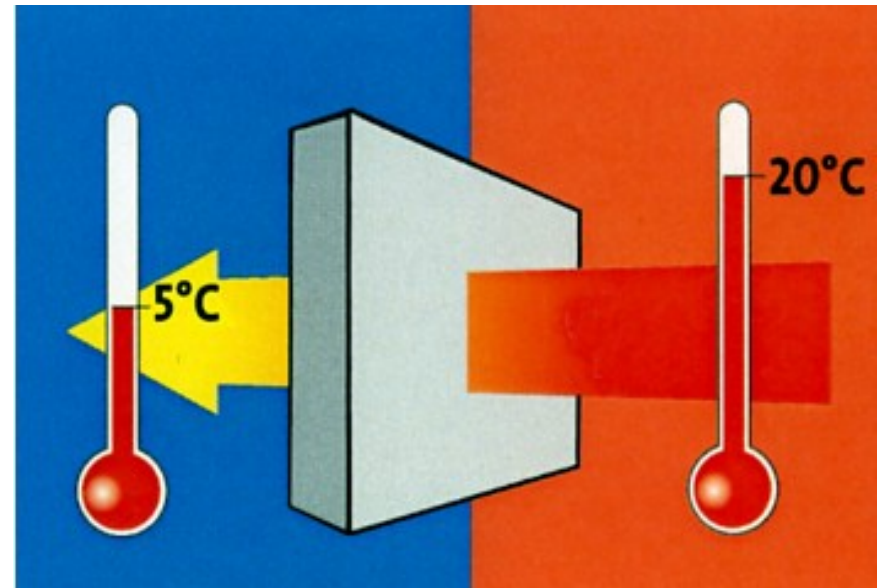


Modélisation du trafic routier

Objectif: Déterminer si une limitation des vitesses des automobiles permet de réduire la congestion routière.



Plan


I .Choix du modèle

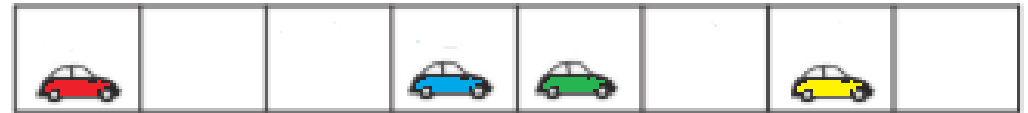
II.Étude théorique

III.Étude expérimentale

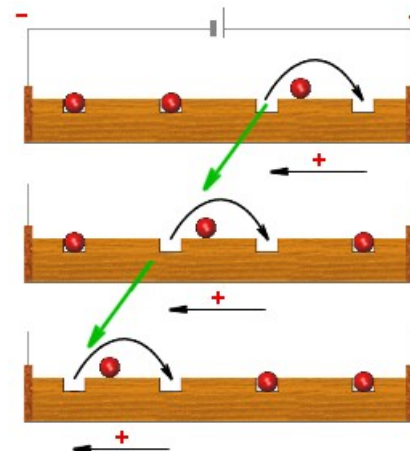
IV.Simulation informatique

I.Choix du modèle

- Une seule voie d'autoroute  étude Unidimensionnelle
- Pas de dépassements
- Pas de contacts entre les voitures
- Lorsqu'une voiture avance, celle qui est derrière prend sa place
- Concept de Trou d'électron :

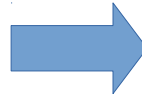


C'est une façon simple d'analyser le mouvement d'un grand nombre d'électrons au sein d'un réseau cristallin



Analogies

Loi d'Ohm
\mathbf{j} vecteur densité de courants électriques
hétérogénéité de potentiel V
conductivité électrique γ
$\mathbf{j} = -\gamma \cdot \text{grad}V$



Loi de Fourier
\mathbf{j}_{Th} vecteur densité de flux thermique
hétérogénéité de température T
conductivité thermique λ
$\mathbf{j}_{Th} = -\lambda \cdot \text{grad}T$

