Logique Formelle
Chapitre 03: Logique des prédicats
Partie 01

Ikram Troudi

Niveau : LGLSI 1
Faculté des Sciences de Gabés (FSG)

Introduction

- La logique propositionnelle qui nous a permis de mettre au point une première théorie de raisonnement mais elle ne permet pas de formuler tous les raisonnements .
- Il faut aller alors plus loin que le simple calcul des propositions.
- Nous n'allons plus contenter de simples propositions, mais nous allons introduire un nouveau type de formules logique: appelé le **prédicat**.

Exemple

- {n est un entier naturel pair} n'est pas une proposition
- par contre {5 est un entier naturel pair} est une proposition fausse.

→ A Chaque fois qu'on remplace n par un entier particulier on obtient une proposition

- {n est un entier naturel pair} est un prédicat.

Introduction

Définition:

- un prédicat est une formule logique qui dépend **d'une variable libre.**
- un prédicat c'est une affirmation **qui porte sur des symboles** représentant **des éléments variables d'un ensemble fixe.**

- Puisqu'un prédicat dépend d'une variable x, nous les noterons souvent P(x);

- C'est une application qui associe une proposition P(x) à chaque élément d'un ensemble E, cette ensemble s'appelle **l'univers** du prédicat

- Dans le cas de exemple précédent E = N

Introduction

Objectif:

- La logique des prédicats a pour but de généraliser la logique des propositions. On peut considérer un prédicat comme un énoncé général où apparaissent des variables. Par exemple:

(1) « X est la sœur de Y »

(2) « si X est le père de Y et Y le père de Z alors X est le grand père de Z »

Si on remplace toutes les variables d'un prédicat par des valeurs définies, on obtient une proposition à laquelle on pourra associer une interprétation (vrais, faux), Par exemple

- X= Rim et Y = Ali dans (1) donne « Rim est la sœur de Ali »
- Un prédicat représente donc potentiellement une classe de propositions.

Introduction

- Le nombre des variables d'un prédicat s'appelle **poids** du prédicat.
- Exemple :

  p (a,b) = {le couple d'entiers naturels (a,b) tel que a+b=10}

  - si l'univers du prédicat est N^2 alors son poids est égal à 2
  - si l'univers du prédicat est N alors son poids est égal à 1
- Dans un prédicat de poids n, si l'on affecte une valeur à l'une des variables, on obtient un prédicat de poids n-1
- Par conséquent, un prédicat de poids 0 est une proposition.
- Les prédicats qui portent sur **le même univers** peuvent être combinés entre eux a l'aide des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ pour former de nouveau prédicat.

Définitions :

- Le prédicat $\neg$ p (x) associe à x la négation du prédicat p(x)
- Le prédicat p $\wedge$ q (x) associe à x la conjonction des prédicats p(x) et q(x)
  on notera aussi (p $\wedge$ q) (x)
- Le prédicat p $\vee$ q (x) associe à x la disjonction des prédicats p(x) et q(x)
  on notera aussi (p $\vee$ q) (x)

Exemple : même univers N

p(n) = {l'entier naturel n est pair); q(m) = {l'entier naturel m est divisible pas 5}

$\neg$p(n) = {l'entier naturel n est impair}

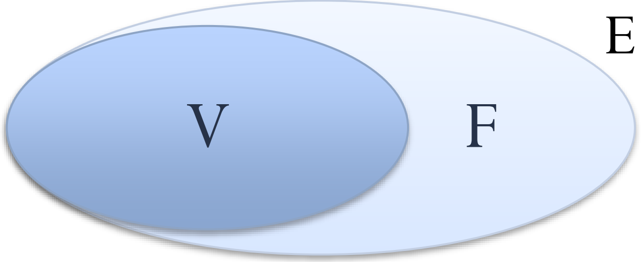
p $\wedge$ q (n) = {l'entier naturel n est pair, et il est divisible par 5} (poids 1)

p $\vee$ q (n) = {l'entier naturel n est pair, ou il est divisible par 5} (poids 1)

Attention : si l'univers est N^2 (poids 2), il ne faut pas confondre p $\wedge$ q (n) avec S (n,m) = {l'entier naturel n est pair et l'entier naturel m est divisible par 5)

Formalisation du langage naturel

- Soit P un prédicat de poids 1 sur l'univers **E**. Comme ce prédicat associe une proposition P(x) a tout élément x de E, on peut trier les éléments de E en deux sous-ensembles, ceux pour lesquelles P(x) est vraie **V** et ceux pour qui elle est fausse **F**.



