UNIVERSITÉ DE GABÈS FACULTÉ DES SCIENCES DE GABÈS DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES		A.U. : 2023-2024 LGLSI1

CORRIGE DE LA SERIE N° 1-Analyse 1

CORRECTION DE L'EXERCICE 1 .

(1) Soit $f_1(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}$, on a $D_{f_1} = \mathbb{R}\setminus\{1, 3\}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to3^-} f_1(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+} f_1(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x\to1} f_1(x) = \lim_{x\to1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to1} \frac{x}{x-3} = -\frac{1}{2}.$$

(2) Soit $f_2(x) = \ln\left(x^2 - 4x + 3\right)$. On a $D_{f_2} =]-\infty,\ 1[\cup]3,\ +\infty[$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f_2(x) = \lim\limits_{x\to3^+} f_2(x) = -\infty$.

(3) Soit $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$. On a : $D_{f_3} =]-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty[$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f_3(x) = f_3(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to1^+} f_3(x) = f_3(1) = -1$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1} - x\right)\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)}{\sqrt{x^2-1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x} = 0.$$

(4) Soit $f_4(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. On a : $D_{f_4} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to0^+} f_4(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f_4(x) = -\infty$

(5) Soit $f_5(x) = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}$. On a $D_{f_5} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\lim\limits_{x\to0} f_5(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_5(x) = -\infty$. et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) = +\infty$.

(6) Soit $f_6(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$. On a : $D_{f_6} =]0,\ +\infty[\setminus\{1\}$, $\lim\limits_{x\to0^+} f_6(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to1^-} f_6(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f_6(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = 0$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2 .

(1) On a :

$$\lim_{x\to0^+} [\ln(\sin x) - \ln(x)] = \lim_{x\to0^+} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1) = 0.$$

(2) Soit $f(x) = e^x - e^{-x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^x + e^{-x}$. En particulier, on a :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 2.$$

(3) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

D'où

$$\forall x > 0,\ 1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

et

$$\forall x < 0,\ 1 - x > xE\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to0^+} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0^-} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$ et par conséquent $\lim\limits_{x\to0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

(4) On a :

$$\lim_{x\to0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e.$$

(5) On a :

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x+3-1}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x+2}{x^2-9}=\frac{5}{0^+}=+\infty.$$

(6) On a :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}e^{\frac{1}{x(x-1)}}=\lim_{x\to 0^+}0\times 0=0.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 3 .

(1) On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7e^x-xe^{2x}}{x^3\ln(x)+x(\ln x)^5} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^6e^x-e^{2x}}{x^2\ln(x)+(\ln x)^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\left(x^6e^{-x}-1\right)}{x^2\ln(x)\left(1+\frac{(\ln x)^5}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^2\ln(x)}\times\frac{x^6e^{-x}-1}{1+\frac{(\ln x)^5}{x}}=(+\infty)\times(-1)=-\infty.\end{aligned}$$

(2) Pour tout $x>0$, on a :

$$\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\ln(e^x-1)-\ln(x)=\ln\left(e^x\left(1-e^{-x}\right)\right)-\ln(x)=x+\ln\left(1-e^{-x}\right)-\ln(x).$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\ln\left(1-e^{-x}\right)-\frac{\ln(x)}{x}\right)=1+0\times 0-0=1.$$

(3) On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(4) On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\ln(x^2+1)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\ln(x^2+1)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}\right)\left(\sqrt{\ln(x^2+1)}+\sqrt{\ln(x^2-1)}\right)}{\sqrt{\ln(x^2+1)}+\sqrt{\ln(x^2-1)}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(x^2-1\right)}{\sqrt{\ln(x^2+1)}+\sqrt{\ln(x^2-1)}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)\times\frac{1}{\sqrt{\ln(x^2+1)}+\sqrt{\ln(x^2-1)}}\\ &= 0\times 0=0.\end{aligned}$$

(5) On a :

$$\forall x\geq 0,\ \left|\frac{x\sin(x)}{x^2+1}\right|\leq\frac{x}{x^2+1}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}=0$.

(6) On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to 0^+}e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=e^1=e.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 4 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ si } x\in\left]-\infty,\ 2\right] \\ a-\frac{b}{x}, \text{ si } x\in\left]2,\ 4\right] \\ 1, \text{ si } x\in\left]4,\ +\infty\right[. \end{cases}$$

·) La fonction $x\mapsto 0$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]-\infty,\ 2[$. Donc la fonction f est continue sur $]-\infty,\ 2[$.
·) La fonction $x\mapsto a-\frac{b}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, en particulier sur $]2,\ 4[$. Donc la fonction f est continue sur $]2,\ 4[$.
·) La fonction $x\mapsto 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]4,\ +\infty[$. Donc la fonction f est continue sur $]4,\ +\infty[$.
D'où f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$. Donc il reste à étudier la continuité en 2 et en 4.

