
microMathematics Plus

version 2.17.0

O microMathematics Plus é a primeira calculadora matemática para Android orientada à uma tabela que permite edição em tempo real de identidades matemáticas combinadas com cálculos altamente precisos.

Ele é baseado num poderoso editor de tela sensível ao toque que permite aos usuários criar e manipular folhas de cálculo naturalmente legíveis contendo toda a notação matemática básica.

O microMathematics Plus suporta cálculos matemáticos de nível de Ensino Médio. Esta versão tem as seguintes limitações matemáticas: não suporta funções especiais, arranjos, matrizes e várias outras operações da matemática de alto nível.

1 Descrição do App

Este app é um poderoso programa calculador em formato de folha de cálculos. A folha de cálculos pode ser editada livremente, armazenada no cartão SD, aberta de um cartão SD e exportada para uma imagem ou formato LaTeX.

A folha de cálculos é um documento matemático que contém texto, fórmulas e gráficos. Ela suporta edição em tempo real de notações matemáticas e seu cálculo automático.

Os objetos a seguir podem ser inseridos na folha de cálculos: equações, janelas de resultado, gráficos, fragmentos de textos e imagens. Este documento fornece uma visão geral de como editar estes objetos.

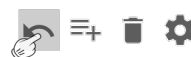
1.1 Edição

Quase todos os objetos disponíveis possuem vários campos editáveis. Para editar o campo use os símbolos e funções na barra de ferramentas.

Todos os símbolos podem ser entrados pelo teclado. Para encontrar qual símbolo do teclado corresponde ao símbolo matemático que você deseja, leia a dica segurando o botão de interesse.

Ao segurar em um termo você pode selecionar este termo. O termo selecionado pode ser excluído, copiado para a área de transferência, colado da área de transferência ou outra operação ou função pode ser inserida depois do termo usando os botões da barra de ferramentas ou teclado.

O comando "Desfazer" está disponível na barra de ações. Ele apaga a última mudança feita ao documento e reverte-a para um estado anterior:



1.2 Equação

Uma equação define uma constante numérica, um intervalo ou uma função. Para criar uma equação, use o botão "Novo elemento" na barra de ações



ou o botão "Adicionar equação" da barra de ferramentas:



Uma equação com dois campos vazios aparece. Estes campos devem ser preenchidos:

$$\square := \square$$

O nome da equação é dado no campo esquerdo. O nome deve conter letras ou dígitos apenas e será usado em outros objetos para referenciar esta equação.

A partir da barra de ações, você pode abrir a janela de "Configurações do documento":



Dependendo do parâmetro "Permitir re-definir equações" nesta janela, há dois modos de uso:

a) se a redefinição não for permitida, o nome da equação deve ser único dentro de todo o espaço de trabalho e a equação pode ser usada antes e depois de ser definida,

b) se a redefinição for permitida, você pode re-definir mais de uma equação com o mesmo nome. Se esta equação está referenciada, a última versão definida antes de chamar a função será usada.

1.2.1 Constante

Se o nome da equação não contém nenhum argumento entre parênteses, isso define uma constante ou um intervalo:

$$N := 200 \quad Sq2 := \sqrt{100} \quad Pi2 := \frac{\pi}{2}$$

Neste último exemplo, uma constante embutida pi foi usada. Atualmente, as seguintes constantes embutidas estão disponíveis:

$$\pi = 3.14159 \quad pi = 3.14159 \quad e = 2.71828$$

Uma constante definida anteriormente também pode ser usada:

$$NPi2 := N \cdot Pi2$$

Você também pode usar o símbolo "i" como unidade imaginária para poder definir um número complexo:

$$z := 5 + 3i$$

1.2.2 Intervalo

Uma equação do tipo intervalo define uma variável que foi alterada de um valor mínimo dado até um valor máximo dado com incremento definido. Esta variável pode ser usada como o argumento do gráfico de uma função ou como um parâmetro para construir uma tabela de valores da função.

