Logique Formelle
Chapitre 02: Logique proportionnelle

Ikram Troudi

Niveau : LGSI 1

Faculté des Sciences de Gabés (FSG)

Introduction

- Une proposition est une expression soit vraie soit fausse
- Des propositions peuvent être combinées entre elles par des connecteurs logiques
- La signification d'une telle combinaison est déterminée par la signification des propositions impliqué
- Le but de toute activité scientifique est de distingue parmi les propositions celles qui sont vraies et celles qui sont fausses

Exemple

- Une tomate est un fruit
- Une orange est un fruit
- Les oranges ne sont pas le seul fruit

Introduction

- **Raisonner** c'est déterminer la valeur de vérité de proposition construites en combinant entre des propositions dont les valeurs de vérité sont déjà connues.
- **Le calcul proportionnel** s'intéresse uniquement à la façon dont les propositions sont liées entre elles, et aux conséquences qu'on peut en tirer quant à leur valeur de vérité.

→Il ne s'intéresse pas du tout à leur signification

Syntaxe

- Le vocabulaire du langage de la logique propositionnelle est composé de :
  - un ensemble, fini ou dénombrable, de propositions notées: P, Q, R,…
  - deux constantes : vrai (V) et faux (F)
  - un ensemble de connecteurs logiques: Non, Et, Ou, Implication et Equivalence
  - des parenthèses : (,)

Syntaxe

Connecteurs logiques

- Négation: Non (noté: $\neg$)
- Conjonction : Et (noté: $\wedge$)
- Disjonction : Ou (noté: $\vee$)
- Conditionnel : Si… Alors (note: $\rightarrow$)
- Equivalence : Si et Seulement Si (noté: $\leftrightarrow$)

Les connecteurs logiques

Négation, conjonction , disjonction , implication & équivalence.

Négation

- Noté: $\neg$

- Table de vérité:

La négation du P est noté non(P) qui:

- est vrai lorsque P est faux,
- est faux lorsque P est vrais

P	$\neg$ (P)
V	F
F	V

Exemple:

- P = « 24 est un multiple de 2 » est vraie (V). Le non(P) est défini par :

non(P) = « 24 n'est pas un multiple de 2 ».

C'est une fausse (F)

Conjonction

- Noté: $\wedge$

- Table de vérité

P	Q	P et Q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

« P et Q », appelé conjonction de P et de Q:

- est vrai lorsque P et Q sont vrais simultanément
- est faux dans tous les autres cas.

Les connecteurs logiques

Négation, conjonction , disjonction , implication & équivalence.

Disjonction

- Noté: $\vee$

- Table de vérité

P	Q	P ou Q
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

« P ou Q », appelé disjonction de P et de Q:

- est vrai lorsque l'un au mois des deux P et Q est vrais
- est faux lorsque les deux sont faux.

Les connecteurs logiques

Négation, conjonction , disjonction , implication & équivalence.

Exemple:

Considérons P et Q suivantes :

- P = « 10 est divisible par 2 »,
- Q=« 10 est divisible par 3 ».

P est vraie tandis que Q est fausse.

- P et Q=« 10 est divisible par 2 et 10 est divisible par 3 »,
- P ou Q=« 10 est divisible par 2 ou 10 est divisible par 3 ».

« P et Q » est fausse.

« P ou Q » est vraie.

Les connecteurs logiques

Négation, conjonction , disjonction , implication & équivalence.

Implication

- Noté : $\rightarrow$

- Table de vérité :

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

« $P \rightarrow Q$ » appelé implication de P vers Q

- est faux lorsque P est vrai et Q faux,
- est vrai dans tous les autres cas.

