Polynômes

1 Polynôme à une indeterminée :

Def :

on appelle polynôme à Coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) une suite $(a_n)_n$ d'élements de $\mathbb{K}$ nulle à partit d'un certain rang

Notation : on note $\mathbb{K}[x]$ l'ensemble des polynômes à Coefficients dans $\mathbb{K}$

i operations dans $\mathbb{K}[x]$

on definit les operations suivantes sur les polynômes soient : $P(a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

$Q = (b_0, \dots, b_n) = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$

$X \in \mathbb{K}$

$P + Q = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)X + \dots + (a_n + b_n)X^n$

$\lambda P = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \dots + \lambda a_n X^n$

$P.Q = C_0 + C_1 X + \dots + C_n X^n$

où $C_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_{n-k}$

Degré d'un polynôme :

Def :

soit un polynôme $P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ avec $a_n \neq 0$

. On appelle degre de P et on note $\deg(P)$ l'entier n

Par convention le degre du polynôme nul est $(-\infty)$ $\deg(0) = -\infty$

on appelle terme dominant de P le monôme $a_n X^n$

Exp :

Determiner $\deg(P)$

1) $P = 2 - X + 4X^3$
2) $P = X^4 - X + X^5 - 3$
3) $P = 0$
4) $P = 5$

Rep : 1) $d^\circ P = \deg(P) = 3$

le terme dominant est $4X^3$

2) $d^\circ P = 5$

le terme dominant est X^5

3) $d^\circ P = \deg(P) = -\infty$

4) $d^\circ P = 0$

t.d $= 5$

Polynôme ~~noma~~ normalisé : unitaire

Def :

on appelle polynôme normalisé un polynôme dont le coefficient du terme dominant est 1

Exp : $P = X^4 - 3x^2 + 7$

Degré d'un produit, degré d'une somme

theoreme :

soient $(P, Q) \in \mathbb{K}^2[X]$ on X

i) $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

ii) $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

Exp : soint $P = 3 + x^2 - x^4 + x$

$Q = 1 - x + 5x^3$

Determiner i) $d^\circ(P.Q)$

ii) $d^\circ(P + Q)$

Rep:

i) $d^\circ(P.Q) = d^\circ(P) + d^\circ Q = 4 + 3 = 7$

ii) $d^\circ(P+Q) = P + Q = 4 + x^2 + 5x^3 - x^4$

$\Rightarrow d^\circ(P+Q) = 4 \leqslant \max(4,3)$

~~Exp:~~

~~soient $R = 1 - X + 3X^2$~~

~~$Q = 2 + X$~~

~~$R \circ Q = \sum_{k=0}^{2} a_k Q^k$~~

~~$= 1 - Q + 3Q^2 = 1 - (2+X) + 3(2+X)^2$~~

~~$= 1 - 2 - X + 12 + 12X + 3X^2$~~

~~$= 11 + 11X + 3X^2$~~

- Prop: soient P et Q dans $\mathbb{K}[x]$ alors $P.Q = 0 \Rightarrow P = 0$ ou $Q = 0$

on dit que $\mathbb{K}[x]$ est integre

- Prop (element inversibles dans $\mathbb{K}[x]$)

les elements inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynôme de degre 0

c'est à dire les polynôme constants non nuls.

- si P et $Q \in \mathbb{K}[x]$ et si $P.Q = 1$

alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tq

$P = \alpha$ et $Q = \alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$

Valuation d'un polynome:

Def:

soit un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$

non nul. on appelle valuation de P

le plus petit entier k tq $a_k \neq 0$

on note $val(P)$

Par convention $val(0) = -\infty$

Theoreme:

