

# Contents

<b>1</b>	<b>Rappel: Matrices et Applications Linéaires</b>	<b>3</b>
1.1	Généralité . . . . .	3
1.1.1	Somme directe des sous espaces vectoriels . . . . .	3
1.2	Applications linéaires . . . . .	4
1.2.1	Définitions et propriétés de base . . . . .	4
1.2.2	Noyau et Image d'une application linéaire . . . . .	5
1.2.3	Endomorphismes et Automorphismes . . . . .	5
1.3	Matrice d'une application linéaire . . . . .	6
1.4	Changement de Bases . . . . .	7
1.4.1	Matrice de passage d'une base à une autre . . . . .	7
1.5	Exercices . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Réduction des endomorphismes</b>	<b>11</b>
2.1	Polynômes et endomorphismes . . . . .	11
2.1.1	Notations et définitions . . . . .	11
2.1.2	Polynôme minimal . . . . .	12
2.1.3	Polynôme caractéristique . . . . .	13
2.1.4	Théorème de décomposition des noyaux . . . . .	14
2.2	Diagonalisation . . . . .	16
2.2.1	Valeurs propres - Vecteurs propres . . . . .	16
2.2.2	Sous-espaces propres . . . . .	17
2.2.3	Endomorphismes diagonalisables . . . . .	17
2.3	Trigonalisation . . . . .	19
2.4	Endomorphismes nilpotents . . . . .	23
2.5	Exercices . . . . .	25
<b>3</b>	<b>APPLICATIONS DE LA RÉDUCTION</b>	<b>27</b>
3.1	Approche élémentaire . . . . .	27
3.2	Calcul de l'exponentielle d'une matrice . . . . .	28
3.3	Systèmes et équations différentiels linéaires . . . . .	29
3.3.1	Définition d'un système différentiel . . . . .	29
3.3.2	Résolution pratique d'un système différentiel . . . . .	29
3.4	Equations différentielles linéaires à coefficients constants . . . . .	31
3.5	Exercices de révision . . . . .	32



# Chapter 1

## Rappel: Matrices et Applications Linéaires

### 1.1 Généralité

#### 1.1.1 Somme directe des sous espaces vectoriels

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel et  $F_1, F_2, \dots, F_n$  des  $n$  sous espaces vectoriels de  $E$ .

**Définition 1.1.1.** On définit la partie de  $E$ , notée par  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ , par  $x \in F_1 + F_2 + \dots + F_n$ , si et seulement si, il existe  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ , tel que  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

**Proposition 1.1.2.**  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  est un sous espace vectoriel de  $E$ , appelé **sous espace vectoriel somme des**  $F_1, F_2, \dots, F_n$ .

**Définition 1.1.3.** Somme directe

On dit que la somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  est **directe**, si pour tout  $x \in F_1 + F_2 + \dots + F_n$  il existe un **unique**  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ , tel que  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

**Notation**

Dans le cas où la somme de  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  est directe on la note,

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n \quad \text{ou encore} \quad \bigoplus_{i=1}^n F_i$$

**Proposition 1.** La somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  est directe, si et seulement si, pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$  on a

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0_E \implies x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0_E$$

**Preuve.** Exercice

Comme conséquence de la proposition précédente on a

**Théorème 1.** La somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  est directe, si et seulement si,

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad F_i \cap (F_{i+1} + \dots + F_n) = \{0_E\}$$

**Remarque 1.1.4.** • La somme de deux sous espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  est directe, si et seulement si,

$$F \cap G = \{0_E\}$$

• La somme de trois sous espaces vectoriels  $F, G$  et  $H$  de  $E$  est directe si et seulement si,

$$F \cap (G + H) = \{0_E\} \quad \text{et} \quad G \cap H = \{0_E\}$$

**Définition 1.1.5.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires dans**  $E$ , si,

(i)  $F + G$  est directe

(ii)  $E = F \oplus G$

**Remarque 1.1.6.** 1.

$$E = F \oplus G \iff E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\}$$

2. Si  $\dim(E)$  est finie alors

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\} \\ &\iff F + G \text{ et } \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \\ &\iff F \cap G = \{0_E\} \text{ et } \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{aligned}$$

**Exemple 1.1.7.** • Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  le  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de toutes les fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $F$  l'ensemble des fonctions  $f \in E$  qui sont paires et  $G$  l'ensemble des fonctions  $f \in E$  qui sont impaires. Alors  $F$  et  $G$  sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .

En effet ....

- Soit  $E = C^m(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de toutes les fonctions de classe  $C^m$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On pose

$$F = \{f \in E : f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(m)}(0) = 0\} \text{ et } G = \mathbb{R}_m[x]$$

Alors  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .....

- Soit  $E = M_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . On note par

$$F = \{A \in E : A = A^t\} \quad G = \{A \in E : A = -A^t\}$$

$F$  est l'ensemble des matrices symétriques et  $G$  celui des matrices antisymétriques. Alors  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .....

**Théorème 2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque. Alors tout sous-espace vectoriel de  $E$  possède au moins un supplémentaire.

## 1.2 Applications linéaires

### 1.2.1 Définitions et propriétés de base

**Définition 1.2.1.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une application  $f : E \rightarrow F$  est dite **linéaire** si pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $x, y \in E$  on a  $f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$ .