Implication

Exemple 1: Cas où p est vraie

- « s'il pleut, le sol est mouillé »
- p: «il pleut »
- q: «le sol est mouillé »

- On suppose que p est vraie et on essaye de prouver que q est vraie
- Si la conséquence q est vraie, donc p→ q est vraie
- Si la conséquence q est fausse, donc p →q est fausse

Implication

Exemple 2: Cas où p est Faux

- Si je mange des légumes, alors je mange sainement
- P : " je mange des légumes."
- Q : "Je mange sainement. "

- On suppose que P est faux : Je n'ai pas mangé de légumes. Alors Q est vrai : Je mange sainement (peut-être parce que j'ai mangé d'autres aliments sains).
- Si la conséquence p est faux, donc $p \rightarrow q$ est vraie

Les connecteurs logiques

Négation, conjonction , disjonction , implication & équivalence.

Implication

- Théorème: $P \rightarrow Q = (\neg P) \vee Q$
- Démonstration:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
V	V	V	F	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	F	V	V	V

Implication

Exercice:

- Quelles sont les valeurs de vérité de propositions suivantes

1. « la somme des angles d'un triangle vaut 180° implique que la somme des angles d'un rectangle vaut 360° »
2. « π vaut 3,14 implique que la somme des angles d'un triangle vaut 182°»
3. « si 7 est plus grand que 8 alors l'eau bout à 100° C »
4. « si 3 est plus petit que 4 alors 4 est plus petit que 3 »
5. « si 4 est plus petit que 3 alors 3 est plus petit que 4 »
6. « 82 est divisible par 7 implique que π vaut 3,14 »

Equivalence

- Noté :$\leftrightarrow$

- Table de vérité :

« $P \leftrightarrow Q$ » appelé équivalence de P et de Q :

- est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrai ou faux,
- est faux dans tous les autres cas.

On résume ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

- $(P \to Q)$et $(Q \to R)$ se note: $P \to Q \to R$.
- $(P \leftrightarrow Q)$ et $(Q \leftrightarrow R)$ se note: $P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R$.

Les connecteurs logiques

Négation, conjonction , disjonction , implication & équivalence.

Equivalence

- Théorème : $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Démonstration

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V

Forme propositionnelle

Définition

Une forme propositionnelle (ou formule propositionnelle) est une suite de symboles construite selon des règles, ou l'on retrouve des connecteurs, des parenthèses, et des symboles de variables propositionnelles.

Remarques:

- Une proposition est une forme propositionnelle
- Si p est une variable alors p écrit tout seul est une forme propositionnelle.
- Si p et q sont deux formes propositionnelles il en est de même de $(p \wedge q)$ et de $(p \vee q)$
- Si p est une forme propositionnelle, il en est de même de $(\neg p)$

Forme propositionnelle

Table de vérité

Dans une forme propositionnelle, quand en remplace les variables par des propositions, on obtient une proposition, La valeur de vérité de cette proposition ne dépend que des valeurs de vérité de cette proposition ne dépond que des valeurs de vérité des propositions qui été substituées

Exercice:

Evaluer les valeurs de vérité de l'expression : $(\neg(P \rightarrow Q) \wedge R)$

Note :

si on a n variables il faut prévoir une table contenant 2^n lignes

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$\neg(P \rightarrow Q)$	$(\neg(P \rightarrow Q) \wedge R)$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F

Forme propositionnelle

Table de vérité

Les formes propositionnelles peuvent être combinées entre elles au moyen des connecteurs et on obtient des formes propositionnelles de plus en plus compliquées.

Exemple 1: Soient $f(P,Q)=P\wedge Q$ et $g(P,R)=P\wedge(\neg R)$

Déterminer la table de vérité de **$f \vee g$**

P	Q	R	¬R	f=P∧Q	g=P∧ (¬R)	f ∨ g
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F

Forme propositionnelle

Table de vérité

Exercice1:

Représenter la table de vérité de chaque forme propositionnelle

1/ $(\neg P) \vee Q$

2/ $(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$

3/ $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$

4/ $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

5/ $(P \rightarrow (\neg Q)) \wedge (Q \rightarrow (\neg P))$

6/ $P \rightarrow (\neg P) \vee P)$

7/ $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q))$

Modèle

Définition

Un choix des valeurs de vérité des variables qui donne une proposition **vraie** s'appelle **un modèle** de la forme propositionnelle.

