

Sujet IV

Étude de l'équation de la chaleur

Texte

Filière : MP lors de l'épreuve. Cependant, les candidats de toutes les filières peuvent et devraient lire ce texte tant il traite d'un problème multi-disciplinaire.

***Travail suggéré :** faire une synthèse du texte. Vous pourrez au choix mettre en valeur les aspects pratiques ou la théorie. Dans ce dernier cas, il ne s'agit pas de réciter les démonstrations mais d'analyser les hypothèses physiques sous-jacentes et les simplifications mathématiques qu'elles apportent ainsi que d'exhiber les points saillants des preuves.*

§1. Introduction

L'objet de ce texte est l'étude de l'équation de la chaleur et de quelques-unes de ses propriétés à travers un exemple physique simple. Si l'on considère une fonction u de la variable réelle x et du temps t , et un paramètre positif c , la forme générale unidimensionnelle de cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (\text{IV.1})$$

Cette équation fut introduite au début du XIX^e siècle par Joseph Fourier pour modéliser l'évolution de la température au cours du temps dans un milieu unidimensionnel. Il développa par la suite une méthode permettant de résoudre cette équation en utilisant des séries de fonctions cosinus et sinus. Ces travaux furent fondamentaux, car à l'origine de toute l'analyse de Fourier dont les applications se retrouvent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines de la science.

Nous nous intéressons dans un premier temps à la résolution de cette équation et à l'obtention d'un théorème d'existence et d'unicité de la solution d'un problème physique simple. Une forme explicite de cette solution sera obtenue, ce qui permettra de retrouver facilement certaines propriétés physiques concernant l'évolution de la température. Nous appliquerons ces résultats à un exemple concret et nous montrerons comment calculer une approximation numérique de la solution lorsque la forme analytique ne peut être utilisée directement.

§2. Description du problème physique

Nous considérons une situation physique simple décrite par l'expérience suivante :

Soit une barre homogène de longueur illimitée et de section négligeable à laquelle est appliquée, en un point donné, une source de chaleur $f(t)$ supposée 2π -périodique.

Nous choisissons pour simplifier l'abscisse $x = 0$ pour le point d'application, et nous nous intéressons à l'évolution de la température au cours du temps pour les points $x > 0$. L'origine des temps ($t = 0$) est choisie de façon à être dans un régime établi.

Cette expérience se modélise mathématiquement par les équations suivantes :

$$PCB \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*} \\ u(0, t) = f(t) & t \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases} \quad (IV.2)$$

où la constante c représente le coefficient de diffusion du matériau considéré. Ce problème, noté par la suite PCB , est un problème dit de *conditions au bord*.

§3. Résultats

Nous présentons dans cette partie les principaux résultats de cette étude, à savoir un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème PCB , ainsi qu'une forme explicite de cette solution.

3.1. Théorème d'existence et d'unicité

Pour le problème PCB , nous avons le résultat suivant :

Théorème IV.1 (PCB). *Soit c une constante positive et $f(t)$ une fonction continue 2π -périodique sur \mathbb{R}^+ . Alors il existe une unique fonction $u(x, t)$ où $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}$ satisfaisant aux propriétés suivantes :*

- a) $u(x, t)$ est 2π -périodique en t pour tout x .
- b) $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
- c) u vérifie $\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}$.
- d) La fonction u converge uniformément vers f par rapport à t lorsque x tend vers 0, c'est-à-dire que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{t \in \mathbb{R}^{+*}} |u(x, t) - f(t)| = 0.$$

e) La solution u est donnée par la formule suivante : pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}$:

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-\alpha_n x} e^{int - i \operatorname{sgn}(n) \alpha_n x}, \quad (\text{IV.3})$$

où :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad \text{et} \quad \alpha_n = \sqrt{\frac{|n|}{2c}}.$$

Avant de détailler la démonstration de ce théorème, nous donnons les propriétés principales qui en découlent.

3.2. Propriétés de la solution

Grâce à la forme explicite de la solution (voir (IV.3)), il est possible de démontrer les résultats suivants :

R1 : lorsque x tend vers l'infini, la température tend vers une valeur uniforme donnée par la valeur moyenne de la fonction f sur $[0, 2\pi]$.

R2 : l'équation de la chaleur a un effet régularisant : pour $x > 0$ et $t > 0$, la solution $u(x, t)$ est de classe C^∞ même si la fonction f ne l'est pas.

R3 : il existe un principe du maximum :

$$\text{pour tout } x > 0, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |u(x, t)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)| \quad (\text{IV.4})$$

qui exprime le fait qu'en un point $x > 0$ la variation de température ne peut pas être supérieure à celle induite par $f(t)$ au point $x = 0$.

§4. Démonstration du théorème PCB

La démonstration du théorème utilise les arguments avancés par J. Fourier dans ses travaux sur l'équation de la chaleur, c'est-à-dire la recherche de la solution sous forme de séries trigonométriques. Depuis cette époque, ces concepts heuristiques ont été formalisés dans ce que l'on appelle l'analyse de Fourier dont nous rappelons quelques résultats importants. Les autres prérequis sont des théorèmes classiques d'analyse concernant la convergence des séries.

4.1. Quelques rappels d'analyse de Fourier

Soit une application g , 2π -périodique, continue sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} .

Définition IV.1. On appelle *coefficients de Fourier (exponentiels)* de g les nombres complexes

$$\widehat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

et série de Fourier de g la série trigonométrique

$$S_g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) e^{int}.$$

Le théorème de Jordan-Dirichlet implique la proposition suivante :

Proposition IV.1. a) Si g est de classe C^1 , la série de Fourier de g converge normalement et donc uniformément sur \mathbb{R} et sa somme est g .

b) Pour tout n dans \mathbb{Z}^* , $\widehat{g}'(n) = in\widehat{g}(n)$.

En utilisant ces résultats, nous allons démontrer le théorème PCB dans le cas où la fonction f est de classe C^2 sur $[0, 2\pi]$. Ce théorème reste valide pour une classe plus large de fonctions f , mais sa démonstration utilise alors des concepts mathématiques plus complexes.

4.2. Preuve du théorème PCB

Cette démonstration se décompose en deux étapes principales.

- Une étape d'**analyse** où nous commençons par supposer qu'il existe une fonction $u(x, t)$ satisfaisant aux conditions mentionnées dans le théorème PCB. Ceci nous permettra d'explicitier $u(x, t)$.

A priori cette étape d'analyse fournit un ensemble de solutions qui, nous le verrons au cours de la preuve, se réduit à un singleton. Le travail de synthèse s'en trouve donc simplifié.

- Une étape de **synthèse** où nous montrons que la fonction $u(x, t)$ trouvée au cours de la phase d'analyse satisfait bien aux conditions du théorème PCB. Ceci établira ainsi l'existence et l'unicité de la solution.

Étape d'analyse

Notons

$$S_u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(x) e^{int},$$

la série de Fourier en temps de $u(x, t)$, où :

$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

et

$$S_f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int},$$

la série de Fourier $f(t)$ où :

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

D'après les propriétés *a)* et *b)* du théorème PCB et la proposition IV.1, $S_u(x, t)$ converge uniformément en temps vers $u(x, t)$, pour tout $x > 0$. D'après la propriété *d)* du théorème PCB, $u(x, t)$ converge uniformément en temps vers $f(t)$ quand x tend vers 0. On en déduit que $C_n(x)$ tend vers $\widehat{f}(n)$ quand x tend vers 0.

On multiplie alors l'équation de la chaleur vérifiée par u , propriété *c)*, par $\frac{1}{2\pi} e^{-int}$, puis on intègre entre 0 et 2π . À l'aide d'une intégration par parties pour $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-int}$ puis en utilisant la 2π -périodicité en temps de $u(x, t)$, on obtient finalement :

$$in C_n(x) = \int_0^{2\pi} \frac{c}{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) e^{-int} dt.$$

En appliquant maintenant le théorème de dérivation sous le signe intégral (justifié par le fait que $(x, t) \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} C_n''(x) &= \frac{in}{c} C_n(x) \\ &= \lambda_n^2 C_n(x), \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\lambda_n = \alpha_n + i \operatorname{sgn}(n) \alpha_n \text{ et } \alpha_n = \sqrt{\frac{|n|}{2c}},$$

avec :

$$\operatorname{sgn}(n) = 1 \text{ si } n \geq 0 \text{ et } \operatorname{sgn}(n) = -1 \text{ sinon.}$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre est :

$$C_n(x) = A_n(x_0) e^{\lambda_n(x-x_0)} + B_n(x_0) e^{-\lambda_n(x-x_0)},$$

pour un $x_0 > 0$ fixé et pour tout $x \geq x_0$. On remarque en particulier que : $A_n(x_0) + B_n(x_0) = C_n(x_0)$.

