Correction de la série N : 1

Exercice 1.

Quels sont les langages décrits par les ER suivantes?

(i) $a(a|b)^*b$ (ii) $(aa)^*a$ (iii) $(a^*|b^*)^*$

(iv) $(a|b)^*(c|d)^*$ (v) $((\varepsilon|b)a^+)^*$ (vi) $aab(a|b)^*(bb|aa)^+$

Corrigé :

(i) Les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui commencent par a et se terminent par b.

(ii) Les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ formés par un nombre impair de a.

(iii) Tous les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$.

(iv) Les mots sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ dont chacun est une concaténation d'un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$ et un mot sur l'alphabet $\{c, d\}$.

(v) Les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ dont chaque puissance de a est précédée par, au plus, un b.

(vi) Les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui commencent par aab et se terminent par un nombre n_a pair de a et un nombre n_b pair de b, $n_a + n_b \neq 0$.

Exercice 2.

Donnez une ER décrivant :

(i) Les mots sur $\{a, b, c\}$

(ii) Les mots sur $\{a, b, c\}$ qui commencent par b

(iii) Les mots sur $\{a, b, c\}$ qui contiennent exactement trois a

(iv) Les mots sur $\{a, b, c\}$ qui contiennent au moins trois a

(v) Les mots sur $\{a, b, c\}$ qui contiennent le facteur $babb$ au moins deux fois

(vi) Les mots sur $\{a, b\}$ qui ne contiennent pas le facteur ab

Corrigé :

(i) $(a|b|c)^*$

(ii) $b(a|b|c)^*$

(iii) $(b|c)^*a(b|c)^*a(b|c)^*a(b|c)^*$

(iv) $(a|b|c)^*a^+(a|b|c)^*a^+(a|b|c)^*a^+(a|b|c)^*$ ou $(a|b|c)^*a(a|b|c)^*a(a|b|c)^*a(a|b|c)^*$

(v) $(a|b|c)^*(babb)^+(a|b|c)^*(babb)^+(a|b|c)^*$

(vi) b^*a^*

Exercice 3.

Donnez une ER décrivant :

(i) Les nombres entiers multiples de 5.

(ii) Les nombres binaires.

(iii) Les nombres hexadécimaux.

(iv) Les nombres réels.

Corrigé :

(i) $(0|1|\ldots|9)^*(0|5)$

(ii) $(0|1)^*$

(iii) $(0|1|\ldots|9|A|B|\ldots|F)^*$

(iv) $-^*(0|1|\ldots|9)^*\,\mathbf{.}\,(0|1|\ldots|9)^*$

Exercice 4.

Donnez une ER décrivant :

(i) Les mots sur $\{a,b\}$ de longueur paire

(ii) Les mots sur $\{a,b\}$ ayant un nombre pair de a et un nombre pair de b

Corrigé:

(i) $(aa|ab|ba|bb)^*$

(ii) $(a(bb)^*a \mid b(aa)^*b \mid baba \mid abab)^*$

Exercice 5.

Donnez une expression régulière décrivant :

(i) Les mots sur $\{a,b,c\}$ qui ne possèdent pas le facteur ab **et** possèdent exactement deux c

(ii) Les mots sur $\{a,b,c\}$ qui ne possèdent pas le facteur ab **et** possèdent au moins deux c

Corrigé:

(i) $b^*a^*c\,b^*a^*c\,b^*a^*$

(ii) $(c^*b^*c^*a^*c^*)c^+(c^*b^*c^*a^*c^*)c^+(c^*b^*c^*a^*c^*) \Leftrightarrow (c^*b^*c^*a^*)c^+(b^*c^*a^*)c^+(b^*c^*a^*c^*)$

Exercice 6.

Soit X = {a , b}

On définit récursivement les mots de X^* appelés « SPEC» comme suit :

w est un SPEC si et seulement si **: w = b** ou w = w1 a w2, avec w1 et w2 des SPECS.

On note T le langage de tous les SPECS.

1) Déterminer les SPECS de longueur ≤ 5.
2) Démontrer que tout $w = b\,(ab)^n$ pour $n \geq 0$, est un SPEC.
3) Démontrer que tout SPEC w s'écrit sous la forme : $w = b(ab)^n$ pour $n \geq 0$.