On choisit alors de modéliser le trafic routier par un phénomène de transfert thermique :

Voitures	électrons
Vitesse maximale permise sur l'autoroute	Conductivité du matériau
Densité de voitures	Température

Régi par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Avec $K = \lambda / \rho c$:
Diffusivité thermique

Pour renforcer le modèle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Équation de Burgers

On peut transformer cette équation en utilisant la transformation de Hopf-Cole :

$$u = -\frac{2\nu}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

En portant dans l'équation il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)$$

Par intégration par rapport à x il s'introduit une "constante" d'intégration fonction du temps que l'on note $g(t)$, déterminée par les conditions aux limites :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g(t)\phi$$

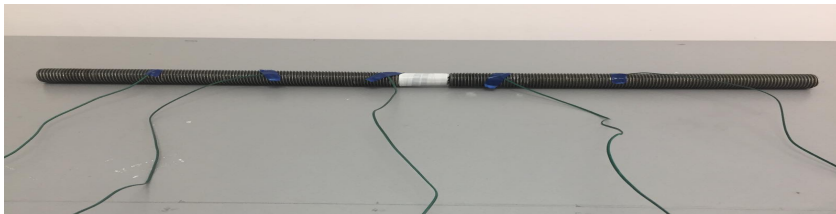
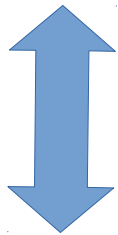
Le nouveau changement de variable $\psi = \phi e^{\int g dt}$ permet d'écrire :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$



On retrouve l'équation de la diffusion thermique ou « équation de la chaleur »

Mise en application



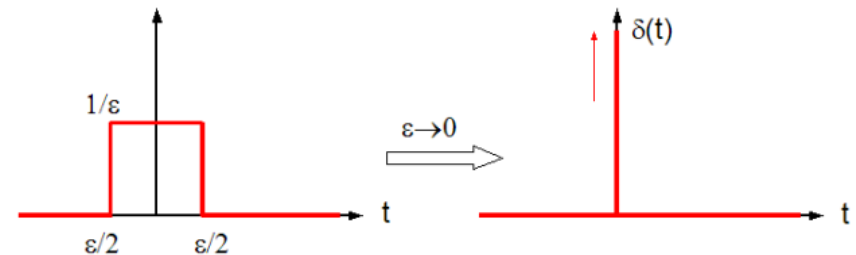
- 2 barres cylindriques de natures différentes découpées en deux avec un morceau de plastique placé au milieu sont chauffées par l'une des extrémités.
- Des capteurs de températures sont placés à des intervalles réguliers de 10cm
- Longueur de la barre : 64cm
- Longueur du cylindre plastique : 3cm

Matériau	Diffusivité Thermique En m²/s
Fer	2.3×10^{-5}
Acier	1.2×10^{-5}
Plastique	0.04×10^{-5}

II. étude théorique

1) Impulsion de Dirac comme condition à l'origine

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$



- On utilise une transformée de Fourier :

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-ikx) dx$$

- On calcule la transformée de Fourier inverse en prenant en compte la condition à l'origine et sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

- On trouve :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{Dt\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

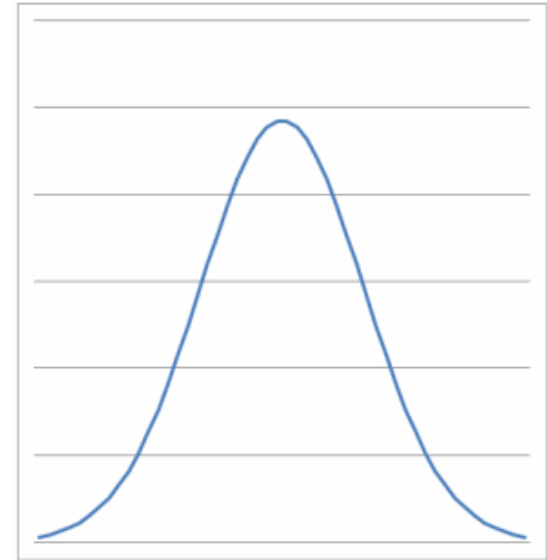
2) Gaussienne comme condition à l'origine

