

Modélisation du transport éolien du sable

Problématique :

**La formation et la migration des dunes constituent un enjeu vital pour certaines régions frappées par la désertification et l'ensablement.
Peut-on alors avoir une bonne connaissance sur la dynamique éolienne ?**

Numéro d'inscription :
48197

Thème : Transport



Méthodologie et Objectifs

+ Tendre vers un modèle plus fidèle à la réalité en augmentant la précision

The diagram illustrates a progression from a basic model to more complex ones. It features a background of wavy, textured lines. Three black arrows point upwards and to the right, creating a staircase-like effect. The first arrow originates from the bottom left and points to a dark rectangular box containing the text 'Modèle 1: Equation différentielle issue du principe fondamental de la dynamique'. The second arrow originates from the middle of the first and points to another dark rectangular box containing 'Modèle 2 : Equation différentielle aux dérivées partielles issue du modèle d'Anderson'. The third arrow originates from the middle of the second and points to a dark rectangular box containing 'Modèle 3 : *Equation de Navier-Stockes tridimensionnelle incompressible *Equation de Navier Stockes moyennée dans le temps'.

Modèle 1: Equation différentielle issue du principe fondamental de la dynamique

Modèle 2 : Equation différentielle aux dérivées partielles issue du modèle d'Anderson

Modèle 3 :
*Equation de Navier-Stockes tridimensionnelle incompressible
*Equation de Navier Stockes moyennée dans le temps

Plan :

-1- Introduction au phénomène : Notions fondamentales à propos du mécanisme de transport ainsi qu'une illustration expérimentale.

-2- Etude :

*** Idée sur l'initiation du mouvement.**

*** Modélisation du processus : présentation des différents modèles avec un accent sur les problèmes rencontrés.**

-3- Conclusion et critique

Notions nécessaires pour commencer :

Question : comment des grains plus lourds que l'air peuvent se déplacer avec des hauteurs considérables ?



Réponse : Forces aérodynamiques

la force de trainée

$$\vec{F}_D = C_D \rho_a d^2 ||\vec{V}_r|| \vec{V}_r$$

la force de portance

$$\vec{F}_L = C_L \rho_a d^2 V_r^2 \vec{n}$$

la force de Magnus

Force de portance supplémentaire suite à la rotation propre du grain

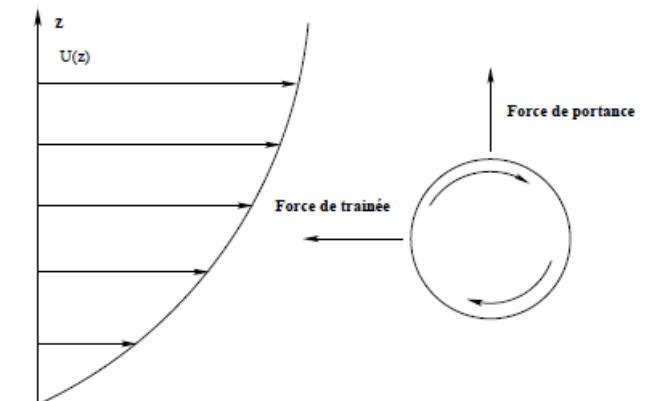
\vec{V}_r la vitesse relative du grain par rapport à la vitesse de l'air
 ρ_a densité de l'air.

