Logique Formelle
Chapitre 02: Logique proportionnelle
Partie 01

Ikram Troudi

Niveau : LGSI 1

Faculté des Sciences de Gabés (FSG)

Introduction

- Une proposition est une expression soit vraie soit fausse
- Des propositions peuvent être combinées entre elles par des connecteurs logiques
- La signification d'une telle combinaison est déterminée par la signification des propositions impliqué
- Le but de toute activité scientifique est de distingue parmi les propositions celles qui sont vraies et celles qui sont fausses

Exemple

- Une tomate est un fruit
- Une orange est un fruit
- Les oranges ne sont pas le seul fruit

Introduction

- **Raisonner** c'est déterminer la valeur de vérité de proposition construites en combinant entre des propositions dont les valeurs de vérité sont déjà connues.
- **Le calcul proportionnel** s'intéresse uniquement à la façon dont les propositions sont liées entre elles, et aux conséquences qu'on peut en tirer quant à leur valeur de vérité.

→ Il ne s'intéresse pas du tout à leur signification

Syntaxe

- Le vocabulaire du langage de la logique propositionnelle est composé de :
- un ensemble, fini ou dénombrable, de propositions notées: P, Q, R,…
- deux constantes : vrai (V) et faux (F)
- un ensemble de connecteurs logiques: Non, Et, Ou, Implication et Equivalence
- des parenthèses : (,)

Syntaxe

Connecteurs logiques

Négation: Non	(noté: $\neg$)
Conjonction : Et	(noté: $\wedge$)
Disjonction : Ou	(noté: $\vee$)
Conditionnel : Si… Alors	(note: $\rightarrow$)
Equivalence : Si et Seulement Si	(noté: $\leftrightarrow$)

Les connecteurs logiques

Négation, conjonction , disjonction , implication & équivalence.

Négation

❖ Noté:

❖ Table de vérité:

La négation du P est noté non(P) qui:

- est vrai lorsque P est faux,
- est faux lorsque P est vrais

P	(P)
V	
F	

Exemple:

- P = « 24 est un multiple de 2 » est vraie (V). Le non(P) est défini par :

  non(P) = « 24 n'est pas un multiple de 2 ».

  C'est une fausse (F)

Conjonction

- Noté:

- Table de vérité

« P et Q », appelé :

- est vrai lorsque P et Q sont vrais simultanément
- est faux dans tous les autres cas.

P	Q	P et Q
V	V	
F	V	
V	F	
F	F	

Les connecteurs logiques

Négation, conjonction , disjonction , implication & équivalence.

Disjonction

❖ Noté:

❖ Table de vérité

P	Q	P ou Q
V	V	
F	V	
V	F	
F	F	

« P ou Q », appelé :

- est vrai lorsque l'un au mois des deux P et Q est vrais
- est faux lorsque les deux sont faux.

Les connecteurs logiques

Négation, conjonction , disjonction , implication & équivalence.

Exemple:

Considérons P et Q suivantes :

- P = « 10 est divisible par 2 »,
- Q=« 10 est divisible par 3 ».

P est vraie tandis que Q est fausse.

- P et Q=« 10 est divisible par 2 et 10 est divisible par 3 »,
- P ou Q=« 10 est divisible par 2 ou 10 est divisible par 3 ».

« P et Q » est fausse.

« P ou Q » est vraie.

Implication

- Noté :

- Table de vérité :

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	
F	V	
V	F	
F	F	

« $P \rightarrow Q$ » appelé
est définie:

- est faux lorsque P est vrai et Q faux,
- est vrai dans tous les autres cas.

Implication

Exemple 1: Cas où p est vraie

- « s'il pleut, le sol est mouillé »
- p: «il pleut »
- q: «le sol est mouillé »

- On suppose que p est vraie et on essaye de prouver que q est vraie
- Si la conséquence q est vraie, donc p→ q est
- Si la conséquence q est fausse, donc p →q est

Exemple 2: Cas où p est Faux

- Si je mange des légumes, alors je mange sainement
- P : " je mange des légumes."
- Q : "Je mange sainement. "

- On suppose que P est faux : Je n'ai pas mangé de légumes. Alors Q est vrai : Je mange sainement (peut-être parce que j'ai mangé d'autres aliments sains).
- Si la conséquence p est faux, donc p→ q est

Les connecteurs logiques

Négation, conjonction , disjonction , implication & équivalence.

