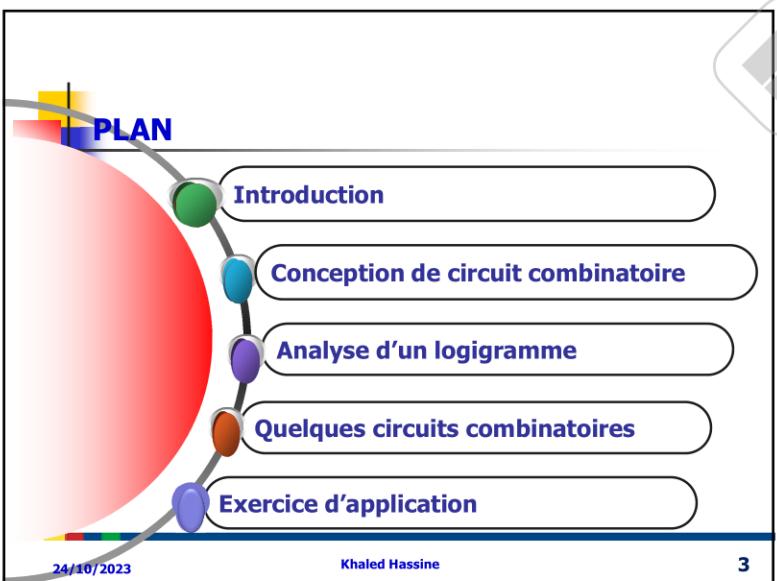




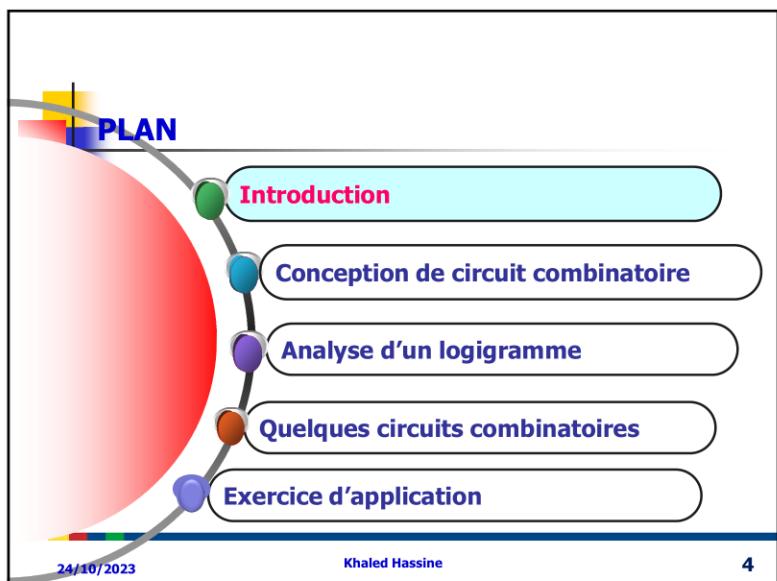
1



2



3



4

Introduction

- Les opérateurs que nous avons vus précédemment sont des opérateurs élémentaires dits **booléens** car ils réalisent les opérations logiques de l'algèbre de Boole.
- Pour ces circuits, l'apparition des données à l'entrée d'un opérateur entraîne immédiatement en sortie, le passage à l'état défini par la fonction de l'état logique correspondant.

24/10/2023

Khaled Hassine

5

5

Objectifs du chapitre

- Présenter la méthode de **conception** d'un circuit combinatoire.
- Etudier quelques circuits combinatoires usuels à savoir
 - l'additionneur,
 - les multiplexeurs et démultiplexeurs,
 - les codeurs et décodeurs.

24/10/2023

Khaled Hassine

6

6

PLAN

- Introduction
- Conception de circuit combinatoire
- Analyse d'un logigramme
- Quelques circuits combinatoires
- Exercice d'application

24/10/2023

Khaled Hassine

7

7

Etapes de conception d'un circuit combinatoire

- Génération de l'expression booléenne** de la fonction logique désirée connue par les valeurs d'entrée et les valeurs de sortie des variables.
- Simplification** de ladite expression en vue d'obtenir le circuit le plus simple possible.
- Recherche éventuelle d'une expression permettant de réaliser le circuit combinatoire correspondant (appelé aussi **logigramme**) avec un **jeu restreint d'opérateurs donnés**.

24/10/2023

Khaled Hassine

8

8

Etapes de conception

- Génération
- Simplification
- Jeu restreint d'opérateurs

24/10/2023

Khaled Hassine

9

Etapes de conception

- Génération
- Simplification
- Jeu restreint d'opérateurs

24/10/2023

Khaled Hassine

10

9

10

Expression Booléenne

- Toute fonction logique, donnée par une table de vérité ou par une expression littéraire, peut être représentée par une expression booléenne utilisant les trois opérateurs de base de l'algèbre de Boole (ET, OU, NON).

24/10/2023

Khaled Hassine

11

Exemple : F fonction à 4 variables

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0

24/10/2023

Khaled Hassine

12

11

12

Exemple

- La première ligne de ce tableau (partie de gauche) exprime que F est vrai si A = B = C = D=0. Ceci peut être formulé par :

$$\overline{A} \times \overline{B} \times \overline{C} \times \overline{D} = 1$$

24/10/2023

Khaled Hassine

13

13

Expression Booléenne

- Le même raisonnement donne que F=1 si :

$$\overline{A} \times \overline{B} \times \overline{C} \times \overline{D} = 1$$

$$ou \quad \overline{A} \times \overline{B} \times \overline{C} \times D = 1$$

$$ou \quad A \times \overline{B} \times \overline{C} \times \overline{D} = 1$$

$$ou \quad A \times \overline{B} \times \overline{C} \times D = 1$$

- Ceci s'écrit plus simplement comme suit :

$$F = 1 Si \overline{ABCD} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} = 1$$

$$\Rightarrow F = \overline{ABCD} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D}$$

24/10/2023

Khaled Hassine

14

14

Somme des produits

- Nous obtenons ainsi une première expression de F dite **somme des produits** (ou **de minterm**). Cette façon, très générale, d'écrire une fonction booléenne est aussi appelée **somme canonique de produits**.

