

EXAMEN

Section: LGLSI
Epreuve: Algèbre 1

U.E: Mathématique

Nature de l'épreuve : D.C. <input type="checkbox"/> E.f. <input checked="" type="checkbox"/>	Documents : autorisés <input type="checkbox"/> non aut <input type="checkbox"/>
Date de l'épreuve : 04/01/2024	Calculatrice : autorisée <input type="checkbox"/> non aut <input type="checkbox"/>
Durée de l'épreuve : 01H30	Session : principale <input checked="" type="checkbox"/> contrôle <input type="checkbox"/>

Exercice 1

Soient

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0 \text{ et } x + 2y + z = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 3y + z = 0\}.$$

$a = (1, -1, 1)$, $b = (-2, -1, 1)$ et $c = (-1, 0, 2)$.

On admettra que F est s.e.v de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer une base de E .
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F .
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
5. A-t-on: $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?
6. Soit $u = (2, -2, 4)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Exercice 2

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (-2x + y + z, x - 2y + z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f : $\ker f$.
3. Déterminer l'image de f : $\text{Im} f$.

Exercice 3

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$:

$$1. F(X) = \frac{X^4}{(X-3)(X^2+X+4)}.$$

$$2. G(X) = \frac{1}{(X-1)^2(X-2)}.$$