Implication

- Théorème: $P \rightarrow Q = (\neg P) \vee Q$
- Démonstration:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
V	V			
F	V			
V	F			
F	F			

Implication

Exercice:

- Quelles sont les valeurs de vérité de propositions suivantes

1. « la somme des angles d'un triangle vaut 180° implique que la somme des angles d'un rectangle vaut 360° »
2. « π vaut 3,14 implique que la somme des angles d'un triangle vaut 182°»
3. « si 7 est plus grand que 8 alors l'eau bout à 100° C »
4. « si 3 est plus petit que 4 alors 4 est plus petit que 3 »
5. « si 4 est plus petit que 3 alors 3 est plus petit que 4 »
6. « 82 est divisible par 7 implique que π vaut 3,14 »

Equivalence

- Noté :
- Table de vérité :

« P↔Q » appelé équivalence de P et de Q est un prédicat qui:

- est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrai ou faux,
- est faux dans tous les autres cas.

On résume ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	
F	V	
V	F	
F	F	

- $(P \rightarrow Q)$et $(Q \rightarrow R)$ se note: $P \rightarrow Q \rightarrow R$.
- $(P \leftrightarrow Q)$ et $(Q \leftrightarrow R)$ se note: $P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R$.

Equivalence

- Théorème : $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Démonstration

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
V	V				
F	V				
V	F				
F	F				

Forme propositionnelle

Définition

Une forme propositionnelle (ou formule propositionnelle) est construite selon des règles, ou l'on retrouve , et des symboles de variables propositionnelles.

Remarques:

- Une proposition est une forme propositionnelle
- Si p est alors p écrit tout seul est .
- Si p et q sont deux formes propositionnelles il en est de même de (p∧q) et de (p∨q)
- Si p est une forme propositionnelle, il en est de même de (¬p)

Forme propositionnelle

Table de vérité

Dans une forme propositionnelle, quand en remplace les variables par des propositions, on obtient une proposition, La valeur de vérité de cette proposition ne dépend que des valeurs de vérité de cette proposition ne dépond que des valeurs de vérité des propositions qui été substituées

Exercice:

Evaluer les valeurs de vérité de l'expression : $(\neg(P \rightarrow Q) \wedge R)$

Note :si on a n variables il faut prévoir une table contenant 2^n lignes

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$\neg(P \rightarrow Q)$	$(\neg(P \rightarrow Q) \wedge R)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

Forme propositionnelle

Table de vérité

Les formes propositionnelles peuvent être combinées entre elles au moyen des connecteurs et on obtient des formes propositionnelles de plus en plus compliquées.

Exemple 1: Soient $f(P,Q)=P\wedge Q$ et $g(P,R)=P\wedge(\neg R)$

Déterminer la table

de vérité de **$f \vee g$**

P	Q	R	$\neg R$	$f=P\wedge Q$	$g=P\wedge(\neg R)$	$f \vee g$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Forme propositionnelle

Table de vérité

Exercice1:

1/ Combien de lignes contient la table de vérité d'une forme propositionnelle qui dépend de n variables ?

2/ A l'aide de deux propositions p et q on peut construire une autre, notée p q, bâtie sur le modèle : « ni p , ni q ». Cette opération est-elle une connexion ? Si oui quelle est sa table de vérité ?

Table de vérité

Exercice1:

Représenter la table de vérité de chaque forme propositionnelle

1/ $(\neg P) \vee Q$

2/ $(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$

3/ $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$ 4/ $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

5/ $(P \rightarrow (\neg Q)) \wedge (Q \rightarrow (\neg P))$

6/ $P \rightarrow (\neg P) \vee P)$

7/ $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q))$

Forme propositionnelle

Modèle

Définition

Un choix des valeurs de vérité des variables qui donne une proposition s'appelle de la forme propositionnelle.

- Dans l'exemple précédent, le choix de V pour p, F pour q et V pour r est un modèle pour la forme propositionnelle.
- On dit que des formes propositionnelles sont si elles ont au moins .
- On dit que des formes propositionnelles sont quand elles n'ont .

Tautologie

Définition

- Une est une formule qui est vraie dans toutes les interprétations possibles

- Sa colonne de la formule complexe dans sa table ne contient que de .

