# Linjär Programmering - Produktionsplanering med risk

Alexander Gunillasson (alexander.gunillasson@student.umu.se)
Aladdin Persson (alhi0008@student.umu.se)
Simon Edman (sied0005@student.umu.se)
Joel Eliasson (joel0089@student.umu.se)

Laboration 3
Handledare: Lars-Daniel Öhman

# Contents

# 1 Introduktion

Denna rapport är en sammanställning av en utförd laboration i kursen Llinjärprogrammering. Laborationen fokuserar på produktionsplanering med risk. Följande är en given beskrivning av ett fiktivt företag och dess produktion:

*"Ett viss företag producerar två produkter, A och B, och säljer dem enligt prognos med en vinst på 500 respektive 650 SEK per enhet. Produkterna tillverkas av ett och samma råmaterial, och för varje produktionsperiod finns det 930 enheter av detta råmaterial tillgängligheten. För att producera en enhet av produkt A behövs 2 enheter råmaterial, och för att producera en enhet av produkt B behövs 3 enheter råmaterial. Produktionen av produkt A är mer arbetsintensiv, och kräver 3 arbetstimmar per enhet, medan produkt B endast kräver 1 arbetstimme per enhet. För varje produktionsperiod finns 800 arbetstimmar tillgänglighet. Företaget har ett fixerat kontrakt på att leverera 100 enheter av produkt B till en stamkund varje produktionsperiod."*

## 2 Opponeringen

Gruppen som granskade vår rapport tycker överlag att vår rapport var väldigt genomarbetad, men vi har till följd av deras åsikter valt att göra en del ändringar på rapporten för att göra den ännu bättre, se Appendix (7.6). Opponenterna var nöjda med vår teoridel och huruvida vi sammankopplar den till rapporten. De ansåg att vi skulle förtydliga huruvida vi definierade $x_1$ och $x_2$ i *Primalt och Dualt problem* vilket vi har åtgärdat. Vi hade även en del stavfel som vi har justerat. Opponenterna ville se en tydligare koppling till vårt Appendix där vi har källkoden vilket vi ordnade genom att försöka förtydliga vart källkoden återfinns i den flytande texten. De vill även att vi skulle vara mer konsekventa med våra beteckningar och hänvisningar. Vi har även sett över de punkter vi fick gällande Stabilitets-/Marignalanalys. Tabellerna är nu placerade först under vardera underrubrik och har båda figurtext. Förtydligat att värdena som tabellerna innehåller är från körningen av AMPL.

# 3 Teori

Till varje primalt villkor $i$ hör alltit en dual variabel $v_i$ och till varje primal variabel $x_j$ hör ett dualt villkor j. Generellt gäller följande:

**Primalt Problem**

$$\begin{aligned} \max z = \ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{då} \ & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ & \geq 0 \end{aligned}$$

**Egenskaper**
- n variabler
- m bivillkor
- maxproblem
- bivillkorsmatris **A**
- målfunktionsvektor **c**
- högerledsvektor **b**

**Dualt Problem**

$$\begin{aligned} \min w = \ & \mathbf{b}^T v \\ \text{då,} \ & \boldsymbol{A}^T\mathbf{v} \geq 0 \\ \mathbf{v} \ & \geq 0 \end{aligned}$$

**Egenskaper**
- m variabler
- n bivillkor
- minproblem
- bivillkorsmatris $A^T$
- målfunktionsvektor **b**
- högerledsvektor **c**

Följande gäller för primala och duala problem:

- En variabel på normalform i primalen ger ett bivillkor på normalform i dualen.
- Ett bivillkor på normalform i primalen ger en variabel på normalform i dualen.
- En variabel definierad som $x_j \leq 0$ i primalen ger ett bivillkor i dualen av omvänd typ jämfört med normalformen.
- Ett bivillkor i primalen av omvänd typ jämfört med normalformen ger en variabel definierad som $v_i \leq 0$ i dualen.
- En fri variabel i primalen ger ett likhetvillkor i dualen.
- Ett likhetsvillkor i primalen ger en fri variabel i dualen.