(valuation d'un produit, d'une somme)

soient $(P, Q) \in \mathbb{K}^2[X]$ alors

i) $val(P+Q) \geqslant \min(val(P), val(Q))$

ii) $val(P.Q) = val(P) + val(Q)$

Exp:

soit $P = 2x - x^3 + x^4$

$Q = x^2 - x^5$

retournet $val(P), val(Q), val(P+Q)$

$val(P.Q)$

$val(P)$

$a_1 = 2 \neq 0 \Rightarrow val(P) = 1$

$val(Q)$

$b_2 = 1 \neq 0 \Rightarrow val(Q) = 2$

$P + Q = 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$

$val(P+Q) = 1$

$val(P.Q) = val(P) + val(Q) = 3$

composé de 2 polynômes

def:

soit $(P, Q) \in \mathbb{K}^2[X]$ tq $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

alors $P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_n Q^k$

Exp: soient $P = 1 - X + 3X^2$

$Q = 2 + X$

$P \circ Q = \sum_{k=0}^{2} a_k Q^k = 1 - Q + 3Q^2$

$= 1 - (2+X) + 3(2+X)^2$

$= 1 - 2 - X + 12 + 12X + 3X^2$

$= 11 + 11X + 3X^2$

Division euclidienne :

Def :

soient A et B $\in \mathbb{K}[x]$

on dit que A divise B ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[x]$ tq $B = QA$

on note $A/_B$

Exp : Mq $A/_B$

i) $A = X - 1$

$B = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 = \underbrace{(X-1)}_{A}\underbrace{(X-1)}_{A}$

$\Rightarrow A/_B$

ii) $A = X - 1$

$B = X^2 - 1 = \underbrace{(X-1)}_{A}\underbrace{(X+1)}_{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow A/_B$

Prop :

soient $A, B, \in \mathbb{K}[X]$ deux polynomes non nuls.

on a aquivalence entre i) et ii)

i) $A/_B$ et $B/_A$

ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$. tq $B = \lambda A$

on dit que A et B sont associes.

Division euclidienne :

Def.

soient deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$. on dit que A divise B ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[x]$ tq $B = QA$ on le note $A/_B$

Exp : 1) $x - 1$ divise $x^2 - 1 \Rightarrow$

$x - 1/_{x^2 - 1}$

en effet $\underbrace{x^2 - 1}_{B} = \underbrace{(x+1)}_{Q}\underbrace{(x-1)}_{A}$

2) $x + 1/_{x^2 + 2x + 1}$

en effet $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = \underbrace{(x+1)}_{Q}\underbrace{(x+1)}_{A}$

3) $1 - x/_{1 - x^{n+1}}$

en effet $\underbrace{1 - x^{n+1}}_{B} = \underbrace{(1 + x + x^2 + \dots x^n)}_{Q}\underbrace{(1 - x)}_{A}$

Prop :

soient $A, B, \in \mathbb{K}[x]$ deux polynomes non nuls.

on a equivalence.

i) $A/_B$ et $B/_A$

ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tq $B = \lambda A$

on dit que A et B sont deux polynômes associes.

theoreme

soient $A, B \in \mathbb{K}[x]$ deux polynomes. on suppose que $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynomes de $\mathbb{K}[x]$ enfant $\begin{cases} A = BQ + R \\ d°(R) < d°R \end{cases}$

i est la diviseur euclidienne de A pour B

Exp : Effectuer la division euclidienne de A par B

1) $A = x^3 + x + 1$

$B = x + 1$

2) $A = 1 + 3x + 2x^2 - 7x^3$

$B = 1 + x - 2x^2$

3) $A = x^4 - 4x^7 - 9x^2 + 27x + 38$

$B = x^2 - x - 7$

Rep:

1)
$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + x + 1 & x+1 \\ \cline{2-2}
-\;\; x^3 + x^2 \quad & x^2 - x + 2 \\ \cline{1-1}
-x^2 + x + 1 & \\
-\;\; -x^2 - x \quad & \\ \cline{1-1}
2x + 1 & \\
-\;\; 2x + 1 & \\ \cline{1-1}
-1 &
\end{array}
$$

Alors: $x^3 + x + 1 = \underbrace{(x^2 - x + 2)}_{\text{quotient}}\underbrace{(x+1)}_{\text{diviseur}} + \underbrace{(-1)}_{\text{reste}}$