- En tant que forme propositionnelle, une proposition vraie est une tautologie.

- Une est une formule qui n'est vraie dans aucune interprétation possible.

- Sa colonne de la formule complexe dans sa table ne comporte que des .

- En tant que forme propositionnelle, une proposition fausse est une antilogie.

- On dit aussi une .

Tautologie

Exemples

$(\neg P) \vee P$

$(\neg P) \wedge P$

P	¬ P	(¬ P) ∨ P
V	F	
F	V	

P	¬ P	(¬ P) ∨ P
V	F	
F	V	

Tautologie

Exercice: Montrer que les formules suivantes sont ou non des tautologies ?

1/ $(P \lor Q) \rightarrow (P \land Q)$

2/ $(P \land Q) \rightarrow (P \lor Q)$

3/ $P \rightarrow (\neg P \lor P)$

4/ $P \rightarrow (\neg P \land P)$

5/ $P \rightarrow (\neg P \rightarrow P)$

6/ $(P \land (\neg Q)) \lor (P \land Q)$

7/ $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow R) \land (R \rightarrow Q))$

Forme propositionnelle

Tautologie

Définition:

Si f et g deux formes propositionnelles, on dit que g est conséquence de f, ou encore g se déduit de f si

- On écrit alors: f   g
- Le symbole n’est pas un connecteur
- est un symbole d'une relation (g est une conséquence de f)

Tautologie

Théorème :

- La forme propositionnelle g est une conséquence de la forme propositionnelle de f si tout modèle de f est aussi un modèle de g

- En effet : si prend toujours la valeur V cela signifie que f ne prend pas la valeur V quand g prend la valeur F

Conséquence logique

Exemple 1:

Si P implique Q et si Q implique R, alors P implique ,

Soient: $f(P,Q,R)= (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ et

$g(P,R)= P \rightarrow R$

Montrer que $f \vDash g$

Forme propositionnelle

Conséquence logique

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(Q \rightarrow R)$	f	$g = P \rightarrow R$	$f \vDash g$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Conséquence logique

Exemple 2:

Montrer que $(P \wedge (P \rightarrow Q))$ à pour conséquence Q

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \rightarrow Q))$	$(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Conclusion:

Conséquence logique

Exemple 3:

Montrer que $(\neg P)$ est une conséquence $(\neg Q) \wedge (P \rightarrow Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$(\neg Q) \wedge (P \rightarrow Q)$	$((\neg Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg P)$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Conclusion:

Forme propositionnelle

Synonymes logique

Définition: On dit que deux formes propositionnelles sont quand elles ont .

Exemple : $(P \rightarrow Q)$ et $((\neg Q) \rightarrow (\neg P))$ sont synonymes

P	Q	¬P	¬Q	P → Q	(¬Q) → (¬P)
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Remarque: La proposition $(\neg Q) \rightarrow (\neg P)$ s'appelle la de $P \rightarrow Q$

Forme propositionnelle

Classe propositionnelle

Soient C et D deux classes dont on présente que la dernière colonne.

C	D	¬ C	C ∧ D	C∨ D
V	V	F	V	V
F	F	V	F	F
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F
F	V	V	F	V

Forme propositionnelle

Propriétés propositionnelles

Idempotence

- $C1 \lor V = V$
- $C1 \land V = C1$
- $C1 \lor F = C1$
- $C1 \land F = F$
- $C1 \lor C1 = C1$
- $C1 \land C1 = C1$

Distributivité

- $C1 \lor (C2 \land C3) = (C1 \lor C2) \land (C1 \lor C3)$
- $C1 \land (C2 \lor C3) = (C1 \land C2) \lor (C1 \land C3)$
- $C1 \land (C5 \lor C8 \lor C1 \lor C2) = C1$
- $C1 \lor (C5 \land C8 \land C1 \land C2) = C1$

Forme propositionnelle

Propriétés propositionnelles

Loi de la double négation

- $C1 \vee (\neg\, C1) = V$
- $C1 \wedge (\neg\, C1) = F$
- $\neg\, (\neg\, (C1) = C1$
- $\neg\, F = V$

Lois de Morgan

- $\neg(C1 \vee C2) = (\neg\, C1) \wedge (\neg\, C2)$
- $\neg(C1 \wedge C2) = (\neg\, C1) \vee (\neg\, C2)$