Section : LGLSI 1.

Epreuve de : Algèbre 2.

Nature de l'épreuve :	Examen Semestre 2	Documents :	non autorisés.
Date de l'épreuve :	13-06-2023 de 11h 30mn - 12h 30mn	Calculatrice :	non autorisée.
Durée de l'épreuve :	1 h 30mn	Session : Rattrapage.	

Exercice1. (4pts). Répondre par vraie ou faux en justifiant votre réponse .

1) Soient A et B deux matrices carrées de même ordre. Si $A^2 = B^2$, alors $A = B$ ou $A = -B$.
2) Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est égale à 2.
3) Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si le rang de A^5 est égale à n, alors A est inversible.
4) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice échelonnée en ligne équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice2. (10 pts). On considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $\det(A)$. En déduire que A est inversible.
2) Calculer $\det(B)$. En déduire que B est inversible.
3) Vérifier qu'on a : $BA = AB = I_3$
4) En déduire que la matrice A est inversible et donner l'expression de sa matrice inverse A^{-1}.
5) Déterminer le rang de la matrice A.
6) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système $(S) : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$.

Exercice3. (6pts). Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que la matrice A est inversible et donner l'expression de sa matrice inverse A^{-1} .
2) Montrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 1 - 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geq 0$.
3) Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $AB = BA$ si et seulement si $c = 0$ et $a + b = d$.
4) Supposons qu'il existe $C \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $C^2 = A$. Montrons que $AC = CA$.
5) Déterminer toutes les matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$.

«« *Bon courage* » »

«« *Bon courage* »»