FACULTE DES SCIENCES DE GABES UNIVERSITE DE GABES DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	FSG	A.U. : 2022-2023 Section : LGLSI1

EXAMEN D'ANALYSE 2

Nature de l'épreuve : D.S.☐ E.F.☒	Documents :	autorisés	☐	non autorisés	☒
Date de l'épreuve : 19/05/2023	Calculatrice :	autorisée	☐	non autorisée	☒
Durée de l'épreuve : 1H30mn	Session :	principale	☒	contrôle	☐

EXERCICE 1. (6 points)

On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1,\ v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{23u_n + 22v_n}{45},\ v_{n+1} = \frac{22u_n + 23v_n}{45}.$$

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer la suite (w_n) est géométrique.

(2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n.$$

(3) Prouver que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = u_n + v_n$. Montrer que la suite (t_n) est constante.

(5) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 2. (8 points)

(1) Dans chacun des cas suivants étudier la convergence de la série de terme général u_n :

1) $u_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ 2) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ 3) $u_n = \frac{n^{22}+23}{(n^{23}+22)\sqrt{n+1}}$ 4) $u_n = \frac{3^n}{(n+1)!}$

5) $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$ 6) $u_n = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 7) $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n^2}$ 8) $u_n = \frac{1}{n!} + \frac{n!}{n^n}$.

(2) Sachant que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}$.

EXERCICE 3. (6 points)

(1) On considère l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y' + 2xy = (1+2x)\,e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

a) Résoudre l'équation (E_1).

b) Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de (E_1) vérifiant la condition $y(0) = 2$.

(2) On considère l'équation différentielle (E_2) suivante :

$$(\mathrm{E}_2) \qquad y'' - 3y' + 2y = 44x - 20 + 6e^{-x} - e^x.$$

a) Résoudre l'équation (E_2).

b) Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de (E_2) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 26$ et $y'(0) = 25$.