

SERIE 2 : Représentation graphique et calcul de primitive

Exercice 1. Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition en précisant à chaque fois, en cas d'existence, leurs asymptotes et extrema

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}}, \quad f_2(x) = \frac{x}{1+\sqrt[3]{x}}, \quad f_3(x) = x^2[x], \quad f_4(x) = \begin{cases} x + 1e^2 - e^x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Exercice 2.

1. Calculer les primitives de la fonction $f(x) = \begin{cases} x + 1e^2 - e^x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$
2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \begin{cases} x^2[x], & \text{Si } x < 2; \\ 0, & \text{si } x = 2; \\ \frac{1}{2}x^3, & \text{si } x > 2. \end{cases}$
 - (a) Montrer que la fonction g n'admet pas de primitive sur $] -1; 2[$.
 - (b) La fonction g admet-elle une primitive sur l'intervalle $[1; 3[$?

Série 2 :

Exercice 1 :

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}}$$

$x \in D_{f_1} \Leftrightarrow 1-x \neq 0 \text{ et } x \neq 0$
 $\Rightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq 0$

$$\text{Donc } D_{f_1} =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

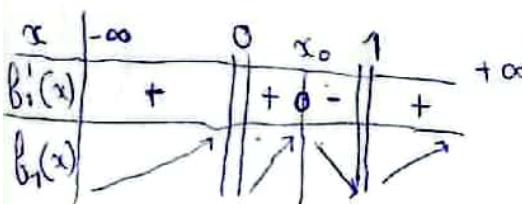
f_1 est combinaison de fonctions usuelles
donc elle est continue sur D_{f_1} .

f_1 est combinaison de fonctions usuelles,
donc elle est dérivable à l'intérieur
de D_{f_1} .

Calculons $f'_1(x)$, pour $x \in D_{f_1}$:

$$f'_1(x) = \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{16}{3x(x-1)}} + \left(\frac{1}{1-x} \right) \frac{(-6x+3)16}{9x^2(x-1)^2}$$

$$= \left[1 + \frac{(-6x+3)16}{9(1-x)x^2} \right] e^{\frac{16}{3x(x-1)}}$$

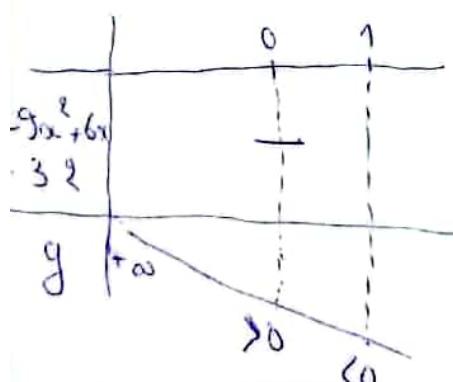


$$f'_1(x) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{(-6x+3)16}{9(1-x)x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 9(1-x)x^2 + [-6x+3]16 = 0$$

$$\Rightarrow -9x^3 + 9x^2 - 96x + 48 = 0$$

$$\Rightarrow -3x^3 + 3x^2 - 32x + 16 = 0$$



Précision des asymptotes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}} \\ (= \frac{1}{+\infty} e^{\frac{16}{+\infty}} = 0 \times e^0 = 0)$$

Donc Δ_1 : $y=0$ est une asymptote en $-\infty$ pour f_1 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}} \\ = \frac{1}{-\infty} e^{\frac{16}{+\infty}} = 0 \times e^0 = 0$$

Donc Δ_2 : $y=0$ est une asymptote en $+\infty$

pour f_1

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}} \\ = \frac{1}{1} e^{\frac{16}{3 \cdot 0^- (-1)}} = e^{\frac{16}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Donc Δ_3 : $x=0$ est une asymptote
pour f_1 (à gauche de 0) en 0^-

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}} \\ = \frac{1}{1} e^{\frac{16}{3 \cdot 0^+ (-1)}} = e^{\frac{16}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