Nous « choisissons » alors de prendre

$$A_n(x_0) = 0.$$

Cette hypothèse est justifiée par le fait que u est bornée. En effet, $u(x, t)$ représente la température, c'est-à-dire une grandeur physique qui ne peut

donc pas avoir un comportement exponentiellement croissant en espace. Ceci nous conduit finalement à :

$$C_n(x) = C_n(x_0)e^{-\lambda_n(x-x_0)}, \text{ pour } x \geq x_0 > 0.$$

Puisque $C_n(x_0)$ tend vers $\widehat{f}(n)$ quand x_0 tend vers 0 :

$$C_n(x) = \widehat{f}(n) e^{-\lambda_n x} \text{ pour } x > 0.$$

La formule explicite de $u(x, t)$ est donc donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{-\alpha_n x} e^{int - i \operatorname{sgn}(n) \alpha_n x}.$$

Étape de synthèse

Nous vérifions maintenant que la formule explicite obtenue pour $u(x, t)$ lors de la phase d'analyse vérifie chacune des propriétés du théorème PCB.

- $t \mapsto u(x, t)$ est visiblement 2π -périodique en temps. Pour montrer que $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, on fait appel aux théorèmes relatifs à la dérivabilité de la somme d'une série et au fait que f étant supposée de classe C^2 , sa dérivée f' vérifie les propriétés de la proposition IV.1.
- Ce point se vérifie sans problème à partir de l'expression de $u(x, t)$ (en prenant soin de vérifier les hypothèses d'applications des théorèmes de dérivabilité de la somme d'une série avec les mêmes arguments que pour a).
- Il s'agit de montrer que $u(x, t)$ converge uniformément vers $f(t)$ quand x tend vers 0.

$$\begin{aligned} u(x, t) - f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int} (e^{-\alpha_n x - i \operatorname{sgn}(n) \alpha_n x} - 1) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) (h(1) - h(0)) e^{int} \end{aligned}$$

où l'on a posé $h(s) = e^{-s \alpha_n x - i \operatorname{sgn}(n) s \alpha_n x}$ pour $s \in [0, 1]$.

En calculant $h'(s)$, on vérifie facilement que $|h'(s)|$ est majorée sur $[0, 1]$

par $x \sqrt{\frac{|n|}{c}}$ qui est une constante indépendante de s . Finalement, pour tout t de \mathbb{R}^+ :

$$\begin{aligned}
|u(x, t) - f(t)| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| |h(1) - h(0)| \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \sup_{s \in [0, 1]} |h'(s)| \\
&\leq \frac{x}{\sqrt{c}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \sqrt{n} \frac{|n|^{3/2}}{|n|^{3/2}} \\
&\leq \frac{x}{\sqrt{c}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^3 |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}, \tag{IV.5}
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La série $\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}$ est bien une série convergente, donc une constante. Pour montrer que la famille de terme général $|n|^3 |\widehat{f}(n)|^2$ est aussi sommable, on utilise l'égalité de Parseval, que l'on applique à la fonction f'' , 2π -périodique et de classe C^0 :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f''}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f''|^2(t) dt < +\infty.$$

D'après la proposition IV.1, $|\widehat{f''}(n)| = |n^2 \widehat{f}(n)|$, d'où l'on déduit :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^3 |\widehat{f}(n)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^2 \widehat{f}(n)|^2 < +\infty. \tag{IV.6}$$

Ces deux séries étant convergentes, on obtient finalement l'existence d'une constante K indépendante de x et de t telle que : pour tout $t \geq 0$,

$$|u(x, t) - f(t)| \leq K x.$$

C'est-à-dire que $u(x, t)$ converge uniformément en temps vers $f(t)$, lorsque x tend vers 0.

Ceci achève la démonstration du théorème PCB.

§5. Applications

Il est possible à partir du problème *PCB* de modéliser l'évolution de la température à l'intérieur de la Terre en fonction de la température extérieure. En effet, nous pouvons supposer en première approximation que localement la Terre est homogène et que les fluctuations de température extérieure s'appliquent uniformément sur la surface. La variable x représente alors la profondeur et $f(t)$ les variations saisonnières sur une année (ramenée à une durée de 2π).

Janv.	Févr.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
5,7	6,9	9,3	12,0	15,8	19,5	22,5	22,0	19,0	14,6	9,5	6,3

Tableau 1. Températures moyennes en degré Celsius pour chaque mois de l'année.

Dans la suite, cette fonction f est représentée par les températures moyennes mensuelles (établies à partir d'un relevé quotidien) dans la région d'Aix-en-Provence (Voir Tableau 1).

La donnée de $f(t)$ est *discrète*, c'est-à-dire que nous disposons seulement d'un nombre fini de valeurs pour la représenter, ce nombre étant dépendant de la fréquence des relevés par exemple. L'utilisation de la formule explicite pour $u(x, t)$ est alors impossible directement puisque l'on ne peut pas calculer les coefficients de Fourier de f . Deux méthodes, au moins, peuvent alors être envisagées :

- la première consiste à approcher les valeurs discrètes par une fonction continue dont on connaît les coefficients de Fourier ;
- la seconde consiste à calculer directement une valeur approchée des coefficients de Fourier à partir des valeurs discrètes.

Première méthode

Au vu de la figure (IV.1), il n'est pas complètement déraisonnable d'approcher les valeurs discrètes par la fonction

$$f(t) = a + b \cos(t)$$

en prenant $a = 13.6^\circ$ et $b = 9^\circ$. L'avantage de cette fonction vient du fait que le calcul de ces coefficients de Fourier est immédiat. En effet :

$$f(t) = \frac{b}{2} e^{-it} + a + \frac{b}{2} e^{it},$$

soit :

$$\widehat{f}(-1) = \frac{b}{2}, \quad \widehat{f}(0) = a, \quad \widehat{f}(1) = \frac{b}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{f}(n) = 0 \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}.$$

L'évolution de la température à une profondeur x au cours de l'année est donnée par la solution du problème *PCB* qui s'exprime alors par :

$$u(x, t) = a + b e^{-\frac{x}{\sqrt{2c}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2c}} - t\right).$$

On retrouve immédiatement que lorsque x est grand, la température est quasiment constante au cours du temps, ce qui est le cas dans les grottes par exemple.

Il est également amusant de remarquer qu'il existe une profondeur x_0 à laquelle il fait plus chaud en hiver qu'en été ! En effet, on peut chercher par

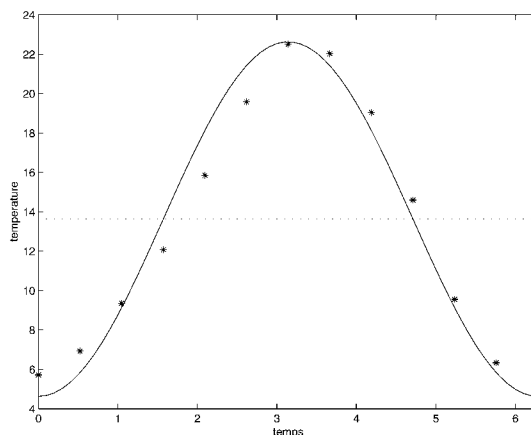


Fig. IV.1. Variation de la température extérieure au cours de l'année : valeurs relevées (*), approximation par une fonction cosinus (trait plein), valeur moyenne (pointillés).

exemple le x_0 pour lequel la température est en déphasage de π par rapport à la température extérieure, c'est-à-dire :

$$\cos\left(\frac{x_0}{\sqrt{2c}} - t\right) = \cos(\pi - t),$$

soit $x_0 = \pi\sqrt{2c}$.

L'application numérique donne $x_0 = 4$ mètres ($c \simeq 0,9$ en général). À cette profondeur, les fluctuations de température sont alors vingt fois plus faibles qu'à l'extérieur (voir figure (IV.2)), ce qui constitue un endroit idéal pour la construction d'une cave !

Deuxième méthode

Celle-ci consiste à calculer une valeur approchée des coefficients $\hat{f}(n)$ directement à partir des valeurs du relevé de température. En utilisant les 12 valeurs du tableau 1 notées $\{y_0, y_1, \dots, y_{11}\}$, nous calculons 12 coefficients $\{c_{-6}, c_{-5}, \dots, c_5\}$ par la formule suivante :

$$c_n = \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{11} y_k e^{-in \frac{2k\pi}{12}}, \quad n = -6, \dots, 5.$$

Cette expression est obtenue à partir d'une formule de quadrature dite des rectangles à gauche appliquée à l'intégrale donnant la valeur exacte des coefficients de Fourier $\hat{f}(n)$ (Définition IV.1). Il est simple de voir que c_n est une approximation de $\hat{f}(n)$. Une fois ces valeurs calculées, on approche la solution exacte u par :

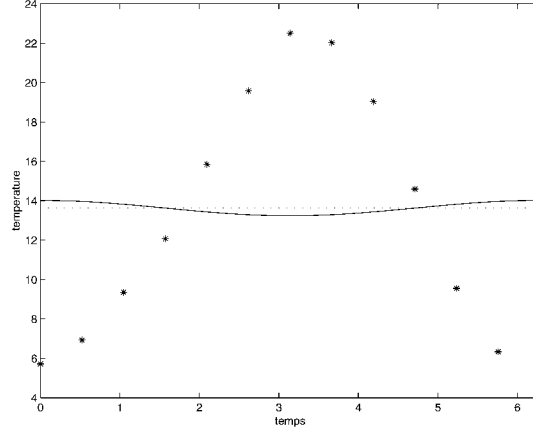


Fig. IV.2. Variation de la température à la profondeur $x_0 = 4$ mètres (trait plein) calculée avec la première méthode.

