Les milieux financiers: Entre aléas et prédictions

Aymen Ben Brick
Ahmed Rebai

Plan

- Introduction: Instruments Dérivées, Risques Financiers, Couverture, Options
- Black & Scholes : Hypothèses, EDP & Démonstration, Limites
- Approche Binomiale : Avantages, Inconvénients
- Application au calcul d'une prime d'assurance : Approche basique (BSM), Approche avancée, Prise en compte du Bonus, Grille Tarifaire & comparatif

Introduction

Instruments Fermes & Dérivés

- Une vaste variété d'instruments financiers à la base de transactions en gré à gré ou sur les marches organisés (Bourses)

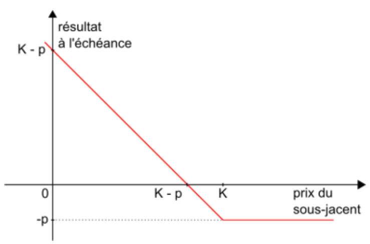
- Les Fermes : Actions, Obligations, Taux d'intérêt, Change, Matière première, Métaux précieux, Energie, … Il faut acheter avant de vendre

- Les Dérivées : instruments financiers dont la valeur est dérivée de la valeur d'un autre instrument (dit sous-jacent), par exemple :
  - Futurs : Vente à terme d'un bien à un prix déterminé. On peut vendre avant d'acheter
  - Options : Le droit d'acheter ou de vendre un sous-jacent qui peut être un Spot ou un futurs

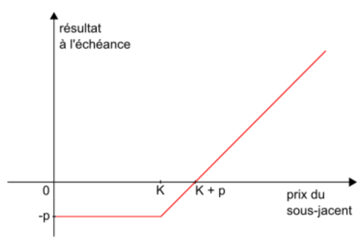
Couverture de risques

- **Futures**: Lorsque son activité se développe à l'étranger, l'entreprise, en concluant des contrats dans des devises étrangères, s'expose de fait au risque de change. Les contrats à terme sont une solution prisée pour anticiper le risque de change en cristallisant le taux de change à terme dès aujourd'hui. On peut vendre un contrat futur sans être forcément en possession du sous-jacent

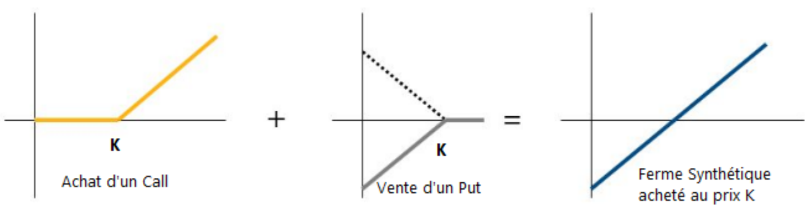
- **Options**: C'est une assurance contre la baisse ou la hausse d'un cours sans forcément vendre ou acheter le sous-jacents. Pour l'acheteur, le risque est limité au coût de la prime et le gain potentiel est illimité; Pour le vendeur, le gain maximum correspond à la prime alors que la perte est en théorie illimitée. La stratégie de couverture est bien plus flexible grâce aux Calls et aux Puts à divers Strike, on peut construire n'importe quel profil de P&L



Put = Max(0, K-S)



Call = Max(0, S-K)



Call - Put = S - Ke^{-rt}

Options : Lexique

- Option européenne: Uniquement à la date d'échéance prédéfinie T, le détenteur de l'option a le droit et non l'obligation d'échanger un actif financier prédéterminée et appelé sous-jacent S, à un prix spécifié appelé Strike K.
- Exercice d'une option: livraison effective du sous-jacent ou règlement en espèces de la différence entre le prix du marché et le Strike
- Prix d'exercice ou strike: le cours auquel l'option donne le droit d'acheter ou de vendre le sous-jacent
- Option américaine: peut être exercée à tout moment jusqu'à l'échéance
- Prime: prix de transaction de l'option

Black & Scholes

Pricing d'Options

- La valeur d'une option dépend de T, K, le taux sans risque r et le cours du sous-jacent S.

- Hypothèse de Bachelier (1900): La variation du cours S est aléatoire et suit une loi normale.

