Intégrale définie

I) Définition (de l'intégrale définie)

1) Subdivision de Riemann

a) Définition :

Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$
On appelle subdivision d'ordre n $(n \in \mathbb{N})$ de $[a;b]$ toute formelle $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de nombre réels, telle que

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

a x_1 x_2 b

~~Rdu~~ La subdivision $\{x_0; \dots; x_n\}$ est droite subdivion de ~~D~~ Riemann si $\lim_{x \to +\infty} (x_{i+1} - x_i) = 0$ $\forall 0 \leq i \leq n-1$

b) Exemple :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq i \leq n$; on pose

~~$x_i = 1$~~ $x = \frac{i}{n}(b-a) + a$

$x_0 = a < x_1 = a + \frac{(b-a)}{n} < \dots < x_n = b$

D'autre part la $\lim_{x \to +\infty} (x_{i+1} - x_i) =$

$$\lim_{+\infty} \frac{(b-a)}{n} = 0$$

Donc la famille $\left\{\frac{i(b-a)}{n} + a\right\}_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision de Riemann appelée subdivision de Riemann uniforme d'ordre n de $[a;b]$

2) Propositions et définition.

soit $f\ [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue soit $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ et $\{y\}_{0 \leq i \leq n}$ ~~deux~~ deux subdivision de Riemann d'ordre n de $[a,b]$

Pour tout $0 \leq i \leq n-1$, prenons $a_i \in]x_i; x_{i+1}[$ et $b_i \in]y_i; y_{i+1}$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \cancel{\lim_{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)}$$

$$= \lim_{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(b_i)(y_{i+1}, y_i) = A(a, b, f)$$

$\Rightarrow$ La nombre $A(a;b,f)$ est appelé l'intégrale définie de f sur $[a,b]$ et sera noté par $\int_a^b f(x)\,dx$

3) Interprétation géométrique (cas $f \geq 0$)

~~f(ai) for~~ $f(a_i) \times (x_{i+1} - x_i)$ représente l'aire du rectangle tracturé.

$\sum_{i=0}^{x-1} f(a_i)(x_{i+1} - x_i)$ représente la somme des aires des rectangles correspondants

$\lim_{x \to +\infty} \sum_{i=0}^{x-1} f(a_i)(x_{i+1} - x_i)$ représente l'air limité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites ~~veo~~ verticales d'abscisse a et b

4) Généralisation.

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a;b]$.

On dit que f est continue par morceaux sur $[a;b]$ s'il existe $c_1, c_2, \dots, c_n \in [a,b]$ tq

$$\begin{cases} a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq b \\ f \text{ est continue sur } [a,b] \setminus \{c_1, c_2 \dots c_n\} \\ \lim\limits_{x \to c_i^+} f(x) \text{ et } \lim\limits_{x \to c_i^-} f(x) \text{ existant} \end{cases}$$

Dans ce cas on appelle intégrale définie (ou encore intégrale de Riemann) de f sur $[a,b]$, noté $\int_a^b f(x)\,dx$ le nombre donné par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{f}_i(x)\,dx + \int_a^{c_1} \bar{f}_a(x)\,dx + \int_{c_1}^b \bar{f}_b(x)\,dx$$

où $\bar{f}_i$ est le prolongement par continuité de f sur $[c_i, c_{i+1}]$

$\bar{f}_a$ est les prolongement par continuité de f sur $[a;c_1]$

$\bar{f}_b$ est les prolongement par continuité de f sur $[c_a;b]$

5) Théorème :

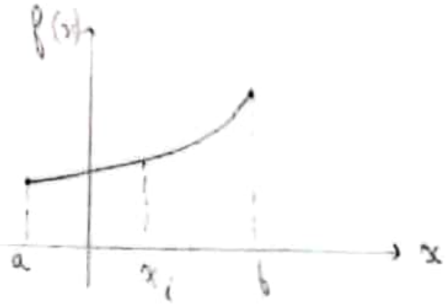
Soit $f\ [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$

Alors la fonction $x \to A(a;x;f)$ est dérivable sur $[a;b]$ et on a

$$[A(a;x;f)]' = f(x) \qquad x \in [a;b]$$

La fonction $x \to A(a,x,f)$ est une primitive de f sur $[a;b]$

Démonstration : cas d'une fonction monotone.



