Etude d'une pale d'hydrolienne

SCEI : 47448

Objectifs

Les pales de l'hydrolienne vibrent

Ces vibrations provoquent l'usure des pales

Les pales pourraient , suite à l'usure , se briser

Lors de la résonance , l'amplitude des vibrations est maximale

Il faut donc éviter la résonance pour éviter l'usure

Comment déterminer alors la résonance et ainsi l'éviter ?

Plan

- I/ Modélisation des pales avec un oscillateur:

1) Modéliser les pales selon un oscillateur
2) Détermination de la force des courants aquatiques
3) Modélisation des courants aquatiques selon une force

- II/Les pales selon modèle de la poutre:

1) Equation de la poutre

- III/Utilisation du modèle poutre pour étudier la résonance:

1) Résolution analytique
2) Résolution numérique

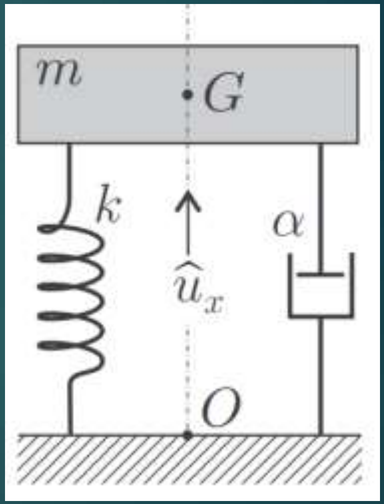
Modélisation selon un oscillateur

- On peut émettre l'hypothèse que l'on peut modéliser la pale de l'hydrolienne avec un oscillateur et une force de frottement de coefficient a.
- Avec un bilan des forces sur le point G , on obtient

$$\boxed{\ddot{X} + 2\xi\omega 0\dot{X} + \omega 0^{2} X = 0}$$

avec $X = x + x_{eq}$

avec $x_{eq} = l0-(mg/k)$, $W0=\sqrt{k/m}$, $\xi= a/(2\sqrt{km})$



D'après l'équation caractéristique , et en utilisant les conditions aux limites , on aura

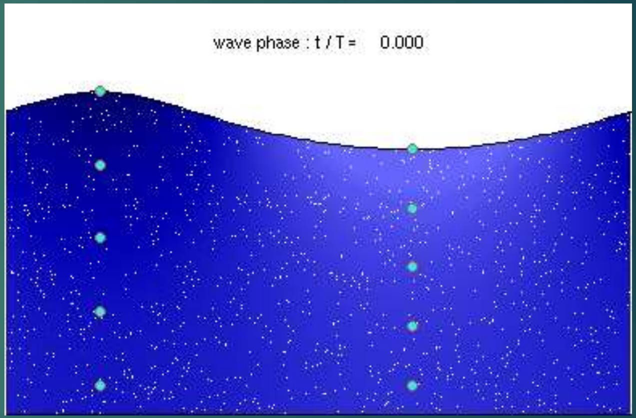
$$\boxed{X(t)=\exp(-t/a)\left(X0\cos(wt) +\left(\frac{V0+\xi\omega 0\, X0}{w}\right)\sin(wt)\right)}$$

avec $a=1/\xi w0$ et $w=w0\sqrt{1-\xi^2}$

Simulation des vagues

- On peut remarquer que les particules des vagues bougent de façon cyclique.

On pourra alors émettre l'hypothèse que les particules des vagues oscillent avec la même fréquence que les vagues.



Détermination des forces des courants aquatiques

Les hydroliennes ont vocation à être immergé de 30 à 40 mètres de profondeur dans des zones de fort courant (supérieur à 2m/s)

La puissance motrice de l'eau qui traverse la surface du rotor est donnée par la formule

$$\boxed{W = ½ . \rho . S . a . V^3 = F V}$$

avec F : force ; V : vitesse ; S: surface ; ρ: masse volumique de l'eau

Donc $\boxed{F = \frac{W}{V}}$ or 2<V<3 et $S = \pi\ 10^2 = 314\ m^2$

D'où

375670 N < F < 845256 N

Modèle des courants aquatiques selon une force

On met l'hypothèse que l'on peut modéliser la force des courants aquatiques tel que **$F=F0+F1\cos(wt)$**

avec F0= 610463 N et F1= 234793 N et w entre 0,05 hertz et quelques hertz

Le modèle donnera alors un oscillateur forcé ,

$$\boxed{\ddot{Y} + 2\xi\omega 0\dot{Y} + \omega 0^2\, Y = -\left(\frac{F1}{m}\right)\cos(wt)}$$