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{n=-6}^5 c_n e^{-\alpha_n x} e^{int - i \operatorname{sgn}(n) \alpha_n x}.$$

On remarque que cela revient à avoir approché la fonction $f(t)$ par

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-6}^5 c_n e^{int}.$$

Sur la figure IV.3 nous pouvons constater que cette approximation est bien meilleure que celle utilisée dans la première méthode (figure IV.1). En utilisant l'approximation de \tilde{u} , on trouve que la profondeur où le déphasage vaut π radians, est $x_0 = 4,1$ mètres.

Pour terminer, nous avons représenté sur la figure IV.4 les variations de température en fonction de la profondeur pour les mois de janvier, avril, juillet et octobre.

La méthode que nous venons d'utiliser pour passer de N valeurs discrètes $\{y_0, \dots, y_{N-1}\}$ à une approximation des N coefficients de Fourier $\{c_j, |j| \leq N/2\}$ est appelée *transformée de Fourier discrète d'ordre N* et intervient dans de nombreux domaines.

§6. Conclusion

Ce texte étudie les différentes phases de la modélisation d'un problème physique : la mise en équations, la résolution mathématique ainsi que l'application à un cas réel.

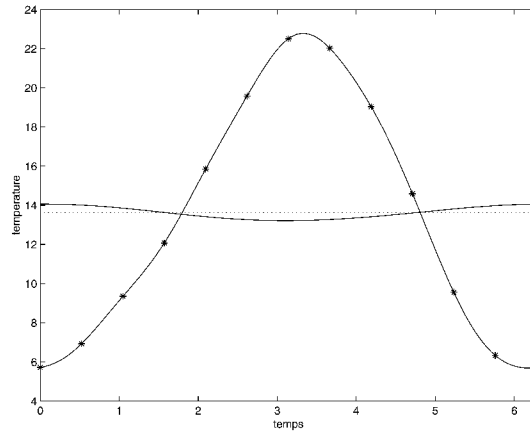


Fig. IV.3. Variation de la température au cours de l'année : valeurs relevées (*) et approximation \tilde{f} , valeur moyenne (pointillés) et variation à la profondeur de 4,1 mètres : $\tilde{u}(4,1 ; t)$.

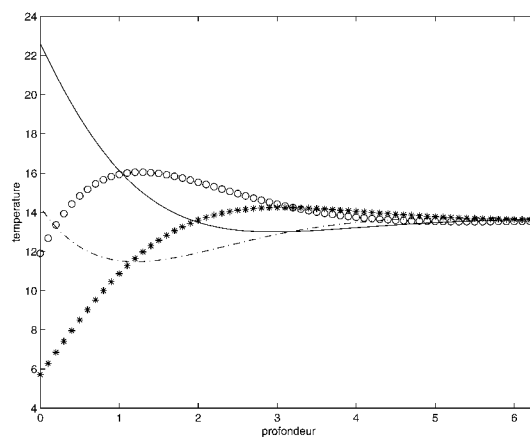


Fig. IV.4. Variation de la température en fonction de la profondeur pour les mois de janvier (*), avril (o), juillet (trait plein) et d'octobre (-.-).

Pour des problèmes physiques plus complexes, ceci n'est généralement pas possible, en particulier en ce qui concerne l'existence et l'unicité de la solution.

Dans la pratique, l'obtention d'une forme explicite de la solution peut n'être d'aucune utilité (trop complexe à évaluer dans un cas concret par exemple) et l'on préférera alors avoir recours à des techniques de résolution numérique des équations de départ.

Présentation et questions

§1. Remarques générales

Ce texte particulièrement clair se comprend facilement. La différence entre les candidats se fera donc sur ceux qui seront le plus à même de prendre du recul et de répondre aux objectifs suggérés : exhiber l'interaction entre hypothèses physiques et simplifications mathématiques, grandes idées des preuves.

§2. Piste de questions

- 1) Pourquoi la barre est-elle prise de section négligeable ?
- 2) Pourquoi ne s'intéresse-t-on qu'aux abscisses strictement positives ?
- 3) Comment prendrait-on en compte le fait que le milieu n'est plus homogène ?
- 4) La solution trouvée n'est pas valable pour les x négatifs (exponentielle croissante), que faut-il modifier dans la preuve pour qu'elle le devienne ?
- 5) Quelles sont les hypothèses du modèle qui vous semblent les plus critiquables ?
- 6) Pourquoi c_n est-il une approximation de $\widehat{f}(n)$? Comment améliorer cette approximation ?
- 7) Connaissez-vous d'autres méthodes d'approximation de fonctions que celles proposées dans le texte ?
- 8) Comment calculer les coefficients $a = 13,6$ et $b = 9$ utilisés dans la figure IV.1 ?
- 9) Quel est l'argument « formel » fondamental qui donne toute sa puissance à la méthode de Fourier développée dans le texte ?
- 10) Pourquoi impose-t-on *a priori* que f soit de classe \mathcal{C}^2 ?
- 11) Supposons montré que toute solution de l'équation de la chaleur satisfait au principe du maximum (voir propriété R3), comment peut-on en déduire l'unicité ?
- 12) Donner d'autres exemples de déphasage de température. Avez-vous déjà rencontré un phénomène analogue ?

Commentaires

§1. Réponses aux questions

- 1) *Pourquoi la barre est-elle prise de section négligeable ?*

La réponse à cette question se trouve, en grande partie, dans le texte. On peut rajouter l'argument, paradoxal et très qualitatif, suivant : si la section est, au contraire, très grande (dans un sens à définir), le flux thermique est essentiellement homogène dans une section droite et l'on retrouve un régime unidirectionnel de diffusion.

- 2) *Pourquoi ne s'intéresse-t-on qu'aux abscisses strictement positives ?*

Là aussi, la réponse à cette question se trouve, en grande partie, dans le texte. On peut aussi jeter un coup d'œil à la question 4 ...

- 3) *Comment prendrait-on en compte le fait que le milieu n'est plus homogène ?*

On attendait juste du candidat qu'il dise que c dépendrait de x . Néanmoins, dans ce cas la forme exacte de l'équation n'est pas celle indiquée dans le texte, mais plutôt¹ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Voir « Au-delà du texte ».

- 4) *La solution trouvée n'est pas valable pour les x négatifs (exponentielle croissante), que faut-il modifier dans la preuve pour qu'elle le devienne ?*

Il faut choisir $B_n(x_0) = 0$ lors de la résolution de l'équation différentielle.

- 5) *Quelles sont les hypothèses du modèle qui vous semblent les plus critiques ?*

L'aire latérale nulle interdit les pertes par rayonnement et les pertes par conduction, qui sont l'une et l'autre proportionnelles aux surfaces en contact. La longueur infinie du fil est avant tout une commodité mathématique, car la prise en compte des conditions aux bords est techniquement difficile – voir équation (IV.12). On peut, en principe se ramener à ce cas-là en plaçant à l'extrémité du fil une impédance thermique adaptée, dont l'effet serait que le profil de température dans le fil fini serait le même que si ce fil était infini. Cette adaptation d'impédance est bien connue dans la théorie et dans la pratique des circuits électriques.

Dans le cas uni-dimensionnel, il est possible, comme indiqué dans le texte, d'obtenir la forme générale de la solution, pour un fil d'aire latérale nulle

¹ la même question se pose à propos de l'équation des ondes électromagnétiques dans un milieu d'indice non uniforme ; le remplacement brutal du scalaire n par la fonction $n(x,y,z)$ dans l'équation d'onde est erroné.

et de longueur finie ; le respect des conditions aux bords se traduit par un jeu d'équations algébriques fixant la valeur des coefficients dans la forme générale donnée *a priori*.

- 6) Pourquoi c_n est-il une approximation de $\hat{f}(n)$? Comment améliorer cette approximation ?

Il suffit de remarquer que c_n est précisément une somme de Riemann dont la limite est justement $\hat{f}(n)$. Pour améliorer cette approximation, on augmente le nombre de points, c'est-à-dire le nombre de relevés de température.

- 7) Connaissez-vous d'autres méthodes d'approximation de fonctions que celles proposées dans le texte ?

L'interpolation de Lagrange, voir commentaire.

- 8) Comment calculer les coefficients $a = 13,6$ et $b = 9$ utilisés dans la figure IV.1 ?

On peut utiliser la méthode des moindres carrés. Voir sujet sur la pseudo-inverse.

- 9) Quel est l'argument « formel » fondamental qui donne toute sa puissance à la méthode de Fourier développée dans le texte ?

