Etude et Modélisation du trafic routier

EQUATION DE BURGERS

46874

Introduction

- **La problématique de la modélisation du trafic routier suscite un vif intérêt scientifique depuis plus de soixantaine d'années .**
- **Le trafic routier résulte de la somme de comportements individuels intrinsèques des usagers cherchant à rejoindre chacun leur destination .**

Problématique retenue

comment peut-on agir sur le terme de viscosité dans l’équation de BURGERS pour optimiser le transport routier ?

Je me propose de comprendre et d'étudier les phénomènes de la congestion routière qui apparaissent en transport routier.

Plan d'étude et objectifs

Etablir l'équation de Burgers avec et sans terme de viscosité

résoudre analytiquement et implémenter un code python pour les deux équations

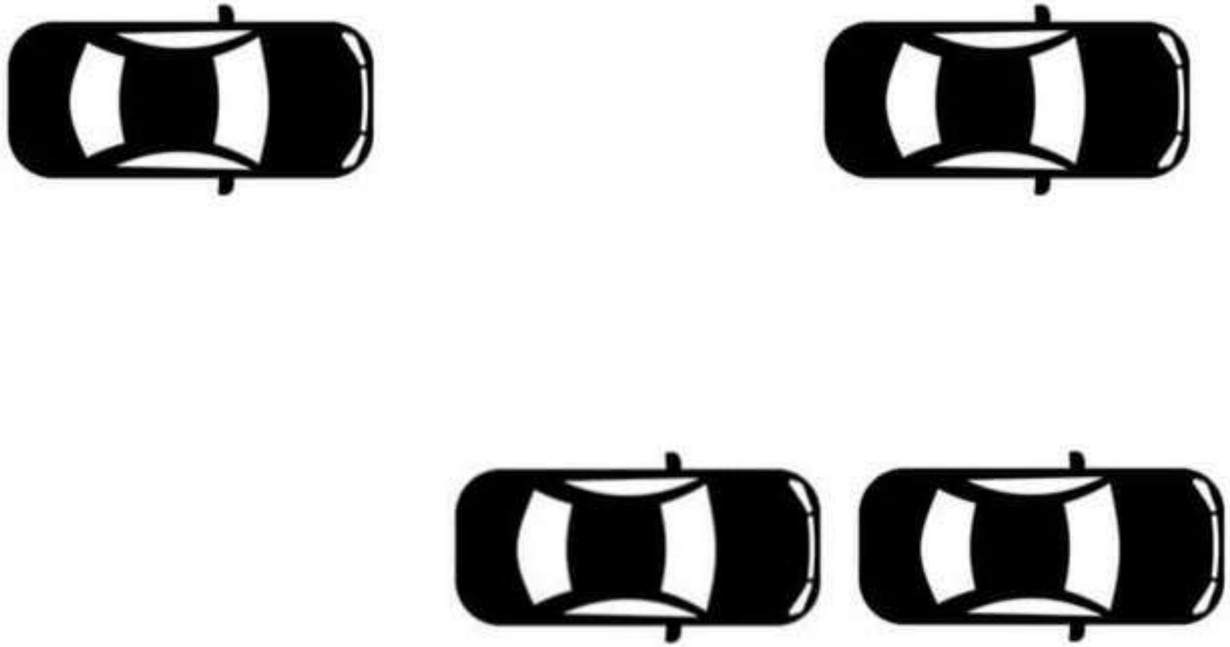
Analyser les courbes

Conclusion

Hypothèses de la modélisation

- **Les véhicules circulent sur un autoroute à voie unique**
- **La taille de chaque véhicule est négligeable**
- **Chaque véhicule a une vitesse inhérente V qui diffère l'un à l'autre**
- **Interdiction de dépasser une véhicule**
- **L'avancement est induit par les différences des vitesses.**
- **Si la voiture i approche la voiture plus lente i+1 devant, la vitesse**

de i devient égale à celle de i+1 comme le montre le schéma suivant



Quand un véhicule plus rapide approche d'un véhicule plus lent,
Le véhicule le plus rapide assume la vitesse de le véhicule le plus lent et deux véhicules se déplacent ensemble avec la même vitesse.

