Exercice 5 .

1. *Soit* (u_n) *la suite réelle définie par :*

$$u_0 = 1, \;\; u_{n+1} + u_n = 2^n, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer u_n *en fonction de* n.

2. *Soit* (u_n) *la suite réelle définie par :*

$$u_0 = a \in \mathbb{R}, \;\; u_{n+1} = u_n^2, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 6 .

Soit $a > 0$. *On pose* $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.

1. (a) *Montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

   (b) *Justifier l'existence de* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq n_0 \Rightarrow |u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_n|.$$

   (c) *En déduire que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. *Étudier la convergence de chacune des suites suivantes :*

$$u_n = \frac{3^n + n!}{n! + 5^n} \qquad et \qquad v_n = \frac{n!}{3^n + 2^n}.$$

Exercice 7 .

Soit (u_n) *la suite donnée par* $u_0 = 0$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+1} = \frac{1 + \cos(u_n)}{2}.$$

1. *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}.$$

2. *En déduire que la suite* (u_n) *est de Cauchy.*

Exercice 8 .

Soit (u_n) *une suite réelle.*

1. *On suppose qu'il existe* $k \in]0, 1[$ *tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k \, |u_{n+1} - u_n|.$$

   (a) *Montrer que pour tous* $p, q \in \mathbb{N}$ *tels que* $q \leq p$, *on a :*

$$|u_p - u_q| \leq \frac{k^q}{1 - k} |u_1 - u_0|.$$

   (b) *En déduire que la suite* (u_n) *est de Cauchy.*

2. *On pose* $u_0 = \dfrac{3}{2}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

   (a) *Montrer que la suite* (u_n) *est minorée par* $\sqrt{2}$.

   (b) *Montrer qu'il existe* $k \in]0, 1[$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k \, |u_{n+1} - u_n|.$$

   (c) *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

Série 1

Suites réelles

Exercice 1 .
Donner un exemple dans chacune des situations suivantes :

1. *Une suite décroissante positive dont le terme général ne tend pas vers* 0.
2. *Une suite bornée non convergente.*
3. *Une suite positive non bornée ne tendant pas vers* $+\infty$.
4. *Une suite non monotone qui tend vers* 0.
5. *Une suite positive qui tend vers* 0 *et qui n'est pas décroissante.*

Exercice 2 .
Répondre par vrai ou faux, en justifiant, à chacune des assertions suivantes :

1. *Toute suite bornée est convergente.*
2. *Si* (u_n) *est croissante et est dominée par* (v_n) *convergente alors* (u_n) *est convergente.*
3. *La somme de deux suites monotones est une suite monotone.*
4. *Si* (u_n) *est une suite divergente alors* $(\sin u_n)$ *est divergente.*
5. *Si* $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *alors* (u_n) *et* (v_n) *sont de même nature.*
6. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ *alors* $\lim_{n \to +\infty} u_n^n = 1$.
7. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ *alors la suite* (u_n) *est convergente.*
8. *Pour que deux suites* (u_n) *et* (v_n) *soient adjacentes, il suffit que* (u_n) *soit croissante, majorée par* (v_n) *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Exercice 3 .
Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$ **2.** $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$ **4.** $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

5. $u_n = 3^n e^{-3n}$. **6.** $u_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}$.

Exercice 4 .
Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n+1)$ **2.** $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

3. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$; $a, b \in]0, +\infty[$ **4.** $u_n = \dfrac{\ln(n + e^n)}{n}$

5. $u_n = \dfrac{\ln(1 + \sqrt{n})}{\ln(1 + n^2)}$.