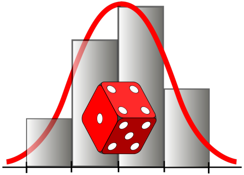
TD2 : Estimation paramétrique ponctuelle & Distribution d'échantillonnage



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Enoncé

Dans une ferme d'agrumes située au Cap bon, des données recueillies auprès du Groupement interprofessionnel des fruits (GIF) ont montré que la teneur en vitamine C (en $mg/100g$), d'une clémentine choisie au hasard peut être considérée comme la réalisation d'une variable aléatoire normale X, de moyenne m et de variance σ^2. On admet que les teneurs en vitamine C des clémentines sont indépendantes les unes des autres et on les note par $X_1, X_2, \ldots, X_n$. On prend un échantillon de 4 clémentines que l'on mesure la teneur. Les mesures ont donné :
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (48, 39, 58, 36)$.

1. 1.1 Donner un estimateur de la moyenne m par la méthode des moments.
   1.2 L'estimateur de la moyenne est-il sans biais ? est-il convergent ?
2. Donner un estimateur sans biais de la variance σ^2, puis vérifier que son estimation vaut $98, 25$.

Exercice N°4

Solution

1.1. L' estimateur de la moyenne m par la méthode des moments est:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

1.2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\overline{X_n}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \\
&= \frac{nm}{n} = m
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\overline{X_n}$ est sans biais de la moyenne m.

Exercice N°4

1.2.

$$V(\overline{X_n}) = V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} V(\overline{X_n}) = 0$$

d'où l'estimateur $\overline{X_n}$ est bien un estimateur convergent de la moyenne m.

2. La moyenne m de X est inconnue, alors l'estimateur sans biais de la variance est la statistique S^2 donnée par:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$$

esprit
Se former autrement

Exercice N°4

Par la suite, l' estimation de la variance est

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Pour les réalisations $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (48, 39, 58, 36)$, on obtient :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{4}(48 + 39 + 58 + 36) = 45.25$$

est l'estimation de la moyenne.Alors:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{4-1}\left[(48-45.25)^2 + (39-45.25)^2 + (58-45.25)^2 + (36-45.25)^2\right] \\ &= 98.25 \end{aligned}$$