Espaces vectoriels

Def :

on appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ tout ensemble de E muni d'une loi de composition interne

$$+ : E \times E \to E$$

et d'une loi de composition externe . $\mathbb{K} \times E \to E$

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda . x$$

et telles que

1) $(E, +)$ est une groupe commutatif
2) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E$
   i) $(\alpha + \beta) . x = \alpha . x + \beta . x$
   ii) $(\alpha \beta) . x = \alpha . (\beta . x)$
   iii) $\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$
   iV) $1_{\mathbb{K}} x = x$

on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel les elements de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.
les elements de E sont appelés vecteurs.

Exp.

1) $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est un e.v sur $\mathbb{R}$
2) $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ sont des e.V
3) $\mathbb{K}_n[x] = \{$polynomes de degre $\leq n\}$ est un e.V

Regles de calcul dans un e.V

Prop :

soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$ e.V alors pour touts scalaires $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout vecteurs $x, y \in E$ on a :

1) $0_{\mathbb{K}} . x = 0_E$
2) $(-1) . x = -x$
3) $(-\lambda) . x = -(\lambda . x) = \lambda . (-x)$
4) $(\alpha - \beta) . x = \alpha . x - \beta . x$
5) $\lambda . (x - y) = \lambda . x - \lambda . y$
6) $\lambda . 0_E = 0_E$
7) $\lambda . x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$

Sous-espace vectoriel :

Def :

soient $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ e.v $(E, +, .)$

on appelle combinaison linéaire de ces n vecteurs.

tout vecteurs $x \in E$ de la forme $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

Exp :

1) soient $u = (1, -1)$, $V = (-2, 3)$ et $w = (4, 8)$ alors est il combinaison lineaire de u et V
2) Soient $u = (2, 3)$, $V = (-4, -6)$ et $w = (1, 2)$ alors est il combinaison lineaire de u et v

Rep : 1) $\exists ? (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / w = \alpha u + \beta v$

$$(4, 8) = \alpha(1, -1) + \beta(-2, 3)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - 2\beta = 4 & (1) \\ -\alpha + 3\beta = 8 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \beta = 12 \Rightarrow \alpha = 28$$

α et β existent donc w est une combinaison lineaire de u et V

2) $\exists ? (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / w = \alpha u + \beta v$

$$(1, 2) = \alpha(2, 3) + \beta(-4, -6)$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha - 4\beta = 1 & (1) \\ 3\alpha - 6\beta = 2 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} 6\alpha - 12\beta = 3 \\ 6\alpha - 12\beta = 4 \end{cases}$$

impossible $\Rightarrow$ w n'est pas une combinaison linéaire de u et V

Def : (sous . espace vectoriel)
soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$. e v et $F \subset E$
on dit que F est un sous espace vectoriel de E
ssi : i) La partie F non vide, $F \neq \emptyset$

$$\begin{pmatrix} 0_E \in F \Rightarrow F \neq \emptyset \\ 0_E \notin F \Rightarrow F \text{ n'est pas un sous e.v de } E \end{pmatrix}$$

ii) $\forall (x, y) \in F^2 \quad x + y \in F$
iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F \quad \lambda x \in F$

Exp 1 :
soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$
Mq F est un sous e.v de $\mathbb{R}^3$

Rep :
1) Soit $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ car $0 - 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow$ F est non vide
2) Soient $X = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow x - y + z = 0$
$Y = (a, b, c) \in F \Leftrightarrow a - b + c = 0$

$X + Y = (x, y, z) + (a, b, c)$
$= (x + a, y + b, z + c)$
$= (x + a) - (y + b) - (z + c)$
$= x + a - y - b + z + c$
$= \underbrace{(x - y + z)}_{0} + \underbrace{(a - b + c)}_{0} = 0$

alors $X + Y \in F$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = (x, y, z) \in F$
$\Leftrightarrow x - y + z = 0$
$\lambda . X \in F$?