Donc soit application v: $E \longrightarrow \{V,F\}$

$x \longrightarrow P(x)$

- Ce tri revient à regrouper les éléments de E pour qui v (x) est V et ceux pour qui v (x) =F

Les quantificateurs :

- L'affirmation «l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie est E tout entier » est une proposition ; on la note $\forall$ x P(x)

  → On lit : **quel que soit x la proposition P(x) est vrai**

  $\forall$: quantificateur universel

- L'affirmation « l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie n'est pas vide » est une proposition ; on la note $\exists$ x. P(x)

  → On lit: **il existe x tel que P(x) est vraie**

  $\exists$: quantificateur existentiel

Exemples :

- Soit le prédicat $P(n)$ = {l'entier naturel n est pair }

-$\forall n\, P(n)$ est une proposition fausse car on lit: « tout entier naturel est pair »

-$\exists\, n\, P(n)$ est une proposition vraie car on lit: « il existe un entier naturel pair »

Exercice d'application

- Soit les prédicats : $H(x)$ = {x est un homme }
  $M(x)$ = {x est méchant }
- Formuler les affirmations suivantes:

- «C'est faux que tous les hommes sont méchants »: $\neg(\forall\, x\, (H(x) \rightarrow M(x)))$
- «Seulement les hommes sont méchants » : $\forall\, x\, (M(x) \rightarrow H(x))$
- « Il existe un homme méchant » : $\exists\, x\, (H(x) \wedge M(x))$
- « Il n'existe pas d'homme méchant » : $\neg(\exists\, x\, (H(x) \wedge M(x)))$

Remarques :

- Soit P un prédicat dont univers est E = $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots, e_n\}$

  - La proposition ∀ x P(x) est vraie quand les propositions P(e_1) ,P(e_2),…., P(e_n) sont toutes vraies.

  → ∀ x P(x) se confond avec la proposition P(e_1) ∧ P(e_2) ∧….∧ P(e_n)

  - La proposition ∃ x P(x) est vraie si l'une au moins des propositions P(e_1) ,P(e_2),…., P(e_n) est vraie.

  → ∃ x P(x) se confond avec la proposition P(e_1) ∨ P(e_2) ∨ …. ∨ P(e_n)

- Soit P(x,y,z) un prédicat de poids 3

  - Q(x,z) = ∃ y P(x,y,z) est un prédicat de poids 2
  - R(z) = ∀ x Q(x,z) = ∀ x ∃ y P(xy,z) est prédicat de poids 1

Alphabet du langage du premier ordre (prédicat)

Le langage du calcul des prédicats est formé de :

- Les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$
- Les quantificateurs
  - $\exists$:quantificateur existentiel (« il existe » : $\exists$ x P(x))
  - $\forall$: quantificateur universel (« pour tout ») : $\forall$ x P(x))
- Des constantes logiques : V et F

Formules du langage :

- A est une formule atomique si A s'écrit sous la forme P(t_1, t_2, t_3,…, t_n) avec

  - P est un symbole de prédicat de poids n(P $\in P_n$)
  - t_1, t_2, t_3,……., t_n sont des termes

- Si n=0, une formule atomique est une variable propositionnelle

Syntaxe du calcul des prédicats

Formules du langage :

- Une formule atomique est une formule
- V et F sont des formules
- Si A est une formule, alors $(\neg A)$ est une formule.
- Si A et B sont deux formules, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont des formules.
- Si A est une formule et x est une variable, alors $\exists x.\ A$ et $\forall x.\ A$ sont des formules.

Formules du langage :

Revenons au deux quantificateurs (existentiel et universel) développer précédemment, Nous rappelons les définitions de chacun:

- ∃ : « existe au moins un seul »
- ∃ ! : « existe un et un seul »
- ∀ : « quel que soit, ou pour tout »
- Quantificateurs imbriqués:

Notons que l’ordre des quantificateurs est important. En effet, « tout le monde aime quelqu'un » s’écrirait $\forall x.(\exists\, y.\ Aime(x,y))$, qui n'a pas exactement le même sens que « il y a quelqu'un qui est aimé par tout le monde » qui s’écrirait $(\exists y.(\forall x.Aime(x,y))$.

