



**POLYTECH<sup>®</sup>**  
NICE SOPHIA



UNIVERSITÉ  
CÔTE D'AZUR

PROJET DE 5ÈME ANNÉE OPTION INFORMATIQUE ET  
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À LA FINANCE ET À  
L'ASSURANCE

---

# **SCHÉMA NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE BLACK-SCHOLES**

## **Méthodes numériques pour le pricing d'option**

---

Réalisé par :  
Lazzez Emna  
Kalai Ahmed

Année Universitaire 2022/2023  
Encadré par : Mr Auroux Didier

# Table des matières

<b>1</b>	<b>L'équation de Black-Scholes</b>	<b>1</b>
1.1	Facteurs influençant le prix des options sur actions . . . . .	1
1.2	Rappel de l'équation . . . . .	2
1.3	Etude de l'équation . . . . .	2
1.3.1	Conditions aux bords pour un Call Européen . . . . .	2
1.3.2	Passage à une équation de la chaleur . . . . .	3
1.3.3	Solution Analytique . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Méthodes numériques pour l'équation de la chaleur</b>	<b>5</b>
2.1	Discretisation de Black-Scholes . . . . .	5
2.2	Le schéma d'Euler explicite . . . . .	5
2.3	Le schéma d'Euler implicite . . . . .	6
2.4	le schéma de Crank-Nicolson . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Implémentation et interprétations</b>	<b>8</b>
3.1	Choix de L'option Call 3 Mois . . . . .	8
3.2	Condition CFL $\frac{\partial \tau}{\partial x^2} < 0.5$ Respecté . . . . .	8
3.2.1	Graphique des solutions . . . . .	8
3.3	Condition CFL non Respecté $\frac{\partial \tau}{\partial x^2} > 0.5$ . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Résultat des schémas utilisés</b>	<b>17</b>
4.1	Tableau Recapitulatif des Resultats obtenus . . . . .	17
	Conclusion . . . . .	18

# Table des figures

3.1	Schéma Euleur explicite . . . . .	9
3.2	Schema Cranck Nicolson . . . . .	10
3.3	Schema Euler Implicite . . . . .	11
3.4	Schema Equation analytique . . . . .	12
3.5	Schema d'erreur entre Equation analytique et schéma d'Euleur explicite . . . . .	13
3.6	Schema d'erreur entre Equation analytique et schéma de Cranck Nicolson 3D . . . . .	14
3.7	Schema Euleur explicite CFL non respecté . . . . .	15
3.8	Schema Euleur Crank-Nicolson CFL non respecté . . . . .	16

# Chapitre 1

## L'équation de Black-Scholes

### Introduction

Le problème de l'évaluation des options est que sans connaître la trajectoire probable de l'action, il est difficile d'évaluer l'option, car il est clair que le prix d'une option doit dépendre du prix de l'action. Nous pouvons ensuite résoudre l'équation de Black-Scholes de manière explicite pour les options européennes afin d'obtenir les formules de fixation du prix des options européennes ; Avant de développer ce modèle, nous devons introduire un certain nombre d'idées et de concepts clés.

### 1.1 Facteurs influençant le prix des options sur actions

Comme nous nous attendons à ce que le prix de l'option reflète le prix de l'actif sous-jacent, il semble logique qu'un facteur qui affecte le prix de l'actif sous-jacent affecte également le prix de l'option . Ainsi, pour les options sur actions, nous considérons les facteurs qui affectent les prix des actions. Il existe cinq facteurs principaux. Ce sont :

1. Le prix actuel de l'action,  $S_0$ ,
2. Le prix d'exercice,  $K$ ,
3. Le temps jusqu'à l'expiration,  $T$ ,
4. La volatilité du prix de l'action,  $\sigma$ ,
5. Le taux d'intérêt sans risque,(c.-à-d. taux des bons du Trésor)  $r$ ,

Ici, le taux d'intérêt sans risque est le taux de rendement théorique d'un investissement totalement sans risque. La volatilité représente la façon dont le prix varie dans le temps. La manière dont chacun de ces facteurs affecte le prix des options de vente et d'achat européennes et américaines est indiquée dans le tableau 1.1. Nous allons examiner comment chacun de ces facteurs affecte l'option. Notez que dans le tableau 1.1 , nous utilisons + pour signifier que le facteur augmente le prix de l'option, un – pour une diminution et un ? lorsque la relation est inconnue.

Variable	Call Européen	Put Européen	Call Américain	Put Américain
Cours actuel de l'action	+	-	+	-
Prix d'exercice Strike	-	+	-	+
Temps jusqu'à l'expiration	?	?	+	+
Volatilité	+	+	+	+
Taux sans risque	+	-	+	-

TABLE 1.1 – L'effet de différents facteurs sur le prix des différentes options

La plupart des façons dont chaque facteur affecte chaque type d'option sont intuitives. Si le prix augmente, le prix d'un call augmente car nous sommes susceptibles de voir des augmentations plus importantes du prix de l'action et le prix d'un put diminue car la diminution ne sera pas aussi rapide que l'augmentation. Cela est dû au fait que, comme nous le verrons plus tard, la trajectoire de l'action est le prix initial multiplié par certaines variables. Les augmentations ont donc tendance à être plus rapides que les diminutions.

Le taux d'intérêt sans risque est une idée plus complexe. Dans l'économie, lorsque les taux d'intérêt augmentent, les investisseurs s'attendent à un meilleur rendement de l'option, mais la valeur de l'argent gagné à l'avenir diminue en raison de ces taux d'intérêt. Cela augmente légèrement le prix des actions, ce qui augmente les chances que les options d'achat soient rentables et diminue les chances que les options de vente le soient.

Les observations les plus anormales sont celles du temps à l'expiration et de la volatilité. Le délai d'expiration des options américaines augmente tant pour les options de vente que pour les options d'achat. Cela est dû au fait que, pour deux options, si la seule différence est que l'une a un temps d'expiration plus long, alors le propriétaire de l'option avec un temps plus long a toutes les mêmes opportunités d'exercice et plus. Cela augmente la valeur de l'option. Pour les options européennes, ce n'est pas nécessairement le cas. Si nous avons deux options qui chevauchent la date de détachement du dividende, celle qui a la durée de vie la plus courte aura plus de valeur.

Enfin, nous considérons la volatilité, Pour l'instant, nous remarquons simplement que la volatilité est une mesure de l'incertitude que nous avons sur le prix futur des actions. Si la volatilité augmente, la probabilité que l'action se comporte très bien ou très mal augmente.

## 1.2 Rappel de l'équation

On note  $S$  le prix d'un actif à l'instant  $t$  et  $V(t, S)$  la valeur d'une option sur le sous-jacent  $S$ .

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0. \quad (1.1)$$

Avec la volatilité et  $r$  un rendement "déterministe".

