

II Produit de deux matrices:

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})$ $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$

$B \in M_{n,s}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})$ $\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s \end{cases}$

$$\underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{B}_{n \times s} = C_{m \times s} = (c_{i,j}) \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq s \end{cases}$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \\ = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} \\ = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{A}_{2 \times 3} \cdot \underbrace{B}_{3 \times 2} = C_{2,2} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$c_{1,1} = (1 \ 2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$c_{2,1} = (-1 \ 3 \ 5) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 8$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(OK) \quad \underbrace{B}_{3 \times 2} \times \underbrace{A}_{2 \times 3} = C_{3 \times 2}$$

$$(Non) \quad \underbrace{A}_{2 \times 2} \times \underbrace{B}_{3 \times 2} \neq$$

$$B \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \times A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 4 & 2 \\ 34 & -3 \end{pmatrix}$$

Propriétés:

1) "·" produit des matrices est associative

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

2) "·" est distributive / à "+"

$$A \cdot (B + C) = AB + AC$$

$$3) A \cdot (\lambda B) = \lambda A, B = \lambda (AB)$$

$$\lambda \in \mathbb{K}$$

A, B des matrices.

4) I_m élément n'entre pour "·".

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{A}_{n \times m} \cdot I_m = A, \forall A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$$

$$5) (M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$$

est un anneau unitaire non commutatif,
non intégré.

Remarques:

1) $A \cdot B \neq B \cdot A$
en général

L'anneau de matrice ne pas intégré

Il existe $A \neq 0, B \neq 0$
mais $AB = 0$

Transpose d'une matrice

Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, on appelle transposé de A
qu'on note par ${}^t A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ défini comme suit:

si $A = (a_{i,j})$ $\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$

$${}^t A = (b_{i,j}) \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases} \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

Définitions: $A \in M_n(\mathbb{K})$

1) A est dite symétrique, si elle vérifie:

$$t_A = A$$

$n \times n$

$$\text{si } A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

A est symétrique, si $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$

$\forall 1 \leq i, j \leq n$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$t_A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} a_{ii} \\ a_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{diagonale principale}$$

pas de condition symétrique / à la diagonale principale.

2) On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique si elle vérifie: $t_A = -A$

$$\text{si } A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Antisymétrique ssi $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$t_A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

Exercice 1:

Rechercher toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $t_A = 2A$

$$\text{On a: } t_A = 2A \quad (1)$$

si on passe à t de par et d'autre de l'équation

$$t(t_A) = t(2A)$$

$$A = 2t_A \rightarrow t_A = \frac{1}{2}A \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \rightarrow 2A = \frac{1}{2}A \Rightarrow A = 0_n : \text{ matrice nulle}$$

Exercice
Exercice

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

$$t_A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} b_{11} &= a_{11} = 1 \\ b_{12} &= a_{21} = 0 \\ b_{21} &= a_{12} = 2 \end{aligned}$$

$$t_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

si on désigne par

A_i : $i^{\text{ème}}$ ligne de A

C_j : $j^{\text{ème}}$ colonne de A

$$t_A \quad i = C_i, \forall 1 \leq i \leq m$$

Propriétés:

$$1) t(t_A) = A, \forall A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

$$2) F: M_{n,m}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$A \rightarrow F(A) = {}^+A$$

F est une application linéaire

c.-à-d, elle satisfait:

$$i) F(A+B) = F(A) + F(B)$$

$$t(A+B) = t_A + t_B \quad \forall A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

$$ii) F(\lambda A) = \lambda F(A)$$

$$t(\lambda A) = \lambda t_A$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

$$iii) A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

$$B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$t(AB) = t_B \cdot t_A$$

Démonsons $B, C \in M_n(\mathbb{K})$

$$1) A = B + C$$

$$\text{on t}_B = B$$

$$t_C = -C$$

on applique t ①

$$t_A = B - C \quad ②$$

$$\begin{cases} B + C = A & ① \\ B - C = t_A & ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = A - C \\ A - C - C = t_A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}t_A \\ C = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}t_A \end{cases}$$

d'où l'existence

Unicité

Supposons que :

$$A = B_1 + C_1$$

$$A = B_2 + C_2$$

car B_i symétrique $i = 1, 2$

C_i antisymétrique $i = 1, 2$

$$\rightarrow B_1 + C_1 = B_2 + C_2$$

$$B_1 - B_2 = C_2 - C_1$$

Notent que :