- On procède de même que pour l'impulsion de Dirac mais on prend :

$$u(x, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

- On trouve :

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4Dt + 2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt + 2}\right)$$



3) Condition initiale quelconque

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0$$

avec la condition initiale : $u(x, 0) = \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est la température à l'instant $t = 0$.

Solution : Pour résoudre l'équation ci-dessus, on considère la transformée de Fourier par rapport à la variable x seulement. On a

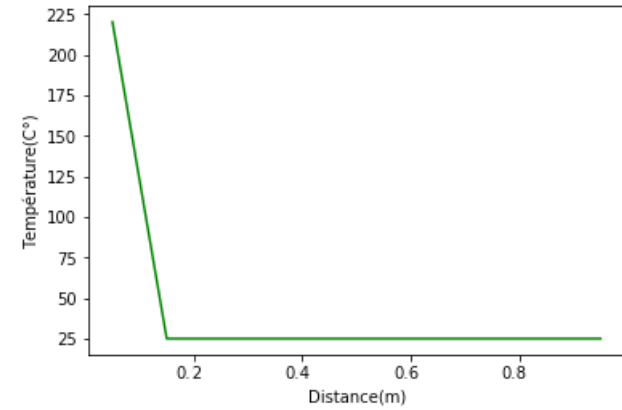
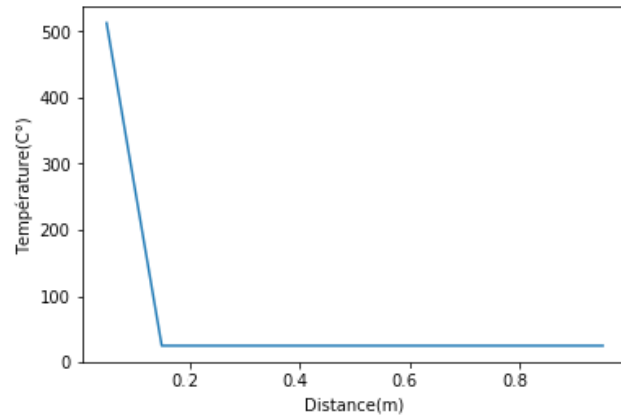
$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{16a\pi^2 t}} dy.$$

4) Résolution numérique

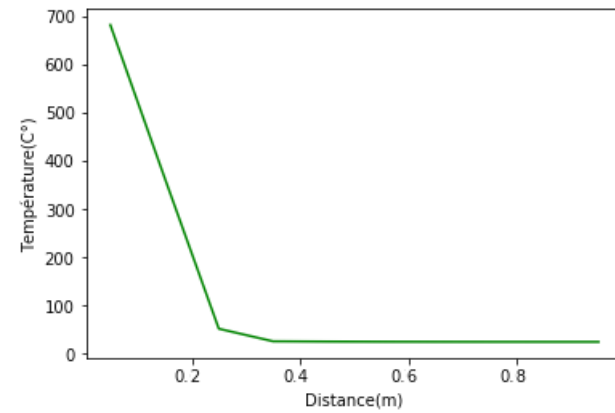
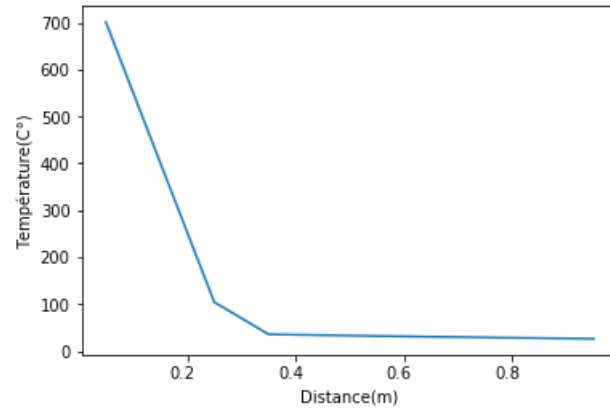
Fer

