

Marchés financiers et Mouvement brownien

Peut-on rendre compte des fluctuations boursières?

Travail présenté par:
Ben Abdallah Aymen
N° d'inscription:
33829





1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian Smoluchowski



1960

Black and Scholes



2008

Crise économique



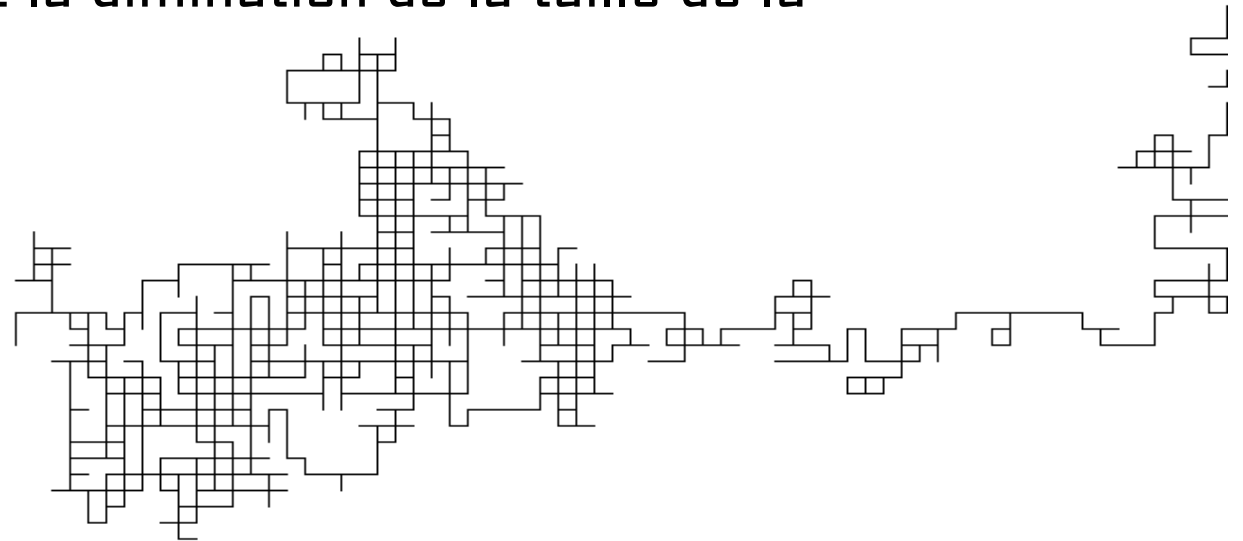
2018

La Tunisie aujourd'hui

- Observations de Brown:

- Mouvement nulle part dérivable
- Mouvement indépendant de la nature de la particule
- Mouvement permanent
- Mouvement de plus en plus irrégulier avec l'augmentation de la température et la viscosité du fluide et la diminution de la taille de la particule

Représentation d'un mouvement aléatoire se rapprochant du modèle du mouvement brownien à l'aide de Python:





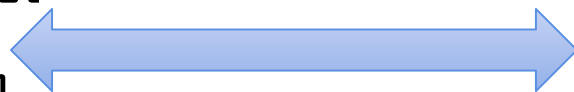
Analogie:

milieu fluide



marché financier:

Interaction entre molécules et
la particule suite à l'agitation
thermique



intervention des différents
actionnaires

Effet de dérive



différentes interventions extérieures



1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski



1960

Black and
Scholes



2008

Crise
économique



2018

La Tunisie
aujourd'hui

MODÈLE ET MÉTHODOLOGIE DE L'APPROCHE

- Modèle en 1D
- Marche aléatoire:
 - Pas: Δ
 - $t = k\tau \gg \tau \gg t_c$

Hypothèses prises en compte

- Milieu homogène et isotrope
- $p=q=\frac{1}{2}$
- $P(0,0|n\Delta,k\tau)$ la probabilité de trouver la particule en $n\Delta$ après un temps $k\tau$ sortant de l'origine spatio-temporelle $(0,0)$
- On note g (resp. d) le nombre de sauts à gauche (resp. à droite) de l'origine