Definitionen för **normalform** ges nedan:

$$\max \left\{ c^T x | Ax \leq b, x \geq 0_n, x \in R^n \right\}$$

- En variabel ansens ha normalform om den är definierad som icke-negativ ($x_j \geq 0$ respektive $v_i \geq 0$ )

- Ett villkor anses ha normalform om det är $\leq$-villkor i ett maxproblem respektive $\geq$-villkor i ett minproblem.

**Skuggpris**
Skuggpriset för ett bivillkor ges av förändringen av det optimala målfunktionsvärdet vid en marginell ökning av högerledet.

**Sats 1** *En förändring av en bivilkorskoefficient (högerled eller vänsterled) som leder till att målfunktionsvärdet förbättras, påverkar allt mindre ju större förändring som görs (förbättrings derivata avtar).*

# 4 Primalt och Dualt problem

Företaget som presenterades i *Introduktionen* vill maximera sin vinst, det vill säga $z$. Vidare står $x_1$ för antalet tillverkade enheter av produkt A, medan $x_2$ står för antalet tillverkade enheter av produkt B. 500 står för vinsten som görs per produkt vid produktion av enhet A, medan 650 står för vinsten som görs per produkt vid produktion av enhet B. Vi har 930 enheter av råmaterial tillgängligt. Till följd av att produkt A kräver 2 enheter råmaterial samt produkt B kräver 3 enheter råmaterial så utgör det här bivillkor (I). Vidare finns det totalt 800 arbetstimmar tillgängligt. Då produktionen av produkt A kräver 3 timmars jobb per enhet medan produktionen av produkt B kräver 1 timmes jobb per enhet så utgör det här bivillkor (II). Slutligen har företaget ett kontrakt på att åtminstone leverera 100 enheter av produkt B vilket utgör bivillkor (III).

Nedan presenteras problemet $(P)$ som ett LP med tillhörande lösning där det klargörs hur många enheter av vardera produkt som skall produceras.

Vi definierar alltså variabler på följande vis:

- Låt $x_1$ vara antal tillverkade enheter av produkt A
- Låt $x_2$ vara antal tillverkade enheter av produkt B

Motsvarande LP $($P) ser ut som följer:

$$\begin{array}{lll} \text{max} & z = 500x_1 + 650x_2 & \\ \text{då} & 2x_1 + 3x_2 & \leq 930 \text{ (I)} \\ & 3x_1 + x_2 & \leq 800 \text{ (II)} \\ & x_2 & \geq 100 \text{ (III)} \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Med hjälp av programspråket *Ampl* löste vi LP-problemet, $(P)$ och erhöll följande lösning och målfunktionsvärde (se källkod i *Appendix Code-labb3main*):

$$x^\star = (210, 170), \;\; z^\star = 215500 \tag{1}$$

Alltså, företaget bör producera 210 stycken enheter av produkt $A$ samt 170 enheter av produkt $B$ för att göra så stor vinst som möjligt.

I *Figure 1* kan vi även illustrera problemet visuellt. Det gråa området i figuren indikerar på det tillåtna området utifrån våra bivillkor. Vidare erhålls 4 stycken hörpunkter (extrempunkter) som således blir kandidater till att utgöra optimallösningen. I figuren syns även fyra nivåkurvor. Till följd av att sista nivåkurvan skär i punkten (210,170) och att vi har ett maxproblem kan vi grafiskt bekräfta att optimallösnigen återfinns i den givna punkten.

