

## II Produit de deux matrices :

$$A \in M_{m,n}(K), A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$B \in M_{n,s}(K), B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s}}$$

$$\begin{matrix} A & \cdot & B \\ \swarrow & & \searrow \\ m \times n & & n \times s \end{matrix} = C_{m \times s} = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq s}}$$

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \\ &= (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} \\ &= a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j} \end{aligned}$$

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} A & \cdot & B \\ 2 \times 3 & & 3 \times 2 \end{matrix} = C_{2,2} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$c_{1,1} = (1 \ 2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$c_{2,1} = (-1 \ 3 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 8$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(OK) \quad \begin{matrix} B & \times & A \\ 3 \times 2 & & 2 \times 2 \end{matrix} = C_{3 \times 2}$$

$$(Non) \quad \begin{matrix} A & \times & B \\ 2 \times 2 & & 3 \times 2 \end{matrix} \neq$$

$$B \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \times A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 4 & 2 \\ 34 & -3 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

1) " " produit des matrices est associative  
 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

2) " " est distributive / " + "

$$A \cdot (B + C) = AB + AC$$

$$3) A \cdot (\lambda B) = \lambda A \cdot B = \lambda (AB)$$

$$\lambda \in K$$

A, B des matrices.

4)  $I_m$  Element neutre pour " ".

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot I_m = A, \forall A \in M_{n \times m}(K)$$

$$5) (M_n(K), +, \cdot)$$

est un anneau unitaire non commutatif, non intègre.

Remarques :

$$1) A \cdot B \neq B \cdot A$$

en generale

L'anneau de matrice ne pas intègre

il existe  $A \neq 0, B \neq 0$

$$\text{mais } AB = 0$$

## Transposé d'une matrice

soit  $A \in M_{n,m}(K)$ , on appelle transposé de A qu'on note par  ${}^tA \in M_{m,n}(K)$  définie comme suit :

$$\text{si } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

$${}^tA = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad b_{ij} = a_{ji}$$

~~Introduction~~

~~Exercice~~

Exemple:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

$${}^t A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11} = 1 \\ b_{12} &= a_{21} = 0 \\ b_{21} &= a_{12} = 2 \end{aligned}$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

si on désigne par

$\begin{bmatrix} A \\ i \end{bmatrix}$  : i<sup>ème</sup> ligne de A

$\begin{pmatrix} A \\ j \end{pmatrix}$  : j<sup>ème</sup> colonne de A

$$({}^t A)_i = C_i^A, \forall 1 \leq i \leq m$$

Propriétés:

1)  ${}^t({}^t A) = A, \forall A \in M_{n,m}(K)$

2)  $F: M_{n,m}(K) \rightarrow M_{m,n}(K)$   
 $A \rightarrow F(A) = {}^t A$

F est une application linéaire  
 c-à-d, elle satisfait :

i/  $F(A+B) = F(A) + F(B)$

$${}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B \quad \forall A, B \in M_{n,m}(K)$$

ii/  $F(\lambda A) = \lambda F(A)$

$${}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$$

$$\forall \lambda \in K, A \in M_{n,m}(K)$$

iii/  $A \in M_{n,m}(K)$

$B \in M_{m,n}(K)$

$${}^t(AB) = {}^t B \cdot {}^t A$$

Definitions:  $A \in M_n(K)$

1) A est dite symétrique, si elle vérifie:

$${}^t A = A$$

$n \times n \quad n \times n$

si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

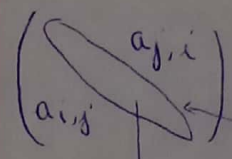
A est symétrique, si  $a_{ij} = a_{ji}$

$$\forall 1 \leq i, j \leq n$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = A$$



diagonale principale

pas de condition symétrique % à la diagonale principale.

