Les milieux financiers:

cours boursiers, entre instabilité et prévisions

Milieux : interactions, interfaces, homogénéité, ruptures

Objectifs

- Prévoir les variations des prix dans les marchés
- Etudier la fiabilité des modèles de prédiction sur des données réelles

Contributions

- Prise de contact avec une banque d’investissement
- Implémentation d'un programme de résolution
- Vérification des résultats théoriques sur des données réelles

Plan

I- Milieux d’étude

1) Ecosystème chaotique (brown)

2) Analogie avec le milieu financier

II- Modélisation

1) Approche probabiliste

2) Vers la limite du continu et Black and Scholes

III- Résolutions et fiabilités de modèles

1) Résolutions analytique et numérique

2) Fiabilité et Cox-Ross-Rubinstein

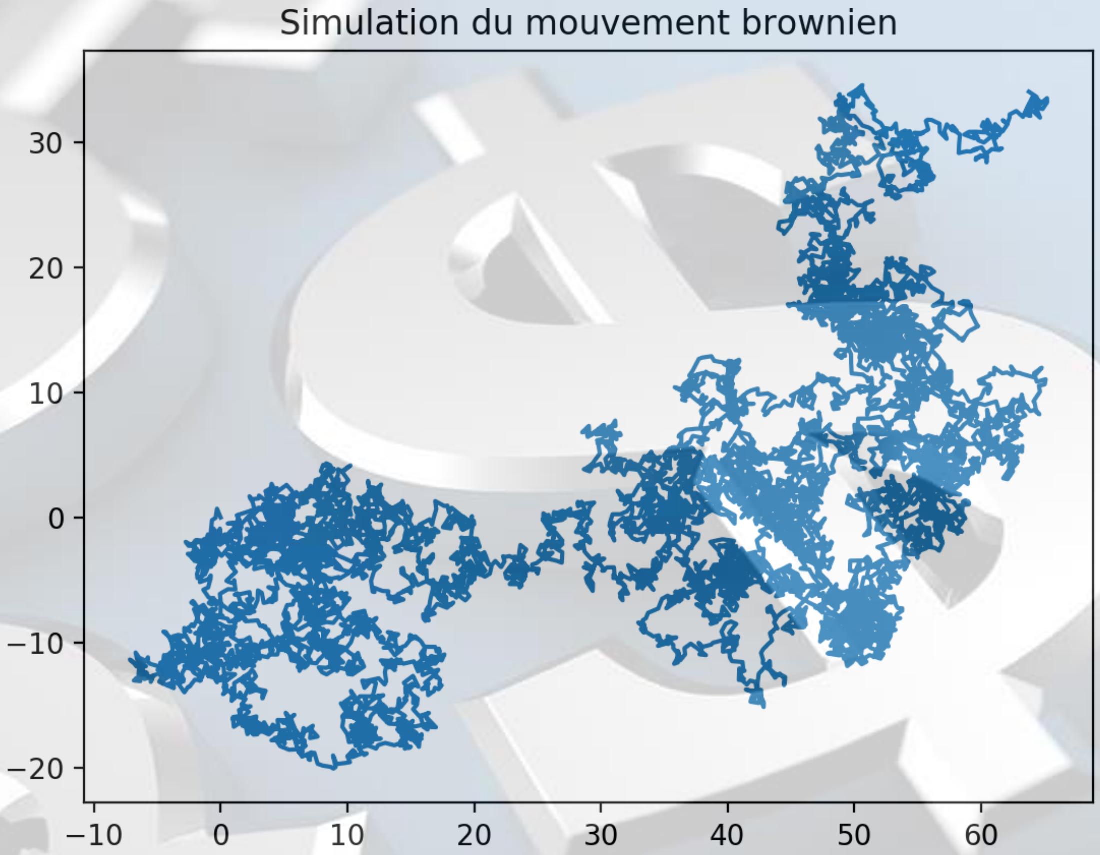
I- Milieux d’étude

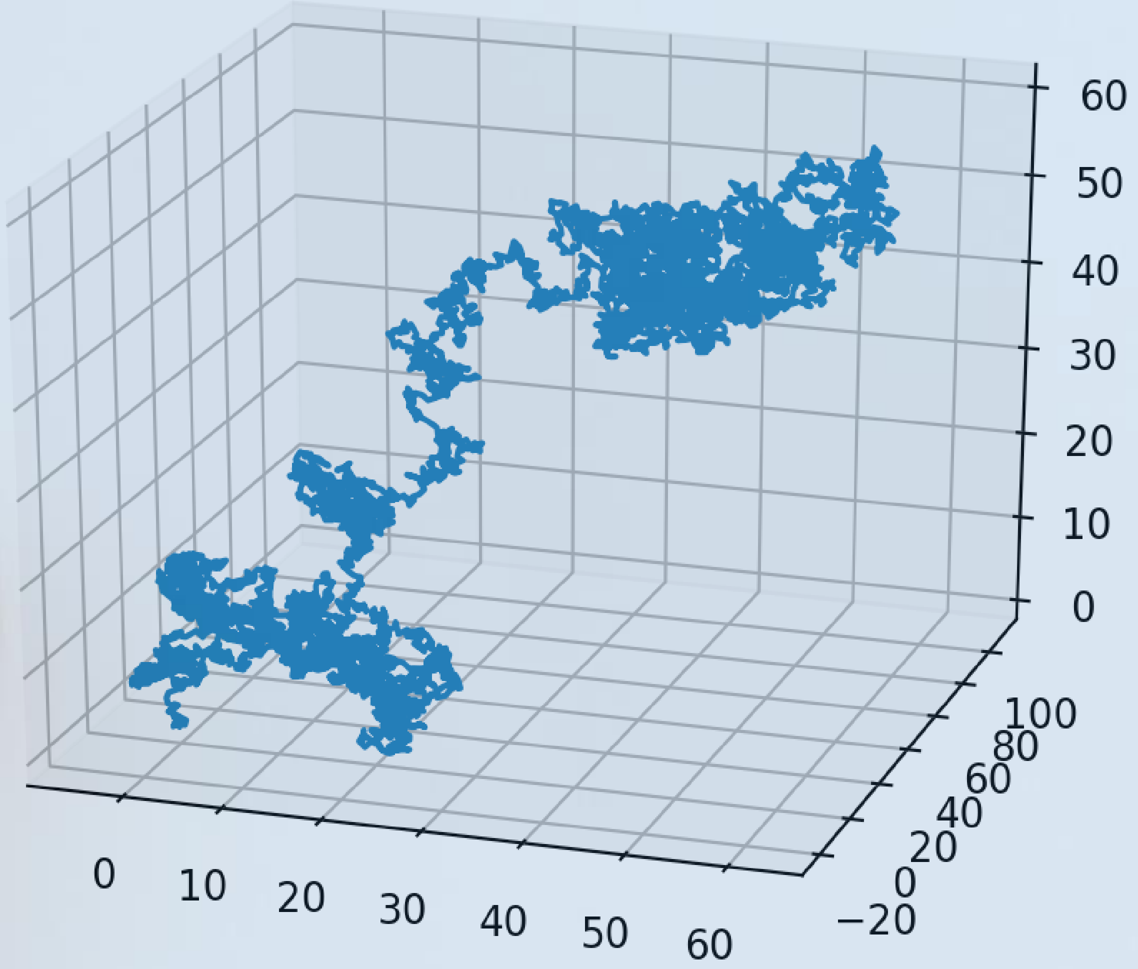
1) Ecosystème chaotique (brown)

Observations de Robert Brown

- Mouvement irrégulier
- Trajectoire sans tangentes.
- Indépendant de la nature de la particule.
- Le mouvement est d’autant plus erratique que la particule est petite, la température élevée, la viscosité faible.
- Incessant.

