

Chapitre 2

Les automates finis et les langages réguliers

DR ING FATMA SOMAA

CPI2

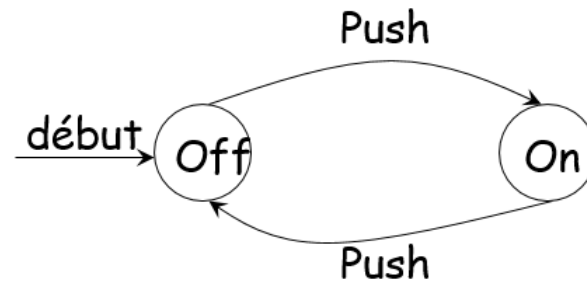
Objectifs des automates

Les automates à états finis sont utilisés comme modèle pour :

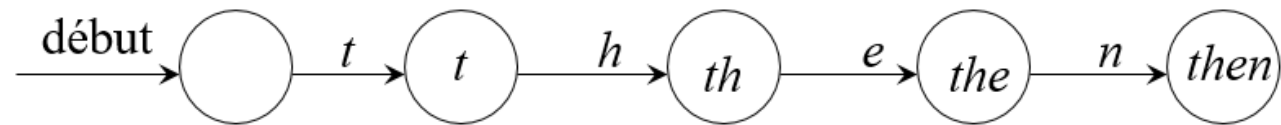
- Conception des circuits logiques
- Analyse lexicale de compilateurs
- La recherche de mots clés dans le Web.
- Vérification des systèmes à états finis. Comme par exemple des protocoles de communications.

Exemples

Automate fini modélisant un système de On/Off



Automate fini reconnaissant la chaîne then



Motivation

Problème: est ce qu'une chaîne w appartient à un langage L ?

Quels sont les ressources nécessaires pour répondre à cette question.

→ Reconnaisseur d'un langage

Programme qui prend en entrée une chaîne x et répond par oui ou non. (x appartient ou non au langage)

On peut raisonner pour les problèmes non pas comme une réponse Oui /non mais comme transformation des entrées en des sorties.

Automate à états finis

définition informelle

Protocole de e-commerce en utilisant e-money (magasin, client, banque)

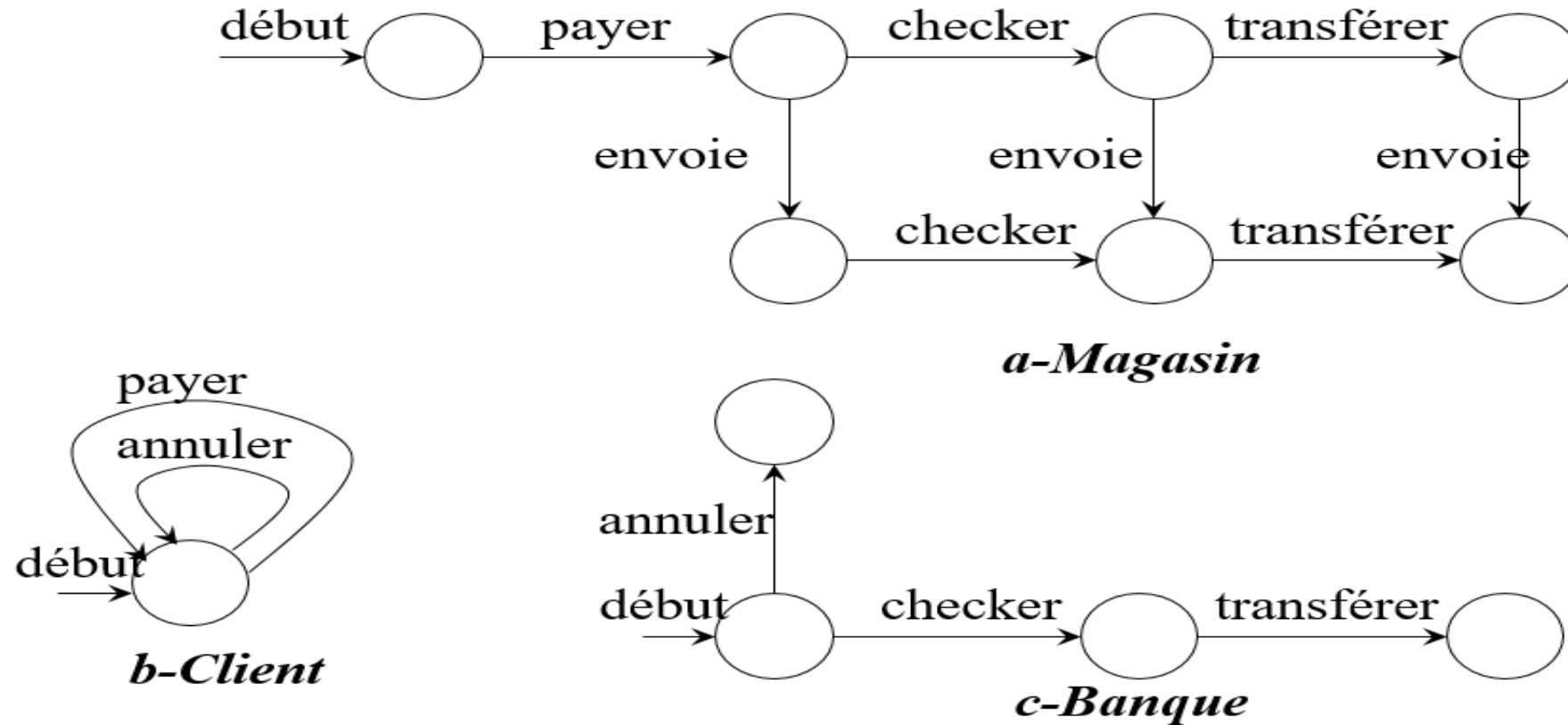
Événements:

1. Le client peut **payer** le magasin (envoi de fichier de monnaie)
2. Le client peut **annuler** envoi de monnaie (comme mettre une opposition au chèque)
3. Le magasin peut **envoyer** la marchandise au client
4. Le magasin peut **checker** la monnaie
5. La banque peut **transférer** l'argent au magasin

Automate à états finis

définition informelle

Protocole pour chaque participant :



Automate à états finis déterministe

définition formelle

Ensemble fini d'états Q

Alphabet de symboles d'entrées Σ

Un état initial (un élément de Q) q_0

Zéro ou plus d'états d'acceptation ou finaux (sous ensemble de Q) F

Une fonction de transition δ

Automate à états finis déterministe

définition formelle

Une fonction de transition δ

- Arguments : état et un symbole d'entrée

- Retourne un état

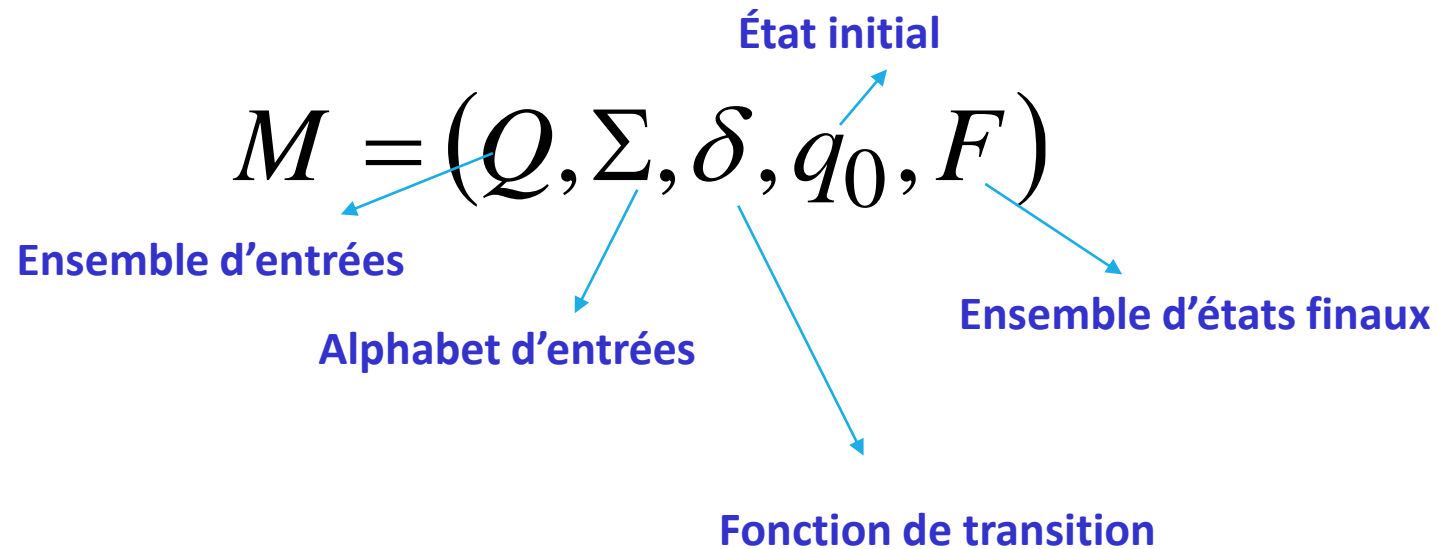
$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

$$\delta(q_i, a) = q_j$$

- Intuitivement; si un automate fini(AF) est dans un état q_i et reçoit l'entrée a (reconnaît), alors l'AF passe à l'état q_j

