SERIE 1

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^2+37x-4}{8x^2-2}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^7-1}{52x^6+3x^2-2x}$
3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^7e^x-xe^{2x}}{x^3\ln(x)+x(\ln x)^5}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x+x^2+e^{x^3}}{x^7+5}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$
6. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}$
7. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
8. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\ln(x^2+1)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}$
9. $\lim_{x\to0^+} \frac{x^3}{\sqrt{1-x}}e^{\frac{1}{x(x-1)}}$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{9x^3}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x-1}}{(\ln x)^4}$
3. $\lim_{x\to3^+} \frac{2x^2-3x+2}{x^2-9}$
4. $\lim_{x\to1} \ln(x+3)-\ln(x-1)$
5. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}$
6. $\lim_{x\to3^+} \frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-9}$
7. $\lim_{x\to0^+} x^x$
8. $\lim_{x\to0^+} \frac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$
9. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+3)-\ln(x-1)$
10. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)-2\ln x$
11. $\lim_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{\sqrt{x+1}}$
12. $\lim_{x\to+\infty} x^4e^{-\sqrt{x}}$
13. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^3}}{x}$

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to0^+} x\ln x$
2. $\lim_{x\to1^+} (x-1)^2\ln(x-1)$

3. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+3) - \ln(x-1)$
4. $\lim_{x\to0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{\sqrt{x}-2}}{x-4}$

Exercice 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est non nulle au voisinage (près) de x_0. On suppose enfin que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

1. Motrer que $\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$.
2. En déduire $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^3)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+e^{-x})$.

Exercice 5. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to0^+} (1+x^3)^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1-5x)}{x}$
3. $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$
4. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
5. $\lim_{x\to0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$
6. $\lim_{x\to0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
7. $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$
8. $\lim_{x\to0} (1+x)^{\ln x}$
9. $\lim_{x\to0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$
10. $\lim_{x\to+\infty} x\left(\ln(\frac{x+5}{x+3})\right)$

Exercice 6. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to0} \left(\ln(e+x)\right)^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \left(\ln(1+e^{-x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 7. On considère la fonction $f(x) = (\ln x)^{\ln(e-x)}$ et on se propose de déterminer sa limite pour $x \to e^-$.

1. On pose $t = \frac{x}{e}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de t.
2. Montrer que $\lim_{t\to1^-} \frac{\ln(1+\ln t)}{t-1} = 1$.
3. Montrer que $\lim_{t\to1^-} \frac{1+\ln(1-t)}{\ln(1-t)} = 1$.
4. En déduire que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \exp\big(-(1-t)\ln(1-t)H(t)\big)$$

où $H(t)$ est une fonction telle que $\lim_{t\to1^-} H(t) = 1$.

5. En déduire $\lim_{x\to e^-} f(x)$.

Exercice 8. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis rechercher si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes de cet ensemble de définition :

1. $f_1(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2}$
2. $f_2(x) = \frac{x^2-2x-8}{x+2}$

3. $f_3(x) = \frac{x^2-2x-8}{\sqrt{x+2}}$
4. $f_4(x) = \frac{x\ln x}{x-1}$
5. $f_5(x) = \frac{x-1}{\ln x}$
6. $f_6(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue en a?
2. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \left(x - \lfloor x \rfloor\right)^2$ est-elle continue en a?

Exercice 10. Etudier la continuité au point x_0 des fonctions suivantes :

1. $x_0 = 2$ et $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x < 2 \\ x^2-1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$
2. $x_0 = -\frac{1}{2}$ et $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2+5x-4}{2x+1}, & \text{si } x \neq -\frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$
3. $x_0 = 0$ et $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$
4. $x_0 = 0$ et $f(x) = \begin{cases} x\ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$
5. $x_0 = 1$ et $f(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1), & \text{si } x > 1 \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$
6. $x_0 = 0$ et $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x}$.

Exercice 11. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\lfloor x \rfloor}{1-\lfloor x \rfloor}$
2. $\lim_{x\to0} \frac{1}{\lfloor \frac{3}{x} \rfloor}$

Exercice 12. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{1-x}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}$. Le but est de trouver la limite de f en 1^+.