Acier

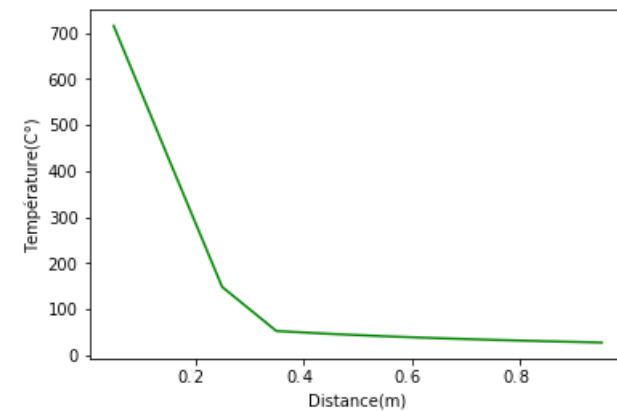
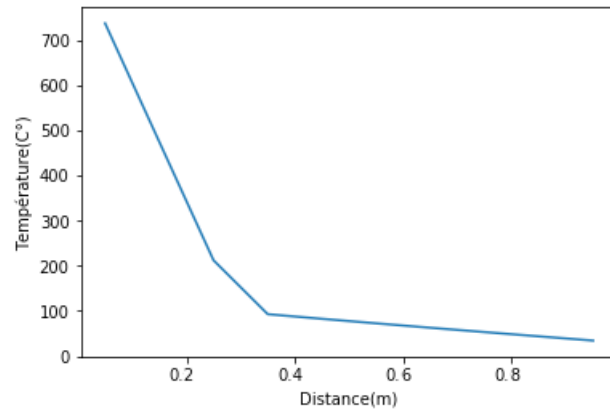
t=100s



