tente

Faculté des Sciences de Gabès
Département de Math.

A.U: 2023-2024
Section : LGLSI1-LIRSI1

Série 1

Exercice 1

Trouver les polynômes P et $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant:

1. $Q^2(X) = XP^2(X)$.
2. $PoP = P$.
3. $P(X^2) = P(X)$.
4. $P(X+1) = XP(X)$.

Exercice 2

Trouver les polynômes P et $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant:

1. $P(X^2) = XP(X)$.
2. $P(X)^2 = XP(X+1)$.
3. $P(X) - P(X-1) = X^2$.
4. $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

Exercice 3

Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que:

1. $P - XP' = X$.
2. $P'^2 = 9P$.
3. $(X^2+4)P'' = 6P$.

Exercice 4

Determiner $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que: P' divise P.

Exercice 5

On considère le polynôme $P(X) = -5X^3 + 4X^2 + X^4 + 3X + 9$

1. Montrer que 3 est une racine double de P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6

Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant :

$$P(0) = P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P'(0) = 2.$$

Exercice 7

Trouver $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que : -1 soit racine triple de $P+1$ et 1 racine triple de $P-1$.

Exercice 8

Decomposer en produit de polynômes irreductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $P_1 = X^4 - 1$.
2. $P_2 = X^4 + X^2 + 1$.
3. $P_3 = X^6 - 1$.
4. $P_4 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.
5. $P_5 = (X^2 + 1)^2 + (X^2 - X - 1)^2$.
6. $P_6 = X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 9

Effectuer la division euclidienne selon les puissances croissantes de A par B

1. $A = 1 + 3X + 2X^2 - 7X^3$ par $B = 1 + X - 2X^2$, $(p = 4)$
2. $A = 1 + X$ par $B = 1 + X^2$, a l'ordre 5.
3. $A = X - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{12}X^5$ par $B = 1 - 2X^2 + X^4$, $(p = 5)$
4. $A = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6}$ par $B = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^6}{8} + \frac{X^3}{16}$, $(p = 4)$
5. $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $B = X^2 + X + 1$, $(p = 2)$

Exercice 10

Calculer le quotient de la division euclidienne de

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$

Exercice 11

Déterminer le reste de la division de $(X+1)^n + X^n - 1$ par

1. $X^2 - 3X + 2$.
2. $X^2 + X + 1$

TD. Algebre

$2x^{2}+3$

$d°2$

$d°(0) = -\infty$
$d°(C) = 0$
$d°(ax+b) = 1$
$a \neq 0$

Ex1 :

1) $Q^2(x) = X P^2(X)$ $(*)$

. $P = 0, Q = 0$ $\quad P(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{C}$

$P^2(x) = 0$ $\quad Q(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow 0$ est sol de $(*)$

. $Q^2(x) = xP^2(x)$

$\Rightarrow d°(Q^2(x)) = d°(xP^2(x))$

$2d°Q = d°x + d°(P^2(x))$

$\underbrace{2d°Q}_{pair} = \underbrace{1 + 2d°P}_{impair} \Rightarrow$ impossible

cl: $P = Q = 0$ est la seule sol de $(*)$

2) $P \circ P = P$ $\quad (*)$

$P \circ P(x) = p[p(x)]$

. $p(x) = 0$

$p \circ p(x) = p(p(x)) = 0$

$\Rightarrow p = 0$ est solution de $(*)$

. $P \circ P = P \Rightarrow d°(P \circ P) = d°(P)$

$d°p \cdot d°p = d°p$

$d°p \cdot d°p - d°p = 0$

$d°P = 0$ ou $d°P = 1$

$\Downarrow$ $\quad\quad \Downarrow$

$P = c \neq 0$ $\quad P = ax + b$ avec $a \neq 0$

$p \circ p(x) = p(x)$

$p(p(x)) = p(x)$

$ap(x) + b = ax + b$

$a(ax+b) + b = ax + b$

$a^2x + ab + b = ax + b$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ ab + b = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ alors $P = X$

cl. les solutions de $(*)$ sont

$P = 0$ et $P = x$ et $P = c \neq 0$

3) $P(x^2) = P(x)$ $\quad (*)$

si $P(x) = 0$

$P(x^2) = 0$

Alors $P(x^2) = P(x)$

donc 0 est sol de $(*)$

. on a $p(x^2) = p(x)$

$\Rightarrow d°(p(x^2)) = d°(P(x))$

$2d°P = d°P$

$\Rightarrow d°P = 0$

$\Rightarrow P = c$, $c \neq 0$

* Conclusion: la solution de $(*)$ sont $P = C$

4) $P(x+1) = xP(x)$ $(*)$

$P(x) = 0$

$P(x+1) = 0$

alors $P(x) = 0$ est une sol $(*)$

. $d°(P(x+1)) = d°(xP(x))$

$d°(P) = d°(x) + d°(P(x))$

$0 = 1$ impossible

cl: 0 est la seul solution de $(*)$

Ex 2:

1) $P(x^2) = xP(x)$

$P(x) = 0$

$P(x^2) = 0$

alors $P(x^2) = 0$ est une sol de $(*)$

$d°(P(x^2)) = d°(xP(x))$

$2d°(P(x)) = d°(x) + d°(P(x))$

$= d°(P(x)) = 1$

$\Rightarrow P(x) = ax + b \quad \neq 0$

or $P(x^2) = xP(x)$

$ax^2 + b = x(ax + b)$

$ax^2 + b = ax^2 + bx$

$b = 0$

alors $p(x) = ax$

conclusion: les sol de (*) sont 0 et ax avec $a \neq 0$

$P(x) = XP(x+1)^2$ (*)

$P(x) = 0 \Rightarrow p(x)^2 = 0$

$p(x+1) = 0 \Rightarrow x\,p(x+1) = 0$

Alors: 0 est une solution de (*)

$d°(p(x)^2) = d°(x(P(x+1))$

$d°P\ d°p = 1 \Rightarrow P = ax + b$ avec $a \neq 0$

$P(x)^2 = xP(x+1)$

$(ax+b)^2 = x[a(x+1)+b]$

$a^2x^2 + 2abx + b^2 = ax^2 + ax + bx$

$\begin{cases} a^2 = a \\ 2ab = a + b \\ b^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1 \\ 0 = 1 \text{ impossible} \\ b = 0 \end{cases}$

cl: la seule sol de (*) est $P = 0$

3) $P(x) - P(x-1) = x^2$ (*)

$P(x) = 0$

$\Rightarrow P(x-1) = 0$

alors 0 n'est pas solution de (*)

$d°(P(x) - P(x-1)) = d°(x^2)$

$\Rightarrow d°(P) - 1 = 2 \Rightarrow d°P = 3$

~~$P(x) = x^2 + x + 1$~~

$P^3 \Rightarrow P = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a \neq 0$

$\Rightarrow P(x) - P(x-1) = x^2$

$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d - [a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d] = x^2$

$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d - [a(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + b(x^2 - 2x + 1) + 6x - c + d] = x^2$

$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d - ax^3 + 3ax^2 - 3ax + a - bx^2 + 2bx - b - cx + c - d = x^2$

$\Rightarrow 3ax^2 + (3a + 2b)x + a - b + c = x^2$

$\begin{cases} 3a = 1 \\ -3a + 2b = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$

alors $P = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$

conclusion: la sol de (*) est $P = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$

4) $(x+3)P(x) = xP(x+1)$

si $P(x) = 0$

$(x+3)P(x) = 0$

$xP(x+1) = 0$

alors 0 est sol de (*)

$\Rightarrow d°((x+3)P(x)) = d°(xP(x+1))$

$d°(x+3) + d°P = d°x + d°P$

$1 + d°P = 1 + d°P$

Forme explicite de P

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$P(x+1) = a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \dots + a_1(x+1) + a_0$

or $(x+3)P(x) = xP(x+1)$

$(x+3)(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = x[a_n x^n + n a_n x^{n-1} + \dots]$

$a_n x^{n+1} + a_{n-1}x^n + 3x = a_n x^{n+1} + n a_n x^n + \dots$

$3a_n = n a_n \quad \boxed{n = 3}$

$P = ax^3 + bx^2 + cx + d$

or $(x+3)P(x) = xP(x+1)$

$(x+3)(ax^3+bx^2+cx+d) =$

$x\left[a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d\right]$

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+3ax^3+3bx^2+3cx+3d$

$= ax^4+3ax^3+3ax^2+3ax+bx^3+2bx^2+bx$

$+cx^2+cx+dx$

$\begin{cases} 3b = 2b+3a \\ 3c = 3a+b+c \\ 3d = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b = a \\ c = 3a \\ d = 0 \end{cases}$

