Cours
Analyse

Etude de Fonctions

I) Limite d'une fonction en un point

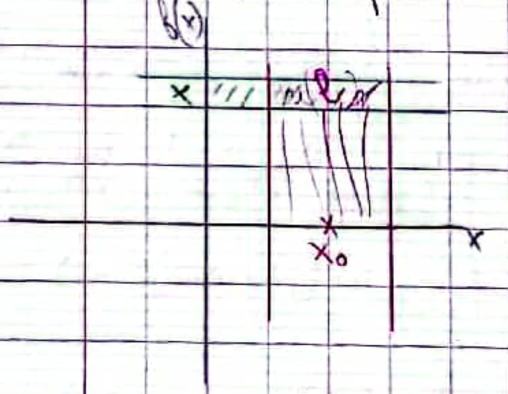
1) Definition:

soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et
$f: I \to \mathbb{R}$ une fonction.
soit $x_0 \in I$ et $l \in \mathbb{R}$ (f n'est pas necessairement fini)
on dit que f admet une limite égale à l en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2) unicité de la limit:

la limite de f en x_0 si elle existe alors elle sera ~~existe~~ unique



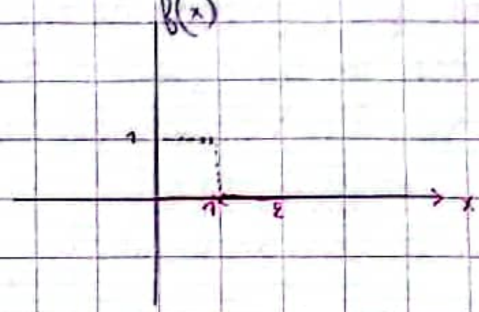
3) Remarque:

Même si $x_0 \in D_f$ alors la limite de f en x_0 peut être differente de $f(x_0)$

par exemple:

soit $f: [0;2] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



on va montrer que $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$
soit $\varepsilon > 0$ cherchons $\alpha > 0$
on a $|f(x)| < \varepsilon$, Pour $0 < |x - 1| < \alpha$
$\Rightarrow |0| < \varepsilon$, pour $0 < |x - 1| < \alpha$
Pour $x = 1$ on a $|0| < \varepsilon$,
pour $0 < |x - 1| <$ on a
$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 \neq f(1) = 1$

4) continuité de f:

soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in D_f$
on dit que f est continue en x_0
si $\begin{cases} \text{la limite de f en } x_0 \text{ existe} \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

5) Limite à gauche Limite à droite

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in I$
soit $l \in \mathbb{R}$
on dit que f possède de limite à droite en x_0 égale à l si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Dans ce cas, on ecrit $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

on dit que f possède de limite à gauche en x_0 égale à l si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, -\alpha \leq x - x_0 < 0$
$\Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$
Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

Retenons :
f admet une limite en x_0 égale à l
$\Leftrightarrow$ f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 égale à l

II Opérations sur les limites :

1) Somme :

	$\lim_{x_0} (f+g)$		
$\lim g$ \ $\lim f$	l_1	$+\infty$	$-\infty$
l_2	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I
$-\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$

F.I $(\pm\infty) + (\mp\infty)$

2) Produit :

		$\lim_{x_0} (f \cdot g)$		
$\lim g$ \ $\lim_{x_0} f$	$l_1 \neq 0$	$l_1 \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l_2 \neq 0$	$l_1 \times l_2$	$l_1 \times l_2$	sig de l_2 $\times(+\infty)$	sig de l_2 $\times\infty$
$l_2 = 0$	$l_1 \times l_2$	$l_1 \times l_2$	F.I	F.I
$+\infty$	sig de $l_1 \times \infty$	F.I	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	sig de $l_1 \times \infty$	F.I	$-\infty$	$+\infty$

F.I $0 \times \infty$

3) Rapport

F.I : $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

4) Composée :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$
Notons $g \circ f : I \to \mathbb{R}$
$x \to (g \circ f)(x) = g[f(x)]$
~~soit $x_0 \in I$ ou x_0 au borne~~
soit $x_0 \in I$ ou bornes de I. Alors
si la $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_1$ et $\lim\limits_{y \to x_1} g(y)$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = x_2$

Exemple :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} g[f(x)]$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{y \to 0} \sin(y) = \sin(0) = 0 \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{+\infty} \sin\left(\frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 2}\right) = 0$

III Techniques de calcul de la limite :

(cas où il y a une forme indéterminée ou on ne peut rien dire).