- Black & Scholes supposent que c'est le logarithme du cours qui suit une loi normale; c.a.d qu'à un instant donné la variation du cours est proportionnelle au cours et elle est composé d'une partie intrinsèque (rémunération dans le temps dt par le taux sans risque r) à laquelle s'ajoute une variation aléatoire dz avec une amplitude σ (volatilité). dz est un mouvement brownien içi une variable aléatoire normale avec une espérance nulle et une variance dt

$$\frac{dS}{S} = r.dt + \sigma.dz$$

L'équation de Black-Scholes

- Les hypothèses de Black & Scholes :
  - Option Européenne - Volatilité Constante - Taux sans risque constant
  - Le raisonnement d'arbitrage: Si deux produits financiers présentent les mêmes flux quelque soit l'évolution du marché, alors ils ont le même prix.
  - Hypothèse implicite : absence d'opportunités d'arbitrage

- Pour toute option de valeur V fonction de S et t, Black & Scholes ont d'abord taylorisé $V(S,t)$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \ldots$$

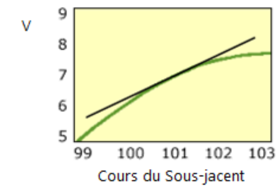
En remplaçant *dS par sa valeur* $dS = S.r.dt + S.\sigma.dz$

et en s'appuyant sur le Lemme d'Itô $dz^2 = dt \quad dz.dt = 0 \quad dt^2 = 0$

On obtient $dS^2 = S^2.\sigma^2.dt$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + S.r\frac{\partial V}{\partial S} dt + S.\sigma.dz + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \quad (1)$$

L'équation de Black-Scholes



- Pour éliminer le terme en *dz,* un raisonnement astucieux consiste à considérer un portefeuille virtuel composé de l'achat d'une option et la vente de son équivalent en sous-jacent.
- $\frac{\partial V}{\partial S}$ est l'équivalent en sous-jacent d'une option, appelé également Delta $\delta = \frac{\partial V}{\partial S}$
- Notant P la valeur de ce portefeuille $P = V - \delta.S$
- À un instant t , ce portefeuille est désensibilisé par rapport aux variations de S; il est « delta neutre »; en d'autres termes $\frac{dP}{P} = r.dt$ et le terme en dz est nul
- Donc $dP = dV - \delta.dS = (V - \delta.S).r.dt$ et δ est localement constant
- En remplaçant dV par sa valeur (équation (1)), on obtient l'équation suivante:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2)$$

L'équation de Black-Scholes

- Avec les conditions suivantes pour les Calls et les Puts:

$$C(S,T) = \max(S-K,0), \quad P(S,T) = \max(K-S,0)$$

- Et les conditions aux limites suivantes

$$C(0,t) = 0,\ P(0,t) = Ke^{-r(T-t)},$$
$$C(S,t) \approx S,\ P(S,t) \to 0, \text{as } S \to \infty.$$

- Pour résoudre cette équation on opère les changements de variables suivants :

$$S = K.e^{x},\ T-t = \frac{2.\tau}{\sigma^2}, \quad V(S,t) = K.v(x,\tau)$$

- Cela nous amène à l'équation suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - k.v \ \ avec\, k = \frac{2r}{\sigma^2} \quad (3)$$

L'équation de Black-Scholes

- Pour plus simplifier l'équation, en posant :

$$v(x,\tau) = e^{\alpha.x+\beta.\tau}u(x,\tau)$$

avec

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1) \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

- on obtient :

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - ku \quad (4)$$

- ce qui nous amène à l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

L'équation de Black-Scholes
Diffusion - équation de la chaleur

- L'équation de la chaleur a une solution :

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(s)e^{-(x-s)^2/4\tau}ds \quad (5)$$

avec $u_0(x)=u(x,0)$

pour un call nous avons $u_0(x)=\max\left(e^{(k+1)x/2}-e^{(k-1)x/2},0\right)$

en remplaçant dans (5) et en déroulant le changement de variables dans l'autre sens on obtient: $x=\ln(\frac{S}{K}),\quad \tau=\frac{\sigma^2}{2}(T-t),\quad C(S,t)=K.v(x,\tau)$

$$C(S,t)=S.N(d_1)-K.e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$P(S,t)=K.e^{-r(T-t)}N(-d_2)-S.N(-d_1)$$

$$d_1=\frac{\ln(\frac{S}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$$

Option Américaine

- Pour les Options Américaines la même EDP s'applique mais avec des conditions aux limites différentes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D_0) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$$C(S,T) = \max(S - K, 0), \quad P(S,T) = \max(K - S, 0)$$