Para definir um intervalo, insira um nome válido no lado esquerdo de uma equação vazia. No lado direito desta equação, coloque um símbolo ":", ou toque no botão "Intervalo equidistante" da barra de ferramentas:



Aqui, o primeiro elemento é o ponto inicial do intervalo, o próximo elemento é o segundo ponto, e o último elemento é o ponto final do intervalo:

$$x := [0, 0.1 .. 10]$$

Os elementos do intervalo podem ser acessados como segue:

$$x_0 = 0.0 \quad x_1 = 0.1 \quad x_{100} = 10.0$$

O incremento é a diferença entre o segundo e o primeiro valores:

$$x_2 - x_1 = 0.1$$

Por exemplo, podemos definir um intervalo equidistante que contém N pontos distribuídos com incremento "dy" onde o início do intervalo é zero como segue:

$$dy := 0.05 \quad y := [0, dy .. dy \cdot N]$$

1.2.3 Function

Uma função é uma relação entre um ou mais argumentos e um conjunto de saídas permissivas com a propriedade, que cada valor do argumento (real ou complexo) ou a combinação de argumentos está relacionada à exatamente uma saída.

O nome da função e o argumento entre parênteses são dados no lado esquerdo da equação. Não é necessário definir o argumento na folha de trabalho anteriormente, você pode definí-lo como quiser, mas usando apenas letras ou dígitos:

$$f(t) := \sin(t) \cdot \cos(t) / 2$$

$$w(z) := e^{2i \cdot \pi \cdot z}$$

$$H(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$g(x, y) := \frac{\sin(H(x, y))}{H(x, y/2) + 1}$$

O lado direito da função contém uma fórmula matemática de como calcular a função. Se esta fórmula não contém o argumento da função declarado, tal função será interpretada como uma constante.

Você também pode usar o lado direito ou outras funções embutidas ou previamente definidas. Para inserir um função entre o nome dela, toque no abre parênteses "(" e então entre o argumento. Este argumento também pode ser uma fórmula, que contém quaisquer outras operações e funções.

1.2.4 Array

Arranjos são funções especiais com as seguintes propriedades:

a) apenas um intervalo previamente definido pode ser usado como um argumento de arranjo:

$$k := [0, 1 \dots 100] \quad m := [0, 1 \dots 200]$$

a) argumentos de arranjos são dados entre [] ao invés de ():

$$M[k, m] := \sin(k/10)^2 - 3 \cdot |\cos(m/10)|$$

c) elementos de arranjos são calculados e armazenados na memória que reduz o tempo de acesso à esses valores

d) elementos de arranjos podem ser acessados apenas usando um índice menor. Para criar um índice menor, coloque "]" após o nome do arranjo:

$$M_{5,10} = -1.39106 \quad M_{10,5} = -1.92467$$

$$N[k, m] := \text{floor}(-10 \cdot M_{k,m})$$

e) se qualquer índice do arranjo for complexo ou negativo ou maior que o limite superior do intervalo correspondente, o número inválido será retornado:

$$M_{10i,100} = NaN \quad M_{90,210} = NaN$$

1.3 Result View

Este elemento é usado para representar um resultado de cálculo como um número ou uma tabela. Para adicionar este elemento, use o botão "Novo elemento" na barra de ações ou o botão "Adicionar janela de resultado" da barra de ferramentas:



Uma equação com dois campos aparece, onde o campo esquerdo deve ser preenchido:

$$\square = \square$$

O termo da esquerda contém uma fórmula para ser calculada e o termo da direita é o resultado do cálculo. O resultado será mostrado quando você pressionar o botão flutuante "Calcular".

No termo da esquerda você pode usar quaisquer constantes e funções definidas previamente assim como quaisquer funções embutidas:

$$e^\pi \cdot f(NPi2) = 2.27286E - 14$$

Se a parte da esquerda não contém nenhuma variável "parecida com intervalo", o resultado do cálculo é apenas um número real ou complexo:

$$y_{N-1} - y_0 = 9.95$$

$$\Re(z) = 5.0 \quad \Im(z) = 3.0 \quad |z| = 5.83095$$

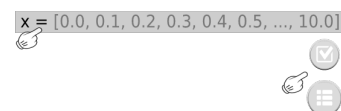
$$\sqrt{\sin\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right)} = 0.0 + 1.0i$$

Se a parte da esquerda contém uma variável de intervalo, o resultado do cálculo será um vetor de valores correspondentes à este intervalo. Devido ao limite de espaço livre na tela, apenas os primeiros e últimos elementos do vetor serão exibidos:

$$x = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ \dots \\ 10.0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.05 \\ 0.1 \\ 0.15 \\ 0.2 \\ 0.25 \\ \dots \\ 10.0 \end{bmatrix} \quad 2 \cdot y = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ \dots \\ 20.0 \end{bmatrix}$$

$$N_{k,m} = \begin{bmatrix} 30.0 & 29.0 & 29.0 & 28.0 & \dots & 12.0 \\ 29.0 & 29.0 & 29.0 & 28.0 & \dots & 12.0 \\ 29.0 & 29.0 & 29.0 & 28.0 & \dots & 11.0 \\ 29.0 & 28.0 & 28.0 & 27.0 & \dots & 11.0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 27.0 & 26.0 & 26.0 & 25.0 & \dots & 9.0 \end{bmatrix}$$

