ೲ ESPRIT PRÉPA 2019-2020 ೲ
ೲ PHYSIQUE MPSI ೲ
ೲ TD 1 : Oscillateur mécanique à un degré de liberté ೲ

Exercice 1 : Analyse dimensionnelle en physique

Un objet de masse m attaché à un ressort oscille horizontalement autour de sa position d'équilibre. La période T du mouvement dépend de la masse m et de la raideur k du ressort.

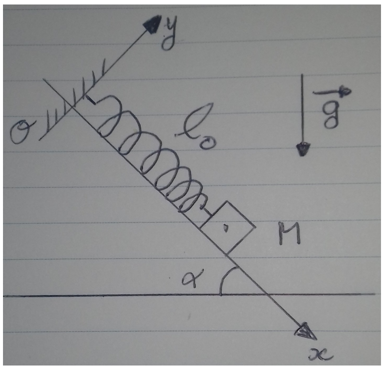
1. Par une analyse dimensionnelle, indiquer laquelle des deux expressions suivantes donne la période du mouvement :

$$a)\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad b)\ T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2. Donner sa valeur pour $k = 50\ N.m^{-1}$ et $m = 500\ g$.

Exercice 2 : Oscillateur sur un support en pente

La masse m est attachée à un ressort de longueur à vide l_0, en glissant sans frottement sur le sol. Ce dernier est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.



Question : Déterminer l'équation différentielle du mouvement

Exercice 3 : Comment résoudre une équation différentielle

Soit l'équation différentielle :

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\ x(t) = 0$$

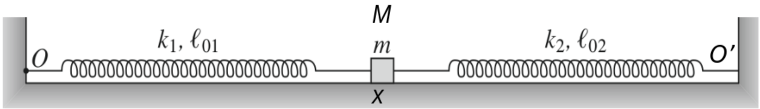
où ω_0 est une constante. Vérifier que les fonctions proposées $x_i(t)(i = 1, 2, ou3)$ sont bien des solutions.

1. 1er cas : $x_1(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$, avec A et B des constantes.
2. 2ème cas : $x_1(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$, avec A et B des constantes.
3. 3ème cas : $x_1(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$, avec A et B des constantes.
4. 4ème cas : $x_1(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$, avec A et B des constantes.

Exercice 4 : Associations de ressorts : Masse reliée à deux ressorts

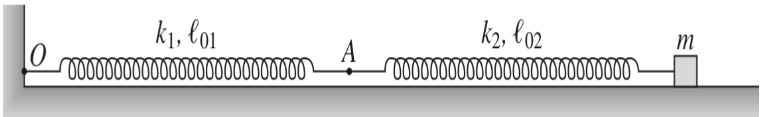
Premier cas : Une masse m positionnée en M reliée à deux ressorts fixés en O et O' glisse sans frotter sur le sol (voir figure). La position de la masse est repérée par son abscisse x telle que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x}$. Les ressorts ont pour raideurs respectives k_1 et k_2 , et comme longueurs à vide l_{01} et l_{02}. La longueur OO' est notée L.

1. Effectuer le bilan des forces sur la masse



2. Établir l'équation du mouvement de la masse.
3. Quelle est la position d'équilibre x_{eq} ?
4. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$ en fonction de x_{eq} et d'une certaine pulasation ω que l'on précisera.
5. Sans le résourdre, décrire le mouvement de la masse.
6. Résoudre exactement le mouvement sachant qu'à t=0, la position est $x(0) = x_0$ et la projection de la vitesse vaut $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = v_0$.

Second cas : Cette fois, la masse est reliée d'une façon différente aux deux ressorts précédents.



1. Montrer que la masse décrit un mouvement harmonique de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1 k_2}}$.
2. En déduire la raideur du ressort équivalent à l'ensemble dans chacun des deux cas. Commenter.

Troisième cas : Cette fois, la masse est reliée d'une façon différente aux deux ressorts précédents.

1. Montrer que la masse décrit un mouvement harmonique dont on déterminera la période.
2. En déduire la raideur du ressort équivalent à l'ensemble dans ce cas. Commenter.

