Fractions rationnelles

Def : une fractions rationnelle est un quotient de 2 polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[x]$

On note $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{K}(x)$

Exp. $F = \frac{x-3}{(x^2+1)(x+2)} \in \mathbb{C}(x)$

Operations sur fractions rationnelles :

i) Egalité

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \text{ ssi } P_1 Q_2 = Q_1 P_2$$

ii) somme :

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2 + Q_1 P_2}{Q_1 Q_2}$$

iii) Produit :

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}$$

Degre d'une fractions rationnelles. soit une fraction rationnelles $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}$ alors $d°(F) = d°P - d°Q \in \mathbb{Z}$.

Prop :

soient $F_1, F_2 \in \mathbb{C}(x)$ alors :

i) $d°(F_1 + F_2) \leq \max(d°F_1, d°F_2)$

ii) $d°(F_1 \cdot F_2) = d°(F_1) + d°(F_2)$

Rq : si $F = 0$ alors $d°F = -\infty$

Zero poles d'une fractions rationnelles.

Def : soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(x)$

. les racines de P s'appellent les zero de F

. les racines de Q " " les poles de F

Exp : soit $F = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 10}$ Donnez les zeros et les poles de F

le zéros de F :

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$

les poles de F :

$x = 5$

F opération sur les fractions :
d somme :
soient deux fraction rationnelles $F_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 = \frac{P_2}{Q_2}$
alors $F_1 + F_2 = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}$
le produit
$F_1 . F_2 = \frac{P_1}{Q_1} . \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 . P_2}{Q_1 . Q_2}$

Degre d une fraction :
Def :
soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(x)$ alors $d°(F) = d°P - d°Q \in \mathbb{Z}$

Exp : calculer $d°F$

1) $F = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 2x + 5}$

2) $F = \frac{x - 1}{2x + 3}$

3) $F = \frac{2x - 1}{x^5 - x + 1}$

Rep
1) $d°F = d°(x^3 - x + 1) - d°(x^2 + 2x + 5) = 3 - 2 = 1$
2) $d°F = d°(x - 1) - d°(2x + 3) = 1 - 1 = 0$
3) $d°F = d°(2x - 1) - d°(x^5 - x + 1) = 1 - 5 = -4$

Decomposition en elements simples d'un fraction rationelle :
Prop :
soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(x)$ il existe un unique couple $(E, G) \in \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[x]$
tq : $\begin{cases} F = E + G \\ d°G < 0 \end{cases}$

Le polynome E est ~~appelé~~ appelé entiere de F
Exp :
$F = \frac{x^4 + 1}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^4 + 1}{x^3 - x}$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 1 & x^3 - x \\ \hline -(x^4 - x^2) & x \\ x^2 + 1 & \end{array}$$

Alors $F = \underbrace{x}_{E} + \underbrace{\frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}}_{R}$ $d°R = 2 - 3 = -1 < 0$

Prop (Partie polaire d'une fraction)

soit une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(x)$ et un pôle $a \in \mathbb{K}$ de multiplicité k ($B = (x-a)^k \hat{B}$ avec $\hat{B}(a) \neq 0$)

il existe un unique couple $(C, D) \in \mathbb{K}^2[x]$ tq:

$$\begin{cases} F = \frac{C}{B} + \frac{D}{(x-a)^k} \\ d^\circ D < k \end{cases}$$

la fraction rationnelle $\frac{D}{(x-a)^k}$ est appelée partie polaire de F relative au pôle a.

