3 Bağıntılar ve Fonksiyonlar

Bağıntı notasyonu kümeler gibi çok genel bir notasyondur. Bu konu matematiğin anahtar konularından biridir ve başka birçok konuda da kullanılır. Üç özel tip bağıntı çok önemlidir: fonksiyonlar, eşitlik bağıntıları ve sıra bağıntıları.

3.1 Bağıntılar ve Gösterimleri

İkili yüklemler yani "…daha ağırdır" şeklindeki cümleleri önermesel fonksiyona çevirmek için iki tane değişkene ihtiyaç vardır. Örneğin, H '…daha ağırdır' anlamına geliyorsa H(x,y) "x, y' den daha ağırdır" önermesel fonksiyonunu ifade eder. İki değişkenli önermesel fonksiyonları iki değişkeni arasındaki ilişkiyi tanımlamak gibi düşünebiliriz. a ve b objeleri verilmiş ise, H(a,b) sadece ve sadece objeleri uygun biçimde ilişkilendirilmiş ise doğrudur.

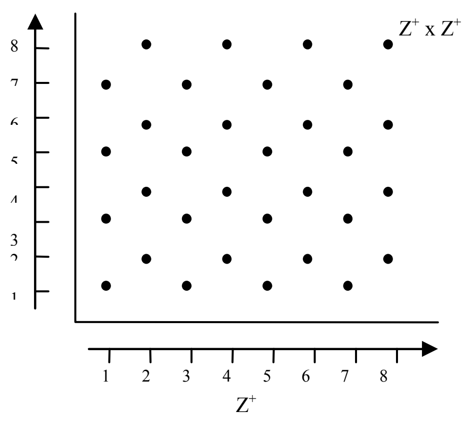
Hatırlanması gereken ilk şey, iki değişkenli önermesel fonksiyon F(x,y)'de değişkenlerin sırasının önemli olduğudur. Özel a ve b objeleri için F(a,b) ile F(b,a) farklı doğruluk değerine sahip olabilir. Önemli olan bir başka şey de x ve y değişkenlerinin farklı tip objeler olabileceğidir. Örneğin, C(x,y) önermesel fonksiyonunu düşünelim: x, y'nin başkentidir. Burada x bir şehir ismi fakat y bir ülke ismidir. O halde, C(a,b)'yi sağlayan (a,b) sıralı ikililerinin kümesi, A={şehirler} B={ülkeler} olmak üzere A x B kartezyen çarpımının alt kümesidir.

Aşağıdaki bağıntı tanımı şaşırtıcı şekilde basit ve geneldir. Bazıları buna ikili bağıntı da der çünkü iki objeyi ilişkilendirir.

Tanım: A ve B iki küme olsun. A'dan B 'ye bir bağıntı A x B kartezyen çarpımının bir alt kümesidir.

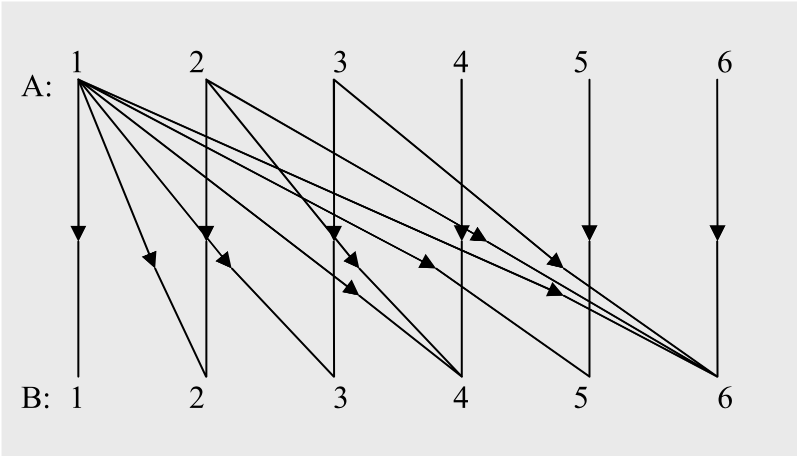
Tanıma bakıldığında ilk göze çarpan bağıntının bir küme olduğudur(sıralı ikililerden oluşan bir küme). ***R***, A'dan B'ye bir bağıntı ise eğer (a,b) $\in$***R*** ise a$\in$A, b$\in$B ile ilişkilidir deriz. Bu sebeple, ***R*** bağıntısının kendisi basitçe tüm ilişkili eleman çiftlerinin kümesidir. Genellikle kullanılan notasyon 'a, b ile ilişkilidir' için a ***R*** b' dir.

