Rekürans Bağıntıları (Özyineli Bağıntılar)

Bir dizinin içinde kendisinden bir parça bulunuyorsa o diziye rekürans bağıntısı (özyineli dizi) denir.

$a_n = 5n+1$ (dizi) (sequence) $\longrightarrow a_{20} = 101$

$\boxed{a_n = 2a_{n-1} + 3}$ (a_{n-1} kendisinde parça) rekürans bağıntısı

$\downarrow$

$a_0 = 3 \qquad n \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5^n \longrightarrow a_1 = 3,\ a_0 = 5,\ n \geq 2 \\ \\ a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} \end{array}\right\} \text{rekürans bağıntısı}$$

Ör: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2^{n-1}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $n \geq 2$ olarak veriliyor. Buna göre, a_5 nedir?

$n=2 \Rightarrow a_2 = 2a_1 - a_0 + 2 \Rightarrow a_2 = 4 - 1 + 2 \Rightarrow \boxed{a_2 = 5}$

$n=3 \Rightarrow a_3 = 2a_2 - a_1 + 4 \Rightarrow a_3 = 10 - 2 + 4 \Rightarrow \boxed{a_3 = 12}$

$n=4 \Rightarrow a_4 = 2a_3 - a_2 + 8 \Rightarrow a_4 = 24 - 5 + 8 \Rightarrow \boxed{a_4 = 27}$

$n=5 \Rightarrow a_5 = 2a_4 - a_3 + 16 \Rightarrow a_5 = 54 - 12 + 16 \Rightarrow a_5 = 58$ //

Ayrık matematikteki hedefimiz

Rekürans Bağıntısı

Rekürans bağıntısını çözmek

$a_n=3a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_n=2^n - n + 1$

Sözel bir problemi rekürans bağıntısına çevirme

İç bileşenlerden kurtaracak şekilde yazmalıyız

Rekürans Bağıntılarının Sınıflandırılması

a_n'nin kendisinden sonraki kaç terime bağlı olması rekürans bağıntısının derecesini verir

1) Derece (Order)

$a_n = 5a_{n-1} + n^2$ → 1 first order

$a_n = 3a_{n-1} - 5a_{n-2}$ → 2 second order

$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-3} + 3^n$ → 3 third order

$a_n = 2a_{n-4} + 1$ → 4. derece

2) Homojen – homojen değil (homogenous – nonhomogenous)

$$a_n = 3a_{n-1}$$ ✓

$$a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2}$$ ✓

$$a_n = 3a_{n-1} + n \cdot a_{n-2} + 3^n$$ ✗

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3} - 4$$ ✗

$$a_n = a_{n-2} + n^3 + n^2$$ ✗

3) Lineer, lineer olmayan (Linear, nonlinear)

a_n'li terimlerin üslerinin alınması veya birbirleri ile çarpılması lineer'liği bozar.

$$a_n = 5a_{n-2} + n \cdot a_{n-3} + n^2$$ ✓

$$a_n = (a_{n-1})^2 + 3n$$ ✗

$$(a_n)^3 = a_{n-1} + a_{n-2}$$ ✗

$$a_n = (a_{n-1}) \cdot (a_{n-2}) - 3$$ ✗

4) Sabit katsayılı olan ve olmayan (constant coefficient)

a_n'li ifadeler n'li birşey ile çarpım durumunda olursa sabit katsayılı değildir.

$$a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2} + n - 7$$ ✓

$$a_n = n \cdot a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5^n$$ ✗

$$a_n = 7a_{n-1} + 10a_{n-2}$$ ✓

$$a_n = 3^n \cdot a_{n-2} + 1$$ ✗

Sabit Katsayılı Homojen Rekürans Bağıntılarının Çözülmesi (Karakteristik Kök Tekniği)

Karakteristik Kök Tekniği

- İkinci derece ve daha büyük dereceli rekürans bağıntılarının çözümünde kullanılır.
- Sabit ve homojen rekürans bağıntılarında kullanılır.
- Homojen olmayan rekürans bağıntısında ise homojen hale getirmek için kullanılır.

