Serie 3 : Espaces vectoriels

Exercice 1 :

1) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+3z=0\}$

E_1 s.e.v de $\mathbb{R}^3$?

$\begin{cases} \cdot E_1 \neq \emptyset \quad 0_{\mathbb{R}^3} \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq 0 \\ \qquad 0_{\mathbb{R}^3} \notin E_1 \Rightarrow E_1 \text{ n'est pas un s.e.v de } \mathbb{R}^3 \\ \cdot X \in E_1,\ Y \in E_1 \quad X+Y \in E_1 \\ \cdot \alpha \in \mathbb{R},\ X \in E \quad \alpha . X \in E_1 \end{cases}$

$\cdot\ 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E_1$ car $0+0+3\times0 = 0$

$\Rightarrow E_1 \neq \emptyset$

$\cdot$ Soient : $X = (x,y,z) \in E_1 \Rightarrow x+y+3z = 0$

$Y = (a,b,c) \in E_1 \Rightarrow a+b3c = 0$

$X+Y = (x+a, y+b, z+c)$

$(x+a)+(y+b)+3(z+c) =$

$\underbrace{(x+y+3z)}_{0} + \underbrace{(a+b+3c)}_{0} = 0$

$\Rightarrow X+Y \in E_1$

$\cdot$ soient : $\alpha \in \mathbb{R}$

$X = (x,y,z) \in E_1$

$\Rightarrow x+y+3z = 0$

$\alpha X = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

on a $\alpha x + \alpha y + 3\alpha z = \alpha(x+y+3z)$

$= 0$

$\Rightarrow \alpha . x \in E_1$

cl : E_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

2) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+3z = 2\}$

$\cdot\ 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin E_2$ car $0+0+3\times0 \neq 2$

$\Rightarrow E_2$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

4) $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x\,y = 0\}$

$(0,1) \in E_4$

$(1,0) \in E_4$

$(0,1)+(1,0) = (1,1) \notin E_4 \Rightarrow E_4$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

6) $E_6 = \{P \in \mathbb{R}[x] / P(1) = 0\}$

poly

$\cdot\ 0_{\mathbb{R}[x]} : \tilde{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 0$

$\tilde{0}(1) = 0 \Rightarrow \tilde{0} \in E_6 \Rightarrow E_6 \neq \emptyset$

$\cdot$ soient $P_1 \in E_6 \Rightarrow P_1(1) = 0$

$P_2 \in E_6 \Rightarrow P_2(1) = 0$

$(P_1+P_2)(1) = P_1(1) + P_2(1) = 0$

$\Rightarrow P_1 + P_2 \in E_6$

$\cdot$ Soient $\alpha \in \mathbb{R}$

$P \in E_6 \Rightarrow P(1) = 0$

$(\alpha P)(1) = \alpha . P(1) = 0$

$\Rightarrow \alpha . P \in E_6$

cl : E_6 est un s.e.v de $\mathbb{R}[x]$

Ex2 :

$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 3z = 0\}$

1) Mq G est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$?

- $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in G$ car $0+0-3.0=0$
  $\Rightarrow G \neq \emptyset$
- soient $X = (x,y,z) \in G \Rightarrow x+y-3z=0$
  $Y = (a,b,c) \in G \Rightarrow a+b-3c=0$

$X+Y = (x+a, y+b, z+c)$

on a $x+a+y+b-3(z+c)$
$= x+y-3z + \underbrace{a+b-3c}_{0} = 0$

$\Rightarrow X+Y \in G$

. soient $\alpha \in \mathbb{R}$
$X = (x,y,z) \in G \Rightarrow x+y-3z=0$
$\alpha . X = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
$\alpha x + \alpha y - 3\alpha z = \alpha(\underbrace{x+y-3z}_{0}) = 0$
$\Rightarrow \alpha . X \in G$

conclusion : G est s.e.v de $\mathbb{R}^3$

2) base de G

. soit $(x,y,z) \in G \Rightarrow x+y-3z=0$
$\Rightarrow x = -y+3z$
$\Rightarrow (x,y,z) = (-y+3z, y, z)$
$= (-y, y, 0) + (3z, 0, z)$
$= y\underbrace{(-1,1,0)}_{a} + z\underbrace{(3,0,1)}_{b}$

$\Rightarrow (a,b)$ est une famille generatrice de G.