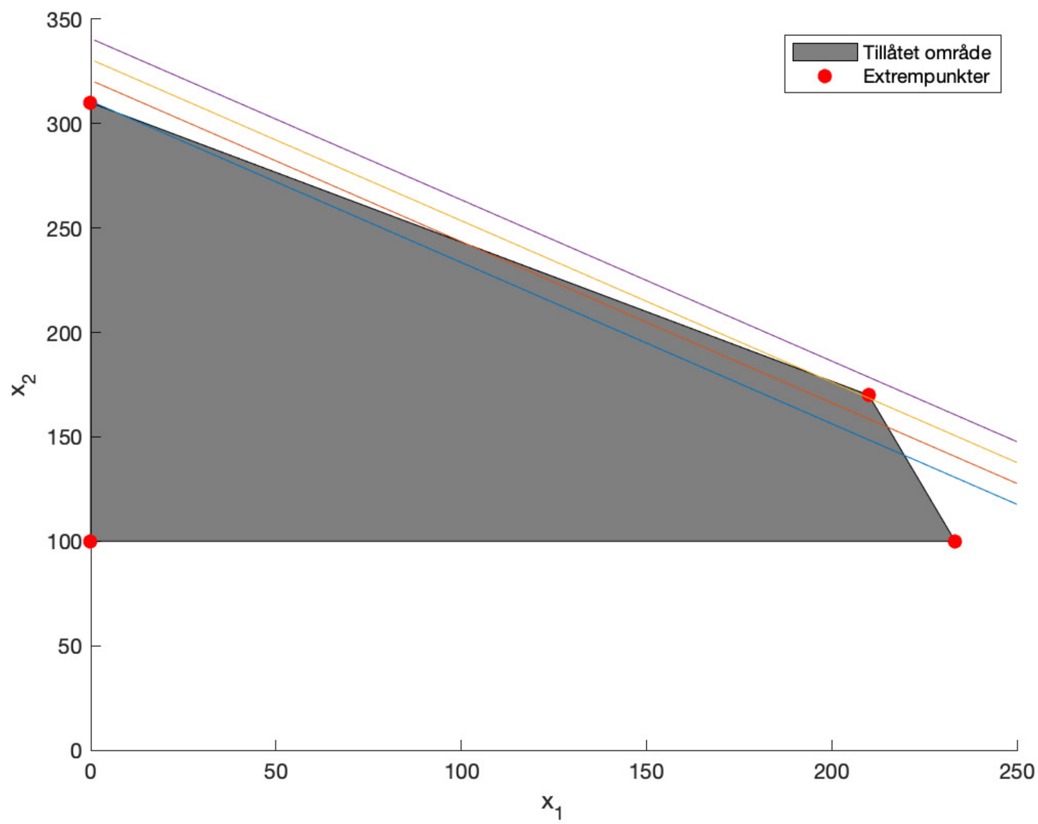


Figure 1: Det tillåtna området för problemet med tillhörande nivåkurvor.

Vidare vill även företaget ha en formulering av och lösningen till det duala problemet utifrån vinstmaximeringsproblemet $P$. Baserat på det primala problemet $P$ kan vi ställa upp det det duala problemet genom omskrivningarna som definieras i *Teori*.

Primla problemet ser ut som följer:

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = 500x_1 + 650x_2 & \\
\text{då} & 2x_1 + 3x_2 & \leq 930 \text{ (I)} \\
& 3x_1 + x_2 & \leq 800 \text{ (II)} \\
& x_2 & \geq 100 \text{ (III)} \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Duala problemet ser ut som följer:

$$
\begin{array}{lll}
\min & w = 930v_1 + 800v_2 + 100v_3 & \\
\text{då} & 2v_1 + 3v_2 & \geq 500 \\
& 3v_1 + v_2 + v_3 & \geq 650 \\
& v_1, v_2 & \geq 0 \\
& v_3 & \leq 0
\end{array}
$$

Med hjälp av programspråket *Ampl* löste vi det duala problemet (se källkod i *Appendix Code-labb3duala*) och erhöll följande lösning samt målfunktionsvärde:

$$v^\star = (207.1429, 28.574, 0),\ w^\star = 215500 \tag{2}$$

# 5 Stabilitets- och Marginalanalys

För att analysera vilka effekter förändrande marknadspriser samt förändringar i antalet arbetstimmar har för företagets produktionsplanering har problemet ställts upp i programmet AMPL. Det LP-problem som hittas, $P$, ställs upp som en modell. Denna modell inkluderas sedan i den körbara filen där själva lösaren finns. Vidare valdes vilka variabler vi ville få sammanställda och utskrivna då programmet körs. Optimallösning till detta $P$ ges av (2). Resultatet från körningarna i AMPL redovisas i tabellform, en tabell med aktuella värden, under vardera analys.