Prop:

si la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ est degré < 0 avec $Q = (x-a)V(x)$ et $V(a) \neq 0$

la partie polaire de F relativement au pôle simple a est de la forme: $\frac{\lambda}{x-a}$

i.e: $F = \frac{\lambda}{x-a} + \frac{u}{V}$

Decomposition en elements simples dans $\mathbb{C}(x)$:

Theoreme:

soit une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(x)$ avec la decomposition du polynôme Q en elements irreductibles $Q = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdot (x-a_2)^{\alpha_2} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n}$

Alors F s'ecrit d'une manière unique sous la forme:

$$F = E + \left(\frac{\lambda_{11}}{x-a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} \right) + \dots + \left(\frac{\lambda_{n1}}{x-a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(x-a_n)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n\alpha_1}}{(x-a_n)^{\alpha_1}} \right)$$

où $E \in \mathbb{C}[x]$ la partie entiere de F

$\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$

Exp:

Decomposer en elements simples:

1) $F = \frac{x-4}{(x-1)(x+1)x}$

2) $F = \frac{x^5+1}{x(x-1)^2}$

Rep:

1) $F = 0 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x}$

$(x-1)F/_{x=1}$: $\frac{x-4}{(x+1)x} = a + \frac{b(x-1)}{x+1} + \frac{c(x-1)}{x}$

$\frac{-3}{2} = a + 0 + 0 \iff a = \frac{-3}{2}$

$(x+1)F/_{x=-1}$: $\frac{x-4}{(x-1)x} = \frac{a(x+1)}{x-1} + b + \frac{c(x+1)}{x}$

$\frac{-5}{2} = 0 + b + 0 \iff b = \frac{-5}{2}$

$xF/_{x=0}$: $\frac{x-4}{(x-1)(x+1)} = \frac{ax}{x-1} + \frac{bx}{x+1} + c$

$4 = 0 + 0 + c \iff c = 4$

Alors: la d.e.s. de $F = \frac{-\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{5}{2}}{x+1} + \frac{4}{x}$

2) $F = \frac{x^5+1}{x(x-1)^2} = \frac{x^5+1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{x^5+1}{x^3-2x^2+x}$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 1 & x^3 - 2x^2 + x \\ \hline -(x^5 - 2x^4 + x^3) & x^2 + 2x + 3 \\ = 2x^4 - x^3 + 1 & \\ -(2x^4 - 4x^3 + 2x^2) & \\ = 0 + 3x^3 - 2x^2 + 1 & \\ -(3x^3 - 6x^2 + 3x) & \\ 4x^2 - 3x + 1 & \end{array}$$

R

$F = x^2 + 2x + 3 + \frac{4x^2-3x+1}{x(x-1)^2}$

$= x^2 + 2x + 3 + \underbrace{\frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2}}_{A}$

$$A = \frac{4x^2-3x+1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$\times A / x=0$: $\frac{4x^2-3x+1}{(x-1)^2} = a + \frac{bx}{x-1} + \frac{cx}{(x-1)^2}$

$\boxed{a=1}$

$(x-1)^2 A / x=1$: $\frac{4x^2-3x+1}{x} = \frac{a(x-1)^2}{x} + b(x-1) + c$

$2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 2$

Pour $x=2$: $\frac{11}{2} = \frac{a}{2} + b + c$

$\frac{11}{2} = \frac{1}{2} + b + 2 \Rightarrow b = 3$

$\Rightarrow$ la d.e.s de $F = x^2 + 2x + 3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$

Exercice :

D.e.s dans $\mathbb{C}(x)$

1) $F = \frac{x+2}{(x-1)^2(x-2)^2}$ 2) $F = \frac{x}{(x^2-1)^2}$

Rep : 1) $F = 0 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}$

on trouve : $a=7$, $b=3$, $d=4$, $c=-7$

2) $F = 0 + \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$

on trouve : $a=0$, $b=\frac{1}{4}$, $c=0$, $d=-\frac{1}{4}$

Ex : D.e.s. F dans $\mathbb{C}$

1) $F = \frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$

2) $F = \frac{x^3+x}{(x+1)^2(x-1)}$

Rep :

1) $x^2+1 = x^2 - i^2 = (x-i)(x+i)$

$F = 0 + \frac{x}{(x+1)(x-i)^2(x+i)^2}$

$= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-i} + \frac{c}{(x-i)^2} + \frac{d}{x+i} + \frac{e}{(x+i)^2}$

