

# Chapitre 3: Équations différentielles

## I/ Équations de 1<sup>er</sup> ordre:

Définition:

On appelle équation différentielle linéaire de 1<sup>er</sup> ordre, toute équation de la forme.

$$(E): a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

avec,  $a, b$  et  $c$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$   
(de plus  $a(x) \neq 0, \forall x \in I$ )

\*  $c(x)$  s'appelle le second membre de  $(E)$

\* Résoudre  $(E)$  c'est déterminer l'ensemble des fonctions  $y$  qui vérifient cette équation.

→ une solution générale de  $(E)$  notée  $y_G$  écrit de la forme:

$$y_G = y_H + y_P$$

avec  $y_H$  est une solution de

$$(E_H): a(x)y' + b(x)y = 0$$

$(E_H)$ : s'appelle équation homogène (ou aussi sans second membre) associée à  $(E)$

### Exemples:

$$1) (E_1): xy' + \frac{1}{1+x} y = e^x \quad \left| \begin{array}{l} a(x) = x \\ b(x) = \frac{1}{1+x} \\ c(x) = e^x \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow (E_{1H}): xy' + \frac{1}{1+x} y = 0$$

$$2) (E_2): y' + e^x y = \frac{1}{1+x^2} \quad \left| \begin{array}{l} a(x) = 1 \\ b(x) = e^x \\ c(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow (E_{2H}): y' + e^x y = 0$$

1) Détermination de  $y_H$ :

→  $y_H$  est solution de l'équation homogène

$$(E_H): a(x)y' + b(x)y = 0$$

$$a(x)y'_H + b(x)y_H = 0$$

$$\hookrightarrow a(x)y'_H = -b(x)y_H \Rightarrow a(x) \frac{y'_H}{y_H} = -b(x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'_H}{y_H} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{y'_H}{y_H} = \frac{b(x)}{a(x)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'_H}{y_H} dx = - \int \frac{b(x)}{a(x)} dx + \text{cte}$$

$$\Rightarrow \ln |y_H| = - \int \frac{b(x)}{a(x)} dx + \text{cte}$$

$$y_H = e^{- \int \frac{b(x)}{a(x)} dx + \text{cte}}$$

$$y_H = K e^{- \int \frac{b(x)}{a(x)} dx}, K \in \mathbb{R}$$

"

## Exemples

$$1) (E) : (1+x^2)y' + y = e^x \quad \left| \begin{array}{l} a(x) = (1+x^2) \\ b(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow (E_H) : (1+x^2)y' + y = 0 \quad \left| \begin{array}{l} c(x) = e^x \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow Y_H = k e^{-\int \frac{1}{1+x^2} dx} = k e^{-\arctan(x)}, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow Y_H = k e^{-\arctan x}, k \in \mathbb{R}$$

$$2) (E) : x^2(x+1)y' + xy = \cos x$$

$$\hookrightarrow (E_H) : x^2(x+1)y' + xy = 0 \quad \left| \begin{array}{l} c(x) = 0 \\ a(x) = \\ x^2(x+1) \\ b(x) = x \\ c(x) = \cos x \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow Y_H = k e^{-\int \frac{x}{x^2(x+1)} dx}$$

$$= k e^{-\int \frac{x}{x(x+1)} dx}$$

$$= k e^{-\int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx}$$

$$= k e^{-\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx}$$

2) Determination de  $y_p$ : (méthode de la variation de la constante)

$$Y_H = k e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}, \quad [k \in \mathbb{R}]$$

$$\hookrightarrow y_p = k(x) e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$$

où  $k(x)$  est une fonction à déterminer.

→ La méthode de la variation de la constante consiste à remplacer  $k \in \mathbb{R}$  par  $k(x)$  qui figure dans l'expression de  $Y_H$  par une fonction  $k(x)$ .

Pour déterminer  $y_p$  il faut déterminer  $k(x)$ .

## Exemples:

$$1) (E) : y' + y = (x+2)e^x \quad \left| \begin{array}{l} a(x) = 1 \\ b(x) = 1 \\ c(x) = (x+2)e^x \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow (E_H) : y' + y = 0$$

$$\Rightarrow Y_H = k e^{-\int \frac{1}{1} dx} = k e^{-x}, k \in \mathbb{R}$$

$$y_H = k e^{-x}, k \in \mathbb{R}$$

$y_p = k(x) e^{-x}$  est solution (E) :

$$y' + y = (x+2)e^x$$

donc elle vérifie (E), c'est :

$$y'_p + y_p = (x+2)e^x$$

$$y_p = k(x)e^{-x} \Rightarrow y'_p = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$$

En remplaçant dans (E), on obtient

$$k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = (x+2)e^x$$

$$\Rightarrow k'(x)e^{-x} = (x+2)e^x$$

$$\Rightarrow k(x) = \int (x+2)e^{2x} dx$$

$y_p$  détermine  $k(x)$

on pose

$$\begin{cases} U = (x+2) \\ V = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 1 \\ V' = 2e^{2x} \end{cases}$$

$$\int (x+2)e^{2x} dx = \frac{x+2}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$= \frac{x+2}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}, k \in \mathbb{R}$$

$$k(x) = \frac{2x+3}{4} e^{2x}$$

$$Y_p = K(x) e^{-\alpha x}$$
$$= \frac{2x+3}{4} e^{2x}, e^{-\alpha x}$$

$$\Rightarrow Y_p = \frac{2x+3}{4} e^x$$

$$\Rightarrow Y_G = K e^{-\alpha x} + \frac{2x+3}{4} e^x, K \in \mathbb{R}$$