

Les modes de propulsions spatiales, un enjeu environnemental et énergétique

► Objectif: Comprendre en quoi la propulsion électrique constitue une alternative plus écologique par rapport à la propulsion chimique.

scei: 19741



Plan:

2

I- Comprendre les enjeux du développement des modes de propulsions, la propulsion moteur fusée

II- Le financement d'un voyage spatial selon le mode de propulsion

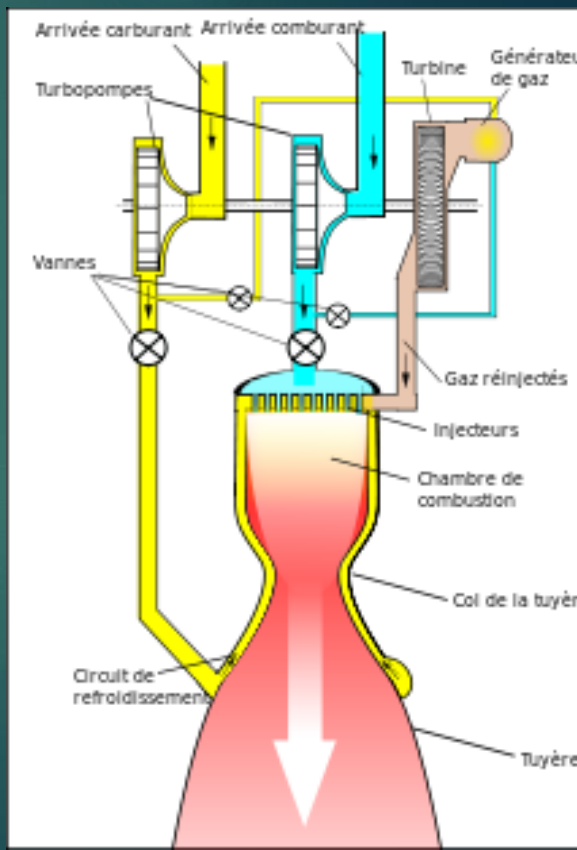
III- Une équation différentielle dans le cas d'un moteur ionique

IV- Résolution numérique de cette équation différentielle

I- Comprendre les enjeux du développement des modes de propulsions: La propulsion par moteur-fusée

3

- Le moteur-fusée est le type de moteur au principe de fonctionnement le plus simple : deux ergols brûlent dans une chambre de combustion, sont accélérés par une Tuyère de laval et sont éjectés à grande vitesse par une tuyère.
- La masse de carburant à embarquer est un enjeu économique. De part notre étude, nous verrons que pour diminuer la masse de carburant embarqué, il est primordial de compenser par la vitesse d'éjection.



Déterminations de l'équation de Tsiolkovski

4

Nous établirons l'accroissement de vitesse d'une fusée

► Cadre d'étude:

► - On considère une fusée de masse totale à l'instant t et de vitesse $V(t)$ dans un référentiel galiléen R

► - D débit massique (constant) de gaz éjectés

► u , la vitesse d'éjection des gazs dans le référentiel R' lié à la fusée.

► La résultante des forces extérieures exercées sur la fusée est notée F .

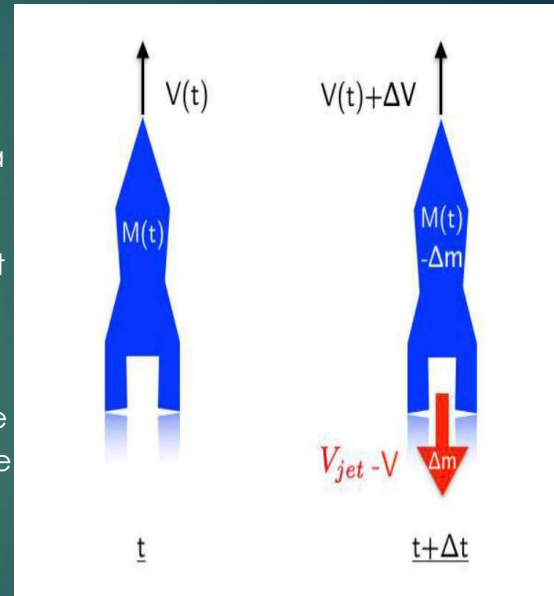
► Pour cela, appliquons le théorème de la quantité de mouvement au système constitué à l'instant t par la fusée de masse m et de vitesse V et à l'instant $t + dt$ par l'ensemble de la fusée de masse $m + dm$ et de vitesse $V + dV$ et des gaz éjectés pendant dt , de masse $-dm$ et de vitesse $V + u$.