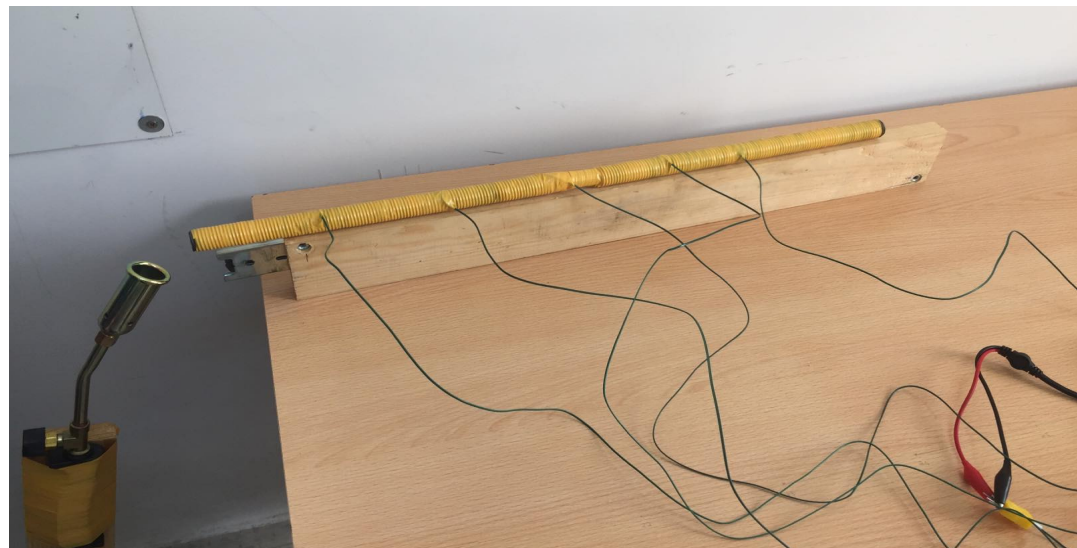
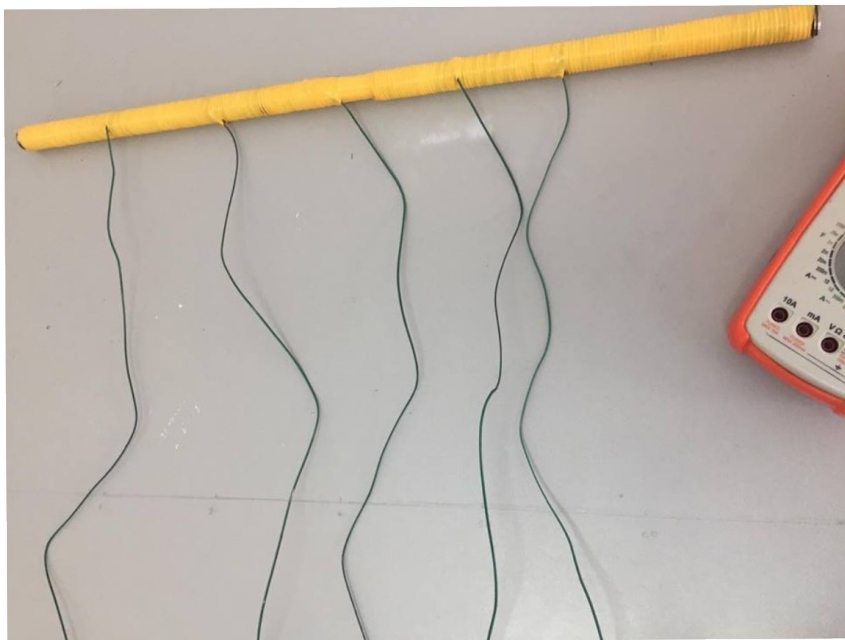