C'est le théorème de Jordan-Dirichlet qui transforme une dérivation en une multiplication par un monôme :

$$\widehat{g}'(n) = in \widehat{g}(n).$$

À partir de là, les C_n satisfont à une équation différentielle linéaire du deuxième ordre dont on sait expliciter les solutions. Il reste à déterminer la solution qui nous intéresse par des considérations physiques : on exclut les températures infinies donc les fonctions exponentielles croissantes.

- 10) Pourquoi impose-t-on *a priori* que f soit de classe C^2 ?

Parce que c'est une condition suffisante pour que la série de terme général $\hat{f}(n)\sqrt{n}$ soit absolument convergente. Voir l'inéquation (IV.5). On pourrait amoindrir cette hypothèse et garder ce schéma de démonstration mais cela ne changerait pas le résultat final (c'est-à-dire le théorème PCB) car on sait par d'autres moyens (voir [1]) que la seule solution de l'équation de la chaleur est celle qui est donnée ici et donc qu'elle est de classe C^∞ pour tout temps strictement positif.

- 11) Supposons montré que toute solution de l'équation de la chaleur satisfait au principe du maximum (voir propriété R3), comment peut-on en déduire l'unicité ?

Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (IV.2) alors, par linéarité, $u_1 - u_2$ est solution de la même équation avec comme condition au bord $f \equiv 0$. Le principe du maximum (IV.4) implique alors que $u_1 \equiv u_2$.

- 12) Donner d'autres exemples de déphasage de température. Avez-vous déjà rencontré un phénomène analogue ?

Barrières de dégel, ou fonte des eaux en Sibérie. La glace fond en surface et l'eau continue à geler en profondeur.

§2. Suggestion de plan

- I – Énoncé du problème et présentation des hypothèses simplificatrices.
Ne pas hésiter à dire ce qui change si l'on modifie l'une ou l'autre des hypothèses. Voir commentaire ci-dessus.
- II – Schéma de la preuve.
Comme indiqué dans le travail suggéré, ne pas se perdre dans les calculs. Même si cela est rassurant, il ne faut pas refaire les calculs lors de la présentation. Il est bien préférable d'insister sur les idées : « le passage en fréquentiel »² transforme les dérivations en multiplication, la régularité d'une fonction conditionne la vitesse de convergence vers 0, à l'infini, de ses coefficients de Fourier, on avance des arguments physiques pour faire le tri dans les solutions dans la partie Analyse etc.
- III – Exemple.
Le problème est l'interpolation de f : on travaille soit directement sur f , soit sur son développement de Fourier. On peut soulever au passage le problème de l'estimation des paramètres a et b dans la première méthode. Exhiber l'analogie avec les problèmes de T.P. de physique où l'on cherche une droite qui passe « au plus près » des points relevés lors d'une expérience³. On peut aussi mentionner la technique d'interpolation par les polynômes de Lagrange.

§3. À propos du texte

L'une des maladroresses souvent commises est de reprendre les éléments historiques mentionnés dans le texte. Lorsqu'ils n'apportent rien aux objectifs suggérés, il est judicieux de les omettre, sous peine de perdre un temps précieux.

Les premières hypothèses simplificatrices sont l'homogénéité, la longueur infinie et l'infinitement petite section de la barre, qui en font un objet ne pouvant exister physiquement ! L'homogénéité implique la constance de c ; sans cette hypothèse on devrait prendre une fonction dépendant de l'abscisse. Pour une barre de longueur limitée L , il faudrait rajouter la contrainte $u(L, t) = g(t)$. Pour tenir compte de l'épaisseur, voire du volume de la barre, il faut remplacer la dérivée seconde par rapport à x par le Laplacien dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 et donner la

² *i.e.*, considérer la transformée de Fourier de u plutôt que u elle-même.

³ Voir le passage sur la méthode des « moindres carrés » dans le sujet III.

valeur de u sur tout le bord de la barre à l'instant 0. On comprend alors mieux la dénomination de problème avec conditions au bord. Tous ces problèmes se traitent, cela fait partie de l'étude des équations aux dérivées partielles (voir [1]).

Le cas présent permet d'utiliser simplement les résultats sur les développements en série de Fourier. La démonstration du théorème PCB procède en deux étapes : une étape d'analyse dans laquelle on cherche la solution sous une certaine forme : l'équation satisfaite par u implique en effet des relations fortes sur ses coefficients de Fourier, qui réduisent à un le nombre de solutions possibles. Il reste ensuite à vérifier que l'on construit ainsi une fonction (que le développement en série de Fourier est bien convergent au moins dans un certain sens) et que cette fonction satisfait les contraintes au bord et l'équation d'évolution.

Entre l'énoncé du problème PCB et le théorème PCB, la notion de solution a été subrepticement modifiée. On exige dans le théorème plus de propriétés que les propriétés de départ, solutions de l'équation différentielle et conditions au bord. En effet, rien dans PCB n'oblige à ce que u soit périodique, que les dérivées partielles première en temps et seconde en espace soient continues *etc.* Ces hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour que la partie analyse soit plus qu'un calcul formel mais soit rigoureuse de ligne en ligne. Il se trouve qu'au bout du compte la solution construite vérifie toutes les propriétés rajoutées mais cela ne garantit pas que l'on ait ainsi toutes les solutions du problème initial – c'est cette difficulté qui amena L. Schwartz à créer les distributions, voir [3]. De fait, on montre (théorème IV.2) que le problème PCB a au plus une solution, qui ne peut donc être que celle là.

Dans la partie analyse, l'hypothèse physique selon laquelle une grandeur physique ne peut pas avoir une croissance exponentielle illimitée en espace permet de prendre $A_n \equiv 0$ et donc de déterminer explicitement C_n . Ce qui peut sembler un postulat se trouve finalement justifié par les mathématiques puisque le corpus théorique garantit qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Dans la partie synthèse, on a besoin que f soit deux fois continûment différentiable pour que u soit deux fois différentiable par rapport à x . En fait, f de classe C^2 implique que les coefficients $\hat{f}(n)$ sont des $o(|n|^2)$ pour $|n|$ grand, voir équation (IV.6). Cette dualité entre régularité de f et comportement asymptotique de ses coefficients de Fourier est l'un des outils cruciaux de l'analyse de Fourier (voir le commentaire sur la tomographie).

Le traitement de l'exemple soulève un nouveau problème : celui de l'interpolation d'une fonction. En d'autres termes, que dire du comportement d'une fonction que l'on ne connaît qu'en un nombre fini de points (en l'occurrence 12) ? Les méthodes d'interpolation sont nombreuses, seule l'interpolation polynomiale de Lagrange est supposée connue et on ne l'évoque même pas. Il y a trois raisons à cela, une fausse et deux vraies. La fausse est que le calcul des coefficients de Fourier pour un polynôme de degré 12 est plus compliqué que pour un polynôme trigonométrique. Cette raison n'est pas valable puisqu'à l'heure des logiciels de calcul formel, ce calcul se fait sans problème.

En revanche, le développement en série de Fourier comporte une infinité de termes, il faut donc tronquer ce développement, ce qui induit une deuxième approximation. L'autre bonne raison est qu'il est vraisemblable que l'approximation obtenue par polynômes de Lagrange fournisse une fonction oscillante, or on voit mal pourquoi la température varierait brusquement entre deux mois consécutifs. Cette crainte est justifiée par les calculs : tous calculs faits sous Maple (en faisant attention à renormaliser les numéros de mois de sorte que la longueur d'une année soit 2π),

```
with(CurveFitting):
T:=2*Pi/12:h:=PolynomialInterpolation([[0,5.7],[T,6.9],
[2*T,9.3],[3*T,12],[4*T,15.8],[5*T,19.5],
[6*T,22.5],[7*T,22],[8*T,19],[9*T,14.6],
[10*T,9.5],[11*T,6.3]],x);
```

Le polynôme de Lagrange pour les données du texte est :

$$\begin{aligned}
L(x) = & -2104,064414 \frac{x^{11}}{\pi^{11}} + 21331,78969 \frac{x^{10}}{\pi^{10}} \\
& - 94110,42847 \frac{x^9}{\pi^9} + 237052,7482 \frac{x^8}{\pi^8} - 375960,9209 \frac{x^7}{\pi^7} \\
& + 390408,2815 \frac{x^6}{\pi^6} - 267306,9950 \frac{x^5}{\pi^5} + 118303,8316 \frac{x^4}{\pi^4} \\
& - 32080,58722 \frac{x^3}{\pi^3} + 4763,047922 \frac{x^2}{\pi^2} - 279,9029650 \frac{x}{\pi} \\
& + 5,7.
\end{aligned}$$

Graphiquement, cela donne la représentation suivante :

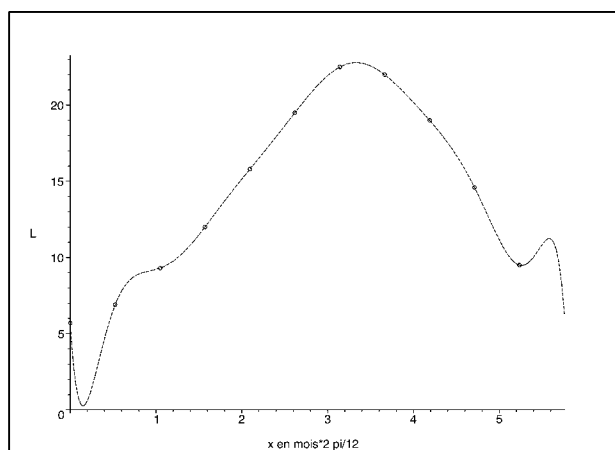


Fig. IV.5. Polynôme de Lagrange correspondant aux données du tableau 1.