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

Sabit Katsayılı Homojen 2. derece bir rekürans bağıntısı

Homojen olduğundan

$$a_n = a_n^{(h)}$$

homojen olmadığında

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(ö)}$$

2 tane farklı kökü varsa

$$a_{n-2} = 1$$

$$a_{n-1} = r$$

$$a_n = r^2$$

karakteristik denklem

$$r^2 = 3r + 4$$

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

Eşit 2 tane kökü varsa

Karakteristik Denklemin Köklerine Göre Homojen Çözümün Yazımı

2.derece

1) $r_1 \neq r_2$ ise $\Longrightarrow$ $\boxed{a_n^{(h)} = c_1.(r_1)^n + c_2.(r_2)^n}$

2) $r_1 = r_2$ ise $\Rightarrow$ $\boxed{a_n^{(h)} = c_1.(r_1)^n + c_2.(r_2)^n.n}$

$r=4 \quad r=-1$

$(r-4)(r+1)=0$

$\boxed{r^2-3r-4=0}$

$$a_n = c_1.4^n + c_2.(-1)^n$$

3.derece

1) $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \Rightarrow a_n^{(h)} = c_1.(r_1)^n + c_2.(r_2)^n + c_3.(r_3)^n$

2) $r_1 = r_2 = r_3 \Rightarrow a_n^{(h)} = c_1.(r_1)^n + c_2.(r_2)^n.n + c_3.(r_3)^n.n^2$

3) $r_1 = r_2 \neq r_3 \Rightarrow a_n^{(h)} = c_1.(r_1)^n + c_2.(r_2)^n.n + c_3.(r_3)^n$

Soru: $a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}$, $a_0 = 5$ ve $a_1 = 8$ olan başlangıç değerleri verilmiş rekürans bağıntısını çözünüz.

1.adım $\quad a_n = a_n^{(h)}$

2.adım $\quad r^2 = 3r + 10$ (karakteristik denklem)

2.derece

$$r^2 - 3r - 10 = 0$$

$$(r-5)(r+2) = 0$$

$$5 \qquad -2$$

$$\boxed{a_n^{(h)} = c_1(5)^n + c_2(-2)^n}$$

3.adım

$$a_n = c_1 5^n + c_2 (-2)^n$$

$$a_0 = 5 \Rightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 5} \; / 2$$

$$a_1 = 8 \Rightarrow \boxed{5c_1 - 2c_2 = 8}$$

$$7c_1 = 18$$

$$\boxed{c_2 = \frac{17}{7}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{18}{7} \cdot 5^n + \frac{17}{7} \cdot (-2)^n}$$

Soru: $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 5$ başlangıç koşulları ile verilen rekürans bağıntısının çözümünü bulunuz.

1.adım $a_n = a_n^{(h)}$

2.adım $a_{n-2} = 1$

2.derece $a_{n-1} = r \Rightarrow r^2 = -4r - 4 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0$

$a_n = r^2$

$(r+2)(r+2) = 0$

$r_1 = -2 \quad r_2 = -2$

$$a_n^{(h)} = c_1.(-2)^n + c_2(-2)^n.n$$

3. adım $a_n = c_1(-2)^n + c_2(-2)^n.$

$a_0 = 3 \Rightarrow \boxed{c_1 = 3}$

$$\boxed{a_n = 3.(-2)^n - \frac{11}{2}(-2)^n.n}$$

$a_1 = 5 \Rightarrow -2c_1 - 2c_2 = 5 \Rightarrow -2c_2 = 11 \Rightarrow \boxed{c_2 = -\frac{11}{2}}$

Sabit Katsayılı Homojen Olmayan Rekürans Bağıntılarının Çözülmesi

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + f(n)$$

genel özel

$$a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(ö)}$$

polinom olursa	üstel fonksiyon olursa
1	3.2^n
3	5^n
$n+2$	7^{-n}
n^2	

Özel çözüm bulunurken $a_n^{(ö)}$ tahmin edilir ve çözüm bu şekilde elde edilir.

Polinom Durumu

Ör: $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$ başlangıç koşulları ile verilen rekürans bağıntısını çözünüz.

