Lycée Kalaat Andalous	Devoir de contrôle n1	Fethy Bel Hadj Hamouda
FEV 2025	Classe : 4 sc 4	Durée : 2 h

EXERCICE 1 :

♦ Soit n un entier naturel non nul.

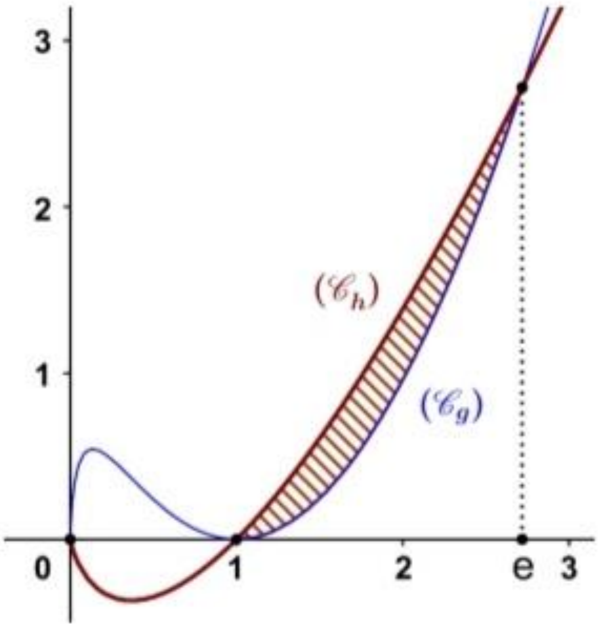
On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f_n(x) = x(\ln x)^n \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Les courbes $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ ci-dessous représentent les fonctions f_1 et f_2.

a) Déterminer, parmi les courbes $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$, celle qui représente la fonction f_1.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $f_n(1)$ et $f_n(e)$.



2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_1^e f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n+1}{2} U_n$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$.

3) Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_n)$, l'axe des abscisses et les droites $x=1$ et $x=e$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathcal{A}_1 = \dfrac{e^2+1}{4}$ puis en déduire $\mathcal{A}_2$.

b) Calculer l'aire de la partie hachurée.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n$.

Exercice n°2:(7pts)

Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

1) On donne ci-dessous le tableau de variation de g

x	0		$+\infty$
g	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Calculer g(1). En déduire le signe de g

2) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$.

   On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

   a/ Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

   b/ Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

   c/ Dresser le tableau de variation de f

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement sur $]0,+\infty[$ deux solutions α et β tels que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$ et $2{,}3 < \beta < 2{,}4$

4) a/ Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$

   b/ Déterminer la position relative de Δ par rapport à C_f

5) Dans **la figure de l'annexe jointe**, on a représenté les réels α et β dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

   Tracer dans la figure de l'annexe C_f et Δ.

6) Calculer en fonction de α, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites $x = \alpha$ et $x = 1$

EXERCICE 3 :

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(1,1,1)$; $B(1,2,0)$ et $C(4,2,-3)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

c) Soit P le plan déterminé par les points A, B et C.

Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $x + y + z - 3 = 0$.

2) Soit $S = \left\{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 11 = 0 \right\}$.

a) Montrer que S est une sphère de centre $I(1,-2,-3)$ et dont on déterminera le rayon R.

b) Vérifier que les points A, B et C appartiennent à S.

c) En déduire que $S \cap P$ est le cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC.

3) Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan P.

a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q médiateur du segment $[AI]$.

c) Montrer que Δ et Q sont sécants en un point $J\left(\frac{39}{14}, -\frac{3}{14}, -\frac{17}{14}\right)$.

d) En déduire une équation de la sphère S' circonscrite au tétraèdre $ABCI$.

e) Déterminer l'ensemble $S \cap S'$.