- Dans l'exemple précédent, le choix de V pour p, F pour q et V pour r est un modèle pour la forme propositionnelle.
- On dit que des formes propositionnelles sont **compatibles** si elles ont au moins **un modèle en commun**.
- On dit que des formes propositionnelles sont **contradictoires** quand elles n'ont **aucun modèle en commun**.

Forme propositionnelle

Tautologie

Définition

- Une **Tautologie** est une formule qui est vraie dans toutes les interprétations possibles

- Sa colonne de la formule complexe dans sa table ne contient que de **V**.

- En tant que forme propositionnelle, une proposition vraie est une tautologie.

- Une **Antilogie** est une formule qui n'est vraie dans aucune interprétation possible.

- Sa colonne de la formule complexe dans sa table ne comporte que des **F**.

- En tant que forme propositionnelle, une proposition fausse est une antilogie.

- On dit aussi une **contradiction**.

Forme propositionnelle

Tautologie

Exemples

$(\neg P) \vee P$

Tautologie

P	$\neg$ P	$(\neg$ P$) \vee$ P
V	F	V
F	V	V

$(\neg P) \wedge P$

Antilogie

P	$\neg$ P	$(\neg$ P$) \vee$ P
V	F	F
F	V	F

Forme propositionnelle

Tautologie

Exercice: Montrer que les formules suivantes sont ou non des tautologies ?

1/ $(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$

2/ $P \rightarrow (\neg P \vee P)$

Tautologie

Définition:

Si f et g deux formes propositionnelles, on dit que g est conséquence de f, ou encore g se déduit de f si

$f \rightarrow g$ est une tautologie

- On écrit alors: $f \vDash g$
- Le symbole $\vDash$ n'est pas un connecteur
- $\vDash$ est un symbole d'une relation (g est une conséquence de f)

Forme propositionnelle

Tautologie

Théorème :

- La forme propositionnelle g est une conséquence de la forme propositionnelle de f si tout modèle de f est aussi un modèle de g

- En effet : si $f \rightarrow g$ prend toujours la valeur V cela signifie que f ne prend pas la valeur V quand g prend la valeur F

Conséquence logique

Exemple 1:

Si P implique Q et si Q implique R, alors P implique ,

Soient: $f(P,Q,R) = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ et

$g(P,R) = P \rightarrow R$

Montrer que $f \models g$

Forme propositionnelle

Conséquence logique

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(Q \rightarrow R)$	f	$g = P \rightarrow R$	$f \vDash g$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Forme propositionnelle

Conséquence logique

Exemple 2:

Montrer que $(P \wedge (P \rightarrow Q))$ à pour conséquence Q

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \rightarrow Q))$	$(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Conclusion: Modus ponens: $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \models Q$

Conséquence logique

Exemple 3:

Montrer que $(\neg P)$ est une conséquence $(\neg Q) \wedge (P \rightarrow Q)$

P	Q	¬ P	¬Q	P →Q	(¬Q) ∧ (P →Q)	((¬Q) ∧ (P →Q))→ (¬ P)
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Conclusion: Modus tollens: $((\neg Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \models (\neg P)$

Forme propositionnelle

Synonymes logique

Définition: On dit que deux formes propositionnelles sont **synonymes** quand elles ont la même table de vérité.

Exemple : $(P \rightarrow Q)$ et $((\neg Q) \rightarrow (\neg P))$ sont synonymes

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$(\neg Q) \rightarrow (\neg P)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Remarque: La proposition $(\neg Q) \rightarrow (\neg P)$ s'appelle la **contraposée** de $P \rightarrow Q$

Classe propositionnelle

Soient C et D deux classes dont on présente que la dernière colonne.