Montrons que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(a,x,f) - A(a,x_0,f)}{x - x_0} \overset{?}{=} f(x_0)$

$\cdot\ 0 \leq A(a,x_0,f) - A(a,x,f) \leq (x_0 - x) f(x_0)$

$f(x) \leq \dfrac{A(a,x_0,f) - A(a,x,f)}{x_0 - x} \leq f(x_0)$

Par passage à la limite $(x \to x_0^-)$ on trouve

$f(x) \leq \lim\limits_{x_0} \dfrac{A(a,x_0,f) - A(a,x,f)}{x_0 - x} \leq f(x_0)$

Retenons :

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F(x)$ une primitive de f sur $[a;b]$

Alors $\boxed{\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \forall x \in [a;b]}$

6) Propriétés :

Soit $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$: deux fonction ~~continue~~ continue par morceaux sur $[a,b]$

$P_1)$ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$P_2)$ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \forall c \in [a,b]$

$P_3)$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$P_4)$ $\alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$P_5)$ $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

$P_6)$ $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$

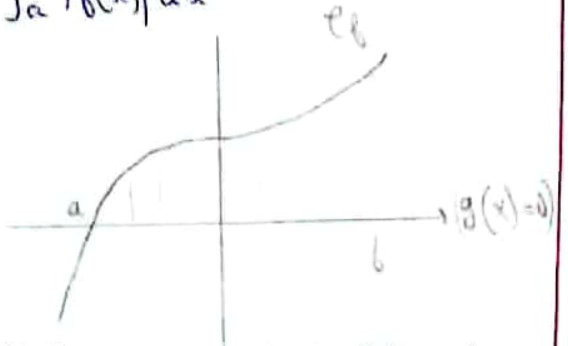
$P_7)$ $\left[\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx\right]^2 \leq \left[\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]\right.$

II Application (mesure de quelques formes géométriques)

1) Aire limité par une courbe

soit $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ Alors l'aire limitée par la courbe C_f l'axe des abscisse et les deux droites verticales d'abscisse a et b est donnée par.

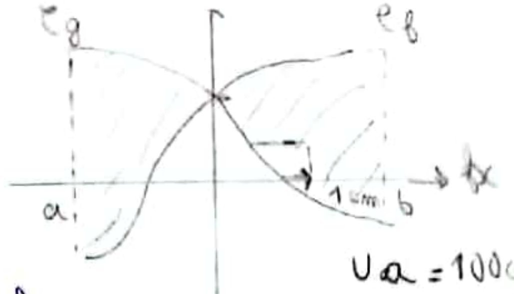
$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$



Pour calculer A, on doit determiner les x telque $\boxed{f(x)=0}$

Remarque: $\int_a^b f(x)\,dx$ represente l'aire algebrique limite par C_f, l'axe desabscisses et les droites verticales d'abscisse a et b

2) Aire limite par deux courbes :



$U_a = 100\,cm^2$

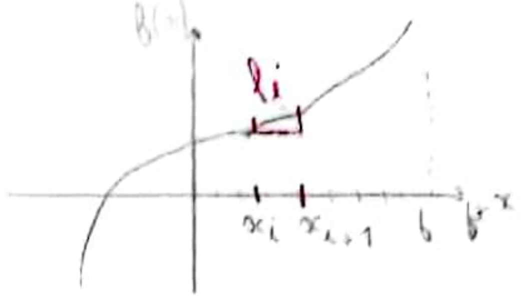
Soit $f \cdot g : [a;b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ Alors l'aire limitée par les courbes C_f et C_g sur $[a;b]$ est données par

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Pour calculer A, on doit determiner les x telque $\boxed{f(x) = g(x)}$

3) Longueur d'une courbe

Soit $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a;b]$ (derivable et f' est continue sur $[a;b]$)



La longueur de la courbe C_f sur $[a,b]$ est donnée par $\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$ u.l

Démonstration : soit $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ une subdivision de Riemann de $[a;b]$

