

Section : LGSSI	Session : PRINCIPALE
Date de l'épreuve : 09-01-2024	Documents : autorisés <input checked="" type="checkbox"/> non autorisés <input type="checkbox"/>
Durée de l'épreuve : 1h30mn	Calculatrice : autorisée <input checked="" type="checkbox"/> non autorisée <input type="checkbox"/>

Examen : S1

Barème : Exercice 1 : 04 points, Exercice 2 : 08 points, Exercice 3 : 08 points.

EXERCICE 1.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -\frac{(2n+2)}{(2n+3)} I_n.$$

EXERCICE 2. On pose

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{\ln(t)} dt.$$

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction F est égal à $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$
2. Montrer que, pour tout $x > 1$,

$$x^4 \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq F(x) \geq \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

3. Déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \ln(2)$

EXERCICE 3. Soit $m \in \mathbb{R}_+$. On considère les deux fonctions f_m et g données par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_m(x) = 5 - mx^2 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2x + 1.$$

1. Esquisser les courbes représentatives C_{f_m} et C_g de f_m et g .
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) : $f_m(x) = g(x)$.
3. On désigne par x_1 et x_2 les solutions de (E) avec $x_1 < x_2$.
Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_{f_m} , C_g et les droites d'équations $x = x_1$ et $x = x_2$.