- Par convention, on pose :

$$M_0 = \overline{ABCD} \quad M_1 = \overline{ABC}\bar{D} \quad \dots$$

$$F(A,B,C,D) = \sum(M_0, M_1, M_8, M_9)$$

$$F(A,B,C,D) = \sum M(0,1,8,9)$$

24/10/2023

Khaled Hassine

15

15

Autre forme

- La même méthode nous permet de calculer le complément de F comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{F} &= \overline{\overline{ABCD} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D}} \\ &= \overline{\overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D}} \end{aligned}$$

et par application des lois de De Morgan, on obtient:

$$\begin{aligned} F &= \overline{\overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D}} \\ &= \overline{\overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D} + \overline{ABC}\bar{D}} \\ &= (A+B+\bar{C}+D) \times (A+B+\bar{C}+\bar{D}) \times (A+\bar{B}+C+D) \times (A+\bar{B}+C+\bar{D}) \\ &\quad \times (A+\bar{B}+\bar{C}+D) \times (A+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}) \times (\bar{A}+B+\bar{C}+D) \times (\bar{A}+B+\bar{C}+\bar{D}) \\ &\quad \times (\bar{A}+\bar{B}+C+D) \times (\bar{A}+\bar{B}+C+\bar{D}) \times (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+D) \times (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}) \end{aligned}$$

24/10/2023

Khaled Hassine

16

16

Produit des sommes

- Nous obtenons ainsi une deuxième expression dite **produit des sommes** (ou de **Maxterm**). Cette écriture est appelée **produit canonique de sommes**. Par convention, on pose :

$$P_0 = (A + B + C + D)$$

$$P_1 = (A + B + C + \bar{D})$$

- On peut ainsi écrire la fonction F comme suit :

$$F(A, B, C, D) = \prod (P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15})$$

$$F(A, B, C, D) = \prod P(2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

24/10/2023

Khaled Hassine

17

17

Etapes de conception

- Génération
- Simplification
- Jeu restreint d'opérateurs

24/10/2023

Khaled Hassine

19

19

Remarques

- Il est clair, à partir de cet exemple, que toute fonction logique peut s'exprimer sous forme de produit de sommes ou somme de produits.
- On peut représenter directement la fonction F en utilisant les opérateurs de base. Ceci nécessite 4 portes ET à 4 entrées et une porte OU aussi à 4 entrées pour la somme des produits et 4 portes OU à 4 entrées et une porte ET à 4 entrées pour le produit des sommes.
- Ces représentations à **l'état brut** ne sont pas les formes optimales (en termes de nombre de portes utilisées). La représentation **optimale** n'est obtenue qu'après simplification de l'expression trouvée. Ceci peut se faire selon deux approches : **la méthode algébrique** ou **la méthode graphique**.

24/10/2023

Khaled Hassine

18

18

Deux méthodes

- Méthode algébrique :
 - Basé sur les théorèmes fondamentaux de l'algèbre de Boole
- Méthode graphique :
 - Tableau de Karnaugh

24/10/2023

Khaled Hassine

20

20

La méthode algébrique

- Consiste à utiliser les théorèmes de base de l'algèbre de Boole.
- Par exemple, l'expression de la fonction définie précédemment mise sous forme de somme de produits :

$$F = \bar{A} \times \bar{B} \times \bar{C} \times \bar{D} + \bar{A} \times \bar{B} \times \bar{C} \times D + A \times \bar{B} \times \bar{C} \times \bar{D} + A \times \bar{B} \times \bar{C} \times D$$
- se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F &= (\bar{A} \times \bar{B} \times \bar{C} + A \times \bar{B} \times \bar{C})(\bar{D} + D) \\ &= \bar{B} \times \bar{C} \times (\bar{A} + A) = \bar{B} \times \bar{C} \end{aligned}$$

24/10/2023

Khaled Hassine

21

21

Méthode de Karnaugh

- Basée sur **l'inspection visuelle** de tableaux disposés de façon telle que les cases adjacentes en ligne et en colonne **ne diffèrent que par l'état d'une variable et une seule**.
- Si une fonction dépend de n variables, il y a 2^n produits possibles. Chacun de ces produits (Minterms) est représenté par une case dans un tableau.
- D'une case à une autre, **une et une seule variable change d'état**.

24/10/2023

Khaled Hassine

23

23

La méthode graphique

- Permet souvent de rendre plus apparent les simplifications à réaliser. Cette méthode se base sur un tableau dit **de Karnaugh**.
- La méthode de simplification de Karnaugh repose sur l'identité :

$$AB + A\bar{B} = A(B + \bar{B}) = A$$

24/10/2023

Khaled Hassine

22

22

Principe de la méthode

- Le passage de la table de vérité au tableau de Karnaugh consiste à remplir chaque case avec la valeur de la fonction pour le produit correspondant.
- Il est possible de n'indiquer que les 1.
- Chaque case d'un tableau correspond aux seuls Minterms prenant la valeur 1 pour la combinaison identifiée par la ligne et la colonne.
- Chaque ligne et chaque colonne forme une structure **cyclique continue** : chaque case a toujours quatre voisins qu'il faut éventuellement chercher à l'autre extrémité de la ligne ou de la colonne.

24/10/2023

Khaled Hassine

24

24

Notion de binaire réfléchi

- Au niveau de ce tableau, d'une ligne à sa suivante et d'une colonne à sa suivante, une seule variable change d'état.
- Un tel code est dit **binaire réfléchi**. Ces dispositions permettent de réaliser facilement les simplifications.
- Les cases extrêmes (00 et 10) sont aussi adjacentes en ligne (de droite à gauche) et en colonne (de haut en bas).

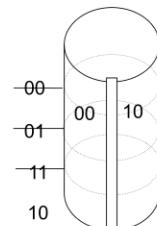
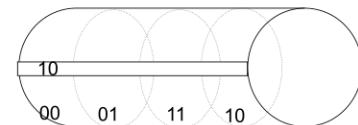
24/10/2023

Khaled Hassine

25

Binaire réfléchi

Le passage de 10 à 00 respecte bien le code binaire réfléchi, ce qui se traduit par une représentation enroulée du tableau



25

26

Cellules adjacentes

	xy	00	01	11	10
zt	00				
00					
01			X	X	X
11		X	X	X	X
10					

	xy	00	01	11	10
zt	00				
00					
01			X	X	X
11		X	X	X	X
10					

24/10/2023

Khaled Hassine

27

Démarche de simplification

- La simplification selon la méthode de Karnaugh consiste à rassembler les cases adjacentes contenant des 1 par groupes de 2, 4 ou 8 termes.
- En effet, lors de la simplification, pour chaque case du tableau à 1, il faut **chercher le regroupement (qui comporte le plus grand nombre de 1) qui l'enlobe**.
- Ces regroupements doivent se constituer de **2ⁿ cases** adjacentes, toutes à 1.
- On s'arrête lorsqu'on a couvert toutes les cases à 1 de notre tableau de Karnaugh.
- Dans le cas où le nombre de 0 est très inférieur au nombre de 1, on regroupe les 0, ce qui permet d'obtenir le complément de F et par application des lois de De Morgan, on déduit F.