## 5.1 Stabilitetsanalys

| Målfunktionskoeff. | Koefficient | Undre gräns | Övre gräns |
|---|---|---|---|
| $c_1$ | 500 | 433.333 | 1950 |
| $c_2$ | 650 | 166.667 | 750 |

Table 1: Intervall för målfunktionskoefficienter där förändring inom intervallet resulterar i samma baslösning

Vinsten per enhet för produkt A och B bestäms av marknaden, så företaget har anledning att analysera vilka effekter förändrade marknadspriser har för deras produktionsplanering. Som ett led i denna analys vill de undersöka följande:

***Inom vilka gränser kan vinsten per enhet av produkt B ligga utan att produktions-planeringen behöver ändras?***

Vi letar här det intervall inom vilket vinsten per enhet av produkt B måste befinna sig för att fortfarande kunna erhålla samma baslösning. Det vill säga att antalet producerade produkter B kommer inte att påverkas om vinsten per enhet av produkt B förändras så länge vinsten ligger inom intervallet. Gränserna för intervallet gällande vinsten av produkt B är mellan 166,667SEK och 750SEK. Det som förändras som resultat av en förändrad vinst då den ligger inom intervallet är värdet på målfunktionen, ju högre vinsten är på produkt B desto högre blir målfunktionsvärdet och vice versa.

***Vad händer med planeringen och totalvinsten om vinsten per enhet av produkt A ökar med 600 SEK?***

Vi börjar med att öka 600 på produkt A i målfunktionen. Detta ger oss konstantvärdet 1100 nu istället för 500 som tidigare. Det vi kan se är att 1100 ligger inom det tillåtna intervallet för vinst per enhet för produkt A, intervallet avser då vinstvariationer utan att baslösningen ändras. Detta betyder att vi fortfarande kommer att ha samma baslösning, det vill säga antalet producerade produkter kommer inte att ändras av en vinstökning på 600SEK per enhet för produkt A. Det som däremot ändras blir målfunktionsvärdet, en ökning av 600SEK i vinst per enhet av produkt A kommer i sin tur att generera en totalvinst på 341500, vilket är en ökning med 126000 gentemot tidigare.

***Vad händer med planeringen och totalvinsten om vinsten per enhet av produkt A minskar med 400 SEK?***

Om vinsten per enhet för produkt A minskas med 400SEK, vilket resulterar i en vinst per enhet på 100SEK, kan vi se att vi hamnar utanför den undre gränsen för vinstintervallet. Detta betyder att vi skulle kunna få en annan optimallösning än nuvarande, vilket i praktiken skulle innebära att företaget förändrar sin produktionsplanering. Eftersom vi har att undre gränsen för koefficienten $c_1$ är $433.\overline{33}$, vet vi att den minsta förändringen kommer vara differensen mellan nuvarande $c_1$ och till gränsen $433.\overline{33}$, alltså $500 - 433.\overline{33} = 66.\overline{66}$. Därmed får vi att den minsta minskning av målfunktionsvärdet kommer bli $210 \cdot 66.\overline{66} = 14000$. Störst förändring kommer bli om den behåller nuvarande optimallösning men minskar hela vägen till 100. Alltså får vi då att differensen är $500 - 100 = 400$. Största förändringen blir då $400 \cdot 210 = 84000$.

Därmed kan vi skapa ett intervall för det nya målfunktionsvärdet som blir:

$$131500 \leq z^\star \leq 201500$$

Om vi löser det nya LP-problemet där $c_1^\star = 100$ får vi att $z^\star = 201500, x_1 = 0, x_2 = 310$. Då ser vi också att det nya målfunktionsvärdet tillhör intervallet.

***Hur skulle du sammanfatta hur prisvariationer hos produkterna A och B påverkar produktionsplaneringen?***

Det vi kan se är att så länge som vinst per enhet för respektive produkt håller sig inom det tillåtna vinstintervallet så har en prisvariation ingen påverkan på baslösningen. Det finns relativt mycket svängrum för vinst per produkt innan produktionsplaneringen behöver ändras. Om vi utgår från företagets ursprungliga prognos, där produkterna förväntas sälja med 500 respektive 650 SEK i vinst per enhet. Utifrån denna prognos kan vi se att om marknaden skulle tillåta ett högre pris kan företaget sälja framförallt produkt A med mycket högre vinst utan att produktplaneringen behöver ändras, däremot finns det inte så mycket utrymme nedåt ifall vinsten per enhet satts för högt i prognosen. För produkt B ligger prognosen istället mycket närmare taket för vinsten, här kan vinsten ökas till 750 SEK innan det är lönsamt att göra förändringar i planering.