L'oscillation entre novembre et décembre paraît pour le moins incongrue. On n'a pas ce problème avec l'interpolation sous la forme $a + b \cos(t)$. Il y a par contre une erreur dans le texte... b vaut -9 et non pas 9 comme cela est indiqué. Le cosinus est maximum en 0 or cela correspond à un minimum des données !

La figure IV.6 permet de comparer les courbes représentatives de cette fonction et du polynôme de Lagrange L ainsi que les points donnés.

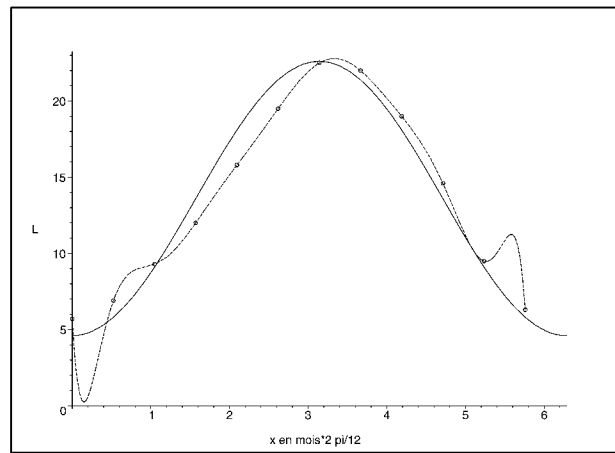


Fig. IV.6. En plein $f(t) = 13.6 - 9 * \cos(t)$, en pointillés $L(t)$.

§4. Au-delà du texte

4.1. Localité spatiale : contenu physique et traduction mathématique

L'équation de la chaleur est ce qu'il est convenu d'appeler une équation elliptique⁴.

Elle apparaît dans de nombreux domaines de la physique, où la fonction u peut représenter des quantités comme la concentration d'un produit chimique, la température, le potentiel électrique, *etc.* Revenons sur l'équation différentielle qui la régit : pour tout ouvert V de la région analysée. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, « ce qui reste égale ce qui rentre moins ce qui sort », donc

$$\frac{d}{dt} \int_V u \, dx = - \int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS,$$

⁴ Voir sujet VII. pour un autre type d'équation aux dérivées partielles, dite hyperbolique.

où F est la densité de flux, ν la normale extérieure (d'où le signe moins devant l'intégrale) et ∂V , la frontière de V définie par $\partial V = \overline{V} - V$. En vertu de la formule de Stokes, on en tire :

$$\frac{d}{dt} \int_V u(x, t) \, dx = - \int_V \operatorname{div} F(x) \, dx = - \int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS. \quad (\text{IV.7})$$

Comme V est arbitraire, cela implique :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -\operatorname{div} F \text{ dans } \Omega. \quad (\text{IV.8})$$

En première approximation (nous reviendrons plus tard sur ce point), on considère que F est proportionnel au gradient de u mais pointé dans la direction opposée (le flot va des régions de forte concentration, température, potentiel vers celles de basse température, ...) d'où :

$$F = -c \operatorname{grad} u. \quad (\text{IV.9})$$

Compte-tenu de (IV.8), on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = c \operatorname{div} \operatorname{grad} u,$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = c \Delta u(t, x). \quad (\text{IV.10})$$

Dans une forme plus élaborée, les propriétés en question dépendent elles-mêmes de la température... solution de l'équation : $\partial_t u = c(u) \Delta u$. Dans un cadre encore plus général, le milieu n'est ni isotrope ni homogène et ses propriétés varient de point en point. La relation phénoménologique de Fourier affirme une relation fonctionnelle linéaire entre la densité d'énergie interne et le vecteur flux d'énergie thermique F :

$$F = -\tilde{c}(x, u) \operatorname{grad} u,$$

où \tilde{c} , qui se présente ici comme une sorte de matrice 3×3 , est symétrique définie positive. Associée à un bilan énergétique local, cette relation donne à l'équation de la chaleur la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \operatorname{div} (\tilde{c} \operatorname{grad} u).$$

On peut encore généraliser : la relation de Fourier est spatialement locale, c'est-à-dire qu'elle affirme que le flux d'énergie thermique en un point est déterminé par la densité d'énergie interne au même point. Rien n'interdit cependant la non-localité. Le flux en x serait dans ce cas déterminé par le paysage énergétique en tous les points x' , dans tout l'espace. Soit

$$\tilde{c}(x, x', t) \operatorname{grad} u(x', t) \, dx',$$

la contribution à la température en x d'un petit domaine dx' au voisinage du point de coordonnées x' . On admettra sans peine l'invariance par translation, en vertu de laquelle cette contribution ne dépend que du vecteur $x - x'$, écart entre le point d'observation x et le point qui l'influence x' . En sommant (par linéarité), sur tous les x' , on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \int_V \tilde{c}(x - x', u) \operatorname{grad} u(x', t) \, dx'.$$

En une dimension, en supposant que \tilde{c} soit indépendant de la température, on obtiendrait :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_V \tilde{c}(x - x') \frac{\partial u}{\partial x}(x', t) \, dx' \right),$$

ce qui introduit la notion de produit de convolution de deux fonctions.

Pour deux fonctions à valeurs réelles f et g , suffisamment régulières, on définit le produit de convolution de f par g comme :

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) \, dy.$$

Remarque 4. L'analogie entre l'équation de la chaleur et l'équation de diffusion n'a rien de fortuit. Le même mécanisme est sous-jacent à ces deux phénomènes : la marche aléatoire. La théorie quantique du solide va d'ailleurs jusqu'à identifier des quasi-particules d'énergie thermique, les phonons. Les phonons sont à l'énergie thermique ce que les photons sont à l'énergie électromagnétique. La diffusion des phonons dans un milieu obéit formellement à l'équation de diffusion. Il est quelquefois commode de penser la propagation de l'énergie thermique en termes de phonons.

4.2. Irréversibilité : contenu physique et traduction mathématique

Une propriété importante de l'équation de la chaleur est que, à la différence des équations de propagation du son ou du rayonnement électromagnétique, elle décrit un phénomène irréversible. La substitution $t \mapsto -t$ change la forme de l'équation (IV.10). La nouvelle forme est :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -c \Delta u(t, x).$$

Si maintenant l'on considère une densité de sources énergétiques décrite par une fonction f indépendante du temps, on obtient l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = c \Delta u(t, x) + f(x). \quad (\text{IV.11})$$

Cette équation est incomplète si l'on ne précise pas les conditions initiales et éventuellement aux bords. Par conditions initiales, on entend la donnée de la température en tous les points de l'espace à l'instant 0. Par conditions aux bords, on entend la donnée de la température en tous les instants pour les points du « bord » de l'ensemble étudié : si Ω est le domaine ouvert, connexe, de \mathbb{R}^n qui nous intéresse, pour un temps $T > 0$ fixé, on introduit :

$$\Omega_T =]0, T] \times \Omega \text{ et } \Gamma_T = \overline{\Omega_T} - \Omega_T.$$

L'équation de la chaleur non-homogène, avec conditions initiales et aux bords est

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u &= f \text{ dans } \Omega_T \\ u &= g \text{ sur } \Omega \times \{t = 0\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Le principal défaut de la méthode soulignée dans le texte est que l'on n'est pas certain d'avoir épuisé toutes les solutions de (IV.1) puisque l'on raisonne par conditions suffisantes. Il existe peut-être d'autres solutions qui n'ont pas les propriétés de régularité imposées pour pouvoir mener à bien les calculs. Néanmoins, on a le résultat suivant :

Théorème IV.2. *Soit C_1^2 l'ensemble des fonctions u telles que u , la dérivée partielle première en temps et le Laplacien sont des fonctions continues sur $\overline{\Omega_T}$. Si Ω est un ouvert, borné, de frontière paramétrable par une fonction de classe C^1 alors il existe au plus une solution de (IV.12).*

Preuve. Si u et \tilde{u} sont deux solutions de (IV.12) appartenant à C_1^2 , leur différence w est une solution de (IV.12) avec $f \equiv g \equiv 0$. On introduit :

$$e(t) = \int_{\Omega} w^2(t, x) \, dx, \quad 0 \leq t \leq T.$$

On a, d'après l'équation satisfaite par w et par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt}(t) &= 2 \int_{\Omega} w \frac{\partial}{\partial t} w \, dx \\ &= 2 \int_{\Omega} w \Delta w \, dx \\ &= -2 \int_{\Omega} |\text{grad } w|^2 \, dx \leq 0 \end{aligned}$$

et donc $e(t) \leq e(0) = 0$, d'où $e(t) = 0$ et $w = 0$ dans $\overline{\Omega_T}$.