► Hypothèses:

► - Fusée se déplaçant dans le vide

► - La planète n'a pas d'atmosphère

► - Absence de pesanteur



$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{v} + \vec{u}) - m\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

En simplifiant et en supprimant le terme quadratique par rapport aux différentiels qui correspond à un terme négligeable devant les termes linéaires par rapport aux différentiels, on a :

$$m \frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{F} + \vec{u} \frac{d}{dt}m \quad \rightarrow \quad m \frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{F} + \vec{T} \quad \text{En considérant une fusée se déplaçant dans le vide, on a : } \vec{F} = \vec{0}$$

$$\rightarrow m \frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{u} \times \frac{d}{dt}m$$

L'équation de Tsiolkovski: $v(t) = u \times \ln\left(\frac{m_o}{m(t)}\right)$ Avec m_o : la masse totale du véhicule au début du trajet

On définit l'efficacité propulsive μ comme étant le rapport entre l'énergie cinétique communiquée à la masse utile et l'énergie totale dépensée qu'on définira comme étant égale à $\frac{m_e u^2}{2}$

avec m_e la masse éjectée entre l'instant initial et l'instant final.

D'après l'équation de Tsiolkovski : $v_f = u \times \ln \frac{m_o}{m_f}$

Par la suite, on posera : $x = \frac{\Delta v}{u}$

Par définition:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{0,5 \times m_f \times v_f^2}{0,5 \times m_e \times u^2} \\ m_e = m_o - m_f \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{m_f}{m_e} \times x^2 \\ m_e = m_f \times \left(\exp\left(\frac{\Delta v}{u}\right) - 1 \right) \end{array} \right.$$

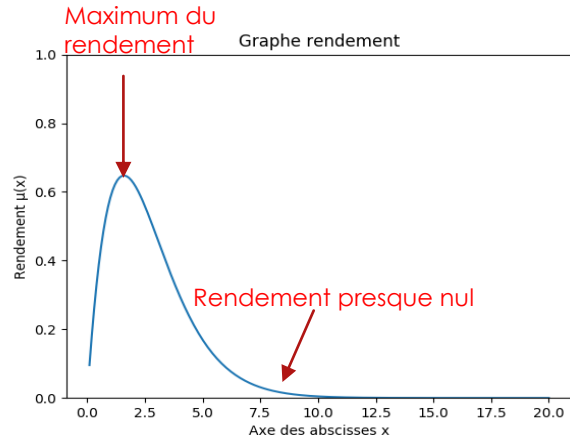
$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu(x) = \frac{x^2}{\exp(x) - 1} \\ m_e = m_f \times \left(\exp\left(\frac{\Delta v}{u}\right) - 1 \right) \end{array} \right.$$

Représentation numérique 1/2

-En raison de l'énergie cinétique de la masse propulsive éjectée, le rendement énergétique d'un moteur à réaction dépend du ratio entre vitesse du véhicule et vitesse d'éjection de la masse propulsive.

-La comparaison entre l'équation de Tsiolkovsky et celle de l'énergie cinétique montre que, même à supposer que le rendement du système propulsif soit de 100 %, toute cette énergie ne finit pas dans l'énergie cinétique du véhicule.

-On veut augmenter les rendements pour réduire à la fois la consommation et les émissions polluantes et sonores.