. (a,b) libre ?
soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \alpha a + \beta b = 0$
$\alpha(-1,1,0) + \beta(3,0,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow (a,b)$ est libre dans G

Rq : n'est pas libre = liée

cl : (a,b) est une famille generatrice et libre de G $\Rightarrow$ (a,b) base de G
dimension de G = dim G = 2

Ex 3 :

$F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] / P(1) = 0\}$

$\mathbb{R}_2[x]$: poly de d° ≤ 2
$ax^2 + bx + c$

1) $\tilde{0}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\tilde{0}(1) = 0 \Rightarrow \tilde{0} \in F$

. soient $P \in F \Rightarrow P(1) = 0$
$Q \in F \Rightarrow Q(1) = 0$

$(P+Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0$
$\Rightarrow P+Q \in F$

. soit $\alpha \in \mathbb{R}$
$P \in F \Rightarrow P(1) = 0$
$(\alpha P)(1) = \alpha P(1) = \alpha . 0 = 0$
$\Rightarrow \alpha . P \in F$

cl : F est un s.e.v de $\mathbb{R}_2[x]$

Rq : $\mathbb{R}_2[x]$ est un e.v
. dim $\mathbb{R}_2[x] = 3$

$(1, x, x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ dite la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$

2) base de F :

soit $P \in F \Rightarrow P(1)=0$

$P = ax^2+bx+c$

$P(1)=0 \Rightarrow a(1)^2+b(1)+c=0$

$\Rightarrow a+b+c=0$

$\Rightarrow c=-a-b$

$\Rightarrow P = ax^2+bx-(a+b)$

$= a(x^2-1)+b(x-1)$

$\Rightarrow (x^2-1, x-1)$ est une famille génératrice de F

$(x^2-1, x-1)$ est libre ?

$\alpha(x^2-1)+\beta(x-1)=0$

$\alpha x^2-\alpha+\beta x-\beta=0$

$\alpha x^2+\beta x-\alpha-\beta=0$

$\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ -\alpha-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0$

$\Rightarrow (x^2-1, x-1)$ est libre de F

Cl : $(x^2-1, x-1)$ est une base de F

$\Rightarrow \dim F = 2$

Exercice 8 :

$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y=0 \text{ et } z-t=0\}$

1)

2) soient $(x,y,z,t) \in F$

$\Rightarrow x-y=0$ et $z-t=0$

$x=y$ et $z=t$

$\Rightarrow (x,y,z,t)=(x,x,z,z)$

$=(x,x,0,0)+(0,0,z,z)$

$= x\underbrace{(1,1,0,0)}_{a}+z\underbrace{(0,0,1,1)}_{b}$

$\Rightarrow (a,b)$ est une famille génératrice de F

$\cdot (a,b)$ libre ?

$\alpha a+\beta b=0$

$\Rightarrow \alpha(1,1,0,0)+\beta(0,0,1,1)=(0,0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+0=0 \\ \alpha+0=0 \\ \beta+0=0 \\ \beta+0=0 \end{cases} \quad \alpha=\beta=0$

$\Rightarrow (a,b)$ est libre

Cl : (a,b) est une base de F

$\dim F = 2$

3) $\dim \mathbb{R}^4 = 4$

$\dim F = 2$

base canonique de $\mathbb{R}^4$: (c_1, c_2, c_3, c_4)

$c_1=(1,0,0,0)$

$c_2=(0,1,0,0)$

$c_3=(0,0,1,0)$

$c_4=(0,0,0,1)$

$\underbrace{(c_1, c_2, c_3, c_4)}_{\text{libre}}$ base de $\mathbb{R}^4$

Exercice 6 :

1) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-z=0 \text{ et } x-y-z=0\}$

Mq E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E$ car : $0+0-0=0$ et $0-0-0=0$

$E \neq \emptyset$

soient : $X = (x,y,z) \in E \Leftrightarrow x+y-z=0$ et $x-y-z=0$

$Y = (a,b,c) \in E \Rightarrow a+b-c=0$ et $a-b-c=0$

$X+Y = (x+a, y+b, z+c)$

$(x+a)+(y+b)-(z+c) = \underbrace{(x+y-z)}_{0} + \underbrace{(a+b-c)}_{0} = 0$

et

$(x+a)-(y+b)-(z+c) = \underbrace{(x-y-z)}_{0} + \underbrace{(a-b-c)}_{0} = 0$

• soient $\alpha \in \mathbb{R}$

$X = (a,b,c) \in E \Rightarrow a+b-c=0$ et $a-b-c=0$

$\alpha . X = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$

$(\alpha a)+(\alpha b)+(\alpha c) = \alpha(a+b-c) = 0$

et

$(\alpha a)-(\alpha b)-(\alpha c) = \alpha(a-b-c) = 0$

Alors $\alpha X \in E$

d : E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2) Base de E

soit $(x,y,z) \in E \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 & (1) \\ x-y-z=0 & (2) \end{cases}$

$(1)-(2) \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=z}$

$\Rightarrow (x,y,z) = (x,0,x) = x\underbrace{(1,0,1)}_{a}$

$\Rightarrow (a)$ est une famille generatrice de (E) (I)

• on a $a = (1,0,1) \neq (0,0,0) \Rightarrow (a)$ est libre (II)