$B_1 - B_2$ symétrique car B_1 et B_2 symétriques

$C_2 - C_1$ antisymétrique car C_1 et C_2 antisymétriques

Démonsons $E \in M_n(\mathbb{K})$ vérifie l'égalité

$$E_{\text{sym}} \cdot t_E = E$$

$$t_E = E$$

$$E_{\text{anti}} \cdot t_E = -E$$

$$\rightarrow E = O_n$$

$B_1 - B_2$ est à la fois symétrique et aussi antisymétrique $B_1 - B_2 = \underline{C_2 - C_1}$

$$B_1 - B_2 = O_n \Rightarrow B_1 = B_2 \rightarrow C_1 = C_2$$

Matrice inversible :

D)

Definition : soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est inversible, s'il existe $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = BA = I_n$

Exemple : 1) O_n n'est pas inversible

car si non il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$

$$O_n \cdot B = B \cdot O_n = I_n$$

$\Rightarrow O_n = I_n$ impossible

$\rightarrow O_n$: non inversible

2) I_n inversible $I_n \cdot I_n = I_n$

~~Definition~~ : O_n n'est pas inversible car

sinon $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$

$$\text{tq } O_n \cdot B = B \cdot O_n = I_n$$

$$\text{or } O_n \cdot B = O_n \Rightarrow O_n = I_n \text{ impossible}$$

Proposition : si $AB_1 = B_1 A = I_n$

$$AB_2 = B_2 A = I_n$$

alors $B_1 = B_2$

$$\begin{aligned} \text{Preuve : } B_1 = B_1 \cdot I_n &= B_1 (AB_2) = (B_1 A) B_2 \\ &= I_n B_2 = B_2 \end{aligned}$$

Proposition : soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$
si A est inversible alors la matrice B que
~~B~~ vérifie $AB = BA = I_n$ est unique

On le note par A^{-1} et on a :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

La matrice A^{-1} est dite matrice inverse de la matrice A

Proposition: Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$
 $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$

1) si A et B sont inversible alors
 AB est aussi et
 on a: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2) si A inversible alors λA est aussi
 inversible, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, avec $\lambda \neq 0$
 et on a: $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$

3) si A est inversible, alors $t^k A$ l'est aussi
 et on a: $(t^k A)^{-1} = t^{-k}(A^{-1})$

4) $D = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ $a_i \in \mathbb{K}, i=1, \dots, n$
 Diagonale

D inversiblessi $a_i \neq 0, \forall i=1, \dots, n$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Premre hyp: A inversible, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

B inversible $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$

$$\begin{aligned} * (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= A(I_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I_n)B \\ &= B^{-1}B = I_n \end{aligned}$$

Def: $\Rightarrow AB$ est inversible d'après
 l'unité de la matrice inverse, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$t(EF) = t_E t_F$$

$$t(AA^{-1}) = t(A^{-1}A) = t_{I_n} \quad (I_n \text{ est symétrique diagonal})$$

Propriété

$$t(t_{A^{-1}}) t_A = (t_A)(t_{A^{-1}}) = I_n$$

t_A est inversible et on a: $(t_A)^{-1} = t(A^{-1})$

$$\text{Rq: } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_2 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_m b_m \end{pmatrix}$$

$$D \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rq:

$$D^{-1} D e_i = D^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ impossible}$$

Rq:

1) si A est inversible, alors A^{-1} est aussi
 inversible $(A^{-1})^{-1} = A$

2) si A est inversible, alors A^m est inversible

$$\forall m \geq 1 \text{ et on a } (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$$

Exercice: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$A^3 - 3A + I_n = 0_n$$

Mg A est inversible?