C	D	¬ C	C ∧ D	C∨ D
V	V	F	V	V
F	F	V	F	F
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F
F	V	V	F	V

Propriétés propositionnelles

Idempotence

- $C1 \vee V = V$
- $C1 \wedge V = C1$
- $C1 \vee F = C1$
- $C1 \wedge F = F$
- $C1 \vee C1 = C1$
- $C1 \wedge C1 = C1$

Distributivité

- $C1 \vee (C2 \wedge C3) = (C1 \vee C2) \wedge (C1 \vee C3)$
- $C1 \wedge (C2 \vee C3) = (C1 \wedge C2) \vee (C1 \wedge C3)$
- $C1 \wedge (C5 \vee C8 \vee C1 \vee C2) = C1$
- $C1 \vee (C5 \wedge C8 \wedge C1 \wedge C2) = C1$

Forme propositionnelle

Propriétés propositionnelles

Loi de la double négation

- $C1 \vee (\neg C1) = V$
- $C1 \wedge (\neg C1) = F$
- $\neg (\neg (C1) = C1$
- $\neg F = V$

Lois de Morgan

- $\neg(C1 \vee C2) = (\neg C1) \wedge (\neg C2)$
- $\neg(C1 \wedge C2) = (\neg C1) \vee (\neg C2)$

Règles sémantiques

- Les règles syntaxiques nous donnaient la grammaire des énoncés, elles nous donnaient les conditions pour la bonne formation des formules.
- Les règles sémantiques nous donnent les conditions dans lesquelles un énoncé du langage propositionnel est vrai.
- Les tables de vérité nous permettent d'observer ces conditions de vérité. Mais au lieu d'utiliser des tableaux, on pourrait formuler ces conditions de vérité sous formes de règles.

Sémantique propositionnelle

Règles sémantiques

- $\neg$ P est vrai si et seulement P est faux.
- P $\wedge$ Q est vrai si et seulement si P est vrai et Q est vrai.
- P $\vee$ Q est vrai si et seulement si P est vrai ou Q est vrai ou les deux sont vrais.
- P $\rightarrow$ Q est vrai si et seulement si P est faux ou Q est vrai
- P $\leftrightarrow$ Q est vrai soit quand P et Q sont tous les deux vrais soit quand P et Q sont tous les deux faux.

Formes normales disjonctives

Définitions :

- On appelle littéral une formule réduite 4 une variable ou la négation d'une variable. Par exemple P ; $\neg$Q sont des littéraux.
- Un minterm est une conjonction de littéraux, ou un littéral seul. Par exemple P Q R est un minterm.
- Une formule est en forme normale disjonctive (FND) si elle s'écrit comme une disjonction de minterms (ou si elle est réduite 4 un minterm). Exemple $(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (T \wedge R)$
- Toute formule de la logique propositionnelle est équivalente une formule en forme normale disjonctive.

Sémantique propositionnelle

Formes normales disjonctives

Définitions :

- On peut trouver une FND simple à l'aide :
  - de la table de vérité
  - des tableaux de Karnaugh
  - de la méthode des arbres

Sémantique propositionnelle

Exemple: En utilisant la table de vérité déterminer une formule en forme normale disjonctive équivalente à $((p \vee q) \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow r)$

P	Q	R	P ∨ Q	((P ∨ Q) → R)	P ↔ R	((P ∨ Q) → R) ∧ (P↔R)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

Conclusion: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge (\neg Q) \wedge R) \vee ((\neg P) \wedge (\neg Q) \wedge (\neg R))$ est une formule en forme normale disjunctive équivalente $((P \vee Q) \rightarrow R) \wedge (P \leftrightarrow R)$

Tableaux de Karnaugh

Le code binaire Gray, contrairement au code binaire naturel, permet de ne faire évoluer qu'un bit lorsque l'on passe d'un code a son suivant ou son précédent.

A partir de 6 variables, le tableau de Karnaugh devient de plus en plus imposant. Pour le moment, on va se limiter à 4 variables.

Les variables se répartissent sur les 2 côtés.

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00				
	01				
	11				
	10				

Tableaux de Karnaugh

Le code binaire Gray, contrairement au code binaire naturel, permet de ne faire évoluer qu'un bit lorsque l'on passe d'un code a son suivant ou son précédent.

A partir de 6 variables, le tableau de Karnaugh devient de plus en plus imposant. Pour le moment, on va se limiter à 4 variables.

Les variables se répartissent sur les 2 côtés.