1) Croissance comparée

on a la comparaison suivante en $+\infty$

$$[\ln(x)]^a << [x]^b << e^{cx}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Ici, $a>0$, $b>0$ et $c>0$

~~2) Changement de variable~~

2) Changement de variable :

cette technique permet de changer le point où l'on cherche la limite.

Exemple :

$\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = ?$ on pose $\boxed{t = \frac{1}{x}}$

$x \to 0^+ \Leftrightarrow \boxed{t \to +\infty}$

Donc $\lim_{0^+} x\ln x$

$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{t}\right)$

$= \lim_{t \to +\infty} \frac{-\ln(t)}{t} = 0$

3) Taux d'accroissement :

soit $f : I \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$

On suppose que f est derivable en x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R} = f'(x_0)$$

soit $g : I \to \mathbb{R}$ une autre fonction de varible en x_0

Alors

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}}$$

Exemple :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

4) Technique d'encadrement :

soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$ ou au bornes de I.

$\boxed{\text{On suppose que } f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ lorsque } x \text{ est près de } x_0}$

Alors, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = l}$$

Exemple :

$\lim_{x \to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On a près de 0^+

$x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ car $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ et $x > 0$

$-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ car $-1 \leq \sin\frac{1}{x}$ et $x > 0$

Donc près de 0^+, $-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

comme $\lim_{x \to 0^+} -x = \lim_{0^+} x = 0$

alors $\lim_{0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Exercice

a) Montrer que $\lim_{0^-} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

b) Que peut on deduire ?

II) Variation de la fonction :

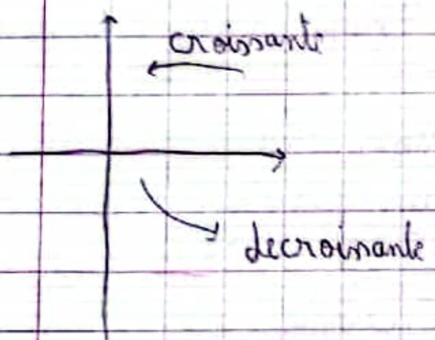
1) Definition.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction definie sur I.
On dit que la variation de f sur I est croissante si

$$\boxed{\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)}$$

on dit que la variation de f sur I est decroissante ssi

$$\boxed{\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)}$$



2) Fonction dérivée et tableau de variation :

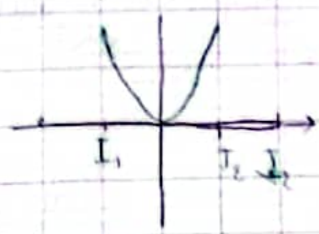
a) theoreme :

soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de variation ~~de~~ derivable sur I, et

Alors $\forall x \in I, f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est croissante sur I.

$\forall x \in I, f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ est decroissante sur I

x	I_1	D_f I_2
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$



III Precision de la representation graphique :

1) Tangente :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ derivable, et $x_0 \in I$
Notons C_f la courbe représentative de f.
La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_0 ($M(x_0, f(x_0))$) est la droite T_{x_0} d'equation

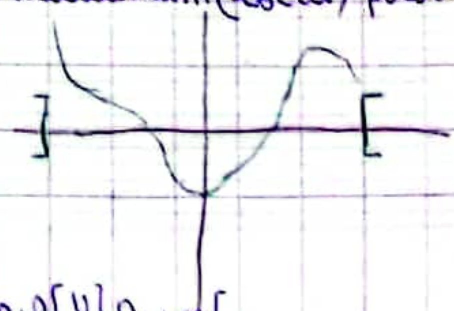
$$T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2) Extremums :

soit $f : I \to \mathbb{R}$ derivable, et $x_0 \in I$
si $f'(x_0) = 0$, alors on ~~distin~~ dit il y a deux cas :

$\Rightarrow$ Cas 1 : à gauche de x_0, $f'(x)$ et negative, et à droite de x_0 $f'(x)$ est positive. Dans ce cas x_0 represente un minimum pour f

Cas 2 : A gauche de x_0, $f'(x)$ est positive et à droite de x_0 $f'(x)$ est negative : Dans ce cas x_0 represente une maximum (local) pour f.