L'équation ci-dessus est connue sous le nom d'équation différentielle de Black et Scholes. Elle est résolue pour certaines conditions aux limites et non résolue analytiquement pour d'autres. En particulier, elle est résolue pour les options européennes, que nous étudions dans la section suivante.

## 1.3 Etude de l'équation

### 1.3.1 Conditions aux bords pour un Call Européen

On note  $C = V$ ,  $T$  l'échéance et  $K$  le strike de l'option. à  $t = T$  (à l'échéance), la valeur du call est donnée par la formule

$$C(S, t) = \max(S - K, 0). \quad (1.2)$$

En effet, si  $S$  est inférieur au prix d'exercice au terme de l'option, il est inintéressant d'exercer l'option

Si  $S = 0$ , alors il y a pas d'intérêt d'exercer l'option. On a donc la condition suivante :

$$C(0, t) = 0 \quad (1.3)$$

Si au contraire le prix de l'action augmente considérablement ( $S \rightarrow \infty$ ). Le prix de l'exercice sera absolument négligeable devant  $S$

$$C(S, t) \approx S, S \rightarrow +\infty \quad (1.4)$$

L'ensemble des équations (1.1)-(1.4) peut être résolu afin de déterminer la valeur d'une option d'achat (call).

### 1.3.2 Passage à une équation de la chaleur

Par un changement de variables, Black-Scholes se ramène à une équation de la chaleur. On commence par poser

$$S = Ke^x$$

ou

$$x = \ln \frac{S}{K}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} S \geq K &\iff x \geq 0 \\ S \leq K &\iff x \leq 0 \end{aligned}$$

$$S \rightarrow +\infty \iff x \rightarrow +\infty$$

$$S = 0 \iff x \rightarrow -\infty$$

On pose ensuite  $t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$

avec

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)$$

$$t = 0 \iff \tau = \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

$$t = T \iff \tau = 0$$

Avec ces 3 changements de variables, l'équation (1.1) devient :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = (q - 1) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - qv. \quad (1.5)$$

avec  $q = \frac{2r}{\sigma^2}$

On procède alors à un 4ème et dernier changement de variable

$$u = e^{-\alpha x - \beta \tau}$$

En prenant  $\alpha = \frac{(1-q)}{2}$  et  $\beta = (-\frac{1}{4}) * (1 + q)^2$

l'équation (1.5) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

Nous devons résoudre l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \forall \tau \in [0; \frac{\sigma^2}{2}T] \\ u(\tau = 0, x) = u_0 \\ \text{avec } u_0(x) = \max(e^{\frac{q+1}{2}} - e^{\frac{q-1}{2}}; 0) \end{cases}$$

### 1.3.3 Solution Analytique

l'équation (1.6) a pour solution analytique

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \quad (1.7)$$

Après avoir remplacé  $u_0$  par son expression, calculer et effectuer le changement de variables inverses on aura :

$$C(S, t) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)} \quad (1.8)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \left[ \ln\left(\frac{S}{K}\right) + (T-t) \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \quad (1.9)$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \left[ \ln\left(\frac{S}{K}\right) + (T-t) \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \quad (1.10)$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (1.11)$$

# Chapitre 2

## Méthodes numériques pour l'équation de la chaleur

### 2.1 Discrétisation de Black-Scholes

Afin de résoudre numériquement l'équation (1.6) nous allons discrétiser le domaine en espace et en temps.

Nous travaillons sur l'intervalle  $[0; \frac{\sigma^2}{2}T]$

$$\tau_i = i * \delta\tau \quad \forall \quad 0 \leq i \leq M$$

$$\tau_M = \frac{\sigma^2}{2}T$$

Pour la discrétisation de l'espace on a pris un pas de temps  $\delta x$

$$t_q \quad J \in [-N; N]$$

$$x_j = j * \delta x$$

Notons  $u_{i,j} = u(\tau_i, x_j)$

Le but maintenant est d'approximer

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau_i, x_j)$$

Pour ce faire, nous allons implémenter 3 schémas et analyser les résultats obtenues. Calculer le temps d'exécution pour chaque schéma implémenté tout en faisant varier le rapport qui est égale à  $\delta\tau \frac{\sigma^2}{\delta x^2}$

### 2.2 Le schéma d'Euler explicite

Utilisation d'un schéma aux différences finies, décentré à droite, pour le calcul

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\delta\tau} = \frac{(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}))}{\delta x^2} \quad (2.1)$$

En réécrivant l'équation (2.1) on pourra exprimer explicitement  $u_{i+1,j}$  en fonction des  $u_{i,j}$ . On aura alors :

$$u_{i+1,j} = (1 - 2\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i,j+1} + \alpha u_{i,j-1} \quad (2.2)$$

De ce fait on pourra écrire le système sous son écriture matricielle on aura alors :



$$U^{(i+1)} = AU^{(i)} \quad (2.3)$$

Avec

$$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

On Obtient :  $A = (I + \alpha\Delta)$

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & \alpha & & & & & & \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha & & & & & \\ & \alpha & 1-2\alpha & \alpha & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \alpha & 1-2\alpha & \alpha & \\ & & & & & \alpha & 1-2\alpha & \alpha \\ & & & & & & \alpha & 1-2\alpha \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{U}^{(i)} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{i,j-1} \\ U_{i,j} \\ U_{i,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{U}^{(i+1)} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{i+1,j-1} \\ U_{i+1,j} \\ U_{i+1,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Pour que le schema soit stable il faut respecter la CFL et tel que  $\alpha = \frac{\delta\tau}{\delta x^2} \leq \frac{1}{2}$  Pour ce qui est de  $u_{0i,-N}$  et  $u_{0i,N}$  nous utiliserons les contions aux limites de C définies dans l'équation (1.2 , 1.3 et 1.4 ), puis nous calculerons u en utilisant la relation entre u et C  
L'erreur du schéma est de l'ordre  $\mathcal{O}(\delta\tau, \delta x^2)$  Donc on une erreur de l'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace

## 2.3 Le schéma d'Euler implicite

l'équation est donnée par :

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\delta\tau} = \frac{(u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}))}{\delta x^2} \quad (2.7)$$

On peut réécrire cette equation sous son ecriture matricielle donnée par :

$$U_i = A^{-1}U_{i-1} \quad (2.8)$$

avec A est donnée par :

$$A = (I - \alpha\Delta)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & & & & & \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & & & & \\ & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha \\ & & & & & -\alpha & 1+2\alpha \\ & & & & & & -\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix} . \quad (2.9)$$

A est toujours inversible car :

Pour les  $u_i$  on garde les matrice de (2.5)

On aura juste à inverser la matrice pour avoir la solution .