d le diamètre du grain

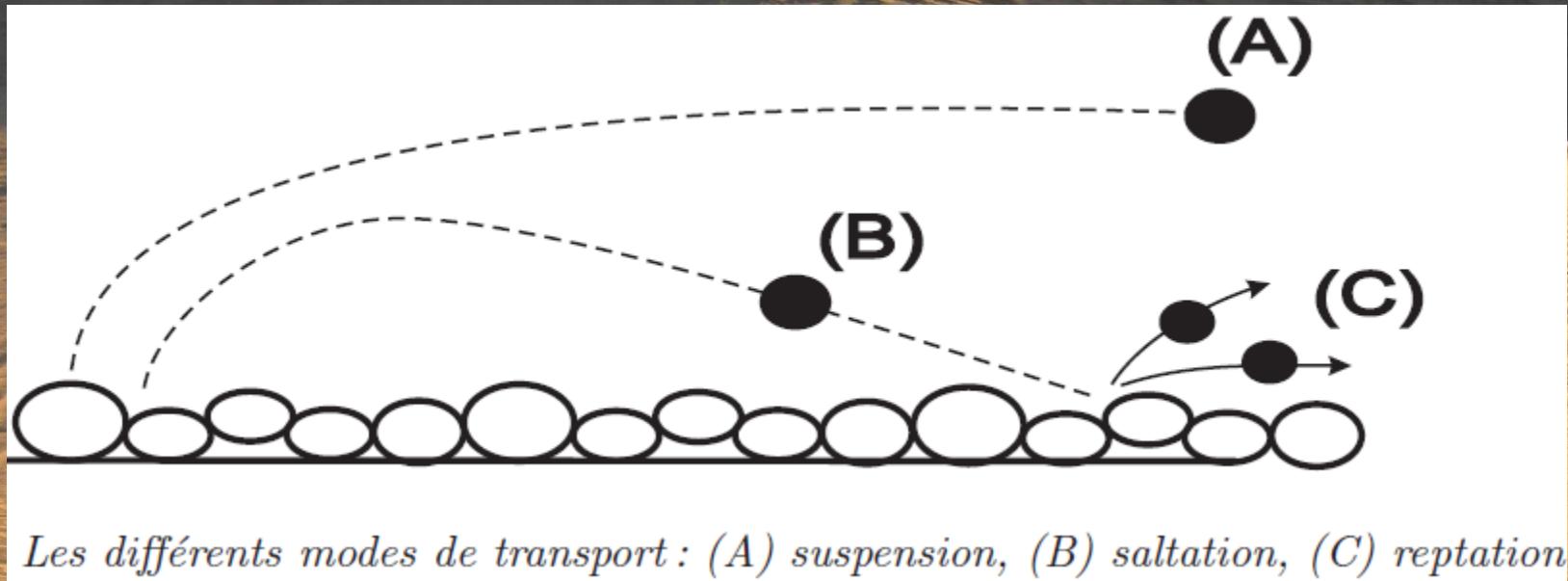
C_D le coefficient de traînée

\vec{n} le vecteur unité perpendiculaire à \vec{V}_r

C_L le coefficient de portance



Les différentes forces aérodynamiques appliquées au grain



A propos de saltation

Particule de masse assez grande

Particule de taille entre 100 et 1000 micromètres

Particule qui possède une énergie cinétique très grande

Saltation

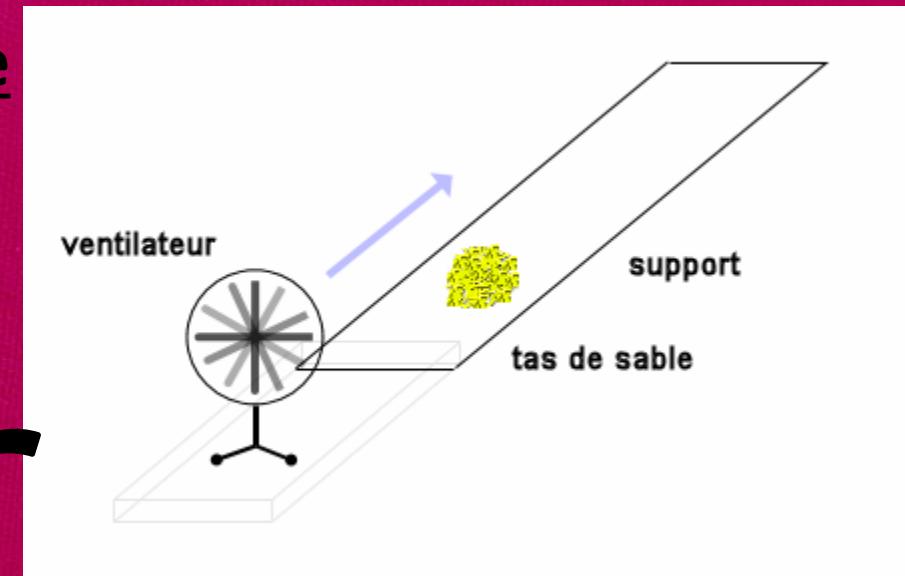
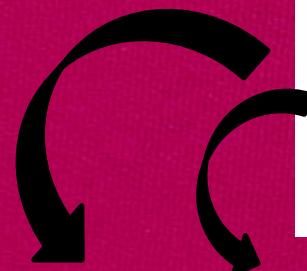
Saltons

Transport des grains qui finissent par retomber

Lors de l'impact, le salton éjecte d'autres grains

Illustration expérimentale :

Transport éolien en soufflerie



Initiation du mouvement

Les forces vues précédemment : des forces exercées sur un grain déjà dans l'air

→ Mais →

L'air exerce une aspiration sur les grains de sable

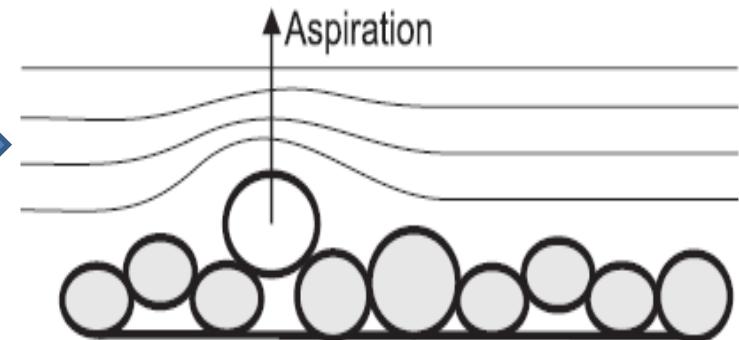
→ Le vent est accéléré au dessus de toute aspérité de sol

→

Cette accélération s'accompagne d'une chute de pression (d'après l'équation de Bernouilli) qui aspire le grain vers les haut