2)
$$
\begin{array}{r|l}
-7x^3 + 2x^2 + 3x + 1 & \\ \cline{2-2}
-\;\; -7x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x & \frac{7}{2}x + \frac{3}{4} \\ \cline{1-1}
-\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 & \\
-\;\; -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} & \\ \cline{1-1}
-\frac{5}{4}x + \frac{1}{4} &
\end{array}
$$

Alors. $A = B.(\frac{7}{2}x + \frac{3}{4}) + \underbrace{(-\frac{5}{4}x + \frac{1}{4})}_{\text{reste}}$

3)
$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 27x + 38 & x^2 - x - 7 \\ \cline{2-2}
-\;\; x^4 - x^3 - 7x^2 \qquad\qquad & x^2 - 3x - 5 \\ \cline{1-1}
-3x^3 - 2x^2 + 27x + 38 & \\
-\;\; -3x^3 + 3x^2 + 4x \qquad & \\ \cline{1-1}
-5x^2 + 6x + 38 & \\
-\;\; -5x^2 + 5x + 35 & \\ \cline{1-1}
x + 3 &
\end{array}
$$

$A = B.(x^2 - 3x - 5) + (x + 3)$

Division selon les puissances croissantes

Théorème:

soient A et B deux polynomes à coefficients dans $\mathbb{K}$. on suppose que la terme constant de B n'est pas nul et on note p un entier superieur ou egal au degré de B. Il existe un unique couple de polynomes (Q, R)

tq $\begin{cases} A = BQ + X^{p+1}R \\ d^\circ Q \leq p \end{cases}$

Exp:

Effectuer la division selon la puissances croissantes de A par B avec $p = 3$

où $A = 1 + 3x + 2x^2 - 7x^3$

$B = 1 + x - 2x^2$

$$
\begin{array}{r|l}
1 + 3x + 2x^2 - 7x^3 & 1 + x - 2x^2 \\ \cline{2-2}
-\;\; 1 + x - 2x^2 \qquad & 1 + 2x + 2x^2 - 5x^3 \\ \cline{1-1}
2x + 4x^2 - 7x^3 & \\
-\;\; 2x + 2x^2 - 4x^3 & \\ \cline{1-1}
2x^2 - 3x^3 - 4x^4 & \\
2x^2 + 2x \qquad & \\ \cline{1-1}
-5x^3 + 4x^4 & \\
-\;\; -5x^3 - 5x^4 + 10x^5 & \\ \cline{1-1}
9x^4 - 10x^5 &
\end{array}
$$

$\underbrace{1 + 3x + 2x^2 - 7x^3}_{A} = \underbrace{(1 + x - 2x^2)}_{B}\underbrace{(1 + 2x + 2x^2 - 5x^3)}_{Q} + \underbrace{x^4}_{X^{p+1}}\underbrace{(9 - 10x)}_{R}$

Exp 2 : Effectuer la division selon des puissances ~~ces~~ croissantes avec $p = 2$ dc $A = x^4 + x^3 - 2x + 1$

$B = x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{l|l} 1 - 2x + x^3 + x^4 & 1 + x + x^2 \\ -\ 1 + x + x^2 & 1 - 3x + 2x^2 \\ \hline -3x - x^2 + x^3 + x^4 & \\ -\ -3x - 3x^2 - 2x^3 & \\ \hline 2x^2 + 4x^3 + x^4 & \\ -\ 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 & \\ \hline 2x^3 - x^4 & \end{array}$$

Alors : $1 - 2x + x^3 + x^4 =$
$(1 + x + x^2)(1 - 3x + 2x^2) + x^3(2 - x)$

Racines d'un polynomes :

Def :
soit $P \in \mathbb{K}[x]$ un polynomes et $\alpha \in \mathbb{K}$
on dit que α est une racine de P
ssi $P(\alpha) = 0$

