Thème: **Milieux : interactions, interfaces, homogénéité, ruptures**

Isolation thermique des bâtiments

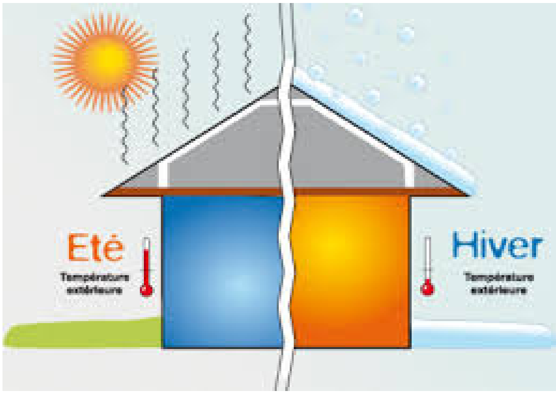
But : une modélisation des transferts thermiques dans un modèle élémentaire

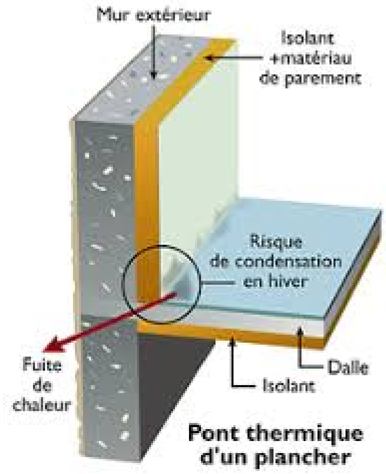
Plan:

- 1°)Positionnement du problème.
- 2°)Modélisation des transferts thermiques par une équation de la chaleur généralisée.
- 3°)Résolution analytique de cette équation.
- 4°)Résolution numérique de cette équation avec la méthode des différences finies.
- 5°)Comparaison des deux solutions.

Positionnement du problème

- L’enjeu énergétique moderne
- Les énergies fossiles sont limitées ce qui rend toute optimisation ,en terme d’économies, très convoitée.
- Le coût très élevée du chauffage résidentiel.





Équation de chaleur généralisée

- En considérant , la conduction solide de chaleur (Loi de Fourrier) ,le transfert conducto-convectif via interface solide-gaz :mur-air (Loi de Newton) et le rayonnement d'ondes lumineuses par le soleil (Loi de Stefan) on obtient l'équation de chaleur suivante :

$$\boxed{\lambda \Delta T + Sh(T - T_{air}) + S\sigma T^4 = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (1)$$

[redacted]

- Un calcul d'ordre de grandeur s'impose : On considère le béton ayant les propriétés physiques suivantes : $h = 2{,}2 W.m^{-2}.K^{-1}$ $\rho = 1800\ kg.m^{-3}$

  $dx = 0{,}4\ m$ $c = 880\, \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$

  $S = 1 m^2$

On obtient l'échelle temporelle :

$$dt = \frac{\rho c}{\frac{\lambda}{dx} + Sh} \approx 48\ heures$$

Résolution analytique de cette équation:

- Par la méthode de séparation de variables :
  Le terme liée au rayonnement dans (1) rend la résolution compliquée ,on résout alors :

$$\lambda \Delta T + Sh\,(T - T_{\text{air}}) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

On obtient alors la solution suivante :

$$T(x,t) = \alpha e^{\frac{K}{\rho c}t}\left(\beta e^{\sqrt{\frac{K-Sh}{\lambda}}x} + \gamma e^{-\sqrt{\frac{K-Sh}{\lambda}}x}\right) - \frac{ShT_{air}}{\rho c}$$