Par passage au complexe, on aura

$$\boxed{\underline{H} = \frac{(-1/w0^{\,2})}{(1-\Omega^2+2i\xi\,\Omega)}}$$

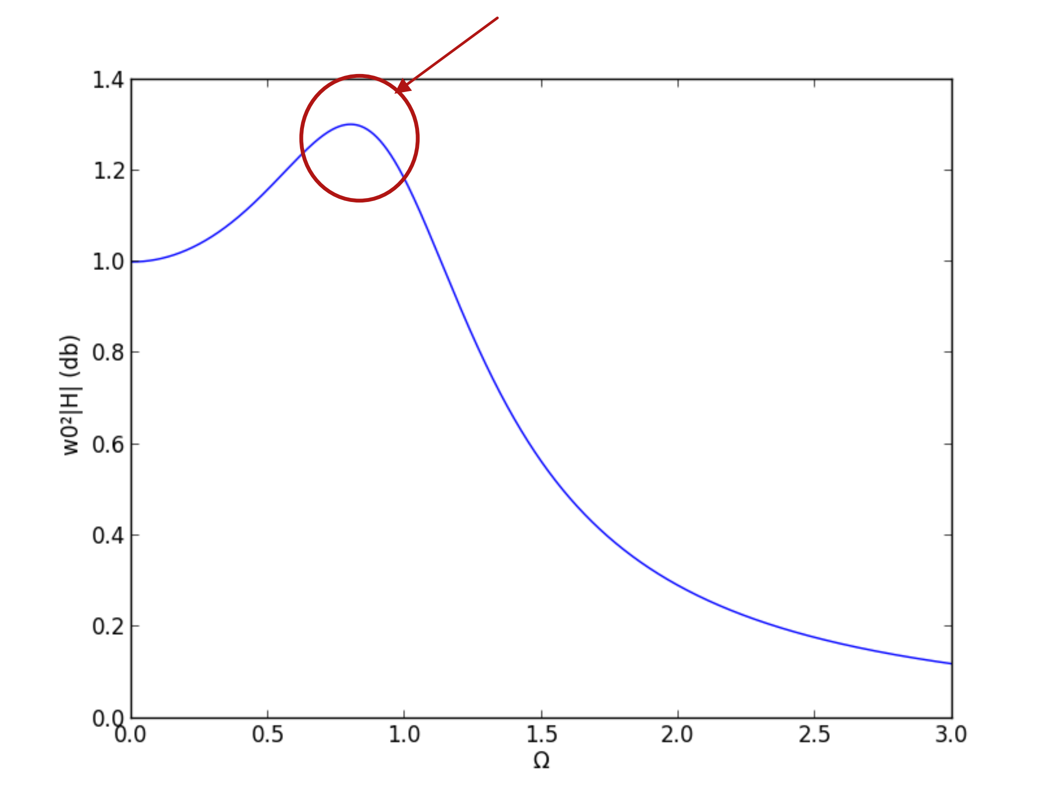
avec $\Omega = w/w0$

On pose $\underline{D} = 1-\Omega^2+2i\xi\,\Omega$

Pour trouver la résonance , il faut montrer que $\frac{d|D|^2}{dt}=0$ d'où $\boxed{\Omega=\sqrt{1-2\xi^2}}$

Donc pour avoir une résonance il faut que $\boxed{\Omega \approx 1 \text{ d'où } \xi^2 << 1}$

- En posant alors ξ=0,18 , on obtiendra la courbe suivante:



- On observe alors une une résonance du système, ce qui pourrait représenter un danger pour la structure de la pale (voir code 1 de l'annexe).

Limites de ce modèle

- Même si ce modèle confirme la présence d'une résonance , il n'en pas moins dur de la calculer à cause de nombreux paramètres mis en jeu et des approximations qui faussent les résultats.

Il est alors impossible de calculer la fréquence propre dans ce cas.

C'est pourquoi il est nécessaire de changer de modèle , vers un autre plus proche de la réalité et qui nous permettrait de calculer la fréquence propre des pales de l'hydrolienne.