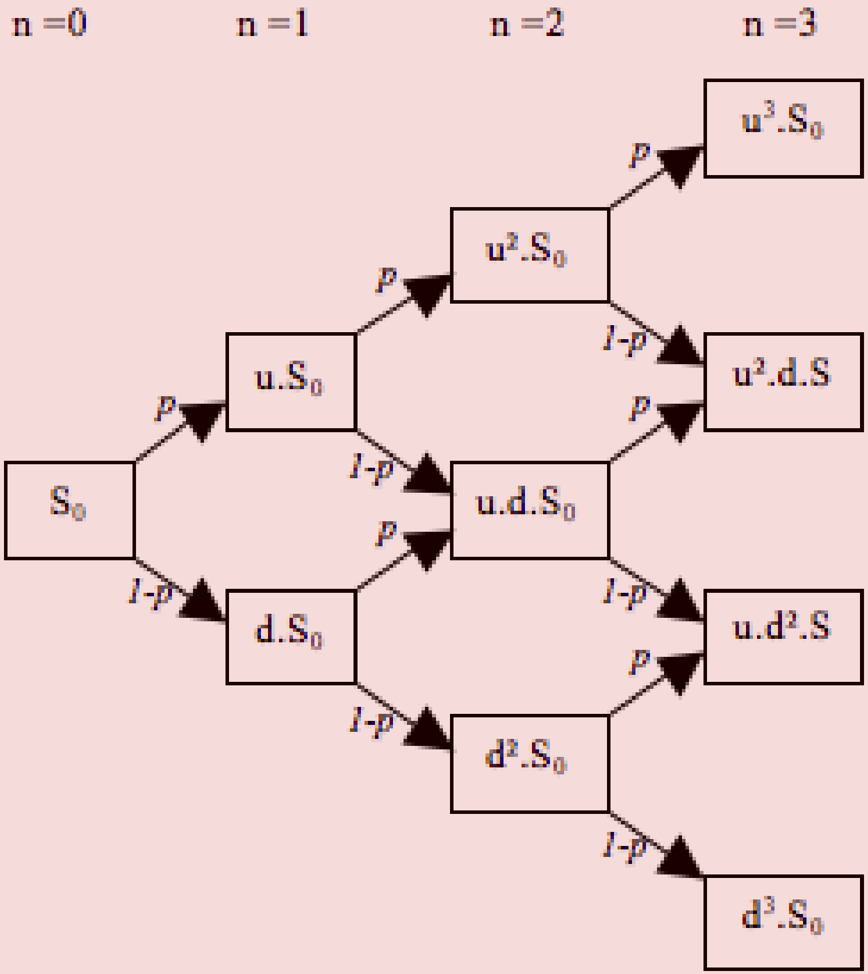
$$C(0,t) = 0, \ P(0,t) = Ke^{-r(T-t)},$$

$$C(S,t) \approx Se^{-D_0(T-t)}, \ P(S,t) \to 0, \text{ as } S \to \infty$$

- Pour permettre des exercices anticipés:

$$C(S,t) \geq \max(S - K, 0), \ P(S,t) \geq \max(K - S, 0)$$

- Pas de solution Analytique mais une approche Binomiale



$$p = \frac{e^{rt/n} - d}{u - d}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{t/n}}$$

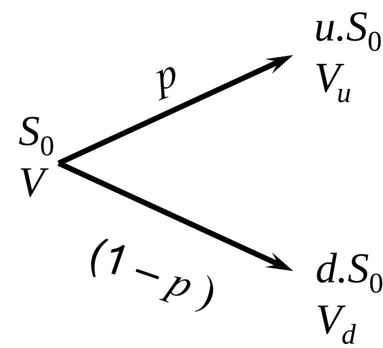
$$d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}}$$

Approche Binomiale (Cox Ross)

La méthode binomiale – Formalisation

- Modèle à une période (deux dates : 0 et 1)
- Notations

  Le prix de l'actif sous-jacent à la date 0 est noté S_0.
  Le prix de l'actif sous-jacent à la date 1 peut prendre deux valeurs : $u.S_0$ avec une probabilité p (hausse du prix) ou $d.S_0$ avec une probabilité $1\text{-}p$ (baisse du prix).



- Portefeuille de couverture ("hedge portfolio")
  - Considérons le portefeuille suivant : $P = V - \delta.S$
    - Une position longue sur une option
    - Une position courte sue le sous-jacent : vente de δ sous-jacent
- Ce portefeuille doit être insensible aux variations de S

$$Pu = Pd \quad \Rightarrow \quad V_u - \delta.u.S_0 = V_d - \delta.d.S_0 \quad \Rightarrow \delta = \frac{V_u - V_d}{S_0.(u-d)} \qquad (6)$$

- Aussi, l'actualisation de Pu à la date 0 doit être égale à la valeur P $\quad P_u.\mathrm{e}^{-\mathrm{r.dt}} = P \Rightarrow (V_u - \delta.u.S_0).\mathrm{e}^{-\mathrm{r.dt}} = (V - \delta.S_0)$
  - En remplaçant δ par sa valeur (6) on obtient

$$V = \left[p.V_u + (1-p).V_d\right].e^{-rdt} \quad avec \quad p = \frac{e^{rdt} - d}{u - d}$$

Choisir u & d – déduire p

- Approche Cox, Ross & Rubinstein:

  En supposant que le cours suit une loi log-normale avec une volatilité σ et un pas temporel de dt,

$$d(\ln(S)) = \frac{d(S)}{S} = r.dt + \sigma.dz \qquad dz = \sqrt{dt}$$

  avec dz est un mouvement brownien cad une variable aléatoire normale avec une espérance nulle et une variance dt,

$$u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$$

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{dt}}$$

- Probabilité $\quad p = \dfrac{a-d}{u-d}$

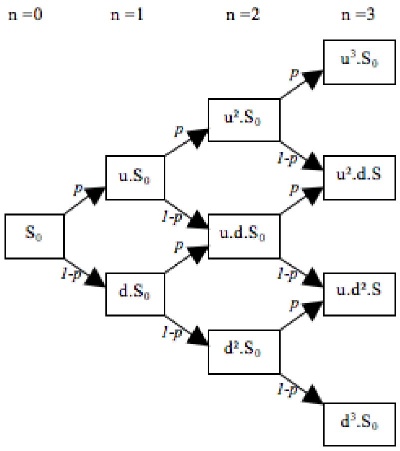
$a = e^{rdt}$ pour une action sans dividende

$a = e^{(r-q)dt}$ pour une action avec un taux de dividende q

$a = e^{(r-r_f)dt}$ pour un change avec r_f le taux sans risque de la devise étrangère

$a = 1$ pour un contrat futur

La méthode binomiale



$$V = [p.V_u + (1-p).V_d]e^{-rdt}$$

$$p = \frac{e^{rdt} - d}{u - d}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$$

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{dt}}$$

- Principal avantage : la flexibilité

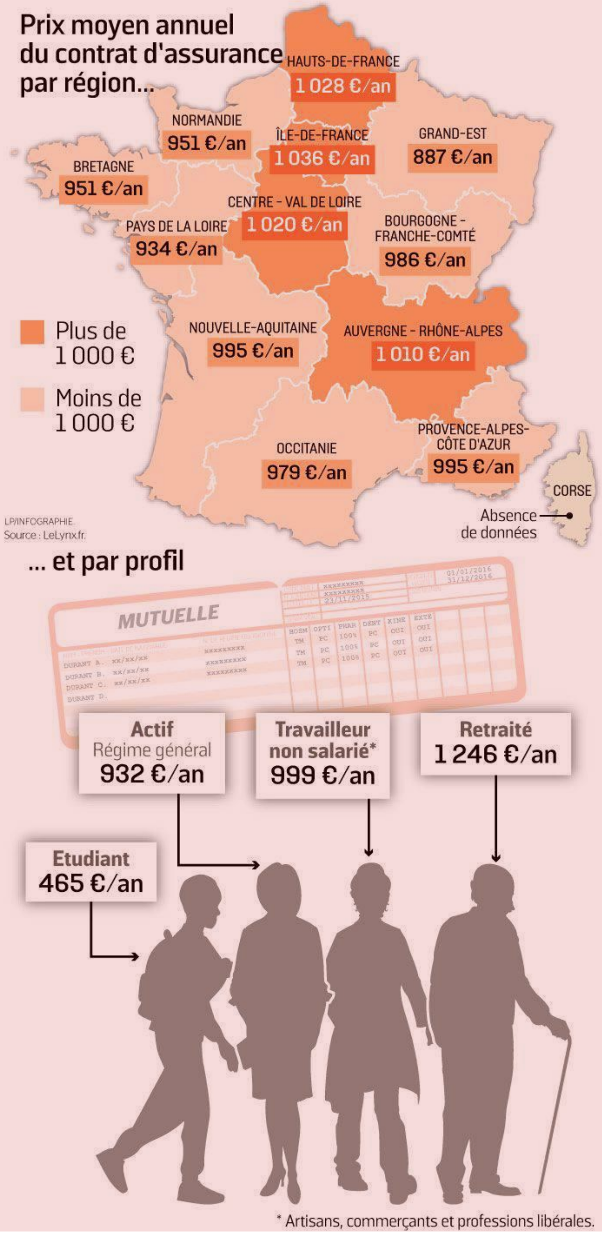
  Possibilité de modéliser des processus de prix complexes pour l'actif sous-jacent.
  Possibilité de prendre en compte les dividendes (discrets ou continus)
  Possibilité d'évaluer des options européennes, bermudiennes et américaines