1. Exprimer l'expression de $f(x)$ en fonction de t, où $t := 1 - x$.
2. Montrer que, pour tout $u > 0$,

$$0 < \frac{(1-u)^3}{\sqrt{u}} e^{\frac{1}{-u+u^2}} \leq (1-u)^3 \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$$

3. Déterminer $\lim_{u\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$ et conclure.

Exercice 13. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^3}}{x}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x+x^2+e^{x^3}}{x^3+5}$

Serie 1

Exercice 1 :

Determiner les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^2+37x+4}{8x^2-2}$

b) $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{x^7-1}{52x^6+3x^2-2x}$

c) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^7e^x-xe^{2x}}{x^3\ln(x)+x[\ln(x)]^5}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^x+x^2+e^{x^3}}{x^7+5}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\ln(x^2+1)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}$

i) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}\, e^{\frac{1}{x(x-1)}}$

Reponse :

a) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{-5x^3+3\cancel{7}x-4}{8x^2-2} = \left(\dfrac{-\infty+\infty-4}{+\infty-2}\ \text{F.I}\right)$

$\boxed{\begin{matrix} x^a \ll x^b \ (+\infty) \\ 0<a<b \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x^a \ll x^b \ (-\infty) \\ 0<a<b \end{matrix}}$ $x^2 \ll x^3 \ (-\infty)$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-5x^2}{8x^2} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-5}{8} = \dfrac{-5}{8}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^7-1}{52x^6+3x^2-2x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^7}{52x^6} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{52} = -\infty$

c) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^7e^x-xe^{2x}}{x^3\ln(x)+x[\ln(x)]^5} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-xe^{2x}}{x^3\ln(x)}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-e^{2x}}{x^2\ln(x)} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^x+x^2+e^{x^3}}{x^7+5} = \cancel{\dfrac{e^{x^3}}{x^7}}$

on pose $t=-x$ et on aura $x\to-\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^x+x^2+e^{x^3}}{x^7+5} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{-te^{-t}+t^2+e^{-t^3}}{-t^7+5}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\frac{-t}{e^t}+t^2+\frac{1}{e^{t^3}}}{-t^7+5} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{t^2}{-t^7}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-1}{t^5} = \dfrac{-1}{+\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) \left(= \dfrac{1}{+\infty}\ln\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)\ \text{F.I}\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x}{x}\right) \left(= \dfrac{1}{+\infty}\times(+\infty)\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x}[\ln(e^x)-\ln(x)] = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x}[x-\ln(x)]$

$= \lim\limits_{+\infty} 1-\dfrac{\ln(x)}{x} = 1-\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$

$= 1-0 = 1$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}$

$\lim f+g$ ✱ F.I

$\lim f + \lim g$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{(x^2+2x)-(x^2+x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{2x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\lim f+g = \lim f + \lim g$

en cas de $\nexists$ F.I

i) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^3}{\sqrt{1-x}}\, e^{\frac{1}{x(x-1)}} = \frac{0}{1}\, e^{\frac{1}{-0^+}}$
$= 0 \times e^{-\infty} = 0\times 0$
$= 0$

Exercice 5 :

1) $\lim\limits_{0^+} (1+x^3)^{\frac1x}$ $\left(= (1+0)^{\frac{1}{0^+}} = 1^{+\infty} = e^{+\infty \cdot \ln(1)}\right.$
$= e^{(+\infty)\times 0}$ F.I

$$\boxed{= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)}$$

$= \lim\limits_{0^+} e^{\frac1x \cdot \ln(1+x^3)} = \lim\limits_{0^+} e^{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} =$
$= \lim\limits_{0^+} e^{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}$, avec $f(x)=\ln(1+x^3)$
$= e^{f'(0)} = e^0 = 1$

2) $\lim\limits_{0^+}\frac{\ln(1+5x)}{x} = \lim\limits_{0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, avec $f(x)=\ln(1+5x)$
$= [\ln(1+5x)]' = \left[\frac{5}{1+5x}\right] = 5$

3) $\lim\limits_{+\infty} x\ln\left(1+\frac1x\right)$
On pose $t=\frac1x$ ($x\to+\infty \Rightarrow t\to0$)
$=\lim\limits_{t\to0}\frac1t \ln(1+t) = \lim\limits_{0} \frac{\ln(1+t)}{t}$
$=\lim\limits_{0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$, avec $f(t)=\ln(1+t)$
$= [\ln(1+t)]'(0) = \left[\frac{1}{1+t}\right](0) = 1$

7) $\lim\limits_{0^\pm}\frac{\ln(1+x)}{x^2} = \lim\limits_{0^\pm}\frac1x \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$
$= \lim\limits_{0^\pm}\frac1x \times \lim\limits_{0^\pm}\frac{\ln(1+x)}{x}$
$= \frac{1}{0^\pm}\times[\ln(1+x)]'(0) = \pm\infty\times1 = \pm\infty$

10) $\lim\limits_{+\infty} x\ln\left(\frac{x+5}{x+3}\right)$ $\left(= +\infty \times \ln(1) = \infty\times 0\right.$ F.I
On pose $t=\frac1x$.

