Applications linéaires

Déf :

Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}$.e.v
et $f : E \to F$
on dit que f est linéaire ssi

i) $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

on dit aussi que f est morphisme d'e.v

Rq :

$f(0_E) = 0_F$

Exp1 : soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \longmapsto (x-y+z, 2x+z)$$

Mq f est linéaire.

Rep :

soient $X = (x,y,z)$ et $Y = (a,b,c)$

$$f(x+y) = f(x+a, y+b, z+c)$$
$$= (x+a-y-b+z+c, 2x+2a+z+c)$$
$$= \underbrace{(x-y+z, 2x+z)}_{f(x)} + \underbrace{(a-b+c, 2a+c)}_{f(y)}$$

soient $\alpha \in \mathbb{R}$ $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(\alpha X) = \alpha f(X) \ ?$$

$$f(\alpha X) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$
$$= (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha x + \alpha z)$$
$$= \alpha(x-y+z, 2x+z) = \alpha f(X)$$

Déf :

soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1) si $F = \mathbb{K}$ alors on dit que f est une forme linéaire.

2) si $E = F$ on dit que f est un endomorphisme de E.

3) si f est bijective on dit que f est un isomorphisme.

4) si $f : E \to E$ et bijective on dit que f est un automorphisme de E

Exp2 :

soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$$

Mq f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

Rep :

soient $X = (x,y)$, $Y = (a,b)$

$$f(x+y) = f(x+a, y+b) = (x+a+y+b, x+a-y-b)$$
$$= \underbrace{(x+y, x-y)}_{f(x)} + \underbrace{(a+b, a-b)}_{f(Y)} = f(X) + f($$

. soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\alpha X) = f(\alpha x, \alpha y)$$
$$= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y)$$
$$= \alpha(x+y, x-y) = \alpha f(x)$$

alors f est linéaire et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
alors f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

Noyau, image application linéaire :

Def :

soit $f : E \to F$ une application linéaire on appelle :

1) Noyau de f et on note

$$Kerf = \{X \in E / f(X) = 0_F\}$$

2) Image de f et on note Imf

$$Imf = \{f(X) / X \in E\}$$

Rq :

1/ $Kerf$ et Imf sont des s.e.v de E

2/ f injective ssi $Kerf = \{0_E\}$

Exp1 :

soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \mapsto (x - y + z, 2x + z)$$

1) Mq f est linéaire

2) Determiner $Kerf$

3) " Imf

Rep :

1/ f lineaire

2/ $Kerf$

soit $(x, y, z) \in Kerf \Leftrightarrow f(x, y, z) = (0,0)$

$\Leftrightarrow (x - y + z ; 2x + z) = (0, 0)$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 & (1) \\ 2x + z = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow -x - y = 0 \Leftrightarrow y = -x$

$(2) \Rightarrow z = -2x$

Alors $(x, y, z) = (x, -x, -2x)$

$= x(1, -1, -2)$ alors $Kerf = vect(a)$

3) Imf ?

$f(x, y, z) = (x - y + z, 2x + z)$

$= (x, 2x) + (-y, 0) + (z, z)$

$= x\underbrace{(1, 2)}_{b} + y\underbrace{(-1, 0)}_{c} + z\underbrace{(1, 1)}_{d}$

$\Rightarrow Imf = vect(b, c, d)$

Exp2 :

soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

1) Mq f est linéaire

2) Determiner $Kerf$

3) " " Imf

Rep :

1/ f est linéaire

2) $Kerf$?

$f(x, y) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 & (1) \\ x - y = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow 2x = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

$0 + y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

alors $Kerf = \{(0, 0)\}$

3) Imf ?

$f(x, y) = (x + y, x - y) = (x, x) + (y, -y)$

$= x\underbrace{(1, 1)}_{a} + y\underbrace{(1, -1)}_{b}$

~~$Imf = vect(a, b)$~~

$Imf = vect(a, b)$

(2)

Exp : soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto x - y$

1) Mq f est lineaire
2) Determiner $\ker f$
3) " " $\operatorname{Im} f$

1) soient $X = (x, y)$, $Y = (a, b)$

$f(X+Y) = f(x+a, y+b) = x+a+y+b$

$= \underbrace{x+y}_{f(x)} + \underbrace{a+b}_{f(y)}$

: Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $X = (x, y)$

$f(\alpha X) = f(\alpha x, \alpha y) = \alpha x + \alpha y$

$= \alpha (x+y) = \alpha f(X)$

alors f est lineaire

2) $\ker f$?

$f(x,y) = 0 \Rightarrow x + y = 0$

$\Rightarrow y = -x$

$\Rightarrow (x, y) = (x, -x)$

$= x \underbrace{(1, -1)}_{a}$

$\Rightarrow \ker f = \operatorname{vect}(a)$

3) $\operatorname{Im} f$?

$f(x,y) = x+y = (x+y) \times 1$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(1) = \mathbb{R}$