Université de Gabès
Faculté des Sciences de Gabès

LGLSI 1
Novembre 2023

SERIE 3

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0;\ 3]$ par

$$\begin{cases} -1, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3, & \text{si } x = 1 \\ -2, & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4, & \text{si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Soit $x \in [0;\ 3]$. Calculer $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0;\ 3]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0;\ 3]$?

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^1 \frac{-1}{3+e^{-x}}\mathrm{d}x, \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\mathrm{d}x, \quad \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \cos(x)e^x\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. Soit $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$ et $G(x) = \int_x^{x+\frac{1}{2}} dt$. Déterminer le domaine de définition des fonctions F et G.

Exercice 4. Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[-5;\ 6]$.

Exercice 5. Représenter, puis calculer l'aire des régions du plan suivantes :

1. $D_1 = (x;\ y) \in [0;\ 1] \times [0;\ 1] \,/\, x \leq y \leq 2x$.
2. $D_2 = (x;\ y) \in [0;\ 1] \times [0;\ 1] \,/\, x^2 + y^2 \geq 1$.
3. D_3 est le triangle de sommets $A = (0;\ 1)$, $B = (1;\ 3)$ $C = (-1;\ 4)$.
4. D_4 est le quadrilatère $ABCD$ de sommets $A = (0;\ 1)$, $B = (1;\ 2)$, $C = (2;\ 4)$ et $D = (-1;\ 2)$.

Exercice 6. Retrouver le calcul de l'aire des surfaces de révolution telles que la sphère, le cylindre et le tétraèdre régulier.

cône

Serie 3

Exercice :

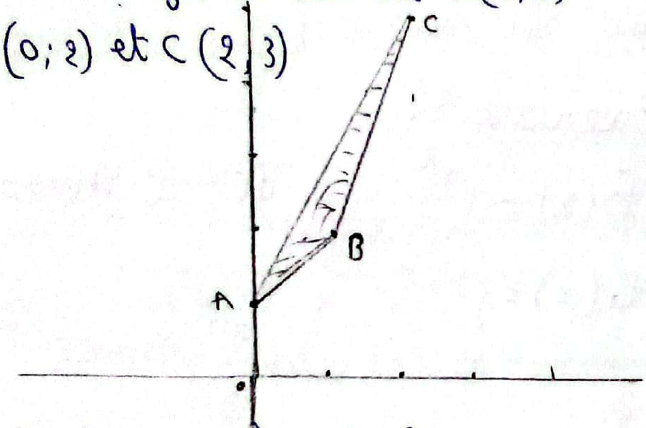
Representer, puis calculer l'air de chacune des regions suivantes des plan

$D_1 = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] / x \leq y \leq 2x\}$

$D_2 = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] / x^2 + y^2 \geq 1\}$

$D_3 = \{$ le triangle de sommets $A(0;1), B(1;2)$, et $C(2,4)$

$D_4 =$ le triangle de sommets $A(1;0)$ $B(0;2)$ et $C(2;3)$



on a $(D_3) = a(D_3') + a(D_3'')$

$a(D_3') = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx$

$a(D_3'') = \int_1^2 [f(x) - h(x)]\,dx$

Il reste à determiner $f(x), g(x)$ et $h(x)$

$f(x) = ax+b$

$A \in \mathcal{C}_f \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow \boxed{b=1}$

$C \in \mathcal{C}_f \Rightarrow f(2) = 5 \Rightarrow 2a+b$

$\Rightarrow a = \frac{5-1}{2} = 2$

Donc $f(x) = 2x+1$

$\cdot\, g(x) = ax+b$

$A \in \mathcal{C}_g \Rightarrow g(0) = 1 \Rightarrow \boxed{b=1}$

$B \in \mathcal{C}_g \Rightarrow g(1) = 1 \Rightarrow a+b = 2$

$\Rightarrow \boxed{a = 2-1 = 1}$

Donc $g(x) = x+1$

$\cdot\, h(x) = ax+b$

$B \in \mathcal{C}_h \Rightarrow h(1) = 2 \Rightarrow \boxed{a+b=2}$

$\Rightarrow a = 2-b$

$C \in \mathcal{C}_h \Rightarrow h(2) = 5 \Rightarrow \boxed{2a+b=5}$

$4 - 2b + b = 5$

$\Rightarrow \boxed{b=1}$

D'ou $\boxed{a=3}$

Donc $h(x) = 3x-1$

D'où $a(D_3') = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}[x^2]_0^1 = \frac{1}{2}$ u.a

$a(D_3'') = \int_1^2 (-x+2)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2$

$= -\frac{4}{2} + 4 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ u.a

Donc $a(D_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ u.a

$= 1$ u.a

Exercice 1 :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

1) $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$ (relation chasles)

$= \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 -2\,dx + \int_2^3 4\,dx$

$= [x]_0^1 + [-2x]_1^2 + [4x]_2^3$

$= (1) + (-4+2) + (12-5) = 3$

2) soit $x \in [0;3]$

calculons $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

1^{er} cas $x \in [0;1]$

$F(x) = \int_0^x 1\,dt = [t]_0^x = \boxed{x}$

2^{eme} cas : $x \in [1;2]$

$F(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt$

$= 1 + \int_1^x -2\,dt = 1 - 2[t]_1^x$

$= 1 - 2(x-1) = \boxed{-2x+3}$

3ème cas : $x \in [2;3]$

$F(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt$

$= 1 - 2 + \int_2^x 4\,dt = -1 + 4[t]_2^x$

$= -1 + 4(x-2) = \boxed{4x-9}$

donc :

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -2x+3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 4x-9 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