24/10/2023

Khaled Hassine

28

Exemple

- Considérons, le groupement vertical de deux cases correspondant à : xyt et $xt\bar{t}$.
- Il correspond à la somme de deux termes :
$$G = xy(t + \bar{t}) = xy$$
- Il est possible de factoriser le produit xy :
$$G = xy(t + \bar{t}) = xy$$
- La variable t qui prend les deux valeurs 0 et 1 dans le groupement disparaît. Il ne reste que le produit des variables x et y , qui gardent ici la valeur 1.

24/10/2023

Khaled Hassine

29

29

Principe ...

- On cherche à avoir le minimum de groupements, chaque groupement rassemblant le maximum de termes.
 - Dans un groupement de deux termes, on élimine donc la variable qui change d'état et on conserve le produit des variables qui ne changent pas.
 - Dans un groupement de quatre on élimine les deux variables qui changent d'état.
 - Dans un groupement de huit on élimine trois variables, etc.
- Une même case peut intervenir dans plusieurs groupements car $C + C = C$.
- Pour les cases isolées, on ne peut éliminer aucune variable. On conserve donc le Minterm caractérisant la case.
- L'expression logique finale est la réunion des groupements après élimination des variables qui changent d'état.

24/10/2023

Khaled Hassine

30

30

Exemple 1 : cas de trois variables

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

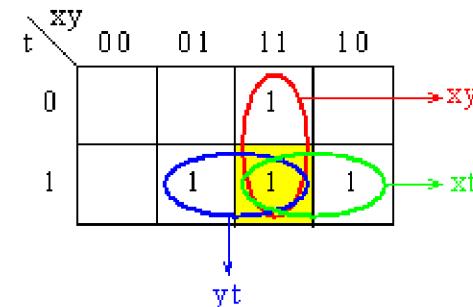
24/10/2023

Khaled Hassine

31

31

Exemple 1 : tableau de Karnaugh à 3 variables



24/10/2023

Khaled Hassine

32

32

Exemple 2 : cas de quatre variables

x	y	z	t	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0

x	y	z	t	F
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

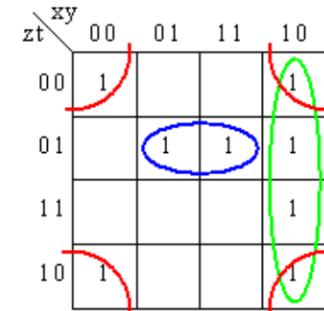
$$F = \bar{x}\bar{y} + \bar{y}t + \bar{y}\bar{z}t$$

24/10/2023

Khaled Hassine

33

Exemple 2 : tableau de Karnaugh à 4 variables



24/10/2023

Khaled Hassine

34

Exemple 3 : tableau de Karnaugh à 5 variables

		a = 0				
		de	00	01	11	10
bc	de	00	1	0	0	0
00	01	1	1	1	1	1
01	11	1	1	1	1	1
11	10	1	0	0	1	0
10	00	1	0	0	0	0

		a = 1				
		de	00	01	11	10
bc	de	00	1	1	1	1
00	01	1	1	1	1	1
01	11	1	0	0	1	0
11	10	1	0	0	1	0
10	00	1	0	0	0	0

$\bar{a}c$ $\bar{d}\bar{e}$ $a\bar{b}$ $a\bar{e}$

$$f(a,b,c,d) = \bar{d}\bar{e} + \bar{a}c + a\bar{b} + a\bar{e}$$

24/10/2023

Khaled Hassine

35

Exemple 3 : tableau de Karnaugh à 5 variables

		abc\de								
		abc	000	001	011	010	110	111	101	100
de	abc	000								
00	000									
01	001									
11	011									
10	010									
00	110	1								
01	111		1	1	1	1				
11	101			1						
10	100					1				

S (non simplifié) : $a.b.c + a.b.c.d + /d.e.a + a./d.e./b$

S (simplifié) : $a.b.c + a./d.e$

24/10/2023

Khaled Hassine

36

Simplification des fonctions logiques (6)

• Méthode de Karnaugh (5)

– Exemple à 5 variables:

$$F(a,b,c,d,e) = \{0,4,8,12,13,15,16,17,19,23,29,31\}$$

ab \ cde	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	0	3	0	2
01	1	8	0	9	0	11	0	10
11	0	24	0	25	0	27	0	26
10	1	16	1	17	1	19	0	18
					0	30	1	31
					1	31	1	29
					1	23	0	21
					1	23	0	20

– Regroupons les cases adjacentes en les identifiant par leur n°_{10} :

$$F(abcde) = [0+4+12+8] + [15+13+29+31] + [16+17] + [19+23]$$

$$F(a,b,c,d,e) = ade + bce + abcd + abde$$

de 4

jean PROVOST - Information Numérique - Lesson 2

1/18

37

Remarques

- Il n'existe pas une seule simplification possible d'une fonction logique.
- Dans certains cas, la valeur de la fonction peut être indifféremment à 1 ou 0. Ce cas est appelé: "Don't care conditions or can't happen" et généralement représentée par un X.
- Exemple : codeur DCB.

24/10/2023

Khaled Hassine

38

Etapes de conception

- Génération
- Simplification
- Jeu restreint d'opérateurs

24/10/2023

Khaled Hassine

39

39

Utilisation d'un nombre restreint d'opérateurs de base

- Les concepteurs de circuits intégrés imposent souvent de réduire le nombre de circuits de base.
- La possibilité de décomposer une fonction logique en produit de sommes ou en somme de produits entraîne qu'elle peut être réalisée à partir de trois opérateurs de base ET, OU, PAS.
- Ceci démontre le fait que ces derniers forment un **groupe complet**.
- A la rigueur, on **peut réduire à deux** le nombre d'opérateurs nécessaires à la réalisation de toute fonction logique.

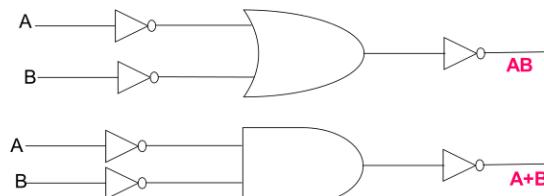
24/10/2023

Khaled Hassine

40

40

Utilisation de 2 opérateurs de base



24/10/2023

Khaled Hassine

41

Nouveau groupe complet

- On peut définir deux nouvelles fonctions à deux variables dont les opérateurs forment chacun un **groupe complet**.
 - fonction **incompatibilité** à laquelle correspond l'opérateur **NAND**
 - fonction **NI** à laquelle correspond l'opérateur **NOR**

The left diagram shows a circuit for the NAND operation. It consists of two NOT gates with inputs A and B , followed by a single AND gate with inputs from the NOT gates. The output is labeled $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$. The right diagram shows a circuit for the NOR operation. It consists of two NOT gates with inputs A and B , followed by a single OR gate (a diamond with a plus sign) with inputs from the NOT gates. The output is labeled $\overline{A+B} = \overline{A} \overline{B}$.

