Institut Supérieur d'Informatique et de Multimédia de Gabès

COURS DE
Analyse 3

Niveau : Cycle préparatoire intégré

Semestre : Semestre 1

Année universitaire : 2025-2026

Professeur

Nejib Saadaoui

September 8, 2025

Contents

1 Espaces vectoriels normés **3**
1.1 Normes sur un espace vectoriel . . . 3
1.2 Distance - Espace métrique . . . 5
1.3 Boules, ensembles et fonctions bornées . . . 6
1.4 Suites numériques dans un espace vectoriel normé . . . 6

2 Topologies des espaces vectoriels normés **8**

3 Limites et continuité dans un espace vectoriel normé **9**
3.1 Topologie dans les espaces vectoriels normés . . . 9
3.1.1 Ensembles ouverts et fermés . . . 9
3.1.2 Voisinage . . . 9
3.1.3 Adhérence . . . 10
3.2 Limites . . . 10
3.3 Continuité . . . 14
3.4 Exercices avec solutions . . . 16

4 Calcul différentiel **20**
4.1 Développement limité à l'ordre 1 . . . 20
4.2 Différentielle d'une fonction . . . 21
4.2.1 Fonctions différentiables . . . 22
4.2.2 Dérivées partielles . . . 24
4.3 Différentielle des fonctions composées et des produits . . . 27
4.4 Exercices avec solutions . . . 28

5 Formules de Taylor **29**
5.1 Dérivées partielles d'ordre 2 . . . 29
5.2 Applications deux fois différentiables . . . 31
5.3 Formule de Taylor à l'ordre 2 et extrema . . . 32
5.3.1 Points critiques . . . 33
5.3.2 Extrema sur un ouvert . . . 34

Chapitre 1
Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Normes sur un espace vectoriel

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une **norme** sur E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. **Séparation :** $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$.
2. **Homogénéité :** $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. **Inégalité triangulaire :** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un **espace vectoriel normé** (en abrégé evn).

Exemple

1. L'application $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

2. L'application $z \mapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit l'application :

$$\|\cdot\|_1 : E \to \mathbb{R}^+, \quad x = (x_1, x_2) \mapsto |x_1| + |x_2|.$$

Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit l'application :

$$\|\cdot\|_\infty : E \to \mathbb{R}^+, \quad x = (x_1, x_2) \mapsto \max(|x_1|, |x_2|).$$

Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

Activité 1.1.1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire euclidien de x et y est défini par $\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$.

On pose $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$ et $\|y\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}$.

On considère le polynôme du second degré P défini par $P(t)=\|y\|_2^2t^2+2\langle x,y\rangle t+\|x\|_2^2$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que $P(t)=\|x+ty\|_2^2$.
2. Quel est le signe du discriminant Δ de l'équation du second degré $P(t)=0$?
3. En déduire l'inégalité suivante : $\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)$.

Proposition 1

(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, on a : $\left|\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)^{1/2}$, avec égalité si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Exercice 3. Montrer que l'application définie par $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2

Les applications définies par

1. $\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$,
2. $\|x\|_2=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}$,
3. $\|x\|_\infty=\max_{k=1,\dots,n}|x_k|$,

sont des normes sur $\mathbb{K}^n$, appelées normes ℓ^p avec respectivement $p=1,2,\infty$. La norme $\|\cdot\|_2$ est dite associée au produit scalaire canonique dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que :

$$\forall x\in E,\quad \|x\|\geq 0.$$

Exercice 5. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que :

$$\|x\|=0 \quad \text{si et seulement si} \quad x=0_E.$$

Définition 2

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle **vecteur unitaire** (ou normé) tout vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.
À tout vecteur x non nul, on peut associer le vecteur unitaire $\dfrac{x}{\|x\|}$.

Proposition 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors pour tout $x, y \in E$, on a : $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

Définition 3

Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont dites **équivalentes** s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in E$.

Théorème 1

L'équivalence de normes est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

Théorème 2

Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont deux à deux équivalentes.

1.2 Distance - Espace métrique

Définition 4

Une **distance** sur un ensemble E est une application d définie sur $E \times E$ à valeurs dans $[0; +\infty[$ vérifiant, pour tout x, y et z dans E :

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Un **espace métrique** est un ensemble muni d'une distance.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé. Montrez que l'application définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E. C'est la distance associée à la norme sur E.

Définition 5

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$ non vide.

1. Pour $x \in E$, on appelle **distance de** x **à** A et on note $d(x, A)$: $d(x, A) := \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$.
2. On appelle **diamètre de** A et on note $\operatorname{diam}(A)$: $\operatorname{diam}(A) := \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

1.3 Boules, ensembles et fonctions bornées

Définition 6

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. On définit

1. la **boule ouverte** de centre a et de rayon r par $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$,
2. la **boule fermée** de centre a et de rayon r par $\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$,
3. la **sphère** de centre a et de rayon r par $S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$.

Les boules de centre 0_E et de rayon 1 sont appelées les **boules unités**.

Définition 7

(Partie convexe) Soient $a, b \in E$. Le **segment** d'extrémités a et b est l'ensemble $[a; b] = \{(1 - t)a + tb \mid t \in [0; 1]\}$. Un ensemble A est dit **convexe** si et seulement si $\forall x, y \in A, \quad [x, y] \subset A$.

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que les boules $B(a, r)$ et $\overline{B}(a, r)$ sont convexes. La sphère $S(a, r)$ est-elle convexe ?

Définition 8

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie $A \subset E$ est dite **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M$. Ce qui revient à dire que A est incluse dans une boule fermée de centre 0_E.

Définition 9

Soit X un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une fonction vectorielle $f : X \to E$ est **bornée** lorsque son image l'est.

1.4 Suites numériques dans un espace vectoriel normé

Définition 10

On appelle **suite dans** E toute application $u : \mathbb{N} \to E$. On note une telle application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 11

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E **converge dans** E s'il existe $\ell \in E$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0$. On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** si elle ne converge pas.

Théorème 3

La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $\ell \in E$. On a alors que la suite $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 12

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est **bornée** s'il existe $M \geq 0$ tel que $\|u_n\| \leq M \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 5

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de E, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Proposition 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E qui convergent respectivement vers $\ell, k \in E$. Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell + \mu k$.
En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et l'application définie sur cet espace vectoriel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim u_n$ est linéaire.

Proposition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $u = (u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire : $u^{(n)} = u_1^{(n)} e_1 + \cdots + u_p^{(n)} e_p$. Les suites scalaires $u_k = (u_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées **suites coordonnées** (ou composantes) de la suite vectorielle u dans la base $\mathcal{B}$.
On a équivalence entre :

(i) la suite u converge,

(ii) les suites coordonnées $u_1, \dots, u_p$ convergent.

De plus, si tel est le cas, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u^{(n)} = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_1^{(n)}\right) e_1 + \cdots + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_p^{(n)}\right) e_p$.