1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski

1960

Black and
Scholes

2008

Crise
économique

2018

La Tunisie
aujourd'hui

RÉSOLUTION MATHÉMATIQUE DISCRÈTE

- Pour qu'une particule parvienne à $n\Delta$ en k mouvements (en un temps $k\tau$) on a $\frac{k!}{d!g!}$ possibilités
- Notons que
 - $d + g = k$: nombre total déplacements
 - $d - g = n$: position après k déplacements

Donc on a $P(0,0|n\Delta, k\tau) = p^d q^g \frac{k!}{d!g!}$ (on notera dans la suite $P(0,0|n\Delta, k\tau) := P(n\Delta, k\tau)$)

$$= p^{\frac{k+n}{2}} q^{\frac{k-n}{2}} \frac{k!}{\left(\frac{k-n}{2}\right)! \left(\frac{k+n}{2}\right)!}$$

Or on a $(pe^{i\varphi} + qe^{-i\varphi})^k = \sum_{l=0}^k p^l q^{k-l} \frac{k!}{(k-l)!l!}$ et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi(2l-k)} e^{-in\varphi} d\varphi = \delta_{2l-k,n}$



1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski

1960

Black and
Scholes

2008

Crise
économique

2018

La Tunisie
aujourd'hui

APPROXIMATIONS (HYPOTHÈSES ET RÉSULTAT):

- en considérant l'hypothèse $p=q=\frac{1}{2}$, en remplaçant par $k=\frac{t}{\tau}$, $n=\frac{x}{\Delta}$, $D=\frac{\Delta^2}{2\tau}$ et $\psi=\frac{\varphi}{\sqrt{\tau}}$ et sachant que $\frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^k = e^{k \ln |\cos \sqrt{\tau} \psi|}$ (avec k pair)

On trouve $\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} P(n\Delta, k\tau) = P(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\sqrt{2D}} \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\psi} e^{\frac{t}{\tau} \ln |\cos \sqrt{\tau} \psi|} d\psi$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{2D}} \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\psi} e^{\frac{-t}{\tau}\psi^2} d\psi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{\frac{-x^2}{4Dt}}$$



1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski

1960

Black and
Scholes

2008

Crise
économique

2018

La Tunisie
aujourd'hui

Solution

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

$$P(x,t) \geq 0$$

$$\int P(x,t) dx$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(x,t) = \delta(x)$$

Généralisation
en conditions
initiales
quelconques:

$$P(x_0, t_0 | x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}}$$

$$\text{avec } P(x_0, t_0 | x, t)|_{t=t_0} = \delta(x - x_0)$$

- Encore plus générale pour une distribution initiale $W(x_0, t_0)$:

$$P(x, t) = \int W(x_0, t_0) P(x_0, t_0 | x, t) dx_0$$

Trouvée



1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski

1960

Black and
Scholes

2008

Crise
économique

2018

La Tunisie
aujourd'hui

INTERPRÉTATION DU COEFFICIENT DE DIFFUSION:

- Relation d'Einstein:

$$D = \frac{k_B T}{m\gamma}$$

- Principe Fondamental de la Dynamique:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -mg - m\gamma v(t)$$

En régime stationnaire: $v = -\frac{g}{\gamma}$ donc $j_g = vn(x) = -\frac{g}{\gamma} n(x)$

$$\text{Or } n(x) = n(x_0) e^{-\frac{mg(x-x_0)}{k_B T}} \text{ donc } j_D = D \frac{dn(x)}{dx} = \frac{Dmg}{k_B T} n(x)$$

et puisque $j(x, t) = j_g(x, t) + j_D(x, t) = 0$ (en régime stationnaire)



1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski

1960

Black and
Scholes

2008

Crise
économique

2018

La Tunisie
aujourd'hui

HYPOTHÈSES:

- $p(n\Delta) = \frac{1}{2} + \alpha(n\Delta)\Delta$ et
 $q(n\Delta) = \frac{1}{2} - \alpha(n\Delta)\Delta$

Ce qui traduit le fait de l'inhomogénéité
du milieu fluide

(on garde les mêmes notations)

