Chapitre V : Espace vectoriel, applications linéaires et matrices

Tout au longe de ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I/ Espace vectoriel :

Definition : soit E un ensemble non vide muni de deux lois (operations) notées "+" et ($\cdot/\mathbb{K}$) defénies comme suite.

"+" : $E \times E \to E$ (loi interne)

$(x,y) \mapsto x+y$

"$\cdot/\mathbb{K}$" : $\mathbb{K} \times E \to E$

$(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot_{/\mathbb{K}} x = \lambda x$ (loi externe)

on dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou un $\mathbb{K}$-e-v), si on a :

1) $(E,+)$ groupe commutatif :

a) "+" associative : $\forall x,y,z \in E$,

$x+(y+z) = (x+y)+z$

b) Admet un element neutre noté 0_E

$\forall x \in E$, $x+0_E = 0_E + x = x$

c) Tout $x \in E$ possède un symetrice noté "$(-x)$" verifiant : $x+(-x) = (-x)+x = 0_E$

d) $\forall x,y \in E$, $x+y = y+x$ ("+" est commutative)

2) $\cdot/$ à la loi "$\cdot/\mathbb{K}$"

e) $\forall x,y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

f) $\forall \lambda, \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda+\alpha)x = \lambda x + \alpha x$

g) $\forall \lambda, \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$

$\lambda(\alpha x) = (\lambda\alpha)x$

h) $\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Propriétés : E un $\mathbb{K}$-e-v

1) $\lambda 0_E = 0_E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

2) $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$

3) $\lambda x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$

$\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$

4) $-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x = \lambda(-x)$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$

Rq : - les elements de $\mathbb{K}$ sont dites des scalaires.

- les elements de E sont dits des vecteurs

Exemples : 1) $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \dots\}$

$x, y \in \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

et $\lambda \in \mathbb{R}$

$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-e-v

2) $\mathbb{R}[x] = \left\{ p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x \;\middle|\; \begin{array}{l} n \geq 0 \\ \alpha_i \in \mathbb{R} \\ i = 0, 1 \dots, n \end{array} \right\}$

$p, q \in \mathbb{R}[x]$

$p = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i, \quad q = \sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i$

$p + q = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i + \beta_i) x^i$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda p = \sum_{i=0}^{n} \lambda \alpha_i x^i$

$\mathbb{R}[x]$ est un $\mathbb{R}$-e-V

3) $\mathbb{R}_n[x] = \{ p \in \mathbb{R}[x] \mid d^\circ p \leq n \}$

ou n st entier $n \geq 0$

4) $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-e-v

5) $A(X, E)$ où $X \neq \emptyset$

E un $\mathbb{K}$-e-V

$A(X, E) = \left\{ f : \begin{array}{l} X \to E \\ x \mapsto f(x) \end{array} \text{ application} \right\}$

$f, g \in A(X, E), \lambda \in \mathbb{K}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in E$

$(\lambda . f)(x) = \lambda f(x)$

Définition : "sous espace vectoriel"

soient E un $\mathbb{K}$-e-v et $\emptyset \neq F \subset E$

on dit que F est un s-e-v de E

si $(F, +, \cdot_{\mathbb{K}})$ est un e-v sur $\mathbb{K}$

sont les m̂ lois de E

Proposition : soient E un $\mathbb{K}$-e-v et $F \subset E$. Les deux assertions suivantes sont equivalentes.

a) F est un s-e-v de E

b) Les deux conditions suivantes sont verifiés.

(i) $0_E \in F$

(ii) $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$x + \lambda y \in F$

Definition : soient E un $\mathbb{K}$-e-v est $U_1, U_2, \dots U_p$ des vecteurs dans E

on dit que $x \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs $U_1, U_2, \dots, U_p$, si on a s'ils existent $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_p \in \mathbb{K}$ telsque

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i U_i$$

Notation : on note par $S = \{U_1, \dots, U_p\}$

$$\text{Vect } S = \text{Vect}\{U_1, U_2, \dots, U_p\} = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i U_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_i \in \mathbb{K} \\ i = 1, 2, \dots, p \end{array} \right\}$$

Vect S est un s-e-V de E

definition : soient E un $\mathbb{K}$-e-v et $S = \{U_1, U_2 \dots, U_p\}$ une famille de p vecteur de E.

On dit que S engendre E (on dit aussi S est une famille generatrice de E)

si on a : $\boxed{\text{Vect } S = E}$

Exemples :

1) $E = \mathbb{R}^3$

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=1\}$

F est-il un s-e-v de $\mathbb{R}^3$?

$(a,b,c)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$X+Y = (a+x, b+y, c+z) \in \mathbb{R}^3$

$\lambda X = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \in \mathbb{R}^3$

$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin F$, car $(0+0 = 0 \neq 1$

F n'est un s-e-v de $\mathbb{R}^3$

2) $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=0$ ou $2x+\cancel{z}=0\}$

G n'est pas

$U = (1,-1,5) \in G$

$V = (-1,0,2) \in G$

$U+V = (0,-1,7) \notin G$

3) $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ \text{et} \\ 2x-y+2z=0 \end{array}\right\}$

soient $X = (x,y,z) \in H$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y+z \\ 2(-y+z)-y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y+z \\ -3y+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3}z \\ y=\frac{4}{3}z \end{cases} \text{avec } z \in \mathbb{R}$$

$X = \left(-\frac{1}{3}z, \frac{4}{3}z, z\right),\ z \in \mathbb{R}$

$X = \frac{1}{3}z\underbrace{(1,-4,-3)}_{U},\ z \in \mathbb{R}$

$X \in \text{Vect}\{U\}$

<u>Conc</u> : $H = \text{Vect}\{U\}$

$\{U\}$ est une famille génératrice de H

comme $U \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\{U\}$ libre.

Definition : Soit E un $\mathbb{K}$-e-v

$S = \{U_1, U_2, \dots, U_p\}$ une famille de p-vecteurs de E. On dit que

S est une famille libre de E

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i U_i = 0_E \Rightarrow \alpha_i = 0_{\mathbb{K}}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{K}$

Definition : On dit que S est liée si, S n'est pas libre c à d $\exists\ \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_p \in \mathbb{K}$ non tous nuls tq $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i U_i = 0_E$

Proposition : soient E un $\mathbb{K}$-e-v et F, G deux s-e-v de E

1) $F \cap G$ est un s-e-v de E
2) $F \cup G$ est un s-e-v ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$
3) $F+G = \left\{x = a+b \,/\, \begin{array}{l} a \in F \\ \text{et } b \in G \end{array}\right\}$

est un s-e-v de E

Definition: E un $\mathbb{K}$-e-v

F, G deux s-e-v de E on dit que F et G sont supplémentaires si on a :

i/ $F \cap G = \{0_E\}$

ii/ $F + G = E$

on écrit dans ce cas : $F \oplus G = E$

Propositions: E un $\mathbb{K}$-e-V

F, G deux s-e-v de E

$F \oplus G = E$ ssi $\forall x \in E, \exists! (a,b) \in F \times G$

tq $x = a + b$

somme directe

Définition :

E un $\mathbb{K}$-e-v, $S = \{v_1 v_2 \dots v_p\}$

~~s~~ est une base de E, ssi

si S génératrice de E et S est libre

Définition:

E un e-v sur $\mathbb{K}$

Toutes les bases ~~qui~~ ont le m̂ de vecteurs

$\dim_{\mathbb{K}} E$ = nb de vect dans une base de E