Automate à états finis déterministe définition formelle

Un Automate à états Finis Déterministe (DFA)



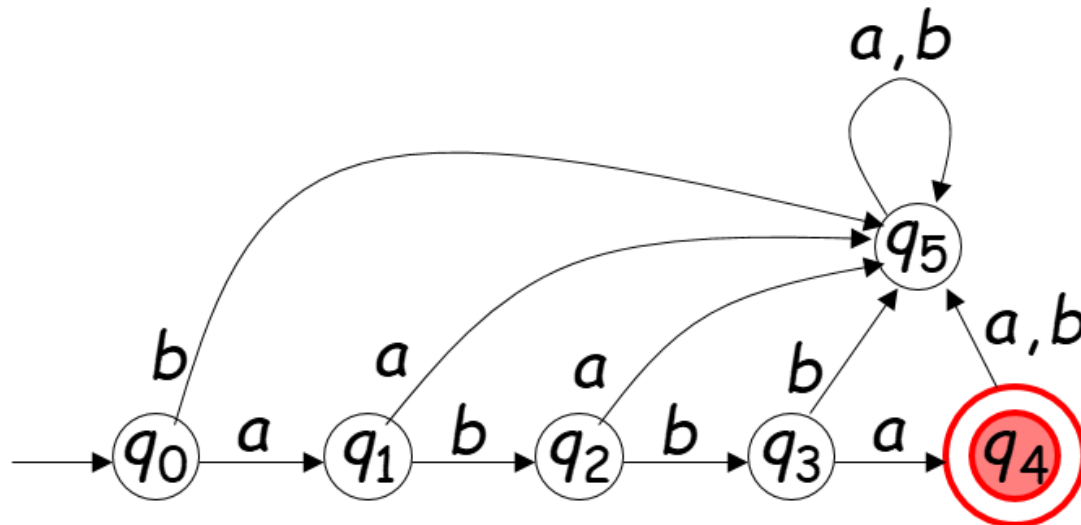
Automate à états finis déterministe définition formelle

