

Chapitre 3: Equations différentielles

I/ Equations de 1^{er} ordre:

Definition:

on appelle équation différentielle linéaire de 1^{er} ordre, toute équation de la forme.

$$(E): a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

avec, a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ (de plus $a(x) \neq 0, \forall x \in I$)

* $c(x)$ s'appelle le second membre de (E)

* Résoudre (E) c'est déterminer l'ensemble des fonctions y qui vérifient cette équation.

→ une solution générale de (E) notée y_G s'écrit de la forme:

$$y_G = y_H + y_P$$

avec y_H est une solution de

$$(E_H): a(x)y' + b(x)y = 0$$

(E_H) s'appelle équation homogène (ou aussi sans second membre) & associée à (E)

Exemples:

$$1) (E_1): xy' + \frac{1}{1+x} y = e^x \quad \left| \begin{array}{l} a(x) = x \\ b(x) = \frac{1}{1+x} \\ c(x) = e^x \end{array} \right.$$
$$\hookrightarrow (E_{1H}): xy' + \frac{1}{1+x} y = 0$$

$$2) (E_2): y' + e^x y = \frac{1}{1+x^2} \quad \left| \begin{array}{l} a(x) = 1 \\ b(x) = e^x \\ c(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$$
$$\hookrightarrow (E_{2H}): y' + e^x y = 0$$

1) Détermination de y_H :

→ y_H est solution de l'équation homogène

$$(E_H): a(x)y' + b(x)y = 0$$

$$a(x)y'_H + b(x)y_H = 0$$

$$\hookrightarrow a(x)y'_H = -b(x)y_H \Rightarrow a(x) \frac{y'_H}{y_H} = -b(x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'_H}{y_H} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{y'_H}{y_H} = \frac{b(x)}{a(x)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'_H}{y_H} dx = - \int \frac{b(x)}{a(x)} dx + cte$$

$$\Rightarrow \ln |y_H| = - \int \frac{b(x)}{a(x)} dx + cte$$

$$y_H = e^{- \int \frac{b(x)}{a(x)} dx + cte}$$

$$y_H = K e^{- \int \frac{b(x)}{a(x)} dx}, K \in \mathbb{R}$$

q''

Exemples:

$$1) (E): (1+x^2)y' + y = e^x \quad \begin{cases} a(x) = (1+x^2) \\ b(x) = 1 \\ c(x) = e^x \end{cases}$$
$$\hookrightarrow (E_H): (1+x^2)y' + y = 0$$

$$\Rightarrow y_H = k e^{-\int \frac{1}{1+x^2} dx} = k e^{-\arctan(x)}, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y_H = k e^{-\arctan x}, k \in \mathbb{R}$$

$$2) (E): x^2(x+1)y' + xy = \cos x$$

$$\hookrightarrow (E_H): x^2(x+1)y' + xy = 0 \quad \begin{cases} a(x) = x^2(x+1) \\ b(x) = x \\ c(x) = \cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_H = k e^{-\int \frac{x}{x^2(x+1)} dx}$$
$$= k e^{-\int \frac{x}{x^2(x+1)} dx}$$
$$= k e^{-\int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx}$$
$$= k e^{-\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx}$$

2) Détermination de y_p : (méthode de la variation de la constante)

$$y_H = k e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}, k \in \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow y_p = k(x) e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$$

où $k(x)$ est une fonction à déterminer.

→ La méthode de la variation de la constante consiste à remplacer $k \in \mathbb{R}$ qui figure dans l'expression de y_H par une fonction $k(x)$.

Pour déterminer y_p il faut déterminer $k(x)$.

Exemples:

$$1) (E): y' + y = (x+2)e^x \quad \begin{cases} a(x) = 1 \\ b(x) = 1 \\ c(x) = (x+2)e^x \end{cases}$$

$$\hookrightarrow (E_H): y' + y = 0$$

$$\Rightarrow y_H = k e^{-\int 1 dx} = k e^{-x}, k \in \mathbb{R}$$

$$y_H = k e^{-x}, k \in \mathbb{R}$$

$y_p = k(x) e^{-x}$ est solution (E):

$$y' + y = (x+2)e^x$$

donc elle vérifie (E), c-à-d:

$$y'_p + y_p = (x+2)e^x$$

$$y_p = k(x) e^{-x} \Rightarrow y'_p = k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x}$$

En remplaçant dans (E), on obtient

$$k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x} + k(x) e^{-x} = (x+2)e^x$$

$$\Rightarrow k'(x) e^{-x} = (x+2)e^x$$

$$\Rightarrow k(x) = \int (x+2)e^{2x} dx$$

I.p.p détermine $k(x)$

on pose

$$\begin{cases} U = (x+2) \Rightarrow U' = 1 \\ V' = e^{2x} \Rightarrow V = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int (x+2)e^{2x} dx = \frac{x+2}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$= \frac{x+2}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}, k \in \mathbb{R}$$

$$k(x) = \frac{2x+3}{4} e^{2x}$$

$$Y_p = k(x) e^{-x} \\ = \frac{2x+3}{4} e^{2x} \cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow Y_p = \frac{2x+3}{4} e^x$$

$$\Rightarrow Y_G = k e^{-x} + \frac{2x+3}{4} e^x, k \in \mathbb{R}$$