Date de l'épreuve : Jeudi 23-05-2024 de 11h à 12h 30min	Calculatrice : non autorisée.
Durée de l'épreuve : 1h 30min	Session : Principale.

Exercice. 1 (13pts). On considère le système linéaire suivant :

$$(S_m): \quad \begin{cases} x + y + mz = a \\ x + my + z = b \\ mx + y + z = c \end{cases}$$

où m , a, b, c sont des paramètres réels. On désigne par A_m la matrice associée au système (S_m).

1) Vérifier que $\det(A_m) = -(m-1)^2(m+2)$.
2) Déterminer selon les valeurs du paramètre réel m, le rang de la matrice A_m ?
3) Vérifier que $A_p + A_q = \frac{1}{2} A_{\frac{p+q}{2}}$ pour tous réels p et q.
4) Calculer $A_p\, A_q$, pour tous réels p et q.
5) Montrer que si $m \neq -\frac{1}{2}$, on a la relation : $(A_m)^2 = (2m+1)\, A_{\frac{m^2+2}{2m+1}}$.
6) Montrer que si $m = -\frac{1}{2}$, on a la relation : $\left(A_{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{4}\, I_3$.
7) Vérifier que $A_m\, A_{-m-1} = -(m-1)(m+2)\ I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.
8) Montrer que $A_1\, A_{-2} = A_{-2}\, A_1 = O_3$, où O_3 est la matrice nulle d'ordre 3.
9) Lorsque que A_m est inversible, donner l'expression de sa matrice inverse $(A_m)^{-1}$. (On pourra utiliser **7)**).
10) Ecrire le système (S_m) sous forme matricielle.
11) Résoudre le système (S_1).
12) Résoudre le système (S_{-2}).
13) Résoudre le système (S_m), lorsque $m \neq 1$ et $m \neq -2$. (On pourra utiliser **9)**).

Exercice. 2 (7pts). Soit p l'application définie comme suit :

$$\begin{array}{llll} p: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & u = (x,y,z) & \to & p(u) = (\ 2x + y + 2z\, ,y\ , -x - y - z) \end{array}$$

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note par $p^2 = p \circ p$, (o : la composition d'applications).

1) Montrer que p est une application linéaire.
2) Calculer $p\,(e_1)$, $p\,(e_2)$ et $p\,(e_3)$, puis $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$.
3) Vérifier que $p^2 = p$.
4) Vérifier que $p(u) = (x+z)p\,(e_1) + yp\,(e_2)$, pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
5) En déduire une base de $Im(p)$, ainsi que le rang de p et aussi la dimension de $\ker(p)$.
6) Donner une base de $\ker(p)$.
7) Montrer que pour tout vecteur non nul $v \in \ker(p)$, la famille $\{v, p\,(e_1), p\,(e_2)\}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

««« Bon courage »»»

… en ligne à la matrice B = | 0 1 0 |.