Résolution discrète (brève):

- $P(n\Delta, (k+1)\tau) = p((n-1)\Delta)P((n-1)\Delta, k\tau) +$
 $q((n+1)\Delta)P((n+1)\Delta, k\tau)$

On trouve donc

$$\begin{aligned} & P(n\Delta, (k+1)\tau) - P(n\Delta, k\tau) \\ &= \frac{1}{2} \left(P((n+1)\Delta, k\tau) - 2P(n\Delta, k\tau) + P((n-1)\Delta, k\tau) \right) \\ & \quad - \Delta \left(\alpha((n+1)\Delta)P((n+1)\Delta, k\tau) \right. \\ & \quad \left. - \alpha((n-1)\Delta)P((n-1)\Delta, k\tau) \right) \end{aligned}$$



1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski

1960

Black and
Scholes

2008

Crise
économique

2018

La Tunisie
aujourd'hui

APPROXIMATION:

- En appliquant les limites $\tau \rightarrow 0$ $\Delta \rightarrow 0$, on trouve

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -4D \frac{\partial(\alpha(x)P(x, t))}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$$

- Par une étude dimensionnelle, on pose $4D\alpha(x) = \frac{F(x)}{m\gamma}$

- On trouve l'équation:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{m\gamma} \frac{\partial(F(x)P(x, t))}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$$



1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski



1960

Black and
Scholes



2008

Crise
économique



2018

La Tunisie
aujourd'hui

PRÉSENTATION DE L'ÉQUATION ET DE SES HYPOTHÈSES:

- $\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$
- $C(S,t)$ le prix de l'option
- S le prix du sous-jacent
- Le cours des actions suit un processus stochastique
- pas de dividendes et de coûts de transaction
- le taux sans risque et la volatilité du cours de l'action sont connus et constants



1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski



1960

Black and
Scholes



2008

Crise
économique



2018

La Tunisie
aujourd'hui

Modèle à étudier:

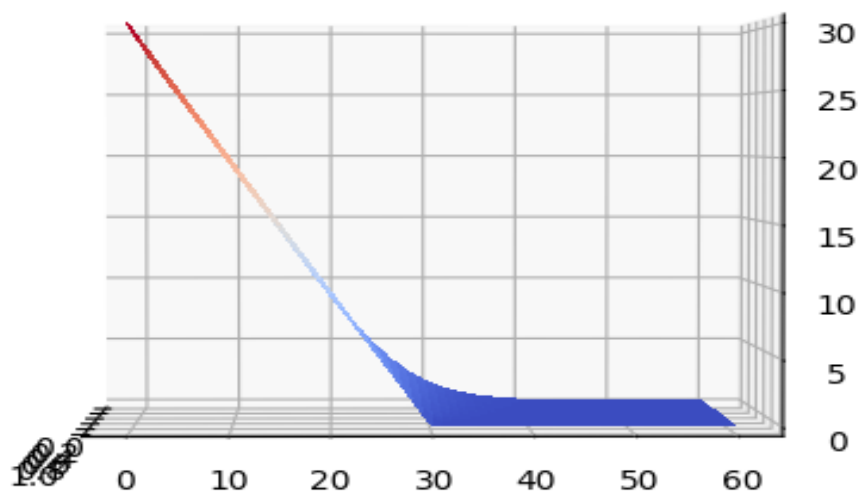
- Un call européen

RÉSOLUTION ANALYTIQUE:

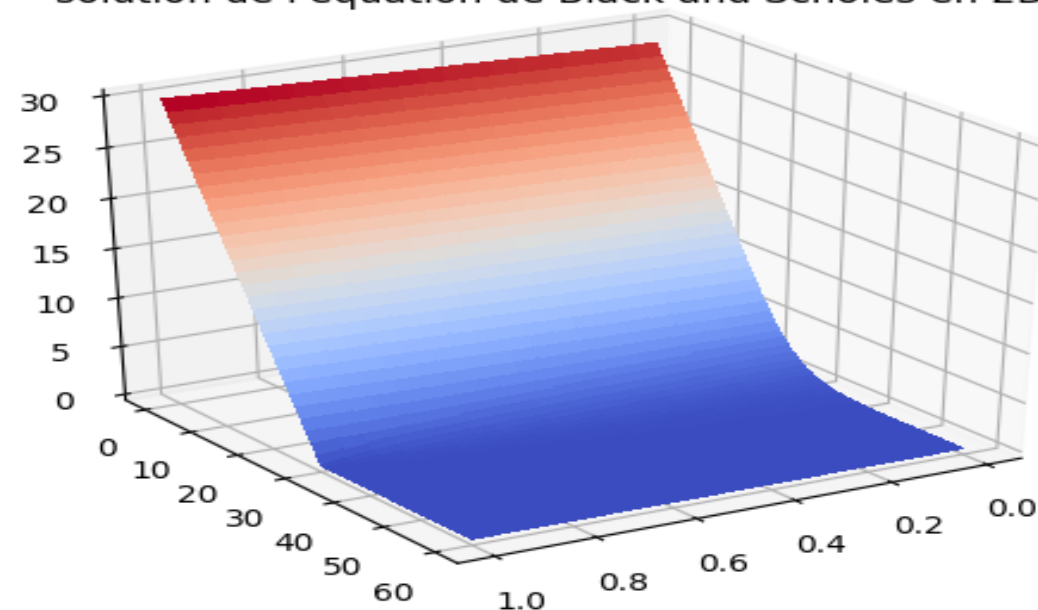
- Par une transformée de Fourier on trouve que la solution $C(S,t)$ est:

$$C(S, t) = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi t}} e^{-rt} \int_0^{+\infty} C_0(S_T) \frac{1}{S_T} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\ln S_T - \left(\ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right)\right)^2\right] dS_T$$

solution de l'equation de Black and Scholes en 2D



solution de l'equation de Black and Scholes en 2D





1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski

1960

Black and
Scholes

2008

Crise
économique

2018

La Tunisie
aujourd'hui

RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE BINOMIALE:

- $S_{n,k} = S_{n,k-1} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)$

avec $(Y_k)_{k \in N^}$ une suite de variables aléatoires indépendantes tel que*

$$P(Y_k = 1) = P(Y_k = -1) = \frac{1}{2}$$

μ liée au rendement moyen de l'action sur une durée t

v volatilité de l'action sur une durée t

on ajoute que n assez grand tel que $1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}} > 0$

on montre que $(\ln(S_{n,n}))$ converge vers la loi normale de paramètres $(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2)$