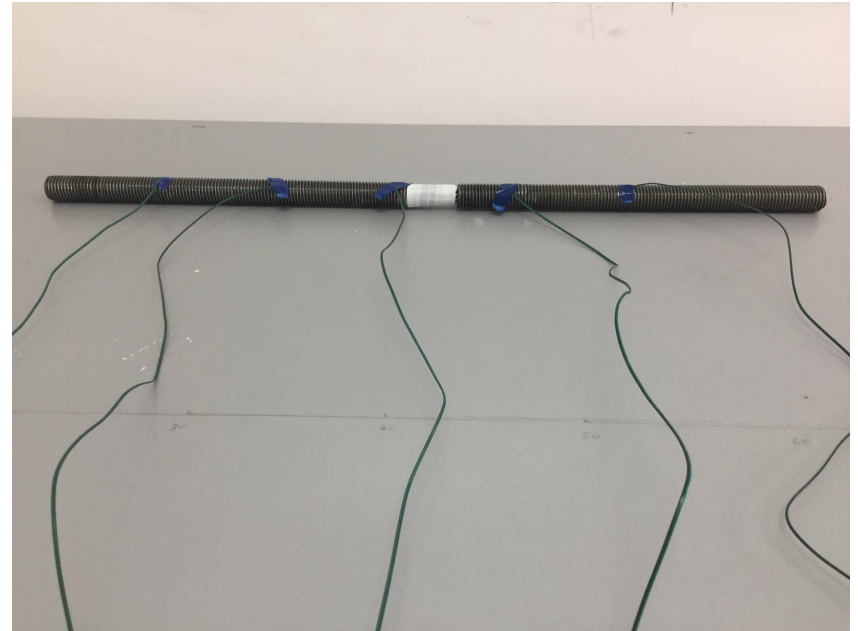
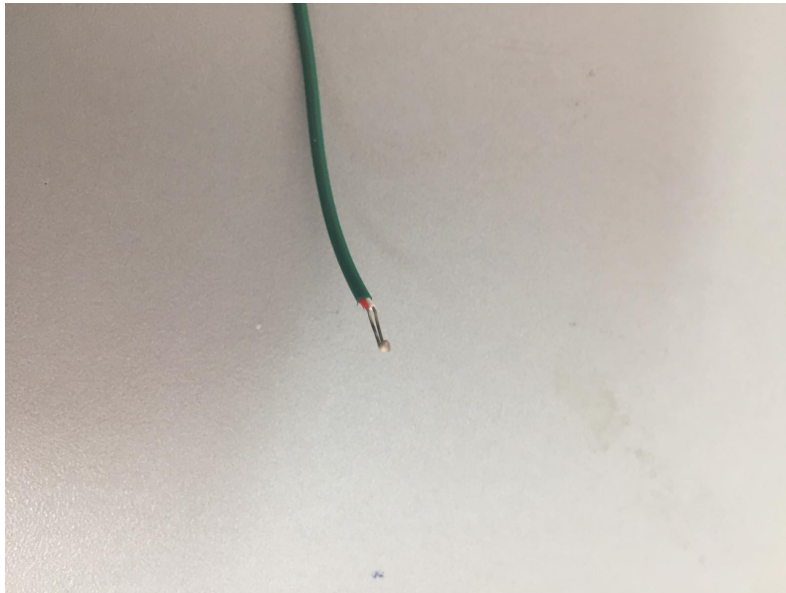
t=1800s