3). f est continue sur $[0;1]$, car c'est la restriction d'une fonction continue $(x \mapsto x)$

- f est continue sur $[1;2]$ " " " " " " " " $(x \mapsto -2x+3)$
- f est continue sur $[2;3]$ car .... ------ $(x \mapsto 4x-9)$

Donc F est continue sur $[0;3]$

$[0;1] \longrightarrow$ droite en 0, gauche en 1 et continue sur $]0,1[$

$[1;2] \rightarrow$ droite en 1, gauche en 2 et continue sur $]1;2[$

$[2;3] \longrightarrow$ droite en 2 ; gauche en 3 et continue sur $]2;3[$

. un raisonnement pareil donne F et derivable à gauche en 1 ; 2 et 3 et derivable à droite en 0, 1 et 2 et derivable sur $]0;1[\cup]1;2[\cup]2,3[$

Il reste la derivabilité de F en 1 et 2.

On a $F'_g(1) = [x]'(1)$

$= [1](1) = 1$

$F'_d(1) = [-2x+3]'(1) = [-2](1)$

$= -2$

$F'_d(1) \neq F'_g(1)$ donc F n'est pas derivable en 1 : cela implique que F n'est pas derivable sur $[0;3]$

Exercice 3 :

$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$ et ~~G(x)=~~

$G(x) = \int_x^{x+\frac{1}{x}} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$

$D_F = ?$

La fonction $t \longrightarrow \frac{1}{\ln(t)}$ et definie sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc a l'implication suivante

$x \in D_F \Rightarrow [x;x^2] \subset \mathbb{R}_+^*$

~~1er cas : x ∈ ...~~

1^{er} cas : $x \in]0,+\infty[$

$\Rightarrow x^2 \in]0;+\infty[$ ce qui est possible

Donc $D_F = \mathbb{R}_+^*$

~~Df~~ $D_{\frac{1}{t\ln(t)}} =$ ~~$\mathbb{R}$~~ $]0,1[\cup]1,+\infty[$

$x \in D_G = [x; x+\frac{1}{2}] \subset]0,1[\cup]1,+\infty[$

1er cas : $x \in]0,1[$

$\Rightarrow 0 < x+\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

Donc $x \in]0;\frac{1}{2}[$

2eme cas : $x \in]1;+\infty[$

$\Rightarrow x+\frac{1}{2} > 1$

$\Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Donc $x \in]1,+\infty[$

Exercice 4 :

~~Res~~ Premièrement on resoudre l'équation

$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2}$ donc $[-5;6]$

On aura $x^2 + x^4 - 2 = 0$

Prenons $t = x^2$, et donc on aura

$t^2 + t - 2 = 0$

$\Delta = 9$

$t_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$ et $t_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$

Donc $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1$

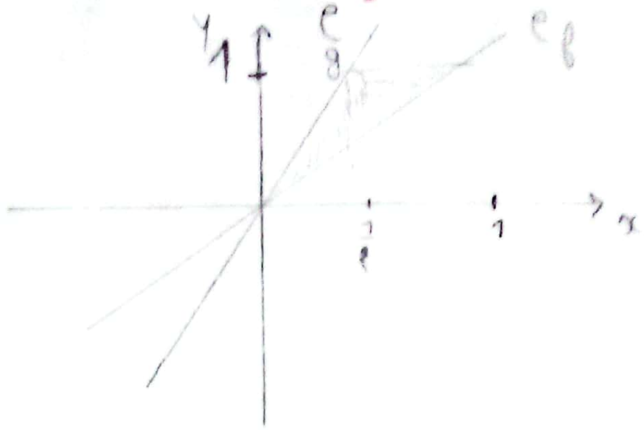
$\Rightarrow x = \pm 1$

x		-1		1		6
$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{1+x^2}$	+	0	-	0	+	

donc $A = \int_{-5}^{-1}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx + \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx + \int_{1}^{6}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

= "A la maison"

Exercice 5 :



On va representer la courbe de $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$

Donc $A(D_1) = \int_0^{\frac{1}{2}}[g(x)-f(x)]dx + \int_{\frac{1}{2}}^{x_0}[g(x)-f(x)]dx$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{x}[1-x]dx$

x_0 verifie $f(x_0) = 1$

$\Rightarrow x_0 = 1$

Donc $A(D_1) = \frac{1}{2}[x^2]_0^{\frac{1}{2}} + [x - \frac{1}{2}x^2]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + [1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}]$

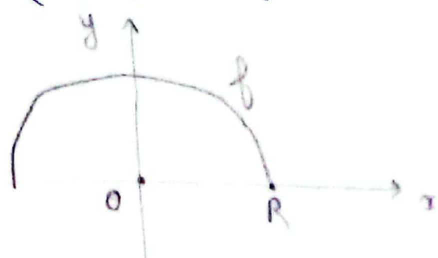
$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ u.a

~~Rem~~

D_2 et D_4 "a la maison"

Exercice 6 :

Soit $S(O;R)$ une sphère de rayon R



$S(O;R)$ peut s'obtenir en fait tourner le demi cercle $\mathcal{C}$ autour de l'axe des abscisses

D'autre part, $\mathcal{C}$ est le graphe (représentation graphique) de la fonction $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ avec $x \in [-R, R]$

$(x^2 + y^2 = R^2)$

Donc $A(S) = \int_{-R}^{R} 2\pi f(x) \times \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

$$= \int_{-R}^{R} 2\pi \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2 (R^2 - x^2)}\, dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-R}^{R} \sqrt{(R^2 - x^2) \times \frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi R \cdot \int_{-R}^{R} dx = 2\pi R\, [x]_{-R}^{R}$$

$$= 4\pi \cdot R^2$$