Exemple

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$

$$F = \{q_4\}$$



δ	a	b
q_0	q_1	q_5
q_1	q_5	q_2
q_2	q_5	q_3
q_3	q_4	q_5
q_4	q_5	q_5
q_5	q_5	q_5

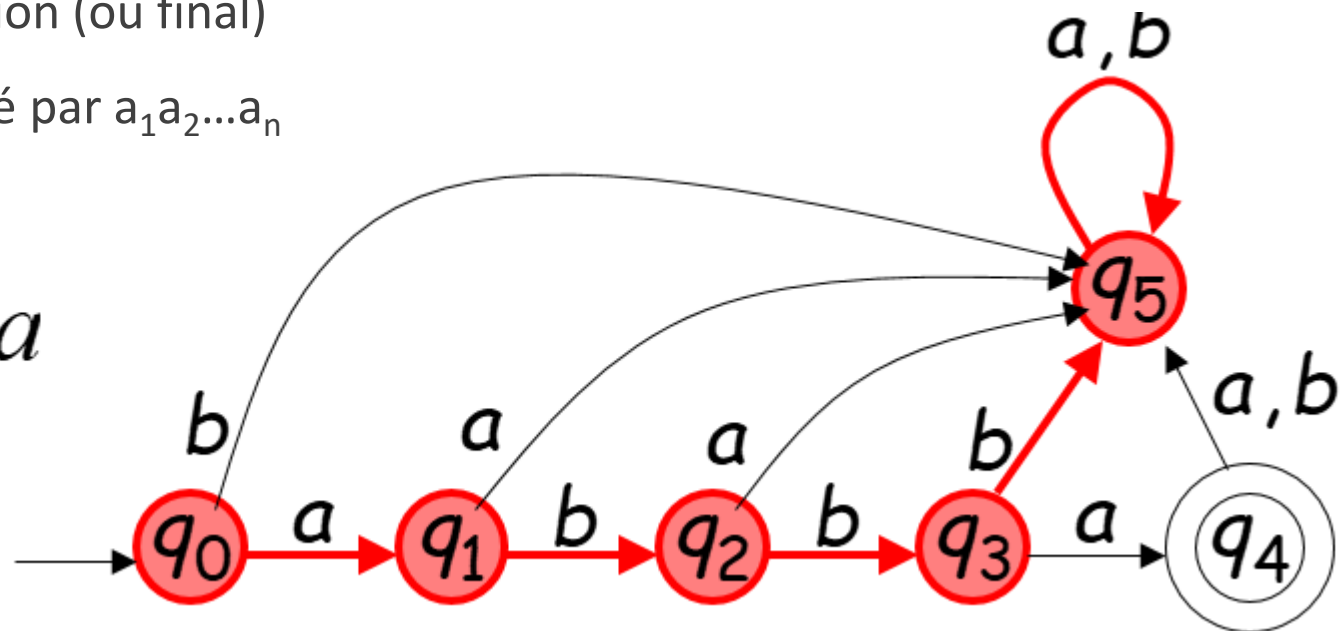
Mot accepté par un automate

Un automate Fini accepte une chaîne $w = a_1a_2...a_n$ S'il existe un chemin dans le diagramme de transition qui :

1. Commence à l'état initial.
2. Finie à un états d'acceptation (ou final)
3. Possède la séquence libellé par $a_1a_2...a_n$

Exemple

abbbaa

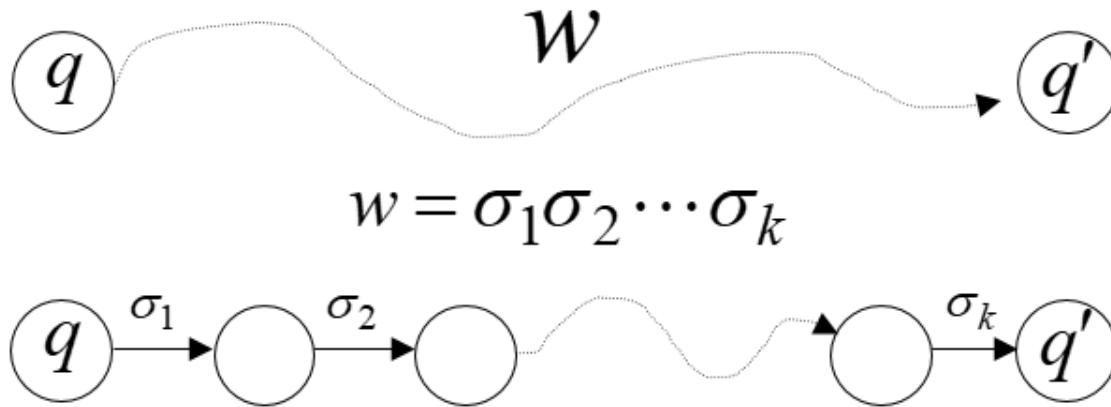


Extension de la fonction de transition

Elle nous dit dans quel état on arrive en partant de l'état q_i et en analysant la chaîne w