Continuité en 2 ? On a $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=a-\dfrac{b}{2}$. D'autre part, on a $f(2)=0$. Donc f est continue en 2 si et seulement si $a-\frac{b}{2}=0$.

Continuité en 2 ? On a $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=a-\dfrac{b}{4}$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=1$. D'autre part, on a $f(4)=a-\frac{b}{4}$. Donc f est continue en 4 si et seulement si $a-\frac{b}{4}=1$.

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a-\frac{b}{2}=0$ et $a-\frac{b}{4}=1$. Ce qui entraine $a=2$ et $b=4$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 5 . On considère la fonction g définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}.$$

Les fonctions $x\mapsto E(x)$ et $x\mapsto\sqrt{x-E(x)}$ sont continues sur $\mathbb{R}\diagdown\mathbb{Z}$. Donc la fonction g est continue sur $\mathbb{R}\diagdown\mathbb{Z}$ comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}\diagdown\mathbb{Z}$.

Soit $n\in\mathbb{Z}$. On a :

$$g(x)=\begin{cases} n-1+\sqrt{x-n+1}, & \text{si} \quad x\in\left[n-1,\ n\right[\\ n+\sqrt{x-n}, & \text{si} \quad x\in\left[n,\ n+1\right[. \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{x\to n^-} g(x)=\lim_{x\to n^-}\left(n-1+\sqrt{x-n+1}\right)=n \text{ et } \lim_{x\to n^+} g(x)=\lim_{x\to n^+} n+\sqrt{x-n}=n.$$

Alors $\lim\limits_{x\to n} g(x)=n=g(n)$. D'où g est continue en tout point $n\in\mathbb{Z}$ et par conséquent elle est continue sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 6 .

(1) On considère la fonction f définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right), \text{ si } x\neq 0 \\ 0, \text{ si } x=0. \end{cases}$$

Les deux fonctions $x\mapsto x^2$, $x\mapsto\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^*$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

D'autre part, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ |f(x)|\leq x^2 \underset{x\ \to 0}{\to} 0$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$. D'où f est continue en 0.

En conclusion, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit

$$g(x)=\begin{cases} e^x+x\cos(x)-\sin(x), \text{ si } x\leq 0 \\ 1+x\ln(x), \text{ si } 0<x<1 \\ x^2, \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$$

i) La fonction $x\mapsto e^x+x\cos(x)-\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]-\infty,\ 0[$. Donc g est continue sur $]-\infty,\ 0[$.

ii) La fonction $x\mapsto 1+x\ln(x)$ est continue sur $]0,\ +\infty[$, en particulier sur $]0,\ 1[$. Donc g est continue sur $]0,\ 1[$.

iii) La fonction $x\mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]1,\ +\infty[$.

iv) Continuité en 0 ? On a :

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(e^x+x\cos(x)-\sin(x)\right)=1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1+x\ln(x)\right)=1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1=g(0)$. D'où g est continue en 0.

v) Continuité en 1 ? On a :

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(1+x\ln(x)\right)=1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1 = g(1)$. D'où g est continue en 1.

Conclusion. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 7 .

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f(x) = \frac{x^2+ax+1}{x-1}.$$

i) Si $a \neq -2$ alors

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si} \quad a > -2 \\ -\infty, & \text{si} \quad a < -2 \end{cases}$$

Donc la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 1.

ii) Si $a = -2$ alors

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x-1) = 0 \in \mathbb{R},$$

Donc f est prolongeable par continuité en 1 si et seulement si $a = -2$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 8 .

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x.$$

(1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x^2 + x - 6.$$

On a :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -3.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,\ f(-3) = \frac{27}{2} \text{ et } f(2) = -\frac{22}{3}$$

D'où les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{27}{2}$	$\searrow$	$-\frac{22}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

(2) i) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,\ -3]$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty,\ -3]$ sur $f(]-\infty,\ -3]) = \left]-\infty,\ \frac{27}{2}\right]$. Comme $5 \in \left]-\infty,\ \frac{27}{2}\right]$ alors 5 admet un antécédent unique $\alpha \in]-\infty,\ -3]$ par f.

