

Chapitre II:

Primitive d'une fonction

1) Définition et propriétés:

1) Définition: Soit $I = [a; b]$ un intervalle de \mathbb{R} .

soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I

Une fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une primitive de f si F est dérivable sur I

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I$$

$$\text{vérifie } F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + F(x_0)$$

3) Opérations sur les primitives:

soit $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur I .

On suppose que ces deux fonctions possèdent des primitives.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Alors:

$(f+g)$ possède des primitives qui vérifient

$$\int_{x_0}^x (f+g)(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt + \int_{x_0}^x g(t) dt$$

$(\alpha \cdot f)$ possède des primitives qui vérifient

$$\int_{x_0}^x (\alpha f(t)) dt = \alpha \int_{x_0}^x f(t) dt$$

4) Théorème (existence de primitive):

soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a; b]$. Alors, on a l'implication suivante:

f est continue sur $[a; b] \Rightarrow f$ possède des primitives.

Contre exemple:

soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

f n'est pas continue en $\frac{1}{2}$

On suppose (par l'absurde) que f possède des primitives. Notons F la primitive qui vérifie $F(0) = 0$

On aura $F(0) = 0$ ①

$$F'(x) = 0 \text{ ② } 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$F'(x) = 1 \text{ ③ } \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

Alors toute primitive $x \mapsto F(x)$ de $x \mapsto f(x)$

①

(c) Par exemple: on sait $(x^2)' = 2x$

donnée

cherche

Donc $x \mapsto 2x$ est une primitive

$$x \mapsto 2x$$

2) Proposition:

soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur I , et

$F: I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive

de f . Alors toute autre primitive

$G: I \rightarrow \mathbb{R}$ de f vérifie $G(x) = F(x) + C$

avec C constante.

Notation:

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur I

les primitives de $f(x)$ sont notées

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Soit $x_0 \in I$ fixé, alors la

primitive de $x \mapsto f(x)$

qui s'annule en x_0 est notée

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$$T! \Rightarrow \begin{cases} F(0) = 0 \text{ (1)} \\ F(x) = 0 \text{ (2)} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} F(x) = F\left(\frac{1}{2}\right) \text{ (F est continue)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 0 = F\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$F(x) = x - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

En particulier, F est non dérivable en $\frac{1}{2}$ ce qui est l'impossible donc f ne possède pas de primitive.

$$\text{soit } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 0 = 0$$

$$\text{Al } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = 1$$

5) Primitive des fonctions usuelles:

I	f(x)	$\int^x f(t) dt$
\mathbb{R}	e^x	$e^x + C$
\mathbb{R}	$\cos(x)$	$\sin(x)$
\mathbb{R}	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
\mathbb{R}	$x^n (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$]0, +\infty[\quad x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\begin{matrix}]-\infty, 0[\\]0, +\infty[\end{matrix} \quad \frac{1}{x} \quad \ln|x|$$

$$\mathbb{R} \quad \frac{1}{1+x^2} \quad \arctg(x) + C$$

$$]-1, 1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arcsin(x) + C$$

$$I \quad \begin{cases} f(x) & \int^x f(t) dt \\ \frac{g'(x)}{g(x)} & \ln|g(x)| + C \end{cases}$$

$$\begin{cases} g'(x) [g(x)]^\alpha & \frac{1}{\alpha+1} [g(x)]^{\alpha+1} + C \\ \alpha \neq -1 \end{cases}$$

Remarque:

La constante ajoutée dépend de l'intervalle définissant l'expression de f, par exemple si

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \geq x_0 \\ f_2(x) & x < x_0 \end{cases}$$

et F_1 , resp. F_2 est une primitive de f_1 , resp. f_2 alors les primitives de f sont données par

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) + C_1 & x \geq x_0 \\ F_2(x) + C_2 & x < x_0 \end{cases}$$

Exemple:

$$\text{soit } f(x) = \begin{cases} 2x + e^x & x \geq 0 \\ 4x^3 + 1 & x < 0 \end{cases}$$

les primitives de f sont

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + e^x + C_1 & x \geq 0 \\ x^4 + x + C_2 & x < 0 \end{cases}$$

calculons

$F_1(x) = \int_0^x f(t) dt$ la primitive de f qui s'annule en 0.

$$F_1(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -1 \text{ et } C_2 = 0$$

$$\text{Donc } \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} x^2 + e^x - 1 & x \geq 0 \\ x^4 + x & x < 0 \end{cases}$$

Ia, $\mathcal{C}(y) = 1 - y^2, y \in]-1, 1[$
 $\in]0, 1]$

$1 - y^2 = x \Rightarrow 1 - x = y^2$

1^{er} cas: $y \in]-1, 0]$ et donc \mathcal{C} est bijective.