En revanche, si Ω n'est pas borné, il n'y pas nécessairement unicité de la solution.

4.3. Diffusion, régularisation, distributions

Outre son ubiquité en physique, l'équation de la chaleur possède de remarquables propriétés mathématiques dont quelques-unes ont déjà été dévoilées dans le texte. Considérons une autre approche pour trouver la solution de (IV.11). Soit φ la fonction définie par

$$\varphi(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4ct}\right) & \text{pour } t > 0, \\ 0 & \text{pour } t < 0. \end{cases} :$$

On vérifie que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x) dx = 1.$$

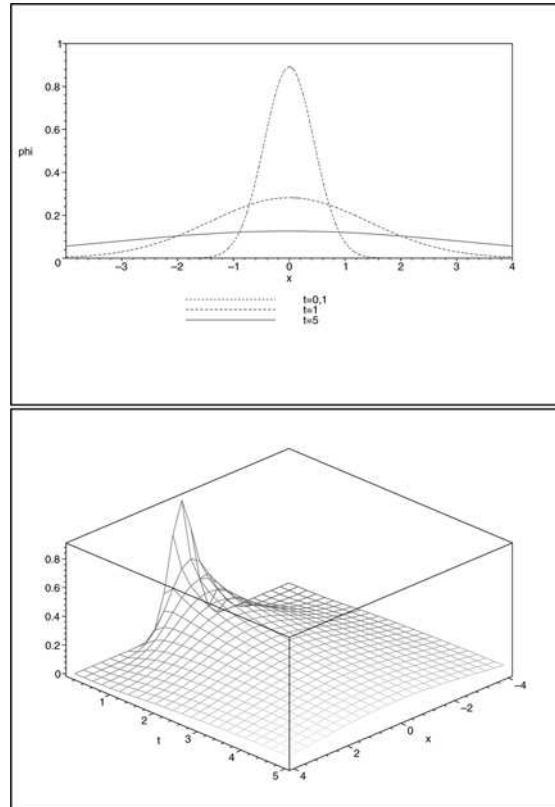


Fig. IV.7. En haut, $\varphi(x, t)$ pour $t = 0, 1$; 1 et 5. En bas, $\varphi(x, t)$ en fonction de x et de t . Le système d'unités est choisi de telle sorte que le coefficient de diffusion, noté c dans ce dossier, soit égal à 1.

Pour $n = 1$, on a représenté l'allure de la courbe de φ aux instants 0,1, 1 et 5. Plus le temps passe, plus la courbe « s'écrase ». La courbe la plus pointue correspond à $t = 0,1$. On imagine (comme cela est confirmé par la figure IV.7) que quand $t = 0$, $x \mapsto \varphi(x, t)$ ressemble de plus en plus à une « fonction » nulle partout sauf en 0 où elle serait infinie.

Un tel objet n'existe pas dans l'ensemble des fonctions usuelles mais on peut lui donner un sens dans la théorie des distributions (voir [2]). En revanche, si f est continue et bornée, on peut définir la convolution spatiale de φ et g et la convolution spatio-temporelle de φ et f :

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x - y)g(y) \, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t - s, x - y)f(s, y) \, dy \, ds.$$

La fonction φ est appelé « propagateur » en raison du théorème IV.3 qui stipule que la solution u est obtenue en propageant les conditions initiales et aux bords par une convolution de noyau φ . On montre alors le théorème suivant :

Théorème IV.3. *u ainsi définie est $C^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n)$, satisfait l'équation de la chaleur (IV.12) dans le sens où*

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega_T$$

et

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x,t) = g(x_0) \text{ pour tout } x_0 \in \Omega.$$

Les calculs sans être triviaux ne sont pas inabordables (voir [1]).

Remarque 5. La propriété de régularisation, mentionnée dans le texte, trouve ici une belle application. Plaçons-nous en dimension 1, pour $\Omega = \mathbb{R}_+^*$. Considérons la distribution initiale de température, caractérisée par sa discontinuité en $x = 0$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0, \\ -1 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

L'application du théorème IV.3 donne

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/4t} \exp(-u^2) \, du. \quad (\text{IV.13})$$

Pour $|x| \leq 0,1$ et pour $0,002 \leq 4t \leq 0,003$, la surface associée est représentée figure IV.8.

Remarquons que, la transition entre les valeurs +1 et -1 dans la condition initiale se faisant sur un intervalle de distance nul, le problème n'offre aucune échelle caractéristique de distance (pas plus que de temps d'ailleurs).

Au voisinage de l'instant initial, le raccord de température entre les deux régions se fait sur une très petite distance ; au-delà de $|x| = 0,05$, dans cet

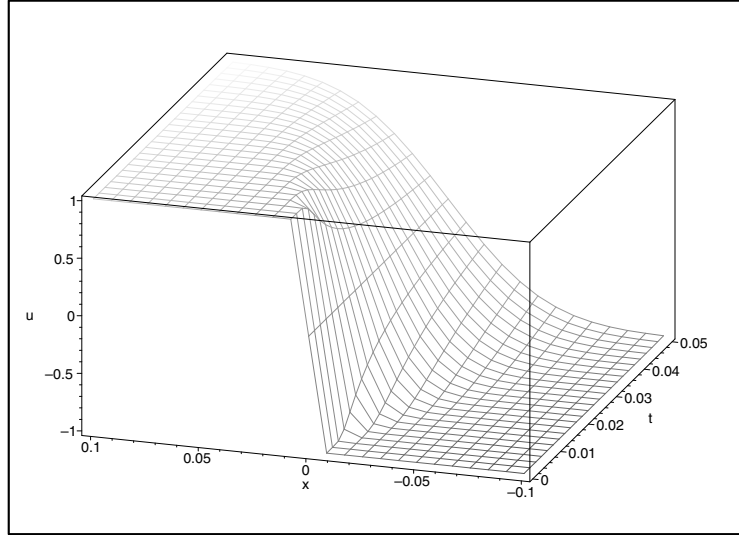


Fig. IV.8. Allure de u donnée par (IV.13) pour $|x| \leq 0,1$ et $0,002 \leq 4t \leq 0,003$.

exemple, les températures sont égales à leurs valeurs initiales respectives, soit ± 1 . Au fur et à mesure que le temps s'écoule, la pente à l'origine diminue jusqu'à tendre vers 0 ($\partial u / \partial x = (\pi t)^{-1/2}$ en $x = 0$). Au bout d'un temps infini, la température dans le milieu serait identiquement nulle, l'énergie thermique ayant complètement diffusé, voir figure IV.9.

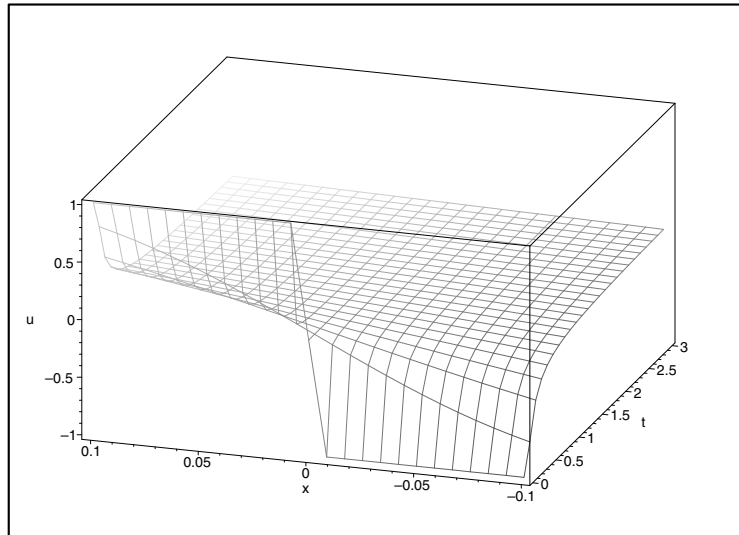


Fig. IV.9. Comportement de la température pour les temps « grands ».

4.4. Un paradoxe. Localité temporelle : contenu physique et traduction mathématique

Les considérations physico-mathématiques qui précèdent dissimulent une difficulté de taille. La voici : connaissant le champ initial de température, on obtient par convolution le champ de température aux instants ultérieurs, c'est-à-dire la température en tout point et à chaque instant. Voilà qui surprend ! Considérons pour le voir un modèle unidimensionnel, la donnée initiale étant $g(x) = g_0$ pour $|x| \leq a$ et 0 partout ailleurs. Selon le modèle développé plus haut, la température calculée serait non nulle, pour $x > a + c_0 t$, où c_0 est la vitesse de la lumière. Le principe de causalité interdit qu'il en soit ainsi. Appliqué aux problèmes de propagation avec conditions au bord, ce principe de causalité s'énoncerait ainsi (problème à la Cauchy) : soit la solution d'une équation de propagation, avec les conditions au bord. Le signal se propage à la vitesse V si $u(t, x) = 0$ dès que x est en dehors du compact $[a - Vt, b + Vt]$. Plus précisément, le domaine de dépendance d'un point est représenté figure IV.10.