① ② ③

$x=0$
$x=1$

2) $F = \frac{x^3+x}{(x+1)^2(x-1)}$

$(x+1)^2(x-1) = (x^2+2x+1)(x-1)$

$= x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + x - 1$

$= x^3 + x^2 - x - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x & x^3+x^2-x-1 \\ -x^3+x^2-x-1 & 1 \\ \hline -x^2+2x+1 & \end{array}$$

$F = 1 + \frac{-x^2+2x+1}{(x+1)^2(x-1)}$ A

$A = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x-1)}$

$F(x+1)^2 / x=-1$: $\frac{x^3+x}{x-1} = a(x+1) + b + \frac{c(x+1)^2}{x-1}$

$1 = 0 + b + 0$

$\Rightarrow b = 1$

$F(x-1) / x=1$: $\frac{x^3+x}{(x+1)^2} = \frac{a(x-1)}{x+1} + \frac{b(x-1)}{(x+1)^2} + c$

$\frac{1}{2} = 0 + 0 + c$

$\boxed{c = \frac{1}{2}}$

Decomposition en elements simples dans $\mathbb{R}(x)$

Theoreme:

soit $F=\frac{P}{Q}\in\mathbb{R}(x)$ où la decomposition en facteurs irreductibles dans $\mathbb{R}[x]$ de

$$Q=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_px+c_p)^{\beta_p}$$

Alors la fraction F s'ecrit d'une façon unique

$$F=E+\left[\left(\frac{\lambda_{11}}{x-a_1}+\frac{\lambda_{12}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}\right)+\cdots+\left(\frac{\lambda_{n1}}{x-a_n}+\frac{\lambda_{n2}}{(x-a_n)^2}+\cdots+\frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(x-a_n)^{\alpha_n}}\right)\right]$$

$$+\left[\left(\frac{M_{11}x+\delta_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{M_{12}x+\delta_{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^2}+\cdots+\frac{M_{1\beta_1}x+\delta_{1\beta_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}}\right)+\cdots+\left(\frac{M_{p1}x+\delta_{p1}}{x^2+b_px+c_p}+\frac{M_{p2}x+\delta_{p2}}{(x^2+b_px+c_p)^2}+\cdots+\frac{M_{p\beta_p}x+\delta_{p\beta_p}}{(x^2+b_px+c_p)^{\beta_p}}\right)\right]$$

où . E la partie entiere $\in\mathbb{R}[x]$

. λ_{ij}, μ_{ij} et δ_{ij} sont des reels

. le premier groupe est formé d'elements simples de premiere espece

. le second groupe d'elements simples de ~~la~~ seconde espece.

Exp:

D.E.S dans $\mathbb{R}$

1) $F=\frac{x^6}{(x-1)^2(x^2+1)}$

2) $F=\frac{1}{(x^2+1)^2-x^2}$

Rep:

1) $F=\frac{x^6}{(x-1)^2(x^2+1)}$

$\left.\begin{array}{l} d^\circ(x^6)=6 \\ d^\circ[(x-1)^2(x^2+1)]=4\end{array}\right\}\Rightarrow$ D.E

$$F=\frac{x^6}{(x^2-2x+1)(x^2+1)}=\frac{x^6}{x^4+x^2-2x^3-2x+x^2+1}$$

$$\begin{array}{l|l} x^6 & x^4-2x^3+2x^2-2x+1 \\ \hline -(x^6-2x^5+2x^4-2x^3+x^2) & x^2+2x+2 \\ =2x^5-2x^4+2x^3-x^2 & \\ -(2x^5-4x^4+4x^3-4x^2+2x) & \\ =2x^4-2x^3+3x^2-2x & \\ -(2x^4-4x^3+4x^2-4x+2) & \\ =2x^3-x^2+2x-2 & \end{array}$$