<u>**Corrigé :**</u>

1) SPECS de longueur ≤ 5 : {b,bab,babab}
2) Preuve par induction simple (récurrence):

   Soit la propriété P(n) : Si $w = b\,(ab)^n$; $n \geq 0$, alors w est un SPEC.

   <u>Base d'induction</u> : Vérifions que P(0) est vraie.

   n=0 ; $w = b\,(ab)^0 = b \in$ SPEC

   P(0) vraie

   - <u>Etape d'induction</u> :

     Montrons que $\forall n \in N, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

     Supposons que P(n) est vraie et montrons que P(n+1) est vraie

     $w = b\,(ab)^{n+1} = b\,(ab)^n(ab) = (b\,(ab)^n)a(b)$

     w s'écrit sous la forme w1 a w2, avec w1 et w2 des SPECS. En effet $w1 = b\,(ab)^n$ est un SPEC car P(n) est vraie et w2=b est un SPEC.

     Par conséquent, P(n+1) est vraie

   Conclusion : $\forall n \geq 0$; P(n) vraie

3) Preuve par induction généralisée :

   Soit la propriété P(l) : $\forall l \geq 0$(Si w est un SPEC de longueur l, alors $\exists\, n \geq 0$ tel que $w = b(ab)^n$)

   - Base d'induction généralisée : Vérifions que $P(l_0)$ est vraie. l_0 est la plus petite longueur pour laquelle la propriété est vérifiée.

   Le plus petit SPEC est w =b de longueur $l_0=1$; $w = b\,(ab)^0$ donc $\exists$ n tel que $w = b(ab)^n$

   Donc P(1) vraie.

   - Etape d'induction généralisée:

Montrons que $\forall l\ (\forall l_0 \leq k < l\ ;\ P(k) \Rightarrow P(l))$

(En d'autre termes, supposons que la propriété est vraie pour toutes les longueurs < l et montrons qu'elle est vraie pour l)

Soit w un SPEC de longueur l. w = w1 a w2, avec w1 et w2 des SPECS.

$|w1|<|w|$ donc $\exists\ n_1$ tel que $w1 = b(ab)^{n1}$

$|w2|<|w|$ donc $\exists\ n_2$ tel que $w2 = b(ab)^{n2}$

$w = w1\ a\ w2 = b(ab)^{n1}\ a\ b(ab)^{n2} = b(ab)^{n1+n2+1}$

donc $\exists$ n tel que $w = b(ab)^n$

Conclusion : P(l) vraie.

Exercice 7.

Calculer L^2 puis L^* dans les cas suivants :

1) $L = \{x^p y^p \,/\, p \geq 0\}$
2) $L = \{w \,/\, d(w) = 0\}$
3) $L = (xy)^*$
4) $L = \{w \,/\, |w| = 2k + 1, k \geq 0\}$
5) $L = \{w \,/\, |w| = 2k, k \geq 0\}$

<u>Corrigé :</u>

1) $L^2 = \{x^{p1}y^{p1}\ x^{p2}y^{p2} \,/\, p_1 \geq 0\ ;\ p_2 \geq 0\}$

   $L^i = \{x^{p1}y^{p1}\ x^{p2}y^{p2} \ldots\ x^{pi}y^{pi} \,/\, p_1 \geq 0\ ;\ p_2 \geq 0\ ; \ldots\ ;\ p_i \geq 0\}$

   $L^* = \bigcup_{i=0}^{i=k} L^i$
2) $L^* = L^2 = L$ ($L^2 = \{w=w_1w_2/d(w_1)$ et $d(w_2)=0\}$)
3) $L^2 = \{(xy)^{p1}\ (xy)^{p2} \,/\, p_1 \geq 0\ ;\ p_2 \geq 0\}$

   $L^i = \{(xy)^{p1}\ (xy)^{p2} \ldots\ (xy)^{pi} \,/\, p_1 \geq 0\ ;\ p_2 \geq 0\ ; \ldots\ ;\ p_i \geq 0\}$

   $L^* = \bigcup_{i=0}^{i=k} L^i$
4) $L^2 = \{w \,/\, |w| = 2k\ ,\ k > 0\}$

   $L^* = \{\ \epsilon\ \} \cup L \cup L^2$
5) $L^* = L^2 = L$