$\left.\begin{matrix}(I)\\(II)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (a)$ est une base de E

dim E = 1

3) (b,c) base de F

• generatrice

soit $(x,y,z) \in F \Leftrightarrow x+y-2z=0$

$x = y+2z$

$\alpha ? \beta ?$ tq $(x,y,z) = \alpha b + \beta c$

$(-y+2z, y, z) = \alpha(1,1,1) + \beta(0,2,1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -y+2z & (1) \\ \alpha + 2\beta = y & (2) \\ \alpha + \beta = z & (3) \end{cases}$

$(2)-(3) \Rightarrow \beta = y-z$

$(3) \Rightarrow \alpha = z-y+z$

$\alpha = -y+2z$

Alors α et β existent donc (b,c) est une famille generatrice de F

• soient α et β reels tq : $\alpha b + \beta c = 0$

$\alpha(1,1,1) + \beta(0,2,1) = (0,0,0)$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow (b,c)$ est libre de F

d : (b,c) est une base de F

dim F = 2

4) (a,b,c) base de $\mathbb{R}^3$

donc $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\text{card}(a,b,c) = 3$ $\Rightarrow (a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si (a,b,c) est libre

$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$

$\alpha(1,0,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(0,2,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 & (1) \\ \beta + 2\gamma = 0 & (2) \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \alpha = -\beta$

$(2) \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2}\beta$

$(3) \Rightarrow (-\beta) + \beta + \left(-\frac{1}{2}\beta\right) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \gamma = 0$

$\Rightarrow (a,b,c)$ est libre $\Rightarrow$

(a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$

5) Mq: $E \oplus F = \mathbb{R}^3$

(E et F sont supplementaires)

$$\begin{cases} \dim E + \dim F = \dim \mathbb{R}^3 \\ E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \end{cases}$$

on a : $\dim E + \dim F = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

* soit $(x,y,z) \in E \cap F \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 & (1) \\ x - y - z = 0 & (2) \\ x + y - z = 0 & (3) \end{cases}$$

$\Rightarrow E \cap F = \{(0,0,0)\}$

$(1) - (2) \Rightarrow y = 0$

$(1) - (3) \Rightarrow z = 0$

$\Rightarrow x = 0$

d: E et F sont supplementaires

$\Rightarrow E \oplus F = \mathbb{R}^3$

6) $u = (x,y,z) = \alpha a + \beta b + \gamma c$

$(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(0,2,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x & (1) \\ \beta + 2\beta = y & (2) \\ \alpha + \beta + \gamma = z & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \alpha = x - \beta$

$(2) \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\beta$

(3) $(x - \beta) + \beta + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\beta = z$

$\frac{1}{2}\beta = x + \frac{1}{2}y - z$

$\boxed{\beta = 2x + y - 2z} \Rightarrow \boxed{\alpha = x - y + 2z}$

$\gamma = \frac{1}{2}y - x - \frac{1}{2}y + y = -x + z$

$\Rightarrow \boxed{u = (x + y + 2z)a + (2x + y - 2z)b + (-x + z)c}$

Faculté des Sciences de Gabès
Département de Math.

A.U : 2022-2023
Section : LGLSI1-LIRIS1

Série 3 : Espaces vectoriels

Exercice 1. Parmi que les ensembles lequels sont des sous-espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\}$,
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 2\}$,
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = 2z = 4t\}$,
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ xy = 0\}$,
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ y = x^2\}$,
6. $E_6 = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 0\}$,
7. $E_7 = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = 1\}$,
8. $E_8 = \{P \in \mathbb{R}[X] : 2P(X) - XP'(X) = 0\}$,

Exercice 2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de G.

Exercice 3. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(1) = 0\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de F.

Exercice 4. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(-1) = P(1) = 0\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de F.

Exercice 5. Soient

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}.$$

$$G = \{(2a, -a, 0, a), a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F et G sont en somme directe.
2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $(x - 2a, y + a, z, t - a) \in F$.
3. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Exercice 6. Soient

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-z = 0 \quad \text{et} \quad x-y-z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-2z = 0\}$.

$a = (1, 0, 1)$; $b = (1, 1, 1)$; $c = (0, 2, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E.
3. On admet que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Monter que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \bigoplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Exercice 7. Soient

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x+y-z = 0 \quad \text{et} \quad x+2y+z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x-3y+z = 0\}$.

$a = (1, -1, 1)$; $b = (-2, -1, 1)$; $c = (-1, 0, 2)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E.
3. On admet que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Monter que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \bigoplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Exercice 8. Soit

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \text{ et } z - t = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F.
3. Completer cette base de F en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9. Soient $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $\{P_0, P_1, P_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base $\{P_0, P_1, P_2\}$.
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $\{1, X, X^2\}$.
4. Pour tout A, B et C réels montrer qu'il existe un unique polynôme de $R \in \mathbb{R}_2[X]$, tel que : $R(0) = A$, $R(1) = B$ et $R(2) = C$.