UNIVERSITÉ DE GABÈS
FACULTÉ DES SCIENCES DE GABÈS

EXAMEN

Section : LGLSI1					
Épreuve de : Analyse .2.					
Nature de l'épreuve : D.C.☐ E.F.☒	Documents :	autorisés	☐	non autorisés	☒
Date de l'épreuve : 24-05-2024	Calculatrice :	autorisée	☐	non autorisée	☒
Durée de l'épreuve : $1h30mn$	Session :	principale	☒	contrôle	☐

Une grande importance sera attachée à la clarté de la rédaction.

Exercice 1 .

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, et plus généralement :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Soient $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$v_n = u_n - 2\sqrt{n+1}, \quad w_n = u_n - 2\sqrt{n}.$$

1. *Calculer $(u_{n+1} - u_n)$.* (1pt)
2. *Montrer que (v_n) est une suite croissante et que (w_n) est une suite décroissante.* (1pt)
3. *Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (w_n - v_n) = 0$.* (1pt)
4. *Les suites (v_n) et (w_n) sont-elles adjacentes ? Justifier votre réponse.* (1pt)
5. *Que peut-on dire de la convergence de (v_n) ? Et pour (w_n) ?* (1pt)
6. *Que peut-on dire de la convergence de (u_n) ?* (1pt)

Exercice 2 .

1. (a) *Déterminer des réels a et b tels que* (1pt)

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

   (b) *Calculer la somme partielle* (1pt)

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}, \; N \geq 1.$$

   (c) *Étudier la monotonie de la suite $(S_N)_{N\geq 1}$.* (1pt)

   (d) *Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.* (1pt)

2. *On admet que $\ln(1-x) \sim (-x)$ au voisinage de 0. On pose $u_n = \ln\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$, $n \geq 1$.*

   (a) *Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$.* (1pt)

(1pt)

(b) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

(1pt)

3. Soit $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Vérifier que

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}, \quad \forall t \in [k, k+1].$$

(1pt)

(b) Montrer que

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}. \qquad (\star)$$

(1pt)

(c) En sommant la partie droite de l'inégalité $(\star)$ entre 1 et n, montrer que

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1pt)

(d) En sommant la partie gauche de l'inégalité $(\star)$ entre 1 et $(n-1)$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1.$$

(1pt)

(e) Montrer que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1.$$

(1pt)

(f) Étudier la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$.

(1pt)

4. Étudier la convergence des séries suivantes :

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$. (1pt)

(b) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

®-Bon Travail-®