Donc f_1 se prolonge par continuité à droite
en 0

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}} \\ (= \frac{1}{0^+} e^{\frac{16}{3 \cdot 0^- (-1)}} = +\infty \times e^{-\infty} = 0) \\ = (+\infty) \times 0 \quad F.$$

$$t = \frac{1}{1-x} \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$

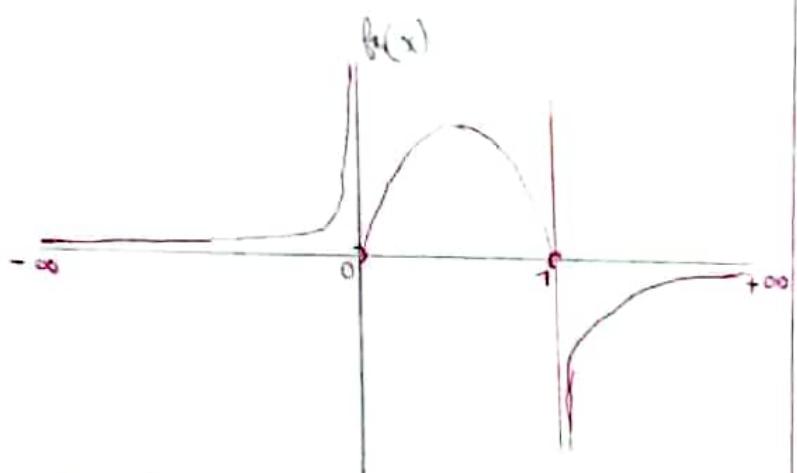
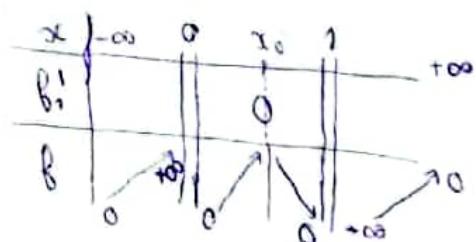
$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot e^{\frac{-16 \cdot t^2}{3(t-1)}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{\frac{16t^2}{3(t-1)}}}$$

$$= 0, \text{ car } e^{\frac{16t^2}{3(t-1)}} > t$$

Donc f_1 se prolonge par continuité à gauche
en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} e^{\frac{7x}{3(x-1)}} = \frac{1}{0^+} e^{\frac{7}{3} \cdot 0^+} \\ = (-\infty) \times e^{+\infty} \\ = +\infty \times +\infty = +\infty$$

Donc $\Delta_u: x=1$ est une asymptote pour C_{f_1} à droite de 1



. La précision de x_0 se fait pour la méthode de dichotomie est le T.V.I

$$4) f_4(x) = \begin{cases} x+1+e^2-e^x & \text{si } x < 2 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$Df_4 = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

sur $]-\infty; 2[$, f_4 est combinaison de fonctions usuelles donc elle est dérivable à l'intérieur c'est à dire sur $]-\infty; 2[$

sur $[2; +\infty[$ f_4 est combinaison de fonctions usuelles donc elle est dérivable à l'intérieur c'est à dire sur $[2; +\infty[$

- Il reste le problème de continuité est dérivable en 2.

Dérivabilité de f_4 en 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f_4(x) - f_4(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1+e^2-e^x - 3}{x-2} \\ (= \frac{3+e^2-e^2-3}{0^+} = \frac{0}{0} \text{ f.i.})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x-2}, \text{ avec } g(x) = x+1+e^2-e^x \\ \text{avec } g'(2) = 1-e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f_4(x) - f_4(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-1-3}{x-2} (= \frac{0}{0} \text{ f.i.}) \\ = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{h(x) - h(2)}{x-2} \text{ avec } h(x) = x^2-1 \\ = h'(2) = 4$$

Donc f_4 n'est pas dérivable en 2.

Au point $(2; f_4(2))$ la courbe (f_4) n'a pas de tangente.

f_4 est dérivable à gauche en 2 : C_{f_4} admet une demi-tangente en $(2; f_4(2))$ d'équation

$$T_h: \begin{cases} y = (1-e^2)(x-2) + 3 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Exercice 1:

$$3) f_3(x) = x^2(x)$$

$$Df_3 = \mathbb{R}$$

La fonction $x \rightarrow [x]$ est continue sur \mathbb{R} .