Modélisation des équations de Burgers

- $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ⟶ équation de Burgers sans terme de viscosité

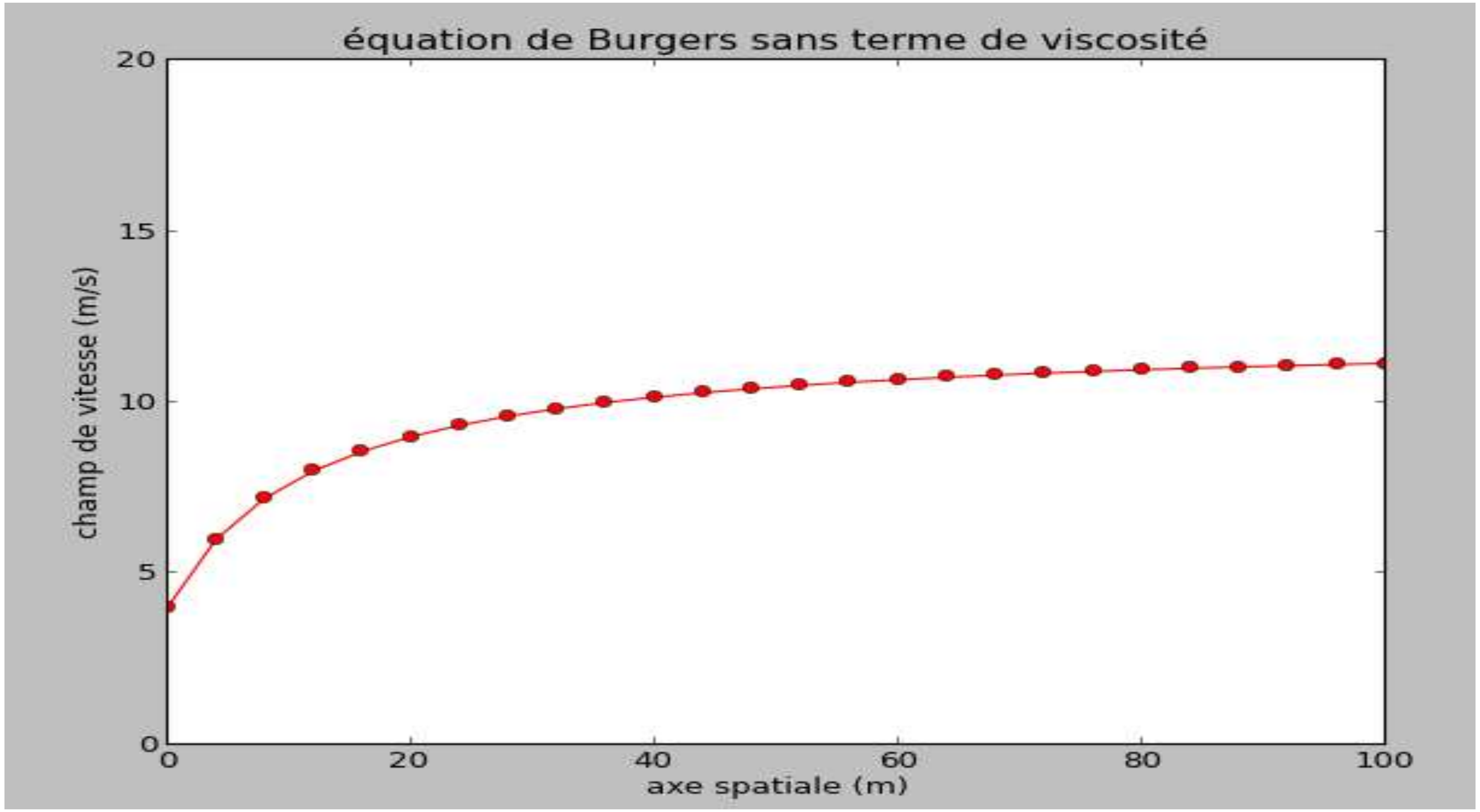
- $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ⟶ équation de Burgers avec terme de viscosité

- Avec :
- u : la vitesse moyenne des véhicules
- d : coefficient de viscosité

Équation de Burgers sans terme de viscosité

- **Subrahmanyan Chandrasekhar** a fourni la solution explicite en 1943 quand la solution initiale est linéaire
- U(x,t)=$\frac{ax+b}{at+1}$
- avec :
- a,b : deux constantes réelles

Courbe de la solution de l’équation de Burgers sans terme de viscosité d’après annexe 1:



Courbe de la solution de l'équation de Burgers d'après annexe 2 :

Analyses des courbes

EQUATION DE BURGERS SANS TERME DE VISCOSITÉ :

Comme on a admis une solution hyperbolique pour cette équation, l'allure est une branche hyperbolique croissante en X.

