

SERIE 2 : Représentation graphique et calcul de primitive

**Exercice 1.** Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition en précisant à chaque fois, en cas d'existence, leurs asymptotes et extremums

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}}, \quad f_2(x) = \frac{x}{1+\sqrt[3]{x}}, \quad f_3(x) = x^2[x], \quad f_4(x) = \begin{cases} x + 1e^2 - e^x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

**Exercice 2.**

1. Calculer les primitives de la fonction  $f(x) = \begin{cases} x + 1e^2 - e^x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$
2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \begin{cases} x^2[x], & \text{Si } x < 2; \\ 0, & \text{si } x = 2; \\ \frac{1}{2}x^3, & \text{si } x > 2. \end{cases}$ 
  - (a) Montrer que la fonction  $g$  n'admet pas de primitive sur  $] -1; 2[$ .
  - (b) La fonction  $g$  admet-elle une primitive sur l'intervalle  $]1; 3[$ ?

## Serie 2:

### Exercice 1:

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}}$$

$$x \in D_{f_1} \Rightarrow 1-x \neq 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq 0$$

$$\text{Donc } D_{f_1} = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

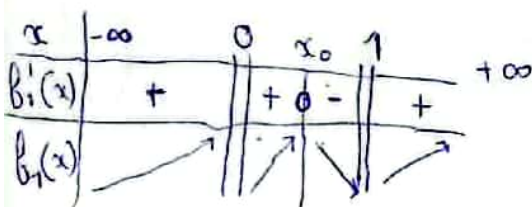
$f_1$  est combinaison de fonctions usuelles, donc elle est continue sur  $D_{f_1}$ .

$f_1$  est combinaison de fonctions usuelles, donc elle est dérivable à l'intérieur de  $D_{f_1}$ .

calculons  $f_1'(x)$ , pour  $x \in D_{f_1}$ .

$$f_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{16}{3x(x-1)}} + \frac{1}{1-x} \left( \frac{-6x+3}{3x^2(x-1)^2} \right) e^{\frac{16}{3x(x-1)}}$$

$$= \left[ 1 + \frac{(-6x+3)16}{9(1-x)x^2} \right] e^{\frac{16}{3x(x-1)}}$$

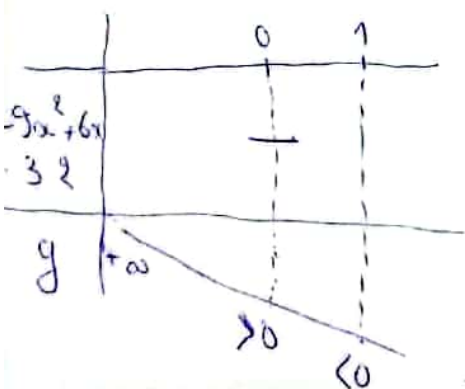


$$f_1'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{(-6x+3)16}{9(1-x)x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 9(1-x)x^2 + [-6x+3]16 = 0$$

$$\Rightarrow -9x^3 + 9x^2 - 96x + 48 = 0$$

$$\Rightarrow -3x^3 + 3x^2 - 32x + 16 = 0$$



Précision des asymptotes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}}$$

$$\left( = \frac{1}{+\infty} e^{\frac{16}{+\infty}} = 0 \times e^0 = 0 \right)$$

Donc  $\Delta_1$ :  $y=0$  est une asymptote en  $-\infty$  pour  $f_1$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}}$$

$$= \frac{1}{-\infty} e^{\frac{16}{+\infty}} = 0 \times e^0 = 0$$

Donc  $\Delta_2$ :  $y=0$  est une asymptote en  $+\infty$  pour  $f_1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}}$$

$$= \frac{1}{1} e^{\frac{16}{3 \cdot 0^- \cdot (-1)}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Donc  $\Delta_3$ :  $x=0$  est une asymptote pour  $f_1$  (à gauche de 0) en  $0^-$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}}$$

$$= \frac{1}{1} e^{\frac{16}{3 \cdot 0^+ \cdot (-1)}} = e^{-\infty} = 0$$

Donc  $f_1$  se prolonge par continuité à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{3x(x-1)}}$$

$$\left( = \frac{1}{0^+} e^{\frac{16}{3 \cdot 1 \cdot 0^-}} = +\infty \times e^{-\infty} = (+\infty) \times 0 \text{ F.I.} \right)$$