Formules du langage :

Loi de Morgan entre les quantificateurs:

- $\neg \forall x.\ F \equiv \exists x.\ \neg F$
- $\neg \exists x.\ F \equiv \forall x.\ \neg F$
- $\forall x.\ F \equiv \neg \exists x.\ \neg F$
- $\exists x.\ F \equiv \neg \forall x.\ \neg F$

Formules du langage :

Illustration

- « Tout le monde déteste les brocolis » revient au même que « Il n’existe personne qui aime les brocolis »

$$\forall x.\ \neg\ Aime(x, brocolis) = \neg\ \exists\ x.\ Aime(x, bricolis)$$

- « Tout le monde aime les glaces » et « il n'y a personne qui n’aime pas les glaces » sont équivalentes:

$$\forall x.\ Aime(x, glaces\ ) = \neg\ \exists\ .\ \neg\ Aime(x, glaces)$$

Formules du langage :

Exercice 1: Formuler en calcul des prédicats les phrases suivantes:

1. les baleines sont des mammifères.
2. les entiers sont pairs ou impairs
3. Il existe un entier pair

Correction:

$\forall$ x. (Baleine(x) $\rightarrow$ Mamm(x))

$\forall$ x. (Entier(x) $\rightarrow$ (Pair(x) $\vee$ Impair(x)))

$\exists$x. (Entier(x) $\wedge$ Pair(x))

Syntaxe du calcul des prédicats

Calcul de prédicat

- Les constants {a, b, c, d….}
- Les variables {x, y, z, ….}
- Les fonctions {f, g, h, ….}
- Les prédicats relation {P, Q, R, S}
- Les connecteurs {$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ }
- Les quantificateurs{$\forall$, $\exists$}

Calcul de prédicat

$\underbrace{\text{Le père}}_{\text{fonction}}$ de $\underbrace{\text{Omar}}_{\text{constant}}$ à $\underbrace{\text{peur}}_{\text{prédicat}}$ de $\underbrace{\text{chien}}_{\text{variable}}$

A part $\underbrace{\text{0 et 1}}_{\text{constant}}$, aucun $\underbrace{\text{nombre}}_{\text{variable}}$ n'est $\underbrace{\text{égale}}_{\text{prédicat}}$ à $\underbrace{\text{son carré}}_{\text{fonction}}$

Syntaxe du calcul des prédicats

Formule bien formée

Soit F1 et F1 sont des formules atomiques

$$\neg F1,\ F1 \wedge F2\ ,\ F1 \vee F2\ ,\ F1 \rightarrow F2 \text{ et } F1 \leftrightarrow F2$$

Exemple

$$\underbrace{\forall x\ A(x)}_{F1} \rightarrow \underbrace{(\underbrace{\forall y\ (P(f(x),x)}_{F1} \rightarrow \underbrace{P(g(y),b)}_{F2})}_{F2}$$

Variable libre et variable liée

$$F=\underbrace{\forall x\ A(\overset{1}{x})}_{\text{Champ de qualificateur } \forall x} \rightarrow \underbrace{(\forall y\ (P(f(\overset{2}{x}),x) \rightarrow P(g(y),b))}_{\text{Champ de qualificateur } \forall y}$$

x: occurrence numéro 1 de x est un **variable liée**

x: occurrence numéro 2 de x est un **variable libre**

Formule Close: Toutes les variable sont liées

Formule ouverte: Il existe au moins une variable libre

Variable libres:

Soit A une formule. L'ensemble des variables libres de A, noté Var(A), est défini comme suit :

- Si A est un atome, de forme P(t_1, t_2, t_3,…, t_n) alors:

  Var(A) = Var(P(t_1, t_2,,…, t_n))= Var(t_1) ∪ Var(t_2) ∪ ⋯ ∪Var(t_n)
- Si A=(¬B) alors

  Var(A) = Var(¬ B) = Var(B)
- Si A=B # C, où # est l'un des connecteurs logiques {∧, ∨, →, ↔}alors:

  Var(A) = Var(B # C) = Var(B) ∪ Var(C)
- Si A= ∃x B ou A= ∀x B alors :

  Var(A) = Var(∃ x B) = Var(∀ x B) = Var(B)/ {x}

Variable libres:

Chacune des fois où une variable x apparaît dans une formule A est appelée une occurrence de x dans A.

- Toutes les occurrences des variables d'un terme sont des variables libres de *t*. c.a.d

1/L'ensemble des variables libres d'une variable individuelle x est simplement l'ensemble contenant x lui-même.

$$\mathrm{Var}(x) = \{x\}$$

2/ Pour une constante c, l'ensemble des variables libres est vide, car les constantes ne contiennent aucune variable.

$$\mathrm{Var}(c) = \{\ \}\ (\ c : \text{constante})$$

3/Pour une fonction f appliquée à des termes , l'ensemble des variables libres de cette expression est l'union des ensembles de variables libres de chaque terme ti.