Bağıntıları görsel olarak ifade etmenin çeşitli yolları vardır, özellikle sonlu kümeler arasındaki bağıntıları. Şekil 3.1'de ***R***'nin elemanları A x B kartezyen çarpımının koordinat çizelgesi diyagramı üzerinde işaretlenmiştir. Bu tip diyagramlar ***R***'nin A x B'nin alt kümesi olduğunu açıkça gösterir fakat bağıntının diğer özelliklerini göstermede iyi değillerdir.



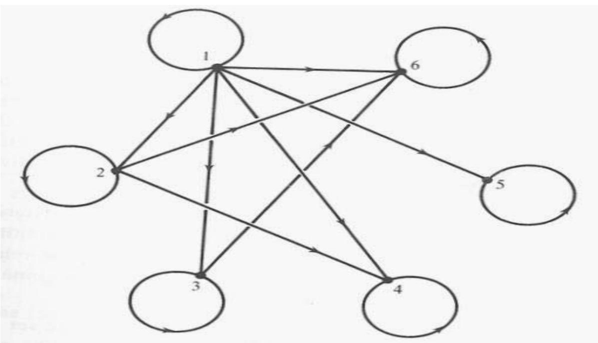
Şekil 3.1

Sonlu kümeler için başka bir alternatif A ve B' nin elemanlarını üst üste yatay şekilde sıralamak ve a ***R*** b olduğunda $a \in A$' dan $b \in B$ 'ye bir ok çizmektir. Şekil 4.2' de bu çeşit bir diyagram gösterilmiştir.



Şekil 3.2: Bağıntının diyagram olarak gösterilimi

Şekil 3.2'deki gösterim büyük kümeler için karmaşık hale gelebilir. Öte yandan bir küme üzerindeki bağıntılarda (yani A=B olanlarda), şekil daha basitleştirilebilir. A'daki elemanları iki kere listelemek yerine bu elemanları düzlemde birer nokta olarak temsil edebiliriz. Aynı şekilde a'dan b'ye yönlü bir ok sadece ve sadece a ***R*** b olması durumunda çizilir. Sonuçta ortaya çıkan diyagrama (şekil 3.3) **digraph** denir.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 1 \\ 1 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 3.3: Bağıntının digraf ve matris gösterilimi

Diğer üçüncü bir bağıntı gösterim biçimi de ikili matristir. $A=\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ ve $B=\{b_1, b_2, \ldots b_m\}$ sonlu kümeler ve R, A'dan B'ye bağıntı olsun. R'nin ikili matrisi n satırlı ve m sütunlu 0 ve 1'lerden oluşan dizi şeklindedir.

3.2 Bağıntıların Özellikleri

Bağıntıların önemi, ek özellikleri sağlayan özel bir takım bağıntılar yüzündendir. Bu özel bağıntıların ikisi eşlik bağıntıları ve sıra bağıntılarıdır ki bunların ikisi de kümeler üzerindeki bağıntılardır.

Tanım: ***R***, A kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. O halde ***R***;

(i) Tüm $a \in A$ için, sadece ve sadece a ***R*** a ise **yansıyandır.** (reflexive).

(ii) Tüm a,b $\in$ A için, sadece ve sadece a ***R*** b, b ***R*** a anlamına geliyorsa **simetriktir.**

(iii) Tüm a,b $\in$ A için sadece ve sadece a ***R*** b ve b ***R*** a, a=b anlamına geliyorsa **ters simetriktir.**

(iv) Tüm a,b,c $\in$ A için sadece ve sadece a ***R*** b ve b ***R*** c, a ***R*** c anlamına geliyorsa **geçişlidir**(transitive).

Örnek 3.1: A={a,b,c,d} ve ***R***={(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(d,d)} olsun.

R bağıntısı yukarıdaki tanımdaki hiçbir özelliği sağlamaz.

R yansıyan değildir çünkü c ***R*** c değildir; bu nedenle tüm x $\in$ A için x ***R*** x doğru değildir.

R simetrik değildir zira örneğin a ***R*** c'dir fakat c ***R*** a değildir.