$=\lim\limits_{t\to0^+}\frac1t\ln\left(\frac{\frac1t+5}{\frac1t+3}\right) = \lim\limits_{0^+}\frac1t \ln\left(\frac{5t+1}{3t+1}\right)$
$=\lim\limits_{0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}$, avec $f(t)=\ln\left(\frac{5t+1}{3t+1}\right)$
$=\left[\ln\left(\frac{5t+1}{3t+1}\right)\right]'(0)$
$=\left(\frac{\frac{5(3t+1)-3(5t+1)}{(3t+1)^2}}{\frac{5t+1}{3t+1}}\right)(0) = 2$

Exercice 4 :

soit $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur I sauf peut être en x_0 ($x_0\in I$)
On suppose $\lim\limits_{x_0} f(x)=0$
1) Montrons que
$\lim\limits_{x_0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$

On suppose $t=f(x)$ ($x\to x_0 \Rightarrow t\to0$)
Donc $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = \lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}$
$= [\ln(1+t)]'(0) = \left[\frac{1}{1+t}\right](0)=1$

Autrement :
Soit $\varepsilon>0$, cherchons $\alpha>0$ tel que pour $|x-x_0|<\alpha$, on $\left|\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} - 1\right| \leq \varepsilon$

D'après l'hypothèse
$(*)_2$ $\exists \alpha_1>0$ tel que pour $|x-x_0|\leq\alpha_1$, on a $|f(x)|\leq\varepsilon$
D'autre part, on sait que
$(*)_1$ $\exists\alpha_2>0$ $|y|<\alpha_2 \Rightarrow \left|\frac{\ln(1+y)}{y}-1\right|\leq\varepsilon$
$\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$

$(*_1)$ et $(*_2)$ donnent
$\exists\, \alpha_1 > 0$, pour $|x - x_0| \leq \alpha_1$,
on a $|f(x)| \leq \alpha_2$
et donc $\left|\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} - 1\right| \leq \varepsilon$
d'après $(*_1)$

2) $\lim_{0} \frac{\ln(1+x^3)}{x}$

$= \lim_{0} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3} \times x^2 = \lim_{0} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3} \times \lim_{0} x^2$
$= 1 \times 0 = 0$

$\lim_{+\infty} x \ln(1+e^{-x}) = \lim_{+\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}} \times x e^{-x}$

$= \lim_{+\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}} \times \lim_{+\infty} x e^{-x}$

Exercice 6 :

1) $\lim_{x \to 0^{\pm}} [\ln(e+x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{0^{\pm}} e^{\frac{1}{x}\ln(e+x)}$

$= \lim_{0^{\pm}} e^{\frac{f(x)-f(0)+f(0)}{x}} = \lim_{0^{\pm}} e^{\frac{f(x)-f(0)}{x}} \times e^{\frac{f(0)}{x}}$ avec $f(x) = \ln(e+x)$

$= e^{f'(0)} \times e^{\frac{1}{0^{\pm}}}$

$= e^{e^{-1}} \times e^{\pm\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{en } 0^+ \\ 0 & \text{en } 0^- \end{cases}$

$f'(x) = \frac{1}{x+e} \Rightarrow f'(0) = e^{-1}$

2) $\lim_{+\infty} [\ln(1+e^{-x})]^{\frac{1}{x}} = \lim_{+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+e^{-x})}$

$\left(= e^{\frac{1}{+\infty}\ln(1+e^{-\infty})} = e^{0 \times 0} = 1 \right)$

Exercice 11 :

1) $\lim_{+\infty} \frac{2x+[x]}{1-[x]} \quad \left(= \frac{+\infty+\infty}{1-\infty} = \frac{+\infty}{-\infty} \text{ F.I} \right)$

$\boxed{[x] \leq x < [x]+1}$ en $+\infty$, x et $[x]$ sont de même ordre pas de domination entre eux

$= \lim_{+\infty} \frac{2x+[x]}{-[x]}$

$= \lim_{+\infty} -2\frac{x}{[x]} - 1 = -2\left(\lim_{+\infty} \frac{x}{[x]}\right) - 1 \quad (*_1)$

D'autre part on a ; $1 \leq \frac{x}{[x]} < 1 + \frac{1}{[x]}$

$\Rightarrow 1 \leq \lim_{+\infty} \frac{x}{[x]} \leq 1 + \lim_{+\infty} \frac{1}{[x]}$

c'est à dire $1 \leq \lim \frac{x}{[x]} \leq 1 + 0$

Donc $\lim_{+\infty} \frac{x}{[x]} = 1 \quad (*_2)$

$(*_1)$ et $(*_2)$ donnent
$\lim_{+\infty} \frac{2x+[x]}{1-x} = (-2) \times 1 - 1$
$\Rightarrow \lim_{+\infty} \frac{2x+[x]}{1-x} = -3$

