① Soit l'équation des plaques minces décrivant les vibrations d'une plaque à deux dimensions:

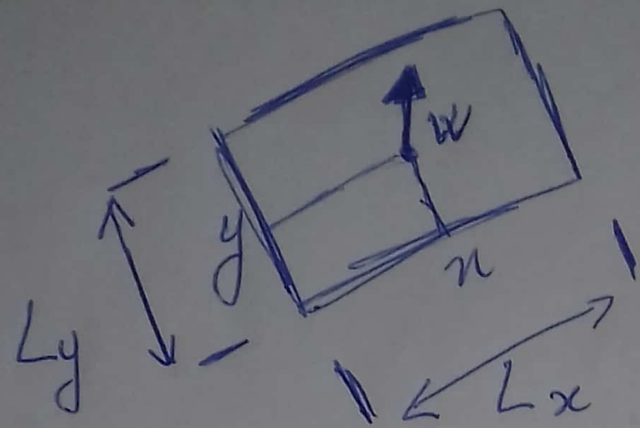
$$D \nabla^4 w(x,y,t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = 0$$

- $w(x,y,t)$ le déplacement transversal
- D la rigidité de flexion
- $D = \dfrac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$
- h épaisseur,
- ρ masse volumique,
- E module de Young,
- ν coefficient de Poisson,

$\nabla^4 \equiv \Delta^2$ est l'opérateur biharmonique ou double laplacien.

$$\nabla^4 \equiv (\nabla^2)^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

(2)



Soit le système suivant:

$$
\begin{cases}
D\left(\dfrac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial x^4} + 2\underbrace{\dfrac{\partial^2 \partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2 \partial y^2}}_{\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}} + \dfrac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial y^4}\right) + \rho h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\[2ex]
w(x,y,t) = 0 \quad \text{pour } x = 0,\ x = L_x,\ y = 0,\ y = L \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = L_x \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour } y = 0 \text{ et } y = L_y
\end{cases}
$$

③ Soit le changement de variable

$$f = \Delta w$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} f = \Delta w \\ D_x \, \Delta f + \rho h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$w = 0$ tout au long des bords, $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$, $y = L_y$

$f = 0$ tout au long des bords, $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$, $y = L_y$.

(car tout simplement $f = \Delta w$)

Discrétisation numérique ~~de l'équation~~ du système précédent avec la méthode de différences finies (dite aussi Euler explicite) ou Leap-Frog ~~dite~~ à

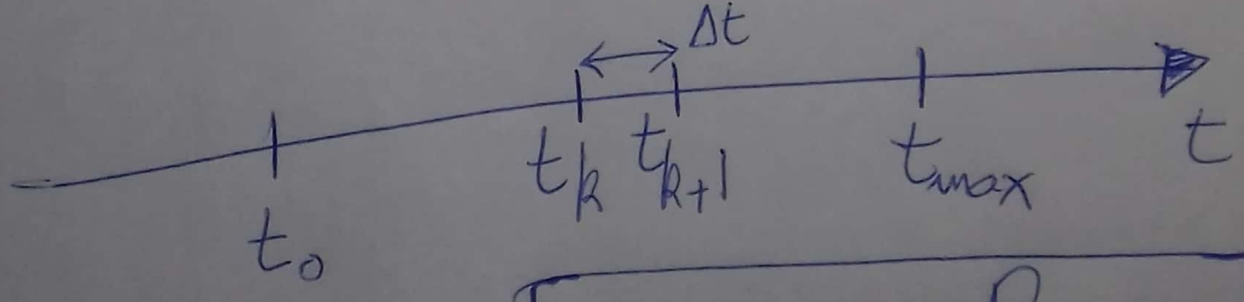
Saut de grenouille
mouton.

Commençons par ce terme $\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2}$

Tout d'abord,
choix de l'intervalle temporel:

$$[t_0 , t_{max}]$$

$\Delta t \equiv$ le pas temporel



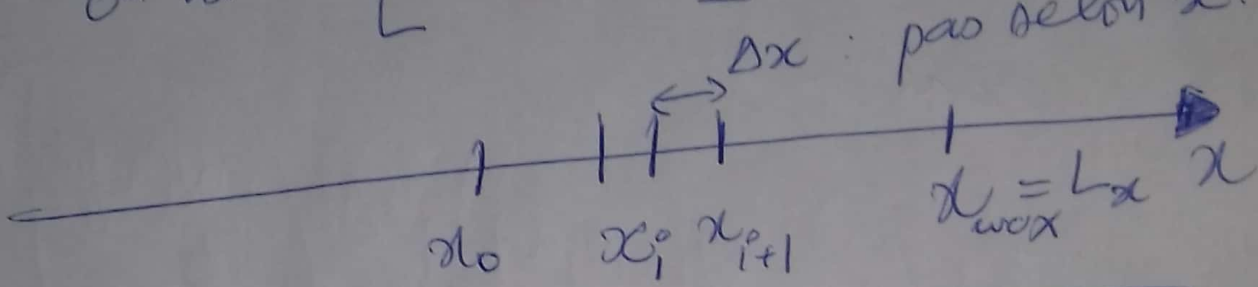
$$\boxed{t_k = t_0 + k * \Delta t}$$

⑤

- Choix de l'intervalle spatial selon x :

$$[x_0, x_{max}]$$

ou bien $[0, L_x]$

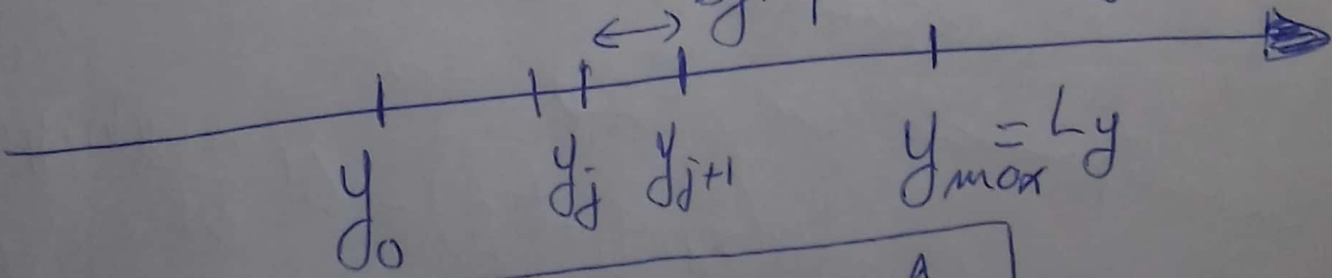


$$\boxed{x_i = x_0 + i * \Delta x}$$

- Choix de l'intervalle spatial selon y :

$$[y_0, y_{max}]$$

ou bien $[0, L_y]$



$$\boxed{y_j = y_0 + j * \Delta y}$$

(6)

$w(x,y,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à t ~~t_0~~, sur l'intervalle $[t_0, t_{max}]$

On applique un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$w(x_i, y_j, t_k + \Delta t) = w(x_i, y_j, t_k) + \Delta t \left.\frac{\partial w(x_i, y_j, t)}{\partial t}\right|_{t=t_k} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 w(x_i, y_j, t)}{\partial t^2}\right|_{t=t_k} + O(\Delta t^2)$$

fixe à x_i fixe à y_j

terme additionnel qui n'apparaît pas dans l'équation originale. on effectue un autre développement en t_k donc

$$w(x_i, y_j, t_k - \Delta t) = w(x_i, y_j, t_k) - \Delta t \left.\frac{\partial w(x_i, y_j, t)}{\partial t}\right|_{t=t_k} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 w(x_i, y_j, t)}{\partial t^2}\right|_{t=t_k} + O(\Delta t^2)$$

⑦ On somme les deux développements de Taylor et pour simplifier l'écriture on remplace : $x_i \xrightarrow{\text{par}} i$

et $y_j \longrightarrow j$

et $t_k \longrightarrow k$

et $w(x_i, y_j, t_{k+1}) \stackrel{\text{par}}{=} w_{i,j}^{k+1}$

donc :

$$w_{i,j}^{k+1} + w_{i,j}^{k-1} \cong 2\, w_{i,j}^{k} + \frac{(\Delta t)^2}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \times \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]_{t=t_k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]_{t=t_k} \cong \frac{w_{i,j}^{k+1} + w_{i,j}^{k-1} - 2\, w_{i,j}^{k}}{(\Delta t)^2}} \quad (1)$$

On remarque que nous avons négligé les termes d'ordres supérieurs à Δt^2

$$O(\Delta t^2)$$

"Le prix à payer pour faire la résolution numérique c'est de faire une approximation"

(8) Discrétisons le terme $\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2}$:

qui se trouve dans le laplacien Δw

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x,y,t)$$

$$w(x_i + \Delta x, y_j, t_k) \overset{\Delta x \to 0}{=} w(x_i, y_j, t_k) + \Delta x \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x=x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{x=x_i} + O((\Delta x)^2)$$

De même

$$w(x_i - \Delta x, y_j, t_k) \overset{\Delta x \ll 1}{=} w(x_i, y_j, t_k) - \Delta x \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right]_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_i + O(\Delta x^2)$$