1. adım $a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(ö)}$

2. adım $a_n^{(h)}$ bulunur

$$\overset{r^2}{a_n} = 2\overset{r}{a_{n-1}} + 3\overset{1}{a_{n-2}} \Rightarrow r^2 = 2r + 3$$

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$(r-3)(r+1) = 0$$

$$r = 3 \quad r = -1$$

$$\boxed{a_n^{(h)} = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-1)^n}$$

$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5$

not: polinomun derecesi ne ise a_n nin de dereceside aynı olur
f(n) sabit olduğundan tüm terimler sabite eşit olur

3. adım $a_n^{(ö)}$ tahmin edilir. $a_n^{(ö)} = A$

$a_{n-1} = A$

$a_{n-2} = A$

ardından a_{n-1} ve a_{n-2} elde edilip eşitlikte yerine konulur, amaç tahmindeki katsayıyı bulmaktır.

$$A = 2A + 3A + 5 \Rightarrow -4A = 5 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{5}{4}} \qquad \boxed{a_n^{(ö)} = -\frac{5}{4}}$$

4. adım :

$$\boxed{a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-1)^n - \frac{5}{4}}$$

$a_0 = 4$

$a_1 = 10$

$$c_1 + c_2 - \frac{5}{4} = 4 \Rightarrow c_1 + c_2 = \frac{21}{4}$$

$$3c_1 - c_2 - \frac{5}{4} = 10 \Rightarrow 3c_1 - c_2 = \frac{45}{4}$$

$$\Rightarrow 4c_1 = \frac{\cancel{66}}{\cancel{4}} \frac{33}{2}$$

$$\boxed{c_1 = \frac{33}{8}} \qquad \boxed{c_2 = \frac{9}{8}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{33}{8} \cdot 3^n + \frac{9}{8}(-1)^n - \frac{5}{4}}$$

Ör: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \boxed{+3n+4}$, $a_0 = 5$, $a_1 = 7$ başlangıç koşulları ile verilen rekürans bağıntısını çözünüz.

1.adım $a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(ö)}$

2.adım $a_n^{(h)} \longrightarrow \overset{r^2}{a_n} = \overset{r}{a_{n-1}} + 2\overset{1}{a_{n-2}} \Rightarrow r^2 = r + 2$

$r^2 - r - 2 = 0$

$(r-2)(r+1) = 0$

$2 \quad -1$

$$\boxed{a_n^{(h)} = c_1 . 2^n + c_2 . (-1)^n}$$

1. derece polinom

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \boxed{+3n+4}$

3.adım $a_n^{(ö)} = An + B$

$a_{n-1} = An - A + B$

$a_{n-2} = An - 2A + B$

$\cancel{An} + \cancel{B} = \cancel{An} - A + \cancel{B} + 2An - 4A + 2B + 3n + 4$

$-2An + 5A - 2B = 3n + 4$ $\boxed{A = -\frac{3}{2}}$

$5A - 2B = 4 \Rightarrow -\frac{15}{2} - 2B = 4$

$-\frac{23}{2} = 2B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{23}{4}}$

$$\boxed{a_n^{(ö)} = -\frac{3}{2}n - \frac{23}{4}}$$

4.adım $\boxed{a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot (-1)^n - \frac{3}{2}n - \frac{23}{4}}$ $a_0 = 5$

$a_1 = 7$

c_1 ve c_2 bulunup en son a_n yazılır.

Üstel Fonksiyon Durumu

5^n

Ör: $a_n = -4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2.5^n$, $a_0 = 6$, $a_1 = 10$ başlangıç koşulları ile verilen rekürans bağıntısını çözünüz.

$a_n^{(h)}$ içinde var mı?

YOK

1.adım : $a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(ö)}$

2.adım $a_n^{(h)} \Rightarrow a_n = -4a_{n-1} - 3a_{n-2} \Rightarrow r^2 = -4r - 3$

$r^2 + 4r + 3 = 0$

$(r+3)(r+1) = 0$

$r = -3 \quad r = -1$

$$\boxed{a_n^{(h)} = c_1(-3)^n + c_2.(-1)^n}$$

Eğer varsa

1 tane varsa

$a_n^{ö} \rightarrow$ 1 tane

n çarpanı gelir.

2 tane varsa

$a_n^{(ö)} \rightarrow$ 2 tane

n^2 çarpanı gelir.