Autrement :
On a $[x] \leq x < [x]+1$
$\Rightarrow 2[x] \leq 2x < 2[x]+2$
$\Rightarrow \boxed{3[x] \leq 2x+[x] < 3[x]+2} \quad (*_1)$

D'autre part on a $x - 1 < [x] \leq x$
$\Rightarrow -x+1 > -[x] \geq -x$
$\Rightarrow 2-x > 1-[x] \geq 1-x$
$\boxed{\frac{1}{2-x} < \frac{1}{1-[x]} \leq \frac{1}{1-x}}$
$*_2$

$*_1$ et $*_2$ donnent

$$\frac{3[x]}{2-x} \geq \frac{2x+[x]}{1-x} \geq \frac{3[x]+2}{1-x}$$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} \frac{3[x]}{2-x} \geq \lim_{+\infty} \frac{2x+[x]}{1-[x]} \geq \lim_{+\infty} \frac{3[x]+2}{1-x}$$

$(*_3)$

D'autre part on a

$$\lim_{+\infty} \frac{3[x]}{2-x} = \lim_{+\infty} \frac{3[x]}{x(\frac{2}{x}-1)} \Rightarrow$$

$$\lim_{+\infty} \frac{[x]}{x} \times \lim_{+\infty} \frac{1}{\frac{2}{x}-1} = 3 \times 1 \times \frac{1}{(0-1)}$$

$$= -3 \quad (*_4)$$

$$\lim_{+\infty} \frac{3[x]+2}{1-x} = \lim_{+\infty} \frac{3[x]\left(1+\frac{2}{3[x]}\right)}{x(\frac{1}{x}-1)}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{3[x]}{x} \times \lim_{+\infty} \frac{1+\frac{2}{3[x]}}{\frac{1}{x}-1}$$

$$= 3 \times 1 \times \left(\frac{1+0}{0-1}\right) = -3 \quad (*_5)$$

(x_3), (x_4) et (x_5) donnent

$$\lim_{+\infty} \frac{2x+[x]}{1-[x]} = -3$$

2) $\lim_{-\infty} \frac{1}{\left[\frac{3}{x}\right]} = \frac{1}{\left[\frac{3}{0}\right]} = \frac{1}{[\infty]} = \frac{1}{\infty} = 0$

Ex 12 :

1) $x \longrightarrow \frac{x^3}{\sqrt{1-x}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}$

changement de variable

$t = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t$

$$f(x) = \frac{(1-t)^3}{\sqrt{1-(1-t)}} e^{\frac{1}{(1-t)(1-t-1)}}$$

$$= \frac{(1-t)^3}{\sqrt{t}} e^{\frac{1}{-t(1-t)}}$$

2) Montrons que pour tout $1 > u > 0$

$$0 \leq \frac{(1-u)^3}{\sqrt{u}} e^{\frac{1}{-u+u^2}} \leq (1-u)^3 \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}} \; ?$$

$(*_1)$ $(*_2)$

$(*_1)$ on a $u < 1 \Rightarrow (1-u)^3 > 0$

$$\Rightarrow \frac{(1-u)^3}{\sqrt{u}} e^{\frac{1}{-u+u^2}} > 0$$

$(*_2)$ on commence pour montrer

$$e^{\frac{1}{-u+u^2}} \leq e^{-\frac{1}{u}}$$

on a

$$\frac{e^{\frac{1}{-u+u^2}}}{e^{-\frac{1}{u}}} = e^{\frac{1}{-u+u^2}+\frac{1}{u}}$$

$$= e^{\frac{u+(-u+u^2)}{u\times(-u+u^2)}} = e^{\frac{u^2}{u\times(-u+u^2)}}$$

Donc $e^{\frac{1}{-u+u^2}} \leq e^{-\frac{1}{u}}$

~~Dou~~

D'où $\frac{(1-u)^3}{\sqrt{u}} e^{\frac{1}{-u+u^2}} \leq \frac{(1-u)^3}{\sqrt{u}} e^{-\frac{1}{u}}$

3) $\lim_{u \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$

on pose $y = -\frac{1}{u} \Rightarrow u = -\frac{1}{y}$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{e^y}{\sqrt{-\frac{1}{y}}} = \lim_{-\infty} \sqrt{-y} \times e^y = 0$$

$$\boxed{e^y \gg (-y)^a \atop -\infty}$$

$$\lim_{-\infty} (-y)^a \times e^y = 0$$

Exercice 2 :