$\lambda . X = \lambda (x, y, z) = (\lambda a, \lambda y, \lambda z)$
$\lambda x - \lambda y + \lambda z = \lambda (x - y + z) = 0$
$\Rightarrow \lambda . X \in F$
cl : F est sous e . v de $\mathbb{R}^3$

Exp 2 :
soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] / P(1) = 0\}$
Mq F est un sous e.v de $\mathbb{R}_3[x]$

Reponse :
$0_{\mathbb{R}_3[x]}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
en particulier, $0_{\mathbb{R}_3[x]}(1) = 0$
$\Leftrightarrow 0_{\mathbb{R}_3[x]} \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$
soient $P_1 \in F \Leftrightarrow P_1(1) = 0$
$P_2 \in F \Leftrightarrow P_2(1) = 0$
$(P_1 + P_2)(1) = P_1(1) + P_2(1) = 0 + 0 = 0$
$\Leftrightarrow (P_1 + P_2) \in F$
soient $\lambda \in \mathbb{R}, P \in F \quad (P(1) = 0)$
$(\lambda P)(1) = \lambda P(1) = \lambda . 0 = 0 \Leftrightarrow \lambda P \in F$
cl : F est un sous e.V de $\mathbb{R}_3[x]$

Exp 3 :
soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x . y = 0\}$
F est il un sous . e.v de $\mathbb{R}^2$

Rep :
$X = (1, 0) \in F$ (car $1.0 = 0$)
$Y = (0, 1) \in F$ (car $0.1 = 0$)
$X + Y = (1, 1) \notin F$ car $1.1 = 1 \neq 0$
$\Rightarrow$ F n'est pas un sous e.v de $\mathbb{R}^2$

Prop :

soient $(E,+,.)$ en $\mathbb{K}$ e.v et $F \subset E$ non vide.

on a equivalence entre i) et ii)

i) F est un sous e.v de E

ii) $(F,+,.)$ est en $\mathbb{K}$ e.V

Intersection de sous e.V :

Prop :

Soient $(E,+,.)$ en $\mathbb{K}$ e.v et $(F_i)_{i\in I}$ des sous e.v de E alors $\cap F_i$ est un sous e.v de E

Exp :

soient : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$

$G = \{(s-t, s+t, t) \in \mathbb{R}^3, s.t \in \mathbb{R}\}$

1) Mq F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2) Mq G " " " " "

3) Determiner $F \cap G$

Rep :

1) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$ car $0+0+0=0$

$\Rightarrow F \neq \emptyset$

./ soient $X = (x,y,z) \in F$

$\Leftrightarrow x+y+z=0$

$Y = (a,b,c) \in F$

$\Leftrightarrow a+b+c=0$

$X+Y = (a+x, y+b, z+c)$

$= (a+x)+(y+b)+(z+c)$

$= \underbrace{(a+b+c)}_{0} + \underbrace{(x+y+z)}_{0} = 0$

$\Rightarrow X+Y \in F$

./ soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $X = (x,y,z) \in F$

$\Rightarrow x+y+z=0$

$\lambda.X = \lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda\underbrace{(x+y+z)}_{0} = 0$

$\Rightarrow \lambda.X \in F$

cl : F est un sous e.v de $\mathbb{R}^3$

$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) = (0-0, 0+0, 0) \in G \Rightarrow G \neq \emptyset$

./ soient $X = (s-t, s+t, t) \in G$

$Y = (s'-t', s'+t', t') \in G$

$X+Y = (s-t+s'-t', s+t+s'+t', t+t')$

$= (s+s'-(t+t'), s+s'+(t+t'), t+t')$

$\in G$

soient $\lambda \in \mathbb{R}$ ~~X~~

$X = (s-t, s+t, t) \in F$

$\lambda.X = \lambda(s-t, s+t, t) =$

$(\lambda s - \lambda t, \lambda s + \lambda t, \lambda t) \in G$

cl : G est un ~~sev~~ sous e.V de $\mathbb{R}^3$

3) $F \cap G$?

soit $(x,y,z) \in F\cap G \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x = s-t \\ y = s+t \\ z = t \end{cases}$