On fait la somme :

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{x=x_i} \simeq \frac{W_{i+1,j}^k + W_{i-1,j}^k - 2 W_{i,j}^k}{(\Delta x)^2}$$

(9)

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=y_j} \overset{\Delta y \to 0}{=\!=} \frac{w_{i,j+1}^k + w_{i,j-1}^k - 2\, w_{i,j}^k}{\Delta y^2}$$

Passons à $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$f(x,y,t)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{\Delta x \ll 1}{\simeq} \frac{f_{i+1,j}^k + f_{i-1,j}^k - 2\, f_{i,j}^k}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{\Delta y \to 0}{\simeq} \frac{f_{i,j+1}^k + f_{i,j-1}^k - 2\, f_{i,j}^k}{(\Delta y)^2}$$

On réécrit notre ~~équation~~ système d'équations en

(x,y) 2D dans l'espace réel

(x,y,t) 3D dans l'espace de phase (l'espace de paramètres)

(10)

$$\begin{cases} b = \Delta w \\ D\Delta b + \rho h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$ devient

$$\begin{cases} b_{i,j}^{k} = \dfrac{w_{i+1,j}^{k} + w_{i-1,j}^{k} - 2w_{i,j}^{k}}{(\Delta x)^2} + \dfrac{w_{i,j+1}^{k} + w_{i,j-1}^{k} - 2w_{i,j}^{k}}{(\Delta y)^2} \\ D \times \left(\dfrac{b_{i+1,j}^{k} + b_{i-1,j}^{k} - 2b_{i,j}^{k}}{(\Delta x)^2} + \dfrac{b_{i,j+1}^{k} + b_{i,j-1}^{k} - 2b_{i,j}^{k}}{(\Delta y)^2} \right) + \\ + \rho h \dfrac{w_{i,j}^{k+1} + w_{i,j}^{k-1} - 2w_{i,j}^{k}}{(\Delta t)^2} = 0 \end{cases}$$

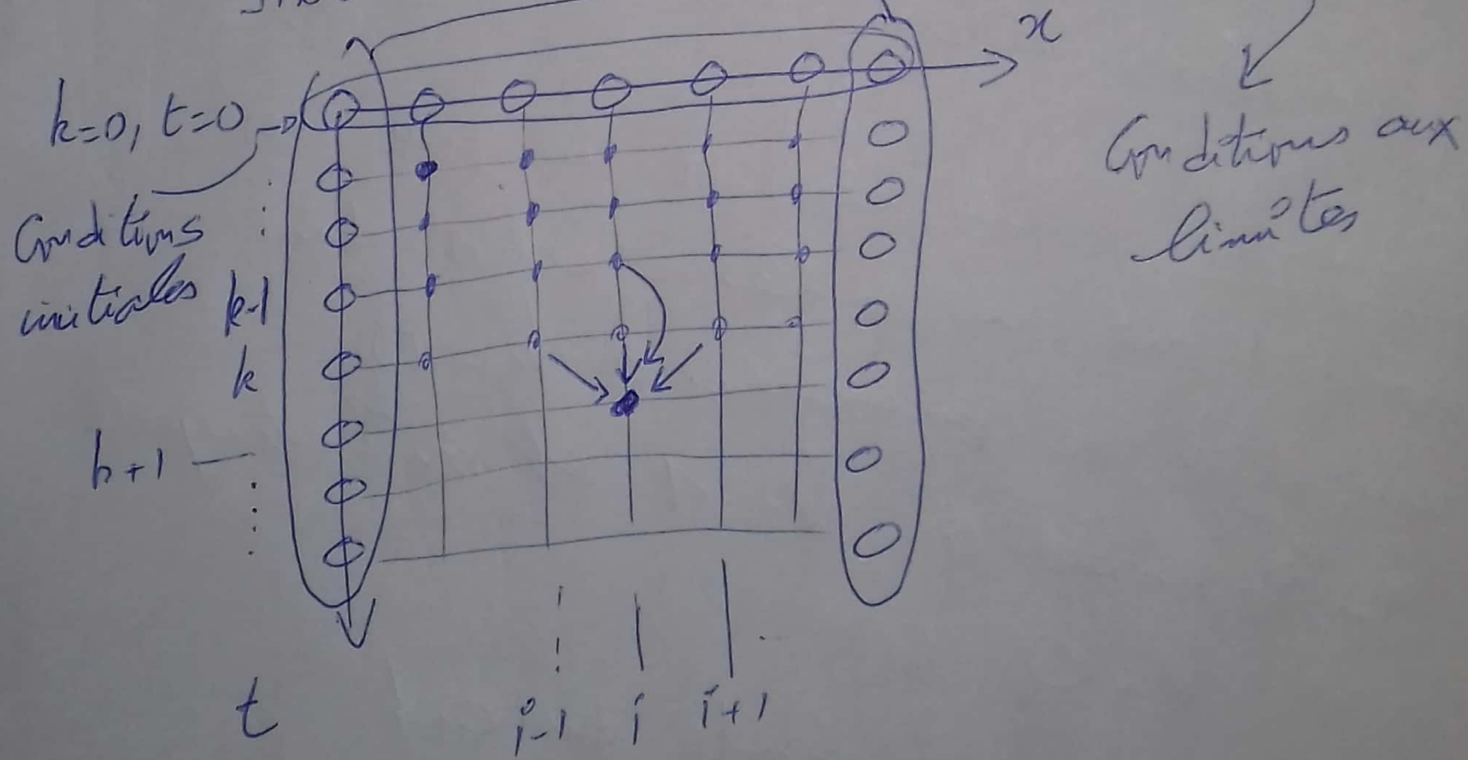
L'idée est d'exprimer le terme en $(k+1)$ en fonction des autres termes