III/ Les pales selon le modèle de la poutre

- Dans un modèle couramment utilisé , on peut assimiler une pale à une poutre homogène de section rectangulaire, d'où

$$\rho S \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} + IE \frac{\delta^4 y}{\delta x^4} = 0$$

On émet l'hypothèse que l'onde est stationnaire donc y(x,t) = f(x) g(t),

on divise par y(x,t) ≠0 ,on obtient les équations de second degré:

$$\rho S \frac{\frac{\delta^2 g}{\delta t^2}}{g(t)} = -w^2$$

$$IE \frac{\frac{\delta^4 f}{\delta x^4}}{f(x)} = w^2$$

Résolution de l'équation analytiquement

- D'après l'équation (1) ,

$$\rho S\ (\delta^2 g/\ \delta t^2))\ /\ g(t) = -\Gamma^2$$

D'où la solution est de la forme de ,

$$\boxed{g(t)=A\cos(wt+\varphi)}$$

D'après l'équation (2),

IE (δ**4f/ δx**4)) / f(x) = Γ²

D'où la solution est de la forme de ,

F(x)=C1[cos(βnx)+cosh(βnx)]+C2[cos(βnx)-cosh(βnx)]+C3[sin(βnx)+sinh(βnx)]+C4[sin(βnx)-sinh(βnx)]

Avec β= ((wρS)/ IE)**1/4

D'après les conditions aux limites en O , on a y(x,t)=0 et $\frac{\delta Y}{\delta x}(0)=0$

D'où C3=C1=0

- D'après les conditions aux limites en L : $\frac{\delta^2 Y}{\delta x^2}(L)=0$, $\frac{\delta^3 Y}{\delta x^3}(L)=0$, on obtient,

$$C4=C2\frac{-\cos(\boldsymbol{\beta n x})-\cosh(\boldsymbol{\beta n x})}{\sin(\boldsymbol{\beta n x})+\sinh(\boldsymbol{\beta n x})}$$

- D'où

$$Fn(x) = C2\ [(\cos(\boldsymbol{\beta n x})+\cosh(\boldsymbol{\beta n x}))+\frac{-\cos(\boldsymbol{\beta n x})-\cosh(\boldsymbol{\beta n x})}{\sin(\boldsymbol{\beta n x})+\sinh(\boldsymbol{\beta n x})}(\sin(\boldsymbol{\beta n x})-\sinh(\boldsymbol{\beta n x}))]$$

En réintroduisant la relation entre C4 et C2 dans les conditions en L ,

On obtient alors la relation:

$$\cos \boldsymbol{\beta L} \cosh \boldsymbol{\beta L}+1 =0$$

Un composant choisi pour les pales est un alliage de nickel ,

donc $\frac{IE}{\rho S} = 750000$ E=Module de Young , ρ= masse volumique

I = moment d'inertie , S=surface

D'où

$$\beta = 4\sqrt{\frac{w^2}{750000}}$$

La recherche des racines ne peut être faite analytiquement , on se penchera alors à une résolution numérique avec différentes méthodes tel que la recherche dichotomique ou la méthode de newton.