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00				
	01				
	11				
	10				

Tableaux de Karnaugh

Le but est très simple. II faut effectuer des regroupements de 1; par paquets de 1, 2, 4 ,8, 16, …. Ces regroupements doivent être des **rectangles** ou des **carrés**, jamais de travers, et les plus grands possibles sachant qu'un élément **déjà utilisé peut être repris**.

Attention : ne pas oublier que le tableau de Karnaugh est écrit sur un cylindre.

Tableaux de Karnaugh

Exemple 1:parton du tables 1 on peut faire ces 4 rassemblement :

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

NB. Le dernier tableaux est inutile puisqu'il peut être fait par les 2 de gauche au dessus

Sémantique propositionnelle

Tableaux de Karnaugh

Maintenant on essaie de résoudre les rassemblements. Pour cela, il faut que les variables participant au rassemblement concerné **ne changent pas**

Exemple avec le rassemblement rouge :

Dans les 4 cas possibles, la variable a est toujours à 1 et la variable d est toujours à 0

→ La solution rouge donner: $a \wedge \neg d$

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

Tableaux de Karnaugh

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

$a \wedge \neg d$

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

$\neg c \wedge d$

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

$a \wedge \neg b$

Conclusion: $F=(a \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge d) \vee (a \wedge \neg b)$

Sémantique propositionnelle

Tableaux de Karnaugh

-Exemple 2: en utilisant les tableaux de Karnaugh, déterminer une formule en FND équivalente a la forme R suivante:

F		Ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

F		Ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

F		Ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

F		Ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

Rassemblement vert : $a \wedge b$

Rassemblement bleu : $c \wedge d$

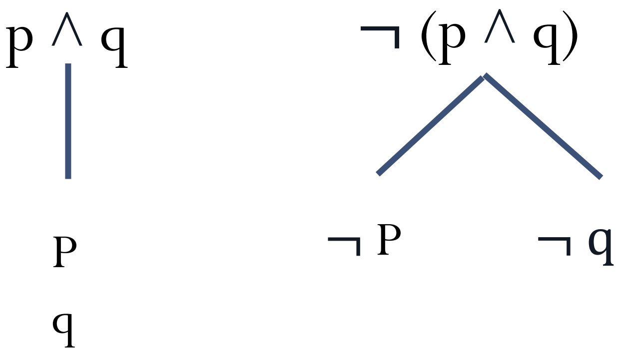
Rassemblement orange : $\neg b \wedge d$

Conclusion: $R=(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee (\neg b \wedge d)$