R ters simetrik değildir zira a ***R*** b ve b ***R*** a 'dır fakat a=b değildir.

R geçişli değildir çünkü a ***R*** b ve b ***R*** d 'dir fakat a ***R*** d değildir.

Verilen digraphlar veya ikili matrisler ile bağıntı özelliklerinin anlaşılması mümkündür. Eğer bağıntı yansıyan bağıntı ise ***R***' nin digraphının her noktasından kendisine bir yönlü ok vardır. İkili matrisinde ise diyagonal elemanların hepsi 1' dir.

Eğer ***R*** simetrik ise digraphtaki okların tamamı iki-yönlüdür. Ters simetrik ise okların hiçbiri iki yönlü değildir. Öte yandan geçişli bağıntıların digraphlarından veya ikili matrislerinden özellik tanımlamak zordur.

3.3 Kesişimler ve Bağıntıların Birleşimi

A ve B arasındaki ***R*** bağıntısı A x B kartezyen çarpımının alt kümesi olduğuna göre bağıntıların kesişim ve birleşimini tanımlayabiliriz.

R ve ***S***, A kümesinden B kümesine iki bağıntı olsun. Hem ***R*** $\cap$***S*** hem de ***R***$\cup$***S*** A x B 'nin alt kümesidir. O halde, A'dan B'ye iki bağıntının hem kesişimi hem de birleşimi de aynı zamanda A'dan B'ye bağıntılardır.

R ve ***S*** bağıntılarının farklı küme çiftleri arasında olması durumu ise biraz daha karışıktır. ***R***'nin A'dan B'ye; ***S***'nin ise C'den D'ye bağıntı olduğunu düşünelim. ***R*** ve ***S*** sıralı ikililerden oluşan kümeler olduğundan ***R***$\cap$***S*** ve ***R***$\cup$***S*** birer bağıntıdır fakat hangi kümelerin ***R***$\cap$***S*** ile hangilerinin ***R***$\cup$***S*** ile ilişkili olduğu çok açık değildir.

Doğal olarak burada, ***R*** ve ***S***, A'dan B'ye bağıntı olduğuna göre kesişim veya birleşimleri bu bağıntıların özelliklerini miras alır mı sorusu akla gelir. Bağıntıların dört özelliğine ***R*** ve ***S***'nin aynı A kümesi üzerinde bağıntılar olduğunu varsayarak bakalım:

Yansıma özelliğine bakarsak: Hem ***R*** hem de ***S*** yansıyan ise tüm a$\in$ A için (a,a)$\in$***R*** ve (a,a)$\in$***S*** olmalıdır. Bu nedenle, (a,a) tüm a$\in$ A için ***R***$\cap$***S*** ve ***R***$\cup$***S***'ye aittir, öyleyse ***R*** ve ***S*** 'nin kesişimi ve birleşimi de yansıyandır.

İkinci olarak ***R*** ve ***S***'nin simetrik olduğunu düşünelim. a,b$\in$ A öyle ki (a,b)$\in$ ***R***$\cap$***S*** olsun. O halde, a ***R*** b ve a ***S*** b' dir. ***R*** ve ***S*** simetrik olduğundan b ***R*** a ve b ***S*** a ' dır ve bunun anlamı da (b,a) $\in$ ***R***$\cap$***S***' dir. O halde ***R***$\cap$***S*** de simetriktir. Aynı durum ***R***$\cup$***S*** için de geçerlidir.

Anti-simetriklik durumu biraz daha karmaşıktır. ***R***$\cap$***S*** 'nin ters simetrik olduğu yukarıdaki argümanlar ile gösterilebilir fakat birleşim her zaman ters simetrik olmayabilir. Tersine örnekle bunu gösterebiliriz. A={a,b} ve ***R***={(a,b)} ve ***S***={(b,a)}olsun. ***R*** ve ***S*** bağıntıları ters simetrik olduğu açıktır. Fakat $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S}$={(a,b), (b,a)}ters simetrik değildir çünkü a b ile, b de a ile ilişkilidir fakat a ve b eşit değildir.

Geçişlilik durumu ise ters simetriye benzer. Geçişli iki bağıntının kesişimi de geçişlidir. Ancak birleşimi geçişli olmayabilir. Aşağıdaki teorem bu özellikleri özetlemektedir.