→ Cette force peut se mettre sous la forme suivante

$$F \sim F_l \sim \rho_{air} d^2 u_*^2$$



Modélisation du mouvement d'un grain en saltation



Modèle 1: Equation différentielle issue du principe fondamentale de la dynamique



Bilan de forces exercées sur un grain en saltation :

1* Forces aérodynamiques :

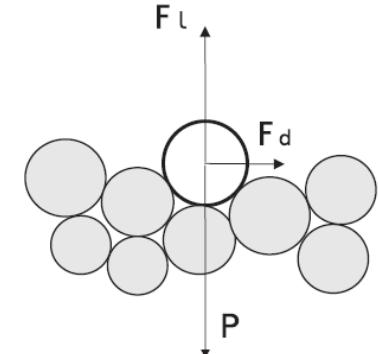
*Force de traînée

*Force de portance

2* Force du poids

Application du principe fondamental de la dynamique

Projection sur l'horizontale et la verticale



EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\rho_g d^3 \frac{dV_p}{dt} = -C_D \rho_a d^2 V_r (V - V_p) + C_L \rho_a d^2 V_r W_p$$

$$\rho_g d^3 \frac{dW_p}{dt} = -(\rho_g - \rho_a) d^3 - C_D \rho_a d^2 V_r W_p - C_L \rho_a d^2 V_r (V - V_p)$$

V Vitesse horizontale de l'air

V_p composante horizontale de la vitesse du

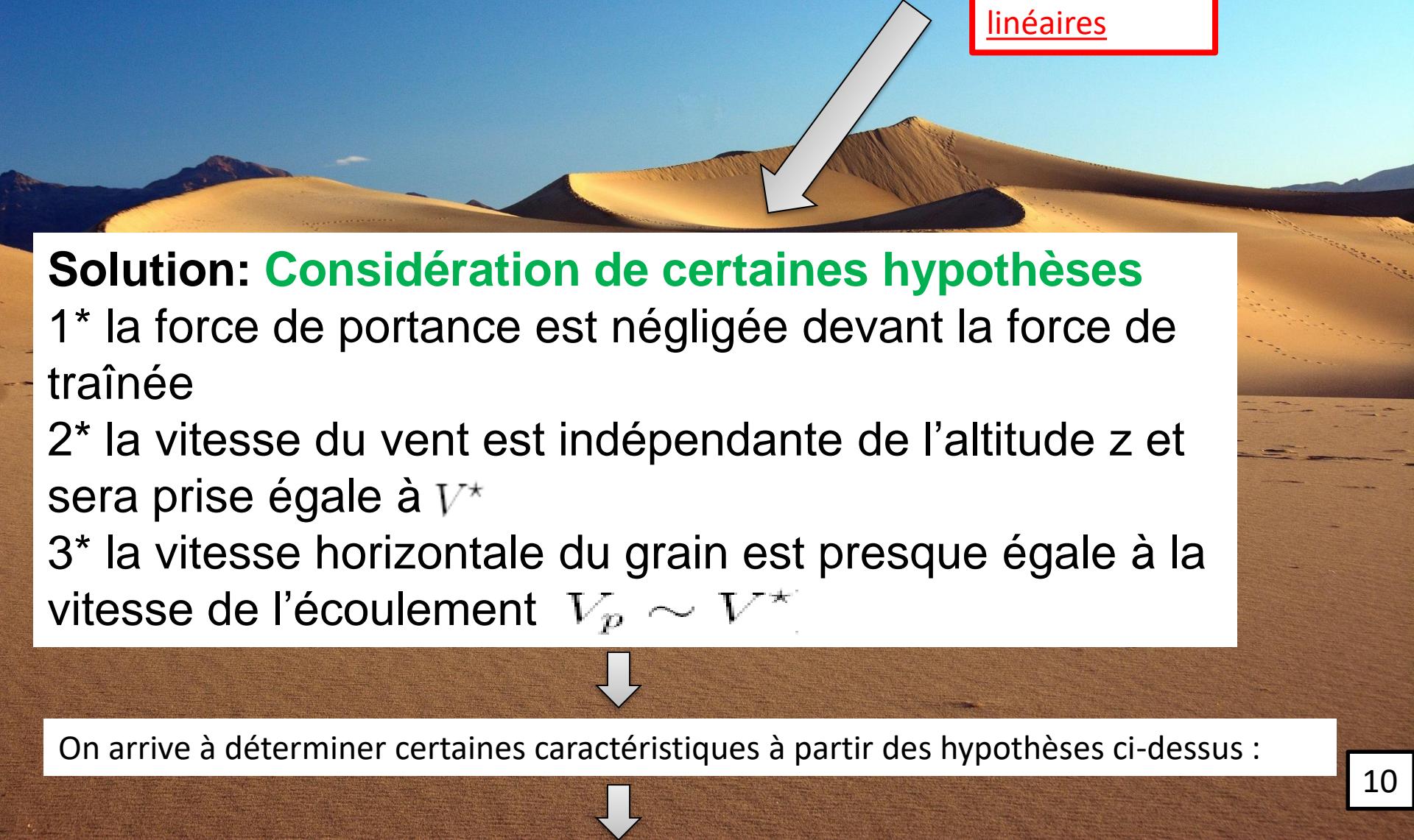
W_p Composante verticale de la vitesse du grain