1) $\lim\limits_{+\infty} \frac{e^{2x}}{9x^3} \left(= \frac{+\infty}{-\infty} \text{ F.I}\right)$

$= +\infty$, car $e^{2x} \gg x^3$

2) $\lim\limits_{+\infty} \frac{e^{2x-1}}{(\ln(x))^4} = +\infty$ car $e^{2x} \gg (\ln(x))^4$

3) $\lim\limits_{3^+} \frac{2x^2-3x+2}{x^2-9} = \frac{18-9+2}{0^+} = \frac{11}{0^+} = +\infty$

6) $\lim\limits_{3^+} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9} \left(= \frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^+}\right)$
$= +\infty - \infty$ FI

$= \lim\limits_{3^+} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)(x+3)}$

$= \lim\limits_{3^+} \frac{1}{x-3}\left[1 - \frac{1}{x+3}\right] = \lim\limits_{3^+} \frac{1}{0^+}\left[1-\frac{1}{6}\right] = +\infty$

7) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = \lim\limits_{0^+} e^{x\ln(x)} \left(= e^{0(-\infty)} \text{ F.I}\right)$

on pose

$t = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow 0$, car $x \gg \ln(x)$ en 0^+

$= \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{\ln(t)}{t}} = e^0$, car $\ln(t) \ll t$

9) $\lim\limits_{+\infty} \ln(x+1) - \ln(x-1) \quad (= +\infty - \infty \text{ F.I})$

$= \lim\limits_{+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim\limits_{+\infty} \ln(1) = \ln(1) = 0$

10) $\lim\limits_{+\infty} \ln(x^2+1) - 2\ln(x)$

$= \lim\limits_{+\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \lim\limits_{+\infty} \ln(1)$
$= \ln(1) = 0$

12) $\lim\limits_{+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x^4}{e^{\sqrt{x}}} = 0$

$\boxed{\text{car } e^{x^a} \gg x^b,\ \forall\, a, b > 0 \text{ fixés}}$

Exercice 8 :

1) $f_1(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2}$

$D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2; +\infty[$

f_1 admette un prolongement par continuite en 2 . veut dire f_1 admette une limite finie en 2

$\lim\limits_{2} f_1(x) = \lim\limits_{2} \frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} \left(= \frac{2}{0} - \frac{2}{0} = \pm\infty - (\pm\infty) \text{ F.I}\right)$

$= \lim\limits_{2} \frac{1}{x-2}\left(2 - \frac{3}{x+2}\right)$

$= \frac{1}{0} \times \left(2 - \frac{3}{4}\right) = \infty$

Donc f_1 n'admet pas de prolongement par infinité en 2

Exercice 13 :

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xe^x + x^2 + e^{x^3}}{x^3+5}$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{e^{x^3}}{x^3}$, car $e^{x^3} \gg x^2$ et $e^{x^3} \gg e^x$

$= +\infty$, car $e^{x^3} \gg x^3$

Exercice 7 :

$f(x) = (\ln x)^{\ln(e-x)}$

1) On pose $t = \frac{x}{e} \Rightarrow x = e.t$

On a $f(x) = [\ln(x)]^{\ln(e-x)} = [\ln(e.t)]^{\ln(e-et)}$

$= [1 + \ln(t)]^{(1+\ln(1-t))}$

2) Montrons que $\lim\limits_{1^-} \frac{\ln(1+\ln t)}{t-1} \overset{?}{=} 1$

$\lim\limits_{1^-} \frac{\ln(1+\ln t)}{t-1} \left(= \frac{\ln(1+0)}{0^+} = \frac{0}{0} \text{ F.I}\right)$

$= \lim\limits_{1^-} \frac{g(t)-g(1)}{t-1} = [\ln(1+\ln t)]'(1)$

$= \left[\frac{\frac{1}{t}}{1+\ln t}\right](1) = \frac{1}{1} = 1$

3) Montrons que $\lim\limits_{1^-} \frac{1+\ln(1-t)}{\ln(1-t)} \overset{?}{=} 1$

$\lim\limits_{1^-} \frac{1+\ln(1-t)}{\ln(1-t)} \left(= \frac{1+\ln(0^+)}{\ln(0^+)} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ F.I}\right)$

$= \lim\limits_{1^-} \frac{\ln(1-t)}{\ln(1-t)}$, car $\ln(1-t) \gg 1$ en 1^-

$= \lim\limits_{1^-} 1 = 1$