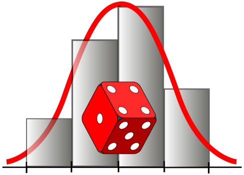
# TD2 : Estimation paramétrique ponctuelle & Distribution d'échantillonnage



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

# Exercice N°3

**Énoncé**:

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta - 1} & si \quad x \in [1, \theta] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

($\theta$ est un paramètre réel $> 0$).

1. Montrer que $f$ est bien une fonction de densité de probabilité d'une v.a. $X$.
2. Calculer l'espérance et la variance de $X$.
3. S'agit-t-il d'une loi usuelle? Si oui, laquelle?
4. On suppose que le paramètre $\theta$ est inconnu. On considère un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$.
   4.1 Trouver, en utilisant la méthode des moments, un estimateur $\hat{\theta}$ de $\theta$.
   4.2 Etudier le biais et la convergence de $\hat{\theta}$.

# Exercice N°3

## Solution

1. - $f(x) \geq 0$ , $\forall x \in \mathbb{R}$.
     En effet:
     $$\theta > 1 \rightarrow \theta - 1 > 0 \rightarrow \frac{1}{\theta - 1} > 0$$
   - f est continue $\forall x \in \mathbb{R}$, alors
     $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{\theta} \frac{1}{\theta - 1} = \frac{1}{\theta - 1}[x]_1^\theta = \frac{1}{\theta - 1}(\theta - 1) = 1$$

Conclusion $f$ est bien une densité de probabilité.

# Exercice N°3

2. • On a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_1^{\theta} \frac{x}{\theta - 1} dx \\ &= \frac{1}{\theta - 1} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^{\theta} \\ &= \frac{1}{2(\theta - 1)} (\theta^2 - 1) = \frac{\theta + 1}{2} \end{aligned}$$

• Et

$$V(x) = E(X^2) - E(X)^2$$

Calculons d'abord $E(X^2)$,

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \int_1^{\theta} \frac{x^2}{\theta-1}dx \\
&= \frac{1}{\theta-1}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{\theta} \\
&= \frac{\theta^3-1}{3(\theta-1)} = \frac{\theta^2+\theta+1}{3}
\end{aligned}$$

Par la suite :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \frac{\theta^2+\theta+1}{3} - \frac{(\theta+1)^2}{4} \\
&= \frac{(\theta-1)^2}{12}
\end{aligned}$$

3. Il s'agit de la loi uniforme sur $[1, \theta]$.

4.1. La méthode des moment permet d'estimer la moyenne $E(X)$ par une moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Autrement dit, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire de la variable $X$ qui suit la loi uniforme sur $[1, \theta]$, l'estimateur $\hat{\theta}$ de $\theta$ par la méthode des moment est :

$$\hat{\theta} = 2\bar{X}_n - 1$$

En effet :

$$E(X) = \frac{\theta + 1}{2} \Rightarrow \theta = 2E(X) - 1 \Rightarrow \hat{\theta} = 2\bar{X}_n - 1$$

4.2

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= E(2\bar{X}_n - 1) \\ &= 2E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] - 1 \\ &= 2.\frac{1}{n}.n.\frac{\theta+1}{2} - 1 \\ &= \theta \end{aligned}$$

D'où l'estimateur $\hat{\theta}$ est bien un estimateur sans biais .

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta}) &= V(2\bar{X}_n - 1) \\ &= 4V(\bar{X}_n) \\ &= 4\frac{nV(X)}{n^2} = \frac{4}{n}\frac{(\theta-1)^2}{12} = \frac{(\theta-1)^2}{3n} \end{aligned}$$

Avec $\lim_{n \to +\infty} V(\hat{\theta}) = 0$, D'où l'estimateur $\hat{\theta}$ est aussi un estimateur convergent.