- $k+1$ c'est t_{k+1} : instant futur
- k c'est t_k : instant présent

$$w_{ij}^{k+1} = -D\left(\frac{f_{i+1,j}^{k} + f_{i-1,j}^{k} - 2f_{ij}^{k}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^{k} + f_{i,j-1}^{k} - 2f_{ij}^{k}}{(\Delta y)^2} \right) \times \frac{\Delta t^2}{\rho h} + 2w_{ij}^{k} - w_{ij}^{k-1}$$

$$f_{ij}^{k} = \frac{w_{i+1,j}^{k} + w_{i-1,j}^{k} - w_{ij}^{k}}{(\Delta x)^2} + \frac{w_{i,j+1}^{k} + w_{i,j-1}^{k} - 2w_{ij}^{k}}{(\Delta y)^2}$$

PROJECTION SUR LE PLAN (x,t) à y fixe



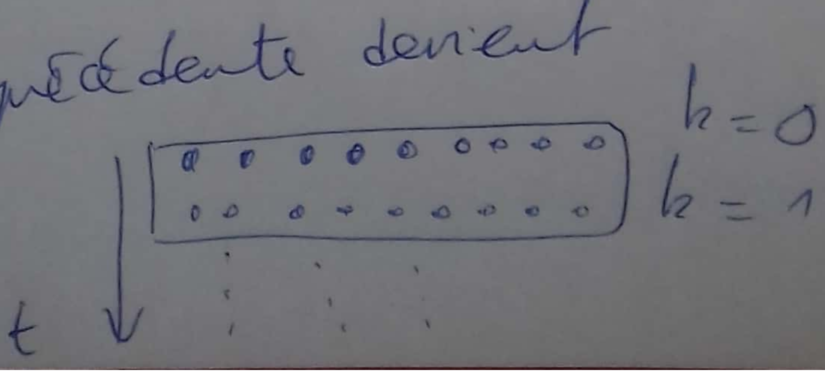
12)

~~Le petit~~ À ce niveau,
On rencontre un petit problème:

" Les relations de récurrence obtenues nécessitent ~~de~~ deux instants antérieurs (t_k et t_{k-1})"

<u>Question</u>: Comment <u>initialiser</u> ces relations de récurrence?, Dans un cas où les conditions initiales sont données en un seul instant $t=0$ $(k=0)$!

<u>Solution</u>: On décale un peu nos conditions initiales c'est à dire au lieu de commencer à $k=0$ on les prendre à $k=1$ et on extrapole pour $k=0$ donc
la matrice précédente devient



(13) Concrètement:

Soit les conditions initiales suivantes:

* $W(x,y,0) = \sin(\pi p x) \times \sin(\pi q y)$

$p = 1, 2, \ldots$

$q = 1, 2, \ldots$

Il suffit de choisir p et q.

** $\dfrac{\partial W(x,y,t=0)}{\partial t} = 0$ ce qui signifie que la plaque a été libérée du repos.

(14) Justification de l'astuce

$$\frac{\partial W(x,y,t=0)}{\partial t} \simeq \frac{W(x,y,\Delta t)-W(x,y,-\Delta t)}{2\Delta t}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{W(x,y,\Delta t)=W(x,y,-\Delta t)}$$

$$\Rightarrow W_{ij}^{0}=W_{ij}^{2}$$