Número de elementos exibidos e o modo no qual o resultado é exibido podem ser alterados. Segurando na área da fórmula e o menu de contexto, selecione a fórmula toda. Se a fórmula está selecionada, o botão flutuante "Propriedades do objeto" aparece. Se você tocar neste botão, o a janela de propriedades do resultado será exibida:



O segundo botão flutuante, "Detalhes", também aparecerá. Se você tocar neste botão, a janela de "Detalhes" será exibida, onde você pode observar todos elementos do arranjo.

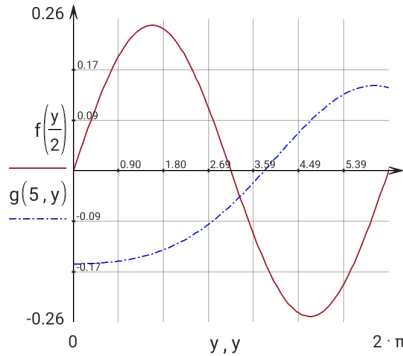
Note que o uso de três ou mais variáveis-intervalo no lado esquerdo da visualização não é permitido nesta versão do app.

1.4 Desenho de Função

O elemento de desenho de função exibe um gráfico de uma função, que depende de um único argumento. Para criar um desenho, use o botão "Novo elemento" na barra de ações ou o botão "Adicionar desenho de função" na barra de ferramentas:



O painel de desenho com seis campos vazios aparece. A função a ser desenhada deve ser colocada no campo central-esquerdo e o argumento da função no campo central-inferior:



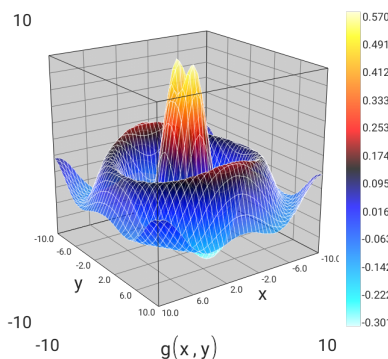
Para mais detalhes veja exemplos de "Desenho de função" e "Desenho de Função Polar" da gaveta de navegação do app.

1.5 Desenho Tridimensional

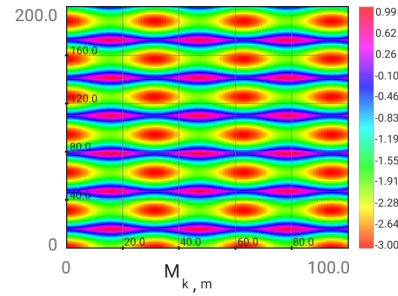
O desenho 3D exibe um gráfico de uma função única que depende de dois argumentos. Para criar tal desenho, use o botão "Novo elemento" na barra de ações ou o botão "Adicionar desenho 3D" da barra de ferramentas:



$$x := [-10, -9.5 .. 10] \quad y := [-10, -9.5 .. 10]$$



In the center-bottom field, put the function name or an equation that contains exactly two previously defined intervals. The use of an array is also possible:



Para mais detalhes veja o exemplo "Desenho 3D" da gaveta de navegação do app.

1.6 Text Fragment

O fragmento de texto exibe texto simples como este. Para adicionar um fragmento de texto, use o botão "Novo elemento" na barra de ações ou o botão "Adicionar fragmento de texto" da barra de ferramentas:



Se todo o texto dentro de um fragmento está selecionado usando o menu de contexto "Selecionar tudo", um botão flutuante "Propriedades do objeto" aparece na parte inferior-esquerda da tela.

Se você tocar neste botão, a janela "Propriedades do Texto" será exibida, onde você pode selecionar a aparência do texto e ativar a numeração. Por exemplo, os títulos neste documento tem a aparência "Subsection" com a numeração ativada.

1.7 Image

Você também pode inserir uma imagem de um arquivo de imagem. Para fazer isso, use o botão "Novo elemento" da barra de ações ou o botão "Adicionar arquivo de imagem" da barra de ferramentas:



A janela de "Configurações da imagem" irá aparecer. Nela você pode selecionar um arquivo com a imagem a ser inserida e definir o tamanho necessário da imagem.

