Chapitre 2: Interpolation polynomiale et approximation

Estimation de l'erreur d'interpolation

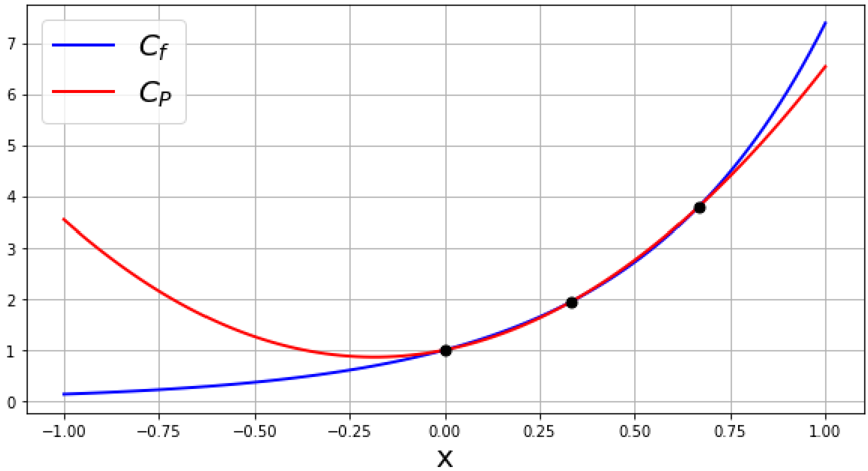
Dans le cas où les points $(x_i, y_i),\ i \in \{0, \cdots, n\}$ sont définies à partir d'une fonction f ($f(x_i) = y_i$), le résultat suivant permet d'estimer l'erreur d'interpolation en un point quelconque.

Soient $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ des nombres réels, f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[x_0, x_n]$ et P_n le polynôme d'interpolation des points $(x_i, y_i),\ i \in \{0, \cdots, n\}$ avec $f(x_i) = y_i$. L'erreur d'interpolation $E_n(x) =\mid f(x) - P_n(x) \mid$ en $x \in [x_0, x_n]$ vérifie

$$E_n(x) \leq \frac{\max\limits_{t \in [x_0, x_n]} \mid f^{(n+1)}(t) \mid}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} \mid x - x_i \mid .$$

Exercice

Soient f la fonction définie sur $[0, \frac{2}{3}]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, les points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{2}{3}$ et P_2 le le polynôme d'interpolation de f en ces points.



Estimer l'erreur d'interpolation en tout point $x \in [x_0, x_2]$.

Solution

Comme f est de classe C^3 sur $[x_0, x_2]$ alors, d'après le théorème de l'estimation de l'erreur d'interpolation, $\forall x \in [x_0, x_2]$,

$$E(x) = \mid f(x) - P(x) \mid \leq \frac{\max\limits_{t \in [x_0, x_2]} \mid f^{(3)}(t) \mid}{3!} \mid x - x_0 \mid \mid x - x_1 \mid \mid x - x_2 \mid .$$

Solution

Comme f est de classe C^3 sur $[x_0, x_2]$ alors, d'après le théorème de l'estimation de l'erreur d'interpolation, $\forall x \in [x_0, x_2]$,

$$E(x) = \mid f(x) - P(x) \mid \leq \frac{\max\limits_{t\in[x_0,x_2]} \mid f^{(3)}(t) \mid}{3!} \mid x - x_0 \mid \mid x - x_1 \mid \mid x - x_2 \mid .$$

En calculant les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 3, on aura

$$f'(t) = 2\,\mathrm{e}^{2t}, \quad f''(t) = 4\,\mathrm{e}^{2t}, \quad f^{(3)}(t) = 8\,e^{2t}.$$

Solution

Comme f est de classe C^3 sur $[x_0, x_2]$ alors, d'après le théorème de l'estimation de l'erreur d'interpolation, $\forall x \in [x_0, x_2]$,

$$E(x) = \mid f(x) - P(x) \mid \leq \frac{\max\limits_{t \in [x_0, x_2]} \mid f^{(3)}(t) \mid}{3!} \mid x - x_0 \mid \mid x - x_1 \mid \mid x - x_2 \mid .$$

En calculant les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 3, on aura

$$f'(t) = 2\,\mathrm{e}^{2t}, \quad f''(t) = 4\,\mathrm{e}^{2t}, \quad f^{(3)}(t) = 8\,e^{2t}.$$

Vu que $\max\limits_{t \in [x_0, x_2]} \mid f^{(3)}(t) \mid = 8\,e^{\frac{4}{3}}$, on obtient

$$E(x) \leq \frac{4\,e^{\frac{4}{3}}}{3} |x| \left| x - \frac{1}{3} \right| \left| x - \frac{2}{3} \right|.$$