Examen Analyse Numérique Master 1 2018 2019 S1

Preprint · January 2019

1 author:

Jean Jules Fifen
The University of Ngaoundere

Année Académique **2018-2019** (Semestre 1, Session 1, 19 janvier 2019), $\Delta t = 2h$
Master 1 EEA Examinateur : **Pr. FIFEN Jean Jules**

EXAMEN DE **CALCUL NUMERIQUE (EEA451)**

14pts 1 Résolution numérique d'une EDO

Soit a résoudre l'EDO du premier ordre

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t \in I \quad y \in C^1(I) \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

f étant une fonction continue de $I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. I etant un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$.

2,5pts 1. Établir l'algorithme de Runge-Kutta 4.

0,5pt 2. Donner la condition d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy (1.1).

3pts 3. Les méthodes Runge-Kutta 4 sont à un pas et par conséquent moins précises que les méthodes à pas multiples.

1pt (a) Donner le principe des méthodes de **prédiction-correction** qui sont des méthodes à pas multiples.

2pts (b) Établir les formules d'Adams-Moulton et d'Adams-Bashforth d'ordre 2.

2pts 4. Soit à résoudre le système d'EDO suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t)) & , y_1(t_0) = y_{1,0} \\ y_2'(t) &= f_1(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t)) & , y_2(t_0) = y_{2,0} \\ \vdots \quad \vdots & \quad \vdots & \quad \vdots \\ y_m'(t) &= f_m(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t)) & , y_m(t_0) = y_{m,0}, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $m \in \mathbb{N}^*$ et les f_i, $i \in [1, m] \cap \mathbb{N}^*$ sont des fonctions continues de $I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Établir un algorithme de résolution par la méthode de Runge-Kutta 4.

6pts 5. On considère l'EDO d'ordre m avec condition initiale :

$$\begin{cases} y^{(m)}(t) &= f(t, y(t), y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \cdots, y^{(m-1)}(t)) \quad , m \in \mathbb{N}^* \\ y^{(k)}(t_0) &= c_{k+1}, \qquad k \in [0, m-1] \cap \mathbb{N}, \quad c_{k+1} \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.3}$$

avec $\forall k \in [0, m-1] \cap \mathbb{N}$, $y^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de la fonction $y \in C^{m-1}(I)$ et f une fonction continue de $I \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$.

1pt (a) Montrer que le système (1.3) est équivalent au système (1.4) défini par

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_2(t) \\ \vdots \quad \vdots & \quad \vdots \\ y_{m-1}'(t) &= y_m(t) \\ y_m'(t) &= f(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t)) \\ y_k(t_0) &= c_k, \quad \forall k \in [1, m-1]. \cap \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.4}$$

5pts (b) **Application**

Résoudre l'EDO d'ordre 4 suivante en utilisant une méthode de **prédiction-correction** d'ordre 2.

$$\begin{cases} y^{(4)}(t) &= y^{(2)}(t)\, e^t + \left(y^{(3)}(t)\right)^3 \\ y(0) &= 2,\ y^{(1)}(0) = 1,\ y^{(2)}(0) = 0 \,\text{et}\, y^{(3)}(0) = 4. \end{cases} \tag{1.5}$$

On présentera toute la théorie possible puis on donnera un programme Fortran prêt à être exécuté.

4pts 2 Résolution des EDP par différences finies.

En utilisant le schéma implicite, résoudre l'équation de la chaleur se propageant sur une surface rectangulaire. On rappelle que le problème à résoudre est donné par le système (2.1).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad \forall (x,y,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(0,x,y) &= u_0(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega = (0,1)\times(0,L), \quad L \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(t,x,y) &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Indications : On montrera qu'il suffira d'inverser la matrice symétrique tridiagonale "par blocs"

$$\begin{pmatrix} D_1 & E_1 & 0 & \cdots & 0 \\ E_1 & D_2 & E_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & E_{Nx-2} & D_{Nx-1} & E_{Nx-1} \\ 0 & \cdots & 0 & E_{Nx-1} & D_{Nx}, \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

où les blocs diagonaux D_j sont des matrices carrées de tailles N_y définies par

$$\begin{pmatrix} 1+(C_x+C_y) & -C_y & 0 & \cdots & 0 \\ -C_y & 1+(C_x+C_y) & -C_y & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -C_y & 1+(C_x+C_y) & -C_y \\ 0 & \cdots & 0 & -C_y & 1+(C_x+C_y), \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

où les C_x, C_y et E_j sont à définir.

2pts 3 Optimisation

Dans tout l'exercice, f est un champ scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

0,5pt 1. Donner les conditions d'optimalité en maximisation.

0,5pt 2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble convexe $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$.
Monter que si f est convexe, alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{E}\times\mathbb{E}, \ {}^t(y-x)\nabla f(x) \leq f(y) - f(x). \tag{3.1}$$

3. En optimisation numérique locale, chaque itération se traduit par l'équation

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

On suppose que f est concave et on se propose de rechercher un maximum.

0,5pt (a) Établir l'expression de α_k si f est une fonction quadratique.

0,5pt (b) Établir l'expression de p_k pour l'algorithme de Newton.