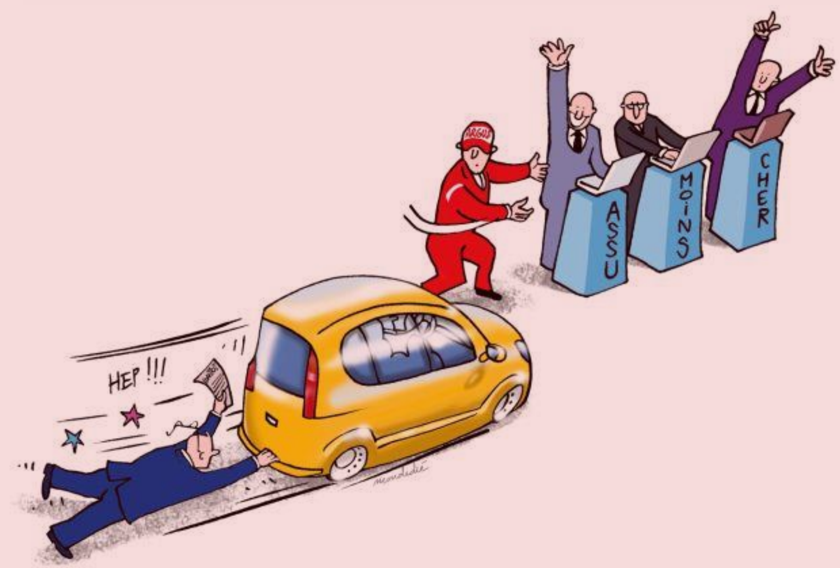
- Inconvénients

  Temps de calcul parfois long comparé aux formules fermées.

- Remarques

  La formule de Black & Scholes peut être obtenue comme la limite de la formule de la méthode binomiale quand le nombre de périodes tend vers l'infini (passage d'un modèle à temps discret à un modèle à temps continu)





Prime d’assurance

Prime d'assurance

- En assurance, l'assureur estime les pertes attendues par classe de risque de chaque assuré. Connaitre le véritable risque est un véritable challenge. (L'assuré détient plus d'information)

- Le contrat porte sur une période déterminée et porte sur un bien dont la valeur actuelle K constitue l'information essentielle (Une habitation, Une voiture, Une vie, …)

- Un contrat d'assurance peut être assimilé à l'achat d'un Put.

- L'acheteur (assuré) a le droit mais pas l'obligation de forcer le vendeur (assureur) à acheter le bien en question a un prix préalablement déterminé (en général le prix du marché au moment de la signature)

- Exemple: Une voiture assurée pour une valeur de 20K€, Si pendant la période de couverture, la voiture est endommagée et sa valeur chute à 15K€, l'assuré exerce son Put et l'assureur doit donc acheter cette voiture à 20 K€ (asset settlement) ou plus simplement payer la différence de 5K€ (Cash settlement)

Approche basique
Utilisation de B&S

- Considérons l'exemple précédent :
  - Une voiture dont la valeur est de 20K€ => Un strike K=20K€
  - Pour une période de 6 mois t = 0.5
  - Un taux sans risque à 10%
  - Et une classe de risque (volatilité) σ = 15%
  - Le spot actuel est identique au Strike (Option at the money)

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

$$P(S,t) = K.e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S.N(-d_1)$$

- La programmation du modèle de B&S en python donne le résultat suivant:

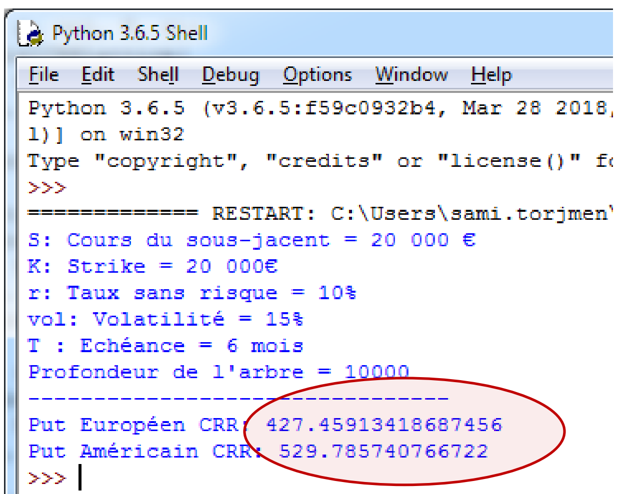
```
Python 3.6.5 Shell
File  Edit  Shell  Debug  Options  Window  Help
Python 3.6.5 (v3.6.5:f59c0932b4, Mar 28 2018,
1)] on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" fc
>>>
============= RESTART: C:/Users/sami.torjmen/
S: Cours du sous-jacent = 20 000 €
K: Strike = 20 000€
r: Taux sans risque = 10%
vol: Volatilité = 15%
T : Echéance = 6 mois
-------------------------------
Put Européen BSM: 427.4816875396464
>>> |
```

```
################## Modèle de Black & Scholes ##########################

# S: Cours du sous-jacent
# K: Strike
# r: Taux sans risque
# D: Taux de Portage (dividendes, intérêts, ...)
# vol: Volatilité
# T: Temps en année jusqu'à l'échéance

def d1(S, K, r, vol, T, t):
    # Calculer d1 dans l'équation de BSM
    return (np.log(S/K) + (r + 0.5 * vol*vol)*(T-t))/(vol*np.sqrt(T-t))

def BSMcall(S, K, r, vol, T, t):
    dd1 = d1(S, K, r, vol, T, t)
    dd2 = dd1 - vol * np.sqrt(T)
    # norm: la loi normale
    return S * norm.cdf(dd1) - K * np.exp(-r*T)*norm.cdf(dd2)

def BSMput(S, K, r, vol, T, t):
    # On utilise la parité call - put
    return BSMcall(S, K, r, vol, T, t) - S + np.exp(-r*(T-t))*K

def BSMoption(S, K, r, vol, T, t, otype):
    if(otype == "call"):
        result = BSMcall(S, K, r, vol, T, t)
    elif(otype == "put"):
        result = BSMput(S, K, r, vol, T, t)
    return result
```