La fonction $x \rightarrow x$ est continue sur \mathbb{R} .

Donc f_3 est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Il reste la continuité sur \mathbb{Z} .

soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{On a } f_3(n) = n^2(n) = n^3$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} x^2(x) \\ = \lim_{x \rightarrow n^-} x^2 \times (n-1) \\ = (n-1) \lim_{x \rightarrow n^-} x^2 = (n-1) \cdot n^2$$

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f_3(x) = \lim_{n \rightarrow n^+} x^2[n] = \lim_{n \rightarrow n^+} n^2 \times n$$

$$= n \lim_{n \rightarrow n^+} n^2 = n \times n^2 = n^3$$

f_3 est continue en $n (=)$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f_3(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} f_2(x) = f_3(x)$$

$$\Rightarrow n^2(n-1) = n^3 = n$$

$$\text{Donc } n^3 = n^2(n-1)$$

$$\Rightarrow -n^2 = 0 \Rightarrow \boxed{n=0}$$

Conclusion: f_3 est continue en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$

f_3 est continue à droite en tout x dans \mathbb{R}^+

• Dérivabilité sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$

La fonction $x \rightarrow [x]$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$.

- La fonction $x \rightarrow x^2$ est dérivable sur \mathbb{R}

Donc f_3 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$.

Il reste la dérivabilité en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] - 0}{x} = 0$$

Cela veut

dire que f_3 est dérivable en 0 et $f'_3(0) = 0$

Pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$, on a

$$[f'_3(x)]_{x_0} = [x^2[x]]'_{x_0} = [x_0](x^2)'_{x_0}, \text{ car } x \rightarrow [x]$$

est constante près de x_0

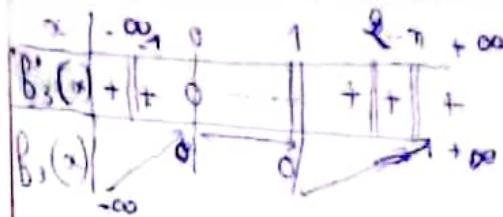
$$= [x_0] 2x_0$$

$$f'_3(x_0) = 0 \Rightarrow [x_0] 2x_0 = 0$$

$$\Rightarrow [x_0] = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

$$\Rightarrow [x_0] = 0, \text{ car } x_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow x_0 \in [0; 1[$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2[x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} n^2 \times n = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2[x] = \lim_{x \rightarrow 1^+} n^2 \times 1 = 1$$

(f_3 est continue à droite 3 en 1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2[x] = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x[x] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2[x] = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x[x] = +\infty$$

Donc f_3 admet une branche parabolique près de $-\infty$

f_3 admet une branche parabolique près de $+\infty$



Exercice 2:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x - e^2 & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x + e^x - e^2 + C_1 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + C_2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- F est continue sur $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$
(combinaison de fonctions continues)

Il reste la continuité en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2}x^3 + x + e^x - e^2 + C_1 \\ = 2 + 2 + 2e^2 - e^2 + C_1 = 4 + e^2 + C_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{3}x^3 - x + C_2 = \frac{8}{3} - 2 + C_2 \\ = \frac{2}{3} + C_2$$

$$F \text{ est continue en } 2 \Leftrightarrow 4 + e^2 + C_1 = \frac{2}{3} + C_2$$

$$C_1 = C_2 + \frac{2}{3} - 4e^2$$

de donc $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x + e^x - e^2 + \frac{2}{3} - 4e^2 + C_2 & x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + C_2 & x \geq 2 \end{cases}$

$$= C_2 + \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + (1 + e^2)x - e^x - \frac{10}{3} & x < 2 \\ - e^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

DP $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x & \\ \end{cases}$

puisque $f(x)$ est continue sur \mathbb{R} , alors elle

possède des primitives sur \mathbb{R} donc

les primitives de f sont données par (*)

DR

c'est

- J.

d

Exercice 2.