Os formatos de imagem a seguir são suportados: png, bmp, gif, jpeg, svg.

Se você ativar a "Imagem embutida" na janela de "Configurações de imagem", então a imagem será anexada diretamente no seu documento. Imagem anexada resulta em um documento único, mas maior.

Se a "Imagem embutida" não estiver marcada, o arquivo de imagem será apenas referenciado do que anexado, i.e. seu documento referencia o arquivo de

imagem fora do documento. Se você quiser mover seu documento por favor não esqueça de mover o arquivo de imagem também.

Você pode alterar as propriedades de uma imagem já existente. Segure na área da imagem até que apareça o botão flutuante "Propriedades do objeto". Se você pressionar este botão, uma janela com as propriedades da imagem será exibida.

2 Exemplo: Traçar Função

Este exemplo demonstra como preparar e ajustar uma representação gráfica de uma função. Por exemplo, queremos desenhar três funções diferentes:

$$f(x) := 25 + 10 \cdot \sin(\sqrt{|x|})$$

$$g(x) := \frac{2}{e^{|x|/15}} \cdot f(x \cdot 50)$$

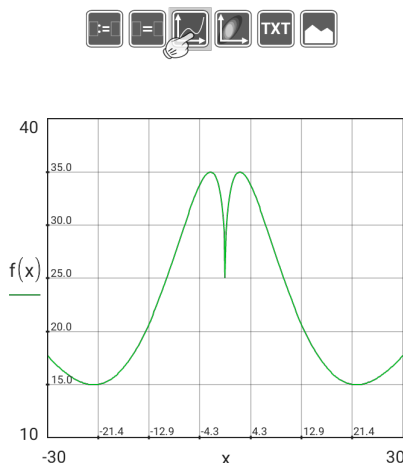
$$h(x) := \min(f(x), g(x))$$

O argumento da função que representa os valores-x serão tomados para N pontos no intervalo $[x1, x2]$:

$$N := 300 \quad x1 := -30 \quad x2 := 30$$

$$x := [x1, x1 + (x2 - x1) / N .. x2]$$

Após as funções e seus argumentos forem definidos, você pode adicionar a caixa para desenhar usando o botão "Novo elemento" na barra de ações ou o botão "Adicionar desenho de função" a partir da barra de ferramentas:

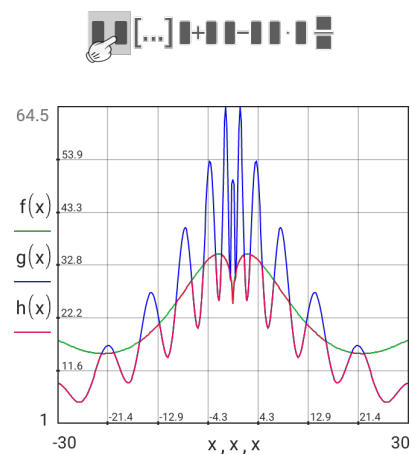


A função a ser desenhada será posta no campo central-esquerdo. Também pode ser uma função embutida ou declarada previamente como uma expressão matemática que contém qualquer outros operadores e funções.

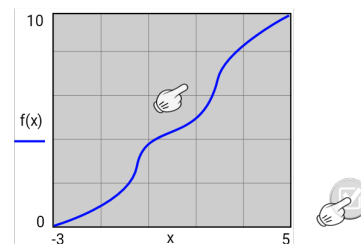
A função esntrada, que representa os valores-x que serão postos no campo central-esquerdo. Pode ser uma variável do tipo intervalo ou uma expressão matemática que contém uma variável de intervalo.

Os outros quatro campos descrevem os limites do desenho. Se estes elementos premanecerem vazios, o programa calculará valores correspondentes automaticamente. Entretanto, você pode editar estes campos a qualquer momento e colocar lá os valores que sequejar.

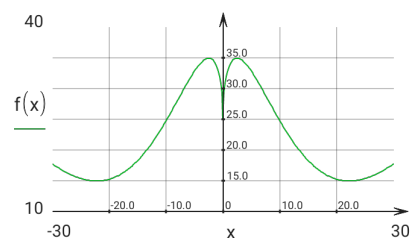
Você pode desenhar diversas funções na mesma visualização. Para adicionar uma outra função, selecione a função (segurando no campo central-esquerdo) depois qual outra função deve ser adicionada e toque no botão "Adicionar novo argumento" a partir da barra de tarefas:



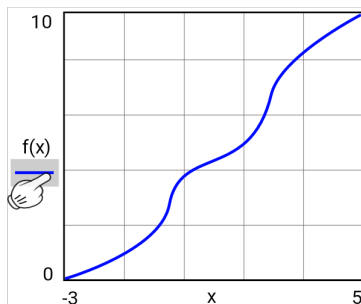
Segurando no centro da área de desenho, o menu de contexto e o botão flutuante "Propriedades do objeto" aparecerá.