$\Rightarrow (s-t)+(s+t)+t = 0$

$t = -2s$

$\Rightarrow F \cap G = \{(3s, -s, -2s)\}$ est un sous e.V de $\mathbb{R}^3$

Def :
soit A une partie d'un $\mathbb{K}$ e.v $(E,+,\cdot)$
On appelle s.e.v engendré par A le plus petit s.e.v de E contenant A.
On le note vect(A)

Rq :

1) A est un s.e.v de E ssi $vect(A)=A$

2) $vect(\emptyset)=\{0_E\}$

prop :
soit $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ une partie de E
le sous espace engendré par A est :
$vect(A)=\{\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n\}$
où $\lambda_i \in \mathbb{K}$

exp :
soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}$

$2x+y-z \Rightarrow z=2x+y$

$\Rightarrow (x,y,z)=(x,y,2x+y)=(x,0,2x)+(0,y,y)$

$\Rightarrow \cancel{f} = x\underbrace{(1,0,2)}_{u}+y\underbrace{(0,1,1)}_{v}$

$F=vect(u,v)$

somme de s.e.v :

Def :
soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-e.v $(E,+,\cdot)$ On appelle somme de F et G et on note $F+G$ le s.e.v de E donnée par
$F+G=\{x,y \text{ tq} : x\in F, y\in G\}$

Exp :

1) Soient $F=vect(\sin)$, $G=vect(\exp)$

$F+G=vect(\sin,\exp)=$
$\{\alpha \sin x+\beta e^x / (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$

2) soint $F=\{(x,0,0), x\in\mathbb{R}\}$,
$G=\{(x,x,0) / x\in\mathbb{R}\}$

$F+G=vect\{(1,0,0),(1,1,0)\}$
$=\{\alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)\}$

Somme

Somme directe

Def.
on dit que 2 e.v F et G d'un $\mathbb{K}$ e.v E sont en somme directe ssi $F\cap G=\{0_E\}$
on note $F\oplus G$ leur somme

exp :
soient $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y-z=0$ et $2x-y+z=0\}$
$G=\{(x,x,x), x\in\mathbb{R}\}$
Mq $F\oplus G$

$F\cap G$?
soit $(x,y,z)\in F\cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0\\ 2x-y+z=0\\ x=y=z\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases}$

$F\cap G=\{(0,0,0)\} \Rightarrow F\oplus G$

Theoreme.
Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-e.v E.
On a equivalence entre i) et ii)

i) F et G en somme directe $(F\oplus G)$

ii) $\forall x\in F+G, \exists!(x_1,x_2)\in F\times G$ tq $x=x_1+x_2$

sous espaces supplementaires:

Def:

On dit que deux s.e.v F et G sont supplementaires ssi :

i) $E = F + G$

ii) $F \cap G = \{0_E\}$

On note $E = F \oplus G$

Exp:

soient:

$F = \{(S,0), S \in \mathbb{R}\}$

$G = \{(0,t), t \in \mathbb{R}\}$

Mq: $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$

· $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \underbrace{(x,0)}_{\in F} + \underbrace{(0,y)}_{\in G}$

$\mathbb{R}^2 = F + G$

· $(x,y) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow F \cap G = \{(0,0)\}$

D'où $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$

Exp 2:

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$

$G = \{(t,-t,t) ; t \in \mathbb{R}\}$

Mq $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

. soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ cherchons

$(x_1, x_2, x_3) \in F, (t,-t,t) \in G /$

$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$(x,y,z) = (x_1, x_2, x_3) + (t,-t,t)$

$\begin{cases} x = x_1 + t \\ y = x_2 - t \\ z = x_3 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x - t \\ x_2 = y + t \\ x_3 = z - t \end{cases}$

or $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$2(x-t) - (y+t) + (z-t) = 0$

$\Rightarrow 4t = 2x - y + z$

$\boxed{t = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z \\ x_2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z \\ x_3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z \end{cases}$

Donc $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z, \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z\right)}_{\in F}$

$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z, \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z\right)}_{\in G}$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = F + G$

$F \cap G = ?$

soit $(x,y,z) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$

$\Rightarrow 2t + t + t = 0 \Rightarrow t = 0$

$\Rightarrow x = y = z = 0$

d'où $F \cap G = \{(0,0,0)\}$

Alors F et G sont supplementaires

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$

Familles libres :

Def :

On dit qu'une famille $(V_1, \dots V_n) \in E^n$ est libre ou linéairement indépendants ssi

$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

$\lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_n V_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 \dots = \lambda_n = 0$

Rq. si la famille $(V_1, \dots V_n)$ n'est pas libre on dit qu'elle est liée.

