UNIVERSITÉ DE GABÈS FACULTÉ DES SCIENCES DE GABÈS	FSG	A.U. : 2020-2021

EXAMEN

Section: LGLSI 1
Épreuve de : Analyse 2

Nature de l'épreuve : D.C.☐ E.F.☒	Documents :	autorisés	☐	non autorisés	☒
Date de l'épreuve : 07/07/2021	Calculatrice :	autorisée	☐	non autorisée	☒
Durée de l'épreuve : 1h30mn	Session :	principale	☐	contrôle	☒

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle linéaire suivante:

$$(E) : y' - \frac{2x}{1+x^2} y = (1+x^2)\cos(x), \text{ avec } y(0) = 1.$$

Exercice 2

Soient $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ deux suites réelles définies par:

$$\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 & = 4 \\ v_{n+1} & = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1. Considérons la suite $(w_n)_{n\in N}$ définie par $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que $(w_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique.
   (b) Exprimer w_n en fonction de n.
   (c) En déduire la convergence et la limite de la suite $(w_n)_{n\in N}$.
2. Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$. crô décrô
3. Déduire qu'elles sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite $(z_n)_{n\in N}$ définie par $z_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

   $\frac{3+8}{3} = 11/3$

   (a) Montrer que $(z_n)_{n\in N}$ est constante.
   (b) En déduire la limite des suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$.

Exercice 3

Soient $(\mathrm{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par:

$$\begin{cases} \mathrm{u}_0 &= 3 \\ \mathrm{u}_{n+1} &= \dfrac{2\mathrm{u}_n + \mathrm{v}_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{v}_0 &= 4 \\ \mathrm{v}_{n+1} &= \dfrac{\mathrm{u}_n + 2\mathrm{v}_n}{3} \end{cases}$$

1. Considérons la suite $(\mathrm{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathrm{w}_n = \mathrm{v}_n - \mathrm{u}_n$.
   (a) Montrer que $(\mathrm{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   (b) Exprimer w_n en fonction de n.
   (c) En déduire la convergence et la limite de la suite $(\mathrm{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la monotonie des suites $(\mathrm{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déduire qu'elles sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite $(\mathrm{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathrm{z}_n = \mathrm{u}_n + \mathrm{v}_n$.
   (a) Montrer que $(\mathrm{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (b) En déduire la limite des suites $(\mathrm{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

Étudier la nature des séries de termes généraux suivants:

$$u_n = \frac{2^n}{n!}, \qquad v_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad w_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n^2+1}}, \qquad z_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 5

Soit $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$, pour tout $n \geq 1$.

1. (a) Montrer que $u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$.
   (b) Déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée.
2. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.
3. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.