FACULTE DES SCIENCES DE GABES UNIVERSITE DE GABES DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	FSG	A.U. : 2022-2023 Section : LGLSI1

EXAMEN D'ANALYSE 2

Nature de l'épreuve : D.S.☐ E.F.☒	Documents : autorisés ☐ non autorisés ☒
Date de l'épreuve : 14/06/2023	Calculatrice : autorisée ☐ non autorisée ☒
Durée de l'épreuve : 1H30mn	Session : principale ☐ contrôle ☒

EXERCICE 1. (5 points)

On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2023u_n + 2022v_n}{4045},\ v_{n+1} = \frac{2022u_n + 2023v_n}{4045}.$$

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer la suite (w_n) est géométrique.

(2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n.$$

(3) Prouver que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = u_n + v_n$. Montrer que la suite (t_n) est constante

(5) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 2. (8 points)

(1) Dans chacun des cas suivants étudier la convergence de la série de terme général u_n :

1) $u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ 2) $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ 3) $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{23}\right)$ 4) $u_n = \frac{5^n}{(n+2)!}$

5) $u_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 6) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ 7) $u_n = (-1)^n + \frac{\ln(n+2)}{n^2}$ 8) $u_n = \frac{1}{n!} + \frac{n!}{n^n}$.

(2) Sachant que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2+2n+5}{n!}$.

EXERCICE 3. (7 points)

(1) On considère l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$(E_1) \qquad \left(1+x^2\right) y' - 2xy = 2x,\ x \in \mathbb{R}.$$

a) Résoudre l'équation (E_1).
b) Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de (E_1) vérifiant la condition $y(0) = 0$.

(2) On considère l'équation différentielle (E_2) suivante :

$$(E_2) \qquad y'' - 2y' + y = 3x - 2 + 2e^x.$$

a) Résoudre l'équation (E_2).
b) Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de (E_2) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 5$ et $y'(0) = 6$

$\frac{1}{1}$