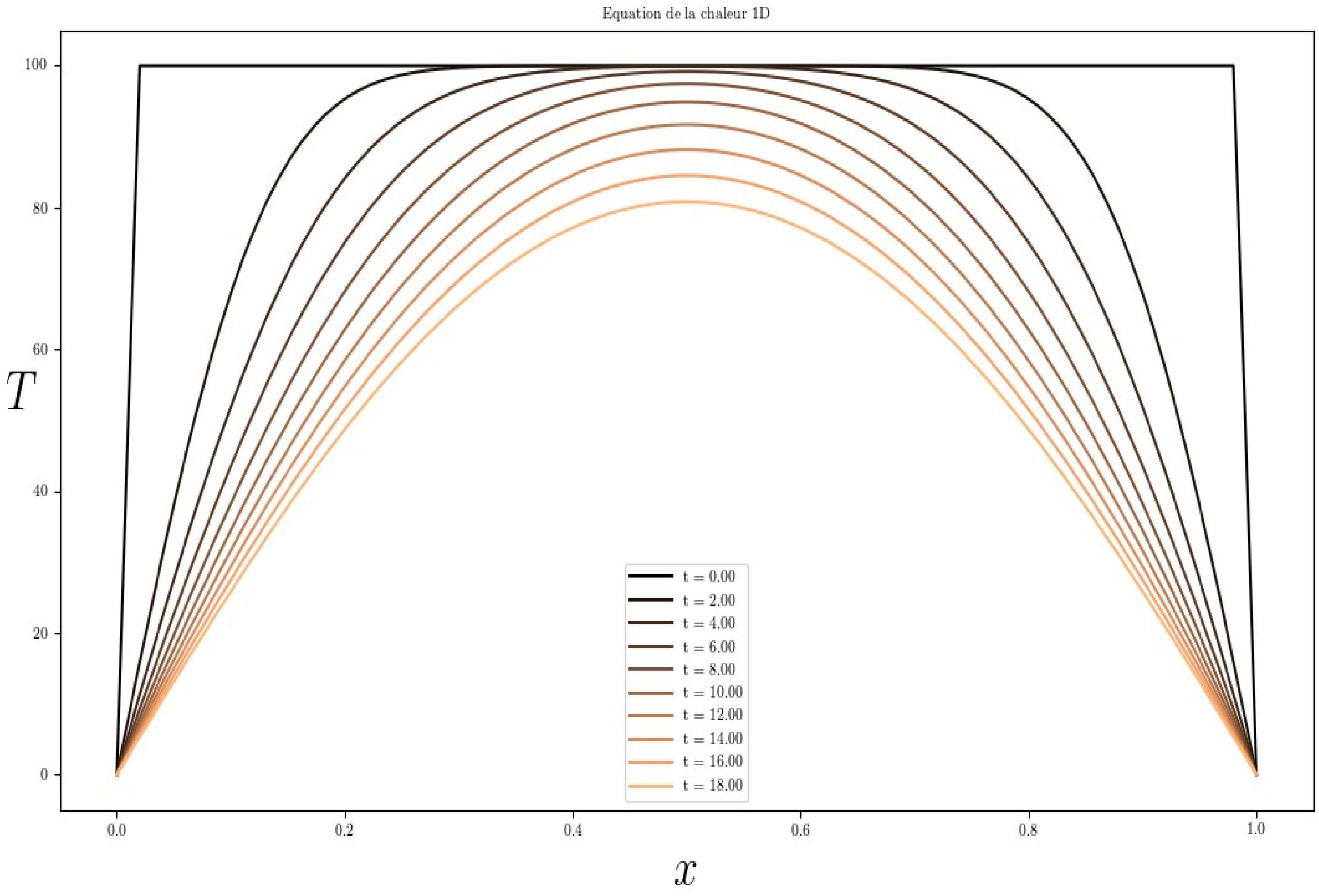
- Par la transformée de Fourrier:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) & = 0 \\ \\ u(x,0) & = h(x) \text{ pour tout } x > 0 \\ u(0,\ t) = u(L,\ t) & = 0 \quad \text{ pour tout } t > 0 \end{cases}$$

Ayant pour solution :

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{-(\frac{k\pi}{L})Dt} \sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

- Pour D=1, la représentation de u(x,t) pour k=7



Résolution numérique de cette équation

- On se propose de résoudre l'équation (1) dans le cas 2D c'est à dire T(x,y,t) , une telle résolution nécessite une discrétisation :

$$\frac{u_{i,j}^{(m+1)} - u_{i,j}^{(m)}}{\Delta t} = a\left(\frac{u_{i+1,j}^{(m)} - 2u_{i,j}^{(m)} + u_{i-1,j}^{(m)}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{(m)} - 2u_{i,j}^{(m)} + u_{i,j-1}^{(m)}}{(\Delta y)^2}\right)$$

[redacted]

