Serie 1

Exercice 1 :

1) $(U_n) \in \mathbb{R}$ telleque :

$U_{n+1} \overset{(*_1)}{\leq} U_n$, $U_n \overset{(*_2)}{\geq} 0$ et $\lim_{+\infty} U_n \overset{(*_3)}{\neq} 0$

$(*_1)$ et $(*_2)$ $\Rightarrow U_n = \frac{1}{2n}$

verification $(*_3)$

$\lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} \frac{1}{2n} = 0$

Pour avoir $(*_3)$, on prend

$U_n = \frac{1}{2n} + 1$

$\lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} \frac{1}{2n} + 1$

$= 0 + 1 = 1 \neq 0$

2) $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$|U_n| \overset{(*_1)}{\leq} M$ et $\lim_{+\infty} U_n \overset{(*_2)}{=}$ infinie ou n'existe pas

$(*_1) \Rightarrow U_n = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Verification de $(*_2)$

$\lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} 2 = 2$

$\lim_{+\infty} U_n \neq$ infinie, car (U_n) est bornée

$U_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$\lim_{+\infty} U_n$ n'existe pas.

3) $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$U_n \geq 0$; $\forall M \exists n, |U_n| \geq M$,

$\lim_{+\infty} U_n \neq +\infty$

$U_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n' \text{ est impair} \end{cases}$

4) $\exists n, U_n > U_{n+1}$, $\exists k$, $U_k < U_{k+1}$ et $\lim_{+\infty} U_n = 0$

$\begin{cases} U_0 = 3 , U_1 = 2 \\ U_2 = 5 , U_3 = 6 \\ U_n = \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 7 \end{cases}$

5) ~~[illegible]~~

Exercice 2 :

1) $\forall n \ |U_n| \leq 5 \Rightarrow \lim_{+\infty} U_n$ existe

Faux : $\forall n$, $|U_n| \overset{(*_1)}{\leq} 5$ et $\lim_{+\infty} U_n \overset{(*_2)}{}$ n'existe pas

$U_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

2) $U_n \leq U_{n+1}$, $U_n \leq V_n$, $\lim_{+\infty} V_n$ existe

$\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n$ existe

On a $U_n \overset{(*_0)}{\leq} U_{n+1}$, $\forall n$

Verifians si (U_n) est majorée

$\lim_{+\infty} V_n$ existe $\Rightarrow (V_n)$ est majorée par M

D'autre part, $U_n \overset{(*_2)}{\leq} V_n$

$(*_1)$ et $(*_2)$ $\Rightarrow$ (U_n) est majorée par M $(*_4)$

$(*_0)$ et $(*_4)$ $\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n$ existe

3)

$U_n \leqslant U_{n+1}$ et $V_n \leqslant V_{n+1} \xrightarrow{\text{oui}} U_n+V_n \leqslant U_{n+1}+V_{n+1}$

$V_n \leqslant U_{n+1}$ et $V_n \geqslant V_{n+1} \xrightarrow{?} U_n+V_n \leqslant U_{n+1}+V_{n+1}$

$\searrow U_n+V_n \geqslant U_{n+1}+V_{n+1}$

$U_n \geqslant U_{n+1}$ et $V_n \geqslant V_{n+1} \xrightarrow{\text{Faux}} U_n+V_n \leqslant U_{n+1}+V_{n+1}$

Faux : $U_n = \frac{2}{n}$

$V_n = 4$

$U_n+V_n = 4+\frac{2}{n}$

$U_{n+1}+V_{n+1} = 4+\frac{2}{n+1}$

$U_n+V_n > U_{n+1}+V_{n+1}$

4) $U_n = n$

$\lim\limits_{+\infty} U_n = +\infty$

$|\sin(U_n)| \leqslant 1$

$\Rightarrow$ Faux

5) $\{U_n\}_{n\geqslant 0} = \{V_n\}_{n\geqslant 0}$

$\Rightarrow$ Faux : $\lim\limits_{+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{+\infty} V_n$ existent

$\searrow \lim U_n = \infty$ est $\lim V_n = \infty$

$U_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$

$\lim\limits_{+\infty} U_n$ n'existe pas

$V_n \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ 3 & \text{si } n\geqslant 1\end{cases}$

$\lim\limits_{+\infty} V_n = \lim\limits_{+\infty} 3 = 3$

6) $\lim\limits_{+\infty} U_n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n^n = 1$

Faux : $\lim\limits_{+\infty} U_n = 1$ et $\lim\limits_{-\infty} U_n^n \neq 1$

$U_n = 1+\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{+\infty} U_n = \lim\limits_{+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1+0 = 1$

