Faculté des Sciences de Gabès
Département de Math.

A.U: 2023-2024
Section : LMPI1-LGSI1

Série 2

Exercice 1

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles dans $\mathbb{R}[X]$:
1) $\frac{1}{(X+1)(X-2)}$, 2) $\frac{X^2}{1+X^2}$, 3) $\frac{X^4}{X^2+2X-3}$,
4) $\frac{2X}{X^2+X+1}$, 5) $\frac{X}{X^2-3X+2}$, 6) $\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}$,

Exercice 2

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ ::

1. $\frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}$.
2. $\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$.

Exercice 3

Soit
$$F(X)=\frac{1}{(X^2+1)^2-X^2}.$$

1. Montrer que F est paire.
2. Décomposer en éléments simples F dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle:
$$F(X)=\frac{6X^3+3X^2-5}{X^4-9}.$$

1. Dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5

Décomposer en éléments simples la fraction:
$$R(X)=\frac{X^5+2X-1}{X^4-1}.$$

1. Dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$:
1) $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$, 2) $\frac{X^4+1}{(X-1)^2(X^2+1)}$,
4) $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$, 5) $\frac{1}{X^n-1}$.

Serie 2

Exercice 1

Decomposer en elements simples

1) $F = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$

$F = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$

1ère methode

$F = \frac{a(x-2)+b(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(a+b)x}{(x+1)(x-2)}$

$\begin{cases} a+b=0 & (1) \\ -2a+b=1 & (2) \end{cases}$

$(1)-(2) \Rightarrow 3a = -1$

$a = \frac{-1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$

donc la d.e.s de $\boxed{F = \frac{\frac{-1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}}$

2eme methode : "methode de cache"

$F = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$

$(x+1)F / x=-1 : \frac{1}{x-2} = a + \frac{b(x+1)}{x-2}$

$\frac{-1}{3} = a + 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$

$(x-2)F / x=2 : \frac{1}{x+1} = \frac{a(x-2)}{x+1} + b$

$\frac{1}{3} = 0 + b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

d'ou la d.e.s de $F = \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}$

5) $F = \frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$

$= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$

$(x-1)F / x=1 : \frac{x}{x-2} = a + \frac{b(x-1)}{x-2}$

$-1 = a + 0$

$\boxed{a = -1}$

$(x-2)F / x=2 : \frac{x}{x-1} = \frac{a(x-2)}{x-1} + b$

$2 = 0 + b$

$\boxed{b = 2}$

alors la d.e.s de $F = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$

2) $F = \frac{x^2}{1+x^2}$

$\left.\begin{array}{l} d^\circ N = 2 \\ d^\circ D = 2 \end{array}\right\} d^\circ N \geq d^\circ D \Rightarrow D.E$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ -\ x^2+1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

Donc $F = 1 + \frac{-1}{\underbrace{x^2+1}}$ c'est d.e.s dans IR

$\Delta = -4 < 0$

$\Rightarrow$ irreductible

Dans $\mathbb{C}(x)$

$F = 1 + \frac{-1}{x^2 - i^2} = 1 - \boxed{\frac{1}{(x-i)(x+i)}}$ A

A $\frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}$

$(x-i)F \,/_{x=i}$: $\frac{1}{x+i} = a + \frac{b(x-i)}{x+i}$

$\frac{1}{2i} = a + 0$

$-\frac{1}{2}i = a$

$(x+i)F \,/_{x=-i}$: $\frac{1}{x-i} = \frac{a(x+i)}{x-i} + b$

$\frac{-1}{2i} = 0 + b$

$b = \frac{1}{2}i$

La d.e.s dans $\mathbb{C}(x)$

$F = 1 - \left[\frac{-\frac{1}{2}i}{x-i} + \frac{\frac{1}{2}i}{x+i}\right]$

$= 1 + \frac{\frac{1}{2}i}{x-i} - \frac{\frac{1}{2}i}{x+i}$

3) $F = \frac{x^4}{x^2+2x-3}$

$\left.\begin{array}{l} d°N = 4 \\ d°D = 2 \end{array}\right\}$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & \\ -\; x^4 + 2x^3 - 3x^2 & x^2+2x-3 \\ \hline -2x^3 + 3x^2 & x^2-2x+7 \\ -\; -2x^3 - 4x^2 + 6x & \\ \hline 7x^2 - 6x & \\ -\; 7x^2 + 14x - 21 & \\ \hline -20x + 21 & \end{array}$$