2) On dit que  $A \in M_n(K)$  est antisymétrique si elle vérifie:  ${}^t A = -A$

si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

Antisymétriquessi  $a_{ij} = -a_{ji} \forall 1 \leq i, j \leq n$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

Exercice 1:

chercher toutes les matrices  $A \in M_n(K)$  vérifiant  ${}^t A = 2A$

On a:  ${}^t A = 2A$  (1)

si on passe à  ${}^t$  de part et d'autre de l'équ

$${}^t({}^t A) = {}^t(2A)$$

$$A = 2 {}^t A \rightarrow {}^t A = \frac{1}{2} A \quad (2)$$

(1) et (2)  $\rightarrow 2A = \frac{1}{2} A \Rightarrow A = 0_n$  : matrice nulle

cherchons  $B, C \in M_n(\mathbb{K})$

1)  $A = B + C$

ou  $t_B = B$

$t_C = -C$

on applique  $t$  ①

$t_A = B - C$  ②

$$\begin{cases} B + C = A & \text{①} \\ B - C = t_A & \text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = A - C \\ A - C - C = t_A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}t_A \\ C = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}t_A \end{cases}$$

d'où l'existence

Unicité

supposons que :

$A = B_1 + C_1$

$A = B_2 + C_2$

ou  $B_i$  symétrique  $i = 1, 2$

$C_i$  antisymétr  $i = 1, 2$

$\rightarrow B_1 + C_1 = B_2 + C_2$

$B_1 - B_2 = C_2 - C_1$

Notent que :

$B_1 - B_2$  symétrique car  $B_1$  et  $B_2$  symétr

$C_2 - C_1$  Anty car  $C_1$  et  $C_2$  anty

cherchons  $E \in M_n(\mathbb{K})$  vérifi ~~E sym~~

$E$  sym  $t_E = E$

~~$t_E = E$~~

$E$  anty  $t_E = -E$

$\rightarrow E = O_n$

$B_1 - B_2$  est à la fois symétrique et aussi

antisymétrique  $B_1 - B_2 = \frac{C_2 - C_1}{\text{anti}}$

$B_1 - B_2 = O_n \Rightarrow B_1 = B_2 \rightarrow C_1 = C_2$

Matrice inversible :

Définition : soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

On dit que  $A$  est inversible, s'il existe  $M_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $AB = BA = I_n$

Exemple : 1)  $O_n$  n'est pas inversible

car si non / il existe  $B \in M_n(\mathbb{K})$

$O_n B = B O_n = I_n$

$\Rightarrow O_n = I_n$  impossible

$\rightarrow O_n$  : non inversible

2)  $I_n$  inversible  $I_n I_n = I_n$

~~Définition :~~  $O_n$  n'est pas inversible car

si non  $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$

$tq O_n B = B O_n = I_n$

or  $O_n B = O_n = O_n = I_n$  impossible

Proposition : si  $AB_1 = B_1A = I_n$

$AB_2 = B_2A = I_n$

alors  $B_1 = B_2$

Preuve :  $B_1 = B_1 I_n = B_1 (A B_2) = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2$

Proposition : soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $n \geq 1$

si  $A$  est inversible alors la matrice  $B$  que ~~B~~ vérifie  $AB = BA = I_n$  est unique

On le note par  $A^{-1}$  et on a :

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

La matrice  $A^{-1}$  est dite matrice inverse de la matrice  $A$

Proposition: soit  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

$\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$

1) si  $A$  et  $B$  sont inversible alors

$AB$  est aussi et

on a:  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2) si  $A$  inversible alors  $\lambda A$  est aussi inversible,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ , avec  $\lambda \neq 0$

et on a:  $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$

3) si  $A$  est inversible, alors  ${}^tA$  l'est aussi et on a:  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

4)

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \quad a_i \in \mathbb{K}, i=1, \dots, n$$

Diagonale

$D$  inversible ssi  $a_i \neq 0, \forall i=1, \dots, n$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Preuve hyp:  $A$  inversible,  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$B$  inversible  $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$

$$\begin{aligned} * (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= A(I_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I_n)B \\ &= B^{-1}B = I_n \end{aligned}$$

Def:  $AB$  est inversible d'après l'unité de la matrice inverse,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$${}^t(EF) = {}^t_E {}^tE$$

$${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n \quad (I_n \text{ est sym diagonal symétrique})$$

~~Preuve~~

$$A({}^tA^{-1}){}^tA = ({}^tA)({}^tA^{-1}) = I_n$$

${}^tA$  est inversible et on a:  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

$$Rq: \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & b_2 & \\ 0 & & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & & 0 \\ & a_2b_2 & \\ 0 & & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$D \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix}$$

Rqi

$$D^{-1}D e_i = D^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ impossible}$$

Rqi

1) si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}$  est aussi inversible  $(A^{-1})^{-1} = A$

2) si  $A$  est inversible, alors  $A^m$  est inversible

$$\forall m \geq 1 \text{ et on a } (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$$

Exercice: soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  vérifiant

$$A^3 + 3A + I_n = O_n$$

Ma  $A$  est inversible?

