Contents

Chapter 1

Rappel: Matrices et Applications Linéaires

1.1 Généralité

1.1.1 Somme directe des sous espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des n sous espaces vectoriels de E.

Définition 1.1.1. *On définit la partie de E, notée par $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$, par*
$x \in F_1 + F_2 + \ldots + F_n$, si et seulement si, il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$, tel que $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

Proposition 1.1.2. *$F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ est un sous espace vectoriel de E, appelé* **sous espace vectoriel somme des $F_1, F_2, \ldots, F_n$.**

Définition 1.1.3. *Somme directe*
*On dit que la somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ est **directe**, si pour tout $x \in F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ il exite un **unique** $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$, tel que $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$*

Notation
Dans le cas ou la somme de $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ est directe on la note,

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n \quad \text{ou encore} \quad \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$$

Proposition 1. *La somme $F_1+F_2+\ldots+F_n$ est directe, si et seulement si, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$ on a*

$$x_1 + x_2 + \ldots x_n = 0_E \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0_E$$

Preuve. *Exercice*

Comme conséquence de la proposition précédente on a

Théorème 1. *La somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ est directe, si et seulement si,*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad F_i \bigcap \Big(F_{i+1} + \ldots F_n\Big) = \{0_E\}$$

Remarque 1.1.4.

- *La somme de deux sous espaces vectoriels F et G de E est directe, si et seulement si,*

$$F \cap G = \{0_E\}$$

- *La somme de trois sous espaces vectoriels F, G et H de E est directe si et seulement si,*

$$F \cap \big(G + H\big) = \{0_E\} \quad \textit{et} \quad G \cap H = \{0_E\}$$

Définition 1.1.5. *Soient F et G dux sous espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires dans** E, si,*

(i) *$F + G$ est directe*

(ii) *$E = F \oplus G$*

Remarque 1.1.6. *1.*
$$E = F \oplus G \qquad \Longleftrightarrow \qquad E = F + G \;\; et \;\; F \cap G = \{0_E\}$$

2. Si $dim(E)$ est finie alors

$$\begin{aligned} E = F \oplus G \quad &\Longleftrightarrow \quad F + G \;\; et \;\; F \cap G = \{0_E\} \\ &\Longleftrightarrow \quad F + G \;\; et \;\; dim(E) = dim(F) + dim(G) \\ &\Longleftrightarrow \quad F \cap G = \{0_E\} \;\; et \;\; dim(E) = dim(F) + dim(G) \end{aligned}$$

Exemple 1.1.7. • *Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel de toutes les fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble des fonctions $f \in E$ qui sont paires et G l'ensemble des fonctions $f \in E$ qui sont impaires. Alors F et G sont des sous espaces vectories supplémentaires de E.*
En effet ....

- *Soit $E = \mathcal{C}^m(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel de toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^m$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose*

$$F = \{f \in E : \;\; f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(m)}(0) = 0\} \;\; et \;\; G = \mathbb{R}_m[x]$$

  Alors F et G sont supplémentaires dans E.....

- *Soit $E = M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note par*

$$F = \{A \in E : \;\; A = A^t\} \qquad G = \{A \in E : \;\; A = -A^t\}$$

  F est l'ensemble des matrices symétriques et G celui des matrices antisymétriques. Alors F et G sont supplémentaires dans E.....

Théorème 2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque. Alors tout sous-espace vectoriel de E possède au moins un supplémentaire.*

1.2 Applications linéaires

1.2.1 Définitions et propriétés de base

Définition 1.2.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.Une application $f : E \to F$ est dite **Linéaire** si pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$ on a $f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$.*
*Si une application linéaire f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme d'espaces vectoriels**.*

Notation: On désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple 1.2.2. *1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E. alors. On apple **injection canonique** de F dans E l'application $j : F \to E$ définie par*
$$\forall x \in F; \;\; j(x) = x$$

Alors j est une application linéaire.

2. Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par
$$\forall p \in \mathbb{R}[X]; \;\; f(P) = P'$$

où P' est la dérivée du polynôme P. f est une application linéaire.

3. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. On pose $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall \varphi \in E, \;\; f(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx$$

φ est une application linéaire.

Proposition 2. *1. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f$ est une application linéaire.*

2. Soit $f : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Deux espaces vectoriels de dimension finie et de même dimension sont isomorphes.

Preuve. *Exercice...*

Théorème 3. *(Admis)*

1. *$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
2. *Si E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et on a*

$$dim(\mathcal{L}(E, F)) = dim(E) \times dim(F)$$

1.2.2 Noyau et Image d'une application linéaire

Proposition 3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :*

1. *L'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F. En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé **image de f** et noté $Im(f)$.*
2. *L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous- espace vectoriel de E, appelé **noyau de** f et noté $ker(f)$.*

Remarque 1.2.3.

$$ker(f) = \{x \in E;\ \ f(x) = 0_F\}$$
$$Im(f) = \{y \in F; \exists x \in E; f(x) = y\}$$

Théorème 4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire*

1. *f est injective si et suelement si $ker(f) = \{0_E\}$*
2. *f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$*

Preuve. *Exercice ...*

Théorème 5 (Théorème du rang (de la dimension))**.** *(Admis) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors pour toute application linéaire $f : E \to F$ on a la dimension de $Im(f)$ est finie, de plus on a*

$$dim(E) = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$$

Corollaire 1.2.4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie et $dim(E) = dim(F)$, alors on a les équivalences suiventes:*
f est bijective $\iff$ f est injective $\iff$ f est surjective.

1.2.3 Endomorphismes et Automorphismes

Définition 1.2.5. *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

- *Une application linéaire $u : E \to E$ s'appelle un **endomorphisme** de E.*
- *Un endomorphime bijectif s'appelle un **automorphisme** de E.*

Notation: On désigne par$\mathcal{L}(E)$ l'ensemble de tous les endomorphismes de E et par $GL(E)$ l'ensemble de tous les automorphismes de E.

Remarque 1.2.6. *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Alors d'après le théorème du rang, on sait que*

$$dim(E) = dim(ker(u)) + dim(Im(u))$$

Par contre, on a pas toujours $E = ker(u) \oplus Im(u)$ comme le montre le théorème suivant :

Théorème 6. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de* ***dimension finie*** *et $u : E \to E$ un endomorphisme de E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

- $E = ker(u) \oplus Im(u)$
- $Im(u) = Im(u^2)$; *avec* $u^2 = u \circ u$
- $ker(u) = ker(u^2)$
- $ker(u) \cap Im(u) = \{0_E\}$

Preuve. *Ind. On a toujours* $Im(u^2) \subset Im(u)$ *et* $ker(u) \subset ker(u^2)$