$P = ax^3+3ax^2+3ax$

$a(x^3+3x^2+3x)$ $a \in \mathbb{R}$

Exercice 3 :

1) $P - xP' = x$ $(*)$

. si $P(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$(*) \Leftrightarrow 0 - x \cdot 0 = x$

$0 = x$ $\forall x$ impossible

. soit $d°P = n$

$P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

(derive) $P' = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$

$xP' = n a_n x^n + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x$

on $P - xP' = x$

$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 - n a_n x^n - (n-1)a_{n-1}x^{n-1}$

$\dots - a_1 x = x$

$a_n(1-n)x^n \dots = x$

~~alors $n \geq 2$~~ si $n = 1$ $(*)$ impossible

alors $n \geq 2$

$d°[P - xP'] = n = d°x = 1$

$n = 1$ impossible

$(*)$ n'admet pas une sol

2) $P'^2 = 9P$ $(*)$

. $P = 0$

$\left.\begin{array}{l} P' = 0 \\ 9P = 0 \end{array}\right\}$ 0 est solution de $(*)$

. $(*) \Rightarrow d°(P'^2) = d°(9P)$

$\Rightarrow 2d°(P') = d°P$

$2(d°P - 1) = d°P \Rightarrow 2d°P - 2 = d°P$

$d°P = 2 \Rightarrow P = ax^2+bx+c$; $a \neq 0$

$P' = 2ax+b$

$(*) \Rightarrow (2ax+b)^2 = 9(ax^2+bx+c)$

$4a^2x^2+4abx+b^2 = 9ax^2+9bx+9c$

$\begin{cases} 4a^2 = 9a \\ 4ab = 9b \\ b^2 = 9c \end{cases}$ $\begin{cases} a = 9/4 \\ c = \frac{1}{9}b^2 \end{cases}$

$P = \frac{9}{4}x^2+bx+\frac{1}{9}b^2$

el sol de $(*)$ sont

$P = 0$ ou $P = \frac{9}{4}x^2+bx+\frac{1}{9}b^2$

3) $(x^2+4)P'' = 6P$ $(*)$

. $P = 0 \Rightarrow P'' = 0$

$\Rightarrow (x^2+4)P'' = 0$

$6P = 0$

$\Rightarrow 0$ est sol de $(*)$

. sol $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$P' = n a_n x^{n-1} + \dots + 2a_2 x + a_1$

$P'' = n(n-1)x^{n-2} + \dots + 2a_2$

or $(x^2+4)P'' = 6P$

$(x^2+4)\left[n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots + 2a_2\right] =$

$6\left[a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0\right]$

$n(n-1)a_n x^n + \dots = 6a_n x^n + \dots$

$n(n-1) = 6 \Rightarrow n = 3$

$n^2 - n - 6 = 0$

$\Rightarrow P = ax^3 + bx^2 + cx + d \to P' = 3ax^2 + 2bx + c$

or $(x^2+4)P'' = 6P$

$(x^2+4)(6ax+2b) = 6(ax^3+bx^2+cx+d)$

$6ax^3 + 2bx^2 + 24ax + 8b = 6ax^3 + 6bx^2 + 6cx + 6d$

$\begin{cases} 2b = 6b \\ 24a = 6c \\ 8b = 6d \end{cases}$ $\begin{cases} b = 0 \\ c = 4a \\ d = 0 \end{cases}$

alors $P = ax^3 + 4ax = a(x^3+4x)$

d. les sols. de $(*)$ sont

$P = 0$ ou $P = a(x^3+4x)$

Exercice 4 :

P? tq P'/P

$P'/P \Rightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[x]$ tq: $P = Q.P'$

$\Rightarrow d°P = d°(QP')$

$d°P = d°Q + d°P'$

$d°P = d°Q + d°P - 1$

$\Rightarrow d°Q = 1$

$\Rightarrow Q = ax + b$; $a \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{P = (ax+b).P'}$

soit $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$

$\Rightarrow P' = na_n x^{n-1} + \dots + a_1$

$(*) \Rightarrow a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$= (ax+b).(na_n x^{n-1} + \dots + a_1) = na_n a x^n + \dots$

$\Rightarrow a_n = na_n a$

$\boxed{a = \frac{1}{n}} \Rightarrow P = \left(\frac{1}{n}x + b\right)P'$

$\boxed{nP = (x+nb)P'}$

Formule de leibiz :