$$\delta^*(q, w) = q'$$

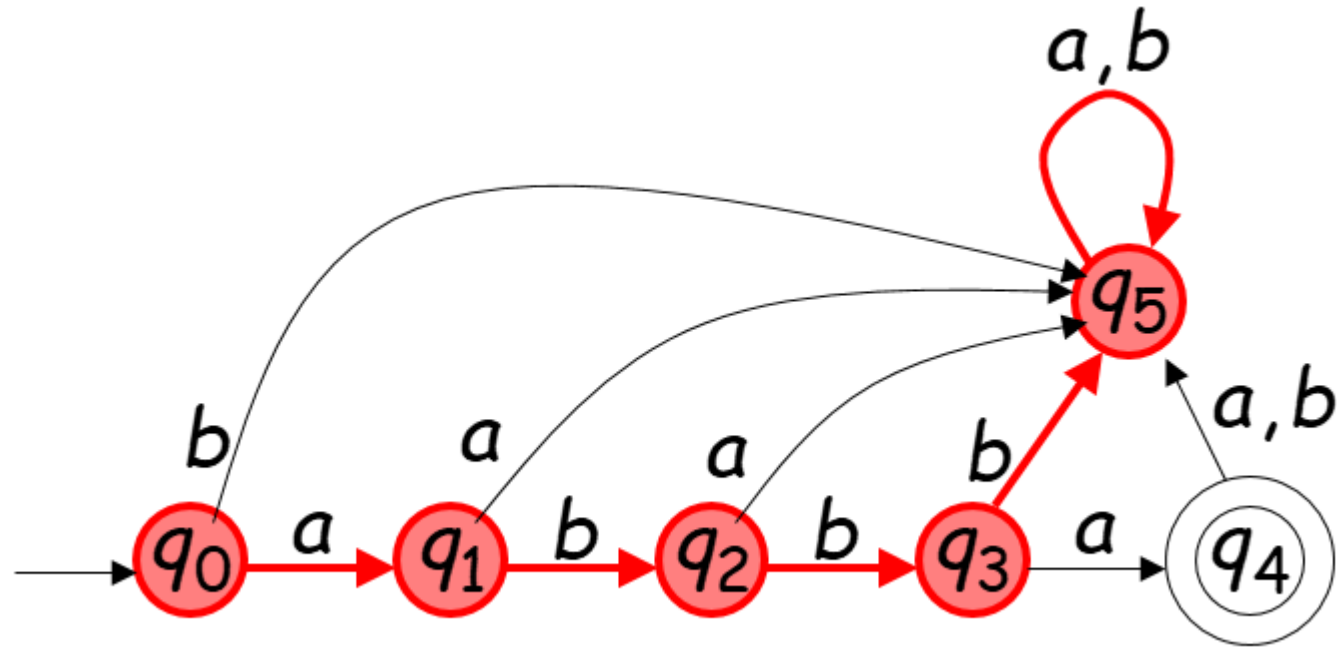
$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$



Extension de la fonction de transition

Exemple

$$\delta^*(q_0, abbbaa) = q_5$$



Langage accepté

Le langage $L(M)$ contient toutes les chaînes acceptées par M

$L(M) = \{ \text{toutes les chaînes menant l'automate } M \text{ vers un état final} \}$

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, w) \in F \}$$

Langage rejeté

$$\overline{L(M)} = \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, w) \notin F\}$$