L'erreur du schéma est, comme pour Euler explicite, de l'ordre de :  $\mathcal{O}(\delta\tau, \delta x^2)$  Donc on a une erreur de l'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace . Néanmoins, le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable.

## 2.4 le schéma de Crank-Nicolson

l'equation est donnée par :

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\delta\tau} = \frac{1}{2} \frac{(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}))}{\delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{(u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}))}{\delta x^2}$$

On peut réécrire cette equation sous son ecriture matricielle donnée par :

$$(I - \frac{1}{2}\alpha\Delta) U^{(i+1)} = (I + \frac{1}{2}\alpha\Delta) U^{(i)}$$

# Chapitre 3

## Implémentation et interprétations

### Introduction

Ce chapitre d'implémentation du projet regroupe l'implémentation des méthodes utilisées citées précisément dans la spécification des schémas pour la résolution de l'équation de Black-scholes défini dans (1.1)

### 3.1 Choix de L'option Call 3 Mois

Vu que les options disponibles sur le marché listé ont des maturités prédéfinies de 3M,6M,9M et 12M , qui correspondent à H M V Z . Nous allons travailler durant le reste du rapport avec une option européenne (H) à maturité dans 3 Mois avec les paramètres ci- dessous :

- $T : \frac{90}{360} = 0.25$  année
- $K : 20$
- $r : 0.01$
- $\sigma : 0.15$

### 3.2 Condition CFL $\frac{\partial \tau}{\partial x^2} < 0.5$ Respecté

- $N : 200$
- $M : 230$
- $\partial x : 0.005$
- $\partial \tau : 1.22 * 10^{-5}$
- $\frac{\partial \tau}{\partial x^2} : 0.49$

#### 3.2.1 Graphique des solutions

Nous allons parler des plots obtenus pour chacun des schémas ainsi les analyses à faire selon les résultats obtenues

#### Analyse Schéma Euleur explicite

Pour la Figure (3.1) on a tracé le Prix approchée du Call en fonction de la valeur de l'actif S et du temps. On remarque que les conditions aux limites ont été respectées et bien implémentées ce

qui nous a permis d'avoir un graphe de la forme qu'on a envisagé avant implémentation . Conditions aux limites :

$$U_{i,2N} = (\exp(x_{2N}) - \exp(-r * (T - \tau_i))) * \exp(-\alpha * x_{2N} - \beta * \tau_i)$$

issue de la condition du call suivante après changement de variable fait :

$$S = K \exp(-r(T-t))$$

Sans oublier que la CFL a été respecté .

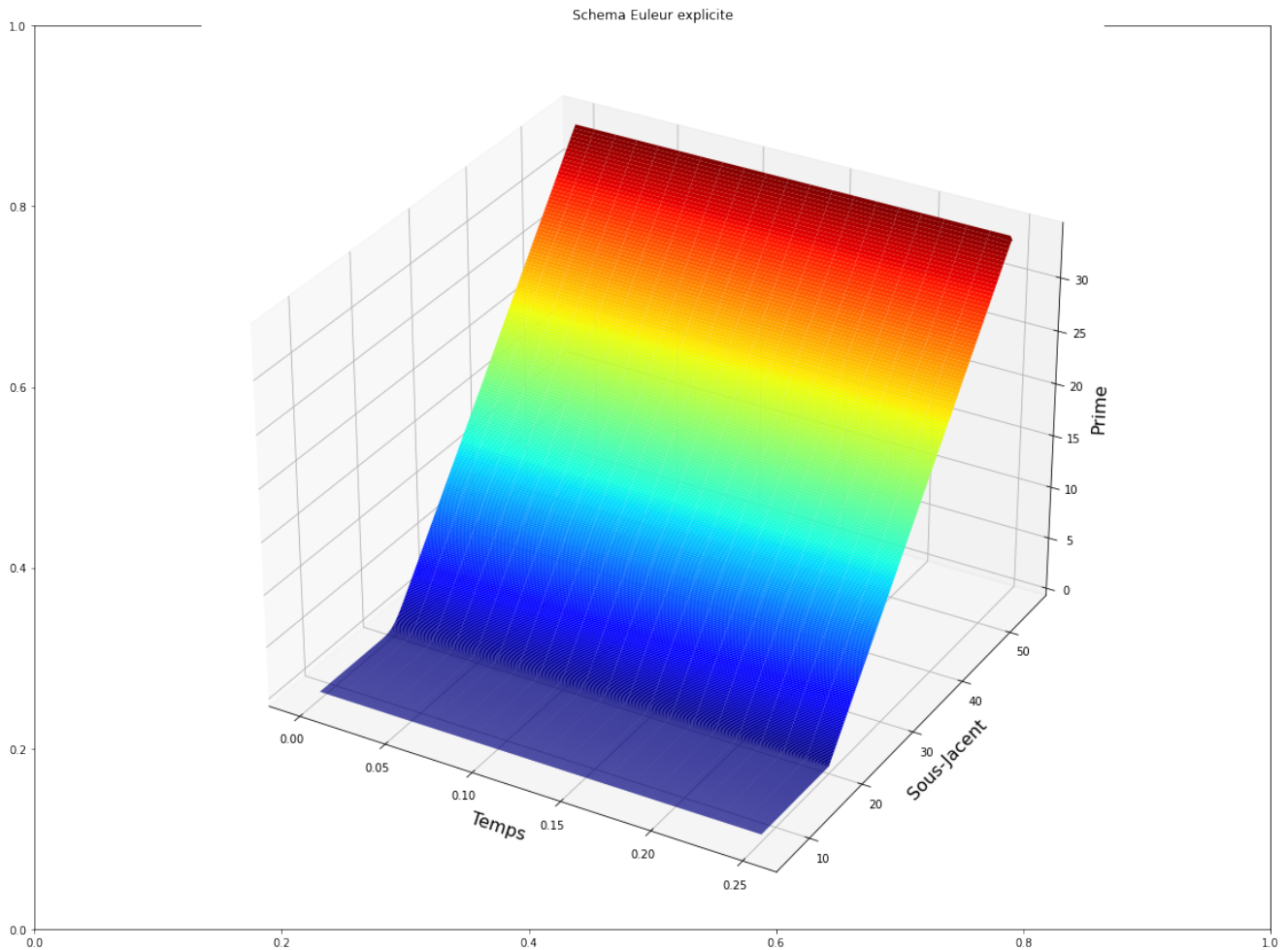


FIGURE 3.1 – Schéma Euleur explicite

### Analyse Schéma Cranck Nicolson

Puisque le schéma de Cranck Nicolson est un schéma inconditionnellement stable , la seule contrainte qu'on avait est celle de respecter les conditions aux limites . En le comparant avec le schéma de la figure (3.1) , on constate que les deux figures converge vers le même resultat pour les paramètres choisis précédemment .