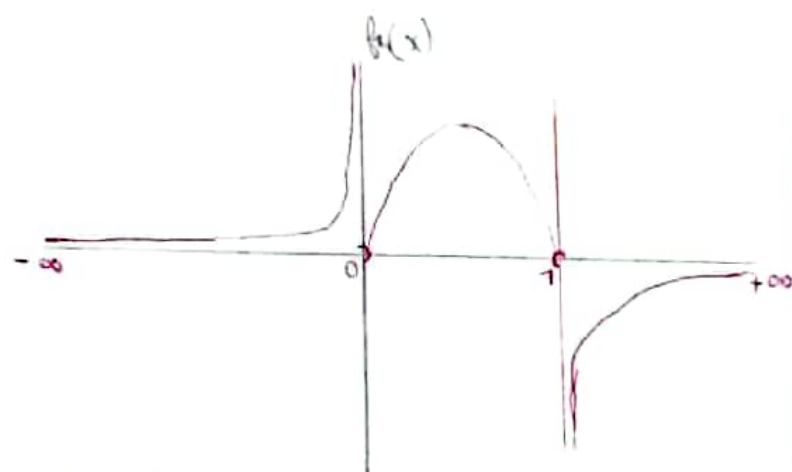
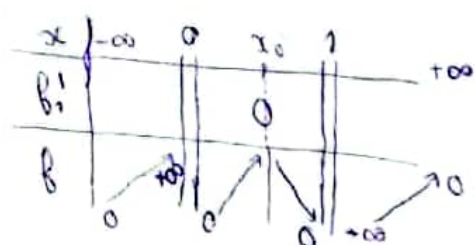
$$t = \frac{1}{1-x} \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot e^{\frac{-16 \cdot t^2}{3(t-1)}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{\frac{16t^2}{3(t-1)}}} = 0, \text{ car } e^{\frac{16t^2}{3(t-1)}} \gg t$$

Donc  $f_1$  se prolonge par continuité à gauche en 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} e^{\frac{16}{1-x}(x-1)} = \frac{1}{0^-} e^{\frac{16}{1 \cdot 0^+}} \\ = (-\infty) \times e^{+\infty} \\ = -\infty \times +\infty = -\infty$$

Donc  $\Delta_u: x=1$  est une asymptote pour  $\mathcal{C}_{f_1}$  à droite de 1



La précision de  $x_0$  se fait pour la méthode de dichotomie est le T.V.I

$$4) f_4(x) = \begin{cases} x+1+e^2-e^x & \text{si } x < 2 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$D_{f_4} = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$$

sur  $]-\infty; 2[$ ,  $f_4$  est combinaison de fonctions usuelles donc elle est dérivable à l'intérieur c'est à dire sur  $]-\infty; 2[$

sur  $[2; +\infty[$   $f_4$  est combinaison de fonctions usuelles donc elle est dérivable à l'intérieur c'est à dire sur  $]2; +\infty[$

- Il reste le problème de continuité est dérivabilité en 2.

Dérivabilité de  $f_4$  en 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f_4(x) - f_4(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1+e^2-e^x - (2+1+e^2-e^2)}{x-2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1+e^2-e^x - 3}{x-2} \quad \left( = \frac{3+e^2-e^2-3}{0} \text{ f.I.} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}, \text{ avec } g(x) = x+1$$

$$\text{avec } g(x) = x+1+e^2-e^x$$

$$= g'(2) = 1 - e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f_4(x) - f_4(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1 - 3}{x - 2} \quad \left( = \frac{0}{0} \text{ f.I.} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} \text{ avec } h(x) = x^2 - 1 \\ = h'(2) = 4$$

Donc  $f_4$  n'est pas dérivable en 2.

Au point  $(2; f_4(2))$  la courbe  $\mathcal{C}_{f_4}$  n'est pas de tangente.