Résolution numérique

Avec la méthode de newton ,

On obtient la première racine de **βi** ,

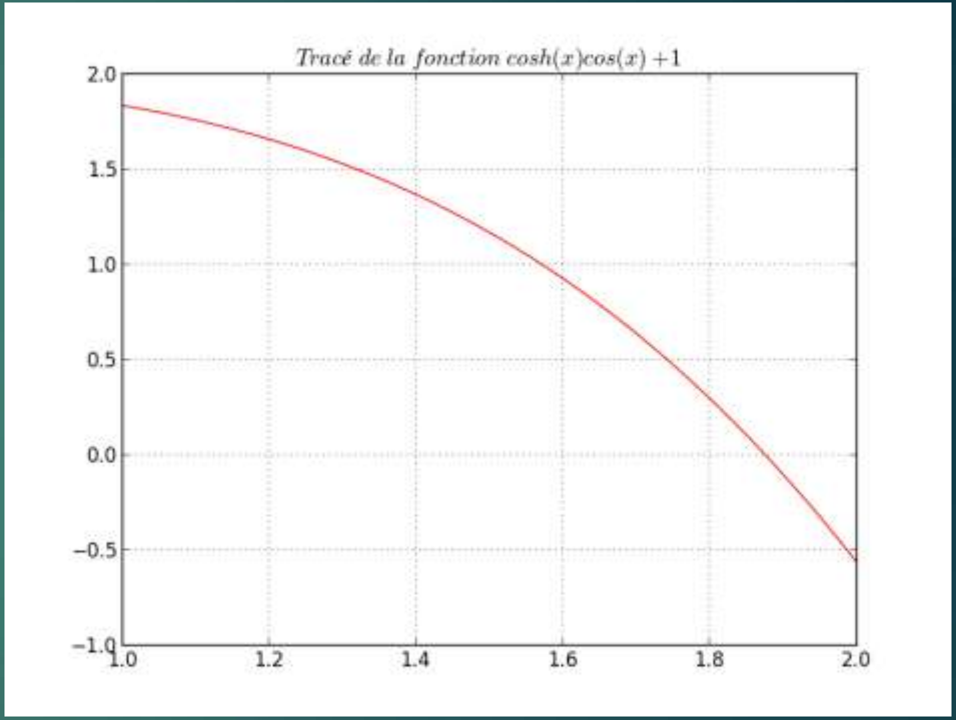
B1*L = 1.8750 avec un nombre

d'itérations de 2,Quant à la méthode

de la recherche dichotomique, on obtient

B1*L = 1.882 avec un nombre

d'itérations de 7.



La méthode de newton est alors plus efficace et plus rapide que celle de la recherche dichotomique. (voir code 2 et 3 de l'annexe)

- On peut alors déterminer la fréquence du premier mode avec la formule

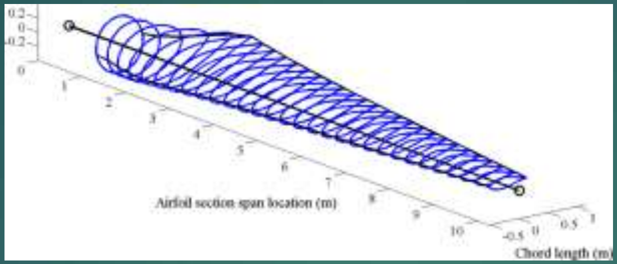
$$w1 = \sqrt{750000\ \beta 1^4} = 30\text{Hz}$$

Alors,

$$\boxed{F1 = 5\ \text{Hz}}$$

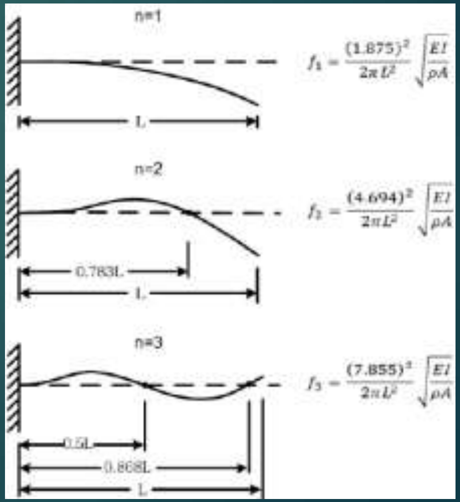
Cette fréquence est mécaniquement possible , et peut coïncider avec la fréquence des vagues lors des mers agitées.

- Ce modèle nous confirme alors la possibilité d'une résonance pour le mode 1.



Alors que pour les modes supérieurs , par exemple le mode 2 , on obtient une fréquence de 30Hz ce qui est loin de la réalité , même dans des cas extrêmes.

D'après ce qui précède, la résonance ne peut se faire que dans le mode 1



Résolution de l'équation numériquement

- Après la résolution analytique précédente , on va essayer de simuler les vibrations de la pale dans le mode 1.
- On commence par choisir un intervalle temporel [t0,tmax] , on pose Δt tel que $tk = t0 + k\,\Delta t$. De même, on pose $xi = x0 + i\,\Delta x$.