Sammanfattningsvis kan vi säga att prisvariationer har direkt påverkan på produktionsplaneringen om målfunktionskoefficienterna ligger utanför intervallet. Om det visar sig att företagets prognos för de respektive produkterna inte stämmer kan företaget behöva göra om produktionsplaneringen. Exempelvis ligger produkt A utifrån prognosens vinstvärden väldigt nära den undre gränsen, skulle det visa sig här att produkt A endast kan säljas till en vinst av 400 SEK blir det nödvändigt att ändra produktionsplaneringen.

## 5.2 Marginalanalys

| Bivillkor | Skuggpris | Koefficient | Undre gräns | Övre gräns |
|---|---|---|---|---|
| Råmaterial ($b_1$) | 207.143 | 930 | 766.667 | 2400 |
| Arbetstimmar ($b_2$) | 28.5714 | 800 | 310 | 1045 |

Table 2: Intervall för bivillkorskoefficienter där förändring inom intervallet resulterar i samma baslösning

Marknadspriset på produkterna A och B kan inte (på laglig väg) påverkas av företaget, men antalet tillgängliga arbetstimmar skulle kunna ändras. Därför vill företaget ha svar på följande:

***Hur mycket skulle det vara värt att köpa in en extra arbetstimme?***
Att köpa in exakt en extra arbetstimme innebär att bivillkor (II) från det ursprungliga LP *(*P) ändras till följande:

$$3x_1 + x_2 \leq 801$$

Ur tabell ovan ser vi att skuggpriset för arbetstimmar är 28.5714. Genom att öka en arbetstimme kommer värdet på målfunktionen bli 215529 istället för ursprungliga 215500. Det skulle således vara värt 28.5714 kr.

***Hur skulle vinsten påverkas om personalstyrkan utökades så att 1200 arbetstimmar fanns tillgängliga?***
Vi observerar att den övregränsen för intervallet är 1045. Alltså kan vi kolla differensen mellan nuvarande 800 till 1045. Det leder till $1045 - 800 = 245$, och kan användas för att ge oss en undre gräns på vad målfunktionsvärdet kommer bli eftersom vi vet att skuggpriset för en ökning av $b_2$ med värde 1 ger en ökning på 28.5714. Då blir den undregränsen $z^\star \geq 215500 - 245 \cdot 28.5714 = 222500$. Vi kan även använda sats 1 för att skapa en övregräns som ger $z^\star \leq 215500 + 400 \cdot 28.5714 = 226928.56$.

Tillsammans kan vi skapa intervallet

$$222500 \leq z^\star \leq 226928.56.$$

***Hur många extra arbetstimmar skulle du rekommendera företaget att köpa in?***
Rent teoretiskt skulle vi rekommendera företaget att köpa in så många extra arbetstimmar som möjligt eftersom vi har sats 1 som säger att derivatan kommer avta. Detta ger oss att den potentiellt skulle kunna göra en liten förbättring då $b_2 \to \infty$. Vi vet att vi kommer ha en konstant ökning med 28.5714 för varje extra arbetstimme upp till totalt 1045 och vi kan tänka oss att det inte skulle vara realistiskt för företaget att köpa in $\infty$ timmars arbetskraft. Modellen vi har ställt upp säger att det inte är en kostnad att ha mer tillgänglig arbetskraft och därmed är det teoretiska svaret att vi väljer $b_2$ så stort som möjligt. Däremot i praktiken innebär det definitivt en kostnad med mer arbetskraft som inte tydliggörs av modellen, och därför skulle vi rekommendera 1045.

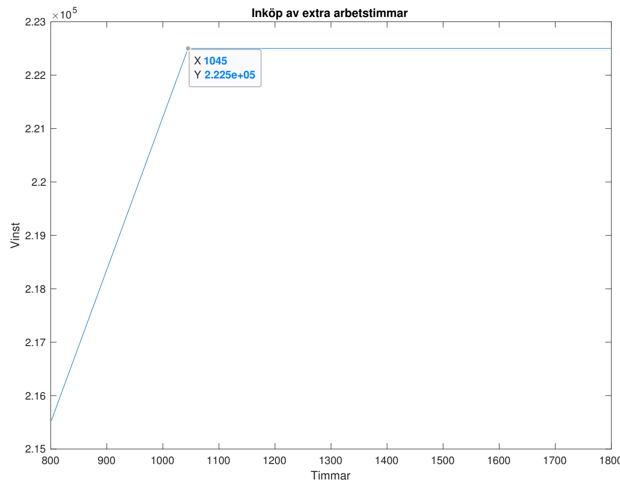


Figure 2: Inköp av extra arbetstimmar.