D'après la relation  $A^3 - 3A + I_3 = O_n$

$$-A^3 + 3A = I_n$$

$$A(-A^2 + 3I_n) = (-A^3 + 3I_n)A = I_n$$

D'après la définition de matrice inversible; A est inversible

D'après l'unité de l'univers

$$A^{-1} = -A^2 + 3I_n$$

## Chapitre II Determinant d'une matrice

soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K), n \geq 1$

Le déterminant de A qu'on note par

$$\det A \in K$$

$$K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

qu'on obtient selon l'ordre n de la matrice comme suit

\* Cas  $n=1$ ,  $A = (a_{1,1})$

$$\det(a_{1,1}) = a_{1,1}$$

\* Cas  $n=2$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det(a_{2,2}) + (-1)^{1+2} a_{1,2} \det(a_{2,1})$$

$$\det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

- Valeur du Determinant

Developpé selon 1<sup>er</sup> ligne.

$$\det A \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{1,2} \det(a_{2,1}) + (-1)^{2+2} a_{2,2} \det(a_{1,1})$$

$$= -a_{1,2}a_{2,1} + a_{2,2}a_{1,1}$$

La valeur determinant est indépendante de choisir de la ligne ou la colonne selon la on developpe.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

\* Cas  $n=3$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{2,2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3} a_{2,3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Remarque:

1) la valeur de determinant indépendante de choisir de la ligne ou la colonne suivant la quelle on cherche notre det

2) on choisit la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros.

3) un determinant d'ordre 3 s'écrit comme combinaison linéaire de 3 determinants

exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{4+3} 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

## Exemple

$$\begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{array} \right| = 0 ?$$

en effet

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 0 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ + (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (7-8) + (5-6) \\ = 1-1=0$$

Rq:  $L_i$ :  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$

$$L1 + L2 = L3 \Rightarrow \det A = 0$$

Definition:

soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$   
 on appelle mineur de  $A$  d'indice  $(l,k)$   
 avec  $1 \leq l, k \leq n$  le déterminant d'ordre  
 $n-1$  de la sous matrice extraite de  $A$   
 suite à l'élimination de la  $i^{\text{ème}}$  ligne  
 et la  $j^{\text{ème}}$  colonne dans  $A$ .

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

le mineur d'indice  $(3,4)$  est

$$\det A_{3,4} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

## Proposition:

soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

on a pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \det A_{i,k}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \det A_{k,j}$$

Propriétés:

Pour tous  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a:

$$1/ \det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$2/ \det \lambda A = \lambda^n \det A$$

$$3/ \det {}^t A = \det A$$

4/ si  $A$  est triangulaire supérieur ou inférieur  
 ou diagonale et le produit des coeff  
 coefficients situées sur la diagonale

Principale:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} \\ = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_i$$

$$5) \det O_n = 0$$

$$\det I_n = 1$$

$$\det \lambda I_n = \lambda^n$$

Proposition: soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $n \geq 1$

$A$  est inversiblessi  $\det A \neq 0$

Dans ce cas;  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Preuve:  $A$  inversible, on a:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

on applique,  $\det \rightarrow$   $\det AA^{-1} = \det I_n$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

operations elementaires sur les lignes ou colonnes:

soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $n \geq 2$

on designe par

$L_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  les lignes de  $A$  dans l'ordre  $C_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  les colonnes de  $A$  dans l'ordre.

1) operation elementaire de type I:  
(echange entre deux lignes)

$$\begin{array}{c} \text{L}_i \leftrightarrow \text{L}_j \\ i \neq j \\ A \xrightarrow{\quad} \tilde{A} \\ \det \tilde{A} = -\det A \end{array}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \det A = 4 - 6 = -2$$

$$A \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det \tilde{A} = 2 = -\det A$$

$$\tilde{A} = E_{1,2} A$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{1,2} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