Un mouvement aléatoire



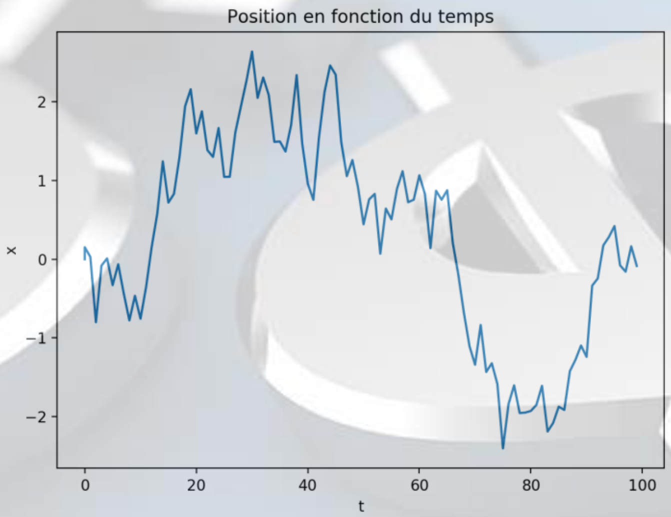


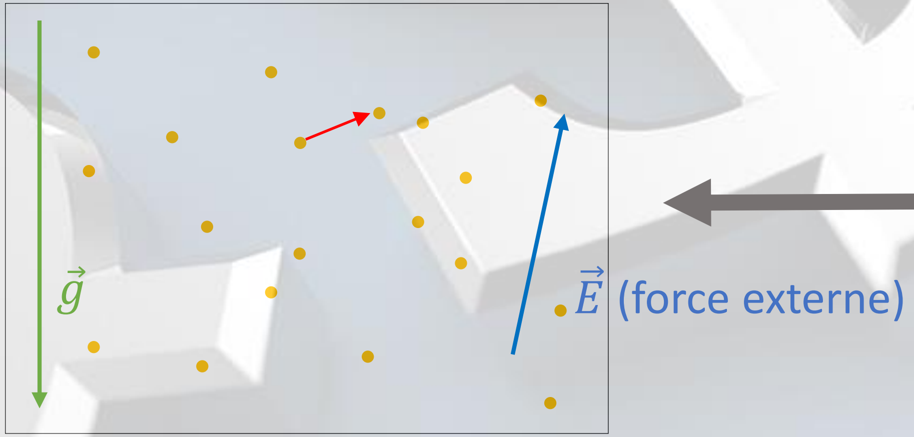
I- Milieux d’étude

2) Analogie avec le milieu financier

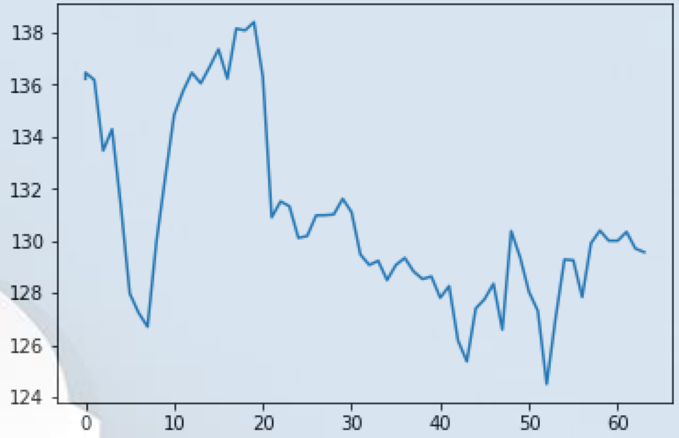
L’analogie de Bachelier

Pollen en interaction (milieu physique)

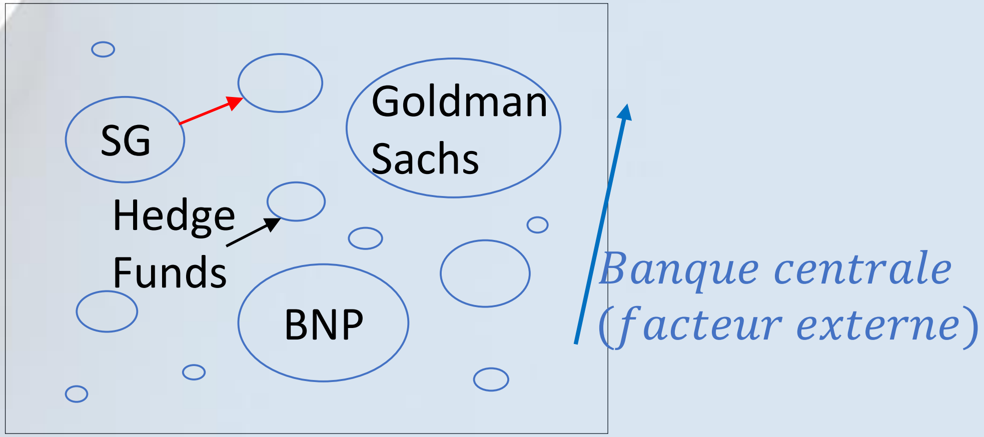




Marché financier en interaction



Prix en fonction du temps Nasdaq 2018 (période de 3 mois)



