# Resolution des systemes linéaires

soit le systeme lineaire suivant
$$\begin{cases} x+y=2 \\ -x+2y=-1 \end{cases}$$

systeme lineaire, de format
$2 \times 2$

2 : eq

2 inconnus $x$ et $y$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} x+y=2 \\ \text{et} \\ -x+2y=-1 \end{array} \right\}$$

D : l'ensemble des solutions.

$$(S) \iff \begin{cases} x = 2-y \\ \text{et} \\ -(2-y)+2y=-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2-y \\ \text{et} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2-\frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$D = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$

Matrice augmentée associée à (S)

$$C = \left( \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}}_{b} \right)$$

$(S) \iff AX = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AX = b \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x+y \\ -x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y=2 \\ -x+2y=-1 \end{cases} (S)$$

## Resolution de S :

$$(S) : \begin{cases} x+y=2 \\ -x+2y=-1 \end{cases}$$

$(S) : Ax = b$ (Ecriture matricielle)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$C = (A|b)$ : matrice augmentée associée à (S)

~~methode~~

## methode de Gauss pour résoudre (S)

$C = (A|b)$

on applique des transformation elementaires sur les lignes de C et on s'arrête lorque on tombe sur la matrice echlonné $\iff$ à A

$$\iff C \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\sim} \left( \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2}{\sim} \left( \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \left( \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \middle| \begin{matrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \right)$$

Matrice echlonne en ligne equivalente à A

$$(S) \iff \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\rightarrow \Delta = \left\{ \left( \frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$$

bilan des inconnus :

| inconnus de base | inconnus paramètre |
| --- | --- |
| $x, y$ | Pas d'inconnu Paramètre |

Il faut exprimer les inconnus de base en fonction de inconnu paramètre

1/ on peut lire les equations de ~~___~~ systeme S à travers la matrice augmenté C.

2/ deux systeme lineaire sont dite equivalent ~~___~~ s'ils presente même ensemble de solution.

3/ lorsque on applique une transformation elementaire sur les lignes on obtient ~~des systeme~~ un systeme equivalent

4/ l'ensemble ~~___~~ des solution d'un systeme linéaire prend 1 et 3 forme suivant :

a/ $D = \emptyset$ pas de solutions

b/ $D = \{( \, , \, )\}$ unique solution

c/ D infinité de solution

(Il y a des inconnus paramètres)

Exemple:

Resoudre le systeme suivant

$$(S)\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 3z = -1 \end{cases}$$

(S) : $AX = b$, ecriture matricielle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$C = (A|b)$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$C \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 3z = -1 \\ y - 5z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

bilan des inconnus

| inconnu de base | inconnus de paramètre |
| --- | --- |
| $x, y$ | $z$ |

il faut exprimer les inconnus de base en fonction des inconnus paramètre.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3z \\ y = -2 + 5z \end{cases} \quad \text{avec } z \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = \{(-1+3z, -2+5z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

infinité de solution

A) Remarques :

Etant donné un système linéaire (S)

(S) : $AX = b$

où $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ A : matrice associée à (S)

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ X : vecteur inconnu

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ : vecteur second membre

1) Cas où $n = m$ (on dit que (S) et un système carrée)

a) si A est inversible, on dit que (S) est un système de Cramer

Il admet une unique solution

$X = A^{-1}b$

b) si A est non inversible l'ensemble des solutions est soient $\emptyset$ ou infinité de solution.

2) Cas $n \neq m$ l'ensemble des solutions soient
- $\emptyset$
- unique solution
- infinité des solutions

B)

$C = (A|b)$ marche à tous les coups

## Méthode de Cramer :

Considérons le système :

(S) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$

1) Ecrire (S) sous forme matricielle

2) Determiner le rang de la matrice associée à (S)

3) Résoudre (S) par la méthode de Cramer

1) (S) : $AX = b$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ : matrice associée à (S)

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ : vecteur inconnu

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ : vecteur second membre associé à (S)

2) $A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2}}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Echelonner}}$

$rg(A) = 2$ nb de pivot dans la matrice echelonnée $\simeq$ à A

x et y sont des inconnus de base et z inconnus de paramètre

3)

$(S) \iff \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} x - y = 1 - 2z \\ x + 2y = 2 - z \end{matrix}} \\ 2x + y = 3 - 3z \end{cases}$

ce petit système est de Cramer une matrice associée est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-2z & -1 \\ 2-z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2-4z+2-z}{3}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2-z-1+2z}{3}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{3}z + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}$$

En suit on doit verifiée si $(x, y)$ trouve vérifie l'eq $(z)$

Dans $(z)$ on a :

$$2\left(-\frac{5}{3}z + \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} = 3 - 3z$$

$$2\left(-5z + 4\right) + z + 1 = 9 - 9z$$

$$-9z + 9 = 9 - 9z$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(-\frac{5}{3}z + \frac{4}{3}, \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}, z\right)\right.$$

Exemple

$$(S) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

2) Par la méthode de Cramer Resoudre $(S)$

1) Mq $(S)$ est de Cramer

1) $(S) : AX = b$ , $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$\rightarrow$ A est inversible, ainsi $(S)$ est de Cramer (système carrée ou A est inversible)

Il admet une unique solution

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-2}{-2} = 1$$

vecteur second nembre

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

<u>Proposition</u> : soit $A \in M_n(\mathbb{K})$,

Les assertions suivantes sont equivalentes

a) A inversible (déf : $\exists B \in M_n \mathbb{K}_n$ $AB = BA = I_n$ $\rightarrow A^{-1} = B$)

b) $\det A \neq 0$

c) $rg(A) = n$ ; ordre de A

d) $A \sim I_n$ matrice échelonnée à A

e) $\forall b$, le système $AX = b$ admet une unique solution.

f) $\exists b$, le système $AX = b$ admet une unique solution

Exemple:

soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Mq A inversible

2) Par la methode de Cramer. déterminer $A^{-1}$

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 \times 1 - 2 \times 1 = -1 \neq 0$

$\rightarrow$ A est inversible

2) considérons:

(S): $AX = B$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c Paramètre réel qq

(S) est de Cramer (car $\det A \neq 0$)

admet une unique solution

$X = A^{-1} B$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 1 & 0 \\ -a+c-2 & 0 \end{vmatrix}}{-1}$$

$$x = \frac{a - 2b - c}{-c} = -a + 2b + c$$

$\rightarrow x = -a + 2b + c$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & -a+b & -1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix}}{-1}$$

$\boxed{y = a - b - c}$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{-1} = c$$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b+c \\ a-b-c \\ c \end{pmatrix}$

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{B} = A^{-1} B$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$