$$\mathrm{Var}(f\,(t_1, t_2,, \ldots, t_n\ )) = \mathrm{Var}(t_1) \cup \mathrm{Var}(t_2) \cup \cdots \cup \mathrm{Var}(t_n)$$

- Une formule de A est dite close si Var(A) = ∅ (A n'a pas de variable libre)

Syntaxe du calcul des prédicats

Variable libres: Exemples :

- A : $\exists x \forall y\ P(f(x,y),z)$

$$
\begin{aligned}
Var(A) &= Var(\forall y\ P(f(x,y),z)) \setminus \{x\} \\
&= Var(P(f(x,y),z) \setminus \{y\}\ ) \setminus \{x\} \\
&= Var(\ (Var(f(x,y)) \cup Var(z)) \setminus \{y\}\ ) \setminus \{x\} \\
&= ((\{x,y\} \cup \{z\}) \setminus \{y\}\ ) \setminus \{x\} \\
&= (\{x,y,z\} \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\
&= (\{x,z\}) \setminus \{x\} \\
&= \{z\} \text{ Donc A n'est pas close}
\end{aligned}
$$

- B : $\forall x\ P(x)$

$Var(B) = Var(\exists x\ P(x)) = Var(P(x)) \setminus \{x\} = \{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$ Donc B est close

Avec un terme est dit **clos** s'il ne contient aucune variable

Variable libres: Exemple :

A : $(\forall x (P(x,y) \rightarrow Q(x))) \wedge (\forall y (\neg P(x,y) \wedge (\exists z\, Q(z))))$

- $Var(B) = Var(P(x,y) \rightarrow Q(x)) \setminus \{x\}$

  $=(\{ x,y \} \cup \{ x \}) \setminus \{x\} = \{y\}$

- $Var(C) = Var(\neg P(x,y) \wedge (\exists z\, Q(z))) \setminus \{ y \}$

  $Var(C) = (Var(\neg P(x,y)) \cup Var(Q(z) \setminus \{ z \})) \setminus \{ y \}$

  $Var(C) = (\{ x,y \} \cup (\{ z \} \setminus \{ z \})) \setminus \{y\}$

  $Var(C) = \{ x,y \} \setminus \{y\} = \{ x \}$

- $Var(A) = Var(B) \cup Var(C) = \{ x, y \}$

Variable liée:

- Soit A une formule. L'ensemble des variables liées de A, noté B Var(A) (B pour bound), est définie comme suit :

- Si A est un atome, $BVar(A) = \emptyset$

- Si $A = \neg C$ alors $BVar(A) = BVar(\neg C) = BVar(C)$

- Si $A = B \# C$ avec $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ alors :

  $BVar(A) = BVar(B \# C) = BVar(B) \cup BVar(C)$

- Si $A = \exists x\, B$ ou $A = \forall x\, B$ alors :

  $BVar(A) = BVar(\exists x\, B) = BVar(\forall x\, B) = BVar(B) \cup \{x\}$

Variable liée:

A : $(\forall x\ (P(x,y) \rightarrow Q(x))) \wedge (\forall y\ (\neg\ P(x,y) \wedge (\exists z\ Q(z))))$

- $B\,Var(B) = BVar(P(x,y) \rightarrow Q(x)) \cup \{x\}$
  $= (BVar(P(x,y)) \cup BVar(Q(x))) \cup \{ x \}$
  $= (\emptyset \cup \emptyset) \cup \{ x \} = \{ x \}$

- $B\,Var(C) = B\,Var(\neg\ P(x,y) \wedge (\exists z\ Q(z))) \cup \{ y \}$
  $= (B\,Var(\neg\ P(x,y)) \cup (B\,Var(Q(z)) \cup \{ z \})) \cup \{ y \}$
  $= (\emptyset \cup (\emptyset \cup \{ z \})) \cup \{y\} = \{ z \} \cup \{y\} = \{ z,y \}$

- $B\,Var(A) = B\,Var(B) \cup B\,Var(C) = \{ x, y ,z\}$

Exercice d'application :

Donner les variables libres et liées pour chacune des formules suivantes:

1/ $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ Q(x,y))$

2/ $(\exists y\ Q(x,y)) \rightarrow \forall x\ P(x)$

3/ $\exists x\ (\neg (\exists y\ P(x,y)) \rightarrow (\exists z\ Q(z) \rightarrow R(x)))$

4/ $(\exists x\ (\ (\neg \exists y\ P(x,y))\ )) \rightarrow (\exists z\ Q(z) \rightarrow R(x))$

5/ $((\forall x\ P(x) \rightarrow \exists y\ Q(y)) \rightarrow \exists z\ R(z)) \rightarrow \exists u\ S(u)$