3.adım $a_n^{(ö)} = A.5^n$

$a_{n-1} = A.5^{n-1} = \frac{A}{5}.5^n$

$a_{n-2} = A.5^{n-2} = \frac{A}{25}.5^n$

$\Rightarrow A.5^n = -\frac{4A}{5}5^n - \frac{3A}{25}.5^n + 2.5^n$

$A = \frac{-23A}{25} + 2 \Rightarrow \frac{48A}{25} = 2$

$A = \frac{25}{24}$

$a_n^{(ö)} = \frac{25}{24}.5^n$

4.adım, $a_n = c_1.(-3)^n + c_2.(-1)^n + \frac{25}{24}.5^n$

$a_0 = 6$

$a_1 = 10$

$c_1 + c_2 + \frac{25}{24} = 6$

$-3c_1 - c_2 + \frac{125}{24} = 10$

$\Rightarrow c_1 = \ldots$

$c_2 = \ldots$

$a_n = \ldots\ldots\ldots$

Ör: $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 3^n$, $a_0 = 7$, $a_1 = 5$ ...... çözünüz.

1 tane var.

1.adım $a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(ö)}$

2.adım $a_n^{(h)} \Longrightarrow \overset{r^2}{a_n} = 2\overset{r}{a_{n-1}} + 3\overset{1}{a_{n-2}} \Longrightarrow r^2 - 2r - 3 = 0$

$(r-3)(r+1) = 0$

$r=3 \quad r=-1$

$$\boxed{a_n^{(h)} = c_1 3^n + c_2 \cdot (-1)^n}$$

3.adım $a_n^{(ö)} = A.3^n.n$

$$\left.\begin{aligned} a_{n-1} &= A.3^{n-1}.(n-1) = \frac{A}{3}.3^n.n - \frac{A}{3}.3^n \\ a_{n-2} &= A.3^{n-2}.(n-2) = \frac{A}{9}.3^n.n - \frac{2A}{9}.3^n \end{aligned}\right\}$$

$$\cancel{A.3^n.n} = \underbrace{\cancel{\frac{2A}{3}.3^n.n} - \frac{2A}{3}.3^n + \cancel{\frac{A}{3}.3^n.n}}_{A.3^n.n} - \frac{2A}{3}.3^n + 3^n$$

$\frac{4A}{3}.3^n = 3^n \qquad \frac{4A}{3} = 1 \qquad \boxed{A = \frac{3}{4}} \qquad \boxed{a_n^{(ö)} = \frac{3}{4}.3^n.n}$

Sayı Dizilerini Rekürans Bağıntısına Dönüştürme

Bizlere bazen bir sayı dizisi bazen de sözel bir ifade verilerek ondan bir sayı dizi formunda olayı yazmamız beklenir.

$\underline{4}, 7, 13, 25, 49, 97, \ldots$ Sayı dizisi

Rekürans bağıntısı : $\boxed{a_0 = 4 \;,\; a_n = 2a_{n-1} - 1 \;,\; n \geq 1}$

Ör: $1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, \ldots$ sayı dizisinin rekürans bağıntısını olarak yazınız.

$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{array}}$ $\boxed{a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \;,\; n \geq 2}$

Homojen olmayan rekürans bağıntısı için bir örnek yazalım

Ör: 1, 3, 6, 13, 27, 56, 115, ------ sayı dizisini rekürans bağıntısı haline getiriniz.

$1+3+2$
$3+6+4$
$6+13+8$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{array}}$$

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-1}, \quad n \geq 2}$$

$a_2 = 2a_1 + a_0 \qquad a_2 = 7$

$a_3 = 2a_2 + a_1 \qquad a_3 = 17$

Soru: Sadece 0 ve 1 'lerden oluşan n birim uzunluğundaki sayı dizileri oluşturuluyor. Buna göre, bu sayı dizilerinden n uzunluğunda olup "00" içerenlerin sayısını veren rekürans bağıntısını başlangıç koşullarını da belirleyerek yazınız.

---

n = 0 birim ⟶ dizi yok $\qquad a_0 = 0$

n = 1 " ⟶ 0, 1 $\qquad a_1 = 0$

n = 2 " ⟶ 00, 01, 10, 11 $\qquad a_2 = 1$

n = 3 " ⟶ 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111 $\qquad a_3 = 3$

n = 4 " ⟶ $\qquad a_4 = 8$

0000- 0011- 0111
0001- 0101 1011
0010- 1001- 1101
0100- 0110 1110
1000- 1010 1111
1100-

0, 0, 1, 3, 8, ...

$$a_n = 2.a_{n-1} + a_{n-2} + 1 \qquad n \geq 2$$

$$a_1 = 0$$

$$a_0 = 0$$

Problemlerin Karmaşıklığı

Çözülebilir Problemler (Tractable)