L'achat d'une option (Call) implique un moindre risque que la vente d'une option . Il est à noter que la partie de la courbe pour  $S < K$  ( partie Constante ) représente la perte plafonnée pour l'acheteur du Call Pour  $S > K$  (partie Croissante ) représete le gain limité avant expiration du contrat (maturité atteinte )

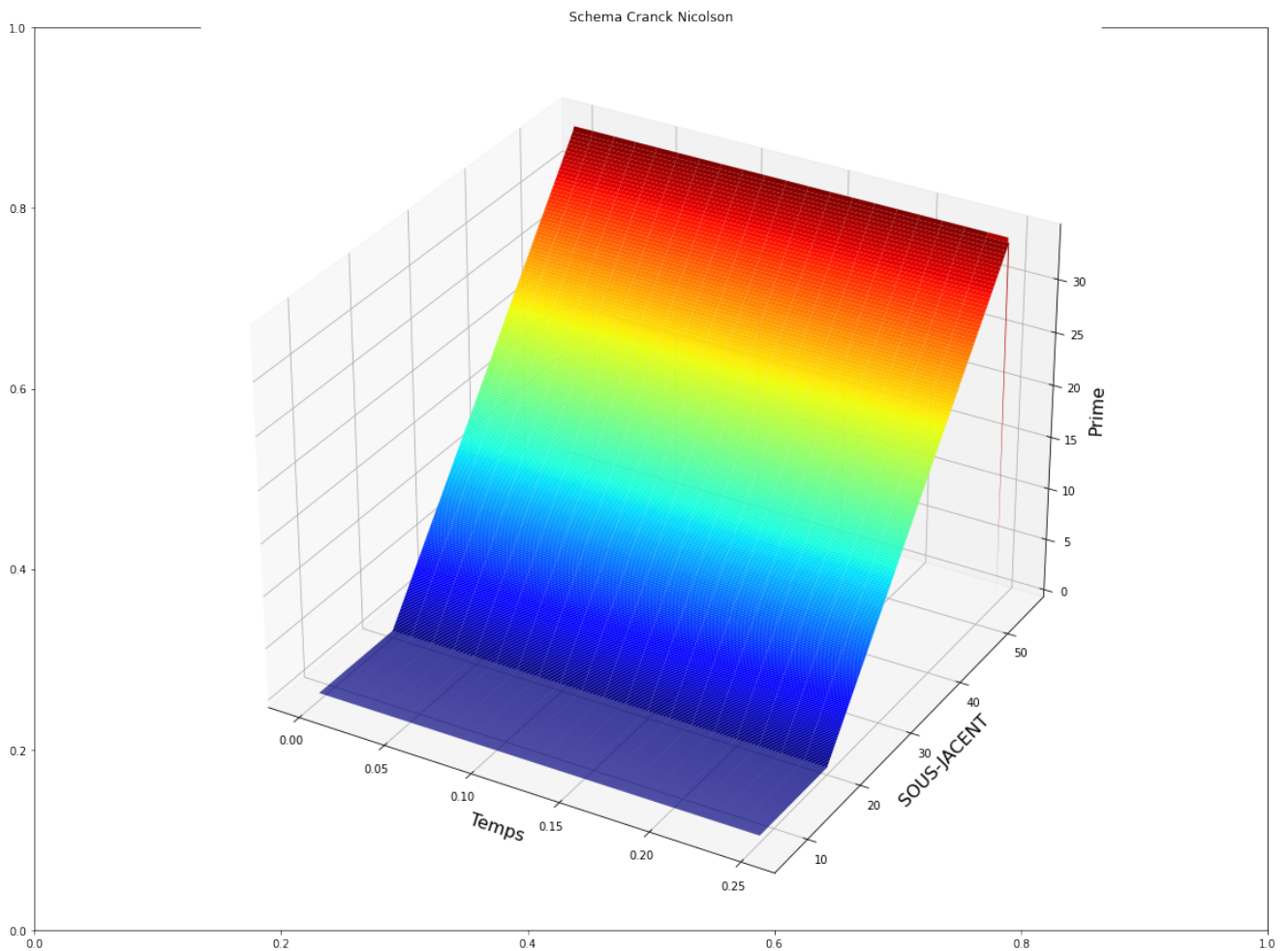


FIGURE 3.2 – Schema Cranck Nicolson

### Analyse Schéma Implicite

Pour ce schéma les conditions aux limites ne sont pas valides puisque on procède par inversion de la matrice A et donc les conditions aux bords pour ce schéma ne sont pas les memes que l'explicite, ce qui a un fort impact sur l'aspect de la courbe à la maturité .