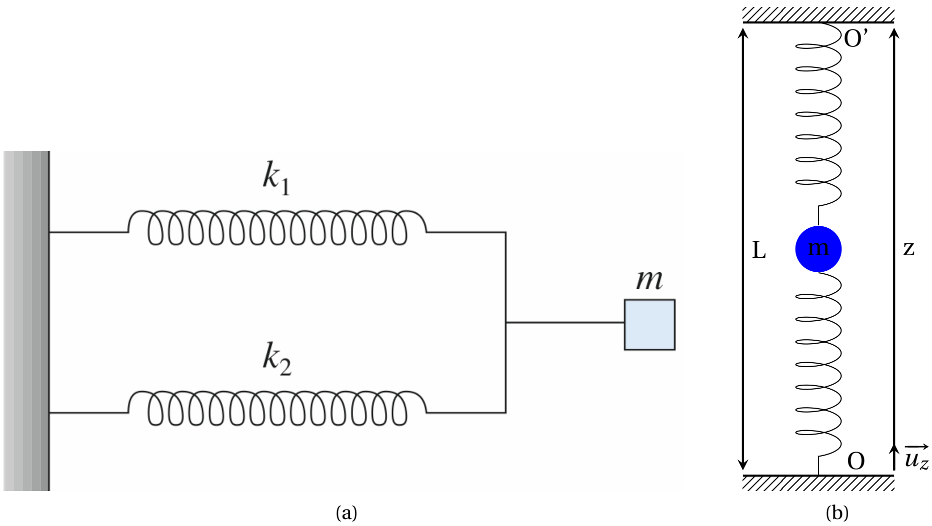


FIGURE 1 : À gauche, la figure montre le 3ème cas (les deux ressort disposés horizontalement). À droite, la figure représente les deux ressorts verticaux.

Quatrième cas (Masse entre deux ressorts verticaux) : La masse m est astreinte à se déplacer verticalement, est attachée à deux ressorts, l'un fixé en 0 et l'autre en O'. Les deux ressorts ont une raideur k et une longueur à vide l_0. On pose $OO' = L$.

1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la masse.
2. Quelle est la position d'équilibre.
3. La masse est initialement à sa position d'équilibre et lancée avec la vitesse $\vec{v} = v_0\vec{u_z}$. Donner l'évolution de l'altitude $z(t)$ de la masse.

Exercice 5 : Oscillations verticales d'une masse (Inspiré du sujet de Physique 1 MP 2016 du concours commun Mines-Ponts)

Le Millennium Bridge : Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balan cait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés. L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

FIGURE 2 : Une photo du pont londonien "Millennium Bridge".

Une première modélisation : le pont = masse + ressort

Un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé en O au plafond. son autre extrémité est attaché un mobile M de masse m, repéré par son abscisse z telle que la position du mobile soit $\vec{OM} = z\,\vec{u}_z$.

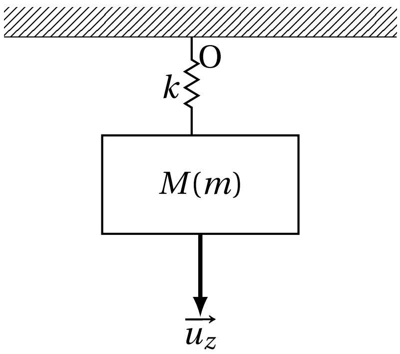


FIGURE 3 : la figure représente une première modélisation du pont avec un système ressort+masse.