- Implémentation de l'équation de chaleur généralisée :

```
    for k in range(pastemp-1):

        for i in range(1,nx-1):
            for j in range(1,ny-1):
                u[i,j,k+1] = u[i,j,k] + dt*a*((u[i+1,j,k] - 2*u[i,j,k] + u[i-1,j,k])/dx2
                 +(u[i,j+1,k] - 2*u[i,j,k] + u[i,j-1,k])/dy2) + h*dt*u[i,j,k]*(1/50.)+
sigma*(1/50.)*dt*u[i,j,k]**4
```

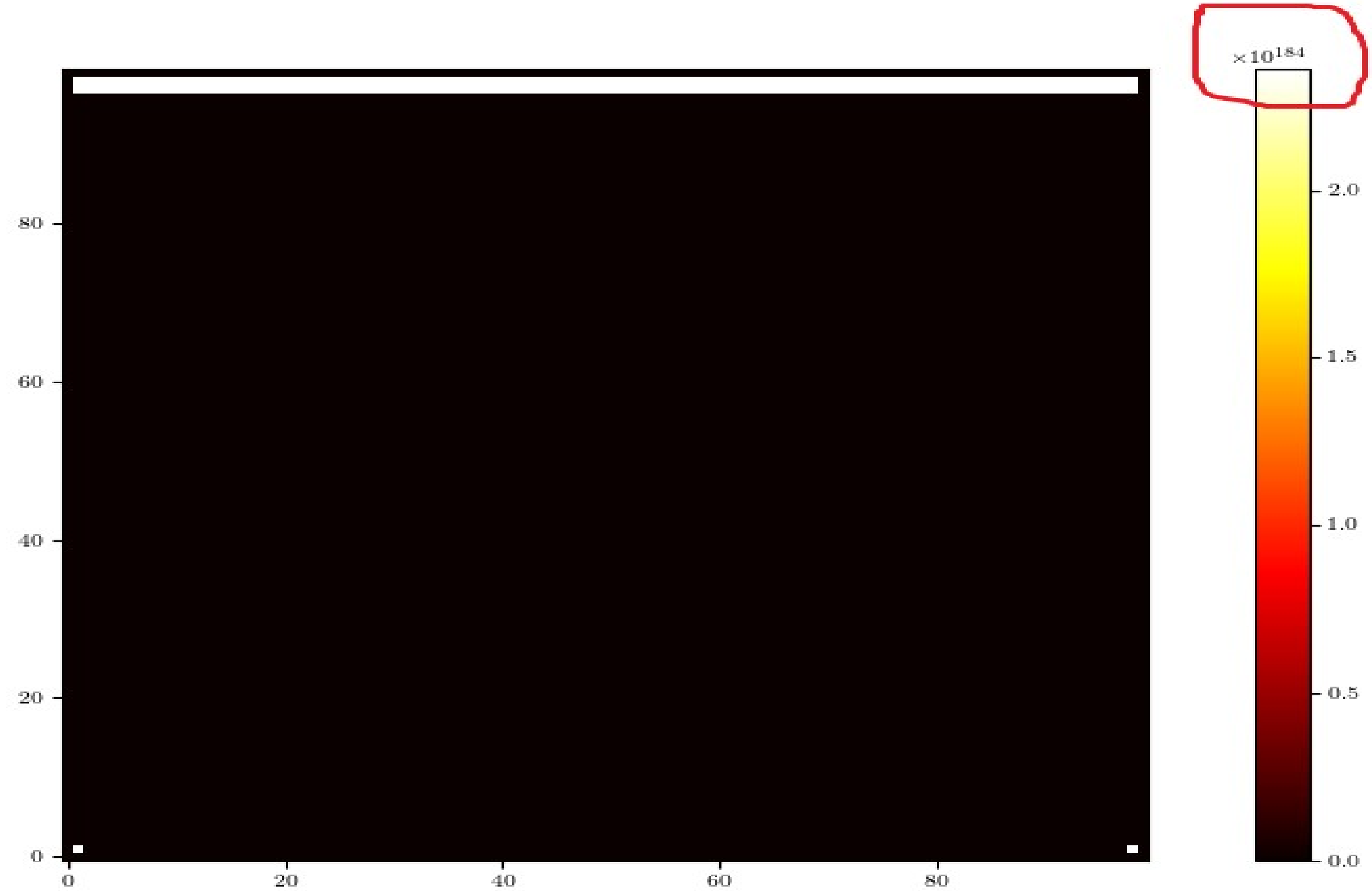
Un mot sur la stabilité

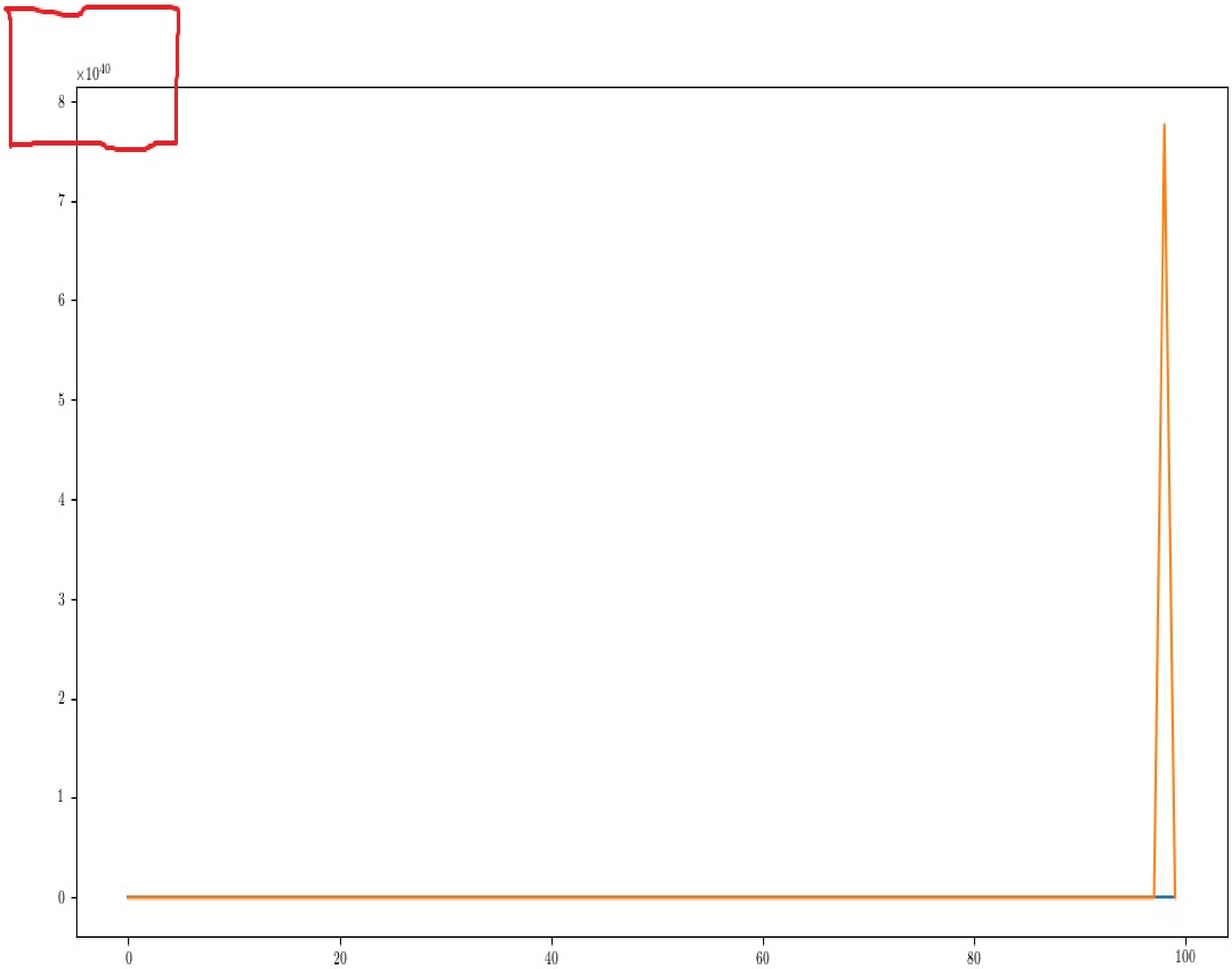
- Pour que le programme ne diverge pas on doit respecter la condition CLF :

$$\eta = \frac{D(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{(\Delta x \Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ C'est la condition de stabilité du programme