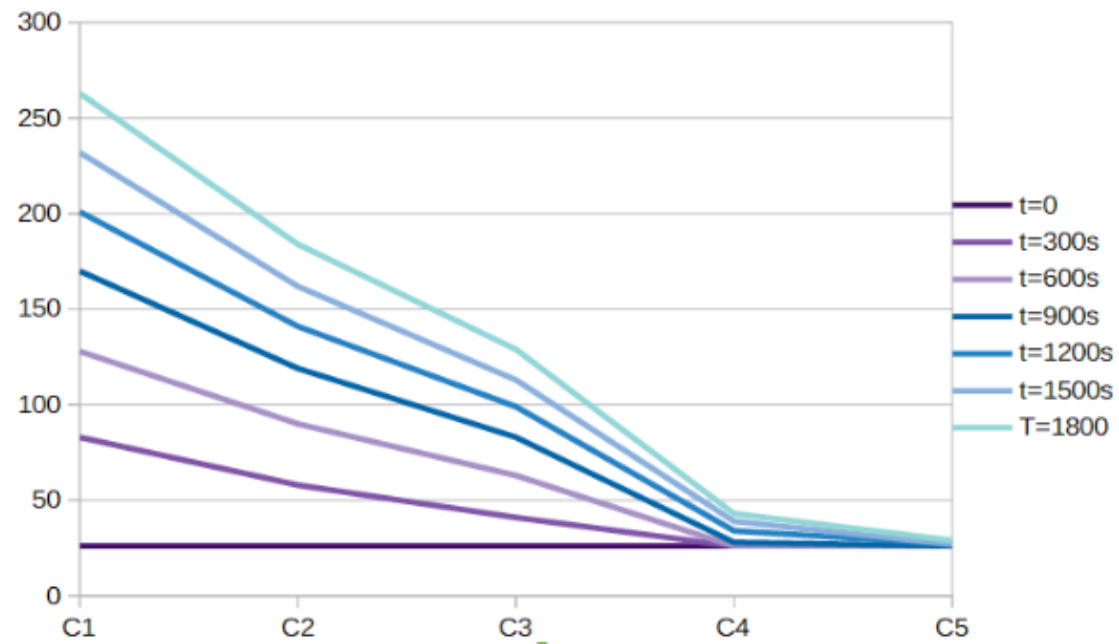


t=3600s

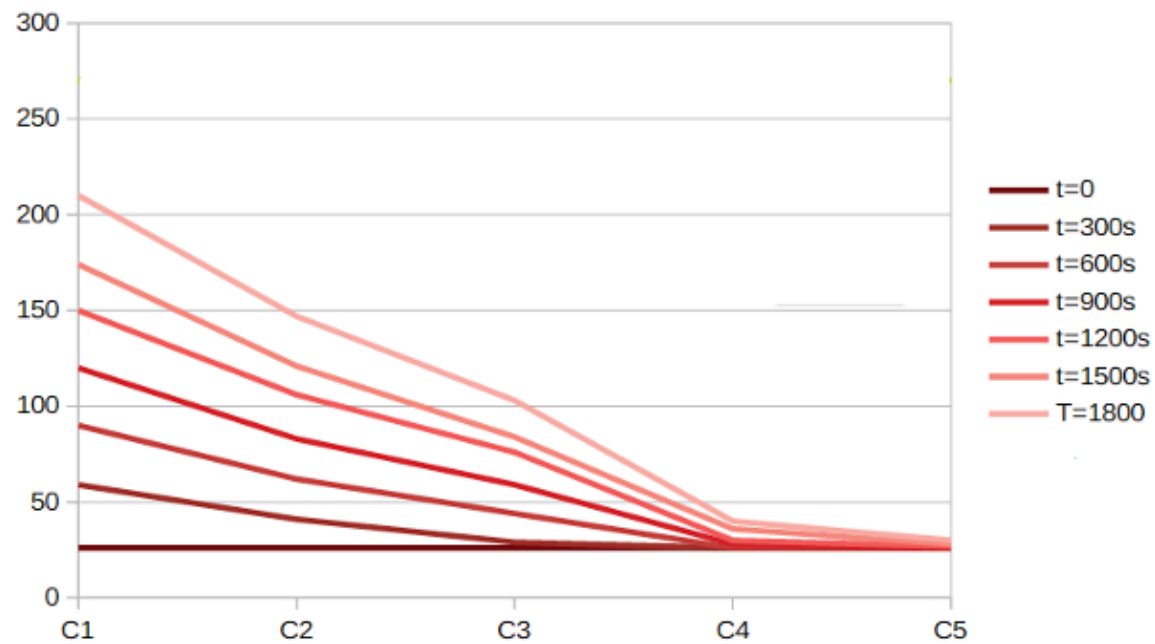


III.étude expérimentale





Fer



Acier

Interprétation des résultats

- Erreur de l'hypothèse
- Modélisation erronée
- Phénomènes non pris en compte
- Grande incertitude

IV. Simulation informatique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

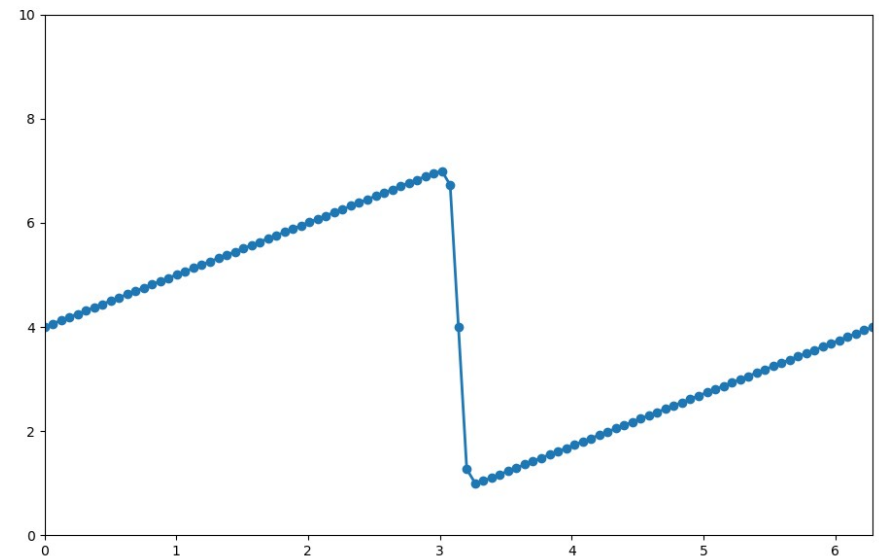
- On discrétise l'équation de burgers par la méthode d'Euler explicite :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