Méthode des arbres

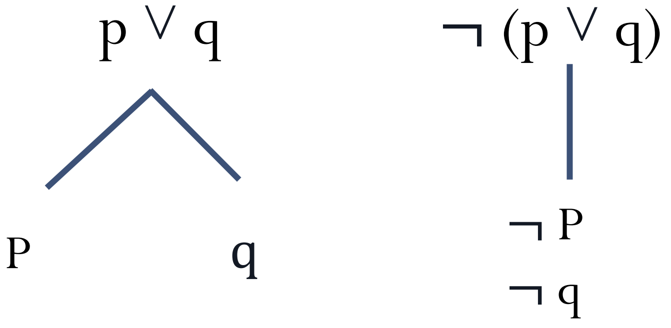
Conjonction et sa négation

- $p \land q$
- $\neg (p \land q) = (\neg p) \lor (\neg q)$



Disjonction et sa négation

- $p \lor q$
- $\neg (p \lor q) = (\neg p) \land (\neg q)$



Méthode des arbres

Implication et sa négation

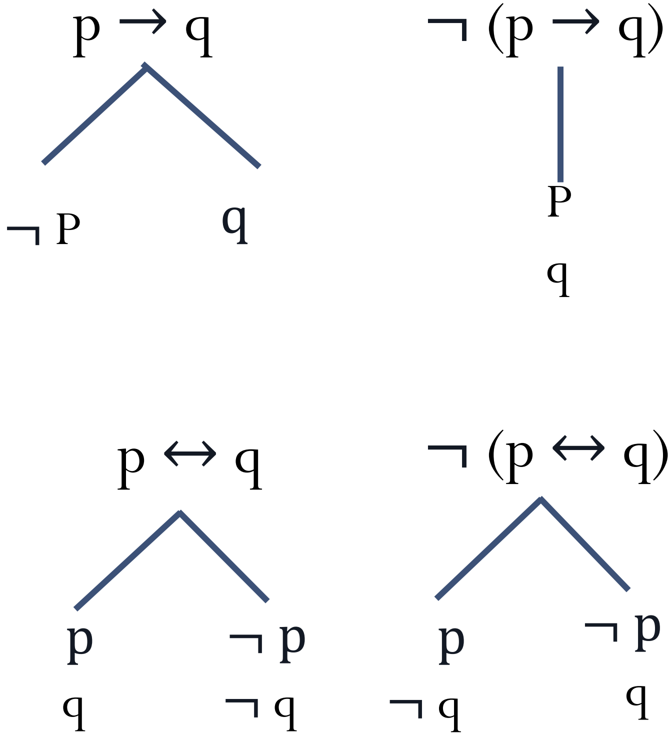
- $p \rightarrow q$
- $\neg\,(p \rightarrow q) = \neg\,((\neg p) \vee q)$

  $= (\neg\,\neg p) \wedge (\neg\,q)$

  $= (p) \wedge (\neg\,q)$

Equivalence et sa négation

- $p \leftrightarrow q$
- $\neg\,(p \leftrightarrow q) = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$



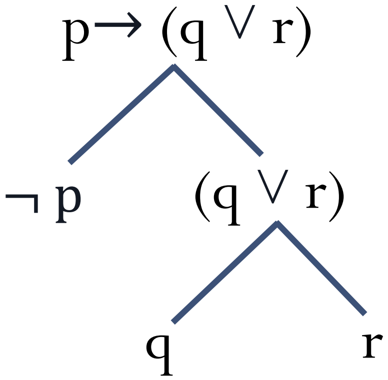
Sémantique propositionnelle

Méthode des arbres

Conjonction	Disjonction	Implication	Equivalence
$p \wedge q$ p q	$p \vee q$ p $\quad$ q	$p \rightarrow q$ $\neg p$ $\quad$ q	$p \leftrightarrow q$ p $\quad$ $\neg p$ q $\quad$ $\neg q$
NON Conjonction	**NON Disjonction**	**NON Implication**	**NON Equivalence**
$\neg (p \wedge q)$ $\neg p$ $\quad$ $\neg q$	$\neg (p \vee q)$ $\neg p$ $\neg q$	$\neg (p \rightarrow q)$ p q	$\neg (p \leftrightarrow q)$ p $\quad$ $\neg p$ $\neg q$ $\quad$ q

Méthode des arbres

Exemple 1 : En utilisant la méthode des arbres déterminer une formule en forme normale disjonctive équivalente à $p \to (q \lor r)$;



RQ: L'arbre est fini quand on ne trouve plus aux extrémités inférieures des branches que des formules atomiques ou des négations de formules atomiques.

$\neg p \lor (q \lor r)$: Forme normale disjonctive

$p \to (q \lor r)$ est vrai soit quand: $\neg p$ est vrai ou quand q est vrai ou quand r est vrai.

Méthode des arbres

Exemple 2: En utilisant la méthode des arbres déterminer une formule en FND équivalente à $p \land (\neg p \leftrightarrow q)$

Étape 1: Cet énoncé est vrai si et seulement si p est vrai et $(\neg p \leftrightarrow q)$ est vrai.