Exp :
$P = -5x^3 + 4x^2 + x^4 + 3x + 9$
Mq : 3 est une racine de P

Rep : $P(3) = -5 \times 3^3 + 4 \times 3^2 + 3^4 + 18$
$= -135 + 36 + 81 + 18 = 0$
$\Rightarrow$ 3 est une racine de P

theo :
soit $P \in \mathbb{K}[x]$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{K}$
on a equivalence entre :
i) α est une racine de P
ii) on peut factorise P pour $x - \alpha$
c'est à dire $x - \alpha / P$

Rep :

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 9 & x - 3 \\ -\ x^4 - 3x^3 & x^3 - 2x^2 - 2x - 3 \\ \hline -2x^3 + 4x^2 + 3x + 9 & \\ -\ -2x^3 + 6x^2 & \\ \hline -2x^2 + 3x + 9 & \\ -\ -2x^2 + 6x & \\ \hline -3x + 9 & \\ -\ -3x + 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow x - 3 / P$ 3 est une racine de P

Corolaire
si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_p$ sont p racines distinctes d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ alors
$(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_p) = \prod_{k=1}^{p}$ divise P

Racines multiples d'un polynôme :

Def :
soient $P \in \mathbb{K}[x]$ et $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$
* on dit que α est une racine d'ordre p (ou de multiplicité p) de P ssi : $(x - \alpha)^p / P$ et $(x - \alpha)^{p+1} \not/ P$
* si α est une racine d'ordre 1 de P on dit que α est une racine simple de P
* si α est une racine d'ordre ≥ 2 on dit que α est une racine multiple de P.

Exp :
soit $P(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$
Mq i est une racine d'ordre 2 de P

Mq :
$P(i) = i^6 + i^5 + 3i^4 + 2i^3 + 3i^2 + i + 1$
$= -1 + i + 3 - 2i - 3 + i + 1 = 0$
$\Rightarrow (x - i) / P$

$$\begin{array}{l|l} x^6+x^5+3x^4+2x^3+3x^2+x+1 & x-i \\ \hline -\ x^6-ix^5 & x^5+(1+i)x^4+ \\ (1+i)x^5+3x^4+2x^3+3x^2+x+1 & (2+i)x^3+(1+2i) \\ -\ (1+i)x^5+(1-i)x^4 & x^2+(1+i)x+i \\ (2+i)x^4+2x^3+3x^2+x+1 & \\ -\ (2+i)x^3+(1+2i)x^3 & \\ (1+2i)x^3+3x^2+x+1 & \\ -\ (1+2i)x^3+(2-1)x^2 & \\ (1+i)x^2+x+1 & \\ -\ (1+i)x^2+(1+i)x & \\ ix+1 & \\ -\ ix+1 & \\ 0 & \end{array}$$

Donc $P=(x-i)\,Q \Rightarrow x-i/P$

$$\begin{array}{l|l} x^5+(1+i)x^4+(2+i)x^3+(1+2i)x^2+(1+i)x+i & x-i \\ \hline -\ x^5-ix^4 & x^4+(1+2i)x^3+2ix^2+(-1+2i)x-1 \\ (1+2i)x^4+(2+i)x^3+(1+2i)x^2+(1+i)x+i & \\ -\ (1+2i)x^4+(2+i)x^3 & \\ 2ix^3+(1+2i)x^2+(1+i)x+i & \\ -\ 2ix^3+2x^2 & \\ (-1+2i)x^2+(1+i)x+i & \\ -\ (-1+2i)x^2+(2+i)x & \\ -x+i & \\ -\ -x+i & \\ 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x-i)^2\left[x^4+(1+2i)x^3+2ix^2+(-1+2i)x-1\right]$

$R(i)=i^4+(1+2i)i^3+2i\,i^2+(-1+2i)i-1$

$=1-i+2-2i-i-2-1-4i\neq 0$

$\Rightarrow$ i est une racine de P d'ordre 2 (racine double de P)

Prop :

soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[x]$ on a equivalence entre i) et ii)

i) α est une racine de P d'ordre $p \in \mathbb{K}$

ii) il existe $Q \in \mathbb{K}[x]$ tq : $P(x) = (x - \alpha)^p Q(x)$ où $Q(x) \neq 0$

Theoreme

(caracterisation des racine multiples)

soient $P \in \mathbb{K}[x]$, $a \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. on a equivalence entre i) et ii)

i) a est une racine d'ordre n de P

ii) $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = 0$ et $P^{(n)}(a) \neq 0$

Exp : soit $P = x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 9x^2 - 54x + 54$

Mq $a = 3$ est une racine multiple de P.