$(P.Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{(n)} C_n^k P^{(k)} Q^{(n-k)}$

$(nP)^{(m)} = \left[(x+nb)P'\right]^{(m)}$

$nP^{(m)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x+nb)^{(k)} . (P')^{(n-k)}$

$= C_n^0 (x+nb)^{(0)} (P')^{(m)} + C_n^1 (x+nb)^{(1)} (P')^{(n-1)}$

$nP^{(m)} = (x+nb)(P)^{(m+1)} + m.1\ P^{(m)}$

$\Rightarrow (n-m)P^{(m)}(x) = (x+nb)P^{(m+1)}$

$\Rightarrow P^{(m)}(-nb) = 0 \Rightarrow (x+nb)^n / P$

$\Rightarrow P = \lambda(x+nb)^n$

Exercice 5 :

$P(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 9$

1) Mq 3 est une racine double de P

$\begin{cases} P(x) = (x-3)^2 Q(x) \\ Q(3) \neq 0 \end{cases}$

1er Methode

$P(3) = 3^4 - 5.3^3 + 4.3^2 + 9 + 9 = 0$

$P'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 8x + 3$

$P'(3) = 4.3^3 - 15.3^2 + 8\times 3 + 3 = 0$

$P''(x) = 12x^2 - 30x + 8$

$P''(3) = 12.9 - 30.3 + 8 = 26 \neq 0$

Donc 3 est une racine double de P

2ème Methode :

	1	-5	4	3	9
3		3	-6	-6	-9
	1	-2	-2	-3	$\boxed{0}$
3		3	3	3	
	1	1	1	$\boxed{0}$	

$P(x) = (x-3)^2(x^2+x+1)$

or $3^2 + 3 + 1 = 13 \neq 0$

Alors 3 est une racine double de P

② factorisation de P :

$P(x) = (x-3)^2(x^2+x+1)$

3) $P(x)=0 \iff (x-3)^2(x^2+x+1)=0$

$x-3=0$ ou $x^2+x+1=0$

$\Delta = 1^2-4=-3=(i\sqrt{3})^2$

$x_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{3, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$

Exercice 6 :

$P(0)=P(1)=P'(1)=0$ et $P'(0)=2$

0 est une racine d'ordre 1

1 est une racine au moins double

Alors $P(x) = x(x-1)^2.(ax+b)$

$= x(x^2-2x+1).(ax+b)$

$= (x^3-2x^2+x).(ax+b)$

$= ax^4+bx^3-2ax^3-2bx^2+ax^2+bx$

or P est unitaire alors $a=1$

or $P'(x)=4x^3+3bx^2-6x^2+2x+b-4bx$

$P'(0)=b$ or $P'(0)=2 \implies b=2$

$P(x)=x(x-1)^2.(x+2)$

Exercice 7 :

$P \in \mathbb{R}_5[x]$

-1 est une racine triple de $P+1$

$\implies P+1=(x+1)^3.(ax^2+bx+c)$

$P=(x+1)^3(ax^2+bx+c)-1$ ①

1 est une racine triple de $P-1$

$\implies P-1=(x-1)^3.(dx^2+ex+f)$

$P=(x-1)^3(dx^2+ex+f)+1$ ②

① = ② par identification on obtient

$a=\frac{3}{8}$, $b=\frac{-9}{8}$, $c=1$, $d=\frac{3}{8}$

$e=\frac{9}{8}$, $f=1$

Exercice 10 :

1)

$$\begin{array}{l|l}
x^4+5x^3+12x^2+19x-7 & x^2+3x-1 \\
-(x^4+3x^3-x^2) & \hline x^2+2x+7 \\
\quad 2x^3+13x^2+19x-7 & \\
-(2x^3+6x^2-2x) & \\
\quad 7x^2+21x-7 & \\
-(7x^2+21x-7) & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

donc $x^4+5x^3+12x^2+19x-7$ est un multiple de x^2+3x-1

2)

$$\begin{array}{l|l}
x^4-4x^3-9x^2+27x+38 & x^2-x-7 \\
-(x^4-x^3-7x^2) & \hline x^2-3x-5 \\
\quad 0-3x^3-2x^2+27x & \\
-(-3x^3+3x^2+21x) & \\
\quad 0-5x^2+6x+38 & \\
-(-5x^2+5x+35) & \\
\quad x+3 &
\end{array}$$