$$1) f(x) = \begin{cases} x+1 + e^x - e^x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

soit F est une primitive de f sur \mathbb{R}
alors

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x + C_1 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + C_2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Continuité de F en 2 .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x + C_1 \\ = \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot e^2 - e^2 + C_1 \\ = -4 + e^2 + C_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{3}x^3 - x + C_2 \\ = \frac{8}{3} + 2 + C_2 = \frac{2}{3} + C_2 = f(2)$$

$$\text{On doit avoir } f(2) = \frac{10}{3} + e^2 + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} + C_2 = \frac{10}{3} + e^2 + C_1$$

$$\Rightarrow C_2 = 4 + e^2 + C_1$$

$$\text{Donc } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x + C_1 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + 4 + e^2 + C_1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Dérivabilité de F en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x + C_1}{x - 2} \\ = -\frac{8}{3} + 2 - 4 - e^2 - C_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x - \frac{10}{3} - e^2}{x - 2} \\ = [x^2 + 1 + e^x - e^x](2) \\ = 4 + e^2 - e^2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$$

$$= \frac{4}{3} + e^2 - C_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}, \text{ avec } g$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 4 + e^2 + C_1$$

$$= g'(2) = [x^2 - 1](2) = 3$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = 3$$

Donc F est dérivable en 2

Conclusion : les primitives de f sur \mathbb{R} sont données par

$$F(x) = C_1 + \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + 4 + e^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2a) Les primitives éventuelles de f sont données par

$$F(x) = ?$$

$$\text{On a } f(x) = x^2 [x] \quad x \in]-1, 2[\\ = \begin{cases} -x^2 & -1 < x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Donc } F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + C_1 & -1 < x < 0 \\ C_2 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Continuité de F en 0 et 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{3}x^3 + C_1 = C_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = C_2 = F(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0) \Rightarrow C_1 = C_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} C_2 = C_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1) = \frac{1}{3} + C_3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3} + C_3$$

Donc F est continue en 0 et 1 lorsque

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + C_1 & -1 < x < 0 \\ C_1 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_1 - \frac{1}{3} & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Dérivabilité de F en 0 et 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{C_2 - C_1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + C_1 - \frac{1}{3} \right)' \right](1) = [x^2](1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

Donc F n'est pas dérivable en 1

D'où f n'admet pas de primitive sur $]-1; 2[$

b) un travail pareil pour répondre par oui ou non

Exercice 3 :

1) $f_1(x) = x e^{-x^2}$ est continue sur \mathbb{R}
donc f_1 admet des primitives F sur \mathbb{R}
($D_F = \mathbb{R}$)

Calcul de $F(x)$

$$F(x) = \int_x^\infty f_1(t) dt = \int_x^\infty t e^{-t^2} dt = \int_x^\infty \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]' dt = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C_1$$

$$2) f_2(x) = \frac{1}{x \sqrt{\ln(x)}}$$

$x \in Df_2 \Rightarrow x \neq 0$ et $x > 0$ et $\ln(x) > 0$

$$\Rightarrow x > 0 \text{ et } x > 1 \Rightarrow x > 1$$

$$Df_2 =]1; +\infty[$$

f_2 est continue sur $]1; +\infty[$ donc f_2 admet des primitives F_2 sur $]1; +\infty[$

$$F_2(x) = \int_1^x f_2(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t \sqrt{\ln(t)}} dt = \int_1^x t^{-1} (\ln(t))^{-\frac{1}{2}} dt = \int_1^x 2 \left[\ln^{\frac{1}{2}}(t) \right]' dt = 2 \ln^{\frac{1}{2}}(x) + C_2$$

Exercice 4 :

$$1) f_1(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$Df_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]1, +\infty[$$

f_1 est continue sur $]-\infty, -1[$, donc

f_1 admet des primitives F_1 sur $]-\infty, -1[$

Calcul de $F_1(x)$

$$F_1(x) = \int_x^\infty f_1(t) dt = \int_x^\infty \frac{t}{t+1} dt = \int_x^\infty \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left[t - \ln(1+t) \right]_x^\infty = x - \ln(1+x) = x - \ln(-1-x)$$

$$2) f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$Df_2 = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