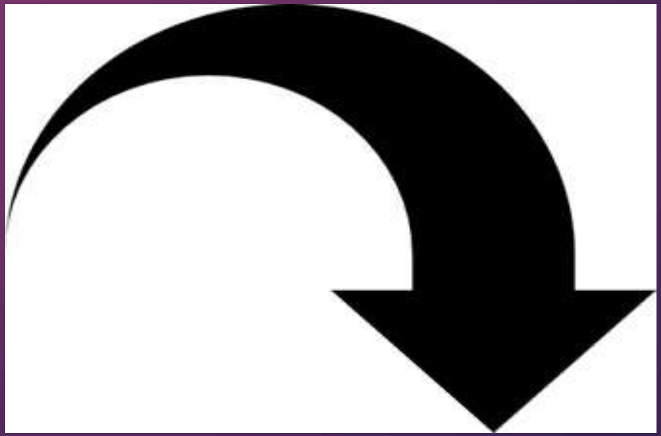
EQUATION DE BURGERS AVEC TERME DE VISCOSITÉ

En analysant cette courbe, on constate l'existence de trois branches principales :

La première branche, assez régulière, le champ de vitesse est strictement croissant et tends vers une valeur de la courbe M1 où le gradient atteint une valeur minimale.

La seconde branche, pour des valeurs bornées de X, montre l'existence d'un point d'inflexion M0.

Le champ de vitesse décroit linéairement dans cette branche et tends vers une valeur M2 où le gradient atteint une valeur maximale.



La troisième branche est similaire à la première, le champ de vitesse est strictement croissant et est aussi assez régulière.

Conclusion

Dans la grande majorité des approches de modélisation, le trafic automobile est assimilé à un fluide où les véhicules sont identifiés à des particules en interaction. Et comme les fluides, les véhicules avec leurs interactions induisent des phénomènes de natures visqueuses qui résistent au mouvement des véhicules.

On peut lier le terme de viscosité à la décroissance (deuxième branche de la courbe1) qui tends à diminuer le champ de vitesse.

Au contraire, pour la courbe2 (celle de l'équation sans terme de viscosité) on observe l'existence d'un régime croissant monotone sans aucune turbulence. Ainsi pour optimiser l'écoulement des véhicules il faut agir sur le terme de viscosité de l'équation de Burgers en diminuant les interactions entre les véhicules (par la création de plus de voies ou par la création de nouvelles routes) .

Fin.

Annexe 1

Code de résolution pour l’équation de Burgers sans terme de viscosité

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#choix des constantes a et b
a,b=1,4
def équation_de_Burgers_sans_terme_de_viscosité(X,T,N):
    U=[0 for i in range(N)]
    for i in range(N):
        U[i]=(a*X[i]+b)/(a*T[i]+1)
    return U
T,X=[i/3 for i in range(90)],[4*i for i in range(90)]
N=90
U=équation_de_Burgers_sans_terme_de_viscosité(X,T,N)
plt.plot(X,U,marker='o',color='red')
plt.xlim([0,100])
plt.ylim([0,20])
plt.ylabel('champ de vitesse (m/s) ')
plt.xlabel('axe spatiale (m)')
plt.title('équation de Burgers sans terme de viscosité ')
plt.show()
```

Annexe 2
Code pour la résolution de l'équation de Burgers avec terme de viscosité

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy
from sympy.utilities.lambdify import lambdify
###déclaration des variables
ufunc = lambdify((t, x, nu), u)
nx = 101
nt = 100
dx = 2 * np.pi / (nx - 1)
nu = .07
dt = dx * nu

x = np.linspace(0, 2 * np.pi, nx)
un = np.empty(nx)
t = 0
u = np.asarray([ufunc(t, x0, nu) for x0 in x])
plt.figure(figsize=(11, 7), dpi=100)
plt.plot(x, u, marker='o', lw=2, color='red')
plt.xlim([0, 2 * np.pi])
plt.ylim([0, 10])
plt.ylabel('champ de vitesse (m/s)')
plt.xlabel('axe spatial (m)')
plt.title('équation de Burgers avec terme de viscosité ')
plt.show()
```