$$p \land (\neg p \leftrightarrow q)$$

$$p$$
$$\neg p \leftrightarrow q$$

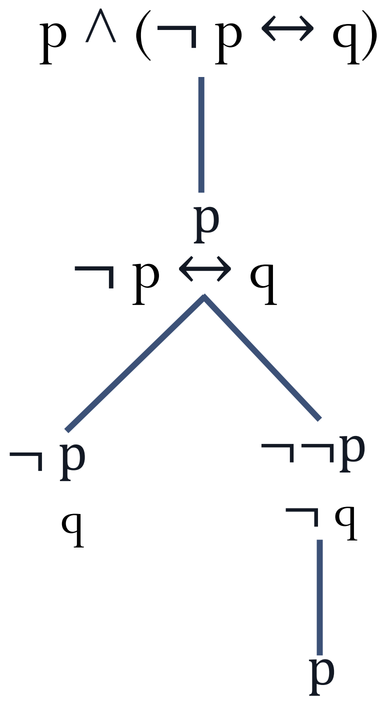
Sémantique propositionnelle

Méthode des arbres

Étape 2: $(\neg p \leftrightarrow q)$ est vrai si et seulement si
$\neg p$ est vrai et q est vrai ou
$\neg p$ est faux et q est faux.

Remarque: $\neg p$ est faux et q est faux si et seulement si $\neg\neg p$ est vrai et $\neg q$ est vrai

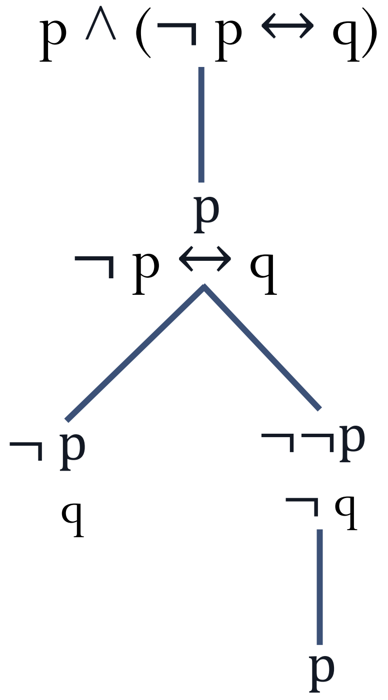
Étape 3: $\neg\neg p$ est vrai si et seulement si p est vrai.



Méthode des arbres

Quand on regarde cet arbre-là, on peut le lire comme étant la disjonction de deux conjonctions : $(p \wedge \neg p \wedge q)$ avec

$(p \wedge \neg q \wedge p)$



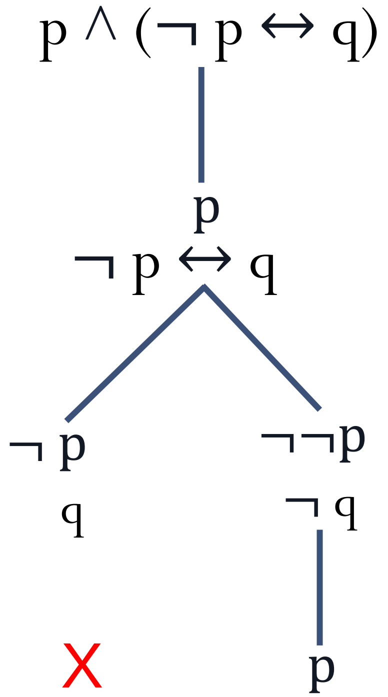
Conclusion 1: $(p \wedge \neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ est une FND équivalente à $(p \wedge (\neg q \leftrightarrow p)$

Sémantique propositionnelle

Méthode des arbres

Quand il y a une **contradiction** sur une branche **(p ∧ ¬ p ∧ q)** on marque une ‘X’ au bout de la branche et on dit aussi que cette **branche est fermée.**

Conclusion 2: p ∧ ¬ q est une FND équivalente à (¬ q ↔ p)



Méthode des arbres

Remarque: Si un énoncé est une contradiction, alors toutes ces branches seront fermées.

$$(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$\neg p$$
$$\neg q$$
$$p \vee q$$

p X q X

Méthode des arbres et tautologie

Remarque: Un énoncé est une **tautologie** quand sa négation est une **contradiction**

Exemple : montrer que $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ est une tautologie ?

