

## Chapitre II:

### Primitive d'une fonction

$$\text{verifie } F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + F(x_0)$$

#### 1) Définition et propriétés:

1) Définition: Soit  $I = [a; b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

soit :  $I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $I$

Une fonction  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée une primitive de  $f$  si.  $F$  est dérivable sur  $I$

$F'(x) = f(x), \forall x \in I$

#### 2) Opérations sur les primitives:

soit  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions définies sur  $I$ .

On suppose que ces deux fonctions possèdent des primitives.

Soit  $x \in I$  fixé. Alors:

$(f+g)$  possède des primitives qui vérifient

c) Par exemple: on sait  $(\alpha^2)' = 2x$

donnée      |  
                |

$$\int^x (f+g)(t) dt = \int^x f(t) dt + \int^x g(t) dt$$

$(\alpha \cdot f)$  possède des primitives qui vérifient

Donc  $x \rightarrow \alpha x$  est une primitive

$$x \rightarrow 2x$$

$$\int^x (\alpha \cdot f(t)) dt = \alpha \int^x f(t) dt$$

#### II) Théorème (existence de primitive):

soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $[a; b]$ . Alors, on a l'implication suivante:

$f$  est continue sur  $[a; b] \Rightarrow f$  possède des primitives.

#### • Contre exemple:

soit  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

$f$  n'est pas continue en  $\frac{1}{2}$

On suppose (par l'absurde) que  $f$  possède des primitives. Notons  $F$  la primitive qui vérifie  $F(0) = 0$

On aura  $\int F(x) = 0 \quad (1)$

$$F'(x) = 0 \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$F'(x) = 1 \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur  $I$ . Les primitives de  $f(x)$  sont notées

$$x \rightarrow \int^x f(t) dt$$

Soit  $x_0 \in I$  fixé, alors la primitive de  $x \rightarrow f(x)$

qui s'annule en  $x_0$  est notée

$$x \rightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Alors toute primitive  $x \rightarrow F(x)$  de

$$x \rightarrow f(x)$$

$$T! \Rightarrow \begin{cases} F(0) = 0 & \textcircled{1} \\ F(x) = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{or } x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} F(x) = F\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{F est continue})$$

$$A' \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} 0 = F\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$F(x) = x - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

En particulier, F est non dérivable

~~et en  $\frac{1}{2}$~~  ce qui est l'impossible donc f

ne possède pas de primitive.

$$\text{soit } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} 0 = 0$$

Or

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = 1$$

### 5) Primitive des fonctions usuelles:

$$I \quad \begin{cases} f(x) & \int^x f(t) dt \end{cases}$$

$$\text{IR} \quad e^x \quad e^x + C$$

$$\text{IR} \quad \cos(x) \quad \sin(x)$$

$$\text{IR} \quad \sin(x) \quad -\cos(x)$$

$$\text{IR} \quad x^n \quad \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$]0, +\infty[ \quad x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$]-\infty, 0[ \quad \frac{1}{x} \quad \ln(|x|)$$

$$\text{IR} \quad \frac{1}{1+x^2} \quad \arctan(x) + C$$

$$]1, 1[ \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arcsin(x) + C$$

$$I \quad \begin{cases} f(x) & \int^x f(t) dt \end{cases}$$

$$\frac{g(x)}{g(x)} \quad \ln|g(x)| + C$$

$$g'(x) (g(x))^{\alpha} \quad \frac{1}{\alpha+1} [g(x)]^{\alpha+1} + C$$

Remarque :

La constante ajoutée dépend de l'intervalle définissant l'expression de f(x) par exemple si

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x > 0 \\ f_2(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

et  $F_1$ , resp.  $F_2$  est une primitive de  $f_1$ , resp.  $f_2$ , alors les primitives de f sont données par

$$f(x) = \begin{cases} F_1(x) + C_1 & x > 0 \\ F_2(x) + C_2 & x \leq 0 \end{cases}$$

Exemple :

$$\text{soit } f(x) = \begin{cases} 2x + e^x & x > 0 \\ 4x^3 + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

les primitives de f sont

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + e^x + C_1 & x > 0 \\ x^4 + x + C_2 & x \leq 0 \end{cases}$$

calculons

$F_1(x) = \int_0^x f(t) dt$  la primitive de f qui s'annule en 0.

$$F_1(0) = 0 \quad \int_0^1 1 + C_1 = 0$$

$$C_2 = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 1 \text{ et } C_2 = 0$$

$$\text{Donc } \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} x^2 + e^x - 1 & x > 0 \\ x^4 + x & x \leq 0 \end{cases}$$