$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

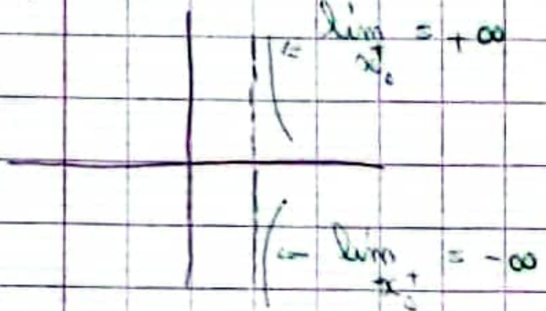
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

3) Asymptotes :

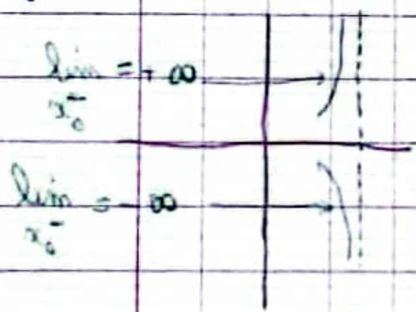
a) Asymptote verticale :

Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction non definie en x_0.
On dit que la fonction admet la droit Δ_{x_0} d'equation $\Delta_{x_0} : x = x_0$ comme asymptote verticale.
si l'une des conditions ~~ses~~ suivantes et verifiees.

. $\lim_{x_0^+} f(x) = \pm\infty$



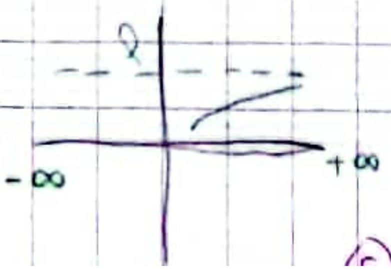
. $\lim_{x_0^-} f(x) = \pm\infty$



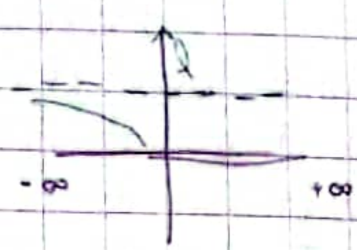
b) Asymptote horizentale :

soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction non definie en x_0.
On dit que la fonction f admet la droit Δ_{x_0} d'equation $\Delta_{x_0} : y = l \in \mathbb{R}$
si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$



. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

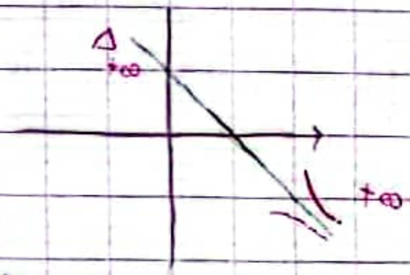


c) Asymptote oblique :

soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction non définie en x_0 ($x_0 = \pm\infty$).
On dit que f admet la droite Δ_{x_0} d'equation. $\Delta_{x_0} : y = ax + b$ comme asymptote oblique si

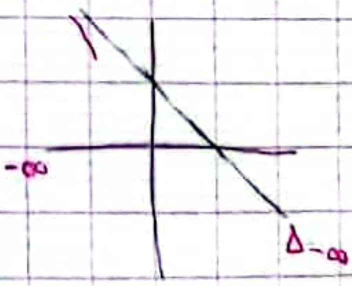
~~si~~ : $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

. $\lim_{+\infty} [f(x) - ax] = b$



. $\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

$\lim_{-\infty} [f(x) - ax] = b$



4) Zeros d'une fonction :

soit $f : I \to \mathbb{R}$ une equation definie sur I et $x_0 \in I$. On dit que x_0 et un zéro de f si $f(x_0) = 0$

Théorème : (théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I)

soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.

Ici, $I = (a, b)$ et f est continue sur I.

Alors, on a l'implication suivante :

$$\lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to b} f(x) < 0$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a; b), f(x_0) = 0$$

~~c) Théorème (T.V.I)~~

c) Théorème de Rolle :

soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On suppose que f est dérivable sur $]a, b[$

Alors, on a l'implication suivante :

$$\boxed{f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in]a, b[\; ; f'(x_0) = 0}$$