

EXAMEN

Section: LGSII  
Epreuve : Algèbre

U.E: Mathématiques

Nature de l'épreuve : D.C. <input checked="" type="checkbox"/> E.f. <input checked="" type="checkbox"/>	Documents : autorisés <input type="checkbox"/> non autorisés <input checked="" type="checkbox"/>
Date de l'épreuve : 09/01/2021	Calculatrice : autorisée <input type="checkbox"/> non autorisée <input checked="" type="checkbox"/>
Durée de l'épreuve : 01H30	Session : principale <input checked="" type="checkbox"/> contrôle <input type="checkbox"/>

Exercice 1

Soient

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0 \text{ et } x-y-z=0\} \text{ et } F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\}.$$

1. Montrer que  $E$  et  $F$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer une famille génératrice de  $E$  et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que  $\{b, c\}$  est une base de  $F$  avec  $b = (1, 1, 1)$  et  $c = (0, 2, 1)$ .
4. Soit  $a = (1, 0, 1)$ . Montrer que  $\{a, b, c\}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .
5. A-t-on  $E \oplus F = \mathbb{R}^3$ .
6. Soit  $u = (x, y, z)$ , exprimer  $u$  dans la base  $\{a, b, c\}$ .

Exercice 2

Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ .

$$1. F(X) = \frac{3X+2}{(X^2+1)(X-5)}$$

$$2. G(X) = \frac{X^3+1}{X^2+X}$$

$$3. H(X) = \frac{X+2}{(X-1)^2(X+3)}$$

$$\frac{8x+7}{x^2-5x+6} = \frac{8x+7}{(x-3)(x-2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}$$

$$\frac{8x+2}{(x^2+3)(x-5)} = \frac{ax+b}{x^2+3} + \frac{c}{x-5}$$

$$\frac{2}{(x-3)^2(x+7)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2} + \frac{c}{x+7}$$

### Exercice 3

Étudier la nature des séries de termes généraux suivants:

$$u_n = \frac{n}{n^3 + 1}, \quad v_n = a^n n! \text{ avec } a > 0, \quad w_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad z_n = \left(\frac{n^2 + 1}{3n^2 + n + 1}\right)^n.$$

### Exercice 4

Étudier la convergence simple et absolue des séries de termes généraux suivants:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1} + n}, \quad v_n = (-1)^n \frac{2^n}{n!}, \quad w_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$