$$F=\underbrace{x^2+2x+2}_{\text{E partie entiere}}+\underbrace{\frac{2x^3-x^2+2x-2}{(x-1)^2(x^2+1)}}_{G}$$

x^2+1 : $\Delta<0$

$$G=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

$$(x+1)^2G\Big/_{x=1}=\frac{2x^3-x^2+2x-2}{x^2+1}=a(x-1)+b+\frac{(cx+d)(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}=b}$$

$$(x^2+1)G\Big/_{x=i}\quad\frac{2x^3-x^2+2x-2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{a(x^2+1)}{x-1}+\frac{b(x^2+1)}{(x-1)^2}+cx+d$$

$$=\frac{-2i+1+2i-2}{-1-2i+1}=0+0+ci+d$$

$$\frac{1 \times i}{2i \times i} = -\frac{1}{2} i = ci + d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Pour $x = 0$

$$-2 = -a + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{a = \frac{5}{2}}$$

Alors la de. e s dans $\mathbb{R}(x)$

$$F = x^2 + 2x + 2 + \frac{5/2}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}$$

2) $F = \dfrac{1}{(x^2+1)^2 - x^2} = \dfrac{1}{\underbrace{(x^2+1-x)}_{\Delta = -3 < 0}\underbrace{(x^2+1+x)}_{\Delta = -3 < 0}}$

$$F = 0 + \frac{ax+b}{x^2 - x + 1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

$(x^2 - x + 1)F \,/_{\, x = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

$\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = ax + b + 0$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + 1} = a\alpha + b$$

$$\frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + 1} = a\alpha + b$$

$$\frac{1 \times (1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} = a\alpha + b$$

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = a\alpha + b \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{8}}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ex

D. E. S dans $\mathbb{R}(x)$ et $\mathbb{C}(x)$

1) $F = \dfrac{x^5 + 2x - 1}{x^4 - 1}$

2) $F = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^4 + 1}$

Rep.

1)

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x - 1 & x^4 - 1 \\ \underline{-x^5 - x} & x \\ 3x - 1 & \end{array}$$

$$F = x + \underbrace{\frac{3x-1}{x^4-1}}_{G}$$

$$G = \frac{3x-1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

$(x-1)G \,/_{\, x=1}$: $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)} =$

$$a + \frac{b(x-1)}{x+1} + \frac{(cx+d)(x+1)}{x^2+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} = a}$$

$(x+1)G \,/_{\, x=-1}$: $\dfrac{3x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{a(x+1)}{x-1} + b + \dfrac{(cx+d)(x+1)}{x^2+1}$

$$1 = 0 + b + 0 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$(x^2+1)G \,/_{\, x=i}$: $\dfrac{3x-1}{x^2-1} = \dfrac{a(x^2+1)}{x-1} + \dfrac{b(x^2+1)}{x+1} + cx + d$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i = ci + d \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{3}{2} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F = x + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

d.e.s de F dans $\mathbb{R}(x)$

dans $\mathbb{C}(x)$:

$$F = x + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \underbrace{\frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{(x-i)(x+i)}}_{K}$$

$$K = \frac{\alpha}{x-i} + \frac{\beta}{x+i}$$

$$(x-i)K \Big/_{x=i} = \alpha + \frac{\beta(x-i)}{x+i} \Longrightarrow \frac{-\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}}{2i} = \alpha$$

$$\alpha = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}{-2} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$$

$$\beta = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$$

Alors $F = x + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \left(\frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i}{x-i}\right) + \left(\frac{-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i}{x+i}\right)$

2) $F = \frac{x^2+x+1}{x^4+1}$

$$x^4+1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$$
$$= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$
$$= (x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$$

$$F = \underbrace{\frac{ax+b}{x^2+1-\sqrt{2}x}}_{\Delta < 0} + \underbrace{\frac{cx+d}{x^2+1+\sqrt{2}x}}_{\Delta < 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right\} a, b, c, d$$