1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski



1960

Black and
Scholes



**Confrontation
des résultats**

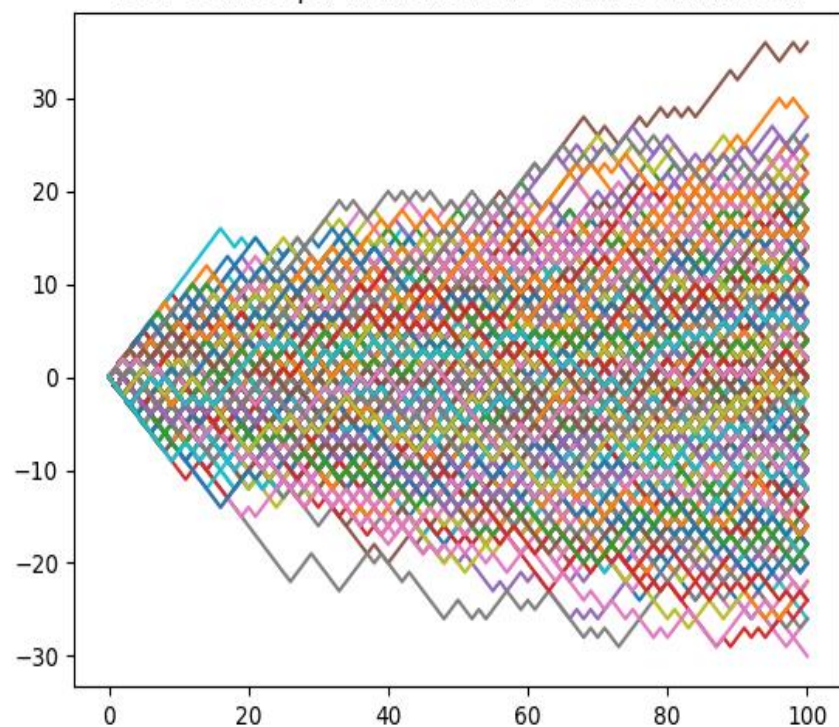


2018

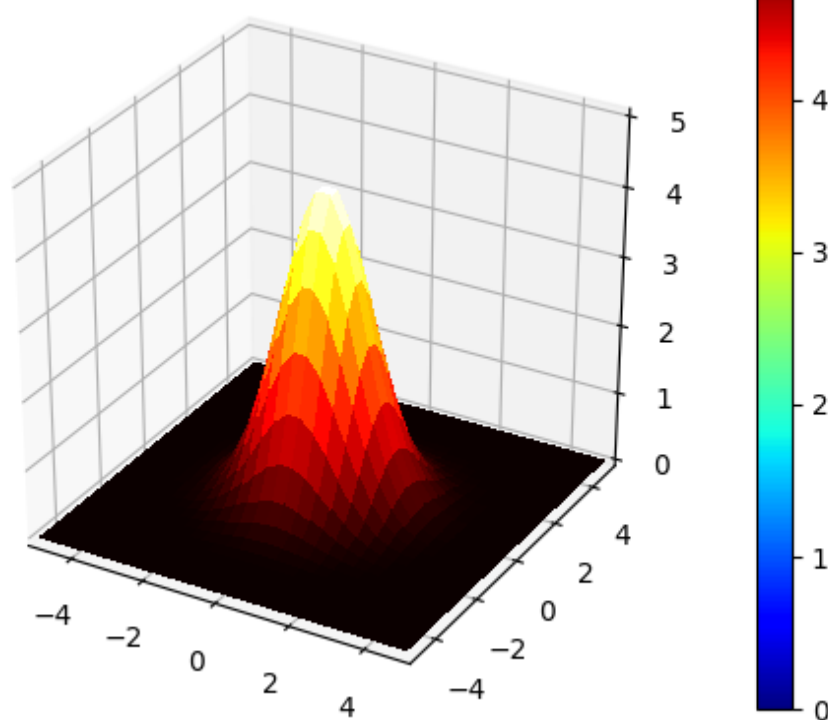
La Tunisie
aujourd'hui

COURBES RESPECTIVES DE CHAQUE MÉTHODE ENVISAGÉE:

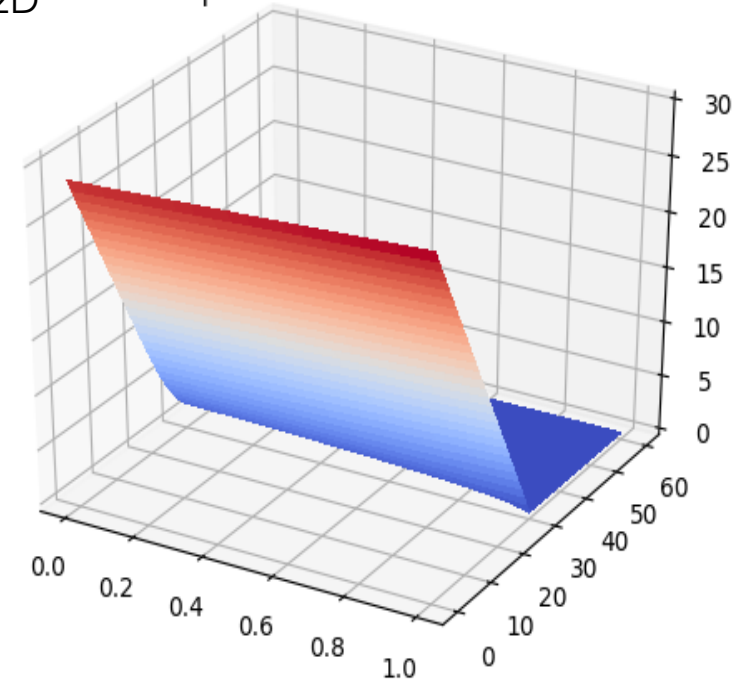
1000 Courbes par la méthode de Cox-Ross-Rubinstein