Om vi optimerar och löser LP-problemet för olika värden på $b_2$ ser vi även att efter $b_2 = 1045$ är förändringen 0 i målfunktionsvärdet vilket illustreras i *Figure 2*. Det vill säga vi får ingen ytterligare vinst av att ha mer än 1045 tillgängliga arbetstimmar. Därav skulle vi rekommendera företaget att som max köpa in 245 extratimmar och således totalt erhålla 1045 arbetstimmar.

# 6 Statistisk modell

I verkligheten kan man föreställa sig scenarion där vinsterna av olika produkter varierar. Eftersom kostnad för produktion samt försäljningspris kan variera på grund av faktorer bortom kontroll för företaget vill man gärna kunna ta hänsyn till detta innan man bestämmer produktionen för ett mer långsiktigt perspektiv. För detta är en idé att man kan simulera olika vinster av produkter med en spridning som är representativ för hur vinsten kommer fluktuera.

Vi väljer att simulera $c_1 =$ "vinst för produkt A" $\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, där vi väljer att $\mu_1 = 500,\ \sigma_1 = 100$. På motsvarande sätt kan vi välja att simulera $c_2 =$ "vinst för produkt B", $\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, där vi väljer att $\mu_2 = 650,\ \sigma_2 = 50$. Tanken är sedan att vi kan genomföra dessa simuleringar och undersöka vilken optimallösning som förekommer med högst frekvens. Detta ger oss insikt till vilken långsiktig produktion vi strävar efter för att uppnå maximal vinst trots att den specifika vinsten kan variera för produkterna vi producerar.

Vi behöver simulera vinsten för respektive produkt och sedan för varje unika par av dessa lösa det motsvarande LP-problem, $P$. För genomföra det här valde vi att använda programvaran MatLab där vi kunde simulera från normalfördelningen med den inbyggda normrnd funktionen. Därefter kallar vi på MatLabs inbyggda funktion linprog för att lösa linjära problem. Motsvarande kod för detta återfinns i Appendix (7.1). Med körning av den här statistiska modellen finner vi att två optimallösningar återkommer. Den ena lösningen ger $x = [210, 170]^T$, d.v.s. att man skall producera 210 enheter av produkt A och 170 av produkt B. Den andra lösningen ger $X = [0, 310]^T$, d.v.s. att man skall producera 0 enheter av produkt A och 310 enheter av produkt B.

Med följande figur blir det tydligare att följa resultatet från vår simulering:

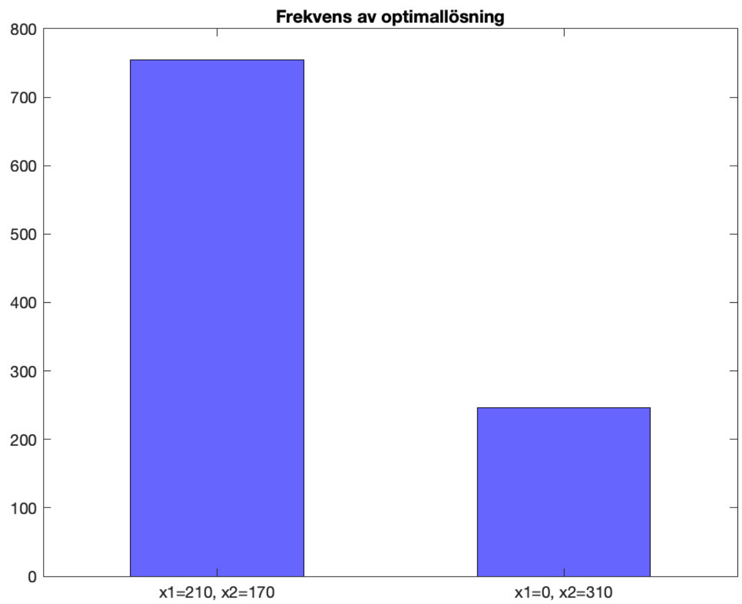


Figure 3: Frekvens av respektive optimallösning.

| Frekvens | Optimallösning |
|---|---|
| 71.30% | (210,170) |
| 28.70% | (0,310) |

Table 3: Resultat från simulering av variation av produktvinster.