24/10/2023

Khaled Hassine

42

Exercice

- Concevoir la fonction Majorité à trois entrées qui prend 1 si la majorité de ces entrées sont à l'état 1.

24/10/2023

Khaled Hassine

43

Table de vérité de la fonction majorité

A	B	C	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

24/10/2023

Khaled Hassine

44

Simplification

$$\begin{aligned} M &= \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC + ABC = BC(A + \bar{A}) + A\bar{B}C + ABC \\ &= BC + A\bar{B}C + ABC = B(C + A\bar{C}) + A\bar{B}C = B(C + A) + A\bar{B}C \\ &= BC + A(B + \bar{B}C) = BC + A(B + C) = AB + BC + AC \end{aligned}$$

24/10/2023

Khaled Hassine

45

PLAN

Introduction

Conception de circuit combinatoire

Analyse d'un logigramme

Quelques circuits combinatoires

Exercice d'application

24/10/2023

Khaled Hassine

46

Etapes de l'analyse

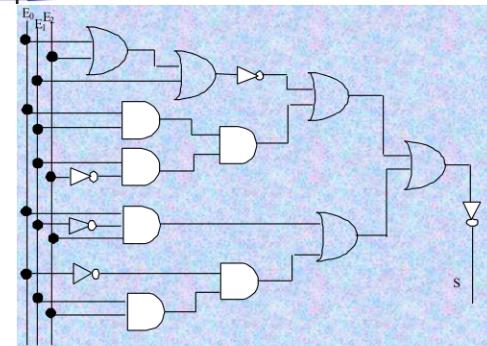
- L'analyse d'un circuit combinatoire consiste à retrouver la fonction d'un circuit dont on connaît le logigramme.
- La démarche à suivre pour ce faire est la suivante :
 - en procédant des entrées vers les sorties, donner pour chaque opérateur l'expression de sa sortie en fonction de ses entrées jusqu'à l'obtention d'une expression pour chaque fonction (sortie) réalisée par le circuit ;
 - donner éventuellement la table de vérité correspondante ;
 - en déduire le rôle du circuit.

24/10/2023

Khaled Hassine

47

Exemple

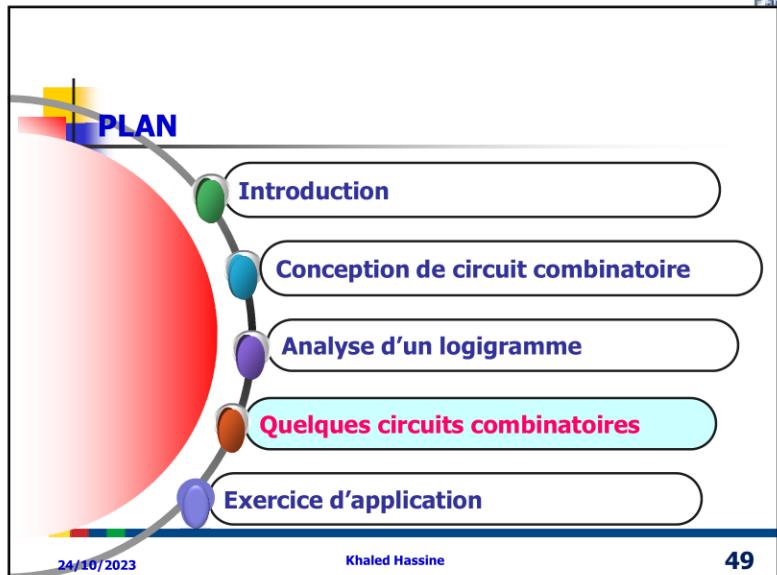


D'après l'expression finale simplifiée, il faut que le nombre d'entrées à l'état 1 soit impair pour avoir S à 1. Ce circuit peut alors servir de **vérificateur ou de générateur de parité impaire**.

24/10/2023

Khaled Hassine

48



49

Motifs

- L'ordinateur est composé de plusieurs circuits combinatoires.
- Dans cette partie, on s'intéresse à quelques exemples qui jouent un rôle important dans une machine informatique.
- On cite :
 - le codeur, le décodeur,
 - le multiplexeur, le démultiplexeur,
 - l'additionneur, ...
- Classification possible :
 - Circuits de traitement de l'information (additionneur, soustracteur, ...)
 - Circuits de transformation de l'information (codeur, décodeur, transcodeur)
 - Circuits d'aiguillage de l'information (multiplexeur, démultiplexeur, ...)

24/10/2023 Khaled Hassine 50

50

Exemples de circuits

- Circuits de traitement de l'information (additionneur, soustracteur, ...)
- Circuits de transformation de l'information (codeur, décodeur, transcodeur)
- Circuits d'aiguillage de l'information (multiplexeur, démultiplexeur, ...)

24/10/2023 Khaled Hassine 51

51

Exemples de circuits

- Circuits de traitement de l'information (additionneur, soustracteur, ...)
- Circuits de transformation de l'information (codeur, décodeur, transcodeur)
- Circuits d'aiguillage de l'information (multiplexeur, démultiplexeur, ...)

24/10/2023 Khaled Hassine 52

52

Demi-additionneur

- L'addition et la soustraction sont les deux opérations arithmétiques de base.

A	B	S	R
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

A et B : des entrées
S : la somme
R : la retenue

$$S = A \square B$$

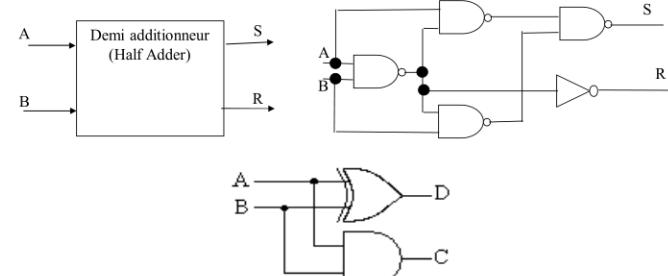
$$R = AB$$

24/10/2023

Khaled Hassine

53

Logigramme



24/10/2023

Khaled Hassine

54

Additionneur 2 bits complet

- Afin de tenir compte de la retenue des bits de poids inférieurs, un additionneur (**Full Adder**) doit comporter trois entrées et deux sorties.
 - A, B : les entrées représentent les bits à additionner
 - R : le report de la retenue de l'addition des bits de poids inférieurs.
 - S : sortie représentant le résultat de la somme
 - C : sortie représentant la retenue.