$V_r = \sqrt{(V - V_p)^2 + (W_p)^2}$ La norme de la vitesse relative du grain par rapport au vent

$$\rho_g d^3 \frac{dV_p}{dt} = -C_D \rho_a d^2 V_r (V - V_p) + C_L \rho_a d^2 V_r W_p$$

$$\rho_g d^3 \frac{dW_p}{dt} = -(\rho_g - \rho_a) d^3 - C_D \rho_a d^2 V_r W_p - C_L \rho_a d^2 V_r (V - V_p)$$

Problème !
Deux équations couplées non linéaires



Solution: Considération de certaines hypothèses

- 1* la force de portance est négligée devant la force de traînée
- 2* la vitesse du vent est indépendante de l'altitude z et sera prise égale à V^*
- 3* la vitesse horizontale du grain est presque égale à la vitesse de l'écoulement $V_p \sim V^*$



On arrive à déterminer certaines caractéristiques à partir des hypothèses ci-dessus :



La hauteur :

$$h_s = \frac{W_\infty^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{W_0^2}{W_\infty^2}\right)$$

Le temps de vol :

$$t_v = \frac{W_\infty}{g} \left[\arctan\left(\frac{W_0}{W_\infty}\right) + \ln\left(\sqrt{1 + \frac{W_0^2}{W_\infty^2}} + \frac{W_0}{W_\infty}\right) \right]$$

L'angle d'incidence de la trajectoire :

$$\tan \alpha = \frac{W_\infty}{V^* \sqrt{1 + W_\infty^2/W_0^2}}$$

Avec : W_0 Vitesse de décollage

W_∞ Vitesse terminale de chute

$$W_\infty = \sqrt{(\rho_g - \rho_a)gd/C_D\rho_a}$$

La portée :

$$l_s = V^* t_v$$

Si la vitesse décollage est supérieure à la vitesse terminale

Quelques valeurs :

* Pour un diamètre égal à $200 \mu m$, $W_\infty = 1 m/s$

* Si $V^* = 5 m/s$, $d \approx 200 \mu m$, $W_0 = 2,5 m/s$

$$h_s = \frac{W_0^2}{2g} \frac{\ln(W_0^2/W_\infty^2)}{W_0^2/W_\infty^2}$$

$$l_s = \frac{2V^*W_0}{g} \frac{\ln(2W_0/W_\infty)}{2W_0/W_\infty}$$

$$\tan \alpha = \frac{W_\infty}{V^*}$$

$$h_s \approx 10 cm, l \approx 80 cm \text{ et } \alpha \approx 12^\circ$$

Utilisation des résultats précédents :

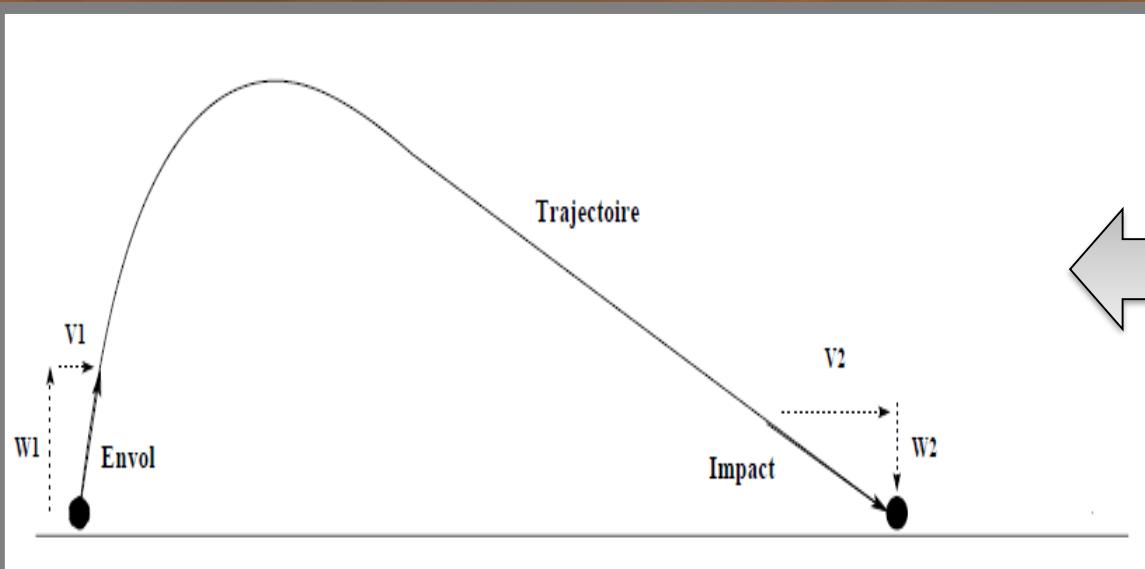
Soit un grain en saltation qui décolle avec une vitesse verticale W_1 .