Inadéquation avec l'époque

- Siècle de la mécanique Newtonienne et du déterminisme Laplacien

↓

- Mouvement brownien non perçu dans le cadre de la physique

↓

- Approche probabiliste

Approche probabiliste

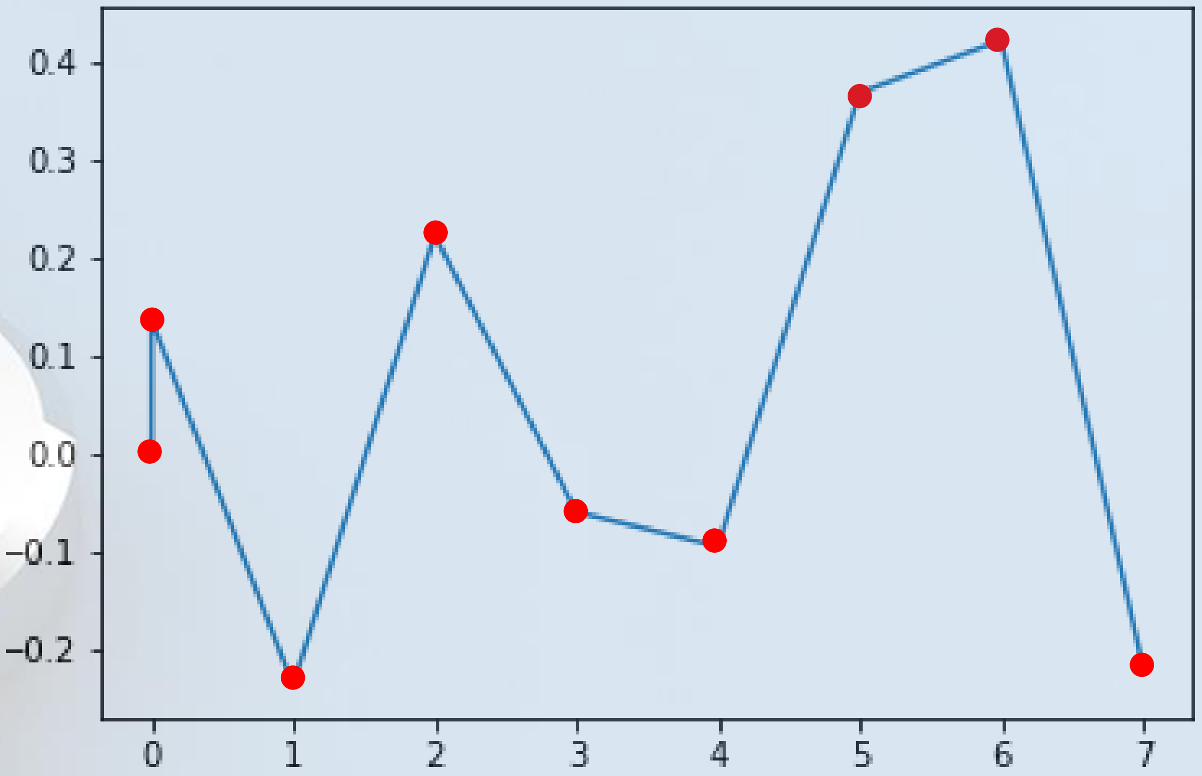
- Innovations de Bachelier
  - Introduction de la diffusion
  - Utilisation des probabilités (5 ans avant Einstein)
- Einstein utilise la densité de probabilité
- Il modélise la marche aléatoire

II- Modélisation

1) Approche probabiliste

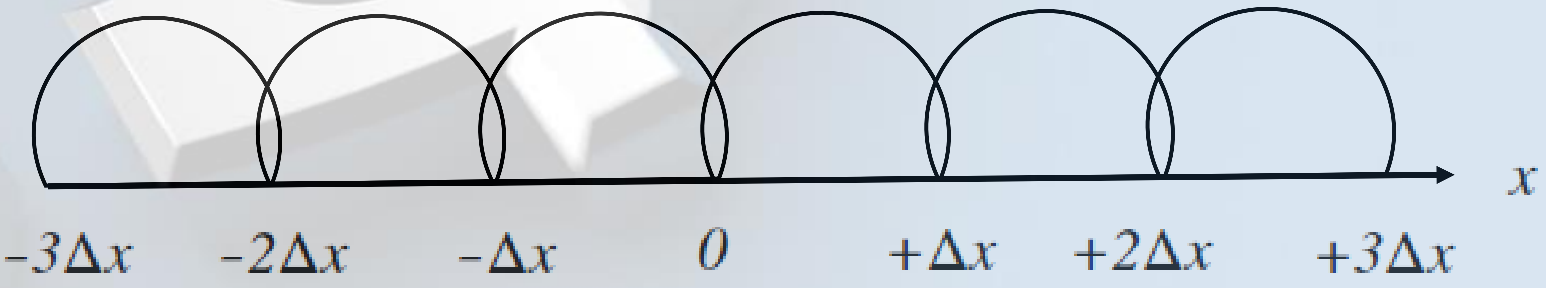
La marche aléatoire

- Temps de collision moyen $t_c \approx 2.10^{-10}$ s
- temps de mesure de l'appareil $\tau \approx 1.10^{-2}$ (par rapport a t_c)
- Discrétisation du temps



En une dimension…

- Deplacements de $\pm\Delta x$
- Intervalles de temps de $t=n\tau$
- $\mathbb{P}(\text{'la particule se déplace de } +\Delta x\text{'})=p$
- $\mathbb{P}(\text{'la particule se déplace de } -\Delta x\text{'})=q$
- Avec $p\neq q$ et $p+q=1$
- $\mathbb{P}(k\Delta x,n\tau)=\text{'probabilité que la particule se trouve en } k\Delta x \text{ après } n \text{ déplacements'}$ (k $\in \mathbb{Z}$)



Une affaire de probabilités

- $\mathbb{P}(k\Delta x, n\tau) = p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} \dfrac{n!}{\frac{n+k}{2}!\,\frac{n-k}{2}!}$

