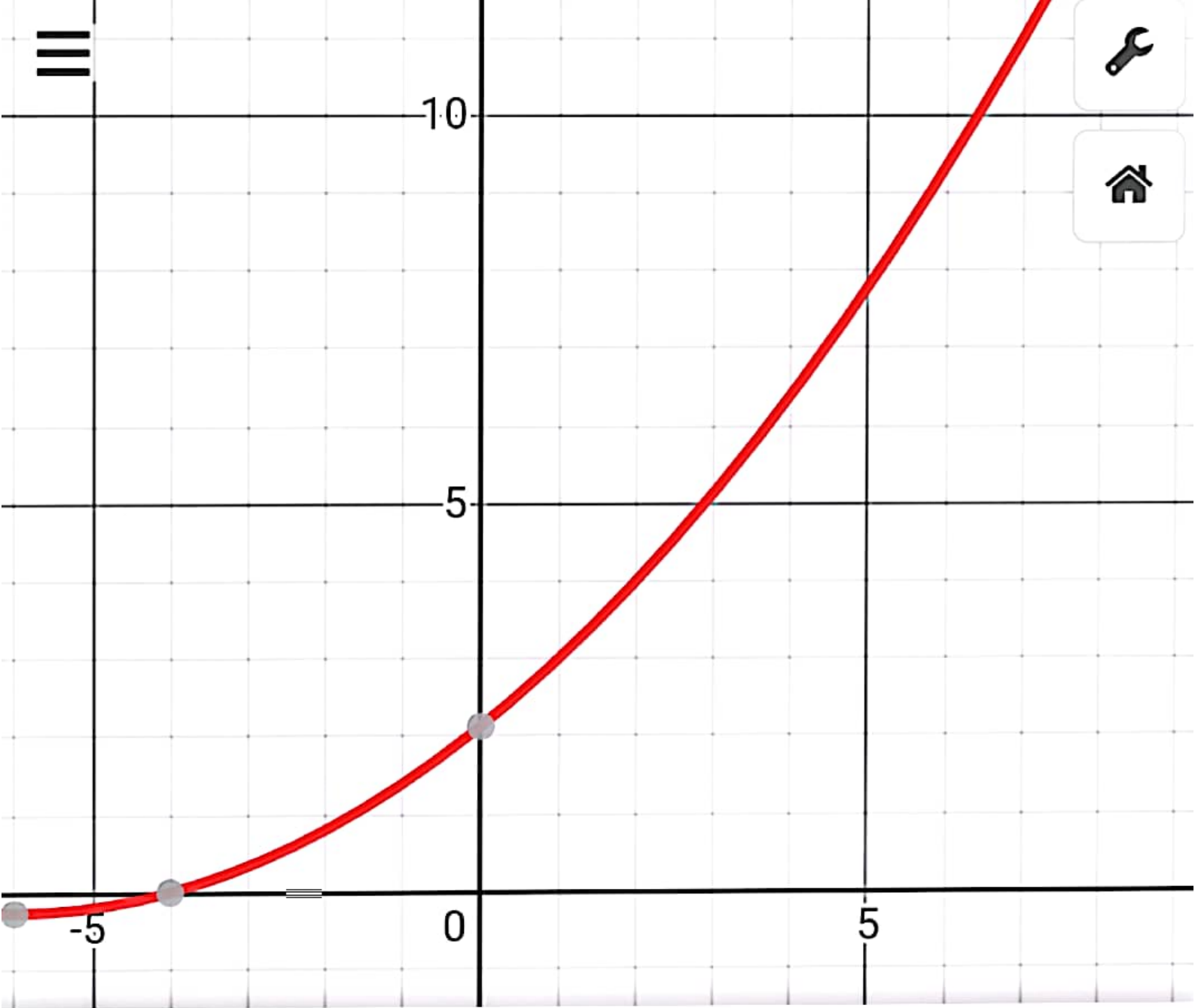




$$3 + (x - 1) + \frac{1}{15} (x - 1)(x - 2)$$




$$\frac{(x^2 + 12x + 32)}{15}$$





1  $3 + (x - 1) + \frac{1}{15} (x - 1)(x - 2)$ 

2  $\frac{(x^2 + 12x + 32)}{15}$ 