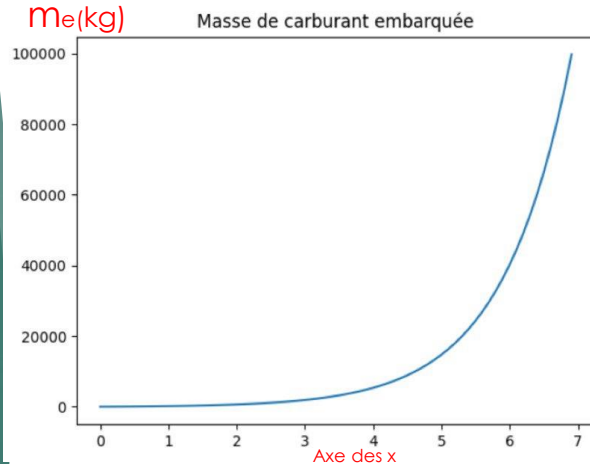
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m

def graphe():
    x=np.linspace(0,20,50)
    y=[i**2/(m.exp(i)-1) for i in x]
    plt.plot(x,y)
    plt.title("graphe rendement")
    plt.xlabel("axe des abscisses x")
    plt.ylabel("rendement  $\mu(x)$ ")
    plt.show()
```

-La masse de carburant varie alors de manière exponentielle en fonction de la vitesse d'éjection du propulseur u .

-La consommation de carburant contribue grandement à la pollution atmosphérique ainsi qu'aux émissions de gaz à effet de serre:

On constate alors qu'un moyen de minimiser les dépenses en carburant serait d'augmenter la vitesse d'éjection u .