1. Effectuer un bilan des forces sur la masse.
2. Établir l'équation du mouvement de la masse.

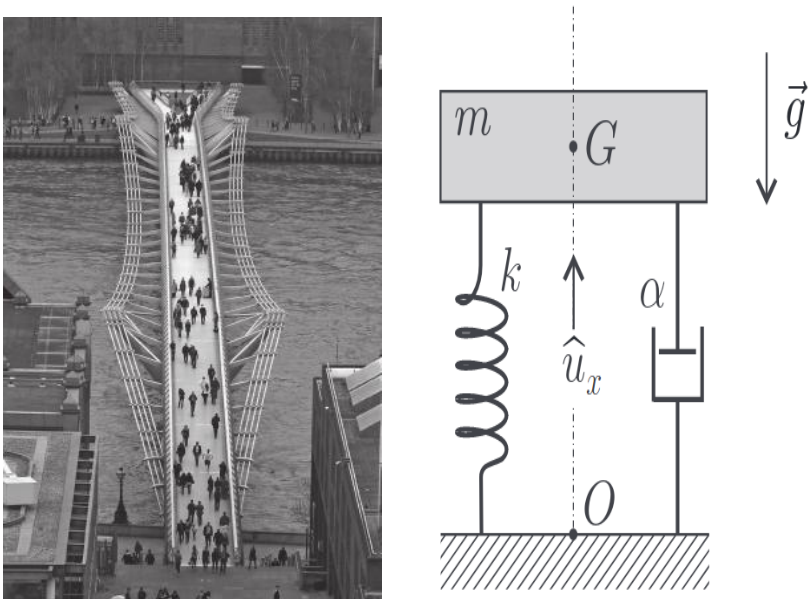
3. **3.** Quelle est la position d'équilibre z_q ? Commenter le résultat obtenu.
4. **4.** On pose $u(t) = z(t) - z_q$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$.
5. **5.** Quelle est la période des oscillations ? Commenter.

On cherche à retrouver l'équation du mouvement par une méthode énergétique. La position de la masse est à nouveau donnée par une fonction pour le moment indéterminée $z(t)$.

6. **6.** Évaluer l'énergie potentielle élastique et l'énergie potentielle de pesanteur en fonction notamment de $z(t)$ et $\frac{z(t)}{dt}$.
7. **7.** On rappelle que l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} est égale au produit de $m * g$ par l'altitude de la masse. Écrire la relation traduisant la constance de l'énergie mécanique E_m. En déduire l'équation différentielle du mouvement en dérivant cette relation par rapport au temps. Conclure.

Une deuxième modélisation : le pont = masse + ressort + force de frottement fluide

Un oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen (O,$\overrightarrow{u_x}$ - voir figure 3. Maintenant l'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide l_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α, exerçant sur m une force de frottement $\overrightarrow{F_f} = -\alpha \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x}$, avec $\alpha > 0$. À tout instant t, on assimile la distance OG à la longueur l(t) du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_x}$ avec $g = 9,81\ m.s^{-2}$.



(a) (b)

FIGURE 4 : À gauche, photo du pont londonien "Millennium Bridge". À droite, la figure représente la modélisation du pont avec un système ressort+masse+force de frottement fluide.

1. **1.** En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ dans laquelle on a introduit la fonction $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ où $\tilde{x}$ est une constante que l'on déterminera en fonction de g, ω_0 et l_0. On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ.
2. **2.** Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles $X(0) = X_0 \neq 0$ et $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$. Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de $\omega_0,\ \ \xi,\ \ X_0,\ \ V_0\ \ et\ \ t$) pour les cas $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$ et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit $\overrightarrow{F_v} = \beta\dot{x}\overrightarrow{u_x}$, avec $\beta > 0$. Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

D'ici la fin de l'année, on finira la totalité du sujet...

Exercice 6 : Oscillateur transplanétaire

On peut montrer qu'à l'intérieur d'un astre sphérique et homogène de masse M et de rayon R, le champ de pesanteur ne varie plus en raison inverse du carré de la distance x au centre de l'astre, mais proportionnellement à celle-ci :

$$G_{\vec{int}}(x) = -\frac{\mathcal{G} * M}{R^3} \ x \ \vec{e_x}$$

avec $\vec{e_x}$ vecteur unitaire vertical ascendant.

