Exercice1 :

(j'ai corrigé cet ex avec les groupes Aet B)
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \circ f = f^2 = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = g(x)v.$$

Exercice2 :

(Application du théorème du rang)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que f^3 est l'endomorphisme nul.

1. Montrer que $rg(f) + rg(f^2) \leq dim(E)$.
2. Montrer que $2rg(f^2) \leq rg(f)$.

Exercice3 :

(Endomorphisme d'un e.v.de dimension finie)
Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ il existe un unique $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $Q = P + P' + \ldots + P^{(n)}$.
Ind° Montrer que l'app $f(P) = P + P' + \ldots + P^{(n)}$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.