- Si on a une condition à l'origine, la seule inconnue est : u_i^{n+1}

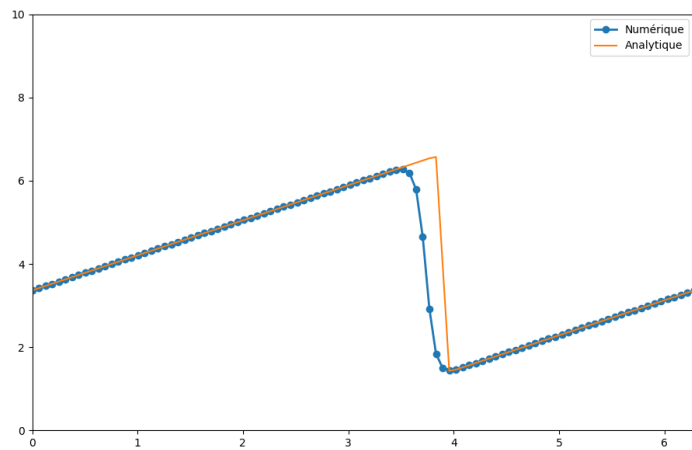
$$u_i^{n+1} = u_i^n - u_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

- Condition à l'origine , à t=0 :
Existence d'un embouteillage



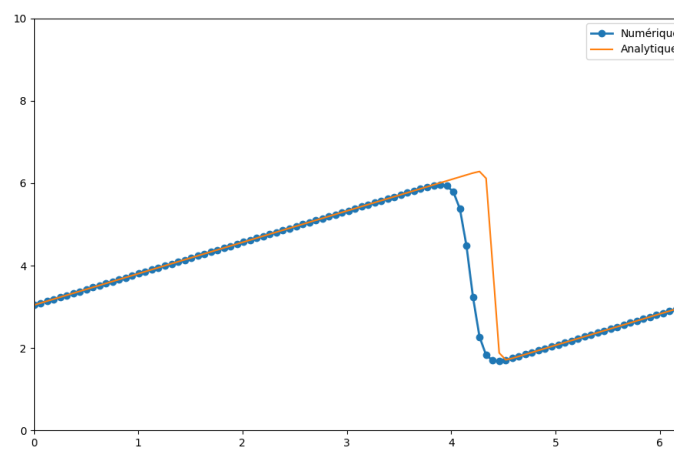
Mise en application de l'hypothèse

$\nu = 0.3$



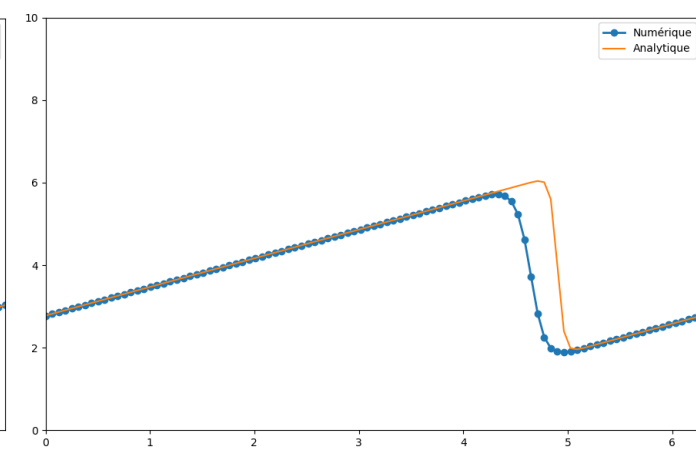
Valeur moyenne : 2.792

$\nu = 0.5$



Valeur moyenne : 2.762

$\nu = 0.7$



Valeur moyenne : 2.749

Conclusion