- $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(k\Delta x, n\tau).k\Delta x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{\mathbb{P}(k\Delta x, n\tau)}{\Delta}\Delta.k\Delta x$

II- Modélisation

2) Vers la limite du continu et Black and Scholes

Vers la limite du continu…

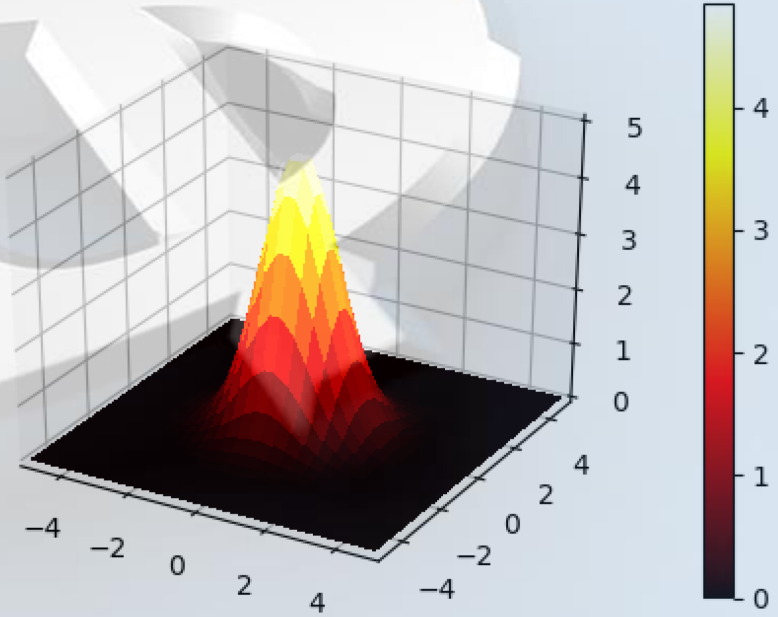
$\Delta \longrightarrow 0 \qquad \tau \longrightarrow 0$

- $\sum_{k \in \mathbb{Z}}$ $\longrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}}$
- Δx $\longrightarrow$ dx
- $k\Delta x$ $\longrightarrow$ x
- $\dfrac{\mathbb{P}(k\Delta x, n\tau)}{\Delta}$ $\longrightarrow$ $\mathbb{P}(x, t)$ densité de probabilité
- $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{P}(k\Delta x, n\tau)}{\Delta} \Delta . k\Delta x$ $\longrightarrow$ $\int x.\mathbb{P}(x, t)\, dx$

Vers une équation de diffusion

- $\mathbb{P}(x, \mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ vérifie:

- $\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}(x, \mathrm{t}) = D\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbb{P}(x, \mathrm{t})$ $\xrightarrow{\text{EN 3 DIMENSIONS...}}$ $\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}(x, \mathrm{t}) = D.\Delta\mathbb{P}(x, \mathrm{t})$



Equivalence avec Black and Scholes

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)+\frac{F(x)}{m\gamma}\frac{\partial}{\partial x}P(x,t)-D\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,t)+\frac{1}{m\gamma}(\frac{\partial}{\partial x}F(x)).P(x,t)=0$$

Equation de diffusion avec coefficients non constants

En posant…

$$x=S \qquad \frac{F(S)}{m\gamma}=rS \Leftrightarrow F(S)=m\gamma rS \qquad D=\frac{S^2\sigma^2}{2} \qquad \frac{1}{m\gamma}(\frac{\partial}{\partial S}F(S))=r$$

On obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t}C(S,t)+rS\frac{\partial}{\partial S}C(S,t)+\frac{S^2}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}C(S,t)-rC(S,t)=0$$