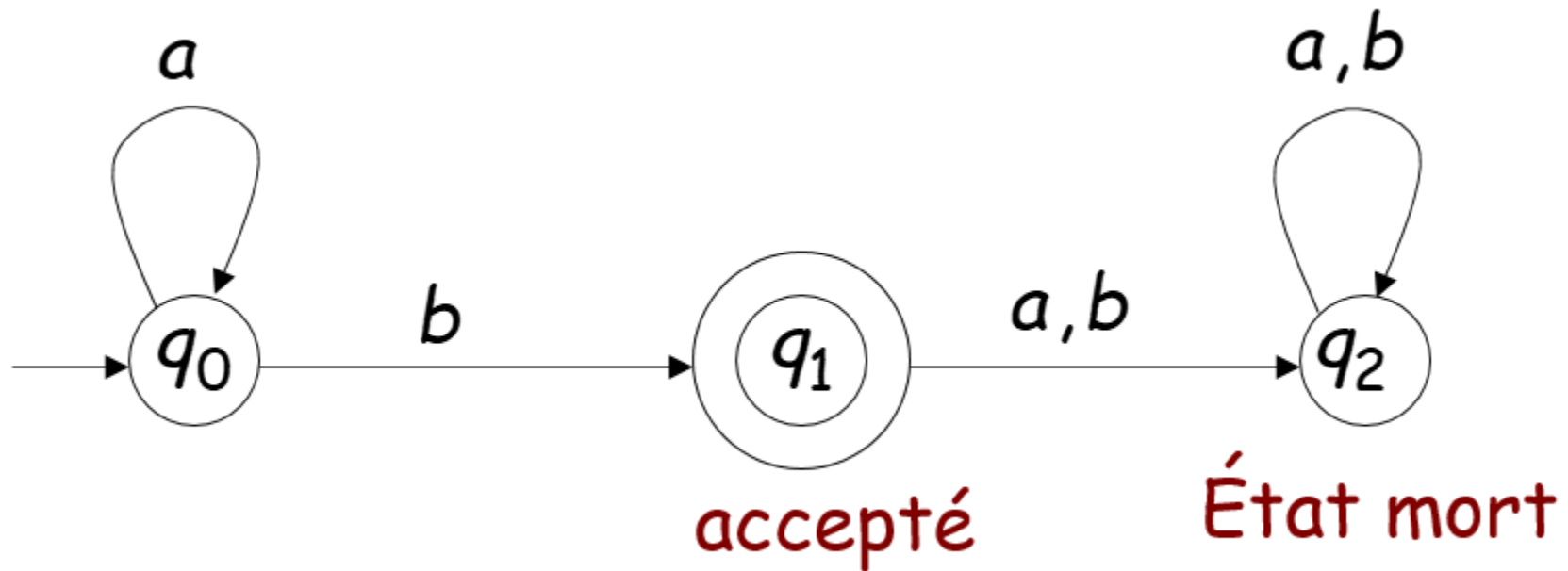


Examples

$$L(M) = \{a^n b : n \geq 0\}$$

Exemples

$$L(M) = \{a^n b : n \geq 0\}$$

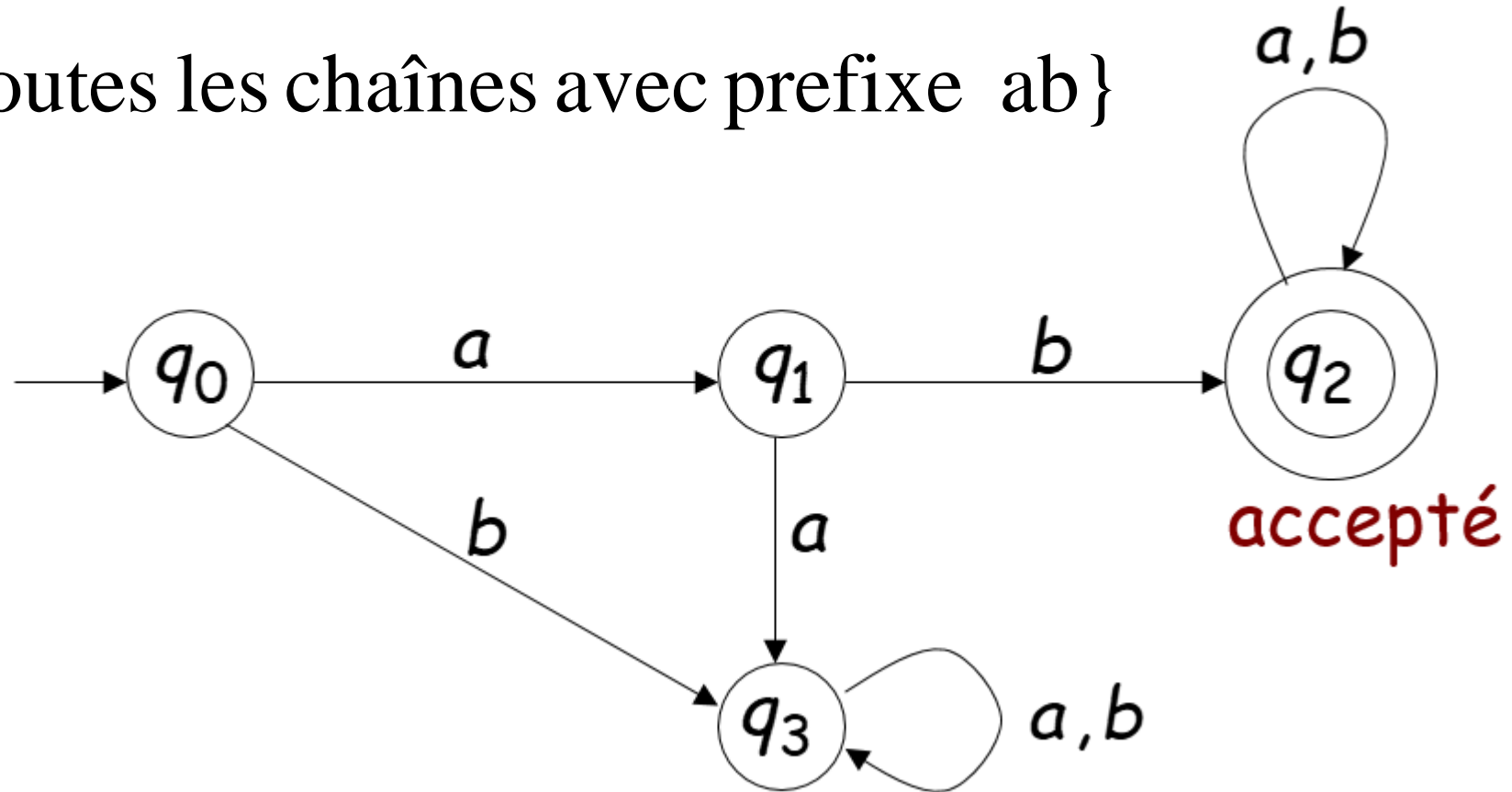


Exemples

$$L(M) = \{ \text{toutes les chaînes avec préfixe } ab \}$$

Exemples

$L(M) = \{ \text{toutes les chaînes avec préfixe } ab \}$

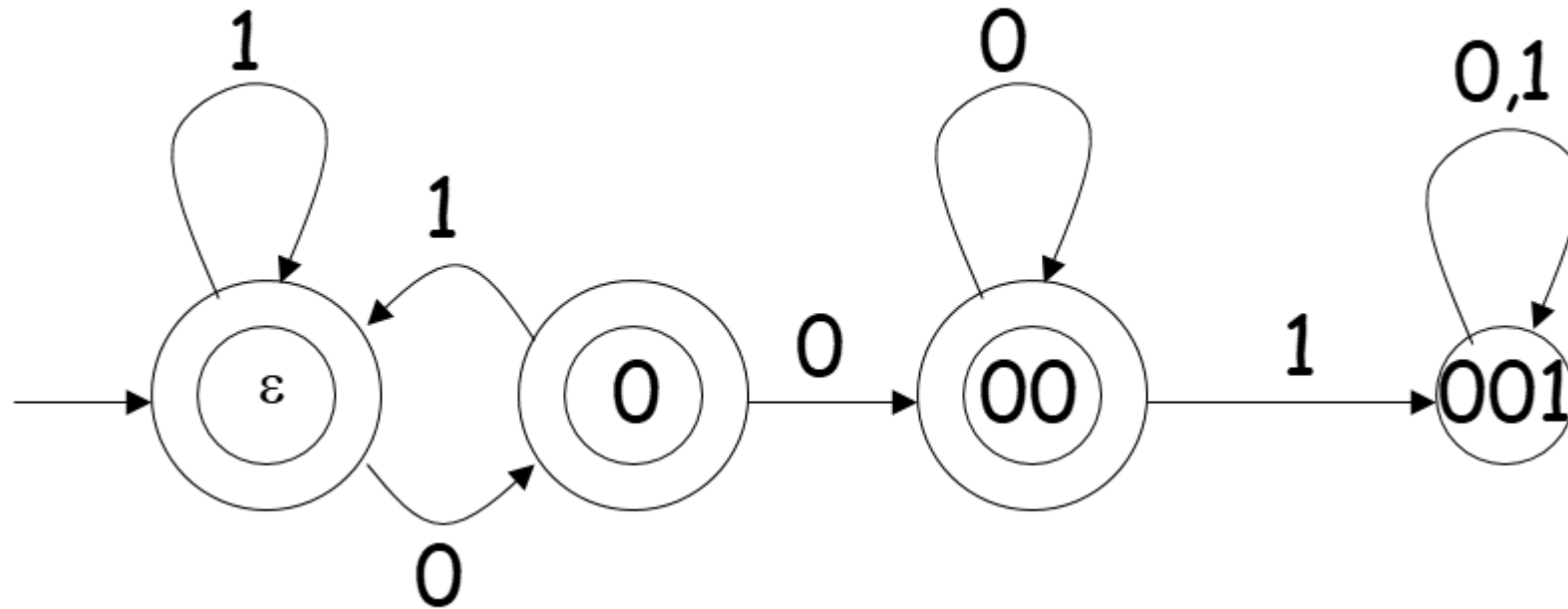


Exemples

$$L(M) = \{ \text{toutes les chaînes sauf } 001 \}$$

Exemples

$L(M) = \{ \text{toutes les chaînes sauf } 001 \}$

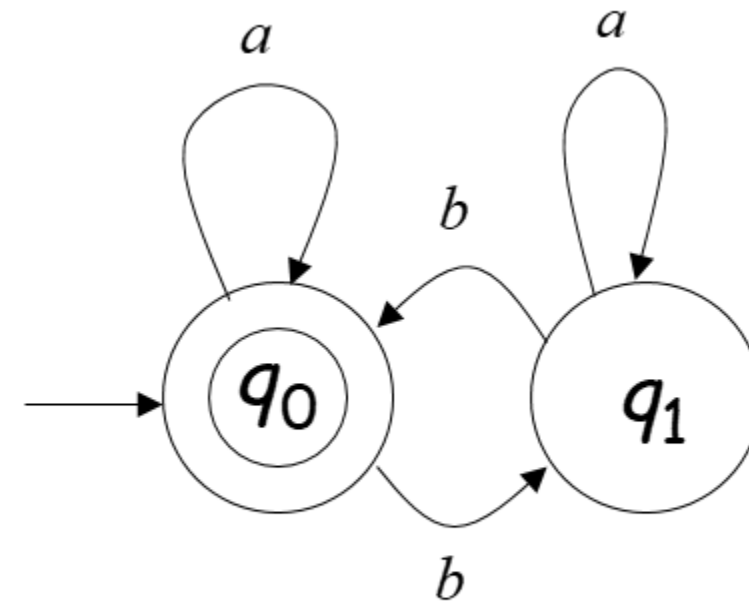


Exemples