$f_4$  est dérivable à gauche en 2:  $\mathcal{C}_{f_4}$  admet une demi tangente en  $(2; f_4(2))$  d'équation

$$T_1: \begin{cases} y = (1-e^2)(x-2) + 3 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Exercice 1:

$$3) f_3(x) = x^2 \lfloor x \rfloor$$

$$D_{f_3} = \mathbb{R}$$

La fonction  $x \rightarrow \lfloor x \rfloor$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et

La fonction  $x \rightarrow x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc  $f_3$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Il reste la continuité sur  $\mathbb{Z}$ .

soit  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{On a } f_3(x) = n^2 \lfloor x \rfloor = n^2$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} x^2 \lfloor x \rfloor$$

$$= \lim_{x \rightarrow n^-} x^2 \times (n-1)$$

$$= (n-1) \lim_{x \rightarrow n^-} x^2 = (n-1) \cdot n^2$$

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f_3(x) = \lim_{n^+} x^2 [x] = \lim_{n^+} x^2 x n$$

$$= n \lim_{n^+} x^2 = n \times n^2 = n^3$$

$f_3$  est continue en  $n (=)$

$$\lim_{n^-} f_3(x) = \lim_{n^+} f_3(x) = f_3(x)$$

$$\Leftrightarrow n^2(n-1) = n^3 = n$$

$$\text{Donc } n^3 = n^2(n-1)$$

$$\Leftrightarrow -n^2 = 0 \Rightarrow \boxed{n=0}$$

Conclusion:  $f$  est continue en  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^+$

$f_3$  est continue à droite en tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^+$

• Derivabilité sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^+$

La fonction  $x \rightarrow [x]$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^+$ .

• La fonction  $x \rightarrow x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

Donc  $f_3$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

Il reste la dérivabilité en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x} = 0$$

cela veut

dire que  $f_3$  est dérivable en 0 et  $f'_3(0) = 0$

Pour  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on a

$$\left[ f'_3(x) \right]_{x_0} = \left[ x^2 [x] \right]'_{x_0} = [x_0] (x^2)'_{x_0}, \text{ car } x \rightarrow [x]$$

est constante près de  $x_0$

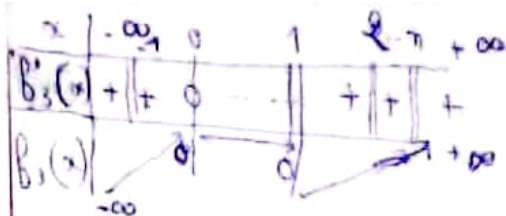
$$= [x_0] 2x_0$$

$$\rightarrow f'_3(x_0) = 0 \Rightarrow [x_0] 2x_0 = 0$$

$$\Rightarrow [x_0] = 0 \Rightarrow x x_0 = 0$$

$$\Rightarrow [x_0] = 0, \text{ car } x_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow x_0 \in [0; 1[$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 [x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 \times 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 [x] = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 \times 1 = 1$$

( $f$  est continue à droite en 1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 [x] = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 [x]}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x [x] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [x] = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 [x]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x [x] = +\infty$$

Donc  $f_3$  admet une branche parabolique près de  $-\infty$

$f_3$  admet une branche parabolique près de  $+\infty$



## Exercice 2:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+1+e^x - e^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\int f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + e^2 \cdot x - e^2 + C_1 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + C_2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

F est continue sur  $] -\infty, 2[$  et  $] 2, +\infty[$   
(combinaison de fonctions continues)

Il reste la continuité en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2}x^2 + x + e^2x - e^2 + C_1 \\ = 2 + 2 + 2e^2 - e^2 + C_1 = 4 + e^2 + C_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{3}x^3 - x + C_2 = \frac{8}{3} - 2 + C_2 \\ = \frac{2}{3} + C_2$$

$$F \text{ est continue en } 2 \Leftrightarrow 4e^2 + C_1 = \frac{2}{3} + C_2$$

$$C_1 = C_2 + \frac{2}{3} - 4e^2$$

$$\text{Donc } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + e^2x - e^2 + \frac{2}{3} - 4e^2 + C_2 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + C_2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

4)

$$= C_2 + \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + (1+e^2)x - e^2 - \frac{10}{3}e^2 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Df

sur  $\mathbb{R}$  car  $f(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors elle possède des primitives sur  $\mathbb{R}$  donc les primitives de  $f$  sont données par (\*)