Et prenons **une hauteur moyenne** et une portée moyenne, on obtient pendant **un temps de vol** la trajectoire :

$$h_s = \frac{W_1^2}{2g}$$

$$t_v = \frac{2W_1}{g}$$

Trajectoire moyenne d'un grain en saltation



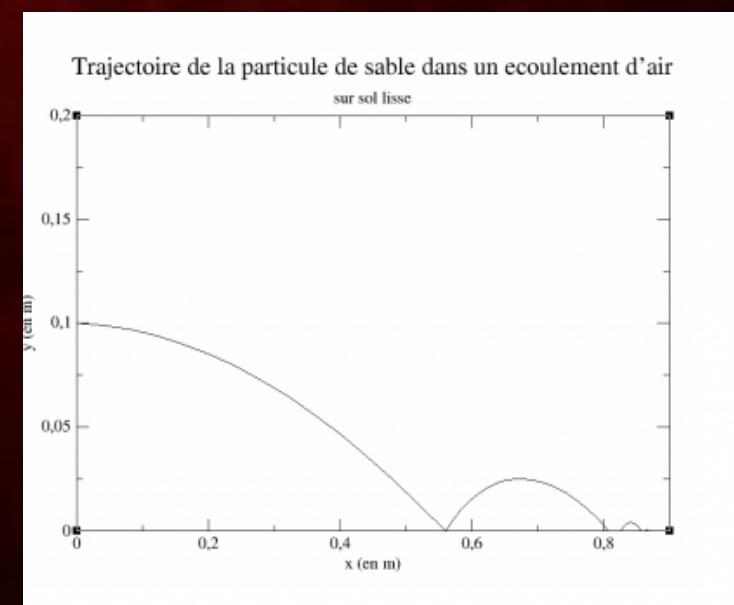
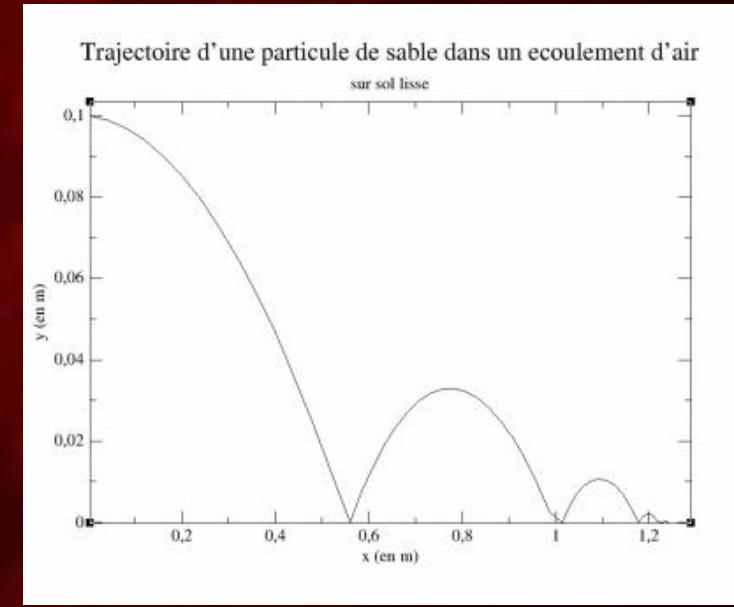
Sur la verticale, le mouvement est dominé par la gravité
=> **Approximation de la chute libre**

Simulation numérique

- rayon de la particule : $200\mu\text{m}$
- masse volumique du sable : 2676 kg.m^{-3}
- coordonnées initiales : $(x_0;y_0)=(0;0.1)$
- vitesses initiales de la particule et de l'écoulement : $(u_0;v_0)=(U_0;V_0)=(4;0)$

La particule est en effet plus influencée par la vitesse horizontale de l'écoulement dans sa phase descendante que dans sa phase de montée.

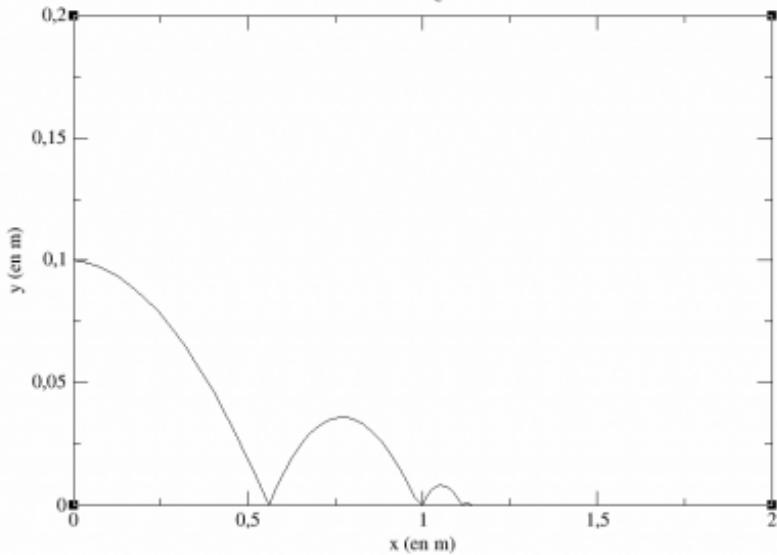
Modifions les coefficients de restitution des vitesses horizontales et verticales.