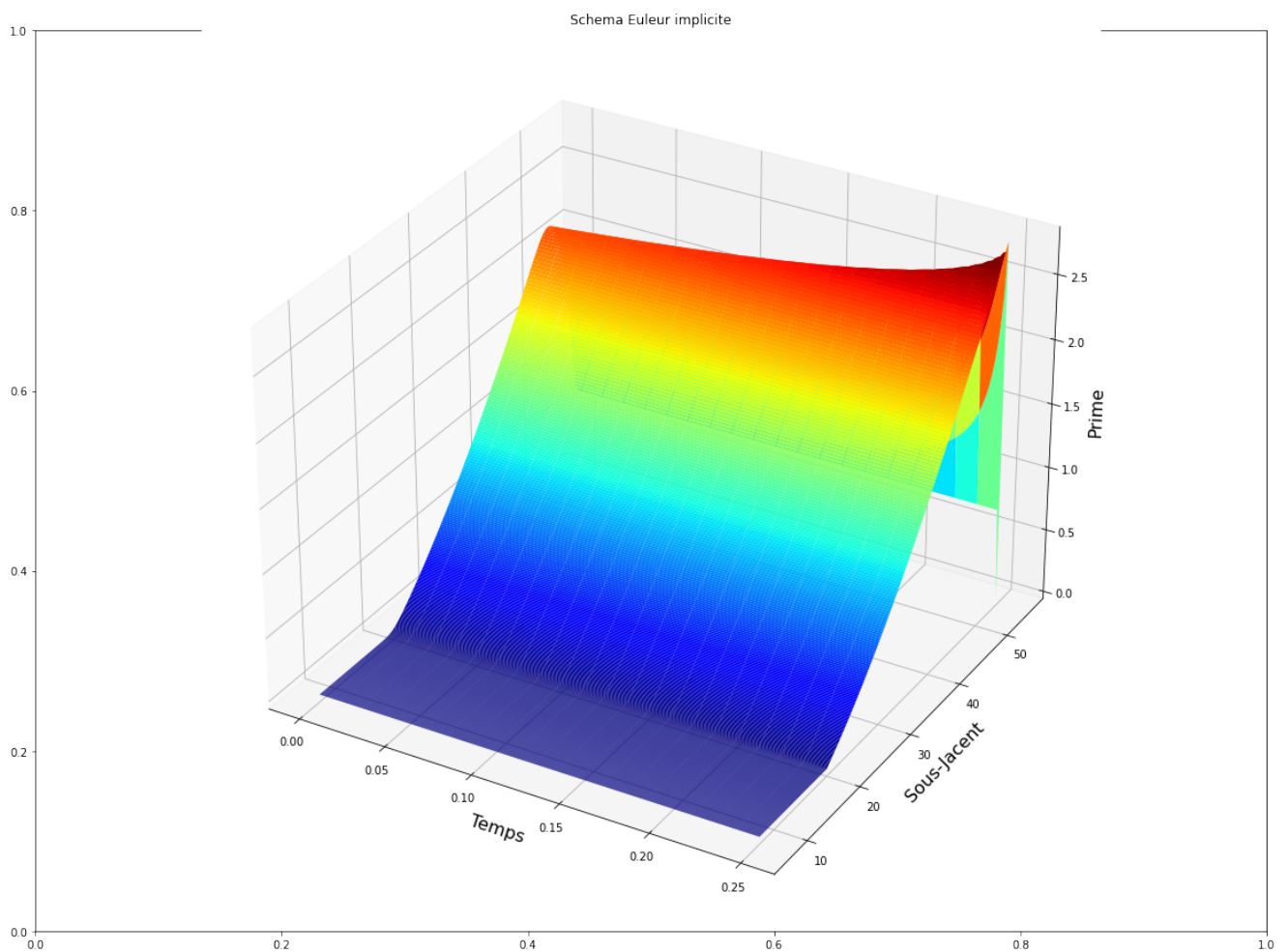


FIGURE 3.3 – Schema Euler Implicite

### Analyse Equation analytique

On remarque que l'aspect de la courbe converge fortement vers celle obtenues dans les figures (3.1) et (3.2)

.

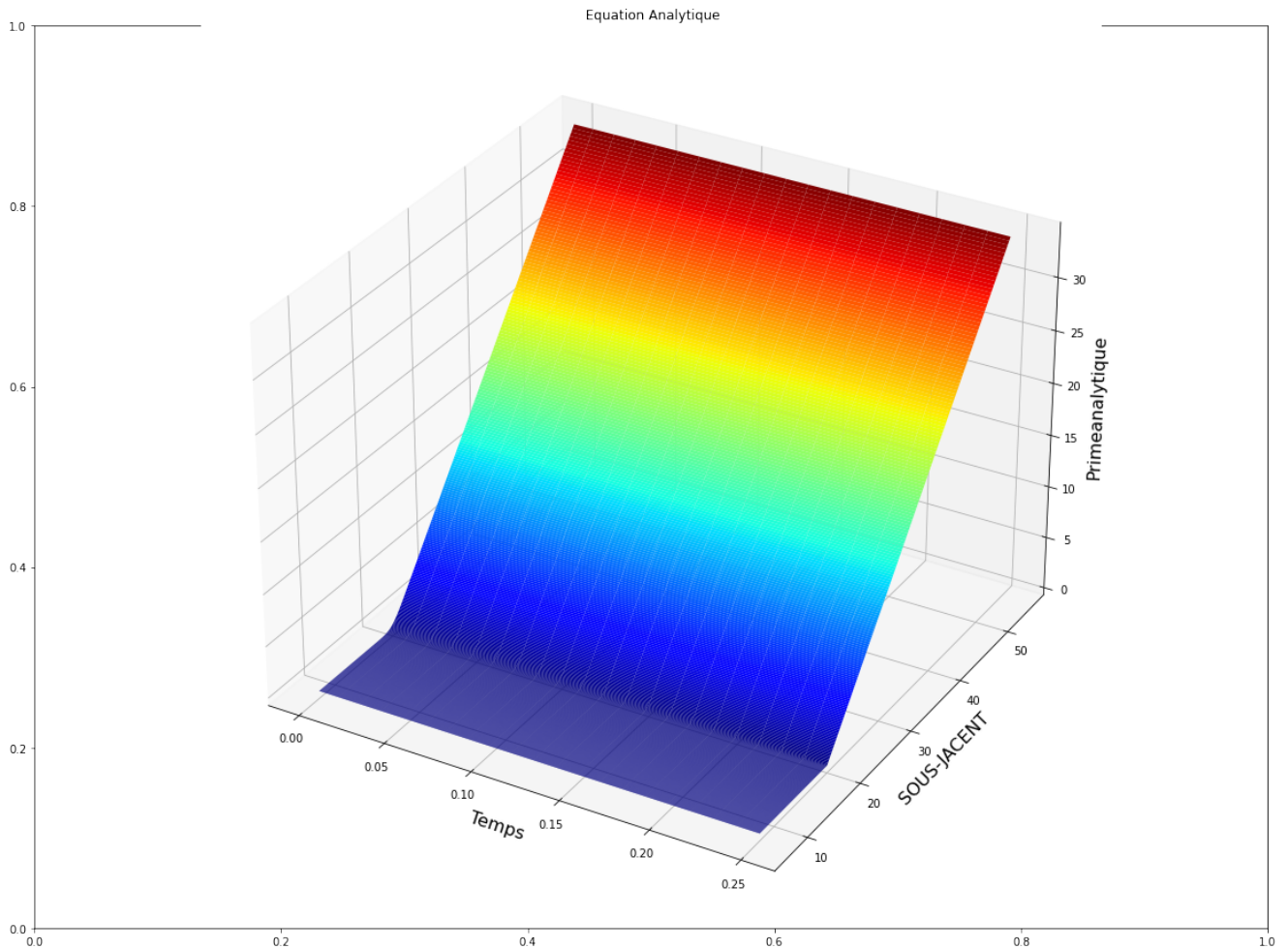


FIGURE 3.4 – Schema Equation analytique

### Analyse de l'erreur entre Equation analytique et schéma d'Euler explicite

D'après le schéma 3D de la figure en haut de *page*<sub>13</sub> on remarque une légère différence constatée suite à la variation de la courbe lorsque  $S = S_{max}$

On a choisi d'étudier la différence entre l'Equation analytique et la solution implémentée par le schéma d'Euler explicite du fait que ce dernier reste une solution approchée et non exacte qui pourra varier selon la discrétisation choisie

D'après la figure (2D) en bas bas de la même page on remarque que l'ordre de l'erreur est en moyenne égale à 0.025 qui croît lorsque  $S$  augmente et pourra atteindre la plus grande valeur quand  $S = S_{max}$

.