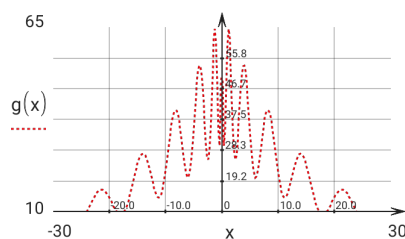
Se você tocar no botão flutuante, a janela de "Configurações de traço" será exibida. Aqui, você pode alterar o tamanho e aparência da área de desenho. Por exemplo, o gráfico cruzado parece assim:



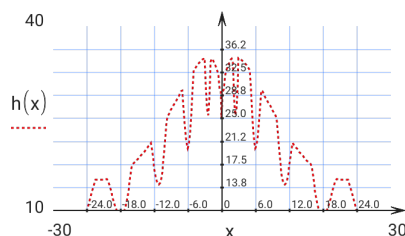
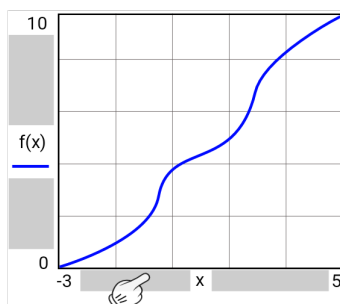
Você também pode alterar a cor da linha de desenho, largura e aparência na janela "Configurações da linha". Ela aparece ao segurar no marcador de linha abaixo do nome da função na área esquerda do desenho:



For example, we can use dotted lines:



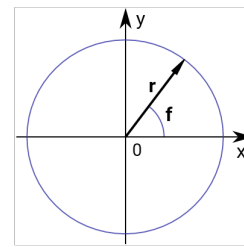
O número de eixos e rótulos e cor das linhas de grade podem ser alteradas na janela "Configurações de grade". Ela aparece segurando na área livre entre o valor mínimo de x (-30) e o símbolo de argumento (x) ou entre o símbolo x e o valor máximo de x (30) abaixo da área de desenho:



Para esconder a grade completamente apenas defina o número de linhas da grade para zero nos eixos vertical e horizontal.

3 Exemplo: Traçar Função Polar

Agora desenharemos várias funções dadas no sistema de coordenadas polares. Cada ponto neste sistema é determinado por uma distância r da origem e o ângulo f do eixo x .



O ângulo f é nossa variável independente que muda como está a seguir:

$$f := [0.01, 0.05 .. 300]$$

A distância $r(f)$ é a nossa variável dependente. Tendo um par de f e r , nós podemos transformar em coordenadas Cartesianas x e y usando as funções seno e cosseno:

$$x(r) := r \cdot \cos(f) \quad y(r) := r \cdot \sin(f)$$

3.1 Um caracol

Definiremos nossa função polar em três passos. A primeira expressão define uma "roda":

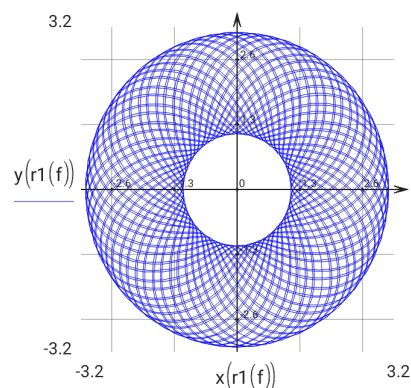
$$A := 1.1 \quad B := 1.271 \quad q := 2$$

$$r1(f) := A + 2 \cdot \sin(B \cdot f)^q$$

Para desenhar esta função, adicionamos a caixa de desenho usando o botão "Novo elemento" na barra de ações ou o botão "Adicionar desenho de função" a partir da barra de ferramentas:

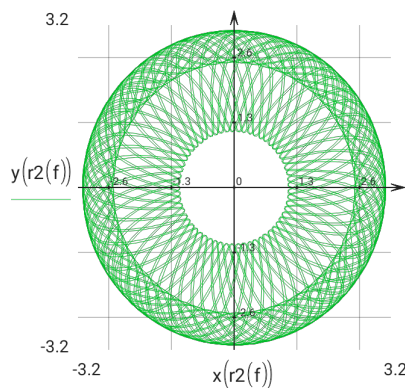


Ao invés de f e r , usamos aqui regras previamente definidas para transformação x e y , onde $r1(f)$ é usado como um argumento simbólico para estas regras:



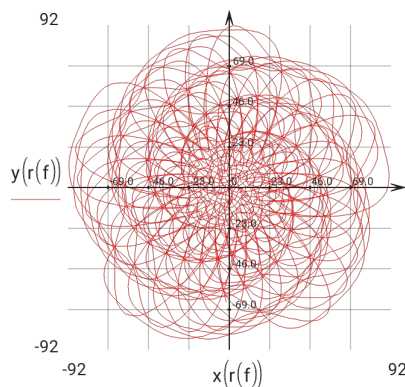
Então, podemos alterar esta roda como segue:

$$r2(f) := A + 2 \cdot \sin(B \cdot f + 1 \cdot r1(f))^q$$



Finalmente, fazemos a escala da última função $r2(f)$ usando uma conversão de inteiro para flutuante que parece uma função em escada. Como resultado, obtemos um belo caracol:

$$r(f) := r2(f) \cdot \text{floor}(f) / 10$$



3.2 Japanese Maple

O Maple japonês é muito conhecido pela forma e cores atraentes de suas folhas. Estas folhas podem ser descritas matematicamente e desenhadas como uma curva no sistema de coordenadas polares:

$$f := [0.01, 0.02 .. 100]$$

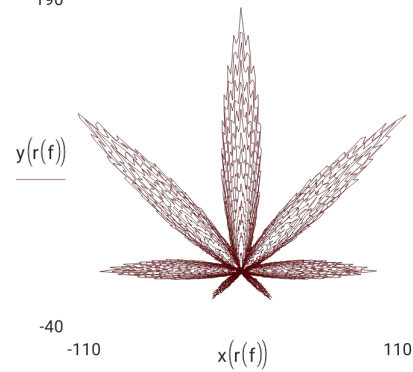
$$x(r) := r \cdot \cos(f) \quad y(r) := r \cdot \sin(f)$$

$$s1(f) := (1 + \sin(f)) \cdot (1 - 0.9 \cdot |\sin(4 \cdot f)|)$$

$$s2(f) := 0.9 + 0.05 \cdot \cos(200 \cdot f)$$

$$r(f) := \text{floor}(f) \cdot s1(f) \cdot s2(f) + \text{random}(2) - 1$$

190



http://en.wikipedia.org/wiki/Acer_palmatum

4 Exemplo: Traçar 3D

Este exemplo demonstra desenhos 3D para três funções diferentes de duas variáveis.

Primeiro, definimos intervalos para os argumentos x e y . O intervalo para o eixo x depende do número de pontos juntamente com os valores mínimo e máximo do eixo x , $x1$ e $x2$:

$$N := 300 \quad x1 := -2 \quad x2 := 2$$

$$x := [x1, x1 + |x2 - x1| / N .. x2]$$

O intervalo para o eixo y é definido analogamente:

$$M := 300 \quad y1 := -3 \quad y2 := 3$$

$$y := [y1, y1 + |y2 - y1| / M .. y2]$$

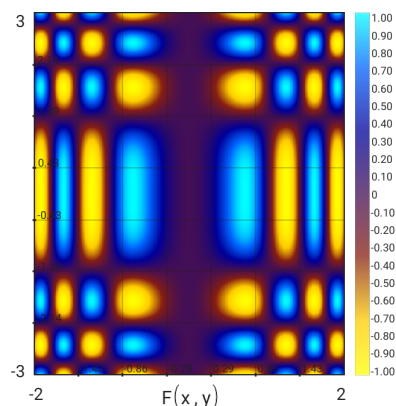
Por exemplo, deixe-nos desenhar uma função trigonométrica que é um produto de seno e cosseno:

$$F(x, y) := \sin(3 \cdot x^2) \cdot \cos(y^2)$$

Para criar uma visualização 3D, toque no botão "Novo elemento" da barra de ações ou pelo botão "Adicionar desenho 3D" da barra de ferramentas:



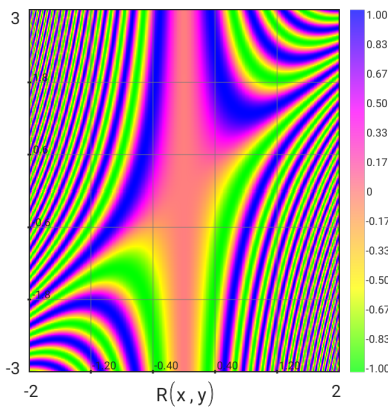
Coloque o nome da função $F(x,y)$ no campo central-inferior:



Os limites do desenho, tamanho do traçado e aparência, rótulos e grade podem ser ajustados por analogia com a função de desenho usando a janela de configurações do desenho (veja o exemplo "Desenhar Função" da gaveta de aplicações do app para mais detalhes). Para abrir esta janela, toque na área de desenho até que o botão flutuante "Propriedades do objeto" apareça, e então toque neste botão.

Adicionalmente, você pode alterar o número de rótulos no eixo z e escolher a paleta de cores na janela "Configurações do Mapa de Cores". Esta janela aparece tocando demoradamente na barra do eixo z à direita da área principal do gráfico.

$$R(x, y) := \sin(5 \cdot x^2 \cdot (y - x))$$



Uma função de dois argumentos também pode ser desenhada como uma superfície no espaço 3D. Este modo pode ser ativado na janela de "Configurações de Desenho" que aparece se você tocar no botão flutuante "Propriedades do objeto" após tocar demoradamente na área de desenho. Deixe-nos desenhar a seguinte função, usando conjuntos para poder diminuir o tempo de cálculo:

$$N := 100 \quad n := [0, 1..N] \quad x1 := -15 \quad x2 := 15$$

$$M := 100 \quad m := [0, 1..M] \quad y1 := -15 \quad y2 := 15$$

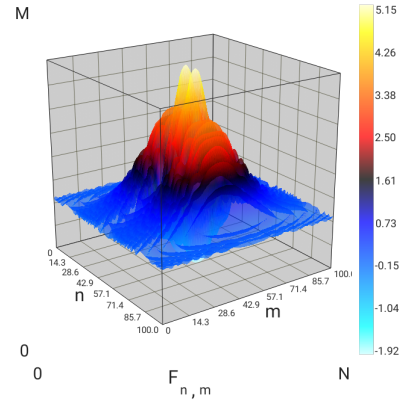
$$x[n] := (x1 + (x2 - x1) \cdot n/N)^2$$

$$y[m] := (y1 + (y2 - y1) \cdot m/M)^2$$

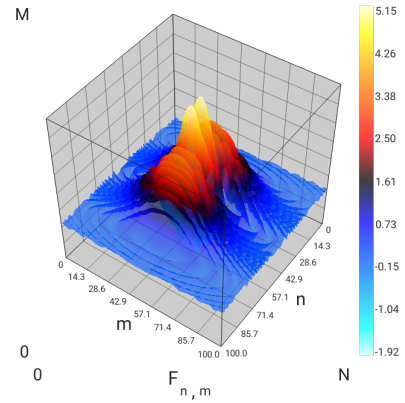
$$r[n, m] := 0.04 \cdot x_n + 0.02 \cdot y_m$$

$$t[n, m] := (x_n + 0.05 \cdot y_m) \cdot \exp(1 - r_{n, m})$$

$$F[n, m] := \frac{\sin(x_n + 0.1 \cdot y_m)}{0.15 + r_{n, m}} + \frac{t_{n, m}}{10}$$



Para o desenho de superfícies, existem configurações adicionais mostradas na janela de "Configurações de Desenho". Você pode escolher se deseja que as linhas da malha devem ser mostradas. Selecione a opacidade para a cor da malha, defina os ângulo de rotação e a elevação da caixa de desenho. Por exemplo, a superfície desenhada anteriormente com outros ângulos de rotação e elevação se parece com:



5 Exemplo: Séries e Integrais

Esse exemplo demonstra como calcular séries e integrais.

5.1 Taylor series

Na matemática, séries de Taylor são uma representação de uma função como uma soma infinita de termos que são calculados a partir da derivada dos valores da função num único ponto.

