FACULTE DES SCIENCES DE GABES
*****
Département de Mathématiques

LGLSI1-LIRIS1—19/06/2023
Analyse 1
Hamdi

Session de rattrapage – Durée: 1h30

Documents, téléphones portables et calculatrices non autorisés.

QCM (10pts) :
Répondre au questionnaire à choix multiple suivant sachant que chaque question possède au moins une réponse (y compris le choix " Aucune des propositions précédentes n'est valable") et au plus deux. Aucune justification n'est demandée.

Les cinq questions suivantes sont liées.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2-1}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = \alpha$ où α est un réel fixé.

Question 1.
Le développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit:

(a) $\ln(x+1) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

(b) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

(c) $\ln(x+1) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

(d) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$

(e) Aucune des propositions précédentes n'est valable.

Question 2.
Le développement limité de la fonction $x \mapsto x^2$ à l'ordre 2 au voisinage de 1 s'écrit:

(a) $x^2 = x^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$

(b) $x^2 = (x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$

(c) $x^2 = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$

(d) $x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$

(e) Aucune des propositions précédentes n'est valable.

A)

(B) La fonction $x \mapsto f(x)/g(x)$ admet forcément un développement limité d'ordre 0 en 0.

(C) La limite quand x tend vers 0 de $f(x)/g(x)$ existe forcément.

(D) La limite quand x tend vers 0 de $(f(x)g(x))/x$ existe forcément.

(E) La limite quand x tend vers 0 de $x^2 f(x)/g(x)$ existe forcément.

Question 4.
Soient f et g deux fonctions telles que au voisinage de 0 :

$$f(x) = 1 + x^2 + x^2\varepsilon_1(x) \quad et \quad g(x) = 1 - x^2 + x^2\varepsilon_2(x).$$

(A) $f(x) + g(x) = 1 + x^2\varepsilon(x)$.

(B) $f(x) - g(x) = 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

(C) $f(x)/g(x) = 1 + x^2\varepsilon(x)$.

(D) $f(x^2)g(x) = 1 + x^4\varepsilon(x)$.

(E) $f(g(x)-1) = 1 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

Question 5.
Soit f une fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = 3 + 2x + x^2 + x^4\varepsilon(x).$$

Soit F la primitive de f telle que $F(0) = 1$.

(A) $F(x) = 3x + x^2 + x^3 + x^5\varepsilon(x)$.

(B) La dérivée troisième de F en 0 est nulle.

(C) La dérivée seconde de f' en 0 est nulle

(D) $F(x) = 1 + 3x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

(E) $f'(x) = 2 + 2x + x^4\varepsilon(x)$.

<u>Exercice</u> 2 (10pts) :
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
   f est-elle paire ? impaire ? continue ? dérivable ?
2. (a) Expliquer pourquoi $x \mapsto \tan(x)$ admet un développement limité à l'ordre 6, en $x = 0$, de la forme $\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + x^6\varepsilon\,(x)$.
   (b) Déterminer alors a, b et c (on pourra pour cela utiliser la relation $\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2$).
   (c) En déduire un développement limité de $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$, en $x = 0$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, en $x = 0$, de $x \mapsto \frac{x}{\tan x}$.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, en $x = 0$, de f.
5. Montrer que f admet un prolongement continu en $x = 0$. On notera g la fonction ainsi obtenue par prolongement de f. Quelle est la valeur de $g(0)$?