Fiche de révision de cours :
Espaces vectoriels normés

Matière : Analyse 3
Professeur : Nejib Saadaoui
Date : September 12, 2024

Exercice 1

On considère les applications suivantes :

$$N_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad N_1(x_1, x_2) = |x_1 + x_2| + |x_1| \tag{1}$$
$$N_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad N_2(x_1, x_2) = \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) \tag{2}$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Tracer la boule unité fermée autour de l'origine par rapport à N_1, et par rapport à N_2.

→ **Voir la solution page 2**

Exercice 2

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrez que $N(0) = 0$.
→ **Voir la solution page 2**

Exercice 3

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$4x + 3y \leq 5\sqrt{x^2 + y^2}$$

→ **Voir la solution page 3**

Solutions des exercices

Solution Exercice 1

1. Vérification des propriétés :
Pour N_1 :

- **Positivité :** $N_1(x_1, x_2) \geq 0$, et $N_1(x_1, x_2) = 0$ si et seulement si $(x_1, x_2) = (0, 0)$.
- **Homogénéité :**

$$\begin{aligned} N_1(\lambda(x_1, x_2)) &= |\lambda x_1 + \lambda x_2| + |\lambda x_1| && (3) \\ &= |\lambda| \cdot (|x_1 + x_2| + |x_1|) && (4) \\ &= |\lambda| N_1(x_1, x_2) && (5) \end{aligned}$$

- **Inégalité triangulaire :** $N_1((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \leq N_1(x_1, x_2) + N_1(y_1, y_2)$.

Pour N_2 :

- **Positivité :** $N_2(x_1, x_2) \geq 0$, et $N_2(x_1, x_2) = 0$ si et seulement si $(x_1, x_2) = (0, 0)$.
- **Homogénéité :**

$$\begin{aligned} N_2(\lambda(x_1, x_2)) &= \max(|\lambda x_1 + 3\lambda x_2|, |\lambda x_1 - \lambda x_2|) && (6) \\ &= |\lambda| \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) && (7) \\ &= |\lambda| N_2(x_1, x_2) && (8) \end{aligned}$$

- **Inégalité triangulaire :** $N_2((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \leq N_2(x_1, x_2) + N_2(y_1, y_2)$.

Solution Exercice 2

Pour démontrer que $N(0) = 0$ dans un espace vectoriel normé (E, N) :
Par définition d'une norme, nous avons la propriété d'homogénéité :

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } x \in E$$

En prenant $\lambda = 0$ et x quelconque dans E :

$$N(0 \cdot x) = |0| N(x) = 0 \cdot N(x) = 0$$

Puisque $0 \cdot x = 0$ (le vecteur nul), nous obtenons :

$$N(0) = 0$$

Solution Exercice 3

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

En prenant $a = 4$ et $b = 3$, on obtient :

$$\begin{aligned}(4x + 3y)^2 &\leq (4^2 + 3^2)(x^2 + y^2)\\ &\leq (16 + 9)(x^2 + y^2)\\ &\leq 25(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée des deux côtés :

$$|4x + 3y| \leq 5\sqrt{x^2 + y^2}$$