## II Calcul de primitive:

### 1) Intégration par parties:

a) Théorème:  
Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $C^1$  (dérivables et  $f'$  et  $g'$  sont continues). Alors

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f(t) \cdot g'(t) dt &= f(x)g(x) - \int_{x_0}^x f'(t)g(t) dt \\ &\quad - f(x_0)g(x_0) - \int_{x_0}^x f'(t)g(t) dt \\ &= [f \cdot g]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x f'(t)g(t) dt \end{aligned}$$

### b) Exemples:

E<sub>1</sub>) Calculons  $\int_0^x t \cdot e^t dt$

$$\text{On a } \int_0^x t \cdot e^t dt = [t \cdot e^t]_0^x - \int_0^x e^t dt$$

$$\begin{cases} t = f(t) \\ e^t = g'(t) \end{cases}$$

$$= x e^x - [e^x - 1] = x e^x - e^x + 1$$

E<sub>2</sub>) Calculons  $\int_0^x \arcsin(t) dt$

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  bijective

$\sin^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , et  $x \neq \pm 1$

Soit  $\int \arcsin(t) dt = f(t)$

$$1 = g'(t)$$

on aura  $\int_0^x \arcsin(t) dt =$

$$= [t \cdot \arcsin(t)]_0^x - \int_0^x t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= x \cdot \arcsin(x) - \int_0^x t \cdot (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= x \arcsin(x) - \left[ \frac{t}{2} (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^x$$

$$= x \arcsin(x) + \cancel{\left[ \frac{1}{2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right]}_0^x$$

$$= x \arcsin(x) + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1$$

### 2) Changement de variable:

#### a) Théorème:

soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $I$ , et  $\varphi : J \rightarrow I$  une fonction ~~bijective~~ bijective et de classe  $C^1$ .

Ici,  $I$  et  $J$  sont deux intervalles

$$\text{Alors } \int_{y_0}^y f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x) dx$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} : \text{On pose } x = \varphi(t)$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1} : t = \varphi^{-1}(x) \quad (x = \varphi(t))$$

#### b) Exemple:

E<sub>1</sub>) Calculons  $\int_0^x \frac{t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$

$$\int_0^x \frac{t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \left[ (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^x = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Autrement,

$$\text{On pose } 1-y^2 = \varphi(y) = t$$

$$\begin{aligned} \text{On aura } \int_0^x \frac{y}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} dy &= \int_0^x -\frac{1}{2} \varphi'(y) \cdot \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} dy \\ &= \int_1^{-x^2} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt = -\frac{1}{2} \left[ -2t^{-\frac{1}{2}} \right]_1^{-x^2} \\ &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$I(a), C(y) = 1 - y^2, y \in ]-1, 1[.$$

$$\in ]0; 1]$$

$$1 - y^2 = x \Leftrightarrow 1 - x = y$$

1<sup>er</sup> car si  $y \in ]-1, 0]$  et donc  $C$  est bijective.

~~$$\int \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} dy = -\frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt$$~~

$$\int^x \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} dy = -\frac{1}{2} \int^x \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} (1-y^2)' dy$$

$$= -\frac{1}{2} \int^x [F(1-y^2)]' dy \text{ avec } F$$

$$\text{est une primitive de } \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = f(t)$$

Calcul de  $F$

$$\int^x t^{\frac{1}{2}} dt = -2 \left[ t^{\frac{1}{2}} \right]^x = -2x^{\frac{1}{2}}, c$$

$$\text{Donc } \int^x \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} dy = -\frac{1}{2} [F(1-y^2)]^x$$

$$= -\frac{1}{2} [-2(1-y^2)^{\frac{1}{2}}]^x$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

La passage de ② → ① n'est pas un changement de variable (c'est une changement d'une fonction  $C(t)$  par une variable).