Si une application linéaire  $f$  est bijective, on dit que  $f$  est un **isomorphisme d'espaces vectoriels**.

**Notation:** On désigne par  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

**Exemple 1.2.2.** 1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $F$  un sev de  $E$ . alors. On appelle **injection canonique** de  $F$  dans  $E$  l'application  $j : F \rightarrow E$  définie par

$$\forall x \in F; j(x) = x$$

Alors  $j$  est une application linéaire.

2. Soit  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  définie par

$$\forall p \in \mathbb{R}[X]; f(p) = p'$$

où  $p'$  est la dérivée du polynôme  $P$ .  $f$  est une application linéaire.

3. Soit  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  l'ensemble de fonctions continues de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$ . On pose  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\forall \varphi \in E, f(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx$$

$\varphi$  est une application linéaire.

**Proposition 2.** 1. Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels.  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications linéaires. Alors  $g \circ f$  est une application linéaire.

2. Soit  $f : E \rightarrow F$  un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors  $f^{-1} : F \rightarrow E$  est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Deux espaces vectoriels de dimension finie et de même dimension sont isomorphes.

**Preuve.** Exercice...

**Théorème 3.** (Admis)

1.  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

2. Si  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie et on a

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

### 1.2.2 Noyau et Image d'une application linéaire

**Proposition 3.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors :

1. L'image par  $f$  d'un sous-espace vectoriel de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ . En particulier,  $f(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ , appelé **image de  $f$**  et noté  $\text{Im}(f)$ .

2. L'image réciproque par  $f$  d'un sous-espace vectoriel de  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . En particulier,  $f^{-1}(\{0_F\})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé **noyau de  $f$**  et noté  $\ker(f)$ .

**Remarque 1.2.3.**

$$\ker(f) = \{x \in E; f(x) = 0_F\}$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in F; \exists x \in E; f(x) = y\}$$

**Théorème 4.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire

1.  $f$  est injective si et seulement si  $\ker(f) = \{0_E\}$

2.  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$

**Preuve.** Exercice ...

**Théorème 5** (Théorème du rang (de la dimension)). (Admis) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors pour toute application linéaire  $f : E \rightarrow F$  on a la dimension de  $\text{Im}(f)$  est finie, de plus on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

**Corollaire 1.2.4.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels de dimension finie et  $\dim(E) = \dim(F)$ , alors on a les équivalences suivantes:

$f$  est bijective  $\iff f$  est injective  $\iff f$  est surjective.

### 1.2.3 Endomorphismes et Automorphismes

**Définition 1.2.5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.

- Une application linéaire  $u : E \rightarrow E$  s'appelle un **endomorphisme** de  $E$ .
- Un endomorphisme bijectif s'appelle un **automorphisme** de  $E$ .

**Notation:** On désigne par  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble de tous les endomorphismes de  $E$  et par  $GL(E)$  l'ensemble de tous les automorphismes de  $E$ .

**Remarque 1.2.6.** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$  -espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Alors d'après le théorème du rang, on sait que

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u))$$

Par contre, on a pas toujours  $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$  comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 6.** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie** et  $u : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes:

- $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$
- $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$ ; avec  $u^2 = u \circ u$
- $\ker(u) = \ker(u^2)$
- $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0_E\}$

**Preuve.** Ind. On a toujours  $\operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Im}(u)$  et  $\ker(u) \subset \ker(u^2)$

### Exemples des endomorphismes remarquables

#### Projecteur

**Définition 1.2.7.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque, on appelle **projecteur** de  $E$  tout endomorphisme de  $E$  vérifiant  $u^2 = u \circ u = u$

**Exemple 1.2.8.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $G$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ . alors  $p_F : F \oplus G \rightarrow E$  définie par  $p_F(x_1 + x_2) = x_1$  est un projecteur de  $E$ .

**Proposition 4.** Soit  $u$  un projecteur de  $E$ , alors on a

- $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$
- $\forall x \in E; \quad x \in \operatorname{Im}(u) \iff u(x) = x$

**Preuve.** Exercice Ind pour le deuxième item :  $x - u(x) \in \operatorname{Im}(u) \cap \ker(u)$

#### Symétrie vectorielle

**Définition 1.2.9.** On appelle **symétrie vectorielle**, tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , vérifiant  $u^2 = u \circ u = \operatorname{Id}_E$ .

**Exemple 1.2.10.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $G$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ . alors  $s_F : F \oplus G \rightarrow E$  définie par  $s_F(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$  est un endomorphisme vérifiant  $s_F^2 = \operatorname{Id}_E$  donc elle est une symétrie vectorielle de  $E$ .

**Proposition 5.** Soit  $u$  une symétrie vectorielle de  $E$ . Alors,

$$E = \ker(u - \operatorname{id}_E) \oplus \ker(u + \operatorname{id}_E)$$

**Preuve.** Soit  $x \in \ker(u - \operatorname{id}_E) \cap \ker(u + \operatorname{id}_E)$  alors  $u(x) = x$  et  $u(x) = -x$  donc  $x = 0_E$ .

Pour chaque  $x \in E$  on pose  $x_1 = \frac{x + u(x)}{2} \in \ker(u - \operatorname{id}_E)$  et  $x_2 = \frac{x - u(x)}{2} \in \ker(u + \operatorname{id}_E)$ . Comme  $x = x_1 + x_2$  alors on a le résultat.