Teorem 3.1: ***R*** ve ***S*** aynı A kümesi üzerinde iki bağıntı olsun.

a. Hem ***R*** hem de ***S*** yansıyan ise $\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}$ ve $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S}$ de yansıyandır.

b. ***R*** ve ***S*** simetrik ise $\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}$ ve $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S}$ de simetriktir.

c. ***R*** ve ***S*** ters simetrik ise $\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}$ de ters simetriktir fakat $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S}$ ters simetrik olmayabilir.

d. ***R*** ve ***S*** geçişli ise $\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}$ ***d***e geçişlidir fakat $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S}$ geçişli olmayabilir.

3.4 Eşdeğerlik Bağıntısı ve Bölmelemeler

Yaşayan insanlar kümesi üzerinde x ***R*** y sadece ve sadece x, y ülkesinde yaşıyorsa şeklinde tanımlanan bir bağıntıyı düşünelim. Her insanın sadece bir ülkede yaşadığını varsayarsak bağıntı şu üç özelliği sağlar:

x, x ile aynı ülkede yaşamaktadır, o halde yansıyandır.

x, y ile aynı ülkede yaşıyorsa; y de x ile aynı ülkede yaşıyor demektir, o halde simetriktir.

x, y ile aynı ülkede; z de y ile aynı ülkede yaşıyorsa x, z ile aynı ülkede yaşıyor demektir, o halde ***R*** geçişlidir.

Tanım: A kümesi üzerindeki ***R*** bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişli ise bu bağıntı **eşdeğerlik bağıntısı**dır.

Örnek 3.2: A=IR(reel sayılar kümesi) olsun ve A üzerinde

x ***R*** y sadece ve sadece $x^2=y^2$ ise

şeklinde bir bağıntı tanımlayalım. O halde;

R yansıyandır zira tüm x reel sayıları için $x^2= x^2$ ‘dir.

R simetriktir zira $x^2=y^2$, $y^2=x^2$ anlamına gelir.

R geçişlidir çünkü $x^2=y^2$ ve $y^2=z^2$ ise $x^2=z^2$ ‘dir.

O halde ***R*** eşdeğerlik bağıntısıdır.

Tanım: ***R***, A kümesi üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı ve $x \in A$ olsun. x’ in **eşdeğerlik sınıfı** [x] ile gösterilir ve A üzerinde x ile ilişkili tüm elemanların kümesidir öyle ki [x]={$y \in$ A: x ***R*** y}.

Eğer iki eleman ilişkili ise eşdeğerlik sınıfları eşittir. Bunu göstermek için diyelim ki ***R***, A üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı ve A’ nın x ve y elemanları için x ***R*** y olsun. [x]=[y] olduğunu göstermek istiyoruz. $z \in [x]$ dersek x ***R*** z olur. x ***R*** y ve ***R*** simetrik ise aynı zamanda y ***R*** x olduğunu biliyoruz. O halde, y ***R*** x ve x ***R*** z ise geçişlilik özelliğinden y ***R*** z yani $z \in [y]$’ dir. Bu

$[x] \subseteq [y]$ olduğunu gösterir. $[y] \subseteq [x]$ 'in ispatı da benzer şekilde yapılabilir. Öyleyse, $[x]=[y]$ sonucuna varılabilir.

Teorem 3.2: ***R***, bir A kümesi üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı ve $x,y \in A$ olsun. Bu durumda sadece ve sadece x ***R*** y ise $[x]=[y]$' dir.

Bir küme üzerindeki eşdeğerlik bağıntısının eşdeğerlik sınıfları topluluğu, o kümenin bir bölmelemesini oluşturur.

Teorem 3.3: ***R***, boş olmayan bir A kümesi üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı olsun. Birbirinden farklı R-eşdeğerlik sınıfları topluluğuna A'nın bölmelemesi denir.

Örnek 3.3: ***R***, reel sayılar üzerinde; tamsayı(x) x'ten küçük veya eşit en büyük tamsayı olmak üzere x ***R*** y sadece ve sadece tamsayı(x)=tamsayı(y) ise şeklinde tanımlanmış bir bağıntı olsun.