Représentation de la fonction d'Einstein en 2D



solution de l'équation de Black and Scholes en 2D





1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski

1960

Black and
Scholes

2008

Crise
économique

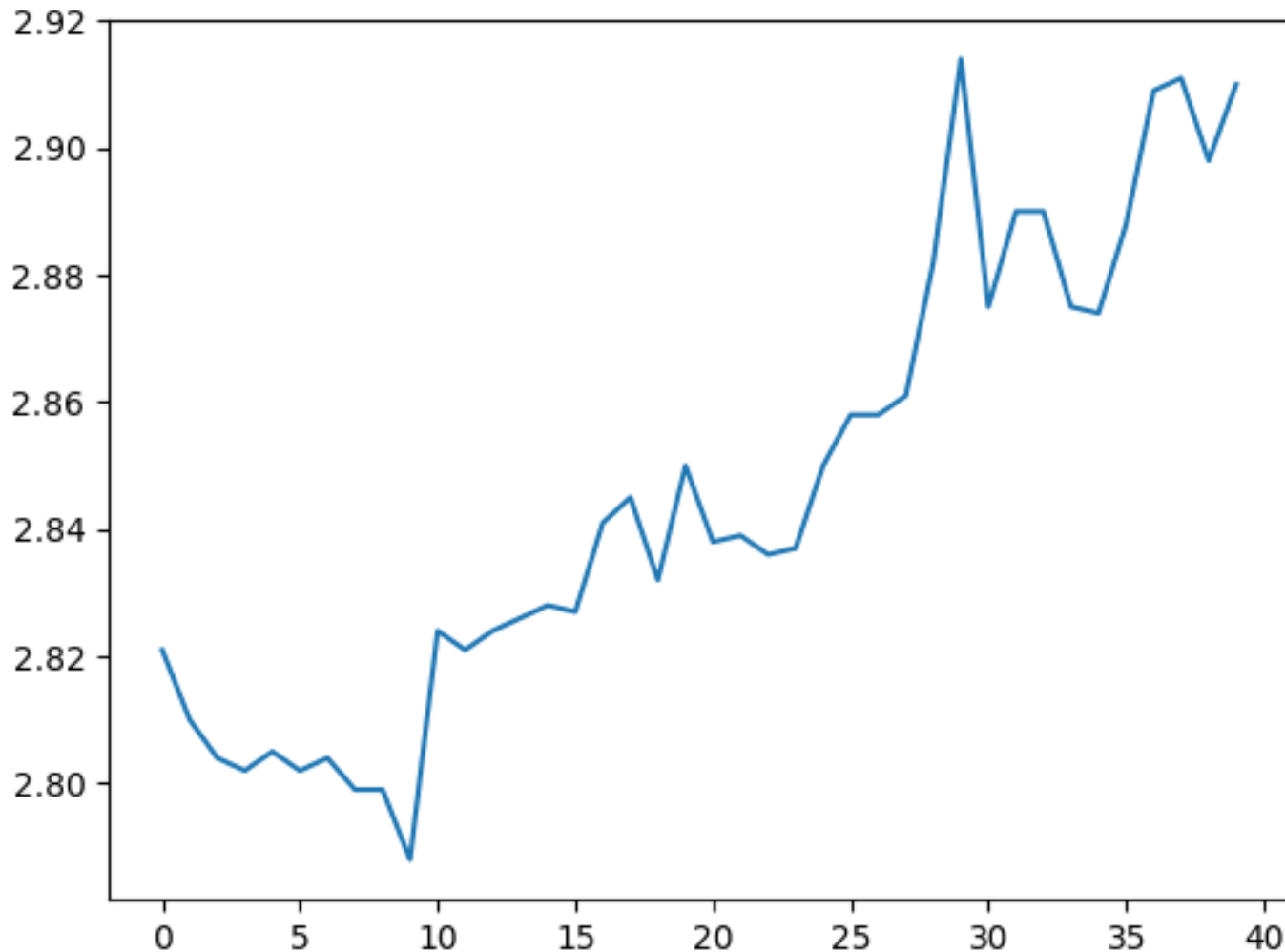
2018

La Tunisie
aujourd'hui

TABLEAU DES VALEURS PRÉLEVÉES:

Source: <https://www.boursorama.com/bourse/devises/taux-de-change-euro-dinar-EUR-TND/>

| date | ouv | haut | bas | clot |
|------------------|-------|-------|-------|-------|
| 13/06/2017 00:00 | 2.804 | 2.821 | 2.712 | 2.765 |
| 14/06/2017 00:00 | 2.784 | 2.81 | 2.713 | 2.791 |
| 15/06/2017 00:00 | 2.804 | 2.804 | 2.693 | 2.745 |
| 16/06/2017 00:00 | 2.779 | 2.802 | 2.709 | 2.75 |
| 19/06/2017 00:00 | 2.779 | 2.805 | 2.735 | 2.797 |
| 20/06/2017 00:00 | 2.754 | 2.802 | 2.717 | 2.749 |
| 21/06/2017 00:00 | 2.78 | 2.804 | 2.716 | 2.738 |
| 22/06/2017 00:00 | 2.751 | 2.799 | 2.737 | 2.748 |
| 23/06/2017 00:00 | 2.771 | 2.799 | 2.72 | 2.78 |
| 26/06/2017 00:00 | 2.781 | 2.788 | 2.749 | 2.762 |
| 27/06/2017 00:00 | 2.782 | 2.824 | 2.738 | 2.763 |
| 28/06/2017 00:00 | 2.764 | 2.821 | 2.737 | 2.806 |
| 29/06/2017 00:00 | 2.765 | 2.824 | 2.739 | 2.764 |
| 30/06/2017 00:00 | 2.806 | 2.826 | 2.74 | 2.816 |
| 03/07/2017 00:00 | 2.806 | 2.828 | 2.759 | 2.774 |
| 04/07/2017 00:00 | 2.774 | 2.827 | 2.76 | 2.811 |
| 05/07/2017 00:00 | 2.772 | 2.841 | 2.759 | 2.772 |
| 06/07/2017 00:00 | 2.802 | 2.845 | 2.734 | 2.785 |
| 07/07/2017 00:00 | 2.811 | 2.832 | 2.767 | 2.767 |
| 10/07/2017 00:00 | 2.775 | 2.85 | 2.765 | 2.781 |
| 11/07/2017 00:00 | 2.808 | 2.838 | 2.768 | 2.785 |
| 12/07/2017 00:00 | 2.816 | 2.839 | 2.762 | 2.782 |
| 13/07/2017 00:00 | 2.777 | 2.836 | 2.768 | 2.832 |
| 14/07/2017 00:00 | 2.811 | 2.837 | 2.763 | 2.831 |
| 17/07/2017 00:00 | 2.794 | 2.85 | 2.777 | 2.836 |
| 18/07/2017 00:00 | 2.813 | 2.858 | 2.784 | 2.857 |
| 19/07/2017 00:00 | 2.83 | 2.858 | 2.792 | 2.796 |
| 20/07/2017 00:00 | 2.852 | 2.861 | 2.683 | 2.859 |
| 21/07/2017 00:00 | 2.842 | 2.882 | 2.783 | 2.868 |
| 24/07/2017 00:00 | 2.839 | 2.914 | 2.783 | 2.849 |





1828

Robert Brown



1900

Louis Bachelier



1906

Albert Einstein



1906

Marian
Smoluchowski



1960

Black and
Scholes



2008

Crise
économique



2018

La Tunisie
aujourd'hui

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES DONNÉES:



Évolution du dinar tunisien au bout d'un an



Évolution du dinar tunisien au bout de 5 ans

CONCLUSION SUR LA RIGOUROSITÉ DES MÉTHODE ÉTUDIÉES:

Solution analytique:

- Rapide
- Exacte
- Trop compliquée dans le cas général

Différences finies:

- Bon taux de convergence
- Adaptable au cas général
- Problème à l'infini (de S)

Méthode binomiale:

- Bon taux de convergence
- Adapté au cas général
- Calcul de plus en plus lourd si n augmente

BILAN FINAL:

Même dans le cas parfait, il est encore pénible de prédire le coût d'une option bien qu'on ait une solution exacte,

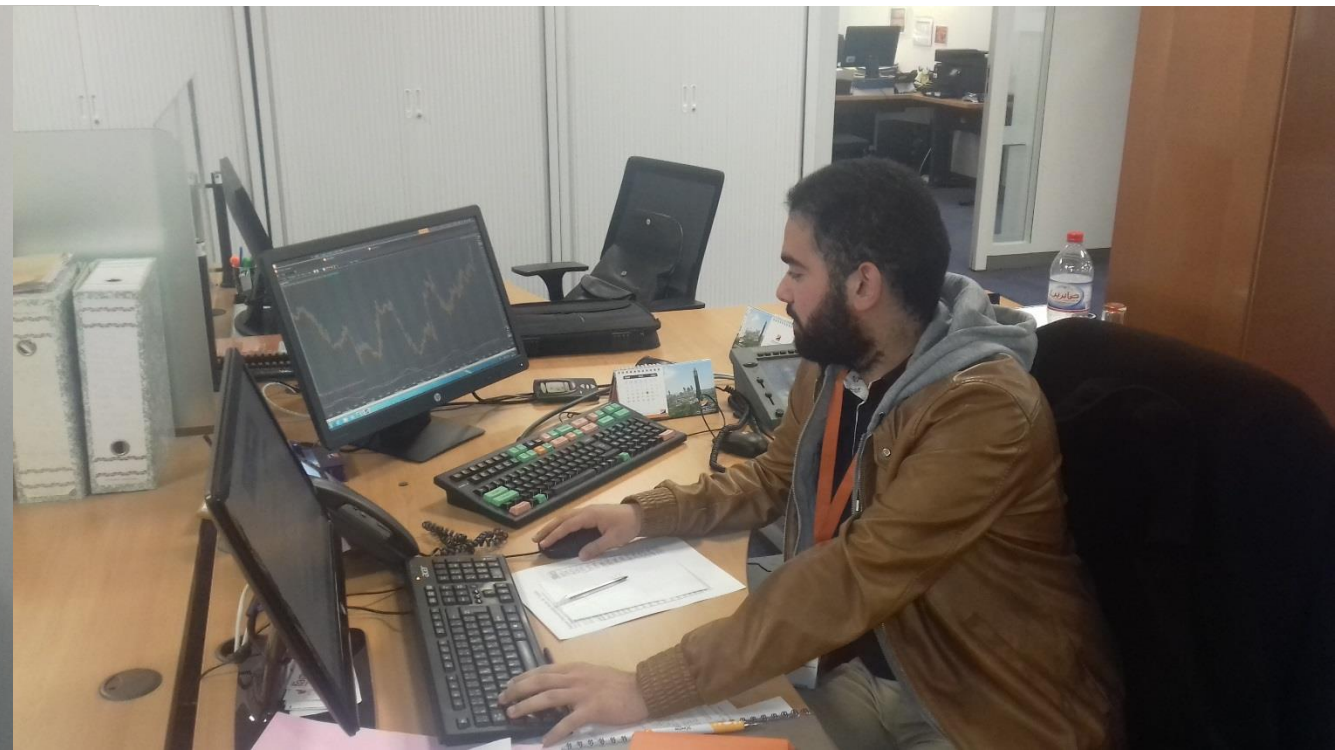
Dans le cas réel:

- Plus compliqué
- Presque impossible à résoudre

Dans ce cas on a recourt à des méthodes de couvertures permettant de bien gérer les fluctuations des prix financiers

REMERCIEMENTS

- À mon professeur encadreur M, Ahmed Rebai
- Au responsable du marché financier de la banque de BIAT M, Ali Dallagi (ingénieur en mathématiques financières)





Merci pour votre attention