Cas d'instabilité du programme

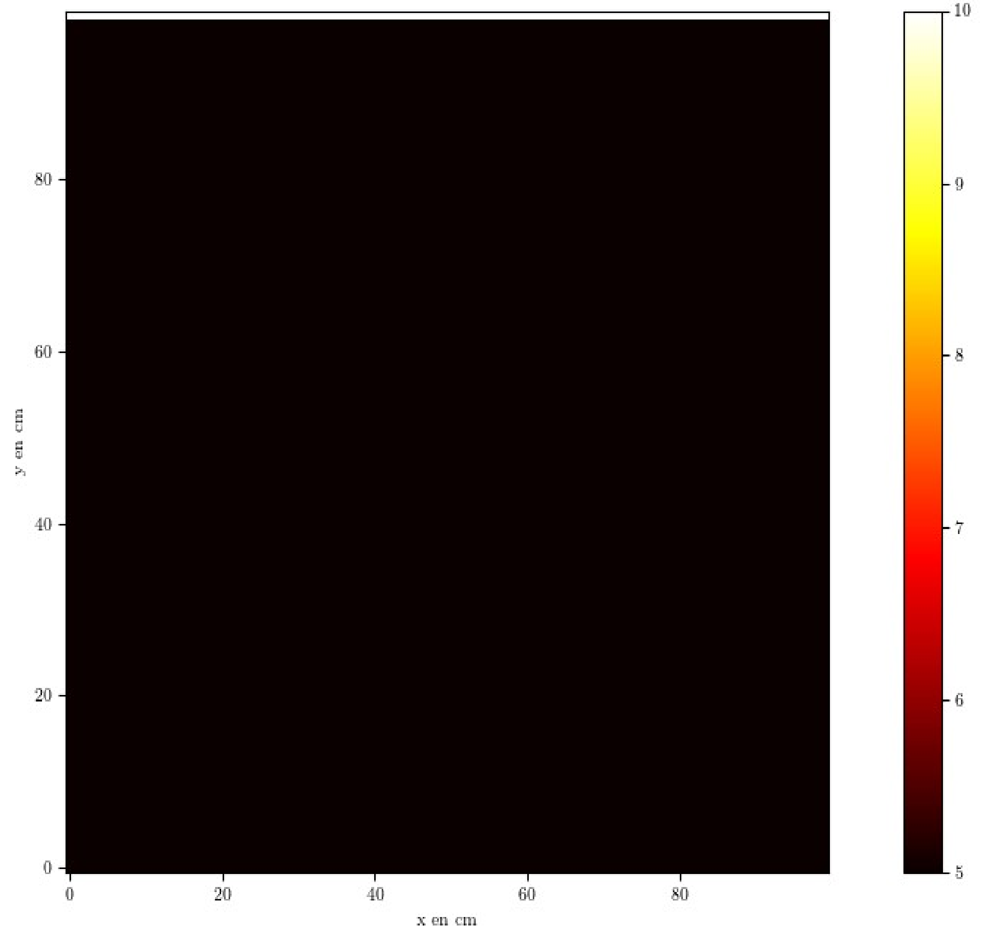




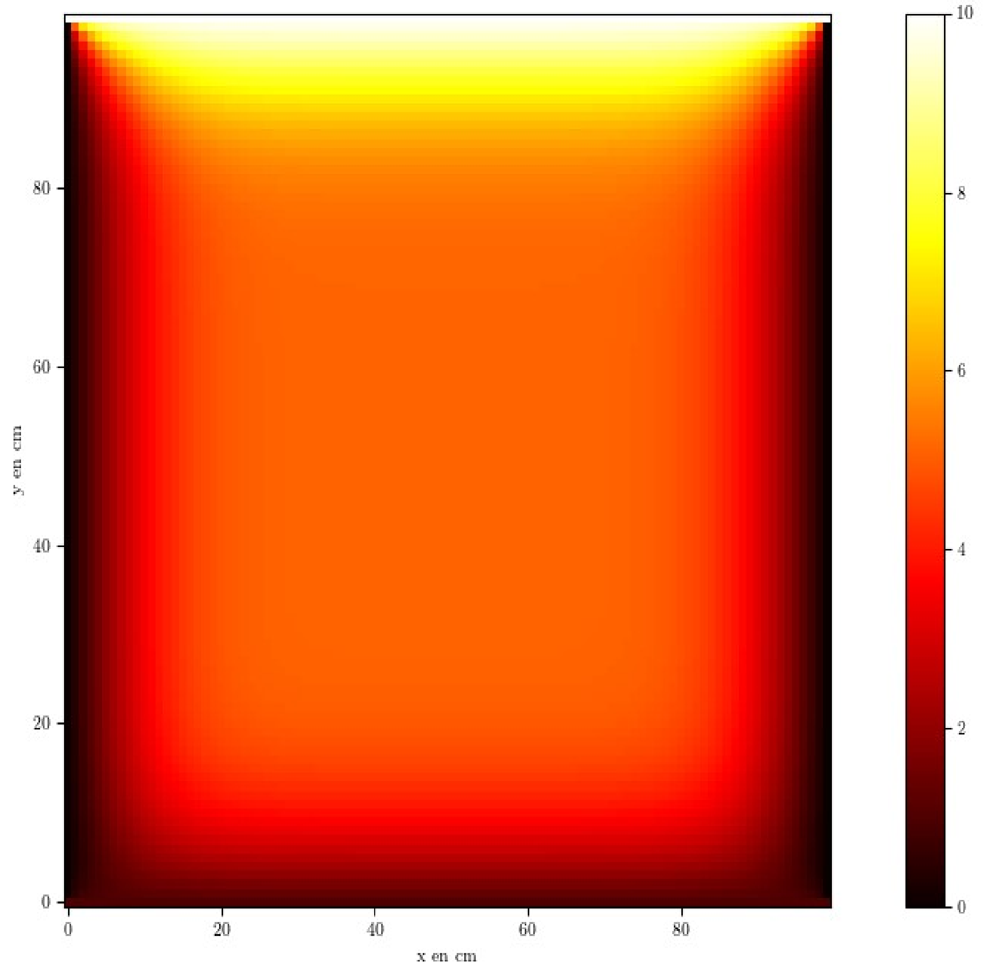
×10^40
