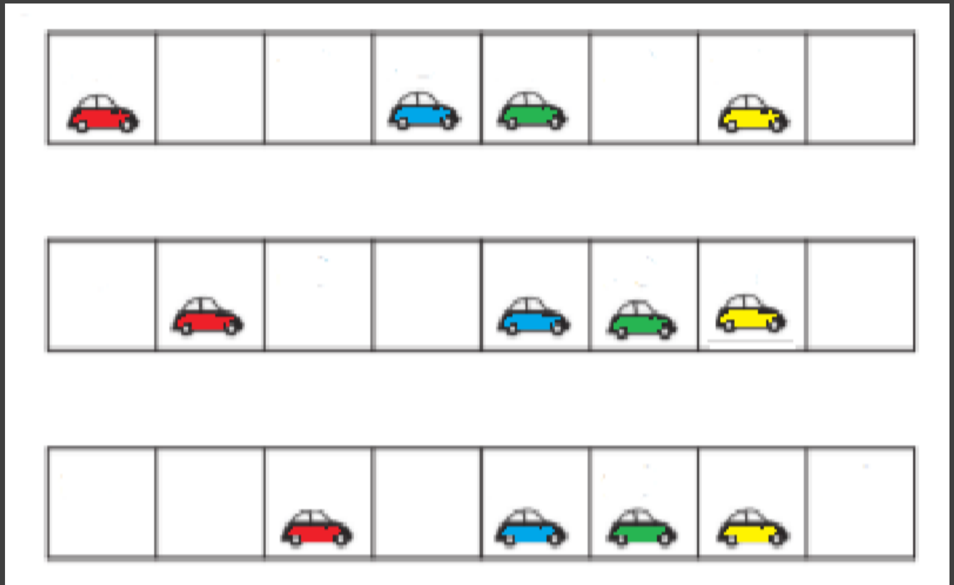
Thème: Transport

<u>Modélisation du trafic routier par les équations de Burgers</u>

ASMI GHADA

Plan:

- Présentation du modèle
- Équation de Burgers sans viscosité
- Équation de Burgers avec vicosité
- Réalisation de quelques simulations numériques



I- *Présentation du modèle:*

Hypothèses:

- Espace unidimentionnel
- Pas de dépassements
- Pas de contact entre les voitures
- Lorsqu’une voiture avance, celle qui est derrière prend sa place
- Concept de trous d'électrons

Analogies

Loi de Fourier
$\vec{j}_{Th}$ vecteur densité de flux thermique
hétérogénéité de température T
conductivité thermique λ
$\mathbf{j}_{Th} = -\lambda.\mathbf{grad}T$

Loi d'Ohm
$\mathbf{j}$ vecteur densité de courants électriques
hétérogénéité de potentiel V
conductivité électrique γ
$\mathbf{j} = -\gamma.\mathbf{grad}V$

⇨ On choisit de modéliser le trafic routier par le phénomène de transfert thermique régi par l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec $K = \lambda / \rho c$: Diffusivité thermique

Voitures	Électrons
Vitesse maximale permise sur l'autoroute	Conductivité du matériau
Densité de voitures	Température

Soit l'équation de burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

u : la vitesse

ν : le coefficient de viscosité cinématique

On utilise la transformation de Hopf-Cole:

$$u = -\frac{2\nu}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

On obtient:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu}{\phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)$$

On intègre par rapport à x et on introduit une "constante" d'intégration en fonction du temps que l'on note g (t), déterminée par les conditions aux limites :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g(t)\phi$$

On effectue le changement de variable: $\psi = \phi e^{\int g dt}$

On retrouve l'équation de chaleur qui admet des solutions analytiques:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

II- Équation de Burgers sans viscosité:

Soit l'équation: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,$

>> On donne une solution générale sous la forme $u(x,t) = f(w)$

avec f une fonction quelconque et $w = x - ut$

Soit $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w}$

>> On l'injecte dans l'équation :

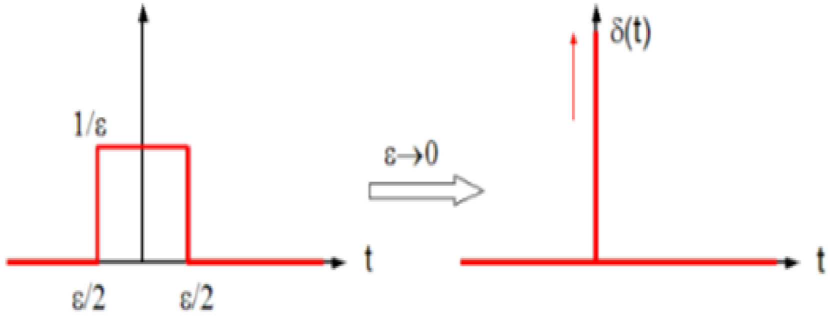
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right)(1 + tf') = 0$$