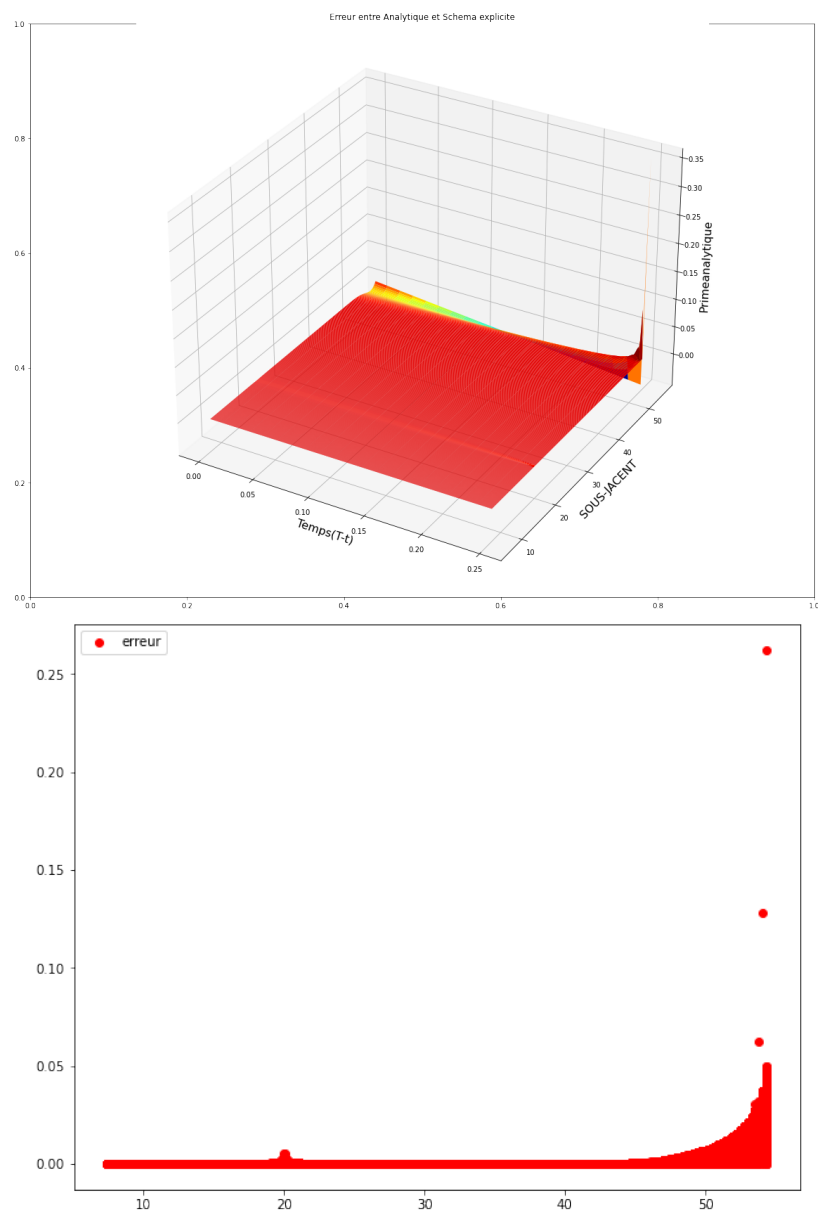


FIGURE 3.5 – Schema d'erreur entre Equation analytique et schéma d'Euler explicite

### Analyse Schema d'erreur entre Equation analytique et schéma de Cranck Nicolson 3D

Pour la figure (3.6) on constate une légère variation de la courbe au niveau du Strike quand  $S = k$

Pour le reste de la courbe on constate que l'erreur est stable De ce fait les 2 schémas comparés sont fortement identiques .



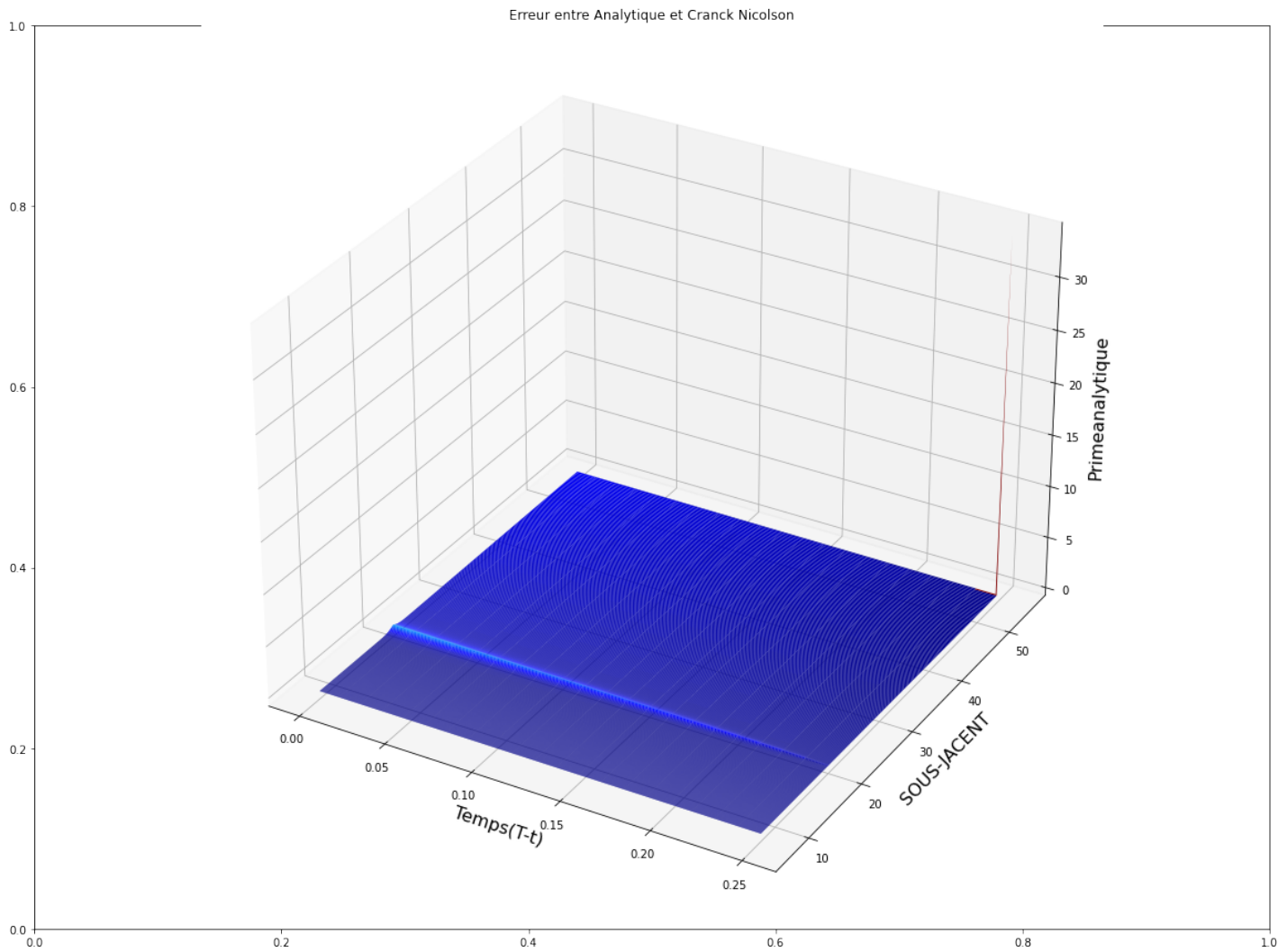


FIGURE 3.6 – Schema d'erreur entre Equation analytique et schéma de Cranck Nicolson 3D