## Exercice 2.

$$1) f(x) = \begin{cases} x+1+e^x-e^x & \text{si } x < 2 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

soit  $f$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$   
alors

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x + C_1 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + C_2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Continuité de  $F$  en 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x + C_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 + 2 \cdot e^2 - e^2 + C_1 \\ &= 4 + e^2 + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{3}x^3 - x + C_2 \\ &= \frac{8}{3} - 2 + C_2 = \frac{2}{3} + C_2 = f(2) \end{aligned}$$

$$\text{On doit avoir } f(2) = \frac{14}{3} + e^2 + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} + C_2 = \frac{14}{3} + e^2 + C_1$$

$$\Rightarrow C_2 = 4 + e^2 + C_1$$

$$\text{Donc } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x + C_1 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + 4 + e^2 + C_1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Dérivabilité de  $F$  en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x + C_1 - \left(\frac{8}{3} - 2 + C_2\right)}{x - 2}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x - \frac{14}{3} - e^2}{x - 2} \\ &= [x^2 + 1 + e^2 - e^2](2) \\ &= 4 + 1 + e^2 - e^2 = 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{3}x^3 - x + 4 + e^2 + C_1 - \left(\frac{8}{3} - 2 + C_2\right)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}, \text{ avec } g$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 4 + e^2 + C_1$$

$$= g'(2) = [x^2 - 1](2) = 3$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = 3$$

Donc  $F$  est dérivable en 2

Conclusion: Les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont données par

$$F(x) = C_1 + \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + e^x \cdot x - e^x & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + 4 + e^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2a) Les primitives éventuelles de  $f$  sont données par sur  $] -1; 2[$

$$F(x) = ?$$

$$\text{On a } f(x) = x^2[x] \quad x \in ] -1; 2[$$

$$= \begin{cases} -x^2 & -1 < x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Donc } F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + C_1 & -1 < x < 0 \\ C_2 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Continuité de  $F$  en 0 et 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{3}x^3 + C_1 = C_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = C_2 = F(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0) \Rightarrow C_1 = C_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} C_2 = C_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1) = \frac{1}{3} + C_3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3} + C_3$$

Donc  $F$  est continue en 0 et 1 lorsque

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + C_1 & -1 < x < 0 \\ C_1 & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_1 - \frac{1}{3} & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Dérivabilité de  $F$  en 0 et 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{C_1 - C_1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

~~$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{C_1 - C_1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$~~

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \left[ \left( \frac{1}{3}x^3 + C_1 - \frac{1}{3} \right)' \right](1) = [x^2](1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

Donc  $F$  n'est pas dérivable en 1

D'où  $f$  n'admet pas de primitive sur  $]1, 2[$

b) un travail pareil pour répondre par oui ou non

**Exercice 3 :**

1)  $f_1(x) = x e^{-x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$   
donc  $f_1$  admet des primitives  $F$  sur  $\mathbb{R}$   
( $D_f = \mathbb{R}$ )

Calcul de  $F(x)$

$$F(x) = \int^x f_1(t) dt = \int^x t e^{-t^2} dt = \int^x \left[ -\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]' dt = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C_1$$

2)  $f_2(x) = \frac{1}{x \sqrt{\ln(x)}}$

$$x \in D_{f_2} \Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x > 0 \text{ et } \ln(x) > 0$$

$$\Rightarrow x > 0 \text{ et } x > 1 \Rightarrow x > 1$$

$$D_{f_2} = ]1, +\infty[$$

$f_2$  est continue sur  $]1, +\infty[$  donc  $f_2$  admet des primitives  $F_2$  sur  $]1, +\infty[$   
calcul de  $F_2(x)$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int^x f_2(t) dt = \int^x \frac{1}{t \sqrt{\ln t}} dt \\ &= \int^x t^{-1} (\ln(t))^{-\frac{1}{2}} \\ &= \int^x 2 [\ln^{\frac{1}{2}}(t)]' = 2 \ln^{\frac{1}{2}}(x) + C_2 \end{aligned}$$

**Exercice 4 :**

1)  $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$

$$D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$$

$f_1$  est continue sur  $] -\infty, -1[$ , donc

$f_1$  admet des primitives  $F_1$  sur  $] -\infty, -1[$

calcul de  $F_1(x)$

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int^x f_1(t) dt = \int^x \frac{t}{t+1} dt \\ &= \int^x \left( 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = [t - \ln(1+t)]^x \\ &= x - \ln(1+x) = x - \ln(-1-x) \end{aligned}$$