```

1  # 100*(e^x-1)
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import numpy as np
4  from math import exp
5
6  T=np.linspace(0,100,100*10)
7  Y=[]
8  i=0
9  while (100*(exp(T[i])-1))<100000:
10     Y.append(100*(exp(T[i])-1))
11     i+=1
12  plt.plot(T[:len(Y)],Y)
13  plt.title("Masse de carburant embarquée")
14  plt.show()

```


II- Le financement d'un voyage spatial

9

Une notion essentielle est l'impulsion spécifique directement liée à la vitesse d'éjection

des gaz u : $I = \frac{u}{g}$

-L'impulsion spécifique permet de comparer l'efficacité d'un système de propulsion plus elle est grande, plus le système est efficace

-En pratique les moteurs fusées ont une impulsion spécifique qui plafonne à environ 500 secondes pour les mélanges carburant/comburant les plus efficaces.

-La majorité des satellites pourrait bientôt servir des intérêts purement commerciaux et déléteurs pour l'environnement. SpaceX, qui a déjà réduit significativement les prix de lancement depuis quelques années, prévoit de baisser ses prix jusqu'à 2 500 dollars par kilogramme.

-Avec des tarifs allant de 4 700 à 12 600 dollars par kilogramme, ses tarifs restent moins élevés que ceux de son principal concurrent, Arianespace, dont la facture oscillerait entre 8 300 et 18 700 dollars par kilogramme en utilisant son lanceur *Ariane 5*. SpaceX a considérablement diminué le coût/kg de satellite lancé mais la masse de carburant à embarquer reste toujours un enjeu économique.

A) Limite de la propulsion chimique

10

On souhaite déterminer la vitesse maximale atteinte par le gaz en sortie de la tuyère

Cadre d'étude:

On se place dans la tuyère d'un moteur fusée. Considérons l'écoulement d'une tranche de fluide, comprise entre les sections S_1 et S_2 à l'instant t et entre S'_1 et S'_2 l'instant $t + dt$.

Hypothèses dans la tuyère à fusée:

- Ecoulement permanent et à altitude constante
- Le gaz est parfait
- Transfert thermique négligé et seul les forces de pressions sont considérés
- Gaz initialement au repos
- Les ergols utilisés pour la propulsion sont du dihydrogène et dioxygène

Déterminations de l'impulsion spécifique dans un propulseur chimique

Applications du premier principe de la thermodynamique à la tranche en régime permanent:

$$dU + dE_c = \delta Q + \delta W \quad \text{et} \quad \delta W = \delta W' + \delta W_{\text{pression}}$$

$$\implies dU = \delta U_2 - \delta U_1 \quad \text{De même,} \quad dE_c = \delta E_{C_2} - \delta E_{C_1}$$

$$\delta m \times (h_2 - h_1) + \frac{\delta m \times (V_2^2 - V_1^2)}{2} = \delta W' + \delta Q$$

En considérant les hypothèses, on a: $h_2 - h_1 = C_p \times (T_2 - T_1)$

$$V_2 = \sqrt{2 \times (h_1 - h_2)} = \sqrt{\frac{2 \times \gamma \times R \times T_c}{(\gamma - 1) \times M}} \quad \text{Réaction stochastique } H_2 + \frac{1}{2} O_2 \rightarrow H_2 O$$

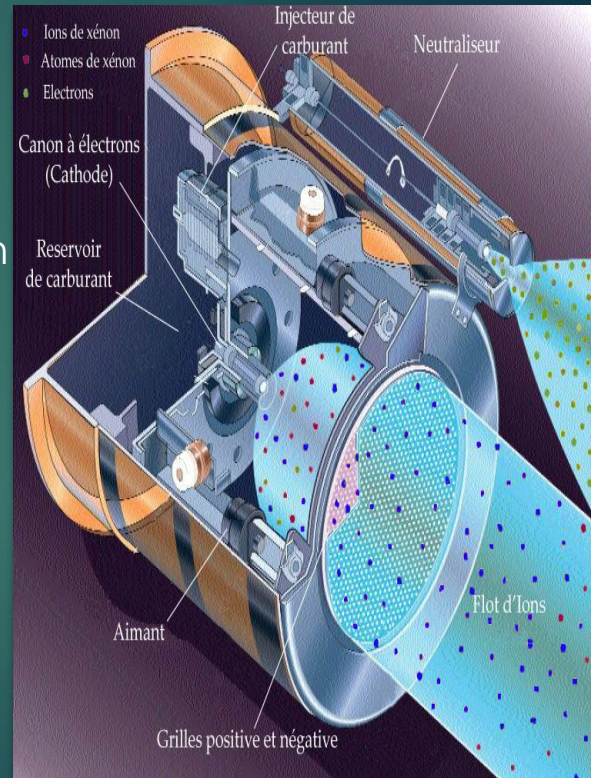
On prends alors $T_c = 30\,000\text{K}$  $V_2 = 3110\text{ m/s}$  $I_s = 320\text{s}$
et on a $M = 0,0018\text{ g/mol}$

B) La propulsion électrique

12

► Dans un système de propulsion spatiale électrique, l'électricité est utilisée pour accélérer des ions formant la masse propulsive. Ces systèmes ont donc besoin d'énergie électrique pour fonctionner. Celle-ci peut être fournie par des panneaux solaires ou par des réacteurs nucléaires.

► Nous allons nous intéresser aux moteurs ioniques et déterminer des ordres de grandeurs caractéristiques du moteur:



Cadre d'étude:

Considérons un flux de particules entre deux électrodes planes de section S , distantes de L ; x est l'abscisse mesurée sur l'axe joignant les électrodes. Ces particules sont de masse m et de charge q positive. On note U la ddp entre les 2 électrodes.

Soit $n(x)$ le nombre de particules par unité de volume, en un point donné.

Hypothèse: -potentiel connu à $x=0$ et $x=L$

-problème plan

-particules émises avec une vitesse négligeable

-le théorème de l'énergie cinétique fournit: $\frac{1}{2} \times m \times v(x)^2 + qU(x) = 0$

$$\Rightarrow V(x) = \sqrt{\frac{-2 \times q \times U(x)}{m}}$$

D_m : flux massique de matière $D_m = n(x) \times v(x) \times m \times S$

$n(x)$: le nombre de particule par unité de volume, en un point donné.

L'équation de poisson s'écrit alors:
$$\Delta U + \frac{q \times n(x)}{\epsilon_0} = 0$$

Par hypothèse et en posant $X=x/L$ et $Y=y/L$:
$$\frac{\delta^2 U}{\delta X^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta Y^2} + \frac{q \times n(x) \times L^2}{\epsilon_0} = 0$$

-Développement limité à l'ordre 2 autour de (X_i, Y_j) :

$$(1) \quad U(X_i + h, Y_j) = U(X_i, Y_j) + \frac{\delta U}{\delta X} \times h + \frac{1}{2} \times \frac{\delta^2 U}{\delta X^2} \times h^2$$

$$(2) \quad U(X_i - h, Y_j) = U(X_i, Y_j) - \frac{\delta U}{\delta X} \times h + \frac{1}{2} \times \frac{\delta^2 U}{\delta X^2} \times h^2$$