Därav blir det tydligt att avgöra en långsiktig produktionsplanering för det givna företaget då vinsten för respektive produkt kommer variera. Vi rekommenderar alltså företagget att ha en produktionsvolym på $x_1 = 210$ och $x_2 = 170$ för att göra så stor vinst som möjligt, baserat på den statistiska modellen.

# 7 Diskussion

I många fall kan det vara en kostsam process att lösa LP-problem och då kan känslighetsanalys vara viktig del för att analysera hur känslig lösningen är till variationer i initialproblemet. Som vi har sett i denna laboration kan vi få ut mycket information om optimallösningen enbart av känslighetsanalys och marginalanalys när initialproblemet utsätts till mindre förändringar. Som vi såg med den statistiska modellen kan vi för mindre kostsamma LP-problem lösa problemet för varje liten förändring och därmed analysera vilka lösningar som är mest frekventa. Därmed kan man analysera hur optimallösningarna varierar med dessa förändringar och se vilken optimallösning som är mest frekvent och därmed veta vilken som är bäst ur ett långsiktigt perspektiv.

# Appendix

## 7.1 Appendix Code - statistik_modell.m

Källkod for `labb3.m`.

```
clear all; close all; clc;
n = 1000;
X = zeros(2,n);
Z = zeros(1,n);

for i = 1:n
    rng(i)
    A = [2,3;3,1;0,-1];
    b = [930,800,-100];

    Aeq = [];
    beq = [];
    lb = [0,0];
    ub = [inf,inf];

    c1 = normrnd(500,100);
    c2 = normrnd(650,50);

    f = -1 .* [c1,c2];
    [x, z] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
    X(:,i)=x;
    Z(1,i)=-z;
end

v1 = round(X) == [210;170];
v2 = round(X) == [0;310];

percentage_210_170 = length(find(all(v1 == 1)))/n
percentage_0_310 = length(find(all(v2 == 1)))/n
```

### 7.2 Appendix Code - labb3duala

Källkod for `labb3duala.mod`

```
# PART 1 - DECISION VARIABLES
var v1 >= 0;
var v2 >= 0;
var v3 <= 0;

# PART 2 OBJECTIVE FUNCTION
minimize w: 930*v1 + 800*v2 + 100*v3;

# PART 3: CONSTRAINTS
s.t. M1: 2*v1 + 3*v2 >= 500;
s.t. M2: 3*v1 + v2 + v3 >= 650;
```

### 7.3 Appendix Code - labb3dualmain

Källkod for `labb3dualmain.run`.

```
reset;

model labb3duala.mod;

# OPTIONAL
option solver 'gurobi';
option gurobi_options 'presolve 0 solnsens 1';

solve;

display v1,v2,v3;

reset;
```

### 7.4 Appendix Code - labb3

Källkod for `labb3.mod`

```
# PART 1 - DECISION VARIABLES
var x1 >= 0;
```

```
var x2 >= 0;

# PART 2 OBJECTIVE FUNCTION
maximize z: 500*x1 + 100*x2;

# PART 3: CONSTRAINTS
s.t. M1: 2*x1 + 3*x2 <= 930;
s.t. M2: 3*x1 + 1*x2 <= 800;
s.t. M3: 1*x2 >= 100;
```

### 7.5 Appendix Code - labb3main

Källkod for `labb3main.run`

```
reset;

model labb3.mod;

# OPTIONAL
option solver 'gurobi';
option gurobi_options 'presolve 0 solnsens 1';

solve;

display x1,x2,z;
display x1.rc, x2.rc;
display M1.slack,M2.slack;
display M1,M2;

display x1.sensobjlo, x1.sensobjhi;
display x2.sensobjlo, x2.sensobjhi;

display M1.sensrhslo, M1.sensrhshi;
display M2.sensrhslo, M2.sensrhshi;
reset;
```

### 7.6 Appendix opponering

**Introduktion:**

- Bra inledning.

**Teori:**

- Relevant information, bra och tydlig struktur.