Par développement limité on obtient ,

$$y(xi\,,tk+\Delta t)= y(xi,tk)+ \frac{\Delta t\ \delta y(xi,t)}{\delta t} + \frac{(\Delta t^2/2)\ \delta^2 y(xi,t)}{\delta t^2(tk)} + O(\Delta t^2)$$

De même , on fait le développement limité de y(x ,tk- Δt) , d'où :

$$y(xi,tk-\Delta t)+ y(xi,tk- \Delta t) = \frac{2\ y(xi,tk)+ (\Delta t^2)\ \delta^2 y(xi,t)}{\delta t^2}$$

Donc

$$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}(tk) = \frac{(y(xi\ ,tk+\Delta t) + y(xi,tk-\Delta t) - 2\ y(xi,tk))}{\Delta t^2}$$

De la même manière, on obtient :

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}(xi) = \frac{(y(xi+\Delta x\ ,tk) + y(xi-\Delta x\ ,tk) - 2\ y(xi,tk))}{\Delta x^2}$$

L'idée est d'exprimer les tk+1 en fonction de tk en injectant les expressions trouvées dans la première équation.

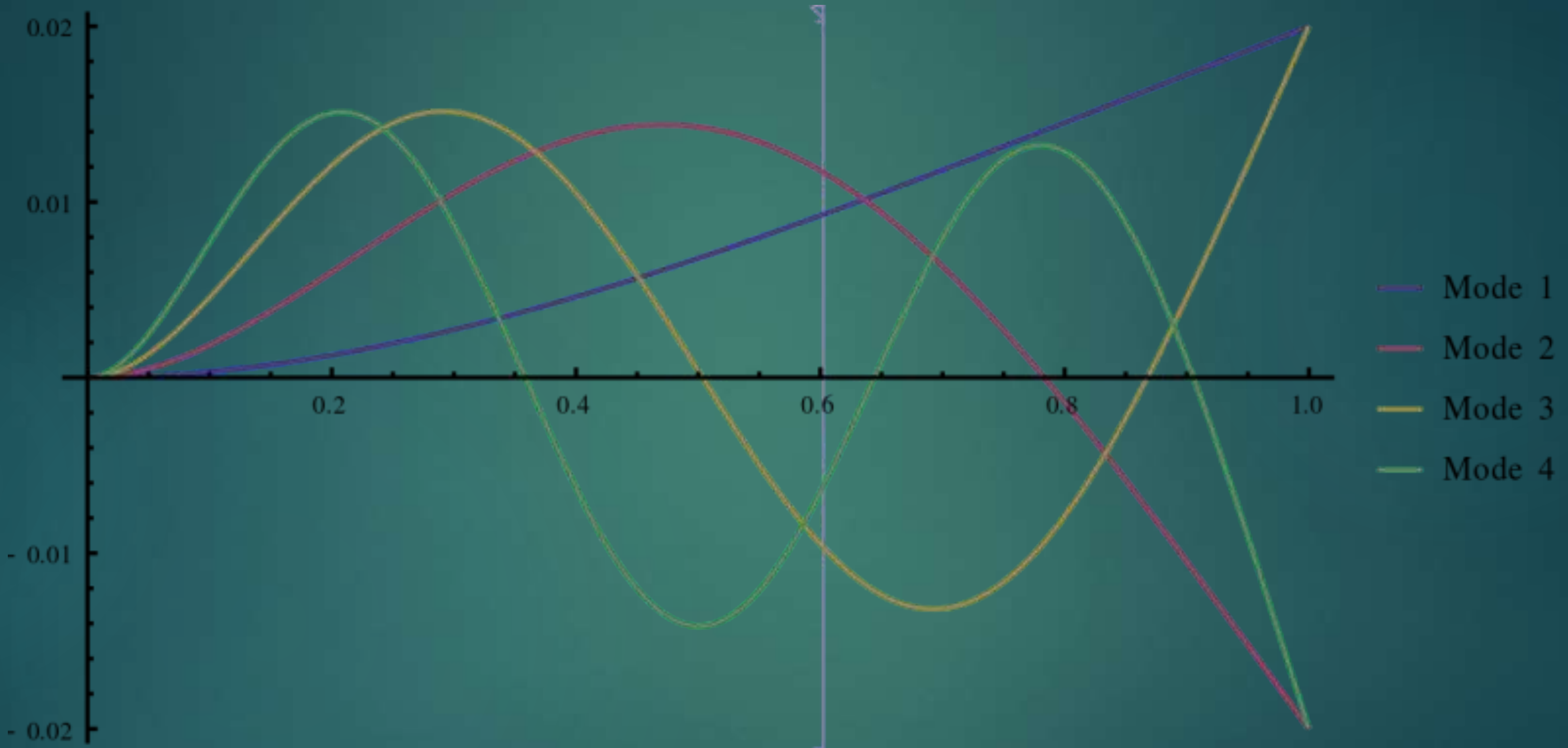
On pose :