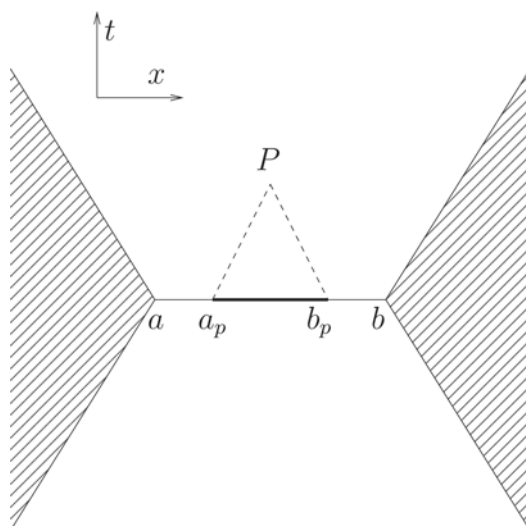


Fig. IV.10. Domaine de dépendance de u point P : l'état de la perturbation u en ce point n'est pas déterminé par l'ensemble des conditions aux bords sur $[a, b]$, mais par leur restriction sur $[a_P, b_P]$, les pentes des segments en pointillés étant $\pm V$.

Rien de tel ne se produit pour l'équation de la chaleur. La vitesse de propagation du signal est infinie, puisque tout point est « immédiatement informé » de la situation aux bords. En effet, le seul paramètre de ce problème est le

coefficient c . Sa dimension⁵ est $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$, il est impossible d'en déduire une vitesse, dont la dimension est $\text{m}.\text{s}^{-1}$.

Les calculs étant justes, c'est le modèle qui doit être remis en question. Faisons apparaître les éléments suspects, puis tentons de cerner l'origine de la difficulté. Le bilan énergétique (IV.7) ne saurait être remis en cause, la faille vient donc de la relation phénoménologique (IV.9).

Soit une région de l'espace où la température est u et une région voisine où la température est $u - \delta u$, voir figure IV.11.

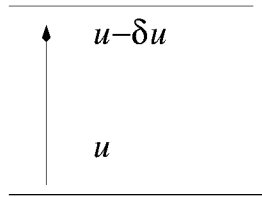


Fig. IV.11. Gradient de température.

En vertu du principe d'évolution vers un état d'équilibre, le flux thermique « vers le haut » sera plus intense que le flux thermique vers le bas. Ce dernier tire son origine de l'agitation thermique. Statistiquement, le flux thermique vers le haut l'emportera ; il est opposé au gradient thermique. Au premier ordre,

$$F = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Dans un modèle quasi particulaire, un certain temps s'écoule entre le moment où un phonon part du bas et celui où il atteint la région intermédiaire. Si la température change avec le temps, alors le flux thermique au temps t est déterminé par le gradient thermique à un instant antérieur. En somme, on introduit ici la notion de retard, qui est une non-localité dans le temps (ce qui se passe maintenant est déterminé par ce qui se passait avant). Introduisons un retard unique, τ . Écrivant, au premier ordre pour simplifier,

$$F(t, x) = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}(t - \tau, x) \approx -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(u(t, x) - \tau \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right)$$

et tenant compte de l'équation de conservation, on aboutit à l'équation différentielle mixte du troisième ordre, peu engageante en dépit des simplifications qui nous y ont conduits :

⁵ Attention ; nous suivons ici la notation du texte. Le physicien aurait sans doute noté ce coefficient D , réservant la notation c à une vitesse.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u &= c\left(\Delta u - \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta u \\ &= c\left(\text{Id} - \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta u.\end{aligned}$$

Dans un cadre fonctionnel adéquat (voir [4]), c'est-à-dire un bon ensemble de fonctions, on peut introduire l'opérateur linéaire $P_t = \text{Id} - \tau \partial_t$. Pour τ suffisamment petit (il est nul dans la théorie standard), on peut espérer pouvoir appliquer les mêmes approximations aux opérateurs qu'aux fonctions, d'où

$$(\text{Id} - \tau \partial_t)^{-1} \approx \text{Id} + \tau \partial_t.$$

Le résultat est l'équation dite des télégraphistes :

$$\tau \frac{\partial^2}{\partial t^2}u + \frac{\partial}{\partial t}u = c\Delta u,$$

qui permet d'exprimer la vitesse caractéristique $V = \sqrt{c\tau^{-1}}$, ainsi que la distance caractéristique $L = \sqrt{c\tau}$, bien connues en théorie de la diffusion. Dans une deuxième tentative de restauration de la causalité, il faut remarquer que la relation phénoménologique de Fourier⁶, $F = -\lambda \text{grad}(u)$, est locale dans le temps : la cause (gradient) et l'effet (courant) sont simultanés. Le système réagit instantanément. L'information « gradient » se propage à la vitesse infinie. Il n'en est bien sûr rien dans la réalité. Les praticiens des circuits électriques le savent depuis longtemps.

Considérons en effet la loi d'Ohm généralisée. En notation complexe (et avec des notations qui vont de soi) :

$$\underline{J}(\omega) = \underline{\sigma}(\omega) \cdot \underline{E}(\omega) = -\underline{\sigma}(\omega) \cdot \text{grad } \underline{U}(\omega)$$

traduit le fait que, à une fréquence angulaire donnée, le courant et le gradient de potentiel aux bornes d'un dipôle sont proportionnels. Cette relation, écrite pour des grandeurs harmoniques, n'est pas transportable pour des grandeurs temporelles. Elle ne signifie pas $J(t) = -\sigma \cdot \text{grad } U(t)$, ni même $J(t) = -\sigma(t) \cdot \text{grad } U(t)$. Le produit ordinaire pour des grandeurs harmoniques est équivalent au produit de convolution pour les grandeurs temporelles qui leur sont associées. Le lien entre ces deux représentations se fait par la transformée de Fourier. On obtient, en représentation temporelle,

$$J(t) = \int_0^t \sigma(s) E(t-s) \, ds.$$

La dernière ligne signifie que le courant à l'instant t est déterminé par le champ (ou le potentiel) à tous les instants antérieurs à t . C'est la causalité,

⁶ Le physicien lira : $\mathbf{F} = -\lambda \text{grad}(u)$. Conformément à l'usage courant dans les dossiers de mathématiques, c'est le contexte qui précise la nature algébrique (scalaire ou vecteur) des objets. Nous suivons ici cette convention, qui ne gêne en rien la compréhension du texte.

encore une fois. L'analogie entre la phénoménologie de Fourier et celle d'Ohm est frappante.

Il suffit donc, pour pallier la difficulté, d'écrire la relation de Fourier, non pas en utilisant des variables temporelles, mais en utilisant des variables fréquentielles. Pour finir, considérons l'implication d'une équation de Fourier des télégraphistes, telle que celle que nous proposons :

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = c \Delta u.$$

L'analyse en ondes planes de la solution, $u = u_0 \exp(ikx - i\omega t)$, donne :

$$-\tau\omega^2 - i\omega = -\underline{c}k^2 \implies \underline{c}(k, \omega) = \frac{i\omega(1 - i\omega\tau)}{k^2}.$$

En l'absence de retard ($\tau = 0$), l'analyse de Fourier donne :

$$-\underline{c}_0 k^2 = i\omega \implies \underline{c}_0 = \frac{i\omega}{k^2}.$$

La combinaison de ces deux résultats introduit un filtre passe-bas supplémentaire :

$$\underline{c}(\tau) = (1 - i\omega\tau)\underline{c}(0) \approx \frac{\underline{c}(0)}{1 + i\omega\tau}.$$

Ces problèmes de dépendance temporelle étant désormais délaissés, il demeure que le domaine d'applicabilité de l'équation de la chaleur est celui où les variations de température sont suffisamment petites pour que l'on puisse tenir pour constants les paramètres physiques décrivant le milieu. Ces paramètres incluent la chaleur massique c , la masse volumique μ et la conductibilité thermique λ .

4.5. Une équation sans solution stationnaire

En présence de sources énergétiques de densité volumique $s(x, t, u)$, l'équation de la chaleur, dans un milieu homogène et isotrope, est (observer le signe du terme de droite !) :

$$\mu(u)c(u)\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -s(x, t, u). \quad (\text{IV.14})$$

Cette équation n'est pas linéaire (le principe de superposition ne lui est pas applicable). L'existence de solutions est soumise à des conditions complexes. Considérons la situation suivante, qui pourrait décrire un réacteur chimique unidimensionnel, siège de réactions exothermiques thermiquement activées :

- le milieu est illimité selon les variables cartésiennes y et z ;
- les parois ($x = \pm L$) sont maintenues à la température u_p ;
- il y a production d'énergie, de densité volumique $s = s_0 \exp(a(u - u_p))$;

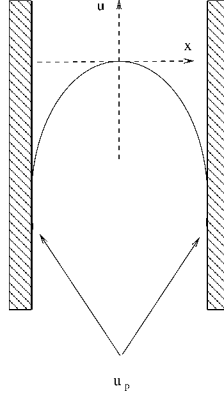


Fig. IV.12. Allure de la solution de (IV.14).