2)  $f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

$$D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, 2[ \cup ]2, +\infty[$$

$f_2$  est continue sur  $] -\infty, -2[$ , donc

$f_2$  admet des primitives  $F_2$  sur  $] -\infty, -2[$

calcul de  $F_2(x)$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int^x f_2(t) dt = \int^x \frac{1}{t^2 - 4} dt \\ &= \int^x \frac{1}{(t-2)(t+2)} dt = \int^x \left( \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t+2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \int^x \left( \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} [\ln|t-2| - \ln|t+2|]^2 \\
 &= \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) = \frac{1}{4} (\ln(-x+2) - \ln(-x-2)) \\
 &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)
 \end{aligned}$$

$f_2$  admet aussi des primitives  $G_2$  sur  $] -2; 2[$  qui sont données par

$$\begin{aligned}
 G_2(x) &= \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + b_2 \\
 &= \frac{1}{4} (\ln(-x+2) - \ln(-x-2)) + c_2 \\
 &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right) + b_2
 \end{aligned}$$

Aussi  $f_2$  admet des primitives  $E_2$  sur  $]2, +\infty[$  qui sont données par

$$\begin{aligned}
 E_2(x) &= \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + a_2 \\
 &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + a_2
 \end{aligned}$$

**Remarque.**

$f_2$  admet des primitives sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  notées  $H_2$ , qui sont données par

$$H_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + c_2 & x < 2 \\ \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right) + b_2 & -2 < x < 2 \\ \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + a_2 & x > 2 \end{cases}$$

**Exercice 5 :**

$$1) f_1(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$D_{f_1} = \mathbb{R}$$

$f_1$  est combinaison de fonction  $f_2$  usuelles, donc  $f_1$  est continue sur  $D_{f_1}$ .  
Donc  $f_1$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .

notées  $F_1$

calcul de  $F_1(x)$

$$F_1(x) = \int^x \frac{1}{e^t + 1} dt$$

Mettre  $e^t = y$  ( $t = \ln(y)$ )

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \int^{e^x} \frac{1}{e^{\ln(y)} + 1} \times \frac{1}{y} dy \\
 &= \int^{e^x} \frac{1}{(y+1)y} dy = \int^{e^x} \left( \frac{-1}{y+1} + \frac{1}{y} \right) dy \\
 &= \left[ -\ln|y+1| + \ln|y| \right]^{e^x} = -\ln|e^x+1| + \ln|e^x| \\
 &= -\ln(e^x+1) + x
 \end{aligned}$$

$$2) f_2(x) = \frac{1}{x+2\sqrt{x}}$$

Prenons  $\sqrt{x} = t$  ( $x = t^2$ )

$$3) f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

Prenons  $t = \sqrt{1+e^x}$  ( $x = \ln(t^2-1)$ )

$$4) f_4(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}$$

Prenons  $\sqrt{x^3+1} = t$  ( $x = (t^2-1)^{\frac{1}{3}}$ )

**Exercice 6 :**

$$4) f_4(x) = \ln(\sqrt[3]{x} - 1)$$

$$\begin{aligned}
 x \in D_{f_4} &\Rightarrow \sqrt[3]{x} - 1 > 0 \\
 &\Rightarrow \sqrt[3]{x} > 1 \Rightarrow x > 1
 \end{aligned}$$

Donc  $D_{f_4} = ]1, +\infty[$ .

$f_4$  est combinaison de fonctions usuelles donc elle est continue sur  $D_{f_4}$ .

Donc  $f_4$  possède une primitive  $F_4$  sur  $]1, +\infty[$  soit  $x \in ]1, +\infty[$ .

$$F_4(x) = \int^x f_4(t) dt = \int^x \ln(3\sqrt{t}-1) dt$$

On pose  $y = 3\sqrt{t} \Rightarrow \boxed{t = y^3}$

$$= 3 \int^{3\sqrt{x}} \ln(y-1) \cdot y^2 dy$$

une intégration par parties

( $u(y) = \ln(y-1)$  et  $v(y) = y^3$ )

donne

$$F_4(x) = 3 \left[ \left( \ln(y-1) \cdot \frac{y^3}{3} \right) - \frac{1}{3} \int \frac{y^3}{y-1} dy \right]_{y=1}^{y=3\sqrt{x}}$$

$$= x \ln(3\sqrt{x}-1) - \int_1^{3\sqrt{x}} \frac{y}{y-1} dy$$

$$= x \ln(3\sqrt{x}-1) - \int_1^{3\sqrt{x}} 1 dy - \int_1^{3\sqrt{x}} \frac{1}{y-1} dy$$

$$= x \ln(3\sqrt{x}-1) - 3\sqrt{x} - [\ln|y-1|]_1^{3\sqrt{x}}$$

$$= x \ln(3\sqrt{x}-1) - 3\sqrt{x} - \ln(3\sqrt{x}-1)$$

1) Intégration par parties ( $u(x) = x$  et  $v(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}}$ )