On considère alors un hypothétique puits traversant la Terre de part en part en passant par son centre. Le référentiel terrestre sera supposé galiléen. Montrer qu'un objet (ou un voyageur audacieux) lâché dans ce puits sans vitesse initiale va avoir un comportement d'oscillateur harmonique, et déterminer sa période ainsi que la vitesse maximale atteinte au cours du voyage. Application numérique : $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11} \ \ USI$, $M_T = 5,98.10^{240} \ \ kg$, $R_T = 6,38.10^6 \ \ m$.

Exercice 7 : Un modèle d'élasticité d'une fibre de verre

Le verre est un matériau très dur. On peut toutefois le déformer légèrement sans le casser : on parle d'élasticité. Récemment, des expériences de biophysique ont été menées pour étudier l'ADN. Le capteur utilisé était simplement une fibre optique en silice amincie à l'extrémité de laquelle on accroche un brin d'ADN. L'expérience consistait à suivre la déformation de flexion de la fibre. La masse volumique du verre est $\rho = 2500 kg.m^{-1}$.

La fibre de verre de longueur l et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la fibre est horizontale (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale $\vec{F}$ (on supposera que la force reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre de la fibre, celle-ci est déformée. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flèche (voir figure ci-dessous).

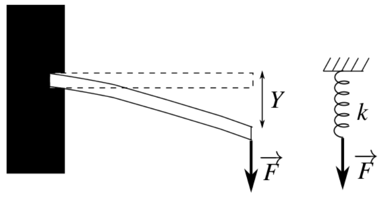


FIGURE 5 : La fibre de verre est sa modélisation avec un oscillateur.

La flèche Y est donnée par la relation suivante (on notera la présence du facteur numérique 7, sans dimension, qui est en fait une valeur approchée pour plus de simplicité) : $\frac{7\,l^3\,F}{E\,d^4}$, où E est appelé module d'Young du verre. Pour les applications numériques on prendra pour le module d'Young $E = 7.10^{10}\ S.I.$.

1. Quelle est l'unité S.I. du module d'Young E ?
2. En considérant uniquement la force F, montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E, d et l.
3. Calculer numériquement k pour une fibre de longueur = 7 mm et de diamètre d = 10 μm.

On a tous fait l'expérience suivante : faire vibrer une règle ou une tige lorsqu'une de ses extrémités est bloquée. On cherche ici à trouver les grandeurs pertinentes qui fixent la fréquence des vibrations. L'extrémité de la tige vaut Y(t) à l'instant t. On admet que lors des vibrations de la fibre, l'énergie cinétique de la fibre de verre est donnée par l'expression $E_c = \rho\, l\, d^2\, (\frac{dY}{dt})^2$. Son énergie potentielle élastique lorsque la flèche vaut Y est : $E_p = \frac{1}{2}\frac{E\,d^4}{7\,l^3}\,Y^2$.

4. Écrire l'expression de l'énergie mécanique de la fibre en négligeant l'énergie potentielle de pesanteur.
5. Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du temps. En déduire l'équation différentielle qui régit les vibrations de la fibre.
6. Quelle est l'expression de la fréquence propre de vibration d'une tige de verre de module d'Young E, de longueur et de diamètre d ?
7. Calculer numériquement la fréquence des vibrations d'une fibre de verre de longueur 7 mm et de diamètre 0,01 mm.

Exercice 8 : La capacité thermique d'un gaz (Inspiré du sujet de Physique 2 MP 2017 du concours commun Mines-Ponts)

La capacité thermique des gaz est une grandeur thermodynamique assez facile à mesurer expérimentalement. Elle a joué un grand rôle dans la compréhension de la nature microscopique des gaz et de la matière en général. Elle a également été un point de questionnement fondamental au moment de la construction de la physique quantique. Dans cette épreuve, on se propose d'expliquer à l'aide de différents modèles théoriques les valeurs mesurées de la capacité thermique de différents gaz parfaits diatomiques à différentes températures.

0.1 De la molécule à l'oscillateur harmonique

On considère une molécule diatomique dont les deux atomes A et B sont liés par une liaison covalente : l'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes est attractive à longue portée et répulsive à courte portée. L'étude est menée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose la molécule isolée et on néglige l'interaction gravitationnelle entre les deux atomes devant l'interaction conduisant à la liaison covalente.