1er Methode :

$P(3) = 3^5 - 9.3^4 + 25.3^3 - 9.3^2 - 54.3 + 54 =$

$= 243 - 729 + 675 - 81 - 162 + 54 = 0$

$P(x) = (x-3)Q(x)$ → D.E / → M. Hornar

	1	-9	25	-9	-54	54
3		+3	-18	21	36	-54
	1	-6	7	12	-18	$\boxed{0}$

$P(x) = (x-3)[x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 12x - 18]$

	1	-6	7	12	-18
3		3	-9	-6	18
	1	-3	-2	6	$\boxed{0}$

$P(x) = (x-3)^2 [x^3 - 3x^2 - 2x + 6]$

	1	-3	-2	6
3		3	0	-6
	1	0	-2	0

$P(x) = (x-3)^3(x^2-2)$

$P(x) = (x-3)^3(x^2-2)$

$3^2 - 2 = 7 \neq 0$

$\Rightarrow$ 3 est une racine d'ordre 3 de P

2ème methode :

$P(3) = 0$

$P'(x) = 5x^4 - 36x^3 + 75x^2 - 18x - 54$

$P'(3) = 5\times 3^4 - 36.3^3 + 75.3^2 - 18.3 - 54 = 0$

$P''(x) = 20x^3 - 108x^2 + 150x - 18$

$= 540 - 972 + 450 - 18 = 0$

$P^{(3)}(x) = 60x^2 - 216x + 150$

$P^{(3)}(3) = 60.9 - 216.3 + 150 = 0$

P $P^{(4)}(x) = 120x - 216$

$P^{(4)}(3) = 144 \neq 0$

Alors 3 est une racine d'ordre 3 de P

Ex :

soit $P(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$

Mq i est une racine d'ordre 2 de P

Rep :

1ère Methode

	1	1	3	2	3	1	1
i		i	$-1+i$	$-1+2i$	$-2+i$	$-1+i$	-1
	1	$1+i$	$2+i$	$1+2i$	$1+i$	i	0

$P(x) = (x-i)\left[x^5 + (1+i)x^4 + (2+i)x^3 + (1+2i)x^2 + (1+i)x + i\right]$

	1	$1+i$	$2+i$	$1+2i$	$1+i$	i
i		i	$-2+i$	-2	$-2-i$	$-i$
	1	$1+2i$	$2i$	$-1+2i$	-1	0

$P(x) = (x-i)^2\left[x^4 + (1+2i)x^3 + (2i)x^2 + (-1+2i)x - 1\right]$

	1	$1+2i$	$2i$	$-1+2i$	-1
i		i	$-3+i$	$-3-3i$	$1-4i$
	1	$1+3i$	$-3+3i$	$-4-i$	$-4i$

alors i est une racine d'ordre 2 de P

2^{eme} methode :

$P(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$

$P(i) = i^6 + i^5 + 3i^4 + 2i^3 + 3i^2 + i + 1$

$= -1 + i + 3 - 2i - 3 + i + 1 = 0$

$P'(x) = 6x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 6x + 1$

$P'(i) = 6i^5 + 5i^4 + 12i^3 + 6i^2 + 6i + 1 = 6i + 5 - 12i - 6 + 6i + 1 = 0$

$P''(x) = 30x^4 + 20x^3 + 36x^2 + 12x + 6$

$P''(i) = 30i^4 + 20i^3 + 36i^2 + 12i + 6 = 30 - 20i - 36 + 12i + 6 = -8i \neq 0$

