Algèbre linéaire

Feuille de TD n°2 : Déterminants

1 Connaissance du Cours

Exercice 1.1 Les phrases suivantes sont-elles justes, fausses, imprécises, incomplètes ? Améliorez-les, complétez-les (jouez à être le plus rigoureux possible).

(a). Le déterminant d'un produit de matrices, est le produit de leurs déterminants.

(b). Le déterminant d'une somme de matrices, est la somme de leurs déterminants.

(c). En intervertissant deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1.

(d). Le déterminant d'une matrice triangulaire est ...

(e). Le déterminant d'une matrice inversible est ...

(f). Le déterminant d'une matrice non carrée est ...

(g). Le déterminant de l'inverse d'une matrice est ...

(h). Le déterminant de la somme de deux matrice est...

(i). Pour calculer le déterminant, on peut effectuer des manipulations sur les lignes, ou sur les colonnes, mais il ne faut pas mélanger les deux méthodes.

(j). Le déterminant de λA est ...

(k). Le déterminant de A^n est ...

(l). Le déterminant de A^{-n} est ...

(m). Si une matrice a deux fois la même ligne ou la même colonne alors ...

Exercice 1.2 Considérons une matrice carrée $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que

$$D_2(4)\,T_{32}(1)\,T_{13}(-2)\,P_{1,2}\,D_2(\frac{1}{2})\,P_{2,1}T_{2,1}(3)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quel est le déterminant de A ? Rappels des notations des matrices élémentaires :

- $D_i(\lambda)$ $(1 \leq i \leq n,\ \lambda \in \mathbb{K}^*)$ la matrice diagonale dont le i-ème coefficient est λ et les autres 1.
- $T_{i,j}(\lambda)$ $(1 \leq i \neq j \leq n,\ \lambda \in \mathbb{K})$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, dont le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est λ et les autres coefficients sont nuls.
- $P_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de l'identité en permuttant les lignes i et j.

Exercice 1.3 Sachant que le déterminant de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ vaut 3, donner la valeur des déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

2 Exercices d'application

Exercice 2.1 Calculer (en échelonnant tant que possible) les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}), \quad I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}),$$

Exercice 2.2 Soient a, b, c des nombres réels. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & a \\ b & b & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ a & b & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix},$$

En utilisant les techniques du cours, montrez que :

$$\det A = -b(a+b)(a-b)^2$$
$$\det B = -4bc + (a-b-c)^2$$
$$\det C = (a+b+c)^3$$

Exercice 2.3 Existe-t-il une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$? Même question si $A \in M_3(\mathbb{C})$.

3 Exercices niveau 2

Exercice 3.1 Voici un calcul astucieux de déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \leftarrow C_3 - aC_2 \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & b(b-a) \\ 1 & c & c(c-a) \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 \leftarrow C_2 - aC_1 & C_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b(b-a) \\ 1 & c-a & c(c-a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Calculez maintenant le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Sauriez-vous généraliser ce résultat ?

Exercice 3.2 Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles ces matrices ne sont pas inversibles.

Exercice 3.3 Les nombres 204, 527 et 255 sont divisibles par 17. Montrer, sans le calculer, que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ est aussi divisible par 17.

Indication : $204 = 2 \times 100 + 0 \times 10 + 4 \times 1$, $255 = \dots$ et l'on ne change pas le déterminant en rajoutant à une colonne, 100 fois ou 10 fois une autre colonne...

Exercice 3.4 Soit D_n le déterminant de la matrice d'ordre n suivante $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer D_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2) Exprimer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}. Indication : développer le déterminant.

3) Montrer que $(D_n - D_{n-1}) = 1$. En déduire une expression explicite pour D_n.

Exercice 3.5 Soit m un nombre réel.

a) Calculer le déterminant de $B_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2m-2 \\ 2 & m & -3m-1 \end{pmatrix}$.

b) Inverser B_1 si cela est possible.

c) Soit a un nombre réel. Déterminer, suivant les valeurs de a et m, si le système

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & a, \\ mx & + & (1-m)y & + & (2m-2)z & = & m, \\ 2x & + & my & - & (3m+1)z & = & 2a \end{cases}$$

a une solution unique, aucune solution ou une infinité de solutions.

d) Résoudre le système précédent.