Conclusion : La négation de cet énoncé est bien **une contradiction** car toutes les branches sont fermées. Donc :

$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ est une **tautologie.**

$$\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$$

$$(\neg p \rightarrow p)$$

$$\neg p$$

$$\neg\neg p \qquad\qquad p$$

$$\qquad\qquad\qquad \text{X}$$

$$p$$

$$\text{X}$$

Méthode des arbres et validité des arguments

Remarque: Les arbres nous permettent de tester la validité des arguments.

Exemple 1: $(p \land q) \rightarrow r \vDash p \rightarrow (p \rightarrow r)$

Pour savoir si cet argument est valide ou non:

Étape 1:

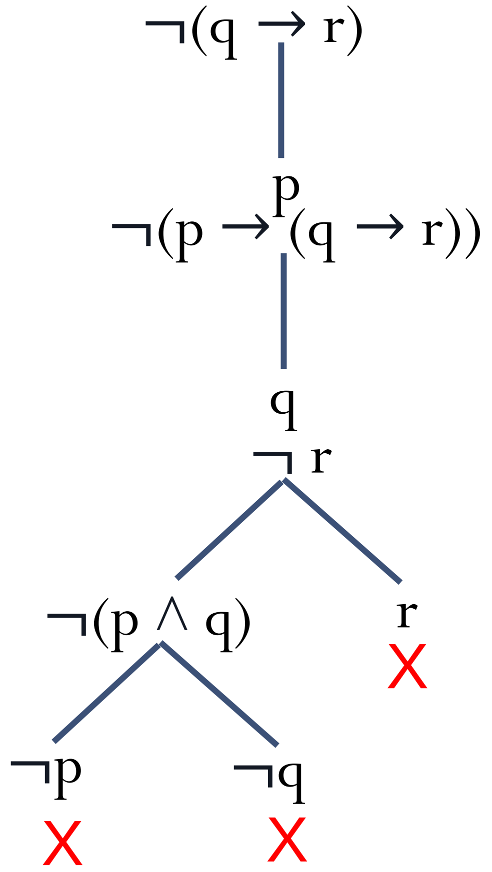
1/ $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r))$

2/ $(p \land q) \rightarrow r$

Étape 2:

Toutes les branches de l'arbre sont fermées

Conclusion: l'argument est valide



Méthode des arbres et validité des arguments

Remarque: Les arbres nous permettent de tester la validité des arguments.

Exemple 1: $(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \vDash p \rightarrow r$

Pour savoir si cet argument est valide ou non:

Étape 1:

1/ $\neg(p \rightarrow r)$

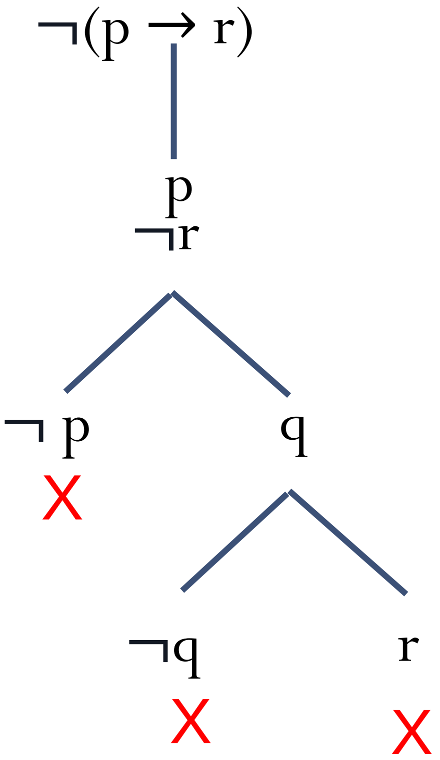
2/ $p \rightarrow q$

3/ $q \rightarrow r$

Étape 2:

Toutes les branches de l'arbre sont fermées

Conclusion: l'argument est valide



Méthode des arbres et validité des arguments

Exercice: Dans chacun des cas suivants déterminer, par la méthode des arbres, si les arguments sont valides.

1/ $(p \rightarrow q), (p \rightarrow \neg q) \vDash \neg p$

2/ $p \leftrightarrow (q \vee r) \vDash ((p \wedge (\neg p)) \rightarrow r)$