Black and Scholes

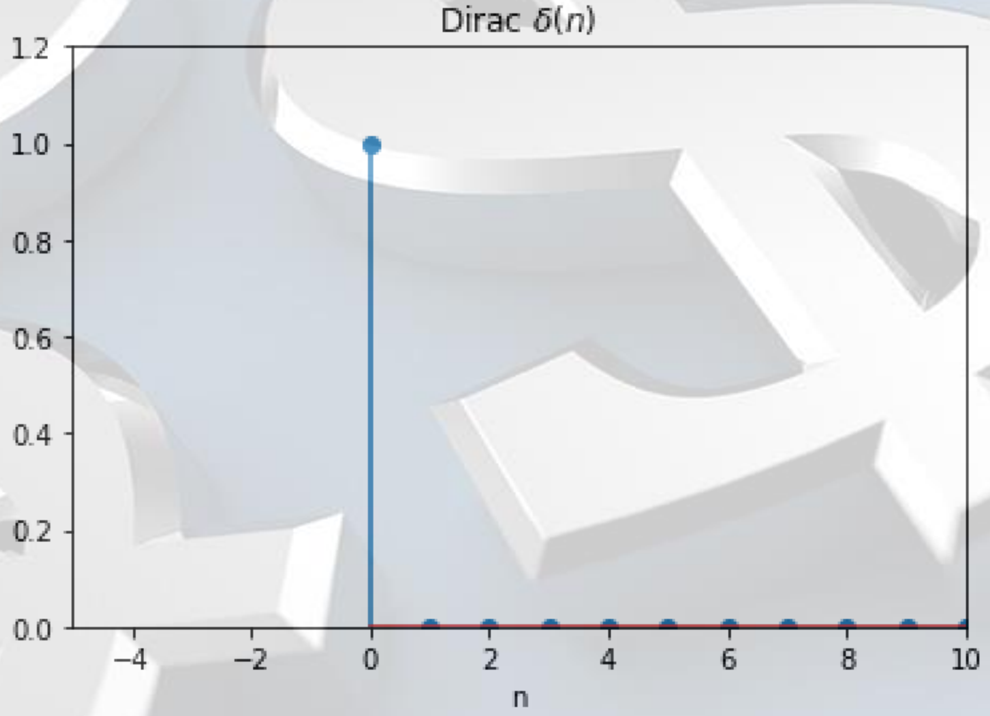
III- Résolutions et fiabilités de modèles

1) Résolutions analytique et numérique

Résolution analytique

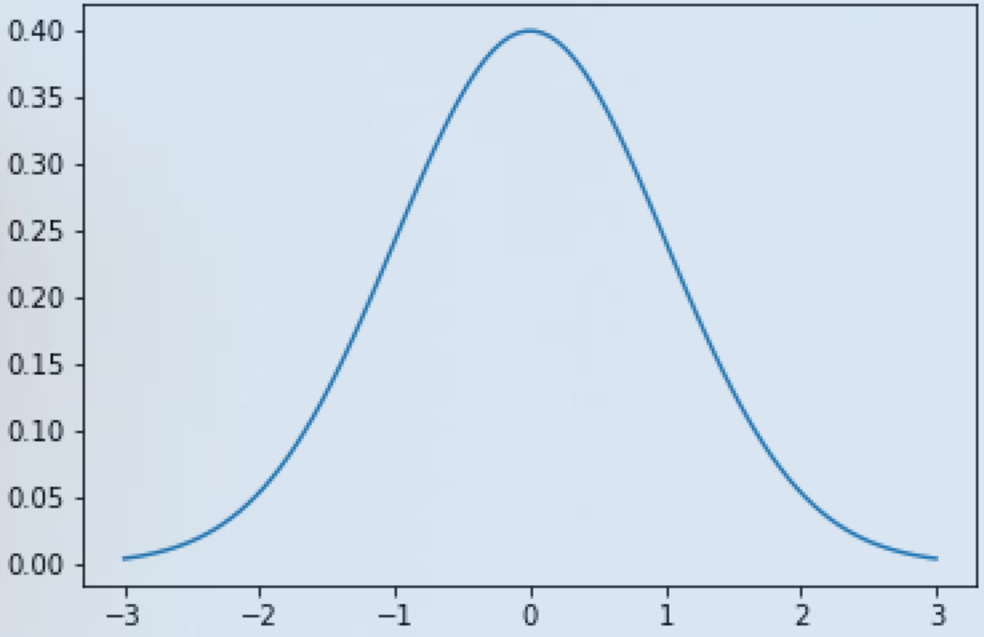
Pic de Dirac

- $\mathbb{P}(x, \mathrm{t})=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$