$F = x^2 - 2x + 7 + \underbrace{\frac{-20x+21}{x^2+2x-3}}_{A}$

$A = \frac{-20x+21}{x^2+2x-3}$

$\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$

$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$

$x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$

$A = \frac{-20x+21}{(x-1)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

$(x-1)A \,/_{x=1}$: $\frac{-20x+21}{x+3} = a + \frac{b(x-1)}{x+3}$

$\frac{1}{4} = a + 0$

$a = \frac{1}{4}$

$(x+3)A \,/_{x=-3}$: $\frac{-20x+21}{(x-1)} = b + \frac{a(x+3)}{x-1}$

$\frac{81}{4} = b + 0$ $\qquad b = \frac{-81}{4}$

$F = x^2 - 2x + 3 + \frac{-\frac{81}{4}}{x+3} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)}$

4) $F = \frac{2x}{x^2+x+1}$

$\Delta = -3 < 0 \Rightarrow$ irréductible dans $\mathbb{R}(x)$

alors $F = \frac{2x}{x^2+x+1}$ est la d.e.s de F dans $\mathbb{R}(x)$

dans $\mathbb{C}(x)$:

$F = \frac{2x}{x^2+x+1}$

$\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$x_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ $\qquad x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

alors $F=\dfrac{2x}{\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$

$=\dfrac{a}{\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}+\dfrac{b}{\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)F\Big/_{x=\frac{-1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}$

$\dfrac{2x}{x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}=a+\dfrac{b\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}}=a$

$\dfrac{-i+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=a \Rightarrow a=1-\dfrac{i}{\sqrt{3}}$

$\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)F\Big/_{x=\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}:\ \dfrac{2x}{x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}=0+b$

$b=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=\dfrac{-i+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1-\dfrac{i}{\sqrt{3}}$

la d.e.s de F dans $\mathbb{C}(x)$: F

$F=\dfrac{1-\frac{i}{\sqrt{3}}}{x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{1+\frac{i}{\sqrt{3}}}{x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}$

6) $F=\dfrac{x-1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$

$x^2F\Big/_{x=0}:\ \dfrac{x-1}{x^2+1}=ax+b+x^2\dfrac{cx+d}{x^2+1}$

$-1=0+b+0$

$\Rightarrow \boxed{b=-1}$

$(x^2+1)F\Big/_{x=i}:\ \dfrac{x-1}{x^2}=\dfrac{a(x^2+1)}{x}$

$b(x^2+1)$ ...

~~$-c-i-d$~~

$\dfrac{i-1}{-1}=0+0+ci+d$

$\Rightarrow ci+d=1-i$

$c=-1$

$d=1$

pour $x=1$

$0=a+b+\dfrac{c+d}{2}$

$0=a-1+0$

$a=1$

alors la d.e.s de F :

$F=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{-x+1}{x^2+1}$

dans $\mathbb{R}(x)$

Exercice 2 :

D.E.S dans $\mathbb{R}(x)$ et $\mathbb{C}(x)$

1) $F=\dfrac{x^4-x+2}{(x-1)(x^2-1)}$

$\left.\begin{array}{l} d^\circ N=4\\ d^\circ D=3\end{array}\right\}\Rightarrow$ D.E $\quad F=\dfrac{x^4-x+2}{x^3-x-x^2+1}$

$$\begin{array}{l|l} x^4-x+2 & x^3-x^2-x+1\\ \hline -\ x^4-x^3-x^2+x & x+1\\ x^3+x^2-2x+2 & \\ x^3-x^2-x+1 & \\ \hline 2x^2-x+1 & \end{array}$$

$F=x+1+\dfrac{2x^2-x+1}{(x-1)(x^2-1)}$

$=\underbrace{x+1}_{E}+\underbrace{\dfrac{2x^2-x+1}{(x-1)^2(x+1)}}_{A}$

$A=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{x+1}$

$(x-1)^2A\Big/_{x=1}:\ \dfrac{2x^2-x+1}{x+1}=a(x-1)+b+\dfrac{c(x-1)^2}{x+1}$

$1=0+b+0$

$\boxed{b=1}$

$(x+1)A \Big/ _{x=-1}$: $\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^2} = \frac{a(x+1)}{x-1} + \frac{b(x+1)}{(x-1)^2} + c$