24/10/2023

Khaled Hassine

55

Table de vérité

	R	B	A	S	C
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1

$$S = \overline{ABR_{N-1}} + \overline{ABR_{N-1}} + ABR_{N-1} + A\overline{BR_{N-1}} = A \square B \square R_{N-1}$$

$$C = \overline{ABR} + \overline{ABR} + ABR + A\overline{B} = AB + R_{N-1}(A \square B)$$

24/10/2023

Khaled Hassine

56

Remarques

- AB est la **retenue générée** par l'étage demi additionneur
- R(A \square B) la **retenue propagée** par l'étage additionneur.
- Cette équation permet d'obtenir un additionneur par association de demi additionneur.

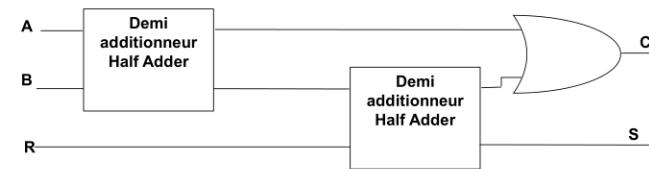
24/10/2023

Khaled Hassine

57

57

Additionneur complet à base de démi-additionneur



24/10/2023

Khaled Hassine

58

58

Additionneur N bits

- L'addition de nombres comptant plusieurs bits peut se faire:
 - en **série** (bit après bit) ou
 - en **parallèle** (tous les bits simultanément).
- On suppose pour ce faire que A et B sont codés sur N (=n+1) bits :
 - A = $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$
 - B = $b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0$

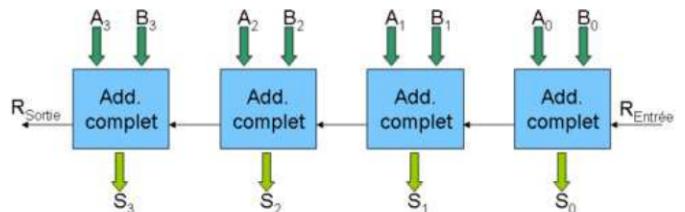
24/10/2023

Khaled Hassine

59

59

Additionneur parallèle 4 bits à propagation de retenue



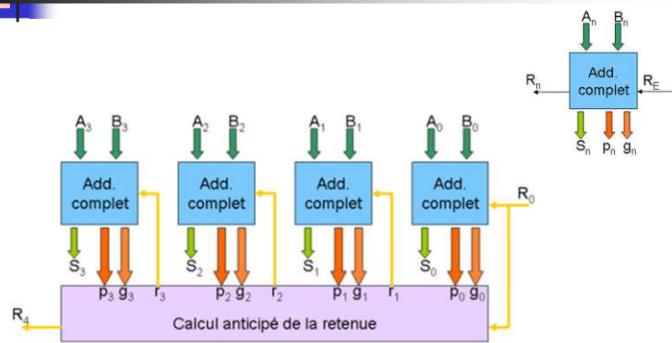
24/10/2023

Khaled Hassine

60

60

Additionneur parallèle 4 bits à retenue anticipée

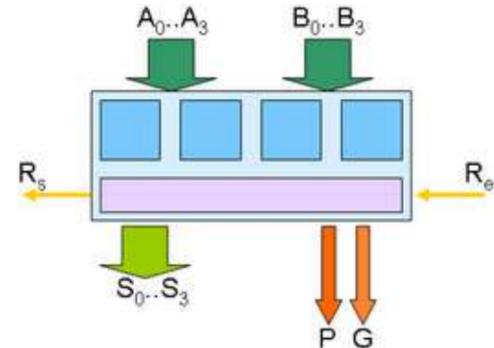


24/10/2023

Khaled Hassine

61

Additionneur parallèle 4 bits à retenue anticipée

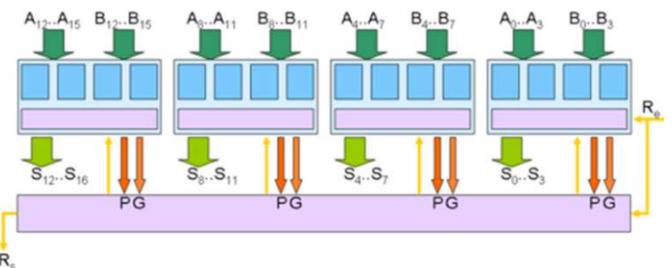


24/10/2023

Khaled Hassine

62

Additionneur parallèle 16 bits à retenue anticipée

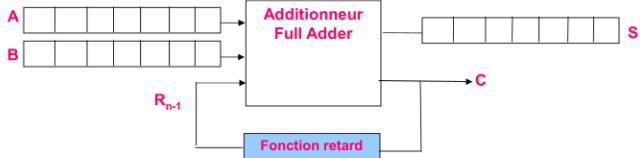


24/10/2023

Khaled Hassine

63

Additionneur série

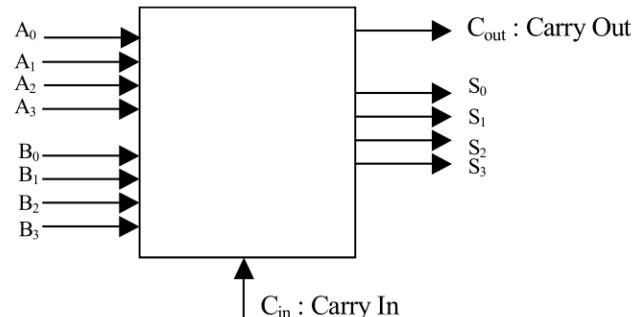


24/10/2023

Khaled Hassine

64

Additionneur BCD : schéma bloc



24/10/2023

Khaled Hassine

65

65

Comment peut-on s'assurer que le résultat est supérieur à 9 ?

- Si le résultat de l'addition est supérieur à 15 et on a obtenu une retenue (les cas 7+9, 8+8, 8+9 et 9+9). Dans ces cas, bien que les 4 premiers bits sont inférieurs à 9, le résultat nécessite une correction. Ces cas se distinguent par la présence d'une **retenue générale**.
- Si le résultat de l'addition est **compris entre 10 et 15**.

24/10/2023

Khaled Hassine

67

67

Particularités BCD

- Lors de l'addition de deux nombres en BCD, différents cas sont possibles :
 - le résultat de l'addition est inférieur à 10 auquel cas la méthode de sommation est identique à la sommation en base 2, (par exemple si $A = 0100$ et $B = 0011$ alors $A+B = 0111$)
 - le résultat de l'addition est supérieur à 9 auquel cas une correction est nécessaire par l'ajout de 6 (le nombre de cas de la base 16 non directement représentable dans le système BCD) au résultat (par exemple si $A = 0111$ et $B = 0110$ alors $A+B = 1101$ et avec l'ajout de 6 on obtient 1 0011 qui représente 13).