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
20
40
60
80
100

La solution numérique

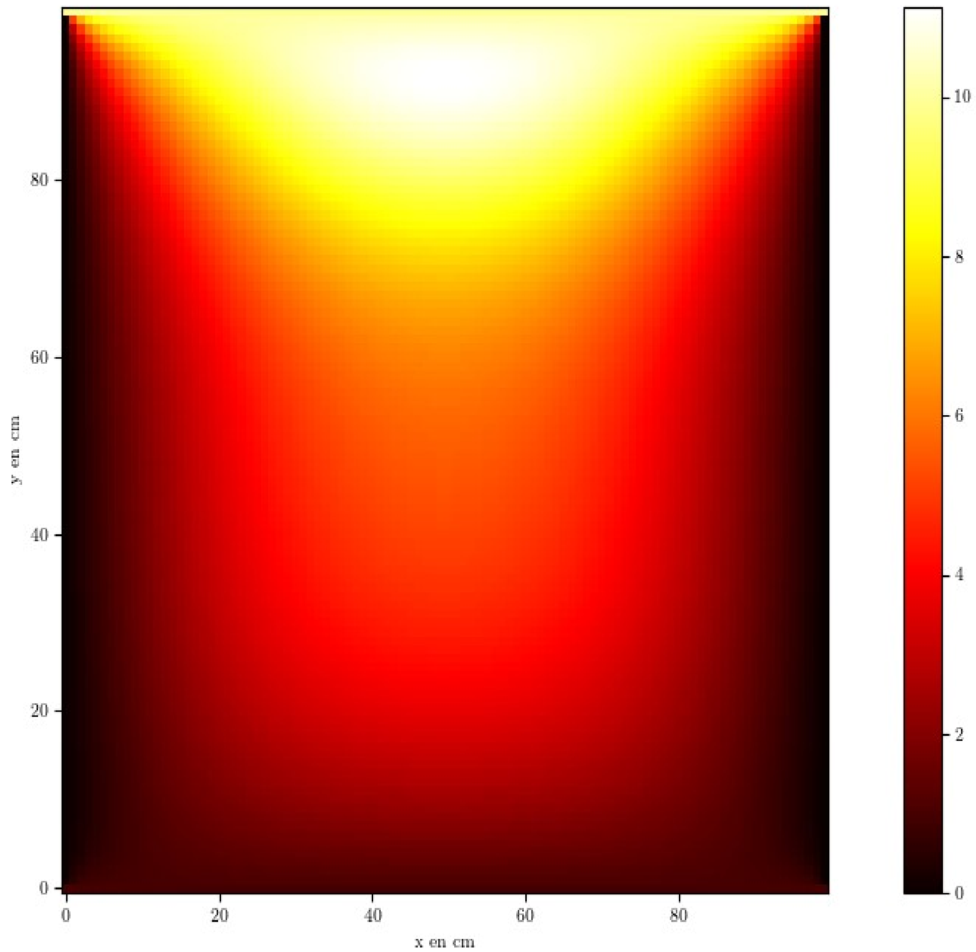
- A l'instant initial :