On a $l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f(x_{i+1}) f(x_i)]^2}$

$$l_i = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$f : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{R}$ de classe C^1
Alors $\exists\, c_i \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

$= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\; (x_{i+1} - x_i)$, avec $c_i \in [x_i; x_{i+1}]$

$$l = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} l_i = \lim_{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(x_i)]}\,(x_{i+1} - x_i)$$

$$= A\left(a, b; \sqrt{1 + (f')^2}\right) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \frac{1}{2}x^2$

Calculons la longueur de $\mathcal{C}_f$ sur $[0;1]$

$$\ell(0,1;\mathcal{C}_f) = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$$

Prenons $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = h(t)$

R : Notons $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $C(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

alors : on a

$$1 + h^2(x) = C^2(x)$$

$$\& \; C^2(x) = \frac{1}{2}\left(C(2x)+1\right)$$

$$h'(x) = C(x)$$

$$C'(x) = h(x)$$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante (en particulier bijective)

Donc $\ell = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sqrt{1+h^2(t)}\; C(t)\, dt$

$x = 1 = h(t)$

$$\Rightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} = 1 \quad \Rightarrow e^t - e^{-t} = 2$$

$X = e^t$, on aura $X - \frac{1}{X} = 2$

$\to X^2 - 1 - 2X = 0$

$\Delta' = 1 + 1 = 2$

$X = 1 \pm \sqrt{2}$

Donc $e^t = 1 + \sqrt{2}$

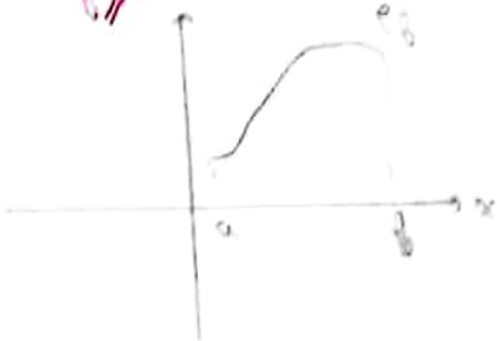
$$\ell = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} C^2(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} (C(2t)+1)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}h(2t) + t\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}h(\ln(1+\sqrt{2}) + \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\right]$$

4) Surface de révolution :

a) Cas $f \geq 0$



En faisant tourner la courbe $\mathcal{C}_f$ autour de l'axe des abscisses sur $[a;b]$ ~~on dit que~~ on obtient une surface S appelée surface de révolution définie par $\mathcal{C}_f$.

Alors, l'aire de la surface S est donnée par

$$\boxed{A = \int_a^b 2\pi\, f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx}$$

u

Exemple :

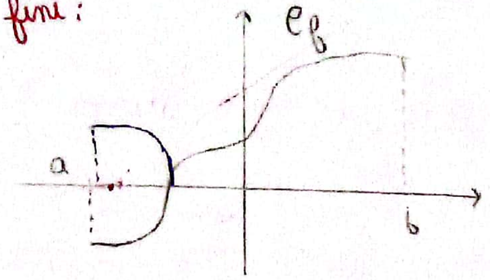
soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

Calculons l'aire de la surface de révolution définie par $\mathcal{C}_{f_1}$ autour de l'axe des abscisses sur $[0;1]$

$$A = \int_0^1 \pi x^2 \sqrt{1+x^2}\, dx$$

Prenons $x = h(t)$

b) Cas $f(x)$ change de signe en un nombre fini :



La surface de révolution $S(f;[a;b])$ peut s'obtenir aussi en faisant tourner la courbe $\mathcal{C}_{|f|}$ autour de l'axe des abscisses sur $[a;b]$

$$A(S(f,[a,b])) = A(S(|f|,[a;b])) =$$

$$= \boxed{2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}}$$

Developpement limité

I) Definition :

1) fonction negligeable :

soit $f,g : (a;b) \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in (a;b)$ fixé.