$\lim\limits_{+\infty} U_n^n = \lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$= \lim\limits_{+\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}}$

$= e^1 = e$

Exercice 3 :

1) $U_n = \dfrac{\sin(n)+3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$

$|U_n| = \dfrac{|\sin(n)+3\cos(n^2)|}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{|\sin(n)|+3|\cos(n^2)|}{\sqrt{n}}$

$\leqslant \dfrac{4}{\sqrt{n}}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |U_n| = 0$

$\Leftrightarrow |\lim\limits_{n\to+\infty} U_n| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

donc (U_n) est convergente

2) $U_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} = \dfrac{\cancel{n}\left(2+\left(\frac{-1}{n}\right)^n\right)}{\cancel{n}\left(5+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)}$

$= \frac{2}{5}$ donc (U_n) est convergente

3) $U_n = \dfrac{n^3+5n}{4n^2+\sin(n)+\ln(n)}$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{n^2}\left(n+\frac{5n}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(4+\frac{\sin(n)}{n^2}+\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{n}{4} = +\infty$

donc (U_n) n'est pas convergente

4) $U_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

$$= \frac{(\sqrt{2n+1})^2 - (\sqrt{2n-1})^2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{2n+1-2n+1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} \sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1} = +\infty$$

alors (U_n) n'est pas convergente

5) $U_n = 3^n \cdot e^{-3n}$

$$\ln(U_n) = \ln(3^n) \cdot \ln(e^{-3n})$$
$$= n\ln(3) - 3n$$
$$= n(\ln(3) - 3)$$

on a $\lim\limits_{+\infty} \ln(U_n) = \lim\limits_{+\infty} n(\ln(3) - 3)$

$= -\infty$ car $\ln(3) - 3 < 0$

Alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = 0$ donc (U_n) est $\boxed{\text{convergente}}$

6) $$U_n = \frac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n} = \frac{2^n\left(\frac{n^3}{2^n} + 1\right)}{3^n\left(\frac{n^2}{3^n} + 1\right)}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\frac{n^3}{2^n} + 1}{\frac{n^2}{3^n} + 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{\frac{n^3}{2^n} + 1}{\frac{n^2}{3^n} + 1}\right) = 0$$

donc (U_n) est convergente

Exercice 4:

3) $U_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n - b^n} \cdots \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1}$, $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}^*_+$

si $0 < x < 1$ (càd $a < b$) on a $\lim\limits_{+\infty} x^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = -1$$

si $x = 1$ (càd $a = b$) $\Rightarrow x^n = 1$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1^n - 1}{1^n + 1} = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = 0$$

si $x > 1$ (càd $a > b$) $\lim\limits_{+\infty} x^n = +\infty$

et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = \lim_{+\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = 1$$

4) $U_n = \dfrac{\ln(n + e^n)}{n}$

$$\lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} \frac{\ln(n + e^n)}{n + e^n} \cdot \frac{n + e^n}{n}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln\left(e^n\left(\frac{n}{e^n} + 1\right)\right)}{n} =$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln(e^n) + \ln(ne^{-n} - 1)}{1} =$$

$$\lim_{+\infty} \frac{n + \ln(ne^{-n} - 1)}{n} =$$

$$\lim_{+\infty} 1 + \frac{\ln(ne^{-n} - 1)}{ne^{-n}} \cdot e^{-n}$$

Exercice 5:

1) $U_{k+1} - U_k = 2^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (U_{k+1} + U_k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2^k$$

$\Rightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k U_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k U_k =$

$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \cdot U_k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k U_k$

$= \frac{1-(-2)^{n+1}}{1+2}$

$\Leftrightarrow (-1)^n U_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} -(-1)^k U_k +$

$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k U_k + U_0 =$

$\Leftrightarrow (-1)^{n} U_{n+1} + U_0 = \frac{1-(-2)^{n+1}}{3}$

$\Leftrightarrow (-1)^n U_{n+1} = \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} - U_0$

$\Leftrightarrow U_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1-(-2)^n}{3} - 1 \right)$

2) on a $U_0 = a \in \mathbb{R}$ par recurrence on montre que $U_n = a^{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Alors $\lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} a^{2^n} =$

$= \lim_{+\infty} a^{2 \cdot 2^{n-1}} =$

$= \lim_{+\infty} (a^2)^{n-1}$

• si $|a| < 1 \Leftrightarrow a^2 < 1$

$\Leftrightarrow \lim_{+\infty} (a^2)^{2n-1} = 0$

• si $|a| = 1 \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -1$

$\Rightarrow \lim_{+\infty} a^{2n+1} = 1$

si $a < -1$ et $a > 1$

$\Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow l = +\infty$