f_2 est continue sur $]-\infty, -2[$, donc

f_2 admet des primitives F_2 sur $]-\infty, -2[$

Calcul de $F_2(x)$

$$F_2(x) = \int_x^\infty f_2(t) dt = \int_x^\infty \frac{1}{t^2 - 4} dt = \int_x^\infty \frac{1}{(t-2)(t+2)} dt = \int_x^\infty \left(\frac{a}{t-2} + \frac{b}{t+2} \right) dt = \frac{1}{4} \int_x^\infty \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} [\ln|x-2| - \ln|x+2|]^2 \\
 &= \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) = \frac{1}{4} (\ln(-x+2) \\
 &\quad - \ln(-x-2)) \\
 &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)
 \end{aligned}$$

f_2 admet aussi des primitives G_2 sur $]-2, 2[$ qui sont données par

$$\begin{aligned}
 G_2(x) &= \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + b_2 \\
 &= \frac{1}{4} (\ln(-x+2) - \ln(x+2)) + c_3 \\
 &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right) + b_3
 \end{aligned}$$

Aussi f_2 admet des primitives E_2 sur $]2, +\infty[$ qui sont données par

$$\begin{aligned}
 E_2(x) &= \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + a_2 \\
 &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + a_2
 \end{aligned}$$

Remarque :

f_2 admet des primitives sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

noter H_2 , qui sont données par

$$H_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + c_2 & x < 2 \\ \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right) + b_2 - 2 & 2 < x \leq 2 \\ \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + a_2 & x > 2 \end{cases}$$

Exercice 5 :

$$1) f_1(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$Df_1 = \mathbb{R}$$

f_1 est combinaison de fonction f_2 usuelles, donc f_1 est continue sur Df_1 .
Donc f_1 admet des primitives sur \mathbb{R} .

noter F_1

calcul de $F_1(x)$

$$F_1(x) = \int x \frac{1}{e^x + 1} dt$$

Méth Prendons $e^t = y$ ($t = \ln(y)$)

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \int e^x \frac{1}{e^{\ln(y)} + 1} \times \frac{1}{y} dy \\
 &= \int e^x \frac{1}{(y+1)y} dy = \int e^x \left(\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y}\right) dy \\
 &= [-\ln|y+1| + \ln|y|]^{e^x} = -\ln|e^x + 1| + \ln|e^x| \\
 &= -\ln(e^x + 1) + x
 \end{aligned}$$

$$2) f_2(x) = \frac{1}{x+2\sqrt{x}}$$

Prenons $\sqrt{x} = t$ ($x = t^2$)

$$3) f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

Prenons $t = \sqrt{1+e^x}$ ($x = \ln(t^2 - 1)$)

$$4) f_4(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Prenons $\sqrt{x^2+1} = t$ ($x = (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$)

Exercice 6 :

$$4) f_4(x) = \ln(\sqrt[3]{x} - 1)$$

$$x \in Df_4 \Rightarrow \sqrt[3]{x} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x} > 1 \Rightarrow x > 1$$

Donc $Df_4 =]1, +\infty[$.

f_4 est combinaison de fonctions usuelles
donc elle est continue sur Df_4 .

Donc f_4 possède une primitive F_4 sur $]1, +\infty[$
soit $x \in]1, +\infty[$.

$$F_4(x) = \int_1^x f_4(t) dt = \int_1^x \ln(\sqrt[3]{t} - 1) dt$$

$$\text{On pose } y = \sqrt[3]{t} \Rightarrow t = y^3$$

$$= 3 \int_{\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln(y-1) \cdot y^2 dy$$

une intégration par parties

$$(u(y) = \ln(y-1) \text{ et } v(y) = y^2)$$

donne

$$F_4(x) = 3 \left[\left[\ln(y-1) \cdot \frac{y^3}{3} \right]_{\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} \int_{\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x}} \frac{y}{y-1} dy \right]$$

$$= x \ln(\sqrt[3]{x} - 1) - \int_{\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x}} \frac{y}{y-1} dy$$

$$= x \ln(\sqrt[3]{x} - 1) - \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{1}{y-1} dy - \int_{\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x}} \frac{1}{y-1} dy$$

$$= x \ln(\sqrt[3]{x} - 1) - \sqrt[3]{x} - [\ln(y-1)]_{\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x}}$$

$$= x \ln(\sqrt[3]{x} - 1) - \sqrt[3]{x} - \ln(\sqrt[3]{x} - 1)$$

1) Intégration par parties ($u(x) = x$ et $v'(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}}$)