E) Calcul de  $\int^y \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$

Prenons le changement de variable  $x = \sin(t)$

$$\int^y \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx = \int^{C^{-1}(y)} \frac{\cos(t)}{(1-\sin^2 t)^{\frac{1}{2}}} dt$$

$$\sin \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$f(x) : ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$\int \frac{\arcsin(y)}{\cos(t)} dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$$= [\tan(t)] \arcsin(y) = \tan(\arcsin(y)) + C$$

$$= \frac{\sin(\arcsin(y))}{\cos(\arcsin(y))} + C = \frac{y}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}} + C$$

$$= \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + C$$

3) Primitive des fonctions rationnelles

a) 1<sup>ere</sup> situation:

$$\text{Soit } f(x) = \frac{ax^2 + b}{ax^2 + bx + c}$$

$$\text{Notons } \Delta = b^2 - 4ac$$

cas 1:  $\Delta > 0$  et donc  $x_1$  et  $x_2$  sont deux racines de  $ax^2 + bx + c$

$$\text{D'où } f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

$$\text{Donc } \int^y f(x) dx = A \int^y \frac{1}{x-x_1} + B \int^y \frac{1}{x-x_2}$$

$$= A \ln|x-x_1| + B \ln|x-x_2|, \quad x \in I,$$

cas 2:  $\Delta = 0$  et donc  $x_1$  est 1: une racine double de  $ax^2 + bx + c$

$$\text{d'où } f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + C$$

$$\int^y f(x) dx = \int^y \frac{A}{x-x_1} dx + \int^y \frac{B}{(x-x_1)^2} dx$$

$$= A \ln|x-x_1| - B \frac{1}{y-x_1} + C$$

cas 3:  $\Delta < 0$

$$\text{d'où } f(x) = A \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{ax^2+bx+c}$$

$$= A \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{Bx}{B^2(a+b)x^2 + 1}$$

$$P. \int^y f(x) dx = A \int^y \frac{2x+b}{ax^2+bx+c} dx + B_1$$

$$\Delta \quad \times \int^y \frac{1}{B_2((x+B_3)^2+1)} dx$$

$$= A \ln|ax^2+bx+c| + B_1$$

$$\int \frac{1}{t^2+1} dt \quad B_2(x+B_3)=t$$

$$-A \ln|ax^2+bx+c| + \frac{B_1}{B_2} \left[ \arctg(t) \right]^{B_2(y+B_3)}$$

$$P.C = \frac{t}{B_2} - B_3$$

$$= A \ln|ax^2+bx+c| + \frac{B_1}{B_2} \arctg(B_2(y+B_3))$$

L) 2ème situation:

$$(1) f(x) = \frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)(x-d)^k} \text{ avec } \deg(P) < k+2 \text{ et } k \geq 0$$

f(x) s'écrit sous la forme:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} + \frac{\alpha_1}{x-d} + \frac{\alpha_2}{(x-d)^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{(x-d)^k}$$

4) Calcul de primitive des fonctions trigonométriques:

soit  $f(x) = \frac{P(\cos x; \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}$  où

$P(t_1, t_2)$  et  $Q(t_1, t_2)$  sont deux polynômes en  $t_1$  et  $t_2$ .

Pour le calcul d'une primitive de  $f$ , on utilise suivant la situation, en général deux méthodes :

a) Règle de Bischle :

soit  $f(x) = -f(-x)$ , alors alors on effectue le changement de variable  $t = \cos x$

si  $f(x) = -f(\pi - x) \forall x \in D_f$ , alors on effectue le changement de variable  $t = \sin(x)$

si  $f(x) = f(\pi + x) \forall x \in D_f$ , alors on effectue le changement de variable  $t = \operatorname{tg}(x)$

Avec ces changements de variable, on se ramène au calcul de primitive d'une fonction rationnelle.

Exemple : soit  $f(x) = \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x}$

calcul de  $\int^x f(t) dt$

$$f(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)}{2 - \cos^2(\pi - x)} = \frac{-\cos(x)}{2 - \cos^2(x)} = -f(x)$$

On pose  $t = \sin x$ , et on aura

$$\int^x f(x) dx = \int^u \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx = \int^u \frac{(\sin x)'}{1 + \sin^2 x} dx$$

$$= [F(\sin x)]^u, \text{ avec } F \text{ une primitive de la fonction}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{1+x^2} \text{ c'est à dire } F(x) = \operatorname{arc tg}(x) + C$$

Propriétés ① et ② donnent

$$\int^u f(x) dx = \operatorname{arc tg}(\sin u) + C$$

b) le changement de variable  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

On se ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle (plus ou moins compliquée)

Ici, on utilise les formules suivantes

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\text{Exemple : } f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} \int^u f(x) dx &= \int^u \frac{2}{1+t^2} - \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}} dt \\ &= \int^{\operatorname{tg} \frac{u}{2}} \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+t^2-2t} \left\{ \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{2(1+t^2-2t)} \right\} dt \end{aligned}$$

Il reste le calcul d'une primitive de  $t \sim \frac{1}{t^2 - 2t + 1}$