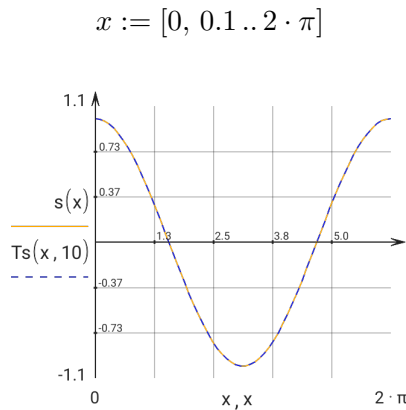
Por exemplo, Ts(x,N) é a expansão de Taylor de uma função com argumento x e N número de termos:

$$Ts(x, N) := \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n)!} \cdot x^{2 \cdot n}$$

Esta expansão se aproxima da função cosseno:

$$s(x) := \cos(x)$$

Se desenharmos as duas funções juntas para o mesmo intervalo, elas parecem iguais:



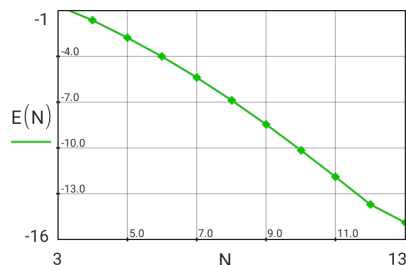
Entretanto, há um erro numérico devido ao número limitado de termos de aproximação N . A função a seguir $\Delta(x, N)$ descreve este erro:

$$\Delta(x, N) := |s(x) - Ts(x, N)|$$

Podemos desenhar esta função em coordenadas logarítmicas e ver que o erro numérico diminuirá se tivermos mais termos na soma de Taylor:

$$E(N) := \log_{10}(\Delta(\pi, N))$$

$$N := [3, 4 \dots 13]$$



5.2 Série Binomial

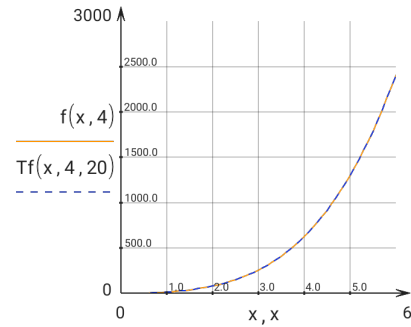
Consideremos esta função potência:

$$f(x, \alpha) := (1 + x)^\alpha$$

Esta função pode ser aproximada usando Série Binomial:

$$Tf(x, \alpha, N) := \sum_{n=0}^N \left(\prod_{k=1}^n \frac{\alpha - k + 1}{k} \right) \cdot x^n$$

Podemos também desenhar as duas funções (a função de potência dada e sua aproximação) juntas no mesmo gráfico:



5.3 Integrais

Também é possível calcular uma integral definida numericamente usando o método de Simpson. Por exemplo, podemos calcular a integral usando o elemento "Visualização de resultado":

$$\int_0^{3\pi/2} \cos\left(\frac{2 \cdot x}{9}\right)^{-2} dx = 7.79423$$

A solução analítica é

$$I := \frac{9\sqrt{3}}{2}, \quad I = 7.79423$$

O erro numérico pode ser calculado como:

$$\int_0^{3\pi/2} \cos\left(\frac{2 \cdot x}{9}\right)^{-2} dx - I = 4.26681E - 9$$

Este erro depende do valor de "Número de dígitos significativos no resultado" que pode ser alterado na janela "Configurações do Documento" disponível a partir da barra de ações:



Se este valor aumentou, o limiar que controla a precisão do método de Simpson também aumentará.

6 Sobre microMathematics Plus

6.1 Autores

1. Mikhail Kulesh, mikhail.kulesh@gmail.com
2. Caio Roberto Ramos da Silva (Brazilian Portuguese translation), caiorrs@gmail.com

6.2 O ícone do app

O ícone do app é gerado a partir das seguintes funções definidas no sistema de coordenadas polares:

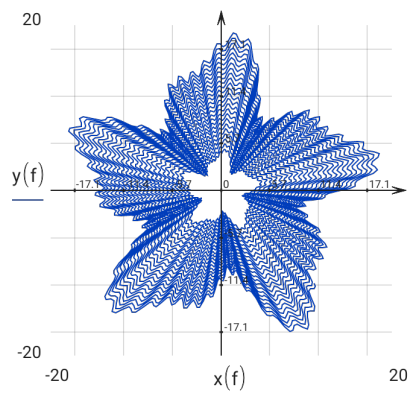
$$f := [0.01, 0.03 \dots 150]$$

$$s(f) := 4 + \sin(5 \cdot f) + \frac{\sin(10 \cdot f)}{2} + \frac{\sin(60 \cdot f)}{6}$$

$$r(f) := 0.9 \cdot (1 + f/50) \cdot s(f)$$

$$x(f) := r(f) \cdot \cos(f)$$

$$y(f) := r(f) \cdot \sin(f)$$



2014-2018, Bremen, Alemanha