Exercice :

On considère le Système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ -x+y+z+2t=0 \\ 2y+\lambda t=0 \end{cases}$$, où λ paramètre réel

1/ Determiner la matrice associée au système (S_λ)

2/ Determiner le rang de A_λ

3/ Résoudre (S_λ)

Solutions :

1/ $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2/ $rg(A_\lambda)$

$A_\lambda \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$

Deux Cas se présentent ; 1ère Cas :

1/ $\lambda = 3$

$A_3 \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Echelonnée}}$

$rg(A)_3 = 2$

2ème Cas :

$\lambda \neq 3$:

$A_\lambda \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow \frac{1}{\lambda-3} L_3$

$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - 3/2 L_3$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Echelonnée en ligne

$rg(A_\lambda) = 3$, si $\lambda \neq 3$

Bilan des inconnus

	Base	Paramètre
$\lambda = 3$	x y	z , t
$\lambda \neq 3$	x, y, t	z

3/ Résolution :

(méthode de Cramer) :

1ère Cas $\lambda = 3$

$S_3 : \begin{cases} x+y = z-t+1 \\ x+y = -z-2t \\ 2y+3t=1 \end{cases}$ Sous Système est de Cramer Car sa matrice associé

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} z-t+1 & 1 \\ -z-2t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{2z+t+1}{2}$

$= z + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$

Δ. Determiner le rang → dét → matrice échelonné

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z - t + 1 \\ -1 & -z - 2t \end{vmatrix}}{2}$$

$$= \frac{-3t + 1}{2} = -\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$$

Dans 3 :

$2\left(-\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\right) + 3t = 1$ vérifié

$S_{\mathbb{R}^4} = \left\{\left(z + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}, z, t\right) \middle| \; z \text{ et } t \in \mathbb{R}\right\}$

→ infinité de solutions.

Cas $\lambda \neq 3$:

$$\begin{cases} x + y + t = z + 1 \\ -x + y + 2t = -z \\ 2y + \lambda t = 1 \end{cases}$$

Système de Cramer à inconnu : x, y, t sous condition $\lambda \neq 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 2(\lambda - 3) \neq 0.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z+1 & 1 & 1 \\ -z & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} z+1 & 1 & 1 \\ -2z-1 & 0 & 1 \\ -2z-1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}}{2(\lambda-3)} = \frac{(2z-1)(\lambda-3) + 2z+1}{2(\lambda-3)} = \frac{(2z+1)(-\lambda+3)}{2(\lambda-3)}$$

$$= -z - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z+1 & 1 \\ -1 & -z & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{2(\lambda-3)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z+1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{2(\lambda-3)} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & z+1 \\ -1 & 1 & -z \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2(\lambda-3)} = 0$$

$S_{\mathbb{R}^4} = \left\{\left(-z - \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}, z, 0) \middle| \; z \in \mathbb{R}\right\}$.

Pour la méthode de Cramer
Déterminer l'inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1+2 = 1 \neq 0$$

A inversible

A^{-1} ?

$AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Puisque (S) est de Cramer (
[puisque la matrice associé au
(det A $\neq 0$)

- admet une unique solution $X = A^{-1}B$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-1-2b}{1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{vmatrix}}{\det A} = +a+b$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-2b \\ +a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B$$

$$\longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Règle générale :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

↳ Matrice d'ordre 2

- Série 3 -

Exercice 1 :

Soit $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$(x, y) \to u(x, y, z)$

$(-x + y, x - y, -x + z, -y + z)$

1/ Mq u est une application linéaire :

2/ Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{f_i, i = 1,2,3,4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

/ Calculer $u(e_i), i = 1, 2, 3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

3/ Mq $S = \{f_1, f_2, u(e), u(e_3)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

4/ Ecrire $Mat(u)_{B_c, B_c}$

5/ Ecrire la matrice de U relativement à B_c et S $Mat_{B_c, S}(u)$

Ex 1 :

Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x, y, z) \longmapsto u(x, y, z)$:

$(-x + y, x - y, -x + z, -y + z)$

$\begin{cases} u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y) \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall \lambda \end{cases}$

Soient $x = (x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$

$y = (a, b, c)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$x + \lambda y = (x + \lambda a + y + \lambda b, z + \lambda c)$

$u(x + \lambda y) = ((-x + \lambda a) + (y + \lambda b),$
$x + \lambda a - (y + \lambda b), -(x + \lambda a),$
$-(x + \lambda a) + z + \lambda c,$
$-(y + \lambda b) + z + \lambda c)$

$= (-x + y + \lambda(-a + b), x - y + \lambda(a - b),$
$-x + z + \lambda(a + c), -y + z + \lambda(-b + c))$

$= (-x + y, x - y, -x + z, -y + z) + \lambda(-a + b, a - b, -a + c, -b + c)$

$u(x + \lambda y) = U(x) + \lambda U(y)$

- Rappel :

$f : E \to F$ linéaire entre e-v de dimension finie.

$rg(f) = \dim Im(f)$

$Im(f) = \{y = f(x) \mid x \in E\}$
$= f(E) \subset F$

$Im(f) = Vect\{f(e_i), i = 1, \dots, p\}$
où $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base qq de E

Théorème : "du rang" :

$f : E \xrightarrow{\text{linéaire}} F$

$\dim E < +\infty$ alors on a :

$\dim E = \dim Ker f + rg(f)$.

2/ $rg(u)$?

$Im(u) = \{y = u(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$

$Im(u) = Vect\{u(e_i); i = 1, 2, 3\}$

$u(e_1) = (-1, 1, -1, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'_c}$ $e_1 = (1,0,0)$

$u(e_2) = (1, -1, 0, -1)$
$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B'_c}$

$u(e_3) = (0, 0, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'_c}$

$\dim Im(U) = \dim Vect \{U(e_i), i = 1, \dots, 3\}$
$= rg\{u(e_i), i = 1, 2, 3\}$

Rappel :
$= \dim Vect\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$
$= rg\{v, v_2, \dots, v_p\}$ $\to$

Scanned with ACE Scanner

$$= rg \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a_{n,2} & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

$rg(u) = \dim Im\, u$

$= \dim Vect\{u(e_i), i = 1, 2, 3\}$

$= rg\{u(e_i), i = 1, 2, 3\}$

$$= rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow -L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$

$f : E \to F$: linéaire.

$\to rg(u) = 2$.

$Vect(\{u(e_1), u(e_2), u(e_3)\}$

$= Vect\{u(e_1), u(e_2)\}$

$u(e_3) = \alpha u(e_1) + \beta u(e_2)$

$u(e_3) = -u(e_1) - u(e_2)$

$\dim Im\, u = 2$.

$\{u(e_1), u(e_2)\}$ est une base de $Im\, u = u(\mathbb{R}^3)$.

b/ Théorème de Rang :

$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim Ker(u) + \underbrace{rg(u)}_{=2}$

$\to \dim Ker(u) = 1$

$u(e_1 + e_2 + e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Ker f(u) \quad v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

$\{v\}$ est une base de $Ker\, u$.

$rg(u) = 2$.

3 $S = \{u(e_1), u(e_2); f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$

$Card(S) = 4$.

S libre ssi S base ssi S generatrice de $\mathbb{R}^4$.

ssi $rg(S) = $ nb de vect et de S.

⚠ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$

S libre ssi $S = p$

$rg\, S = rg\{u(e), u(e_2), f_1, f_2\}$

$$= rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{4}$$

4/ Matrice $(u)_{B_c, B'_c}$

$$\begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c : canonique

$y = u(x)$ $\quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$Mat_{B_c, B_c'}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \\ -x+z \\ -y+z \end{pmatrix}$

$u(x, y, z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z)$.

Scanned with ACE Scanner