Alors i est une racine d'ordre 2 de P

Theo : (Formule de Leibniz pour les polynomes) :

soient $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ on a :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^{(n-k)} Q^{(k)}$$

Exp : calculer

$(x^3 e^x)^{(4)}$

Rep :

$$(x^3 e^x)^{4} = \sum_{k=0}^{4} C_4^k (x^3)^{(4-k)} (e^x)^{k} = C_4^0 (x^3)^{(4)} + C_4^1 (x^3)^{(3)} \cdot (e^x)^{(1)} + C_4^2 (x^3)^{(2)} (e^x)^{(2)}$$

$$+ C_4^3 (x^3)^{(1)} (e^x)^{(3)} + C_4^4 (x^3)(e^x)^{(4)}$$

$$= 1 \cdot 0 + 4 \cdot 6 e^x + 6 \cdot 6x e^x + 4 \cdot 3x^2 e^x + e^x = 24 e^x + 36x e^x$$
$$+ 12x^2 e^x + e^x$$

Theoreme :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ on a :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^{(n-k)} Q^{(k)}$$

Exp : calculer $(x e^x)^{(3)}$

$$(x e^x)^{(3)} = \sum_{k=0}^{3} C_3^k (x)^{(3-k)} (e^x)^{(k)} = C_3^0 (x)^{(3)} (e^x)^{(0)} + C_3^1 (x)^{(2)} \underbrace{(e^x)^{1}}_{0} + C_3^2 (x)^{(1)} (e^x)^{(2)}$$
$$+ C_3^3 (x)^{0} (e^x)^{(3)} = 3 \cdot 1 \cdot e^x + 1 \cdot x \cdot e^x$$
$$= (3 + x) e^x$$

Theoreme : (Formule de Tayler pour les polynomes) :

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ tq $d^\circ P \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$

Alors $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

Théorème : (~~correction~~ caractérisation des racines multiples) :

soient $P \in \mathbb{K}[x]$; $a \in \mathbb{K}$ et n un entier strictement positif.

on a équivalence entre i) et ii)

i) a est une racine de P d'ordre n

ii) $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = 0$ et $P^{(n)}(a) \neq 0$

Exp : soit $P = x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 9x^2 - 54x + 54$

Mq 3 est une racine multiple de P.

Rep :

$P(3) = 3^5 - 9.3^4 + 25.3^3 - 9.3^2 - 54.3 + 54$

$= 243 - 729 + 675 - 81 - 162 + 54 = 0$

$P'(x) = 5x^4 - 36x^3 + 75x^2 - 18x - 54$

$P'(3) = 5.81 - 972 + 675 - 54 = 0$

$P''(x) = 20x^3 - 108x^2 + 150x - 18$

$P''(3) = 540 - 972 + 450 - 18 = 0$

$P'''(x) = 60x^2 - 216x + 150$

$P'''(3) = 540 - 648 + 150 = 42 \neq 0$

d 3 est une racine de P d'ordre 3

Exp 2 : soit $P(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$

Mq 2 est une racine double de P

1ère méthode : D.E :

$$\begin{cases} P(x) = (x+2)^2 Q(x) \\ Q(-2) \neq 0 \end{cases}$$

$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 & x^2 + 4x + 4 \\ \hline - \quad x^4 + 4x^3 + 4x^2 \qquad\qquad & x^2 - 6x + 9 \\ 0 - 6x^3 - 15x^2 + 12x + 36 & \\ - \quad -6x^3 - 24x^2 - 24x \qquad & \\ 0 \;\; 9x^2 + 36x + 36 & \\ - \quad 9x^2 + 36x + 36 & \\ 0 & \end{array}$$

alors $P(x) = (x+2)^2(x^2 - 6x + 9)$

or $((-2)^2 - 6\times(-2) + 9)$

P $4 + 12 + 9 \neq 0$

donc -2 est une racine d'ordre 2 de P.