On dit que f est negligeable devant g "près" (au voisinage) de x_0, noté $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ si il existe une fonction $E(x)$ définie près de x_0 telle que $\begin{cases} f(x) = g(x).E(x), \text{ pour tout } x \text{ près de } x_0 \\ \lim\limits_{x_0} E(x) = 0 \end{cases}$

Cas particulier :

si $g(x) \neq 0$ près de x_0 (pas nécessairement en x_0), alors on aura

$$f(x) \underset{x_0}{=} g(x) \iff \lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemple :

On a $\sin(x) \underset{0}{=} \sqrt{x}$, car $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} =$

$$= \lim_{0} \sqrt{x} \cdot \frac{\sin(x)}{x} =$$

$$= \lim_{0} \sqrt{x} \cdot \lim_{0} \frac{\sin x}{x} = 0 \times 1 = 0$$

2) Definition du developpement limité :

soit $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in [a;b]$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On dit que f admet un developpement limité d'ordre n en x_0 noté $DL_n(f : x_0)$, s'il un polynôme $P_n(x)$ de degré inferieur ou egal à n tel que $f(x) - P_n(x) \underset{x_0}{=} o((x-x_0)^n)$ petit o

ou encore

$$f(x) \underset{x_0}{=} P_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

petit o

Exemple.

* f est derivable en x_0 alors

$DL_1(f, x_0)$ existe. En effet, on a

$\lim\limits_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe $(=l)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - l \right] = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-l(x-x_0)}{x-x_0} = 0$

c'est à dire $f(x)-f(x_0)-l(x-x_0) = o\left[(x-x_0)^1\right]$

$P_1(x) = a + bx$

3) Theoreme de Taylor :

soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction n fois derivable en x_0 ($x_0 \in (a,b)$ fixé)

Alors

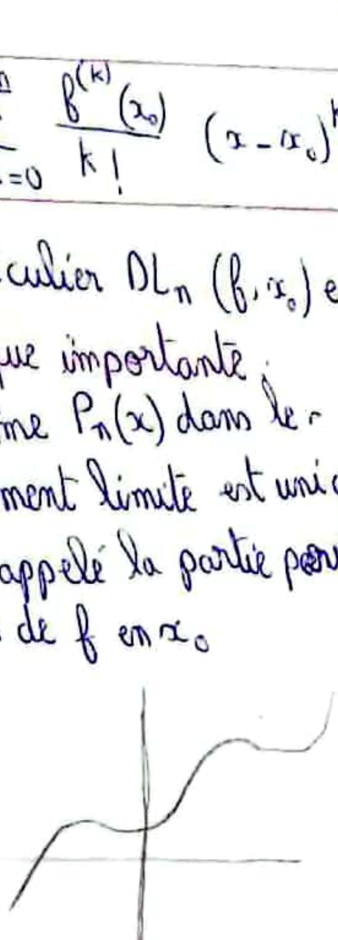
$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)}$$

• En particulier $DL_n(f, x_0)$ existe

4) Remarque importante :

Le polynôme $P_n(x)$ dans le developpement limité est unique.

$P_n(x)$ est appelé la partie principale d'ordre n de f en x_0



$DL_1(f, x_0) \to$ approche de f C_f par une droit.

$DL_2(f, x_0) \to$ approche C_f par une courbe plus précise et facile a representer (parabole)

II | Propriétes et operations

1) Propriétés :

P_1) si f admet un $DL_0(f; x_0)$ alors f est continue en x_0

P_2) si f admet un $DL_1(f; x_0)$ alors f est derivable en x_0

P_3) le developpement limité à un ordre n fixé est unique : si $f(x) \underset{x_0}{=} \boxed{P(x)} + o((x-x_0)^n)$

$\underset{x_0}{=} Q(x) + o((x-x_0)^n)$

alors $P(x) = Q(x)$

2) Operations :

a) Somme :

si $DL_n(f, x_0)$ et $DL_n(g, x_0)$ existent alors $DL_n(f+g, x_0)$ existe et on a

$$\boxed{P_{f+g}(x) = P_f(x) + P_g(x)}$$

Exemple. en utilisant la formule de Tay[lor]

on a $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ petite o

$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. petite o

Alors $\sin(x) + \cos(x) = x - \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} + o$

b) Produit :

~~si f(x)~~ si $DL_n(f, x_0)$ et $DL_n(g, x_0)$ existant alors $DL_n(f \times g, x_0)$ existant on a