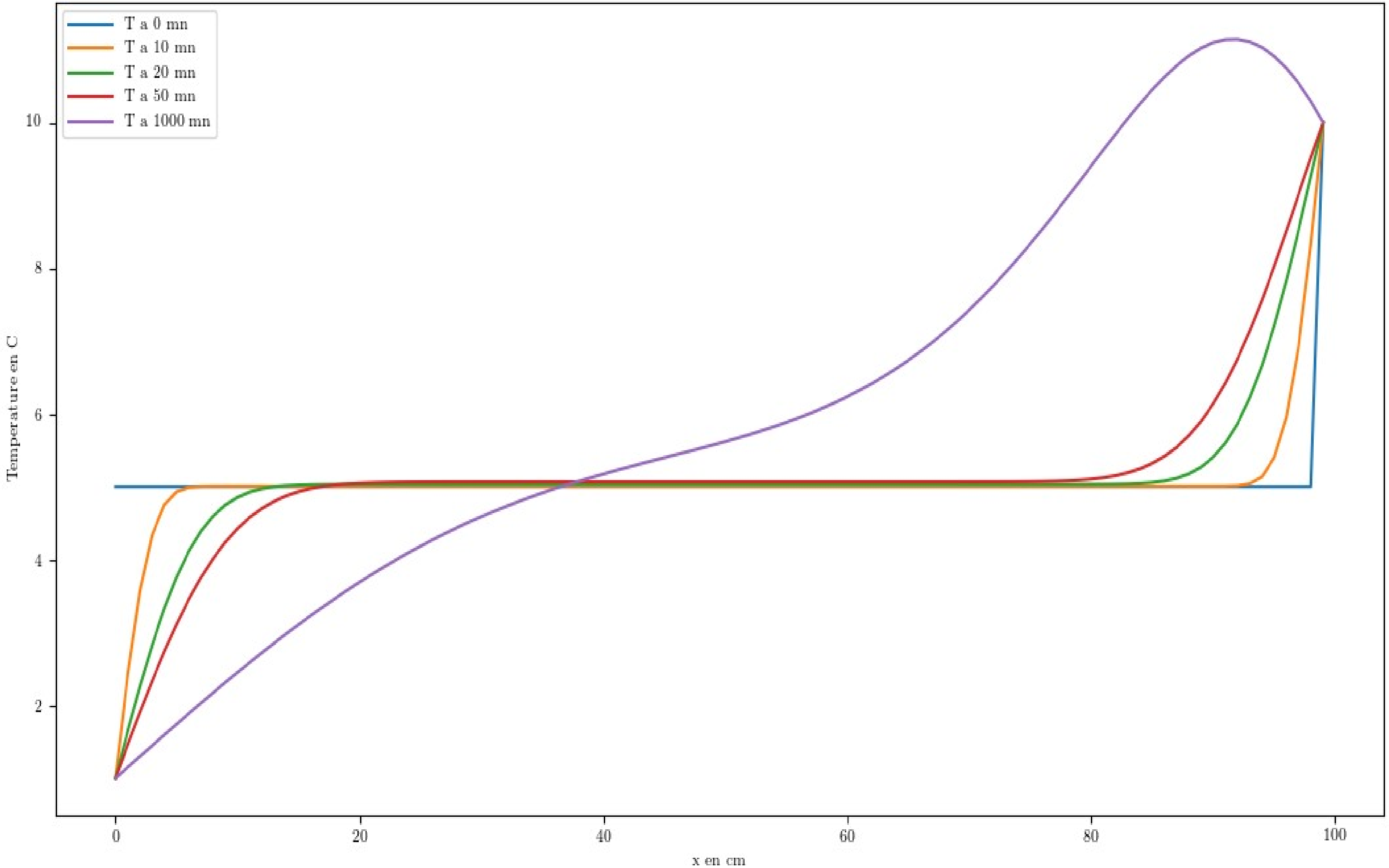
- A un instant intermédiaire:



- A l'instant final :



- Courbe de la température pour y fixée en 50 cm



Merci de votre attention