$$f(xi,tk) = \frac{y(xi+1\ ,\ tk) + y(xi-1\ ,\ tk) - y(xi\ ,\ tk)}{\Delta x^2}$$

On obtient donc la relation suivante ,

$$y(xi\ ,tk+1) = \frac{-D\ \Delta t^2}{\rho h}\left(\frac{(f(xi+1,tk) + f(xi-1,tk) - 2\ f(xi,tk)}{\Delta x^2}\right) + 2\ y(xi\ ,tk) - y(xi\ ,tk-1)$$

Les différents modes sont :



Conclusion

- On peut donc conclure que suivant le modèle de la poutre , on a pu prouver qu'une résonance est possible pour le mode 1 de vibration de la pale. Il est alors possible d'exploiter l'énergie des courants

aquatiques en toute sécurité si on évite

cette fréquence.

Annexe

- Code 1 :
- import matplotlib.pyplot as plt
- import numpy as np
- x = np.arange(0,3, 0.001)
- y = 1/(np.sqrt(((1-x**2)**2)+(4*0.18*x**2)))
- plt.plot(x, y)
- plt.xlabel("Ω")
- plt.ylabel(" w0² | H | (db)")
- plt.show()

Code 2 : newton :

```
from math import * # pour pouvoir manipuler 'pi'
import pylab as plt
import numpy as np
# définition de la fonction dont on cherche une racine et fonction approchée
def f1(x):
 return np.cos(x)*np.cosh(x)+1
def f(x):
 return np.cos(x) + 1/np.cosh(x)
def fd(x):
 return -np.sin(x) - np.sinh(x)/np.cosh(x)**2
def g(x):
 return np.cos(x)

print("défintion d'un intervalle pour prévisualisation de la fonction")
a = float(input("Entrer la borne inférieure de l'intervalle (a) : "))
b = float(input("Entrer la borne supérieure de l'intervalle (b) : "))
e = float(input("Entrer la précision : "))
x = float(input("Entrer x0 : "))
X = np.arange(a,b,0.001)
j = 0
while abs(f(x) / fd(x)) > e:
    j += 1
    if fd(x) ==0:
        print ("La méthode de Newton ne peut aboutir, la dérivée s'annule !")
    x=x-f(x)/fd(x)
print('racine = ',x,'Nb d''itérations = ',j)
plt.figure(0)
plt.plot(X , f1(X) , '-r')
plt.title(r"$Tracé\ de\ la\ fonction\ cosh(x)cos(x)+1$")
plt.grid(True)
plt.show()
```

Code 3 : Dichotomie :

- from math import * # pour pouvoir manipuler 'pi'
- import pylab as plt
- import numpy as np
- # définition de la fonction dont on cherche une racine et fonction approchée
- def f1(x):
- return np.cos(x)*np.cosh(x)+1
- def f(x):
- return np.cos(x) + 1/np.cosh(x)
- def fd(x):
- return -np.sin(x) - np.sinh(x)/np.cosh(x)**2
- def g(x):
- return np.cos(x)
- print("défintion d'un intervalle pour prévisualisation de la fonction")
- g = float(input("Entrer la borne inférieure de l'intervalle (a) : "))
- d = float(input("Entrer la borne supérieure de l'intervalle (b) : "))
- eps = float(input("Entrer la précision : "))

```
X = np.arange(g,d,0.001)
j = 0
j = 0
if f(g)*f(d) >0 :
    print("l'intervalle proposé ne permet pas
d'appliquer",
                    "la méthode de la dichotomie
!")
while abs(g-d) > eps :
    j += 1
    if f(g)*f((d+g)/2) > 0:
        g = (d+g)/2
    else :
        d = (d+g)/2
print('racine = ',d,'Nb d''itérations = ',j)
plt.figure(0)
plt.plot(X , f1(X) , '-r')
plt.title(r"$Tracé\ de\ la\ fonction\
cosh(x)cos(x)+1$")
plt.grid(True)
plt.show()
```