R' nin reel sayılar kümesi üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı olduğunu kontrol etmek oldukça basittir. Örneğin; $\frac{1}{2} \in$ R: tamsayı(½)=0, öyleyse eşdeğerlik sınıfı

$$[\tfrac{1}{2}] = \{x \in \mathrm{R}: \text{tamsayı}(x)=0\}$$

$$= \{x \in \mathrm{R}: 0 \leq x < 1\}.$$

Bu kümeye yarı-açık aralık denir ve $[0,1)$ şeklinde ifade edilir.

Bir küme üzerinde verilen eşdeğerlik bağıntısından eşdeğerlik sınıfları ile bölmeleme tanımlayabileceğimiz gibi bir küme üzerinde verilen bir bölmelemeden de eşdeğerlik sınıfları bölmelemeyi oluşturan orijinal alt kümeler olacak şeklinde bir eşdeğerlik bağıntısı tanımlayabiliriz.

Teorem 3.4: $\{S_i: i \in I\}$ bir A kümesinin bölmelemesi olsun. O halde, $i \in I$ için, x ***R*** y sadece ve sadece $x,y \in S_i$ ise eşdeğerlik sınıfları bölmelemedeki S_i kümeleri olan A üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı tanımlar.

Modulo Aritmetik : n pozitif bir tamsayı olarak verilsin. **Z** tamsayılar kümesi üzerinde ,modulo n bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$a \equiv_n b$ ancak ve ancak eğer bazı $k \in \mathbf{Z}$ için $a-b = k.n$ ise

$a \equiv_n b$ için alternatif tanım $a \equiv b \bmod n$ şeklindedir.

Örnek : mod5 'de n=5 dir. $a \equiv_5 b$ yi kısa olsun diye $a \equiv b$ şeklinde yazarız. Bu durumda ancak ve ancak $a-b = 5k$ ise $a \equiv_5 b$ dir. k gibi bir tamsayı vardır öyleki, $a=5k+b$ dir. Bu yüzden

$[p] = \{q \in \mathbf{Z} : q=5k+p$, bazı $k \in Z$ için$\}$ Eşdeğerlik sınıfları sonsuzdur bazıları:

$[0] = \{\ldots, -10,-5,0,5,10,15,\ldots\}$

$[1] = \{\ldots, -9,-4,1,6,11,16,\ldots\}$

$[2] = \{\ldots, -8,-3,2,7,12,17,\ldots\}$

$[3] = \{\ldots, -7,-2,3,8,13,18,\ldots\}$

$[4] = \{\ldots, -6,-1,4,7,12,19,\ldots\}$ Bunlar beş adet farklı eşdeğerlik sınıfıdır.

3.5 Sıra Bağıntıları

Birçok küme doğal olarak sıralanmış elemanlara sahiptir. Örneğin büyüklüğe göre sıralanmış reel sayılar kümesi. Benzer şekilde bir küme topluluğu eleman sayısına göre sıralanabilir. Örneğin, $A \subseteq B$ ise A, B' den küçüktür deriz.

Eşdeğerlik bağıntılarından farklı olarak birçok farklı tip sıra bağıntısı vardır. En genel sıra bağıntısı 'parçalı sıra' bağıntısıdır.

Tanım: Bir kümedeki **parçalı sıra**, yansıyan, ters simetrik ve geçişli olan bir bağıntıdır.

Bir kümede parçalı sıra varsa bu kümeye **parçalı sıralı küme** denir.

Örnek 3.4: Reel sayılar kümesi üzerinde x ***R*** y sadece ve sadece $x \leq y$ ise şeklinde tanımlanan ***R*** bağıntısı parçalı sıradır.

Öte yandan, x ***S*** y sadece ve sadece $x<y$ ise şeklinde tanımlanan ***S*** bağıntısı parçalı sıra değildir çünkü yansıyan değildir.

Teorem 3.5: ***R***, A kümesi üzerinde parçalı bir sıra ve B de A'nın herhangi bir alt kümesi olsun. Bu durumda, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R} \cap (B \times B)$ B üzerinde bir parçalı sıradır.

Topyekûn sıra: (Doğrusal sıra) : Kümenin her hangi iki elemanı arasında sıralama yapılabilirse topyekûn sıra bağıntısı vardır. (Doğal sayılarda büyüklük, küçüklük bağıntısı)

Sözlük sırası : S ve T topyekûn sıralı kümeler ise SXT (kartezyen çarpım) kümesinde sözlük sırası:

a, a' $\in$ S; b, b' $\in$ T olmak üzere;

$(a,b) < (a',b') \Rightarrow \quad a < a'$ yada $a=a'$, $b<b'$ dür.

