

Documents, téléphones portables et calculatrices non autorisés.

QCM (10pts) :

Répondre au questionnaire à choix multiple suivant sachant que chaque question possède au moins une réponse (y compris le choix " Aucune des propositions précédentes n'est valable") et au plus deux. Aucune justification n'est demandée.

Les cinq questions suivantes sont liées.

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = \alpha$ où α est un réel fixé.

Question 1.

Le développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit:

- (a) $\ln(x+1) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$
- (b) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$
- (c) $\ln(x+1) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$
- (d) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon(x)$
- (e) Aucune des propositions précédentes n'est valable.

Question 2.

Le développement limité de la fonction $x \mapsto x^2$ à l'ordre 2 au voisinage de 1 s'écrit:

- (a) $x^2 = x^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x)$
- (b) $x^2 = (x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x)$
- (c) $x^2 = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x)$
- (d) $x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x)$
- (e) Aucune des propositions précédentes n'est valable.

Question 3.

Le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1 s'écrit:

- (a) $\frac{\ln x}{x^2 - 1} = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$
- (b) $\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{x-1}{2} + \frac{5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$
- (c) $\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{2x-1}{4} + \frac{10x^2-9x+3}{24} + (x-1)^2\varepsilon(x)$
- (d) $\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{5x}{12} + (x-1)^2\varepsilon(x)$

(e) Aucune des propositions précédentes n'est valable.

Question 4.

Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction f est:

- (a) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$
- (b) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$
- (c) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$
- (d) $f(x) = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

(e) Aucune des propositions précédentes n'est valable.

Question 5.

Pour que f soit continue sur \mathbb{R}_+^* , il faut que:

- (a) $\alpha = 1$
 - (b) $\alpha = \frac{1}{2}$
 - (c) $\alpha = -\frac{1}{2}$
 - (d) $\alpha = 2$
- (e) Aucune des propositions précédentes n'est valable.

Exercice 2 (10pts) :

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{1}{\tan x}$.

1. Quel est le domaine de définition, D_f , de f ?
 f est-elle paire? impaire? continue? dérivable sur D_f ?
2. (a) Expliquer pourquoi $x \mapsto \tan(x)$ admet un développement limité à l'ordre 6 en $x = 0$.
(b) Déterminer alors un développement limité à l'ordre 6 de $x \mapsto \tan(x)$.
(c) En déduire un développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$, en $x = 0$.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre 3, en $x = 0$, de $x \mapsto \frac{x}{\tan x}$.
4. En déduire un développement limité à l'ordre 2, en $x = 0$, de la fonction $g(x) = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}$.

2/2