Approche Avancée

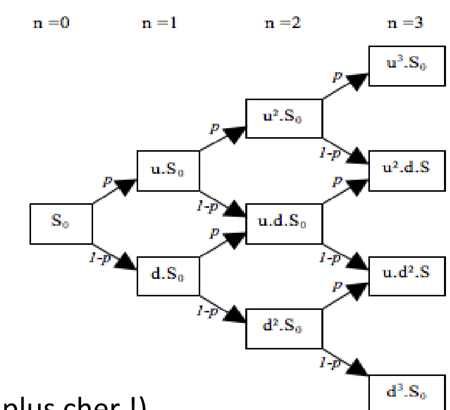
Utilisation de Cox Ross Rubinstein (Option Américaine)

- Sachant qu'un sinistre peut avoir lieu à n'importe quel moment durant la période de couverture, il convient de corriger l'approche en considérant que la prime correspond à un Put Américain et non Européen
- Pour un besoin de simplification, on considère uniquement le prochain sinistre. L'exercice du Put génèrera un nouveau Put pour la période restante dont la prime sera déduite du montant remboursé du présent sinistre
- Pour ce faire, on utilisera la méthode Binomiale (Modèle de Cox Ross Rubinstein : CRR)
- La programmation du modèle de CRR en python donne le résultat suivant:



Put Européen B&S = 427.48 €

Put Européen CRR = 427.46 €
Put Américain CRR = 529.79 € (24% plus cher !)



On remarquera que le modèle CRR donne une prime quasi égale à celle obtenue par le modèle de B&S

Prise en compte du Bonus

Ajout d'une option binaire

- Nous étendons l'analyse pour tenir compte du bonus généralement accordé par l'assurance si aucun sinistre n'a lieu. La coutume est d'accorder ce Bonus sous la forme d'une réduction sur la prime de la période subséquente
- Supposons que la réduction (bonus) soit un pourcentage du capital à couvrir (K) d'une taux β
  - Le bonus B = β.K si K(1-β) < S et 0 sinon
  - Si on prend l'exemple précédent, et admettant que β=1% (0.01) alors le bonus B = 200 €. Ce bonus est accordé si la valeur de l'automobile à l'échéance S < K*0.99 = 19.8K€. Si un Sinistre a eu lieu et a ramené la valeur à 14K€ alors l'assuré aura tout intérêt à exige r un remboursement et abandonner le bonus. Si la décote lié au Sinistre est inférieure à 200€ l'assuré a tout intérêt à ne rien réclamer et encaisser son bonus.
- Le payoff est donc comme suit :

$$\begin{cases} K-S & si \quad S < K.(1-\beta) \\ \beta.K & si \quad S \geq K.(1-\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K-S & si \quad S < K.(1-\beta) \\ 0 & si \quad S \geq K.(1-\beta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 & si \quad S < K.(1-\beta) \\ \beta.K & si \quad S \geq K.(1-\beta) \end{cases}$$

- En repartant de l'équation de la chaleur et en appliquant ces conditions aux limites on note que la prime est la somme d'un Put particulier et d'une option binaire (un pari):

$$P^*(S,t) = [K.e^{-r(T-t)}N(-g_2) - S.N(-g_1)] + [\beta.K.e^{-r(T-t)}.N(g_2)]$$

$$avec \quad g_1 = \frac{\ln(\frac{V}{K(1-\beta)}) + (r+\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$et \quad g_2 = \frac{\ln(\frac{V}{K(1-\beta)}) + (r-\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P^*(S,t) = [K.(1-\beta).e^{-r(T-t)}N(-g_2) - S.N(-g_1)] + [\beta.K.e^{-r(T-t)}]$$

$$avec \quad g_1 = \frac{\ln(\frac{V}{K(1-\beta)}) + (r+\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$et \quad g_2 = \frac{\ln(\frac{V}{K(1-\beta)}) + (r-\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

- Ce qui est équivalent à un Put d'un Strike K.(1-β) augmenté du Bonus actualisé. Le modèle CRR devient applicable pour un type d'option américaine.