$1 = 0 + 0 + c$

$\boxed{c = 1}$

Pour $x = 0$

$1 = -a + b + c$

$1 = -a + 1 + 1$

$\boxed{a = 1}$

d'où

$$F = x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$$

2) $F = \frac{3}{(x^2+x+1)(x-1)^2}$

$= \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$

$(x-1)^2F \Big/ _{x=1}$: $\frac{3}{x^2+x+1} = \frac{(ax+b)(x-1)^2}{x^2+x+1} + c(x-1) + d$

$1 = 0 + 0 + d$

$\boxed{d = 1}$

$(x^2+x+1)F \Big/ _{x=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}$: $\frac{3}{(x-1)^2} = ax + b + \frac{c(x^2+x+1)}{x-1} + \frac{d(x^2+x+1)}{(x-1)^2}$

$\frac{3}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}-1\right)^2} = a\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + b + 0 + 0$

$\frac{3}{\left(-\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}a - \frac{i\sqrt{3}}{2}a + b$

$\frac{3}{\frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}a - \frac{i\sqrt{3}}{2}a + b$

$\frac{3}{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2}a - \frac{i\sqrt{3}}{2}a + b$

$\frac{3\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{1}{2}a - i\frac{\sqrt{3}}{2}a + b$

$\frac{3\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = -\frac{1}{2}a - i\frac{\sqrt{3}}{2}a + b$

$\frac{3\left(\frac{3}{2} - \frac{i3\sqrt{3}}{2}\right)}{9} = -\frac{1}{2}a - \frac{i\sqrt{3}}{2}a + b$

$\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}a - \frac{i\sqrt{3}}{2}a + b$

$-\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}$ / $-\frac{\sqrt{3}}{2}a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{a = 1}$ et $\boxed{b = 1}$

Pour $x = 0$

$3 = b - c + d$

$3 = c + 1$

$c = 2$

Pour la d.e.s de F dans $\mathbb{R}$

est $F = \frac{-x}{x^2+x+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

Exercice 5.

$R(x) = \frac{x^5+2x-1}{x^4-1}$

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 2x - 1 & x^4 - 1 \\ \underline{x^5 - x} & x \\ \quad 3x - 1 & \end{array}$$

alors $R = x + \frac{3x-1}{x^4-1}$

$A = \frac{3x-1}{x^4-1} = \frac{3x-1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$\Delta = -4$

Alors $A = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$

$(x-1)A$ / $x = 1$: $\frac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)} = a + \frac{b(x-1)}{x+1} + \frac{(cx+d)(x-1)}{x^2+1}$

$\frac{1}{2} = a + 0 + 0$

$\boxed{a = \frac{1}{2}}$

$(x+1)A$ / $x = -1$: $\frac{3x-1}{(x-1)(x^2+1)} + \frac{a(x+1)}{x-1} + b + \frac{(cx+d)(x+1)}{x^2+1}$

$1 = 0 + b + 0$

$\boxed{b = 1}$

$(x^2+1)A$ / $x = i$: $\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{a(x^2+1)}{x-1} + \frac{b(x^2+1)}{x+1} + cx + d$

$= \frac{3i-1}{-2} = 0 + 0 + ci + d$

$d = \frac{1}{2}$

$c = -\frac{3}{2}$

Alors la d.e.s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}(x)$ est

$R = x + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}$

Dans $\mathbb{C}(x)$:

$R = x + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{}$

$= x + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \underbrace{\frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{(x-i)(x+i)}}_{B}$

$B = \frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{(x-i)(x+i)} = \frac{\alpha}{x-i} + \frac{\beta}{x+i}$

$B(x-i)$ / $x = i$: $\frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{x+i} = \alpha + \frac{\beta(x-i)}{x+i}$

$\frac{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2i} = \alpha + 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}{-2}$

$\boxed{\alpha = \frac{-3}{4} - \frac{1}{4}i}$

$B(x+i)$ / $x = -i$: $\frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{x-i} = \frac{\alpha(x+i)}{x-i} + \beta$

$\frac{\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}}{-2i} = 0 + \beta$

$\frac{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}{2}$

$\boxed{\beta = \frac{-3}{4} + \frac{1}{4}i}$

alors la d.e.s de R dans $\mathbb{C}(x)$ est $R = x + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i}{x-i} + \frac{-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i}{x+i}$