2) Changement de variable ($t = \sqrt{2x+1}$
ou $x = \frac{t^2-1}{2}$)

3) Changement de variable ($t = \sqrt{x+1}$
 $x = t^2 - 1$)

Exercice 7.

$$1) f_1(x) = \frac{[\alpha]}{x}$$

$$x \in Df_1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$Df_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

La fonction: $x \rightarrow [\alpha]$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Donc f_1 est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Calcul d'une primitive F_n de f_1 sur

$$]n, n+1[\quad (n \in \mathbb{Z} \text{ fixé})$$

soit $\exists x \in]n, n+1[$

$$F_n(x) = \int_1^x f_1(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt \\ = n \cdot \int_1^x \frac{1}{t} dt = n \ln|x| + c_n$$

Question: f_1 admet-elle une primitive sur $]0, 2[$?

Si f_1 aussi une primitive F sur $]0, 1[$,
on distingue

$$F(x) = \begin{cases} c_0 & 0 < x < 1 \\ \ln|x| + c_1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Il reste la possibilité la continuité et la
dérivabilité de F en 1.

$$F \text{ est continue en 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) \\ \Rightarrow c_0 = c_1$$

$$\text{Donc } F(x) = \begin{cases} c_0 & 0 < x < 1 \\ \ln|x| + c_0 & 1 < x < 2 \\ c_0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{c_0 - c_0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = [\ln'(x)](1) \\ = \left[\frac{1}{x}\right](1) = 1$$

F n'est pas dérivable en 1 car

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x-1}$$

D'où F n'existe pas c'est à dire f_1 n'a pas
de primitive sur $]0, 2[$

$$?) f_2(x) = \frac{|x+1|}{|x|+1}$$

$$Df_2 = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

f_2 est combinaison de fonctions usuelles, donc elle est continue sur \mathbb{R} .
D'où f_2 possède une primitive F_2 sur \mathbb{R} sauf $x \in \mathbb{R}$.

$$F_2(x) = \int^x f_2(t) dt = \int^x \frac{|t+1|}{|t|+1} dt$$

On va continuer le calcul pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$



1^{er} cas: $x \in]-\infty; -1[$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int^x \frac{-t-1}{-t+1} dt = \int^x 1 dt - \int^x \frac{2}{-t+1} dt \\ &= x - 2 \left[-\ln|-t+1| \right]^x = x + 2 \ln|-x+1| \\ &= x + 2 \ln(1-x) \end{aligned}$$

2^{eme} cas: $x \in]-1, 0[$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int^x \frac{t+1}{-t+1} dt = - \int^x \frac{-t-1}{-t+1} dt \\ &= - \int^x 1 dt + 2 \int^x \frac{1}{-t+1} dt \\ &= -x + 2 \left[-\ln|-t+1| \right]^x \\ &= -x + 2 \ln|-x+1| = -x - 2 \ln(1-x) \end{aligned}$$

3^{eme} cas: $x \in]0, +\infty[$

$$F_2(x) = \int^x \frac{t+1}{t+1} dt = \int^x 1 dt = x$$

$$\text{Donc } F_2(x) = \begin{cases} x + 2 \ln(1-x) & x < -1 \\ -x - 2 \ln(1-x) & -1 < x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Question: soit } f(x) = \begin{cases} x \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}}$$

Vérifier que f est continue sur \mathbb{R} pour calculer une primitive de f sur \mathbb{R} .

Exercice 8.

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^t dt$$

$$\begin{aligned} &\text{une intégration par parties (u = e^t \text{ et } v' = t^n)} \\ &\text{donc } I_n(x) = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} e^t \right]_0^x t^{n+1} \cdot e^t dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} e^x - \frac{1}{n+1} I_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Pour $x=1$, on aura:

$$I_n(1) = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}(1)$$