Prise en compte du Bonus

Ajout d'une option binaire

Python 3.6.5 Shell

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
Python 3.6.5 (v3.6.5:f59c0932b4, Mar 28 2018, 16:07:46) [MSC v.1
1)] on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
============= RESTART: C:\Users\sami.torjmen\Desktop\TIPE\CRR.py
S: Cours du sous-jacent = 20 000 €
K: Strike = 20 000€
r: Taux sans risque = 10%
vol: Volatilité = 15%
T : Echéance = 6 mois
Profondeur de l'arbre = 10000
beta: Bonus = 1%
--------------------------------
--------------------------------
Put Européen CRR avec Bonus: 556.7051136601572
Put Américain CRR avec Bonus: 639.5136063298926
>>>
```

Put Européen B&S (sans Bonus) = 427.48 €

Put Européen CRR (sans Bonus) = 427.46 €

Put Américain CRR (sans Bonus) = 529.79 €

Put Européen CRR avec Bonus = 556.71 €

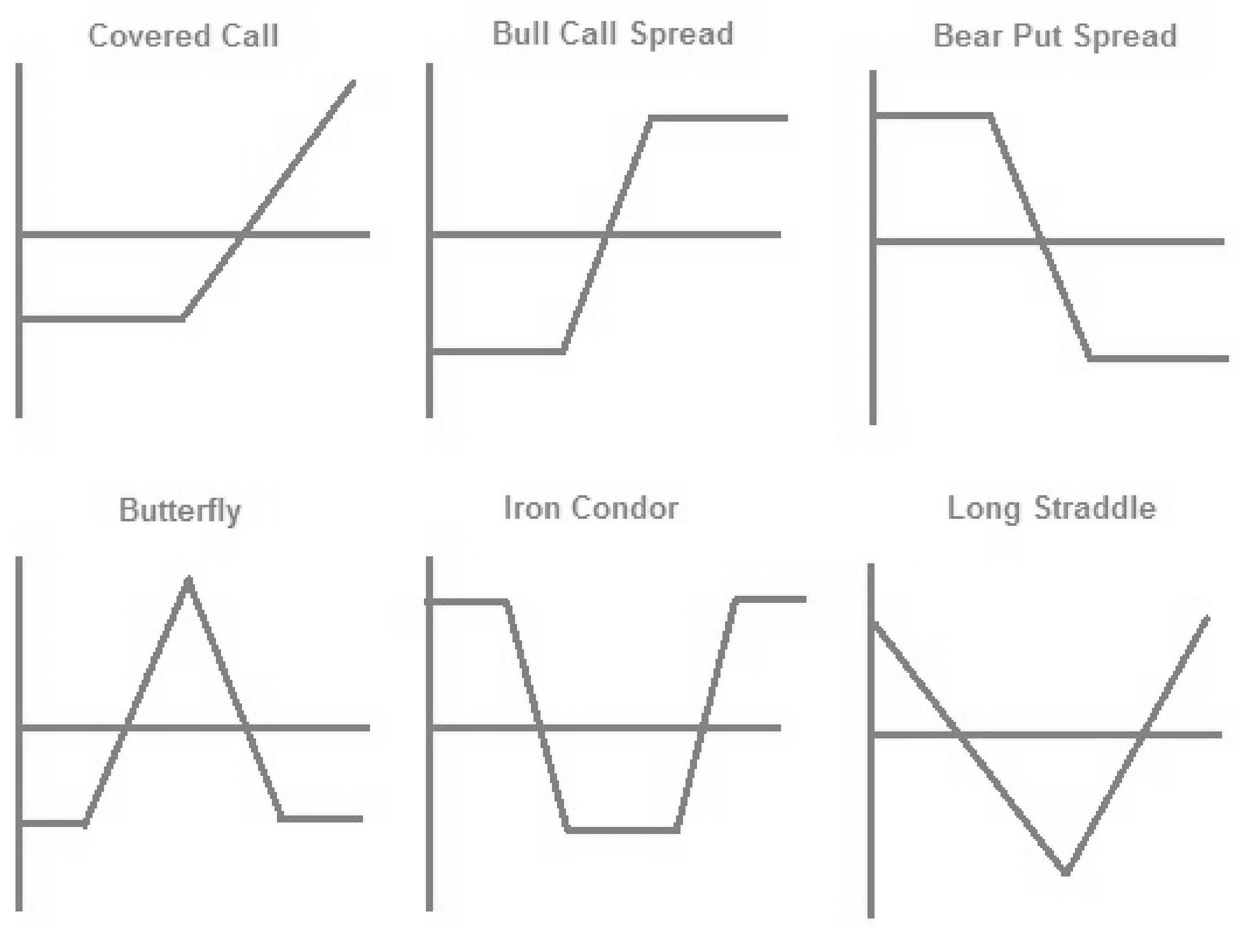
Put Américain CRR avec Bonus = 639.51 €

Synthèse : Grille de pricing

	Grille Tarifaire par niveau de risque					
σ	**Européenne**	**% Change Eu**	**Américaine**	**% Change Am**	**Américaine avec Bonus**	**% Change Am & Bonus**
0.05	24		88		227	
0.10	195	695%	290	228%	409	80%
0.15	427	120%	530	82%	640	56%
0.20	680	59%	784	48%	888	39%
0.25	941	38%	1,045	33%	1,145	29%
0.30	1,206	28%	1,309	25%	1,406	23%
0.35	1,473	22%	1,576	20%	1,670	19%
0.40	1,741	18%	1,844	17%	1,936	16%
0.45	2,009	15%	2,112	15%	2,202	14%
0.50	2,277	13%	2,381	13%	2,469	12%
0.55	2,545	12%	2,649	11%	2,735	11%
0.60	2,813	11%	2,917	10%	3,001	10%