### 3.3 Condition CFL non Respecté $\frac{\partial \tau}{\partial x^2} > 0.5$

- $N : 200$
- $M : 100$
- $\partial x : 0.005$
- $\partial \tau : 2.8110^{-5}$
- $\frac{\partial \tau}{\partial x^2} : 1.125$

On change maintenant à  $N=200$  et  $M=100$ , on obtient un rapport de  $1.125 > 0.5$  donc la CFL n'est plus respecté. On trace les courbes et on trouve les solutions suivantes :

#### Analyse Schema Euleur explicite CFL non respecté

On ne retrouve plus la courbe de la figure (3.1) est cela est du au fait que la CFL est non respecté

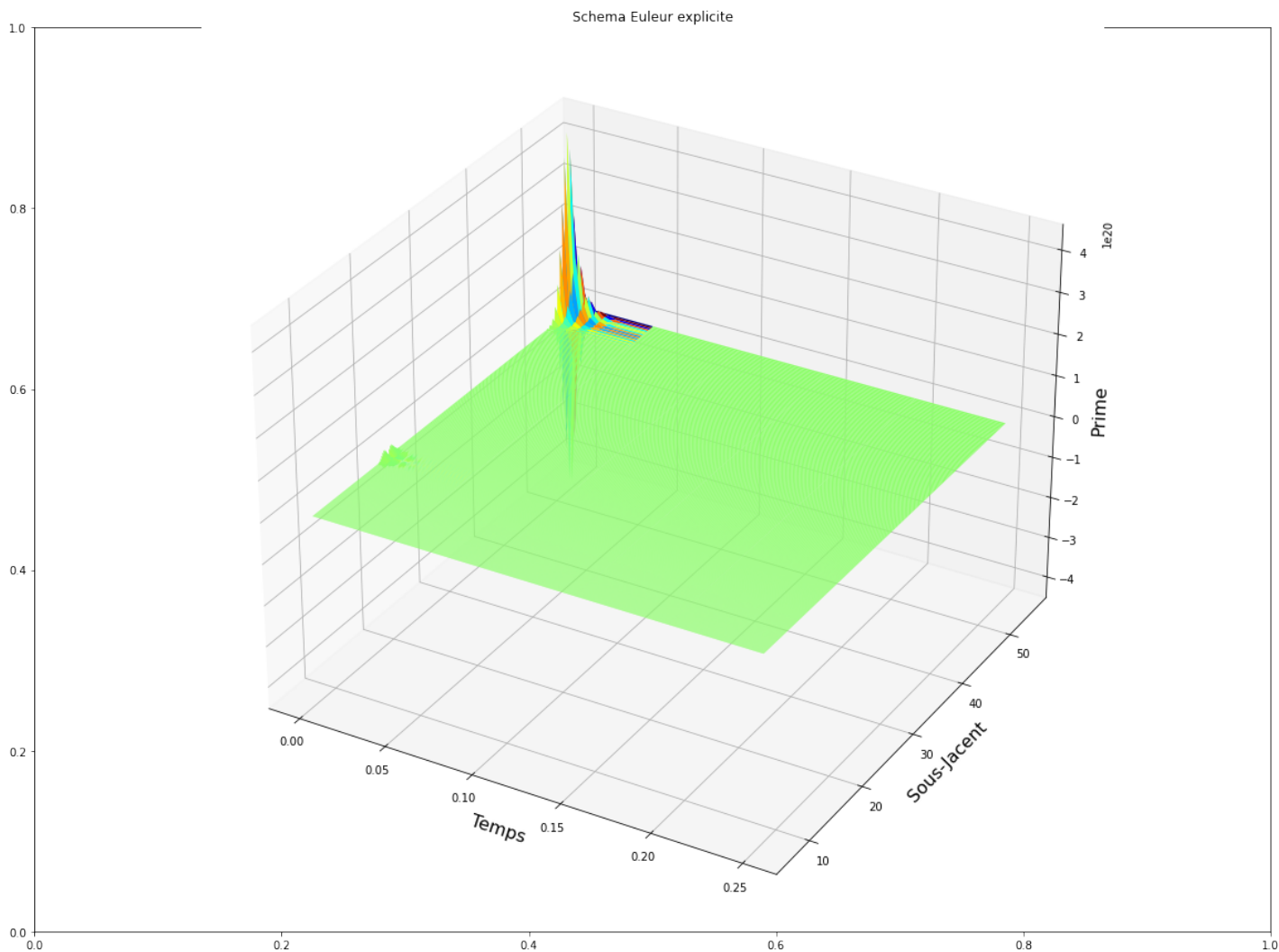


FIGURE 3.7 – Schema Euleur explicite CFL non respecté

### Analyse Schema Euleur Crank-Nicolson CFL non respecté

Malgré le Non respect de la CFL , la courbe est identique à celle de la figure (3.2) Ce qui pourra affirmer que le schéma de Crank-Nicolson est vraiment inconditionnellement stable