Rq  $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \tilde{A}, \text{ alors}$$

$$\tilde{A} = E_{i,j} A$$

$$I_n \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} E_{i,j}$$

2) Operation elementaire de type II:  
(multiplication d'une ligne par un scalaire):

soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$

$$A \xrightarrow{L_i \leftarrow \lambda L_i} \tilde{A}$$

$$\det \tilde{A} = \lambda \det A$$

et on a:

$$\tilde{A} = M_\lambda A$$

on obtient  $M_\lambda$  comme suit

$$L_i \leftarrow \lambda L_i$$

$$I_n \xrightarrow{\quad} M_\lambda$$

$$\det M_\lambda = \lambda$$

3) operation elementaire de type III:  
 $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $n \geq 2$

$$A \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} \tilde{A} \\ \lambda \neq 0$$

$$\det \tilde{A} = \det A$$

$$\tilde{A} = CL_{i,\lambda} A$$

$$CL_{i,\lambda}?$$

$$I_n \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} CL_{i,\lambda}$$

Exemple:

$$\text{calculer } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} = L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & = \\ 0 & -4 & -5 & = (1)(4)(1) \\ 0 & 0 & -1 & = 4 \end{array}$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

=

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 3L_3 \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1} 1 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 12 = 9$$

### Proposition:

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $n \geq 2$  désigne par:

$L_i$ : la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$

$C_i$ : la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$

1) s'il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tq:

$L_i = 0_{1,n}$  alors  $\det A = 0$

$C_i = 0_{n,1}$

2) s'il existent  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$i \neq j$  tq  $L_i = L_j$  ou  $C_i = C_j$

alors  $\det A = 0$

3) s'il existent  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$

$\lambda \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) tq:

$L_i = \lambda L_j$  (ou  $C_i = \lambda C_j$ )

alors  $\det A = 0$

4) s'il existent  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, (\mathbb{C}^n)$

non tous nuls, tq:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i L_i = 0_{1,n} \Rightarrow \det A = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i = 0_{n,1} \Rightarrow \det A = 0$$

### Exercice:

soit  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

Mq si  $AB = I_n$  alors  $A$  et  $B$  sont inversibles.

En effet,  $\det AB = \det I_n$

$$\det A \cdot \det B = 1$$

$\rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$  est inversible

$$AB = I_n \rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}I_n$$

$$(A^{-1}A)B = A^{-1} \rightarrow B = A^{-1}$$

### Formule de Binôme de Newton:

#### Propositions:

soit  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $n \geq 2$

verifiant  $AB = BA$

$$1) (AB)^m = A^m B^m, \forall m \geq 0$$

$$2) (A+B)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k A^k B^{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^m C_m^k A^{m-k} B^k$$

$$\text{ou } C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$0! = 1$$

$$m! = m(m-1) \dots 2 \times 1, m \geq 1$$

$$(m+1)! = (m+1)m!$$

### Chapitre III:

#### Rang d'une matrice de format qq

#### 1) Définition du Rang d'une matrice qq:

soit  $A \in M_{n,m}(K)$

un mineur d'une matrice qq est le déterminant ~~ma~~ d'une sous matrice carrée extraite de la matrice A suite à l'élimination de ligne ou bien de colonne ou les deux à la fois.

Définition Rang d'une matrice qq:

~~Est~~ Étendue une matrice A

$A \in M_{n,m}(K)$  le rang de A noté  $\text{rg}(A)$  l'entier  $\geq 0$ ,

si on pose  $\text{rg}(A) = n$  alors il existe un mineur de A d'ordre n non nul et tout les mineur de A d'ordre  $> n+1$  (s'il existe) en une valeur nulle

#### Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$  de format  $2 \times 3$

$\text{rg}(A) = ?$

on pose  $\text{rg}(A) = n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

comme  $A \neq O_{2,3} \rightarrow n \geq 1$

$$1 \leq n \leq 2 = \min\{2, 3\}$$

nb  
ligne

nb  
colonne

$n = \text{rg}(A) = 2 ?$

c'est le cas

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Exemple 2/

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = ?$$

On pose  $\text{rg}(A) = n$

$$A \neq O_{2,3} \Rightarrow n \geq 1$$

$$1 \leq n \leq \min\{2, 3\} = 2$$

$$\rightarrow n \in \{1, 2\}$$

tout les mineur d'ordre 2 vaut 0  
donc  $n \neq 2$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