**Primal- och dualproblem/Primalt och dualt problem**

- Se över stavning i rubriken (särskrivning) och de gulmarkerade felstavningarna.

## 4 Primal och Dual problem

Företaget som presenterades i *Introduktionen* vill maximera sin vinst, det vill säga $z$. Vidare står $x_1$ för antalet tillverkade enheter av produkt A, medan $x_2$ står för antalet tillverkade enheter av produkt B. 500 står för vinsten som görs per produkt vid produktion av enhet A, medan 650 står för vinsten som görs per produkt vid produktion av enhet B. Vi har 930 enheter av av råmaterial tillgängligt. Till följd av att produkt A kräver 2 enheter råmaterial samt produkt B kräver 3 enheter råmaterial så utgör det här bivillkor (1). Vidare finns det totalt 800 arbetstimmar tillgängligt. Då produktionen av produkt A kräver 3 timmars jobb per enhet medan produktionen av produkt B kräver 1 timmas jobb per enhet så utgör det här bivillkor (2). Slutligen har företaget ett kontrakt på att åtminstone leverera 100 enheter av produkt B vilket utgör bivillkor (3).

Nedan presenteras problemet $(P)$ som ett LP med tillhörande lösning där det klargöras hur många enheter av vardera produkt som skall produceras.

I *Figure 1* kan vi även illustrera problemet visuellt. Det gråa området i figuren indikerar på det tillåtana området utifrån våra bivillkor. Vidare erhålls 4 stycken hörpunkter (extrempunkter) som således blir kandidater till att utgöra optimallösningen. I figuren syns även fyra nivåkurvor. Till följd av att sista nivåkurvan skär i punkten (210,170) och att vi har ett maxproblem kan vi grafiskt bekräfta att optimallösnigen återfinns i den givna punkten.

- Skulle vara fördelaktigt att introducera variablerna innan ni börjar använda er av dem i första textstycket. Ni skulle antingen kunna flytta upp ”Vi börjar med att introducera följande variabler: […]” till början av avsnittet eller ta bort det helt eftersom ni redan definierar dem i texten innan.
- Snyggt hur ni förklarar hur bivillkoren ställs upp! Mycket tydligt. Bra med figuren!

- Det rosamarkerade ska ändras till ”B”.

- Låt $x_1$ vara antal tillverkade enheter av produkt A
- Låt $x_2$ vara antal tillverkade enheter av produkt A

- Otydlig referens när ni skriver ”Se källkod i Appendix” på sida 6.

**Stabilitets- och marginalanalys:**

- När ni använder (1) som en referens till optimallösningen i föregående uppgift så kan det misstolkas eftersom ni benämner (1) som ett bivillkor tidigare.
- Ni bör lägga till en figurtext till tabellen.
- Lite otydligt när ni skriver ”Som ett led i denna analys vill de undersöka följande:”. Dels eftersom tabellen kommer direkt efter men också för att de frågor som avses kommer med stora mellanrum. Antar att det syftar till den fetmarkerade texten, men hade kunnat förtydligas!
- Frågan ”Hur skulle du sammanfatta hur prisvariationer hos produkterna A och B påverkar produktionsplaneringen?” skulle man möjligtvis kunnat flytta till diskussionen eftersom den varken presenterar metod eller resultat.
- Hade eventuellt kunnat förtydliga hur ni fått fram värdena i ”Tabell 1”, dvs om ni använt AMPL exempelvis.

**Statistisk modell:**

- Använd $\mu$ för väntevärdet konsekvent! Ni använder först $\mu$ för när ni definierar normalfördelningen och sedan används $u$ för att påvisa ett värde.
- Använd konsekventa x för att beskriva de olika fall ni får. I figur 3 skriver ni x1 och x2 under båda staplarna, vilket skapar förvirring. Annars snyggt med tydlig frekvens för de olika optimallösningarna!
- Ni nämner inte hur många par ni slumpar fram för figur 3, dvs 1000.
- Eventuellt ange länkarna till normrnd och linprog som vanliga referenser istället/också. Inte alltid hyperlänkar fungerar, exempelvis om texten skrivs ut eller publiceras någonstans.

**Diskussion:**

Bra och kortfattad diskussion. Ni återkopplar väldigt bra till problemställningen och knyter ihop säcken.