$$(3) \quad U(X_i, Y_j + h) = U(X_i, Y_j) + \frac{\delta U}{\delta Y} \times h + \frac{1}{2} \times \frac{\delta^2 U}{\delta Y^2} \times h^2$$

$$(4) \quad U(X_i, Y_j - h) = U(X_i, Y_j) - \frac{\delta U}{\delta Y} \times h + \frac{1}{2} \times \frac{\delta^2 U}{\delta Y^2} \times h^2$$

IV) Résolution numérique

15

L'objectif est d'obtenir des valeurs du potentiel quasi stables par des approximations numériques

Hypothèses: - maillage de P


- Conditions de Dirichlet (on impose le potentiel sur toute la surface)

- Les dérivées partielles par des différences entre les valeurs de U aux différents points du maillage

En additionnant les équations (1), (2), (3) et (4), on obtient:

$$\frac{\delta^2 U}{\delta X^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta Y^2} = \frac{U(X_i + h, Y_j) + U(X_i - h, Y_j) + U(X_i, Y_j + h) + U(X_i, Y_j - h) - 4 \times U(X_i, Y_j)}{h^2}$$

On pose $X_i = i \cdot h$ et $Y_j = j \cdot h$ et $U(i, j)$ le potentiel $U(X_i, Y_j)$



(5) $U(i + 1, j) + U(i - 1, j) + U(i, j + 1) + U(i, j - 1) - 4 \times U(i, j) + \gamma(X, Y) \times h^2 = 0$

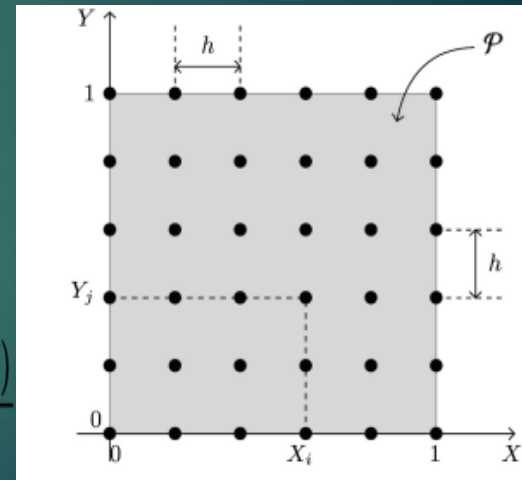
Et donc:
$$\frac{\delta^2 U}{\delta X^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta Y^2} = \frac{U(i + 1, j) + U(i - 1, j) + U(i, j + 1) + U(i, j - 1) - 4 \times U(i, j)}{h^2}$$

La résolution s'effectue alors en deux étapes:

Initialisation: On fixe le potentiel des points de F à la valeur imposée physiquement (bords et électrodes). On donne aux points de potentiel inconnu, donc appartenant à $P \setminus F$, une valeur arbitraire $U_0(i, j)$, en général nulle

On calcule une nouvelle valeur $U_1(i, j)$ des potentiels en appliquant l'équation (5) pour tous les points de $P \setminus F$, tandis que $U_1(i, j) = U_0(i, j)$ pour les points de F . En notant k le nombre d'itérations, on a donc pour le point de coordonnées (i, j) n'appartenant pas à la frontière :

$$U_{k+1} = \frac{U_k(i+1, j) + U_k(i-1, j) + U_k(i, j+1) + U_k(i, j-1) + \psi(X, Y)}{4}$$



Maillage de P pour $N=5$

$U[i,j]$: tableau courant du potentiel en un point de P

$\psi[i,j]$: tableau contenant la densité de charge Ψ en un point de P

frontiere $[i,j]$: tableau de booléens indiquant si le point de coordonnées (i,j) appartient ou non à F.

-On admet que ces régularisations successives définissent une suite convergente de matrice (U_n) et que la limite de cette suite est la matrice U

-Le processus est répété jusqu'à obtenir des valeurs du potentiel quasi stables

-La convergence de la méthode est vérifiée à l'aide du critère de convergence e_k , définit

par $e_k = \sqrt{\frac{1}{N^2} \times \sum_{i,j} (U_{k+1}(i,j) - U_k(i,j))^2}$ L'itération sera arrêtée dès que l'écart e_k sera inférieur à un seuil « eps » fixé

-On remarque un taux de convergence lent.

-Les éléments du nouvel itéré sont indépendants les uns des autres

-Pour modifier toutes les valeurs contenues dans $U[i,j]$ pendant une itération il est nécessaire de disposer d'une copie de ce tableau.

Résolution numérique: Méthode de Gauss-Seidel

18

-On conserve le principe de l'algorithme de Jacobi pour lequel le tableau U des potentiels est balayé selon les indices i et j croissants

-au moment de calculer $U_{k+1}(i,j)$, on a déjà calculé $U_{k+1}(i-1,j)$ et $U_{k+1}(i,j-1)$, mais pas encore $U_{k+1}(i+1,j)$ ni $U_{k+1}(i,j+1)$

-L'équation précédente peut être remplacé par cette nouvelle équation:

$$U_{k+1}(i,j) = \frac{1}{4} \times (U_k((i+1,j)) + U_{k+1}(i-1,j) + U_k(i,j+1) + U_{k+1}(i,j-1) + \psi(i,j))$$

-Cet algorithme ne nécessite qu'un vecteur de stockage U_k étant remplacé par U_{k+1} au cours de l'itération alors que celui de Jacobi nécessite de stocker 2 vecteurs U_k et U_{k+1}

-On a donc accélération de la convergence de Jacobi en prenant en compte les nouveaux éléments de U au fur et à mesure de leur calcul

-Nouvelles dépendances entre les éléments: ils doivent être évalués successivement

-La méthode de sur-relaxation consiste à exprimer $U_{k+1}(i,j)$ comme une combinaison convexe de $U_k(i,j)$ et de la valeur donnée par le schéma de Gauss-Seidel

-Les équations de Jacobi et de Gauss-Seidel expriment $U_{k+1}(i,j)$ en fonction des valeurs de U_k autour du point (i,j) mais pas de la valeur $U_k(i,j)$

-On introduit un terme de relaxation ω et on pose:

$$U_{k+1}(i,j) = (1 - \omega) \times U_k(i,j) + \frac{\omega}{4} \times (U_k((i+1,j)) + U_{k+1}(i-1,j) + U_k(i,j+1) + U_{k+1}(i,j-1) + \psi(i,j))$$

A chaque itération, il faut calculer les $(N+1)^2 = O(N^2)$

Le coût total du schéma SOR est en $O(N^3)$

-On prendra alors une valeur moyenne du potentiel $U_0=1090V$ et la masse molaire du Xénon= 131,3g/mol, on en déduit que:

la vitesse d'éjection du Xénon par un moyen électrique est alors de l'ordre de $v=40km/s$