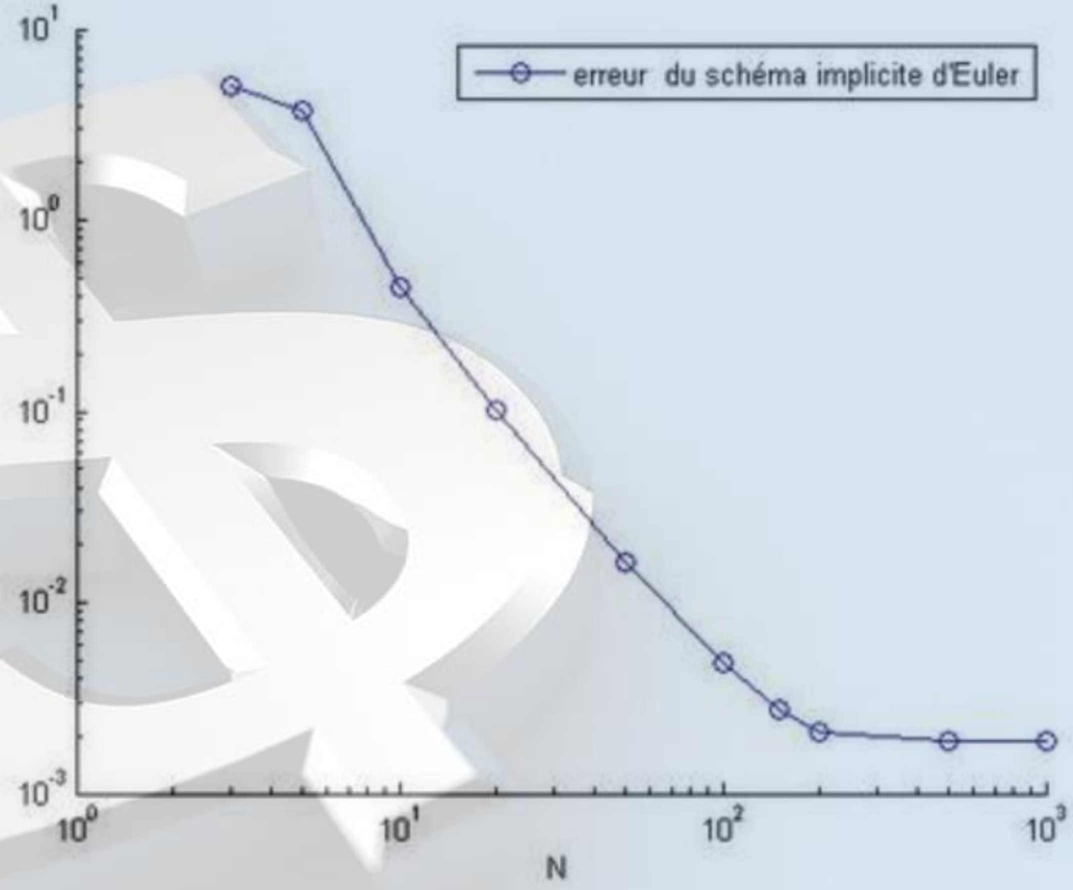


Gaussienne

- $\mathbb{P}(x, \mathrm{t})=\frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{4\pi Dt+2\sigma}}e^{-\frac{x^2}{4Dt+2\sigma}}$