Exercice 3.6 Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$.

a) On suppose que $A^2 = 3I_4$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse en fonction de A ; sinon, donner un contre-exemple. Calculer la (ou les) valeur(s) possible(s) du déterminant de $2A$.

b) On suppose maintenant que $A^2 = 2A$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse en fonction de A ; sinon, donner un contre-exemple. Calculer $(A + I_4)^5$ en fonction de A et I_4.

4 QCM récapitulatif

QCM 4.1 On peut dire que:

(a). Le déterminant d'une matrice à coefficients réels est un nombre réel. ☐

(b). Le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont des nombres imaginaires purs est un nombre imaginaire pur. ☐

(c). Le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont des réels positifs est un nombre réel positif. ☐

(d). Le déterminant d'une matrice diagonale est toujours non nul. ☐

(e). Le déterminant du produit est le produit des déterminants. ☐

(f). Le déterminant de la somme est la somme des déterminants. ☐

QCM 4.2 Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 10 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ vaut

a) 0 ☐

b) -1 ☐

c) 1 ☐

d) 2 ☐

QCM 4.3 Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ vaut

a) 0 ☐

b) $a+b+c$ ☐

c) $(b-a)(c-a)$ ☐

d) abc ☐

QCM 4.4 Le déterminant de la matrice $(A_{ij}) = |i-j| \in M_3(\mathbb{R})$ vaut

a) 4 ☐

b) -4 ☐

c) 2 ☐

d) -2 ☐

e) 0 ☐

QCM 4.5 Soit A une matrice carrée de taille 5 vérifiant $A^\top = -A$. Le déterminant de A vaut :

a) 1 ☐

b) -1 ☐

c) 5 ☐

d) 0 ☐

QCM 4.6 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top A = I_n$. Alors

a) A est inversible. ☐

b) $\det A = 1$. ☐

c) Le déterminant de A ne peut prendre que deux valeurs. ☐

d) $A = I_n$. ☐

e) A est orthogonale. ☐

f) $\det A$ vaut -1 ou $+1$. ☐.

QCM 4.7 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = A$. Alors

a) A n'est pas nécessairement inversible. ☐

b) $\det A = 1$. ☐

c) $\det A$ vaut 0 ou 1. ☐

e) $\det A$ vaut -1 ou $+1$. ☐.

QCM 4.8 Soient A, B et C des matrices carrées de taille 2. On suppose que $\det A = 3, \det B = 2$ et $C = 2A$. Alors

a) $\det(AB^{-1}C) = 24$. ☐

b) $\det(AB^{-1}C^{-1}) = 1$. ☐

c) ABC est inversible. ☐

d) $\det(AB^{-1}C^\top) = 18$. ☐

5 Exercices supplémentaires

Exercice 5.1 Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & -5 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} \end{pmatrix} \; (i^2 = -1), \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\det A = 0, \det B = 0, \det C = 90, \det D = 1, \det F = 5$

Exercice 5.2 Calculer le déterminant de la matrice : $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il s'écrit $\lambda(x-1)^3$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et donner la valeur de λ.

Exercice 5.3 Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$

(on donnera le résultat sous forme factorisée).

En déduire l'expression factorisée du déterminant de $B = \begin{pmatrix} 4 & 2a & 2a^2 \\ 2 & b & b^2 \\ 4 & 2c & 2c^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.4 On considère les matrices A et J dans $M_3(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}, \quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Calculer le déterminant de J. Déterminer la matrice AJ. En déduire une décomposition du déterminant de A en produit de facteurs.

Exercice 5.5 Soit A la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier l'identité $\det(A) = (a-b)(b-c)(c-a)$.

2) On pose $S_n = a^n + b^n + c^n$ pour tout entier $n \geq 0$.

Montrer que l'on a :

$$\det \begin{pmatrix} 3 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix} = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

Indication : on pourra calculer la matrice AA^T.

Exercice 5.6 Trouver un polynôme de degré 3 à coefficients réels prenant les valeurs respectives $0, -4, 5$ et -15 pour $X = 1, -1, 2$ et -2.

Indication : Chercher $P(X)$ sous la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$, écrire le système de 4 équations obtenu en donnant successivement à X les valeurs 1, -1, 2, -2.