24/10/2023

Khaled Hassine

66

66

Cas où le résultat est compris entre 10 et 15

Wi représente le poids dans le système BCD

$$F = W_8(W_4 + W_2)$$

Nombre	W ₈	W ₄	W ₂	W ₁
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

24/10/2023

Khaled Hassine

68

68

Résumé des cas de correction

- En combinant les différents cas de figure ci-dessus présentés, il faut corriger le résultat selon la fonction logique suivante :

$$C_{out} + W_8(W_4 + W_2)$$

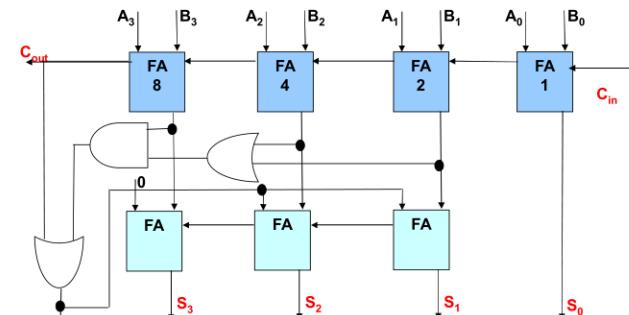
24/10/2023

Khaled Hassine

69

69

Logigramme de l'additionneur BCD



24/10/2023

Khaled Hassine

70

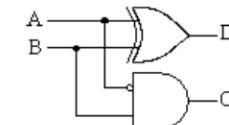
70

Demi-Soustracteur

A	B	D	C
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

$$D = A \square B$$

$$C = \overline{AB}$$



24/10/2023

Khaled Hassine

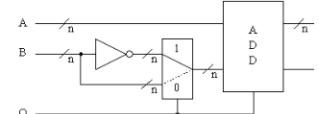
71

71

Additionneur soustracteur

$$A + \overline{A} = 2^n - 1 \Rightarrow -A = \overline{A} + 1$$

$$\Rightarrow A - B = A + \overline{B} + 1 - 2^n = A + \overline{B} + 1$$



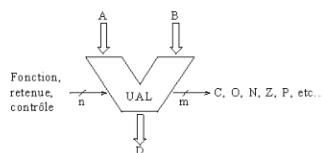
24/10/2023

Khaled Hassine

72

72

Unité arithmétique et logique



24/10/2023

Khaled Hassine

73

Exemples de circuits

- Circuits de traitement de l'information (additionneur, soustracteur, ...)
- Circuits de transformation de l'information (codeur, décodeur, transcodeur)
- Circuits d'aiguillage de l'information (multiplexeur, démultiplexeur, ...)

24/10/2023

Khaled Hassine

74

Définitions

- Le **décodeur** fait correspondre à un code en entrée (sur n lignes) une seule sortie active (à 1) parmi les 2^n sorties possibles.
- Le **codeur** assure la fonction inverse. A une entrée active parmi 2^n entrées, il fait correspondre en sortie un code sur n lignes.
- Le **transcodeur** fait correspondre à un code A en entrée sur n lignes, un code B en sortie sur m lignes.

24/10/2023

Khaled Hassine

75

Exemple de codeur

Soit par exemple, à réaliser un codeur à 8 entrées qui permet de fournir en sortie le code octal de l'entrée sélectionnée. Ce codeur a 3 sorties, soit S_0, S_1, S_2 .

E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	S_2	S_1	S_0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

24/10/2023

Khaled Hassine

76

Equation des sorties

- $S_0 = E_1 + E_3 + E_5 + E_7$
- $S_1 = E_2 + E_3 + E_6 + E_7$
- $S_2 = E_4 + E_5 + E_6 + E_7$

24/10/2023

Khaled Hassine

77

Exemple de décodeur

- Le décodeur est un circuit qui a p variables binaires en entrée et $n = 2^p$ variables binaires en sortie.
- Chaque sortie correspond à une configuration binaire d'entrée.
- On associe généralement la sortie S_0 à la configuration binaire d'entrée dont tous les bits sont à 0 et la sortie S_{n-1} à la configuration binaire d'entrée dont tous les bits sont à 1.

24/10/2023

Khaled Hassine

78

Décodeur 8 sorties

E_2	E_1	E_0	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

24/10/2023

Khaled Hassine

79

Ligne d'activation

- On ajoute souvent au décodeur une entrée **E** (**Enable** ou **Activation**) telle que si $E = 0$, toutes les sorties sont à 1 quelle que soit la configuration binaire en entrée et si $E = 1$ le circuit fonctionne normalement.

$$\begin{aligned} S_0 &= \bar{E} + \bar{E}_0 \bar{E}_1 \bar{E}_2 \\ S_1 &= \bar{E} + E_0 \bar{E}_1 \bar{E}_2 \\ S_2 &= \bar{E} + \bar{E}_0 E_1 \bar{E}_2 \\ S_3 &= \bar{E} + E_0 E_1 \bar{E}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= \bar{E} + \bar{E}_0 \bar{E}_1 E_2 \\ S_5 &= \bar{E} + E_0 \bar{E}_1 E_2 \\ S_6 &= \bar{E} + \bar{E}_0 E_1 E_2 \\ S_7 &= \bar{E} + E_0 E_1 E_2 \end{aligned}$$

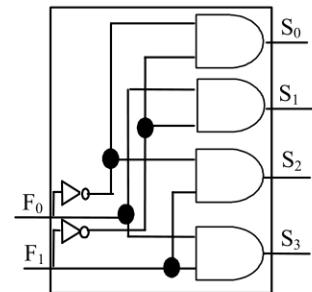
24/10/2023

Khaled Hassine

80

Décodeur 2 entrées

Un décodeur est un démultiplexeur dont l'état d'entrée est toujours 1.



24/10/2023

Khaled Hassine

81

81

Application des codeurs et décodeurs

- Dans un système numérique, les instructions, tout comme les nombres, sont transportées sous forme de mots binaires. Par exemple un mot de 4 bits peut permettre d'identifier 16 instructions différentes : l'information est **codée**.
- Très souvent l'équivalent d'un commutateur à 16 positions permet de sélectionner l'instruction correspondant à un code. Ce processus est appelé **décodage**.
- La fonction de décodage consiste à faire correspondre à un code présent en entrée sur n lignes une seule sortie active parmi les $N = 2^n$ sorties possibles.

24/10/2023

Khaled Hassine

82

82

Transcodeur DCB

- Le code DCB (ou en anglais BCD : Binary Coded Decimal) transforme les nombres décimaux en remplaçant chacun des chiffres décimaux par 4 chiffres binaires.
- Cette représentation conserve donc la structure décimale : unités, dizaines, centaines, milliers, etc...
- Chaque chiffre est codé sur 4 bits.
- Par exemple le nombre décimal 294 sera codé en DCB : 0010 1001 0100.
- Ce type de codage permet, par exemple, de faciliter l'affichage en décimal du contenu d'un compteur. Pour ce faire, on peut utiliser des afficheurs lumineux à sept segments.