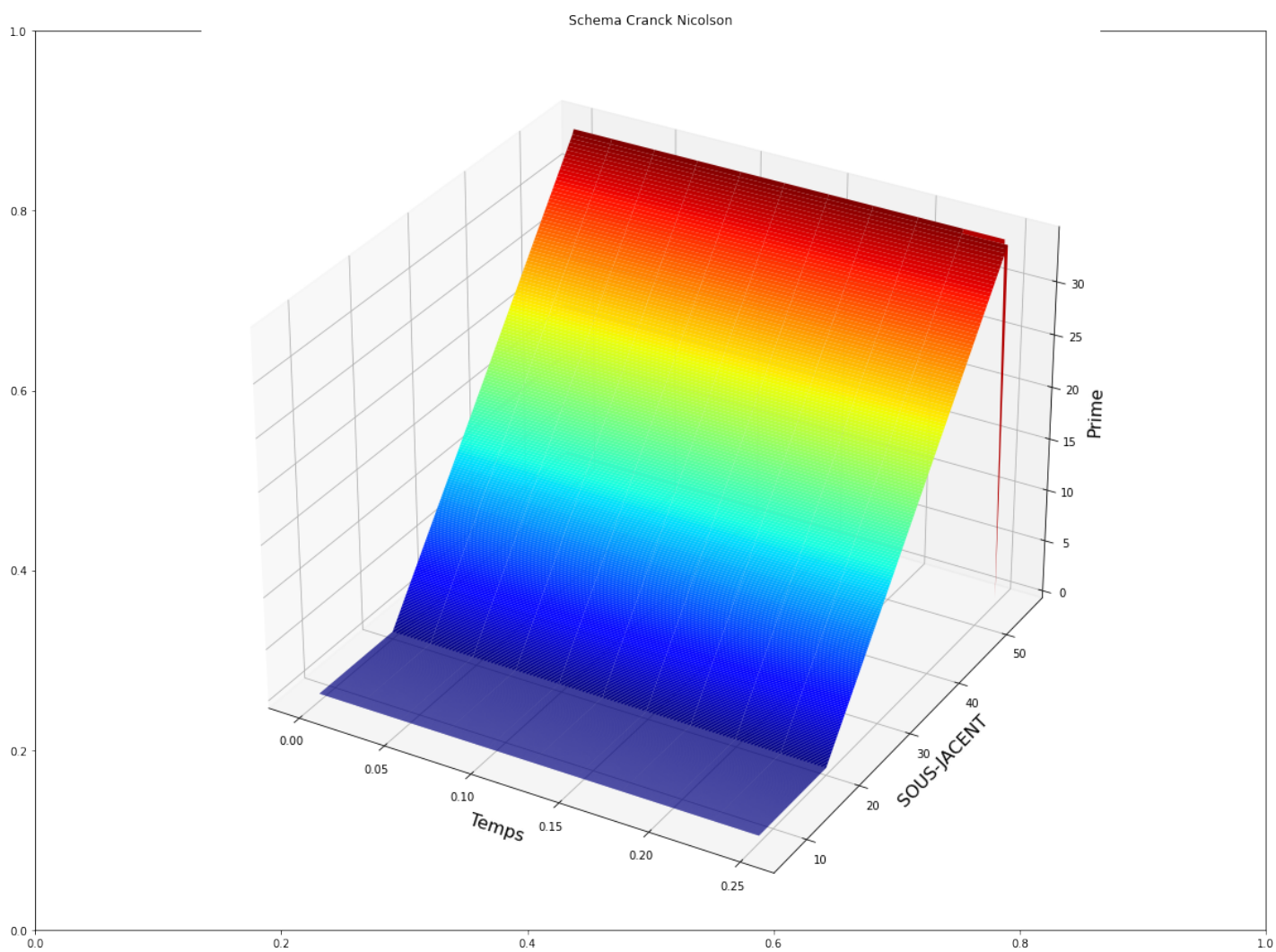


FIGURE 3.8 – Schema Euler Crank-Nicolson CFL non respecté

# Chapitre 4

## Résultat des schémas utilisés

### 4.1 Tableau Recapitulatif des Resultats obtenus

On travaille sur un nombre précis de points de la grille de discrétisation avec  $j$  ( Discrétisation espace ) et  $i$  ( Discrétisation temps )

Puisque  $i \in [0 ; M]$  et  $J \in [-N ; N]$  Ainsi le nombre des points de la grille est égale à  $n \approx 2N * M$

Variable	Euler Explicite	Euler Implicite	Crank-Nicolson
Stabilité	Condition CFL	(+) aveuglément Stable	(+) aveuglément Stable
Ordre	1 en temps , 2 en espace	1 en temps , 2 en espace	(+) 2 en temps , 2 en espace
Cout Calcul	$\mathcal{O}(n)$	LU : $\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$ (resultats de EE,EI)
$\delta\tau, \delta x$	$\delta\tau = 0.49 \delta x^2$	$\delta\tau \approx \delta x^2$	$\delta\tau \approx \delta x$
M=57,N=100, $\alpha=0.0019$	Temps exec =0.28(s)	Temps exec =0.014(s)	Temps exec = 0.0059(s)
M=230,N=200, $\alpha=0.49$	Temps exec =0.0099(s)	Temps exec =2.40(s)	Temps exec = 0.51(s)
M=360,N=250, $\alpha=0.49$	Temps exec =0.015(s)	Temps exec =7.9(s)	temps exec =1.27(s)
M=500,N=500, $\alpha=1.4$	hors CFL	Temps exec =97(s)	temps exec =11.68(s)

TABLE 4.1 – L'effet des Variations de M et N sur les schémas

Il est vrai qu'on n'a pas trouvé un temps d'exécution minimale pour la résolution avec la méthode d'Euler implicite et cela est du au fait qu'on n'a pas implémenté la méthode de décomposition LU pour l'inversion de la matrice  $A$  définie dans (2.9) il en résulte aussi que le temps d'execution de Crank Nicolson n'est pas optimal du fait qu'on utilise lors de l'implémentation l'inversion de la matrice  $A$ .

## Conclusion

Il est visible dans tout les cas où la CFL est respecté que le schéma explicite est le plus rapide puisque il n'y a pas d'inversion de matrice qui est le calcul le plus couteux en terme de temps , en dehors de cette condition on peut pas comparer dans notre travail entre l'implicite et cranck nicolson par les valeurs obtenus puisque on avait un problème d'implémentation du code de l'implicite mais d'une façon théorique le schéma de Cranck Nicolson sera plus rapide .

# CONCLUSION

En guise de conclusion, ce projet a été très bénéfique pour tous les membres de l'équipe. En effet nous avons su en faire le cadre idéal pour découvrir de plus proche le monde de des options précisément les Méthodes numériques pour le pricing d'option et concrétiser les notions vues en cours en les appliquant par le biais d'un langage de programmation (Python) dans le but d'obtenir des résultats pertinent. En décortiquant le projet nous sommes parvenus à étudier de près les conditions aux limites pour les 3 schémas implémentés .

Nous avons implémenté les 3 schémas vu en cours afin de résoudre allusivement l'équation de Black-Scholes en passant par les précédentes transformations et l'équation de la chaleur. Aussi, nous avons déterminé les paramètres de l'option sur laquelle on a travaillé afin de rapprocher nos résultats des constatations réelles sur le marché financier pour enfin réaliser une analyse sur nos résultats. Ce projet a constitué une bonne pratique des notions vues en cours d'actuariat vie pour le produit de rente viagère à termes échus.

Une piste de recherche future consistera à nous intéresser en effectuant diverses manipulations à rendre l'implémentation plus efficace c'est à dire moins coûteuse en temps puisque les données financières sont généralement massives dans le but de découvrir les enjeux et de cerner les différentes notions qui s'y rapportent .