0.65	3,079	9%	3,185	9%	3,267	9%
0.70	3,345	9%	3,452	8%	3,532	8%
0.75	3,610	8%	3,718	8%	3,796	7%
0.80	3,874	7%	3,983	7%	4,060	7%
0.85	4,137	7%	4,247	7%	4,322	6%
0.90	4,398	6%	4,509	6%	4,583	6%

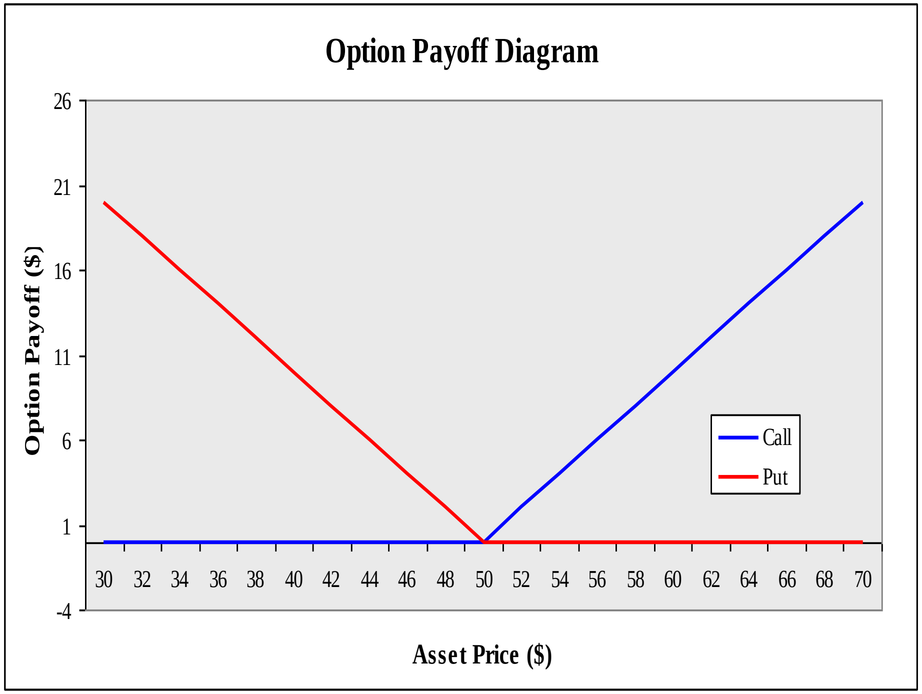
Pour un Capital assuré de 20 K€, un taux sans risque de 10%, une période de 6 mois et un taux de bonus = 1%

Exemples de Stratégies de Couverture



Payoff de l'option à *T*

Payoff



Fonction Payout

Call Payoff :

$$C(S(T), K) = \max(S(T) - K, 0)$$

Put Payoff :

$$P(S(T), K) = \max(K - S(T), 0)$$

Définition des sensibilités (les Grecques)

- Sensibilité au prix de l'actif sous-jacent : le delta et le gamma

$$\delta = \frac{\partial C}{\partial S} \qquad \gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial^2 S}$$

  Le delta et le gamma représentent la première et la deuxième dérivée de la valeur du call par rapport au prix de l'actif sous-jacent.

- Sensibilité au taux sans risque : le rho $\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$

- Sensibilité à la volatilité du prix de l'actif sous-jacent : le vega $\upsilon = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$

- Sensibilité au passage du temps : le theta $\theta = -\frac{\partial C}{\partial t}$

- Sensibilité au taux de dividende : l'epsilon $\varepsilon = \frac{\partial C}{\partial q}$

- Le Trader pilote son portefeuille et gère ses risques grâce aux grecques (c'est son tableau de bord à l'instar d'un pilote d'avion)