1. Tracer l'allure du profil d'énergie potentielle E_p de cette molécule en fonction de la longueur $l = AB$ de la liaison. On y fera figurer la longueur d'équilibre l_e de la liaison et l'énergie de liaison E_l.
2. Donner un ordre de grandeur de l_e en nm et de E_l en $kJ\mathring{u}mol^1$.
3. Compte tenu de l'allure de la courbe de la question 1, et moyennant une hypothèse à préciser, justifier que l'on peut assimiler la liaison covalente à un ressort dont on exprimera la constante de raideur k en fonction d'une dérivée de E_p.
4. On suppose cette approximation valide dans toute la suite. Exprimer l'énergie cinétique de la molécule en fonction des vitesses $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ et des masses m_A, m_B des atomes A et B dans le référentiel du laboratoire.
5. Calculer un ordre de grandeur de la vitesse caractéristique des molécules dans l'air à 300 K et sous une pression de 1 atm. On prendra $R = \frac{25}{3} J.mol^{-1}.K^{-1}$ pour valeur de la constante des gaz parfait et $M_a = 30.10^{-3} kg\mathring{u}mol^{-1}$ pour la masse molaire de l'air.
6. Exprimer l'énergie mécanique E_m de la molécule dans le référentiel du laboratoire, en fonction de E_l , l, l_e , k, $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$.
7. On note G le barycentre de la molécule tel que $m_A\vec{GA} + m_B\vec{GB} = \vec{0}$ et $\vec{v}_G$ sa vitesse dans le référentiel du laboratoire. On appelle référentiel barycentrique, le référentiel ayant les mêmes vecteurs de base que le référentiel du laboratoire mais d'origine G. Ce référentiel est-il galiléen ? On justifiera sa réponse.
8. On note $\vec{v} = \frac{\vec{AB}}{dt}$, établir la relation $E_m - E_l = \frac{1}{2}(m||\vec{v}_G||^2 + \mu||\vec{v}||^2 + kr^2)$ dans laquelle on exprimera les constantes m et μ en fonction des masses m_A , m_B et la variable r en fonction de l et l_e.
9. En écrivant $\vec{AB} = l(t)\vec{e}_r$ avec $\vec{e}_r = \frac{\vec{AB}}{||\vec{AB}||}$, décomposer E_m en la somme de trois termes que l'on supposera indépendants dans ce problème et qui représentent respectivement la translation E_{tra} , la vibration E_{vib} et la rotation E_{rot} de la molécule. On explicitera chacun de ces termes en fonction des grandeurs les plus adaptées.

1. Effectuer un bilan des forces de la masse.
2. Établir l'équation du mouvement de la masse.
3. Quelle est la position d'équilibre x_{eq} ?
4. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$ en fonction de x_{eq} et d'une certaine pulsation ω que l'on précisera.
5. Sans le résoudre, décrire le mouvement de la masse.
6. Résoudre exactement le mouvement sachant qu'à t=0, la position est $x(0) = x_0$ et la projection de la vitesse vaut $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = v_0$.

— **Savoirs**
— équation différentielle de l'oscillateur harmonique
— expression de la pulsation de l'oscillateur constitué par une masse accrochée à un ressort
— définitions d'un signal sinusoïdal, de son amplitude, sa pulsation, sa phase initiale
— relations entre la pulsation, la fréquence et la période
— représentation de Fresnel

— **Savoir-Faire**
— établir l'équation différentielle d'une masse accrochée à un ressort
— résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique avec des conditions initiales données
— trouver l'amplitude et la phase initiale de la solution
— vérifier la conservation de l'énergie mécanique
— reconnaître l'amplitude, la phase initiale, la période, la fréquence, la pulsation d'un signal sinusoïdal donné
— trouver la phase instantanée à un instant où le signal est maximal, minimal, nul
— dessiner une représentation de Fresnel
— déterminer expérimentalement un déphasage