$$L(M) = \{ w \text{ contient un nombre pair de } b \}$$

Exemples

$L(M) = \{ w \text{ contient un nombre pair de } b \}$



q_0 : Est à la fois état initial et final

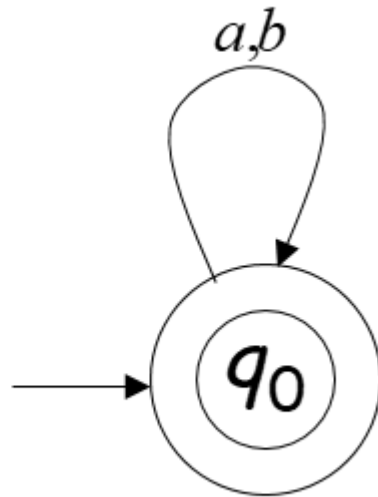
Exemples

$L(M)$ = Tout les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$

Exemples

$L(M)$ = Tout les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$

Σ^*

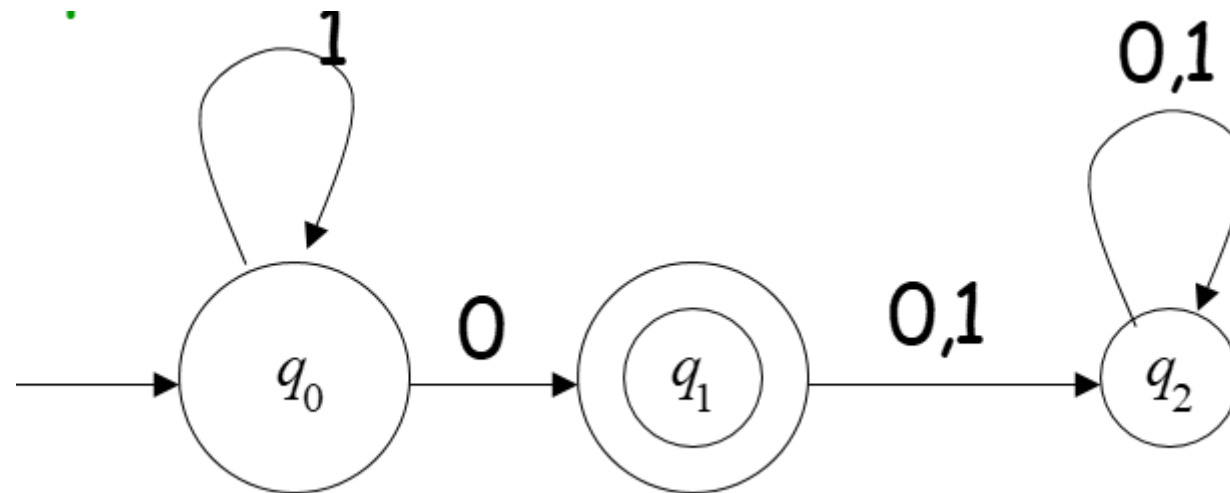


Automates finis complets

Un automate fini déterministe est complet si δ est une fonction totale sur $Q \times \Sigma$

De chaque état il part exactement une flèche étiquetée par chacune des lettres de l'alphabet Σ

Exemple



Erreurs

Ne pas confondre un automate M avec $L(M)$. En fait M est un programme et $L(M)$ est un ensemble de chaînes.

L'état initial q_0 est de type état tandis que F est de type ensemble d'états (représente l'ensemble des états finaux)

→ Est-ce que a est un symbole ou une chaîne de longueur 1.

Ca dépend du contexte par exemple si a est utilisé comme entrée de la fonction δ ou δ^*

Exercices

Voir TD

Questions ?