2) Changement de variable ( $t = \sqrt{2x+1}$  ou  $x = \frac{t^2-1}{2}$ )

3) Changement de variable ( $t = \sqrt{x+1}$  ou  $x = t^2-1$ )

### Exercice 7.

1)  $f_1(x) = \frac{[x]}{x}$

$x \in Df_1 \Rightarrow x \neq 0$

$Df_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

la fonction:  $x \rightarrow [x]$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Donc  $f_1$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

calcul d'une primitive  $F_n$  de  $f_1$  sur

$]n, n+1[$  ( $n \in \mathbb{Z}$  fixé)

soit  $\exists x \in ]n, n+1[$

$$F_n(x) = \int^x f_1(t) dt = \int^x \frac{[t]}{t} dt$$

$$= n \cdot \int^x \frac{1}{t} dt = n \ln|x| + C_n$$

Question:  $f_1$  admet-elle une primitive sur  $]0, 2[$ ?

si  $f_1$  avait une primitive  $F$  sur  $]0, 1[$ , on dirait

$$F(x) = \begin{cases} C_0 & 0 < x < 1 \\ \ln|x| + C_1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Il reste la possibilité la continuité et la dérivabilité de  $F$  en 1.

$F$  est continue en 1  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$

$\Rightarrow \boxed{C_0 = C_1}$

Donc  $F(x) = \begin{cases} C_0 & 0 < x < 1 \\ \ln|x| + C_0 & 1 < x < 2 \\ C_0 & x = 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{C_0 - C_0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x - 1} \left( = \frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = [\ln'(x)](1)$$

$$= \left[ \frac{1}{x} \right](1) = 1$$

$F$  n'est pas dérivable en 1 car

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

Donc  $F$  n'existe pas c'est à dire  $f_1$  n'a pas de primitive sur  $]0, 2[$

qd

$$2) f_2(x) = \frac{|x+1|}{|x|+1}$$

$$Df_2 = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$$

$f_2$  est combinaison de fonctions usuelles, donc elle est continue sur  $Df$

D'où  $f_2$  possède une primitive  $F_2$  sur  $\mathbb{R}$  soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$F_2(x) = \int^x f_2(t) dt = \int^x \frac{|t+1|}{|t|+1} dt$$

On va continuer le calcul pour  $x \neq 0$  et  $x \neq -1$



1<sup>er</sup> cas:  $x \in ]-\infty, -1[$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int^x \frac{-t-1}{-t+1} dt = \int^x 1 dt - \int^x \frac{2}{-t+1} dt \\ &= x - 2 \left[ -\ln|-t+1| \right]^x = x + 2 \ln|-x+1| \\ &= x + 2 \ln(1-x) \end{aligned}$$

2<sup>ème</sup> cas:  $x \in ]-1, 0[$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int^x \frac{t+1}{-t+1} dt = - \int^x \frac{-t-1}{-t+1} dt \\ &= - \int^x 1 dt + 2 \int^x \frac{1}{-t+1} dt \\ &= -x + 2 \left[ -\ln|-t+1| \right]^x \\ &= -x + 2 \ln|-x+1| = -x - 2 \ln(1-x) \end{aligned}$$

3<sup>ème</sup> cas:  $x \in ]0, +\infty[$

$$F_2(x) = \int^x \frac{t+1}{t+1} dt = \int^x 1 dt = x$$

$$\text{Donc } F_2(x) = \begin{cases} x + 2 \ln(1-x) & x < -1 \\ -x - 2 \ln(1-x) & -1 < x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Question: soit  $f(x) = \begin{cases} x \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Vérifier que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  puis calculer une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Exercice 8.

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^t dt$$

une intégration par partie ( $u = e^t$  et  $v' = t^n$ )

$$\begin{aligned} \text{donc } I_n(x) &= \left[ \frac{1}{n+1} t^{n+1} e^t \right]_0^x - \int_0^x t^{n+1} \cdot e^t dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} e^x - \frac{1}{n+1} I_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Pour  $x=1$ , on aura:

$$I_n(1) = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}(1)$$