Faculté des Sciences de Gabès Université de Gabès	FSG كلية العلوم بقابس Faculté des Sciences de Gabès	A.U : 2023-2024

Section : LGLSI 1	Session :
Date de l'épreuve : 15-11-2023	Documents : autorisés ☒ non autorisés ☐
Durée de l'épreuve : 1h	Calculatrice : autorisée ☒ non autorisée ☐

D.C. : S1

Barème : Exercice 1 : 05 points, Exercice 2 : 10 points, Exercice 3 : 05 points.

Exercice 1. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-[x]} = 0.$$

Ici, $[x]$ désigne la partie entière de x.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui vérifie

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

On suppose que $f(0) > 0$.

1. On suppose, par l'absurde, qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.
   (a) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \geq 0$, $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$.
   (b) En déduire que $f(0) = 0$.
   (c) Conclure.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$.
3. Déterminer l'expression qui définie la fonction $f(x)$.

Exercice 3.

1. Déterminer le paramètre réel a pour que la fonction $f_a(x) = a \cdot [x] + x^2 e^{-[x]}$ soit continue en 1. Notons a_1 ce paramètre.
2. Calculer la primitive de la fonction $f_{a_1}(x)$ sur l'intervalle $]0; 2[$ qui s'annule en 1.