Örnek: A= (1,2,3,4,6,8,12) kümesinde bölünebilirlik bağıntısıyla kısmi bir sıralama yapılırsa, bağıntı matrisi Tablo 1.4'deki şekilde olacaktır.

	1	2	3	4	6	8	12
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1	0	1
4	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	1	0	1
8	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	1

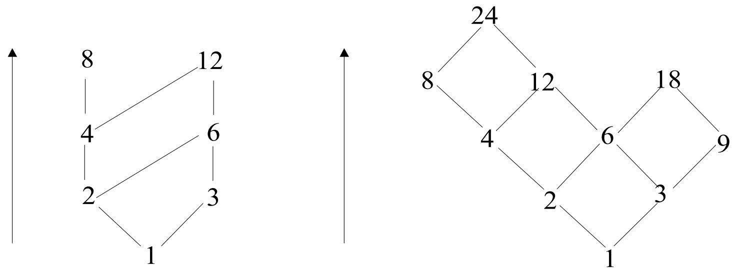
Tablo 3.1.

Halef-Selef(Predecessor-Successor, ilk öndegelen- ilk izleyen) Bağıntısı:

b, a'nın halefi ise $a<c<b$ olamaz. Yani a ile b arasında sırlanabilen bir c elemanı bulmak mümkün değildir, yani $a \ll b$'dir.

Bu durumda kısmi sıralı küme için yeni bir graf tanımı(hasse diyagramı) yapılarak çizilir.

Hasse Diyagramı: $a \ll b$ şeklindeki çiftleri birleştiren ve en önde gelenin en alta konulduğu graftır.Örnek: Şekil 3.4..



Şekil 3.4.

3.5.1 En büyük ve en küçük eleman

Teorem 3.5' e göre reel sayıların her hangi bir alt kümesi $\leq$ bağıntısı ile parçalı sıralıdır. Bu şekilde sıralanmış bazı reel sayı kümeleri en büyük veya en küçük elemana sahip olabilir, bazıları da olmayabilir. Örneğin, tam sayılar kümesinin en büyük veya en küçük elemanı yokken, pozitif tamsayıların en küçük elemanı 1' dir fakat en büyük elemanı yoktur.

En büyük veya en küçük eleman bir tane olmayabilir. Örneğin, {a,b,c} kümesinin öz alt kümelerini eleman sayısına göre sıralarsak, en küçük eleman $\emptyset$ iken en büyük eleman üç tanedir çünkü üç tane iki elemanlı alt küme vardır.

Tanım: ***R***, A kümesi üzerinde bir parçalı sıra olsun. A' nın **en büyük elemanı,** tüm $a \in A$ için a ***R*** α olmak üzere α elemanıdır.

Benzer şekilde, A' nın **en küçük elemanı,** tüm $a \in A$ için β ***R*** a olmak üzere β elemanıdır.

Yeniden {a,b,c}' nin öz alt kümeleri örneğine dönersek iki elemanlı her bir alt küme en büyük eleman olacaktır. O halde bu düşünceyi maksimal eleman tınımı ile formülize edebiliriz.

Tanım: A, ***R*** sıra bağıntılı bir parçalı sıralı küme olsun. Tüm $a \in A$ için x ***R*** a x=a anlamına geliyorsa A' daki x elemanı **maksimal**dir.

Benzer şekilde, tüm $a \in A$ için a ***R*** y a=y anlamına geliyorsa y elemanı **minimal**dir.

3.6 n-ögeli(n-tuple) bağıntılar ve uygulamaları

3.6.1 n-ögeli(n-tuple) bağıntılar

Birden fazla kümeler arasındaki bağıntılar sık sık karşımıza çıkar. Örneğin, öğrenci adı, öğrencini bölümü, öğrencinin başarı notunu içeren kümeler arasında bir bağıntı vardır. Bu bölümde birden fazla kümeler arasında olan ve n-ögeli(n-tuple) bağıntılar olarak adlandırılan bağıntılar açıklanacaktır.

Tanım: A_1, A_2, ,……, A_n: kümesi verilsin. Bu kümeler üzerindeki bir n-ögeli bağıntı, $A_1XA_2X……XA_n$ kartezyen çarpımının bir alt kümesidir. A_1, A_2, ,……, A_n kümelerine bağıntının alanı(domain) ve n'e derecesi denir.