Dans la réalité, le sol est couvert de sable d'où une rugosité non négligeable



Trajectoire de la particule de sable dans un écoulement d'air
sur sol rugueux



Modèle 2 : Equation différentielle aux dérivées partielles issue du modèle d'Anderson



Hypothèses fondamentales :

1* Le vent n'a pas d'action directe sur les grains. Il intervient via l'énergie des grains dans l'air

2* Lors de l'impact, un certain nombre de grains sont éjectés du lit

Considérons des grains homogène en saltation avec une angle d'incidence fixe

Application de la loi de conservation de masse

La hauteur de sable $h(x)$ qui s'accumule en un point x évolue dans le temps

Son évolution est donnée par

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_{lit}} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Avec

$Q(x)$ est le flux massique horizontal des grains en mouvement à l'abscisse x .

$$Q(x) = Q_S + Q_R$$

Q_S est le flux de grains en saltation

Q_R le flux de grains en reptation

Résolution analytique :

Etape 1 : Description de l'évolution du lit

$$Q_{rep}(x) = m_p \int_{x-l_R}^x N_{ej}(x') dx'$$

→

Masse des grains

On injecte cette expression dans l'équation différentielle, on obtient la loi d'évolution suivant :

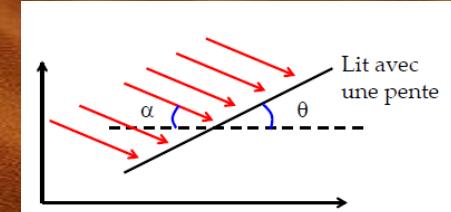
$$\frac{\partial h}{\partial t} = -d^3[N_{ej}(x) - N_{ej}(x - l_R)]$$

Avec $N_{ej}(x)$ le nombre de grains éjectés en x par unité de temps et de surface
 l_R la portée du saut effectuée par un grain éjecté

On relie le nombre de grains éjectés au flux incident des grains en saltation

$$N_{ej}(x) = n_0 N_{imp}(x)$$

$$N_{imp}(\theta) = N_0 \cos \theta \left(1 + \frac{\tan \theta}{\tan \alpha}\right)$$



n_0 Nombre de grains éjectés

α mesure l'angle d'impact des grains en saltation par rapport à l'horizontale.

$N_{imp}(x)$ Nombre de grains en saltation

θ est l'angle de la pente locale du lit

N_0 est le nombre de grains en saltation qui arrivent sur une surface horizontale par unité

de temps et de surface

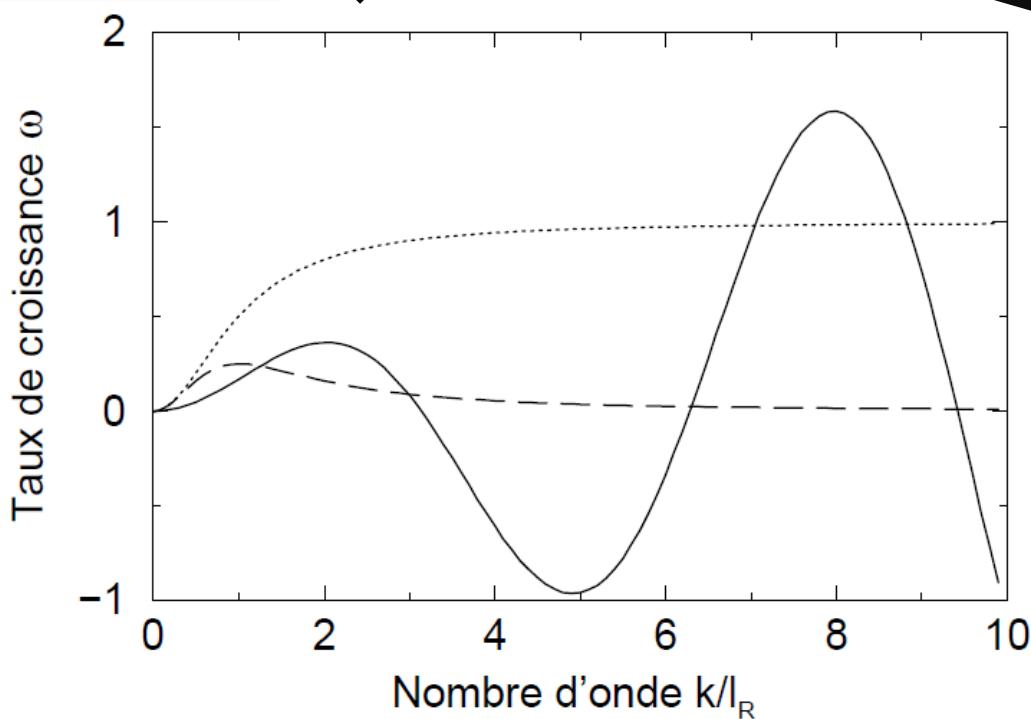
Etape 2 : Equation de dispersion

$$\omega = -\mu_0 ik \cot \alpha [1 - e^{-ikl_R}]$$

Avec :

$$\mu_0 = n_0 N_0 d^3$$

Partie réelle de taux de croissance :