(2) $\boxed{P_{f \times g}(x) = T_n(P_f(x) \times P_g(x))}$

où T_n est la tanque à l'ordre n

Exemple : On a

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Donc $\sin(x) \times \cos(x) =$

$$T_3\left[\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right] + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}$$

Cas particulier si $g(x) = \alpha$ une fonction constante

$$\boxed{\text{Alors } P_{\alpha f}(x) = \alpha \cdot P_f(x)}$$

c) Composition :

Prenons le cas $x_0 = 0$ et $g(x_0) = 0$

Si $DL_n(f,0)$ et $DL_n(g,0)$ existe alors $DL_n(f \circ g, 0)$ existe et on a

$$\boxed{P_{f\circ g}(x) = T_n(P_f(P_g(x)))}$$

Exemple : $g(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \cos(x)$

On a $\sin(x) \underset{0}{=} \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P_{\sin}(x)} + o(x^3)$

$$\cos(x) \underset{0}{=} \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{P_{\cos}(x)} + o(x^3)$$

Donc $\cos(\sin x) \underset{0}{=} T_3(P_{\cos}(P_{\sin}(x))) + o(x^3)$

$$\underset{0}{=} T_3\left(P_{\cos}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right) + o(x^3)$$

$$\underset{0}{=} T_3\left(1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2}\right) + o(x^3)$$

$$\underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Generalement :

On écrit $g(x) = g(x - x_0 + x_0)$

$$= \boxed{g(t + x_0)}$$

$$= g_1(t)$$

$$\boxed{DL_n(g, x_0) = DL_n(g(\cdot + x_0), 0)}$$

Exemple :

Calcul du $DL_2(\cos, \pi)$

On a $\cos(x) = \cos(x - \pi + \pi)$

$= \cos(t + \pi)$, avec $t = x - \pi$

$$\underset{0}{=} -\cos(t)$$

$$\underset{0}{=} -1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3)$$

$$\underset{0}{=} -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} + o((x-\pi)^2)$$

Remarque :

$$\cancel{DL_n(f \circ g, x_0)}$$

$$\cancel{g(x) = g(t + x_0)}$$

$$\cancel{f(g(x)) = f(g(x) - g(x_0) + g(x_0))}$$

$$\cancel{G(x)}$$

$$\cancel{= f(G(x) + g(x_0)) = F(G(x))}$$

$$\cancel{= F(G(x - x_0 + x_0)) = F(G(t + x_0))}$$

$DL_3(\sin(\cos) ; \pi)$

$\sin(\cos(x)) = \sin(\cos(x - \pi + \pi))$

$= \sin(\cos(t + \pi))$, avec $t = x - \pi$

$= \sin(\cos(t + \pi) - \cos\pi + \cos\pi)$

$= \sin(G(t) + \cos\pi)$

$= F \circ G(t)$, avec $\begin{cases} G(t) = \cos(t+\pi) - \cos\pi \\ F(u) = \sin(u + \cos\pi) \end{cases}$

d) Quotient :

On suppose que $g(x_0) \neq 0$
si $DL_n(f, x_0)$ et $DL_n(g, x_0)$ existant
alors $DL_n\left(\frac{f}{g}, x_0\right)$ existe et on a

$P_{\frac{f}{g}}(x)$ est le polynôme de degré inférieur
ou égal à n obtenu en faisant la
division suivant le puissances
croissantes de $P_g(x)$ par $P_g(x)$

Exemple : Dans la ~~p~~ pratique, on
procede comme la suite : Calculon
$DL_3\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} ; 0\right)$

On a $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$

$$= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)\right] \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} + o(x^3)$$

$$\boxed{\frac{1}{1-t} \underset{0}{=} 1 + t + t^2 + \dots + t^n + o(t^n)}$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] \times \left[1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]$$

$$= x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$P_{\frac{f}{g}} = \frac{1}{g(x_0)} T_n\left[\left(P_f(x) \cdot T_n\left(P_{F \circ \left(1 - \frac{g}{g(x_0)}\right)}\right)\right)\right]$$