Exp.

soient $V_1 = (1, -1, 0)$, $V_2 = (2, 0, 1)$, $V_3 = (0, 1, 1)$

(V_1, V_2, V_3) est elle libre.

Rep :

$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha (1, -1, 0) + \beta (2, 0, 1) + \gamma (0, 1, 1) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \alpha \\ \gamma = \alpha \\ -\frac{1}{2} \alpha + \alpha = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow (V_1, V_2, V_3)$ est libre

Exp :

soient $U = (1, -1)$; $V = (-2, 2)$

(U, V) est elle libre

Rep :

$\alpha U + \beta V = 0 \Rightarrow \alpha (1, -1) + \beta (-2, 2) = (0, 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2\beta$

$\boxed{\begin{matrix} \beta = 1 \\ \alpha = 2 \end{matrix}}$

$\Rightarrow (U, V)$ est liée $(2\beta, \beta)$

Familles Generatrices :

Def :

On dit que une famille $(V_1, \dots, V_n) \in E^n$ est generatrice de E ssi

$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

tq $x = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_n V_n$

Exp :

soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$

Donner une famille generatrice de F

Rep :

soit $(x, y, z) \in F \Rightarrow x + y - z = 0$

$\Rightarrow z = x + y$

$\Rightarrow (x, y, z) = (x, y, x + y)$

$= (x, 0, x) + (0, y, y)$

$= x \underbrace{(1, 0, 1)}_{a} + y \underbrace{(0, 1, 1)}_{b}$

$\Rightarrow (a, b)$ est une famille generatrice de F

Bases :

Def :

On dit qu'une famille $(V_1, \dots, V_n) \in E^n$ est une base de E ssi

i) $(V_1, \dots, V_n)$ est une famille libre de E

ii) $(V_1, \dots, V_n)$ " " " generatrice de E

~~Re~~ Exp 1:

soient $U=(1,0,1)$; $V=(1,-1,1)$

$W=(0,1,1)$

Mq (U,V,W) est une base de $\mathbb{R}^3$

Rep:

. (U,V,W) libre ?

$\alpha U+\beta V+\gamma W=0$

$\Rightarrow \alpha(1,0,1)+\beta(1,-1,1)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ -\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \gamma=\beta\\ -\beta+\beta+\beta=0\end{cases}$

$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0 \Rightarrow (U,V,W)$ est libre

. (U,V,W) est generatrice?

soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ cherchons α,β,γ

tq: $(x,y,z)=\alpha U+\beta V+\gamma W$

$\Rightarrow (x,y,z)=\alpha(1,0,1)+\beta(1,-1,1)+\gamma(0,1,1)$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=x & (1)\\ -\beta+\gamma=y & (2)\\ \alpha+\beta+\gamma=z & (3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=x-\beta\\ \gamma=y+\beta\\ x-\beta+\beta+y+\beta=z\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}\beta=z-y-x\\ \alpha=x-z+y+x=2x+y-z\\ \gamma=y+z-y-x=-x+z\end{cases}$

$(x,y,z)=(2x+y-z)U+(z-y-x)V+(-x+z)W$

Alors (U,V,W) est une famille generatrice de $\mathbb{R}^3$

cl: (U,V,W) est une base de $\mathbb{R}^3$

Rq:

1) soient $e_1=(1,0,\dots,0)$; $e_2=(0,1,0,\dots,0)$, ..., $e_n=(0,\dots,0,1)$

$(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ dite base canonique de $\mathbb{R}^n$

2) $(1,X,\dots,X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dite base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$