$\Longrightarrow$ Donc f est solution de l'équation de Burgers si son second terme est nul

III- Équation de Burgers avec viscosité:

* Soit l'impulsion de Dirac comme conditon à l'origine:

Soit l'équation: $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$



>> On applique la transformée de Fourier suivante:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-ikx)dx$$

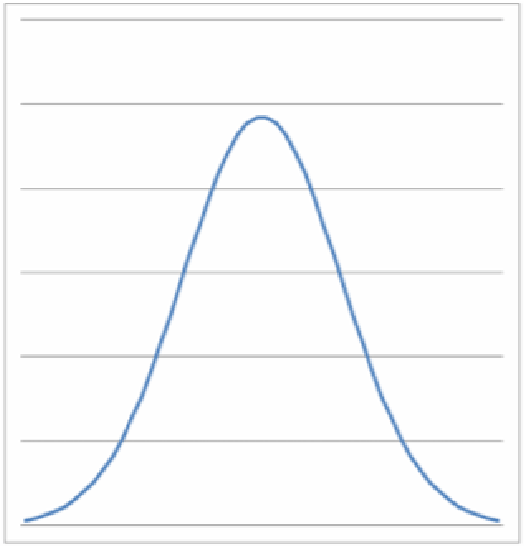
>> On calcule la transformée de Fourier inverse en tenant compte de la condition à l'origine et tel que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

⇨ On trouve: $$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{Dt\pi}}\exp(-\frac{x^2}{4Dt})$$

<u>* Soit une Gaussienne comme condition à l'origine:</u>

>> On prend $$u(x,0) = \exp(-\frac{x^2}{2})$$



⇨ On trouve:

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4Dt+2}}exp(-\frac{x^2}{4Dt+2})$$

Condition initiale quelconque:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0$$

Avec la condition initiale: $u(x,0) = \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est la température à t=0

Pour résoudre cette équation on recourt à la transformée de Fourier:

⇒ On trouve:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{16a\pi^2 t}}dy.$$

IV- Réalisation de quelques simulations numériques:

Soit l'équaion de Burgers avec viscosité:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

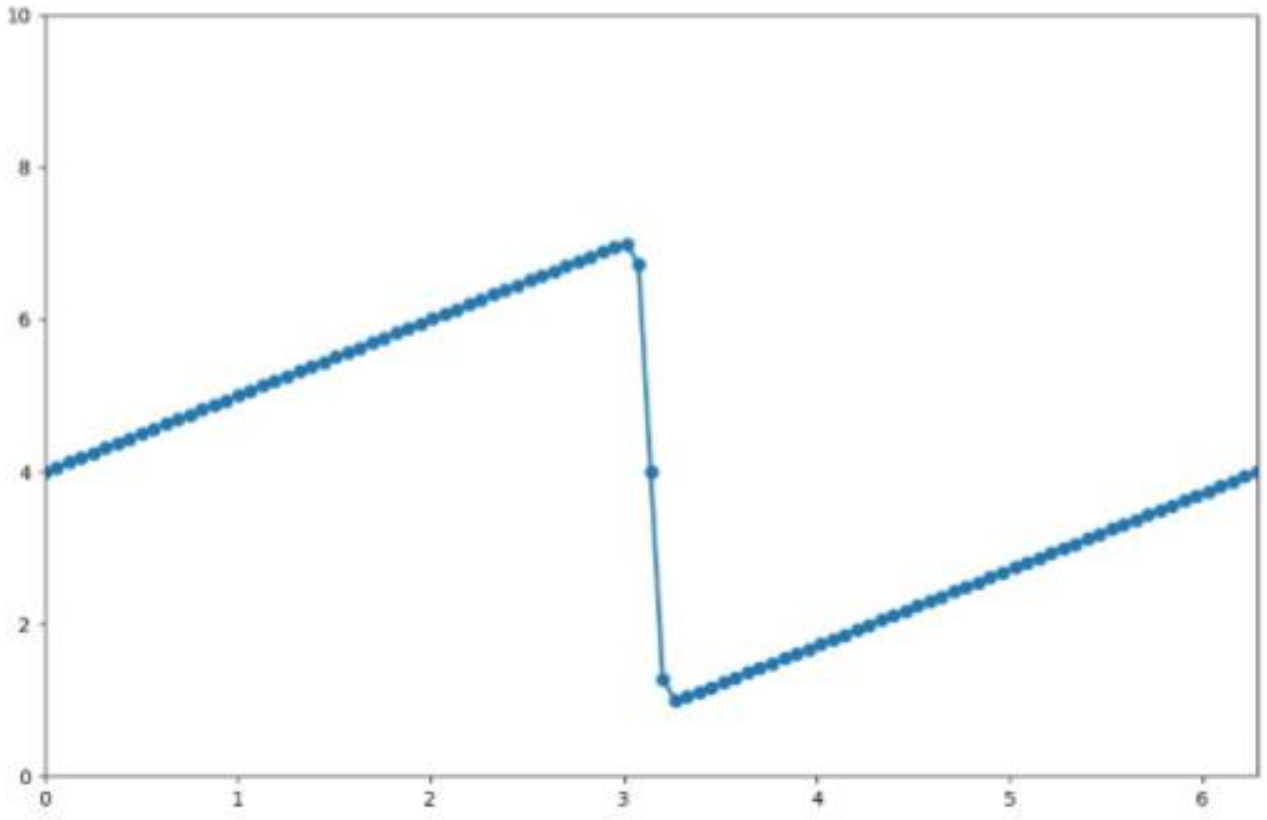
On discrétise l'équation avec la méthode d'Euler explicite