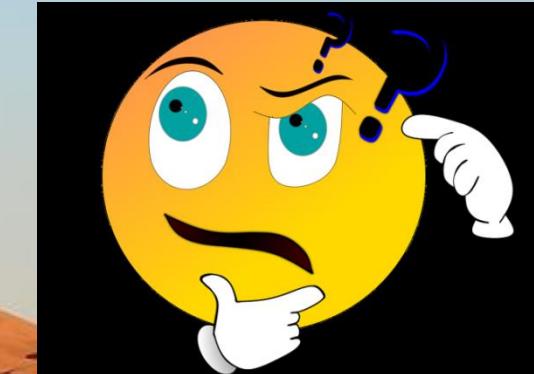


K est le nombre d'onde et ω est le taux de croissance de la perturbation

Relation de dispersion ω en fonction de k/a . Partie réelle du taux de croissance en fonction du nombre d'ondes. Spectre dans le cas d'une longueur de reptation constante (ligne continue). Spectre dans le cas où la longueur de reptation est distribuée selon une loi gaussienne (ligne en pointillés) et selon une loi gamma (ligne discontinue).

Problème ! Chaque bande présente un maximum en $k = (4n + 1)\pi/2a$.

=> Divergence de taux de croissance pour les grands nombres d'onde



Etape 3 : Résolution du problème de divergence

Désignons $p(l_R)dl_R$ la probabilité que la longueur de reptation soit comprise entre l_R et $l_R + dl_R$

Equation du mouvement

$$\partial_t h = -d^3 \int_0^\infty p(l_R) [N_{ej}(x) - N_{ej}(x - l_R)] dl_R$$

Transformée de Fourier

$$\omega = -\mu_0 ik \cot \alpha [1 - \hat{p}(k)]$$

Dans le cas d'une loi exponentielle (Loi de distribution pour la longueur de reptation), la nouvelle relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = -\mu_0 ik \cot(\alpha) \left[1 - \frac{(1 - ik\bar{l}_R/2)^2}{(1 + k^2\bar{l}_R)^2/4} \right]$$

Avec

\bar{l}_R est la longueur moyenne de reptation

⇒ Les modes avec grands nombre d'onde ont un taux de croissance tendant vers 0

⇒ But atteint et le problème est résolu

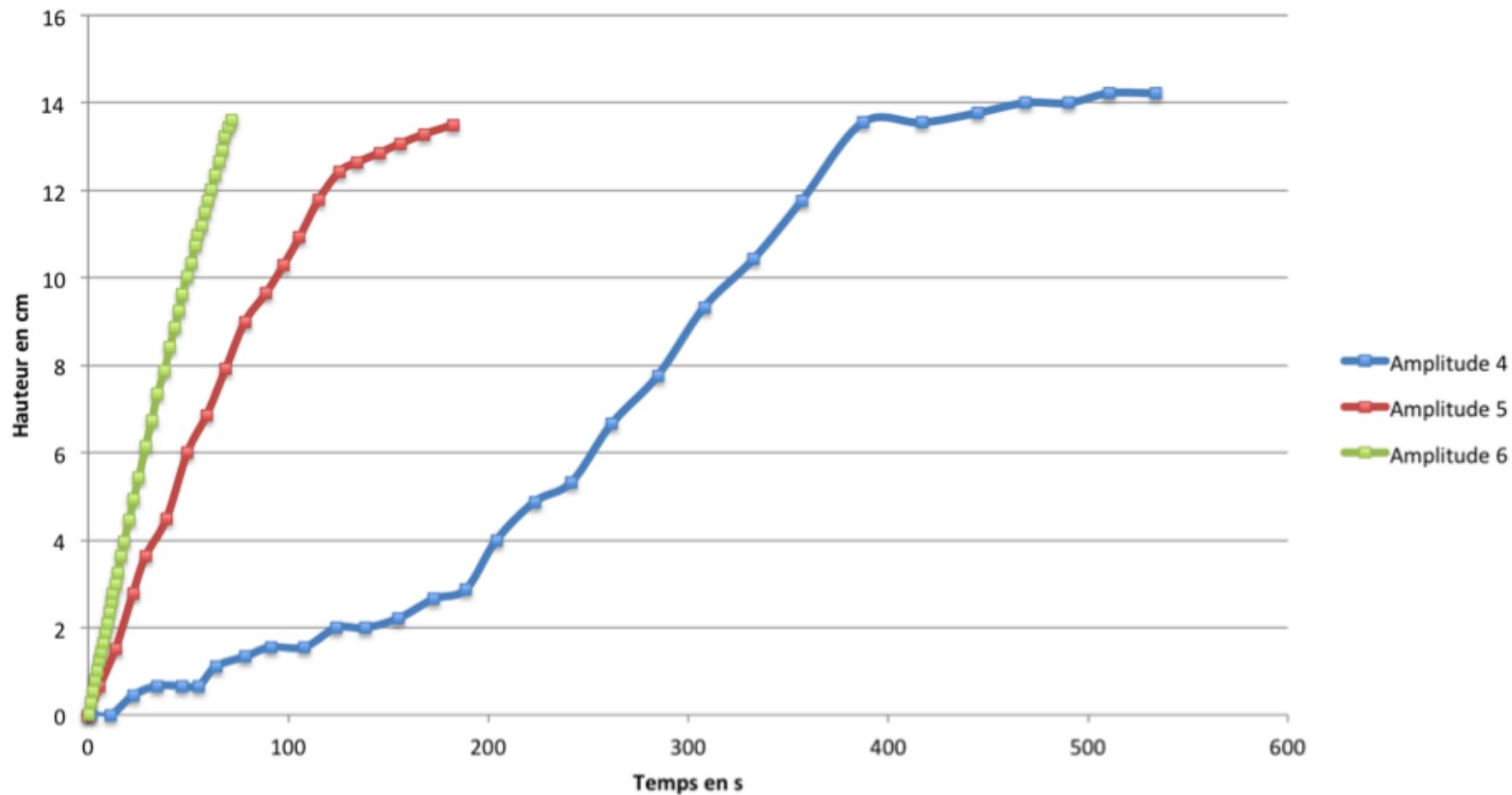
Le calcul donne
pour les modes
les plus instables