2ème methode : M. d'Hormer :

	1	-2	-11	12	36
(-2)		-2	8	6	-36
	1	-4	-3	18	0
(-2)		-2	12	-18	
	1	-6	9	0	

$P(x) = (x+2)^2(x^2 - 6x + 9)$ et $(-2)^2 - 6(-2) + 9 = 4 + 12 + 9 \neq 0$

alors (-2) est une racine double de P

3ème methode :

$P(-2) = (-2)^4 - 2\times(-2)^3 - 11(-2)^2 + 12\times(-2) + 36$

$= 16 + 16 - 44 - 24 + 36 = 0$

$P'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 22x + 12$

$P'(-2) = 4\times(-2)^3 - 6\times(-2)^2 - 22\times(-2) + 12 = 0$

$P''(x) = 12x^2 - 12x - 22$

$P''(-2) = 12\times(-2)^2 - 12\times 2 - 22 \neq 0$

$\Rightarrow$ alors 2 est une racine double de P

Polynômes scindes :

Def :

soit $P \in \mathbb{K}[x]$ on dit que P est scindé si il s'ecrit

$P = a_n(x - a_1) \cdots (x - \alpha_n) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k)$

où $a_k \in \mathbb{K}$ sont les racines de P complées avec leur multiplicité et a_n le coefficient dominant de P.

Exp : soit $P = x^2 + 1$

Dans $\mathbb{C}$: $P = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$ sciendé dans $\mathbb{C}$

Dans $\mathbb{R}$: P n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ P n'est sciend dans $\mathbb{R}$

Factorisation dans $\mathbb{C}$:

Corollaire :

Tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

i.e s'écrit sous la forme $P = a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$

Exp :

$$P = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 - i^2)$$
$$= (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$$

P est scindé dans $\mathbb{C}$

Théo :

un poly $P \in \mathbb{C}[x]$ de degré p possède p racines dans $\mathbb{C}$

(on dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos)

Ex $P = x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 1$

admet 5 racines de $\mathbb{C}$

Prop : (méthode de la racine entière) :

soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers.

si r est une racine de $P(x)$ alors il est un diviseur du terme constant de $P(x)$ Exp : soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$ Donner les racines de P

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$

Dans $\mathbb{Z}$: r est une racine de P ssi $r \mid -9$

$D_{-9} = \{\pm 1, \pm 3 ; \pm 9\}$

$P(1) = 1 - 2 - 9 \neq 0$

$P(-1) \neq 0$

$P(3) = 27 - 18 - 9 = 0 \Rightarrow 3$ est une racine de P

$\Rightarrow P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 0 & -9 \\ 3 & & 3 & 3 & 9 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x-3)(x^2 + x + 3)$$

$\Delta = 1 - 12 = -11 = (i\sqrt{11})^2$

Dans $\mathbb{R}$ la seule racine de P est 3

Dans $\mathbb{C}$ les racines de P sont

- 3
- $\dfrac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$
- $\dfrac{-1 + i\sqrt{11}}{2}$

Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$

Prop :

soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynome non nul. Alors il existe $\alpha_1, \dots \alpha_r \in \mathbb{R}$ non necessairement deux à deux distincts $(b_1, c_1), \dots (b_p, c_p)$ tq $\Delta i = bi^2 - 4a < 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ /

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (x - \lambda_k) \cdot \prod_{\lambda=1}^{p} (x^2 + bx + c)$$

Exp

soit $P = x^4 + x^2 + 1$

$= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = \underbrace{(x^2 + 1 - x)}_{\Delta = -3 < 0} \underbrace{(x^2 + 1 + x)}_{\Delta = -3 < 0}$

Exp2 $P = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\Delta = -4 < 0}$

Polynômes irreductibles :

Def : soit $P \in \mathbb{K}[x]$ un polynome non constant : on dit que P est irreductibles ssi : $P = QH \Rightarrow Q \in \mathbb{K}$ ou $H \in \mathbb{K}$

Autrement dit P non constant est irreductible ssi ses seuls diviseurs sont les polynôme constants et les polynômes proportionn à P

Prop : les polynômes de degre 1 sont irreductibles.