D'après la relation $A^3 - 3A + I_n = 0_n$

$$- A^3 + 3A = I_n$$

$$A(-A^2 + 3I_n) = (-A^2 + 3I_n)A = I_n$$

D'après la définition de matrice inversible; A est inversible

D'après l'unité de l'inverse

$$A^{-1} = -A^2 + 3I_n$$

Chapitre II Determinant d'une matrice

soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K}), n \geq 1$

Le déterminant de A qu'on note par
 $\det A \in \mathbb{K}$

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

qui on obtient selon l'ordre n de la matrice comme suit

* Cas $n=1$, $A = (a_{1,1})$

$$\det(a_{1,1}) = a_{1,1}$$

* Cas $n=2$, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{1,1} \cdot \det(a_{2,2}) + (-1)^{1+2} a_{1,2} \cdot \det(a_{2,1})$$

$$\det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

- Valeur du Déterminant

Developpé selon 1^{er} ligne.

$$\det A \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{1,2} \det(a_{2,1}) + (-1)^{2+2} a_{2,2} \det(a_{1,1})$$

$$= -a_{1,2}a_{2,1} + a_{2,2}a_{1,1}$$

la valeur déterminant est indépendante de choix de la ligne ou la colonne selon la on développe.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

* Cas $n=3$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{2,2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{2,3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Remarque:

1) La valeur du déterminant indépendante de choix de la ligne ou la colonne suivant laquelle on devrait notre \det

2) on choisir la ligne ou la colonne qui ~~contient~~ contient le plus de zeros.

3) un déterminant d'ordre 3 s'écrit comme combinaison linéaire de 3 déterminants

exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

*

Exemple

$$L_1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 ?$$

en effet

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 0 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ + (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (7 - 8) + (5 - 6) \\ = 1 - 1 = 0$$

Rq: L_i : i^{eme} ligne de A

$$L_1 + L_2 = L_3 \Rightarrow \det A = 0$$

Definition:

soit $A = (a_{i,j})$, $1 \leq i, j \leq n \in M_n(\mathbb{R} | \mathbb{K})$

on appelle mineur de A d'indice (l, k) avec $1 \leq l, k \leq n$ le déterminant d'ordre $n-1$ de la sous matrice entraînée de A suite à l'élimination de la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne dans A.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Le mineur d'indice $(3,4)$ est

$$\det A_{3,4} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Proposition:

soit $A = (a_{i,j})$, $1 \leq i, j \leq n$

on a pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$$

Propriétés:

Pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R} | \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a:

$$1) \det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$2) \det \lambda A = \lambda^n \det A$$

$$3) \det {}^t A = \det A$$

4) si A est triangulaire supérieur ou inférieur
ou diagonale et le produit des coefficients situés sur sa diagonale

Principale.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n} \\ = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_i$$

$$5) \det O_n = 0$$

$$\det I_n = 1$$

$$\det \lambda I_n = \lambda^n$$

Proposition: soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$

A est inversible si $\det A \neq 0$

Dans ce cas: $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Preuve: A inversible, on a:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

on applique: $\det \rightarrow \det AA^{-1} = \det I_n$.

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes:

soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$

on désigne par

L_i : $i = 1, 2, \dots, n$. Les lignes de A dans l'ordre C_j , $j = 1, \dots, n$
les colonnes de A dans l'ordre.

1) opération élémentaire de type I:

(échange entre deux lignes)

$$A \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{ } \tilde{A}$$

$$\det \tilde{A} = -\det A$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \det A = 4 - 6 = -2$$

$$A \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{ } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det \tilde{A} = 2 = -\det A$$

$$\tilde{A} = E_{1,2} A$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{ } E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{1,2} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