```
def nouveau_potentiel_SOR(U,psi,frontiere,i,j,omega):  
    return(1-omega)*U[i,j]+omega*nouveau_potentiel(U,psi,frontiere,i,j)  
  
def itere_SOR(U,psi,frontiere):  
    nb_lig,nb_col=U.shape  
    N=nb_lig - 1  
    omega=2/(1+np.pi/N)  
    U_0=U.copy()  
    for i in range(nb_lig):  
        for j in range(nb_col):  
            U[i,j]=nouveau_potentiel_SOR(U,psi,frontiere,i,j,omega)  
    err=erreur(U,U_0)  
    return err
```

Conclusion

20

On a alors vu que pour la propulsion chimique, l'éjection de gaz chaud se fait à une vitesse de l'ordre de 2 à 4 km/s, soit une impulsion spécifique entre 200 et 400 secondes. Alors que pour la propulsion électrique la vitesse d'éjection de l'ergol est très élevée et peut atteindre 80 km/s selon les outils utilisés.

Cela permet alors de faire de grosses économies en masse d'ergol embarqué.

Pour mieux visualiser la chose, prenons 2 missions spatiales:

Missions	Poussée max T	me	coût/mo	Durée
Deep space1 (prop. ionique)	0,093 N	113 kg	500 (moyenne)	Durée du vol: 3 ans et 54j
Ariane V (prop. chimiques)	14,4 kN	10,8 T	13 400(moyenne)	Durée en orbite: 115 min

La propulsion électrique alors semble constituer une alternative plus écologique du fait de son faible coût de production par rapport à la propulsion chimique

Or, on sait que $\delta H = \delta U + P \times \delta V$

On conclut que: $\delta m \times (h_2 - h_1) + \frac{\delta m \times (V_2^2 - V_1^2)}{2} = \delta W' + \delta Q$

En considérant les hypothèses, on a:

$$h_2 - h_1 = C_p \times (T_2 - T_1) \text{ et } C_{p_{\text{massique}}} = \frac{\gamma \times R}{(\gamma - 1) \times M}$$

$$V_2 = \sqrt{2 \times (h_1 - h_2)} = \sqrt{\frac{2 \times \gamma \times R \times T_c}{(\gamma - 1) \times M}}$$

Réaction stochastique $H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O$ On prends alors $T_c = 30\,000\text{K}$
et on a $M = 0,0018\text{ g/mol}$

$$\Rightarrow V_2 = 3110\text{ m/s} \Rightarrow I_s = 320\text{ s}$$

Application du Premier principe de la thermodynamique à la tranche en régime permanent:

$$dU + dE_c = \delta Q + \delta W$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } dU &= U_{S'_1 S'_2} - U_{S_1 S_2} \\ &= U_{S_2 S'_2} - U_{S_1 S'_1} \end{aligned}$$

$$\implies dU = \delta U_2 - \delta U_1 \quad \text{De même} \quad dE_c = \delta E_{C_2} - \delta E_{C_1}$$

$$\text{De plus, } \delta W = \delta W' + \delta W_{\text{pression}}$$

$$\text{Ave } \delta W_{\text{pression}} = P_1 \times S_1 \times dx_1 - P_2 \times S_2 \times dx_2$$

$$\implies \delta U_2 - \delta U_1 + \delta E_{C_2} - \delta E_{C_1} = \delta W' + P_1 \times \delta V_1 - P_2 \times \delta V_2 + \delta Q$$

Annexe python Jacobi