$x^4-4x^3-9x^2+27x+38=(x^2-x-7)(x^2-3x-5)+x+3$

3)

$$\begin{array}{l|l}
x^5-x^2+2 & x^2+1 \\
-(x^5+x^3) & \hline x^3-x-1 \\
\quad 0-x^3-x^2+2 & \\
-(-x^3-x) & \\
\quad -x^2+x+2 & \\
-(-x^2-1) & \\
\quad x+1 &
\end{array}$$

alors $x^5 - x^2 + 2 = (x^2+1)\times(x^3 - x - 1) + x + 3$

Exercice 11 :

$$(x+1)^n + x^n - 1 = (x^2 - 3x + 2)\,Q(x) + \underbrace{ax+b}_{\text{reste}}$$

pour $x = 1$

$(1+1)^n + 1^n - 1 = 0 + a + b$

$\Rightarrow a + b = 2^n$

pour $x = 2$

$(2+1)^n + 2^n - 1 = 0 + 2a + b$

$3^n + 2^n - 1 = 2a + b$

alors on a $\begin{cases} a + b = 2^n & (1) \\ 2a + b = 3^n + 2^n - 1 & (2) \end{cases}$

(2) $-$ (1) $\Rightarrow a = 3^n - 1 \Rightarrow b = 2^n - 3^n + 1$

donc le reste $r = (3^n - 1)x + (2^n - 3^n + 1)$

Exercice 9 :

1)
$$\begin{array}{l|l}
1 + 3x + 2x^2 - 7x^3 & 1 + x - 2x^2 \\
-(1 + x - 2x^2) & \overline{1 + 2x + 2x^2 - 5x^3 + 9x^4} \\
\quad 2x + 4x^2 - 7x^3 & \\
-(2x + 2x^2 - 4x^3) & \\
\quad 2x^2 - 3x^3 & \\
-(2x^2 + 2x^3 - 4x^4) & \\
\quad -5x^3 + 4x^4 & \\
-(-5x^3 - 5x^4 + 10x^5) & \\
\quad 9x^4 - 10x^5 & \\
-(9x^4 + 9x^5 - 18x^6) & \\
\quad -19x^5 + 18x^6 &
\end{array}$$

Alors $1 + 3x + 2x^2 - 7x^3 = (1 + x - 2x^2)$
$(1 + 2x + 2x^2 - 5x^3 + 9x^4) + x^5(-19 + 18x)$

5)
$$\begin{array}{l|l}
1 - 2x + x^3 + x^4 & 1 + x + x^2 \\
-(1 + x + x^2) & \overline{1 - 3x + 2x^2} \\
\quad -3x - x^2 + x^3 + x^4 & \\
-(-3x - 3x^2 - 3x^3) & \\
\quad 2x^2 + 4x^3 + x^4 & \\
-(2x^2 + 2x^3 + 2x^4) & \\
\quad 2x^3 - x^4 &
\end{array}$$

$1 - 2x + x^3 + x^4 = (1 + x + x^2)(1 - 3x + 2x^2) + x^3(2 - x)$

Exercice 8 :

les polynômes irreductibles (n'admet pas de diviseurs)

* Dans $\mathbb{C}[x] \rightarrow ax + b$
* Dans $\mathbb{R}[x] \rightarrow ax + b$
  $\rightarrow ax^2 + bx + c$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

1) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$
$= (x - 1)(x + 1)(x^2 - i^2)$
$= (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$

produit des poly. irr dans $\mathbb{C}[x]$

Dans $\mathbb{R}[x]$

$P = x^4 - 1 = (x^2 - 1)\underbrace{(x^2 + 1)}_{\Delta = -4 < 0}$

c'est le produit des polynome dans $\mathbb{R}[x]$

2) $P_2 = x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$
$= (x^2 + 1)^2 - x^2 = \underbrace{(x^2 + 1 - x)}_{\Delta = -3 < 0}\underbrace{(x^2 + 1 + x)}_{\Delta = -3}$

produit des polynomes irreductible dans $\mathbb{R}[x]$

Dans $\mathbb{C}[x]$

$x^2 - x + 1$

$\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$x_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

$x^2 + x + 1$

$\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ $x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

$P = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

3)

$P(3) = x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2$

$= (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

$\Delta = -3 < 0$ $\Delta = -3 < 0$

produit les polynome dans $\mathbb{R}[x]$

Dans $\mathbb{C}[x]$:

$P(3) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

$= (x - 1)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(x + 1)$

$\left(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$