FACULTE DES SCIENCES DE GABES
*****
Département de Mathématiques

LGLSI1 —27/06/2022
Analyse 1
Hamdi

Session contrôle – Durée : 1h30

Documents, téléphones portables et calculatrices non autorisés.

Exercice 1 (10pts) :
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq -2; \\ \text{-x}, & \text{si } -2 < x \leq -1; \\ x^2, & \text{si } -1 < x \leq 0; \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$
3. Étudier l'asymptote en $+\infty$.
4. Tracer la courbe représentative de g.

Exercice 2 (10pts) :
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
   f est-elle paire ? impaire ? continue ? dérivable ?
2. (a) Expliquer pourquoi $x \mapsto \tan(x)$ admet un développement limité à l'ordre 6, en $x = 0$, de la forme $\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + x^6\varepsilon\,(x)$.
   (b) Déterminer alors a, b et c (on pourra pour cela utiliser la relation $\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2$).
   (c) En déduire un développement limité de $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$, en $x = 0$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, en $x = 0$, de $x \mapsto \frac{x}{\tan x}$.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, en $x = 0$, de f.
5. Montrer que f admet un prolongement continu en $x = 0$. On notera g la fonction ainsi obtenue par prolongement de f. Quelle est la valeur de $g(0)$?