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = \nu\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Supposons qu'on a une condition à l'origine, on aura alors une seule inconnue: u_i^{n+1}

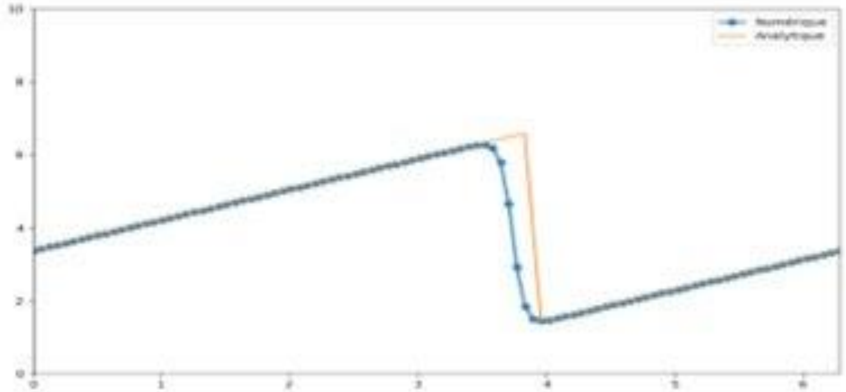
$$u_i^{n+1} = u_i^n - u_i^n\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) + \nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Soit la condition à t=0: existence d'embouteillage



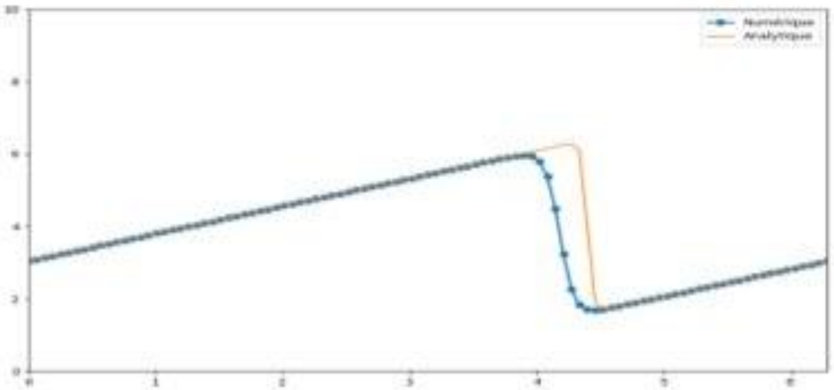
Mise en application de l’hypothèse

$\nu = 0.3$



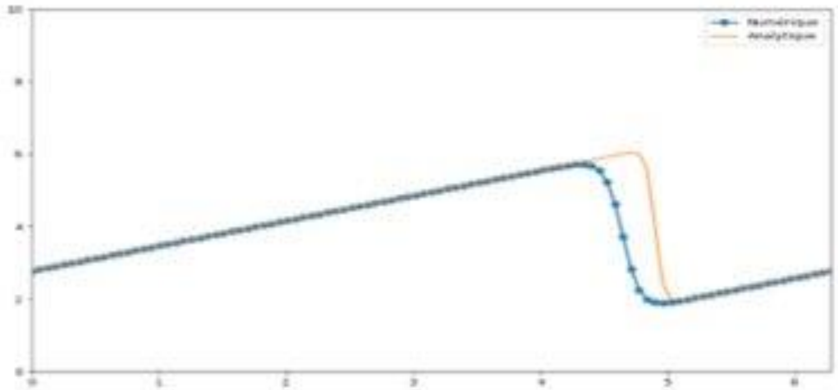
Valeur moyenne : 2.792

$\nu = 0.5$



Valeur moyenne : 2.762

$\nu = 0.7$



Valeur moyenne :2.749

Conclusion

Merci pour votre attention