Rq. $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$A \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{ } \tilde{A}, \text{ alors}$$

$$\tilde{A} = E_{i,j} A$$

$$I_n \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{ } E_{i,j}$$

2) opération élémentaire de type II:
(multiplication d'une ligne par un scalaire):

soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$A \xrightarrow[L_i \leftarrow \lambda L_i]{ } \tilde{A}$$

$$\det \tilde{A} = \lambda \det A$$

et on a:

$$\tilde{A} = M_\lambda A$$

on obtient M_λ comme suit

$$L_i \leftarrow \lambda L_i$$

$$I_n \xrightarrow[L_i \leftarrow \lambda L_i]{ } M_\lambda$$

$$\det M_\lambda = \lambda$$

3) opération élémentaire de type III:

$A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$

$$A \xrightarrow[L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j]{\lambda \neq 0} \tilde{A}$$

$$\det \tilde{A} = \det A$$

$$\tilde{A} = C L_{i,\lambda} A$$

$$C L_{i,\lambda}?$$

$$I_n \xrightarrow[L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j]{ } C L_{i,\lambda}$$

Exemple:

$$\text{Calculer } \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & L_1 \\ 3 & -1 & 1 & L_2 \\ 1 & 1 & 1 & L_3 \end{array} \right|$$

$$= L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & L_1 \\ 0 & -4 & -5 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & L_3 \end{array} \right| = 1 \times (-4) \times 1 = 4$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

=

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - 2L_3 & \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 3L_3 \end{aligned}$$

$$=(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 12 = 9$$

Proposition:

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$ désigne par:

L_i : la $i^{\text{ème}}$ ligne de A

C_j : la $j^{\text{ème}}$ colonne de A

1) si il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tq:

$L_i = O_{1,n}$ alors $\det A = 0$

$C_i = O_{n,1}$

2) si il existent $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$i \neq j$ tq $L_i = L_j$ ou $C_i = C_j$

alors $\det A = 0$

3) si il existent $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$

$\lambda \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) . tq,

$L_i = \lambda L_j$ (ou $C_i = \lambda C_j$)

alors $\det A = 0$

4) si il existent $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, (\mathbb{C}^n)

non tous nuls. tq:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i L_i = O_{1,n} \Rightarrow \det A = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i = O_{n,1} \Rightarrow \det A = 0$$

Exercice:

soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

Mq si $AB = I_n$ alors A et B sont inversible.

En effet, $\det AB = \det I_n$

$$\det A \cdot \det B = 1$$

$\rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible

$$AB = I_n \rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}I_n$$

$$(A^{-1}A)B = A^{-1} \rightarrow B = A^{-1}$$

Formule de Binôme de Newton:

Proposition:

soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$

verifiant $AB = BA$

$$1) (AB)^m = A^m B^m, \forall m \geq 0$$

$$2) (A+B)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k A^k B^{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^m C_m^k A^{m-k} B^k$$

$$\text{ou } C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$0! = 1$$

$$m! = m(m-1) \dots 2 \times 1, m \geq 1$$

$$(m+1)! = (m+1)m!$$

Chapitre III.

Rang d'une matrice de format qq

1) Définition du Rang d'une matrice qq:

soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

un mineur d'une matrice qq est le déterminant ~~mo~~ d'une sous matrice carrée extraite de la matrice A suite à l'élimination de ligne ou bien de colonne où les deux à la fois.

Definition Rang d'une matrice qq:

~~Ex~~ Ex: Evidemment une matrice A

$A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ le rang de A noté $\text{rg}(A)$ l'entier ≥ 0 ,

si on pose $\text{rg}(A) = r$ alors il existe un mineur de A d'ordre r non nulle et tout les mineur de A d'ordre $> r$ (s'il existe) en une valeur nulle

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix} \text{ de format } 2 \times 3$$

$\text{rg}(A) ?$

on pose $\{\text{rg}(A)\} = r \in \{0, 1, 2, \dots\}$

comme $A \neq O_{2,3} \rightarrow r \geq 1$

$$1 \leq r \leq 2 = \min\{2, 3\}$$

nb ligne nb colonne

$$r = \text{rg}(A) = ?$$

c'est le cas

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Exemple 2/

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = ?$$

$$\text{On pose } \text{rg}(A) = r$$

$$A \neq O_{2,3} \Rightarrow r \geq 1$$

$$1 \leq r \leq \min\{2, 3\} = 2$$

$$\rightarrow r \in \{1, 2\}$$

tout les mineur d'ordre 2 vaut 0

donc $r \neq 2$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

2) Calcul du rang par la méthode de la matrice étiquetée en ligne:

2.a: Relation d'équivalence " \sim " sur $M_{n,m}(\mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

Définition: soient $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, on dit que A est équivalente à B et on écrit $A \sim B$, s'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$, P inversible vérifiant $B = PA$

Réponse Proposition:

1) " \sim " est une relation d'équivalence sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$

2) $A \sim B$ si B est déduite de A suite à un nb fini d'opération élémentaire Type I, II sur les lignes de A du III

Preuve: 1) \sim est réflexive, puisque:
 $A \sim A$, pour tout $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

$$A = I_n A$$

$\downarrow P$

2) " \sim " est symétrique, soit A et $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

~~si~~ si $A \sim B$ alors $B \sim A$

on a: $A \sim B \Rightarrow \exists P$ inversible tq

~~que~~ P inversible

$$\begin{array}{c} \Rightarrow A = P^{-1}B \\ \Rightarrow B \sim A \end{array}$$

3) " \sim " est transitive

$$\begin{array}{l} A \sim B \\ \text{et } B \sim C \end{array} \Rightarrow A \sim C$$

$$A \sim B \Rightarrow B = PA, P \text{ inversible}$$

$$B \sim C \Rightarrow C = QB, Q \text{ inversible}$$

$$\Rightarrow C = \underbrace{QP}_H A$$

$$\Downarrow$$

$$A \sim C$$

Definition: $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ le pivot d'une ligne non nulle de A est le premier coefficient non nul de cette ligne.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def Definition: Matrice Echelonné en

ligne: soit $E \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, on dit que E est échelonné en ligne, si elle satisfait les 4 conditions suivantes.

1) Les lignes nulles (\neq 0) doivent être en bas de la matrice.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(1 \ 2)$ oui
Non	$(3 \ 0)$ oui

2) Les pivots égaux à 1

3) Les pivots sont décalés à droite en descendant vers le bas.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Non}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Non}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ oui}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ oui}$$

$$4) \quad \begin{matrix} & \circ & & & \\ & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \times \dots \times \\ & \vdots & & & \\ & 0 & & & \end{matrix}$$

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Non}$$

4ème condition

Proposition: Toute matrice est équivalente à une et une seule matrice échelonnée en ligne.

Preuve

Proposition:

- 1) si $A \sim B$ alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$
 2) si E : échappée en ligne alors,
 $\text{rg}(E) = \text{nb de pivots}$.
 $= \text{nb de lignes non nulles}$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = 2$$

Proposition:

soit $A \in M_n(\mathbb{K})$: Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A inversible
- $A^{-1} \sim I_n$ (échappée)
- $\text{rg}(A) = n$

Exercice:

Determiner selon les valeurs du paramètre réel m le rang de A_m par les 2 méthodes

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) méthode des mineurs:

$$\text{on pose } \text{rg}_m = \text{rg}(A_m), 1 \leq \text{rg}_m \leq 3$$

$$\text{rg}_m \in \{1, 2, 3\}$$

$$\text{rg}_m = 3 ?$$

$$\det A_m = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-m \end{vmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix} = 1-m + 2 = 3-m$$

Deux cas se présentent :

* $m \neq 3 \Rightarrow \det A_m \neq 0$, A_m inversible
 $\text{rg}(A_m) = 3$

* si $m = 3$, $\det A_3 = 0$

$$\text{rg}_3 \neq 3$$

$$\text{rg}_3 \neq 2$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\rightarrow \text{rg}_3 = 2$$

Donc $\text{rg}(A_m) = \begin{cases} 3, & \text{si } m \neq 3 \\ 2, & \text{si } m = 3 \end{cases}$

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3-m \end{pmatrix}$$

$$\text{si } m = 3 \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Echappée}$$

$$\text{rg}(A_3) = 2$$

$$\text{si } m \neq 3$$