Exp :

1) $P = x - 1$ est irreductibles

2) $P = -x + 3$ " "

Theoreme : (polynomes irreductibles dans $\mathbb{C}[x]$)

les polynômes irreductibles de $\mathbb{C}[x]$ sont des polynôme de degre 1.

Exp : 1) $P = -4x + 3$ est irreductibles dans $\mathbb{C}[x]$

2) $P = x^2 - 3x + 2$ n'est irreductibles dans $\mathbb{C}[x]$

Theoreme : (Poly . irreductibles dans $\mathbb{R}[x]$

les polynômes irreductibles dans $\mathbb{R}[x]$ sont

i) les polynômes de degré 1

ii) les polynômes de degré 2 dont les discriminant .

Exp : 1) $P = 2x - 5$

2) $P = x^2 + x + 5$

$\Delta = 1 - 20 = -19 < 0 \Rightarrow P$ est irreductible

3) $P = x^2 - 3x + 2$

$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow P$ n'est pas irreductibles.

$1 \quad x^2 + i)$

$+i \quad 1+i)$

$-1 \quad -1-i)$

Relations coefficients des racines :

soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$ et RS sient $a_n \neq 0$

$\alpha_1, \ldots \alpha_n$ ses racines dans

i) $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_1}$

ii) $\sum_{1 \leq i+j \leq n} \alpha_i \alpha_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

iii) $\prod_{k=0}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Decomposition en produit de facteurs irreductibles :

Theoreme :

soit $P \in \mathbb{K}[x]$, non nul.

il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$, il existe ~~...~~ $m \in \mathbb{N}$, m polynomes $P_1, \ldots P_n$ unitaires et irreductibles tq :

$$P = \alpha P_1 . P_2 \ldots P_n$$

Exp : Decomposer en produit de polynôme irreductibles dans $\mathbb{C}[x]$ pour $\mathbb{R}[x]$:

1) $P = x^4 - 9$

2) $P = (x^2 + 1)^2 + (x^2 + x - 1)^2$

Rep :

1) $P = x^4 - 9 = (x^2 - 3)(x^2 + 3) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$

$\Delta = -4 < 0$ irreductible dans $\mathbb{R}[x]$

dans $\mathbb{C}[x]$: $x^2 + 3 = x^2 - (i\sqrt{3})^2 = (x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})$

$\Rightarrow P = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})$

2) $P = (x^2 - x - 1)^2 - [i(x^2 + i)]^2 = (x^2 - x - 1 - ix^2 - i)(x^2 - x - 1 + ix^2 + i)$

$= [(1-i)x^2 - x - 1 - i]\,[\underbrace{(1+i)x^2 - x - 1 + i}]$

$\Delta = 1 - 4(1+i)(-1+i)$
$= 1 - 4(-1 + i - 1 - i)$
$= 9$

$\Delta = 1 + 4(1-i)(1+i) = 1 + 4 \times 2 = 9$

$x_1 = \dfrac{1-3}{2(1-i)} = \dfrac{-1}{1-i} = \dfrac{-1(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\dfrac{1-i}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

$x_2 = \dfrac{1+3}{2(1-i)} = \dfrac{2(1+i)}{2} = 1+i$

$x_3 = \dfrac{1-3}{2(1+i)} = \dfrac{-1(1-i)}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$x_4 = \dfrac{1+3}{2(1+i)} = 1 - i$

$P = (x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)(x - 1 - i)(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)(x - 1 + i)$

<u>Dans $\mathbb{R}[x]$</u> :

$P = (x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$

$= (x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}ix + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}ix + \frac{1}{2}ix + \frac{1}{4}i + \frac{1}{4})$

$= \underbrace{(x^2 - x + \frac{1}{2})}_{\text{irreductible}}\underbrace{(x^2 + 2x + 2)}_{\text{"}}$