$\int_{-1}^x \frac{y}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = -\frac{1}{2} \int_1^{1-x} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{3}{2}}} dt$

$\int_{-1}^x \frac{y}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = -\frac{1}{2} \int_1^{1-x} \frac{1}{t^2} (1-y^2)'$
 $= -\frac{1}{2} \int_1^{1-x} [F(1-y^2)]' dy$ avec F

est une primitive de $\frac{1}{t^2} = f(t)$

Calcul de F

$\int^x t^{-\frac{3}{2}} dt = -2 [t^{-\frac{1}{2}}]^x = -2x^{-\frac{1}{2}} + C$

Donc $\int_{-1}^x \frac{y}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = -\frac{1}{2} [F(1-y^2)]^x$
 $= -\frac{1}{2} [-2(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}]^x$
 $= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

La passage de ② \rightarrow ① n'est pas un changement de variable (c'est un changement d'une fonction $\mathcal{C}(t)$ par une variable)

E2) calcul de $\int^y \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

Prenons le changement de variable $x = \sin(t)$

$\int^y \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int^{\mathcal{C}^{-1}(y)} \frac{\cos(t)}{(1-\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} dt$
 $\sin\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$

$f(x):]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

$\int^{\arcsin(y)} \frac{\cos(t)}{(1-\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} dt = \int^{\arcsin(y)} \frac{1}{\cos^2 t} dt$
 $= [\tan(t)]^{\arcsin(y)} = \tan(\arcsin(y)) + C$
 $y \in]-1, 1[$
 $= \frac{\sin(\arcsin(y))}{\cos(\arcsin(y))} + C = \frac{y}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}} + C$
 $= \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + C$

3) Primitive des fonctions rationnelles

a) 1^{ere} situation:

soit $f(x) = \frac{a \cdot x + b}{ax^2 + bx + c}$

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$

cas 1: $\Delta > 0$ et donc x_1 et x_2 sont deux racines de $ax^2 + bx + c$

Donc $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$

Donc $\int^y f(x) dx = A \int^y \frac{1}{x-x_1} + B \int^y \frac{1}{x-x_2}$
 $= A \ln|x-x_1| + B \ln|x-x_2| \quad x \in \mathbb{R}_1$

cas 2: $\Delta = 0$ et donc x_1 est une racine double de $ax^2 + bx + c$

d'où $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + C$

$\int^y f(x) dx = \int^y \frac{A}{x-x_1} dx + \int^y \frac{B}{(x-x_1)^2} dx$
 $= A \ln|y-x_1| - B \frac{1}{y-x_1} + C$

cas 3: $\Delta < 0$

D'où $f(x) = A \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{ax^2+bx+c}$

$= A \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{B_1}{B^2(x^2+B_0)^2} + 1$

$$1) \int^y f(x) dx = A \int^y \frac{2x+b}{ax^2+bx+c} dx + B_1$$

$$2) \times \int^y \frac{1}{B_2^2(x+B_3)^2+1} dx$$

$$= A \ln|ax^2+bx+c| + \dots$$

$$\int \frac{1}{t^2+1} \times \frac{1}{B_2} dt \quad B_2(x+B_3)=t$$

$$= A \ln|ax^2+bx+c| + \frac{B_1}{B_2} \left[\arctg(t) \right]^{B_2(y-B_3)}$$

$$3) \quad ac = \frac{t}{B_2} - B_3$$

$$= A \ln|ac^2+bx+c| + \frac{B_1}{B_2} \arctg(B_2(y+B_3))$$

4) 2eme situation:

$$1) f(x) = \frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)(x-d)^k} \quad \text{avec } \deg(P) < k+2 \text{ et } k \geq 0$$

$f(x)$ s'écrit sous la forme:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} + \frac{\alpha_1}{x-d} + \frac{\alpha_2}{(x-d)^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{(x-d)^k}$$

4) Calcul de primitive des fonctions

trigonométriques:

soit $f(x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}$ où

$P(t_1, t_2)$ et $Q(t_1, t_2)$ sont deux polynômes en t_1 et t_2 .

Pour le calcul d'une primitive de f , on utilise suivant la situation, en général deux méthodes:

a) Règle de Borda:

soit $f(x) = -f(-x)$, alors on effectue le changement de variable $t = \cos x$

si $f(x) = -f(\pi - x) \forall x \in Df$, alors on effectue le changement de variable

$t = \sin(x)$

si $f(x) = f(\pi + x) \forall x \in Df$, alors on effectue le changement de variable

$t = \lg(x)$

Avec les changements de variable, on se ramène au calcul de primitive d'une fonction rationnelle.

Exemple: soit $f(x) = \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x}$

calcul de $\int^x f(t) dt$

$$f(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)}{2 - \cos^2(\pi - x)} = \frac{-\cos(x)}{2 - \cos^2(x)} = -f(x)$$

On pose $t = \sin x$, et on aura

$$\int^x f(x) dx = \int^u \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx = \int^u \frac{(\sin x)'}{1 + \sin^2 x} dx$$

$\stackrel{①}{=} [F(\sin x)]^u$, avec F une primitive de la fonction

$$x \rightarrow \frac{1}{1+x^2} \text{ c'est à dire } F(x) = \arctg(x) + C$$

Donc ① et ② donne

$$\int^u f(x) dx = \arctg(\sin u) + C$$

b) le changement de variable $t = \lg \frac{x}{2}$
On se ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle (plus ou moins compliquée)

Ici, on utilise les formules suivantes

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\lg x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Exemple: $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$, $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned} \int^u f(x) dx &= \int^{\lg \frac{u}{2}} \frac{1}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int^{\lg \frac{u}{2}} \frac{2}{1+t^2-2t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Il reste le calcul d'une primitive de $t \rightarrow \frac{1}{t^2 - 2t + 1}$