- Polinomsal en kötü durum karmaşıklığına sahip bir algoritma kullanarak çözülebilen bir problem **çözülebilir** (tractable) olarak adlandırılmaktadır.
- Çünkü algoritmanın, nispeten kısa bir zaman içinde makul büyüklükte veriye sahip bir probleme çözüm getireceği beklenmektedir.
- Bununla birlikte, büyük–O tahminindeki polinomlar yüksek dereceye sahipse (100. derece gibi) veya katsayılar aşırı büyükse, algoritmanın problemi çözmesi oldukça uzun zaman alabilir.
- Sonuç olarak, polinomsal en kötü durum zaman karmaşıklığına sahip bir algoritma kullanarak çözülebilen bir problemin nispeten küçük veri değerlerinde bile makul zamanda çözülebilmesi garanti edilemez.
- Pratikte bu tür tahminlerdeki polinomların derece ve katsayıları genellikle küçüktür.

Çözülemez Problemler (Intractable)

- En kötü durum polinomsal zaman karmaşıklığına sahip bir algoritma kullanılarak çözülemeyen problemler **çözülemez** (intractable) olarak adlandırılmaktadır.
- En kötü duruma sahip bir problemin çözümü, çok küçük girdi değerleriyle bile her zaman olmasa da genellikle aşırı miktarda zamana ihtiyaç duyabilmektedir.
- Bununla birlikte, pratikte bazı en kötü durum zaman karmaşıklığına sahip algoritmaların bir problemi, birçok durumda kendisine özgü en kötü durumundan çok daha hızlı çözebildiği durumlar vardır.
- Muhtemelen çok az sayıdaki durumların makul zamanda çözülememesine izin vermeye istekli olduğumuzda, ortalama durum zaman karmaşıklığı, bir algoritmanın bir problemi ne kadar uzun zamanda çözeceğinin en iyi ölçüsüdür.
- Endüstride önemli olan birçok problem çözülemez olarak düşünülmektedir ancak uygulamada, aslında günlük yaşamın getirdiği tüm girdi durumları için çözülebilmektedir.
- Pratik uygulamada karşılaşılan çözülemez problemlerin üstesinden gelmenin bir diğer yolu da problemin kesin çözümünü bulmak yerine yaklaşık çözümler aramaktır.
- Bu tür yaklaşık çözümler bulmakta hızlı algoritmaların varlığı işe yaramakta ve hatta kesin çözümden çok farklı olmama olasılığı bulunmaktadır.

Çözümü Bulunmayan Alg. (Unsolvable)

- Hiçbir algoritmanın onları çözemediği bazı problemler mevcuttur.
- Bu tür problemler **çözümü bulunamayan (unsolvable)** olarak adlandırılmaktadır
- Algoritma kullanarak **çözülebilen** problemlerin zıttı olarak ifade edilebilir.
- Çözümü bulunamayan problemlerin varlığına ilk kanıt, sonlanma (halting) probleminin çözülemez olduğunu gösteren büyük İngiliz matematikçi ve bilgisayar bilimcisi Alan Turing tarafından sağlanmıştır.

P ve NP Problem Sınıfları

- Çözülebilir problemlerin **P sınıfına (Class P)** ait olduğu söylenir.
- Polinomsal zamanda kontrol edilebilen bir çözüm için problemlerin **NP sınıfına (Class NP)** ait olduğu söylenmektedir.
- NP kısaltması, *belirli olmayan polinomsal zamanlı (nondeterministic polynominal time)* anlamına gelmektedir.

- Problemlerin herhangi birisi polinomial en kötü-durum zaman algoritmaları ile çözülebildiğinde, NP sınıfındaki tüm problemler de polinomsal en kötü-durum zaman algoritmaları ile çözülebilir. Bu özelliği taşıyan algoritmalara **NP-tam problemler** (**NP-complete problems**)
- **NP-Hard,** polinomsal zamanda bir çözümü olduğunu ispatlayamadığımız karar problemlerinin karmaşıklık sınıfıdır.

Kaynaklar

- Levitin "Introduction to the Design & Analysis of Algorithms," 3rd ed., Ch. 1 ©2012 Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, NJ. All Rights Reserved
- https://www.javatpoint.com
- https://algorithms.tutorialhorizon.com
- https://www.tutorialspoint.com/