$$k_{max} \approx \sqrt{2}\bar{l}_R;$$

$$\lambda_{max} = 2\pi/k_{max} \approx 4\bar{l}_R$$

Simulation numérique

Hauteur de montée du sable en fonction du temps
(10 Hz, amplitude variable, 30/03/2015)



Modèle 3 :

*Equation de Navier-Stockes
tridimensionnelle incompressible

*Equation de Navier Stockes
moyennée dans le temps

Application du principe fondamentale de la dynamique
sur une particule parfaite et incompressible



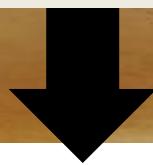
$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 v$$

$$\nabla v = 0 \quad \text{Condition d'incompressibilité}$$



Problème ! Le terme $v \cdot \nabla v$ est non linéaire

L'importance de ce terme vis-à-vis du terme visqueux se mesure grâce au nombre de Reynolds R



$$R = \frac{LV}{\nu} \approx 10^6 \gg 1$$

L est une longueur caractéristique de l'écoulement
 $L \approx 1 \text{ m}$

ν est la viscosité cinématique de l'air ($\nu = 1,45 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$)

Si R est petit, on néglige le terme non linéaire

Si R est grand, l'écoulement perd de stabilité et devient chaotique

Cas particulier : régime stationnaire

Equation de Reynolds, Equation de Navier-Stokes moyennée dans le temps :

\vec{V} est la vitesse du fluide
p la pression

$\bar{\tau}$ le tenseur des contraintes turbulentes

\vec{F} les forces volumiques éventuelles qui s'appliquent sur le fluide.

$$-\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{V} + \vec{\nabla}\bar{\tau} + \vec{F} = 0$$

Si l'écoulement est turbulent et uniforme parallèle à un axe Ox dans un plan z=0

u est la composante horizontale de la vitesse.

τ_t la contrainte turbulente tangentielle

F_x la composante horizontale des forces volumiques.

$$\mu \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d\tau_t}{dz} + F_x = 0$$

Si on néglige le transport de quantité de mouvement par viscosité devant le transport convectif par turbulence

$$\frac{d\tau_t}{dz} + F_x(z) = 0$$

$\tau_{surface}$ est la contrainte à la paroi

Si la friction exercée par les grains sur le vent est nulle

$$\tau_t(z) = \tau_{surface} = Cte$$

Problème ! La contrainte est indépendante de la hauteur



Solution : Introduire une relation supplémentaire, c'est la relation de fermeture

$$\tau_t(z) = \rho_a l^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2$$

Avec l est la longueur de mélange et ρ_a la densité de l'air.

Enfin,
D'après :

$$\tau_t(z) = \tau_{surface} = Cte$$

Et

$$\tau_t(z) = \rho_a l^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2$$

Avec

$$u(z) = (V^*/\kappa) \ln(z/z_0)$$

z_0 mesure la rugosité de la surface
 V^* est la vitesse de frottement définie par

$$V^* = \sqrt{\tau_t/\rho_a}$$

Schéma numérique :

Résolution numérique de Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \mathbf{v}_j \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right] = f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} \right)$$

Résolution de l'équation de Reynolds

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_i}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_j \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right] = \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_i}{\partial x_j} - \rho \bar{\mathbf{v}}'_i \bar{\mathbf{v}}'_j \right)$$

Conclusion et critique :

Une bonne étude de transport de grains de sable exige une modélisation très proche de la réalité avec plus de précision et moins d'hypothèses.