- les phénomènes sont stationnaires et ne dépendent que de x ;
- les propriétés du milieu ne dépendent pas de la température.

L'allure de la solution vraisemblable de l'équation de la chaleur dans ce cas est donnée figure IV.12.

Les parois sont supposées « froides », la symétrie est évidente. Il s'agit de déterminer l'équation de ce profil, $u(x)$, sachant que⁷ :

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -s_0 \exp(a(u - u_p)).$$

Les substitutions par les grandeurs réduites :

$$\theta = a(u - u_p) \text{ et } x = \left(\frac{\lambda}{2as_0} \right) v,$$

puis la multiplication par $d\theta/dv$ donne :

$$\left(\frac{d\theta}{dv} \right)^2 = -\exp(\theta) + \text{constante}.$$

La constante est telle que, au centre du réacteur, $\theta = \theta_c$ et

$$\left(\frac{d\theta}{dv} \right)_{\theta=\theta_c=0}.$$

On obtient donc :

$$\left(\frac{d\theta}{dv} \right)^2 = \exp(\theta_c) - \exp(\theta).$$

⁷ La forme qui vient surprendra les lecteurs habitués à la relation thermodynamique $s = a_0 \exp(-H/kT)$, où k est la constante de Boltzmann et H une certaine fonction thermodynamique. Au voisinage d'une température u_0 , un développement au premier ordre par rapport à $u - u_0$ donne bien la forme donnée.

Par intégration entre le centre et la paroi du réacteur, on établit la relation :

$$I(\theta_c) = \int_0^{\theta_c} \frac{d\theta}{\sqrt{\exp(\theta_c) - \exp(\theta)}} = \left(\frac{2as_0L^2}{\lambda} \right)^{1/2}.$$

L'intégrale est calculable, non sans peine :

$$I(\theta_c) = 2 \exp\left(-\frac{1}{2}\theta_c\right) \cdot \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1 - \exp(-\theta_c)}\right). \quad (\text{IV.15})$$

La constante d'intégration est déterminée par

$$I(\theta_c) = \sqrt{\frac{2as_0L^2}{\lambda}}.$$

La fonction $I(\theta_c)$ s'annule pour $\theta_c = 0$ et pour θ_c infini. Elle est bornée, et passe donc par un maximum, I_{max} . La courbe IV.13 précise des valeurs numériques ($\theta_c \approx 1,187$, $I_{max} \approx 1,325$).

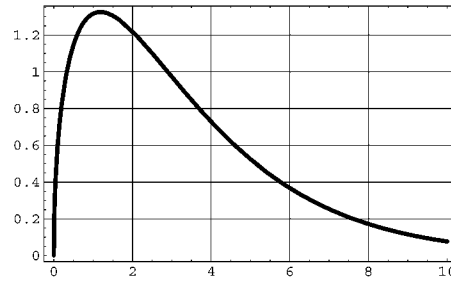


Fig. IV.13. Allure de la courbe représentative de la relation IV.15.

L'étude est maintenant conclue : si $2as_0L^2\lambda^{-1} > I_{max}^2$, c'est-à-dire si le taux d'activation a , ou le taux de production s_0 , ou la taille du réacteur L ou la résistivité thermique λ^{-1} sont trop importants, l'évacuation de l'énergie thermique est insuffisante, la réaction s'emballe... c'est l'explosion ! Mathématiquement, et de façon moins dramatique, l'équation stationnaire n'a pas de solution.

Ainsi que cela est dit dans le texte pour la dimension 1, la solution de (IV.12) vérifie le *principe du maximum* : le maximum de u est atteint « aux bords ». En dimension supérieure, cela reste vrai et s'écrit :

$$\max_{(t,x) \in \Omega_T} u = \max_{(t,x) \in \Gamma_T} u,$$

pour tout $T > 0$. Physiquement, cela signifie que la température ne peut pas être plus élevée à l'intérieur que sur les bords.

Ce principe induit lui aussi un paradoxe. Si l'on considère u la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ u = g & \text{dans } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

avec g positive alors u est positive sur tout Ω_T . Il suffit que g soit strictement positive en un endroit de Ω pour que u le soit partout et pour tous les temps strictement positifs. C'est une nouvelle illustration de ce que « l'information » se propage à une vitesse infinie dans le cadre de ce modèle.

4.6. Barre de longueur finie et d'aire non nulle

C'est ici un au-delà du modèle, qui considérerait un fil illimité.

Un barreau cylindrique de rayon R et de longueur L est en contact thermique, par son extrémité gauche, avec une enceinte maintenue à la température T_0 . La température de l'air ambiant est notée T_a . Le rayon du barreau est suffisamment petit devant sa longueur pour que l'on puisse négliger les variations de température avec la coordonnée radiale r . La température ne dépend donc que de la variable longitudinale x et du temps t .

Le bilan thermique d'une tranche de barreau de longueur dx fait intervenir la conduction à travers les sections droites d'abscisses respectives x et $x + dx$ et la convection à travers la surface latérale. La puissance cédée à l'extérieur par l'unité de surface du barreau est notée $\phi(x) = h(T(x) - T_a)$. On établit classiquement que, si D est la diffusivité du matériau constituant le barreau et λ sa conductivité thermique, l'équation de la chaleur s'écrit⁸

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} - 2 \frac{h}{\lambda R} (T(x, t) - T_a) = 0.$$

La solution en régime permanent fait intervenir deux constantes d'intégration. L'une d'entre elles exprime la condition $T(0) = T_0$. L'autre exprime la nullité du flux thermique en $x = L$, soit $h(T(L) - T_a) + \lambda dT/dx = 0$. Tout calcul fait, on trouve, en posant $q = \sqrt{2h/\lambda R}$:

$$T(x) = T_a + (T_0 - T_a) \frac{(h + \lambda q) \exp[q(L - x)] - (h - \lambda q) \exp[-q(L - x)]}{(h + \lambda q) \exp(qL) - (h - \lambda q) \exp(-qL)}.$$

À l'extrémité droite de l'aillette la température est

$$T(L) = T_a + (T_0 - T_a) \frac{2\lambda q}{(h + \lambda q) \exp(qL) - (h - \lambda q) \exp(-qL)}.$$

Cette température n'est égale à celle de l'air ambiant que dans la limite d'un barreau infini. Introduisons les grandeurs normalisées

⁸ Nous reprenons à partir d'ici les notations usuelles pour la température et pour la diffusivité.

$$\theta = \frac{T - T_a}{T_0 - T_a} \text{ et } X = \frac{x}{L}.$$

La figure IV.14 donne la représentation de θ en fonction de X pour deux longueurs (normalisées) de barreau : $L = 5$, en trait plein et $L = 0,4$, en pointillés. On constate que la température de l'extrémité libre du barreau long est pratiquement égale à la température ambiante. Dans ces deux figures, $\lambda q = 0,5h$.

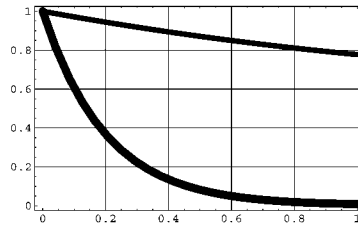


Fig. IV.14. Profil de la température normalisée le long du barreau.

La figure IV.14 est légèrement trompeuse en ceci que l'abscisse normalisée $x = 1$ correspond à deux longueurs différentes. Sur la figure IV.15, on représente, avec les mêmes abscisses, le profil de température des deux barreaux précédents. On constate que le refroidissement est plus efficace avec le barreau long : à la même distance de l'objet à refroidir, la température y est plus basse.

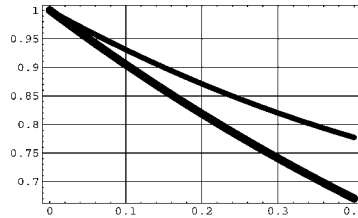


Fig. IV.15. Profil de température avec les mêmes abscisses.

Un tel barreau est nommé *ailette de refroidissement*. L'efficacité de l'ailette, η , est définie comme le rapport entre le flux thermique surfacique qu'elle évacue, $\Phi_{ail} = -\lambda T'(0)$ et le flux thermique qui serait évacué sans elle, $\Phi_h = h(T_0 - T_a)$. Dans le cas d'une ailette de longueur infinie, $\eta = \lambda q/h$.

Bibliographie

1. L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
2. L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, 1980.
3. L. Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, 1997.
4. K. Yosida, *Functional analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the sixth (1980) edition.