α est l'unique solution dans $]-\infty,\ -3]$ de l'équation $(E)\ : f(x) = 5$.

ii) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-3,\ 2]$ donc elle réalise une bijection de $[-3,\ 2]$ sur $f([-3,\ 2]) = \left[-\frac{22}{3},\ \frac{27}{2}\right]$. Comme $5 \in \left[-\frac{22}{3},\ \frac{27}{2}\right]$ alors 5 admet un antécédent unique $\beta \in [-3,\ 2]$ par f.

β est l'unique solution dans $[-3,\ 2]$ de l'équation $(E)\ : f(x) = 5$.

iii) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[2,\ +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[2,\ +\infty[$ sur $f([2,\ +\infty[) = \left[-\frac{22}{3},\ +\infty\right[$. Comme $5 \in \left[-\frac{22}{3},\ +\infty\right[$ alors 5 admet un antécédent unique $\gamma \in [2,\ +\infty[$ par f.

γ est l'unique solution dans $[2,\ +\infty[$ de l'équation $(E)\ : f(x) = 5$.

En conclusion l'équation $(E)\ : f(x) = 5$ admet exactement trois solutions réelles α, β et γ.

(3) On suppose que $\alpha < \beta < \gamma$. On vérifie que :

$f(-4,67) \simeq 4,97,\ f(-4,66) \simeq 5,08,\ f(-0,80) \simeq 4,94,\ f(-0,81) \simeq 5,01\ f(3,97) \simeq 4,91$ et $f(3,98) \simeq 5,05$.

D'où

$$f(-4,67) < 5 < f(-4,66),\ f(-0,80) < 5 < f(-0,81) \text{ et } f(3,97) < 5 < f(3,98).$$

Donc

$$-4,67 < \alpha < -4,66,\ -0,81 < \beta < -0,80 \text{ et } 3,97 < \gamma < 3,98.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 9 .
On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E)\ : x^4 - 4x^3 + 2 = 0$.

(1) On considère la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 4x^3 + 2.$$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 4x^3 - 12x^2.$$
On a :
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3.$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ f(0) = 2 \text{ et } f(3) = -25$$
D'où les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-25	$\nearrow$	$+\infty$

(2) i) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,\ 3]$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty,\ 3]$ sur $f(]-\infty,\ 3]) = [-25,\ +\infty[$. Comme $0 \in [-25,\ +\infty[$ alors 0 admet un antécédent unique $\alpha \in]-\infty,\ 3]$ par f.
α est l'unique solution dans $]-\infty,\ 3]$ de l'équation $(E)\ : f(x) = 0$.
ii) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[3,\ +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[3,\ +\infty[$ sur $f([3,\ +\infty[) = [-25,\ +\infty[$. Comme $0 \in [-25,\ +\infty[$ alors 0 admet un antécédent unique $\beta \in [2,\ +\infty[$ par f.
β est l'unique solution dans $[3,\ +\infty[$ de l'équation $(E)\ : f(x) = 0$.
De plus, on a :
$$f(0) = 2,\ f(1) = -1,\ f(3) = -25 \text{ et } f(4) = 2.$$
D'où
$$f(0)\,f(1) < 0 \text{ et } f(3)\,f(4) < 0.$$
$$x^4 - 4x^3 + 2 = 0$$
En conclusion l'équation $(E)\ : f(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \in [3,4]$.

(3) On vérifie que
$$f(0,8)\,f(0,9) < 0 \qquad \text{et} \qquad f(3,968)\,f(3,969) < 0$$
D'où
$$0,8 < \alpha < 0,9 \qquad \text{et} \qquad 3,968 < \beta < 3,969.$$
Remarque. On vérifie que
$$f(0,86044)\,f(0,86045) < 0 \text{ et } 0,86044 < \alpha < 0,86045.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 10 .
Soit $f :\ [0,1] \to [0,1]$ continue. On pose :
$$\forall x \in [0,1],\ h(x) = f(x) - x.$$
Comme f est continue sur $[0,1]$ alors la fonction h est continue sur $[0,1]$. De plus, on a :
$$\forall x \in [0,1],\ 0 \le f(x) \le 1.$$
Donc
$$h(0) = f(0) \ge 0 \text{ et } h(1) = f(1) - 1 \le 0.$$
Alors $h(0)\,h(1) \le 0$. Donc il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $h(x_0) = 0$ et par conséquent $f(x_0) = x_0$. Donc x_0 est un point fixe pour la fonction f.