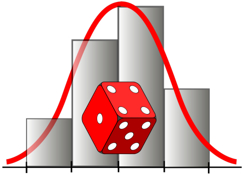
TD2 : Estimation paramétrique ponctuelle & Distribution d'échantillonnage



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Exercice N°5

Énoncé:

Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(m, \theta)$, où θ est un paramètre inconnu à estimer. Si $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum (X_i - m)^2$ est un estimateur de θ. Cet estimateur:

1. Est-il sans biais ?
2. Est-convergent ?

Exercice N°5

Solution:

Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \theta)$, avec θ est un paramètre inconnu à estimer. Pour $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de X on définit l'estimateur $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2 \,,$$

La variable X_i suit la même loi que X, i.e: $X_i \sim \mathcal{N}(m, \theta)$. Alors:

$$Z_i = \frac{X_i - m}{\sqrt{\theta}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

par suite

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - m)^2}{\theta} \sim \chi_n^2 \quad \text{loi Khi-deux à n degrés de liberté}$$

en particulier

$$\mathbb{E}(Z) = n \quad \text{et} \quad , V(Z) = 2n\,.$$

1.

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta\,\frac{(X_i - m)^2}{\theta} \\
&= \frac{\theta}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \\
&= \frac{\theta}{n} Z
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \frac{\theta}{n}\,\mathbb{E}(Z) = \frac{\theta}{n}\,n = \theta$$

Par suite le biais $B_\theta = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta = 0$ et donc $\hat{\theta}$ est sans biais.

1.

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta}) &= V(\frac{\theta}{n} Z) \\ &= \frac{\theta^2}{n^2} V(Z) \\ &= \frac{\theta^2}{n^2} 2n = \frac{2\theta^2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \,, \end{aligned}$$

donc $\hat{\theta}$ est convergent.