#### 2) Calcul du rang par la méthode de la matrice échelonnée en ligne:

2.a: Relation d'équivalence " $\sim$ " sur

$$M_{n,m}(K), K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

Définition: soient  $A, B \in M_{n,m}(K)$ , on dit

que A est équivalente à B et on écrit

$$A \sim B, \text{ s'il existe}$$

$P \in M_n(K)$ , P inversible vérifiant

$$B = PA$$

#### Proposition:

1) " $\sim$ " est une relation d'équivalence sur  $M_{n,m}(K)$

2)  $A \sim B$ ssi B est déduite de A suite à un nb fini d'opération élémentaire Type I, II sur les lignes de A du III

Preuve: 1)  $\sim$  est réflexive, puisque:

$A \sim A$ , pour tout  $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

$$A = I_n A$$

$\downarrow$   
P

2) " $\sim$ " est symétrique, soit  $A$  et  $B \in$

$M_{n,m}(\mathbb{K})$

donc si  $A \sim B$  alors  $B \sim A$

on a:  $A \sim B \Rightarrow \exists P$  inversible tq

$$\begin{aligned} & \text{car } P \text{ inversible} \\ & \Rightarrow A = P^{-1}B \\ & \Rightarrow B \sim A \end{aligned}$$

3) " $\sim$ " est transitive

$$\begin{aligned} & A \sim B \\ & \text{et } B \sim C \Rightarrow A \sim C \end{aligned}$$

$A \sim B \Rightarrow B = PA$ ,  $P$  inversible

$B \sim C \Rightarrow C = QB$ ,  $Q$  inversible

$$\Rightarrow C = \underbrace{QP}_H A$$

$$\Downarrow \\ A \sim C$$

Definition:  $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$  le pivot d'une ligne non nulle de  $A$  est le premier coefficient non nul de cette ligne.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 8 \\ 0 & \textcircled{3} & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def Definition: Matrice Echelonné en ligne: soit  $E \in M_{n,m}(\mathbb{K})$  on dit que  $E$  est echelonné en ligne, si elle satisfait les 4 conditions suivantes.

1) Les lignes nulles (s'ils existent) doivent être en bas de la matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Non

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ oui}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ oui}$$

2) Les pivots égaux à 1

3) Les pivots sont décalés à droite en descendant vers le bas.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 3 & 1 \\ \textcircled{1} & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ Non}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 5 \end{pmatrix} \text{ Non}$$

$$C = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \end{pmatrix} \text{ oui}$$

$$d) = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix} \text{ oui}$$

4)

$$\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \cdots \textcircled{1} \times \cdots \times \\ \vdots \\ 0 \end{array}$$

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Non}$$

4ème condition

Proposition: Toute matrice est équivalente à une et une seule matrice echelonnée en lignes.

Preuve

### Proposition:

- 1) si  $A \sim B$  alors  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$
- 2) si  $E$ : échelonnée en ligne alors,  
 $\text{rg}(E) = \text{nb de pivots}$   
 $= \text{nb de lignes non nulle}$

### Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = 2$$

### Proposition:

soit  $A \in M_n(K)$ : Les assertions suivantes sont équivalentes:

- a)  $A$  inversible
- b)  $A \sim I_n$  (Échelonnée)
- c)  $\text{rg}(A) = n$

### Exercice:

Déterminer selon les valeurs du paramètre réel  $m$  le rang de  $A_m$  par les 2 méthodes

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 1) méthode des mineurs:

on pose  $\pi_m = \text{rg}(A_m)$ ,  $1 \leq \pi_m \leq 3$

$$\pi_m \in \{1, 2, 3\}$$

$$\pi_m = 3?$$

$$\det A_m = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1-m \end{vmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1-m \end{vmatrix} = 1 - m + 2 = 3 - m$$

Deux cas se présentent:

\*  $m \neq 3 \Rightarrow \det A_m \neq 0$ ,  $A_m$  inversible  
 $\text{rg}(A_m) = 3$

\* si  $m = 3$ ,  $\det A_3 = 0$

$$\pi_3 \neq 3$$

$$\pi_3 \neq 2$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\rightarrow \pi_3 = 2$$

Can  $\text{rg}(A_m) = \begin{cases} 3, & \text{si } m \neq 3 \\ 2, & \text{si } m = 3 \end{cases}$

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3-m \end{pmatrix}$$

si  $m = 3 \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\sim} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Echelonnée}$$

$$\text{rg}(A_3) = 2$$

si  $m \neq 3$