24/10/2023

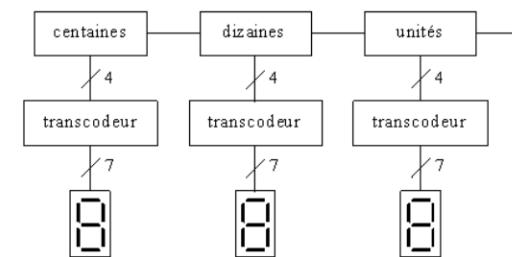
Khaled Hassine

83

83

Transcodeur DCB et afficheur 7 segments

La fonction de chacun des **transcodeurs** est de positionner à 1 les lignes de sortie correspondant aux segments à allumer selon de code porté par les quatre lignes d'entrée. De manière générale, un transcodeur fait correspondre à un code A en entrée sur n lignes, un code B en sortie sur m lignes.



24/10/2023

Khaled Hassine

84

84

Exemples de circuits

- Circuits de traitement de l'information (additionneur, soustracteur, ...)
- Circuits de transformation de l'information (codeur, décodeur, transcodeur)
- Circuits d'aiguillage de l'information (multiplexeur, démultiplexeur, ...)

24/10/2023

Khaled Hassine

85

85

Définitions

- Le **multiplexeur** est un circuit combinatoire à plusieurs entrées et n'autorise qu'une seule d'entre elles en sortie. Pour sélectionner l'une des entrées, on a besoin de n lignes de **sélection**.
- Un **démultiplexeur** est un circuit comptant une entrée et N sorties et qui met en relation cette entrée avec une sortie et une seule.

24/10/2023

Khaled Hassine

86

86

Définition

- Le **multiplexeur** est un circuit combinatoire à plusieurs entrées et n'autorise qu'une seule d'entre elles en sortie. Pour sélectionner l'une des entrées, on a besoin de n lignes de **sélection**. Ces lignes peuvent sélectionner jusqu'à 2^n entrées et permettent ainsi de coder en base 2 le numéro de l'entrée sélectionnée.
- Le multiplexeur est aussi appelé **circuit de transmission multiple en parallèle** et ceci veut dire envoyer un nombre N de données sur un nombre plus petit de canaux de transmission.
- Si n est le nombre de lignes d'entrées d'un multiplexeur alors le nombre de lignes de sélection est $\lceil \log_2(n) \rceil$ (le plus petit entier naturel supérieur ou égal à $\log_2(n)$).

24/10/2023

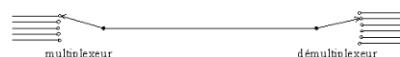
Khaled Hassine

87

87

Utilisation

- Le multiplexage est un dispositif qui permet de transmettre sur une seule ligne des informations en provenance de plusieurs sources ou à destination de plusieurs cibles.
- De ce fait, une application intéressante des multiplexeurs est la **conversion parallèle série**. En effet, en supposant une information codée sur un octet, il suffit de la présenter sur les lignes d'entrées d'un multiplexeur 8 entrées. En faisant varier les valeurs de trois lignes de sélection, de 000 à 111, on récupère en sortie les 8 bits de l'octet en entrée l'un à la suite de l'autre.



24/10/2023

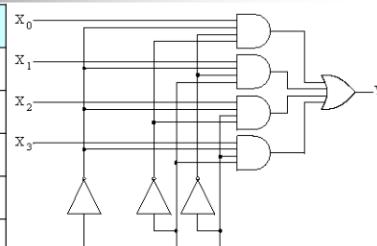
Khaled Hassine

88

88

Exemple de multiplexeur à 2 lignes de sélection

E	B	A	Y
0	0	0	X ₀
0	0	1	X ₁
0	1	0	X ₂
0	1	1	X ₃
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0



E : ligne d'activation
X_i : lignes d'entrée
A, B : Lignes de sélection
Y : La sortie

24/10/2023

Khaled Hassine

89

Mux 8 x 1

C	B	A	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

24/10/2023

Khaled Hassine

90

Mise en cascade de Multiplexeurs

- Il existe, sous forme de circuits intégrés, des multiplexeurs avec 2, 4 ou 16 lignes d'entrée.
- Pour constituer des multiplexeurs d'ordre supérieur, on peut **cascader** des multiplexeurs.

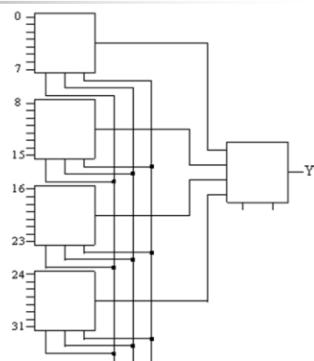
24/10/2023

Khaled Hassine

91

Exemple : mise en cascade de multiplexeurs

- Un multiplexeur à 32 entrées réalisé à partir de quatre multiplexeurs à 8 entrées et d'un multiplexeur à 4 entrées.
- On doit positionner **les poids faibles dans les multiplexeurs en entrées et les poids forts dans les multiplexeurs en sorties**.
- Les poids correspondant au circuit est : DE ABC (C est le poids faible et D est le poids fort).



24/10/2023

Khaled Hassine

92

Conception des fonctions logiques en utilisant des multiplexeurs

- Un multiplexeur à N lignes de sélection permet de câbler **n'importe quelle fonction logique à N variables**. En effet, le multiplexeur permet d'avoir toutes les combinaisons possibles à partir de N variables.
- Pour concevoir un circuit logique d'une fonction à n variables $F(X_{n-1}, \dots, X_1, X_0)$, on utilise un multiplexeur de $2^{n-1} \times 1$ et on suit pour cela les étapes suivantes :
- On exprime la fonction logique moyennant ces Minterms selon la forme somme de produits.

24/10/2023

Khaled Hassine

93

93

Conception des fonctions logiques en utilisant des multiplexeurs ...

- On encercle tous les Minterms représentant la fonction.
- On dessine le schéma en bloc du multiplexeur $2^{n-1} \times 1$.
- On examine toutes les colonnes :
 - toute colonne ayant deux cercles sera reliée à 1
 - toute colonne n'ayant pas de cercles sera reliée à 0
 - toute colonne ayant un seul cercle dans la case de dessus sera reliée à X_{n-1}
 - toute colonne ayant un seul cercle dans la case de dessous sera reliée à X_{n-1}
- Les lignes de sélection sont reliées respectivement à X_{n-2}, \dots, X_1, X_0 .

