ENSEA
Niveau : AS2
Durée : 02h
Enseignant : Dr KOUAKOU
NB : Les tables statistiques sont autorisées

Année Académique
2021 / 2022

Devoir de statistique inférentielle 2

Exercice 1.

(1) Définir un test d'hypothèse.

(2) Quelles sont les différentes étapes d'un test d'hypothèse ?

(3) Définir les erreurs de première espèce et deuxième espèce.

(4) Définir les risques de première espèce et de deuxième espèce.

(5) Définir la puissance d'un test.

Exercice 2. *Pour 30 femmes et 20 hommes, on a observé le salaire mensuel. Les résultats mesurés en euros sont ci-dessous :*

salaire des femmes

1955 1764 1668 1441 1970 1795 1716 1911 1660 2001 1744 1676 1695 1652 1626 1698 1656 1739
1789 1716 1684 1445 1646 1617 1630 1440 1850 1252 1493 1537

salaire des hommes

2283 2010 1970 2019 1941 2024 2046 1962 1948 2071 2108 1880 2008 2119 2030 2014 1919 1837
2094 2169

Au seuil de 5%, le salaire moyen des hommes est-il significativement supérieur à celui des femmes ?

Exercice 3. *On considère* $(X_1, \ldots, X_n)$ *un n-échantillon de la loi d'une variable aléatoire X de densité définie par*

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta^2 \ln(x)}{x^{\theta+1}}, & x > 1 \\ 0, & x \leqslant 1 \end{cases}$$

où θ *est un paramètre réel inconnu strictement positif. Soit* $(x_1, \ldots, x_n)$ *une observation de cet échantillon. On souhaite tester sur la base de l'observation* $(x_1, \ldots, x_n)$ *l'hypothèse nulle* $H_0 = \{\theta \leq 1\}$ *contre l'alternative* $H_1 = \{\theta > 1\}$.

1 Déterminer la loi de la variable $Y = 2\theta \log(X)$. *En déduire celle de* $2\theta \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)$

2 Montrer que le modèle statistique considéré est à rapport de vraisemblance monotone.

3 Construire un test de H_0 *contre* H_1 *uniformément plus puissant parmi les tests de niveau* α.

4 *Quelle est la conclusion de ce test lorsque* $n = 30, \alpha = 5\%$ *et* $\sum_{i=1}^{n} ln(x_i) = 26,66$ *?*

Exercice 4. *Soit* $X_1, ..., X_n$ *un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur* $[0, \theta]$ *où* θ *est un paramètre strictement positif. Soit* $\theta_0 > 0$. *On veut tester* $H_o : \theta \leqslant \theta_0$ *contre* $H_1 : \theta > \theta_0$ *au seuil* α.

1 *Montrer que le modèle statistique considéré est à rapport de vraisemblance croissante en la statistique* $\phi(x_1, ..., x_n) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$.

2 *Trouver une zone de rejet W associée à une constante* z_α *vérifiant* $0 < z_\alpha \leqslant \theta_0$.

3 *Calculer la puissance du test* $\pi(\theta)$.

4 *On prend* $\theta_0 = \frac{1}{2}$. *Calculer* z_α *en fonction de n pour que le test soit de niveau 5%.*

Bon courage