```
def nouveau_potentiel (U, psi, frontiere, i, j):  
    if frontiere(i,j):  
        valeur=U[i,j]  
    else:  
        valeur=(U[i+1,j]+U[i-1,j]+U[i,j-1]+U[i,j+1])/4  
  
    return(valeur)
```

```
def itere_J(U,psi,frontiere):  
    format=U.shape  
    U_0=U.copy  
    nb_lig, nb_col= format  
    for i in range (nb_lig):  
        for j in range (nb_col):  
            U[i,j]=nouveau_potentiel(U_0,psi,frontiere,i,j)  
    err=erreur(V,V_0)  
    return err
```

Annexe python: Jacobi

```
def erreur(U,U_1):  
    nb_lig,nb_col=U.shape  
    N=nb_lig - 1  
    ecart_quad=np.sqrt(np.sum((V_1 - V)**2))  
    ecart_quad_moy=ecart_quad/N  
    return ecart_quad_moy
```

```
def poisson(f_iter,U,psi,frontiere,eps):  
    err=f_iter(U,psi,frontiere)  
    while (err>eps):  
        err=f_iter(U,psi,frontiere)|
```


Annexe python-Gauss-Seidel

```
def itere_GS(U,psi,frontiere):  
    nb_ligne, nb_col=U.shape  
    U_0 =U;copy()  
    for i in range (nb_lig):  
        for j in range (nb_col):  
            U[i,j]=nouveau_potentiel(U,psi,frontiere,i,j)  
    err=erreur(U,U_0)  
    return err
```

Annexe Gauss-Seidel adaptative

```
def nouveau_potentiel_SOR(U,psi,frontiere,i,j,omega):  
    return(1-omega)*U[i,j]+omega*nouveau_potentiel(U,psi,frontiere,i,j)  
  
def itere_SOR(U,psi,frontiere):  
    nb_lig,nb_col=U.shape  
    N=nb_lig - 1  
    omega=2/(1+np.pi/N)  
    U_0=U.copy()  
    for i in range(nb_lig):  
        for j in range (nb_col):  
            U[i,j]=nouveau_potentiel_SOR(U,psi,frontiere,i,j,omega)  
    err=erreur(U,U_0)  
    return err
```