24/10/2023

Khaled Hassine

95

95

Conception des fonctions logique en utilisant des multiplexeurs ...

- On conçoit un tableau de 3 lignes et $2^{n-1}+1$ colonnes numérotées comme suit (ces numéros représentent le Minterms):

	I_0	I_1	I_2				$I_{2^{n-1}-1}$
\bar{X}_{n-1}	0	1	2				$2^{n-1} - 1$
X_{n-1}	2^{n-1}	$2^{n-1} + 1$	$2^{n-1} + 2$				$2^n - 1$

24/10/2023

Khaled Hassine

94

94

Exemple

Concevoir la fonction suivante en utilisant un multiplexeur

$$F(x, y, z, t) = \sum M(0, 2, 7, 9, 10, 13, 15)$$

Le nombre de variables de la fonction est 4, il faut alors utiliser un multiplexeur $2^3 \times 1$.

	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
\bar{x}	0	1	2	3	4	5	6	7
x	8	9	10	11	12	13	14	15

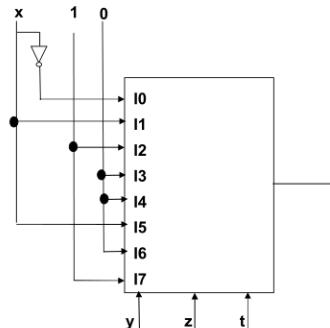
24/10/2023

Khaled Hassine

96

96

Logigramme à base de multiplexeur



24/10/2023

Khaled Hassine

97

Définition

- Un **démultiplexeur** est un circuit comptant une entrée et N sorties et qui met en relation cette entrée avec une sortie et une seule.
- Le choix de la ligne de sortie est assuré par des **lignes de sélection** (ou encore **d'adresse** ou de **commande**).
- Pour pouvoir sélectionner cette sortie, le code porté par ces lignes identifie la ligne de sortie à utiliser.
- Ce circuit est très proche d'un décodeur.

24/10/2023

Khaled Hassine

98

Table de vérité d'un démultiplexeur 4 sorties

E	B	A	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Produit
0	0	0	X	0	0	0	\overline{ABEX}
0	0	1	0	X	0	0	\overline{ABEX}
0	1	0	0	0	X	0	\overline{ABEX}
0	1	1	0	0	0	X	$AB\overline{EX}$
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0

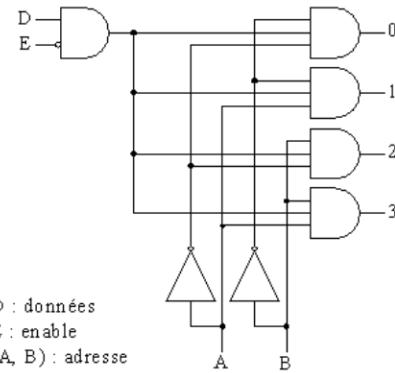
E : ligne d'activation
X : ligne d'entrée
A, B : Lignes de sélection
 Y_i : Les lignes de sortie

24/10/2023

Khaled Hassine

99

Logigramme d'un démultiplexeur 4 sorties avec ligne d'activation



D : données
E : enable
(A, B) : adresse

24/10/2023

Khaled Hassine

100

Mise en cascade de démultiplexeurs

- Il existe sous forme de circuits intégrés des démultiplexeurs avec 2, 4 ou 16 lignes de sortie.
- Tout comme pour les multiplexeurs, on peut cascader plusieurs démultiplexeurs pour obtenir un démultiplexeur d'ordre supérieur.

24/10/2023

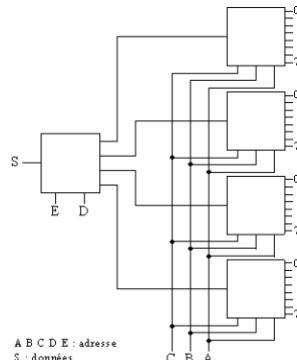
Khaled Hassine

101

101

Exemple

- Un démultiplexeur à **32 sorties** réalisé à partir de quatre démultiplexeurs à **8 sorties** et d'un démultiplexeur à **4 sorties**.
- On doit positionner **les poids faibles dans les démultiplexeurs en sortie et les poids forts dans les démultiplexeurs en entrée**.
- Les poids correspondant au circuit est : ED CBA (A est le poids faible et E est le poids fort).



24/10/2023

Khaled Hassine

102

102

PLAN

Introduction

Conception de circuit combinatoire

Analyse d'un logigramme

Quelques circuits combinatoires

Exercice d'application

24/10/2023

Khaled Hassine

103

103

Conception d'un comparateur deux entrée

- On souhaite concevoir un comparateur à deux entrées A et B, codée chacune sur 2 bits et qui fournit 2 résultats en sortie : égalité, supériorité.
 - Donner le schéma bloc du comparateur.
 - Donnez la table de vérité du comparateur.
 - Donnez les expressions logiques représentants ce comparateur.
 - Simplifiez ces expressions.
 - Donner le circuit logique en utilisant les portes ET, OU et des inverseurs.
 - Donnez le logigramme en NAND et NOT du comparateur.

24/10/2023

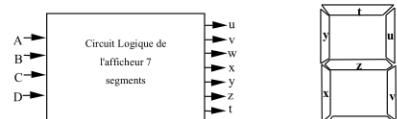
Khaled Hassine

104

104

Afficheur sept segments

L'afficheur 7 segments permet de présenter les nombres décimaux à partir de leur code BCD (Binary Coded Decimal). Chaque chiffre décimal est représenté par quatre chiffres binaires notés A, B, C, D comme illustré par la figure suivante.



1. Donner la table de vérité de l'afficheur 7 segments.
2. Simplifier par la méthode algébrique ou la méthode graphique les expressions des différentes sorties.
3. Donner le logigramme de l'afficheur 7 segments.

24/10/2023

Khaled Hassine

105

105

Circuit de vote

La direction générale d'une entreprise se compose de quatre personnes. On prend la décision par scrutin (vote par bulletin) où le directeur a deux voix et les autres ont une seule voix.

1. Donner le schéma bloc du circuit de vote.
2. Donner la table de vérité du circuit de vote.
3. Générer et simplifier l'expression logique représentant le circuit de vote.
4. Donner le logigramme du circuit de vote.
5. On veut concevoir le circuit de vote en utilisant un multiplexeur.
 - a. Quelles sont les caractéristiques du multiplexeur ?
 - b. Concevez le multiplexeur défini en a.
 - c. Donnez l'expression de la sortie selon la forme de somme de Minterms.
 - d. Concevoir la sortie en utilisant le multiplexeur défini en 5.a.

24/10/2023

Khaled Hassine

106

106



107