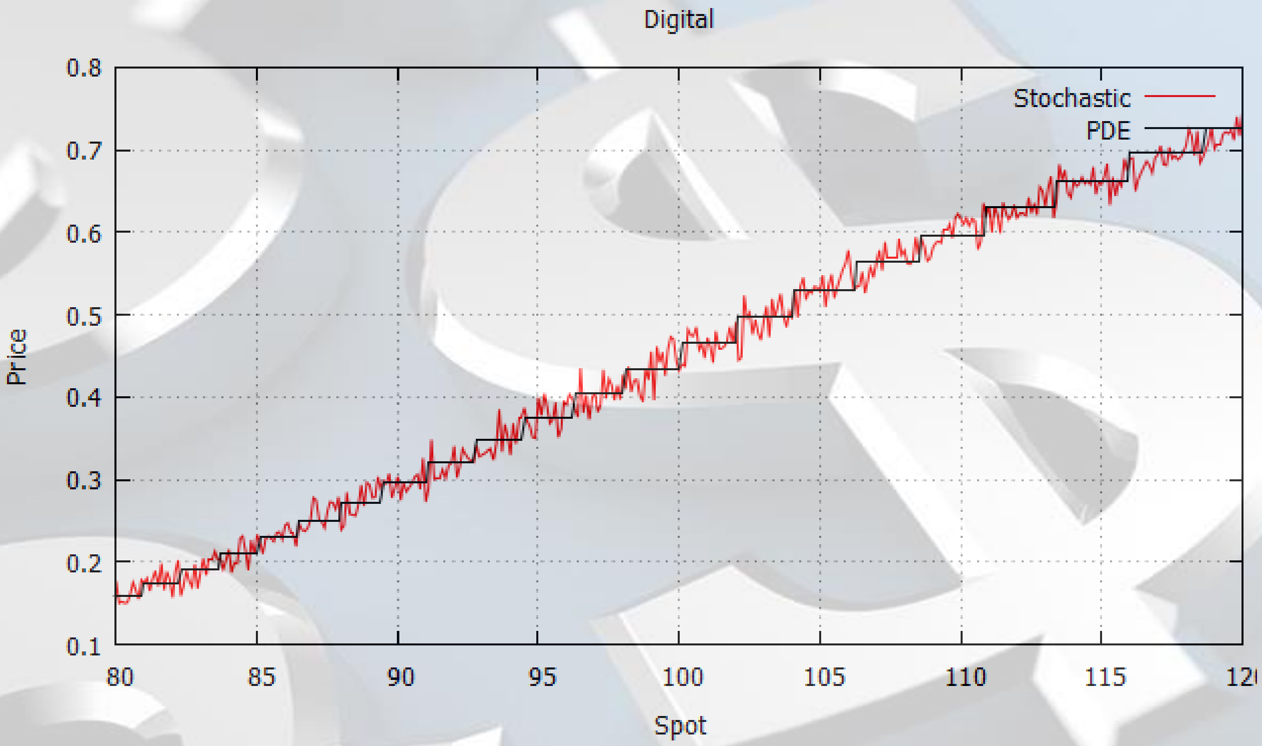
Résolution numérique



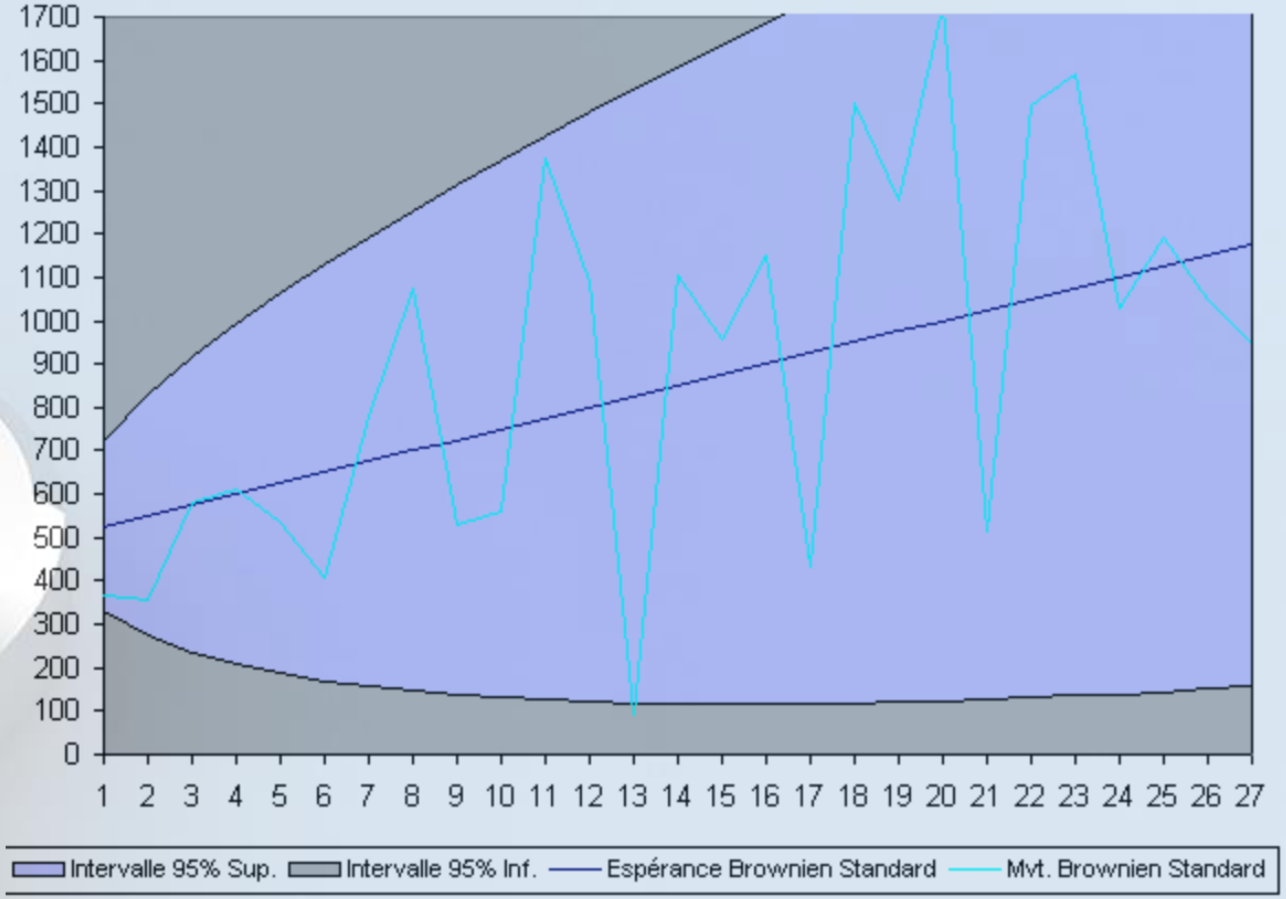
III- Résolutions et fiabilités de modèles

2) Fiabilité et Cox-Ross-Rubinstein

Fiabilité



Digital
Stochastic
PDE
Price
Spot
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
80
85
90
95
100
105
110
115



1700
1600
1500
1400
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
Intervalle 95% Sup.
Intervalle 95% Inf.
Espérance Brownien Standard
Mvt. Brownien Standard

Cox-Ross-Rubenstein