Örnek: 5 ögeli(B, N, A, D,N) bir R bağıntısı B: Bölümü, N :Numarası, A: Öğrencini adı, D : Dersin adı, N: Notu 'nu göstermek üzere veriliyor. Örneğin, Bilgisayar mühendisliği bölümü 01104115 numaralı Ali nin Ayrık Matematik dersi notu BA'nın anlamı (Bilgisayar,01104115, Ahmet, Ayrık matematik,BA) R bağıntısına aittir. Bu durumda derecesi 5 olan R bağıntısının alanı olan kümeler, Bölümler,Öğrenci numaraları, Öğrenci adları, Dersler ve Notlar şeklinde olacaktır.

Uygulama: İlişkisel Veritabanları

Bilgiyi saklamak ve işlemek için tasarlanmış bilgisayar sistemine veritabanı sistemi denir. Saklanmış verilerin işlenmesinin kontrol eden yazılıma da veritabanı yönetim sistemi (database management system) veya DBMS denir.

Tüm veritabanı yönetim sistemleri, verinin özel bir tip yapıya sahip olduğunu ve DBMS' in saklı veriyi, verinin kendi teorik modeline göre işlediğini varsayar. Bu yüzden birçok değişik tip DBMS bulunur: ilişkisel, ağ ve hiyerarşik. Bu bölümde matematiksel bağıntıları esas alan ilişkisel veritabanı sistemlerinden bahsedilecektir.

Bir veri birçok kısımdan oluşur. Örneğin, adres defterindeki bir kayıt isime, adrese, telefon numarasına göre sınıflandırılabilir. Verinin her bir parçası 'attribute (nitelik)' olarak adlandırılır. Verilerin her zaman belli bir nitelik kümesine sahip olduğunu varsayarız ve bu nitelik kümesine kayıt tipi(record type) adı verilir. Bir kayıt dosyası (record file), verilen kayıt tipine ait verilerin toplamıdır. Tüm verilerin aynı tip olduğu kayıt dosyalarına **birincil normal form**dadır **(first normal form**) denir. İlişkisel veritabanlarının temel kuralı tüm kayıt dosyalarının birincil normal formda olmasıdır.

Tanım: Veri **attribute** adı denilen bileşenlerine ayrılır. Bir **kayıt tipi** bir attribute'lar(veya **field**lar) kümesidir. Bir **kayıt örneği** (record instance), belli bir kayıt tipinin gerçek verisidir ve **kayıt dosyası** aynı kayıt tipinden olan kayıt örneklerinin kümesidir.

Örnek 3.5: GYTE isimli bir yardım derneği kendisine yapılan bağışları yapan kişileri, isimlerini, adreslerini, telefon numaralarını ve bağışla ilgili diğer detayların bilgilerini tutmak istediğini varsayalım.

Öncelikle bu dernek; bağışlayanın_adı, bağışlayanın_adresi, bağışlayanın_telefonu, bağış_miktarı ve bağış_tarihi şeklinde adlandırabileceğimiz attribute' ları belirler. Bu beş attribute kayıt tipini tanımlar. Tablo 3.2' de bazı kayıt örnekleri gösterilmiştir.

bağışlayanı_adı	*bağışlayanın_adresi*	*bağışlayanın_telefonu*	*bağış_miktarı*	*bağış_tarihi*
Kaya, R	Çayırova, Kocaeli	262 614-3939	100	Ocak 1997
Kaya, R	Çayırova, Kocaeli	262 614-3939	150	Mart 1999
Beyaz, S	Gebze, Kocaeli	262 578-4108	300	Ekim 1998
Verir,S	Pendik,İstanbul	216 467-1297	250	Kasım 2000
Verir, S	Pendik,İstanbul	216 467-1297	500	Aralık 1999

Tablo 3.2

Bağış yapanın açık adresi sadece bir attribute ile etiketlendiğinden bu kayıt dosyasından coğrafik bilgiyi elde etmek kolay olmayabilir. Örneğin dernek, İstanbul'dan bağış yapanları bulmak isterse şehir adı tek başına bir attribute olarak istenmediğinden çok zor olacaktır. bağışlayanın_adresi isimli tek bir attribute cadde ve şehir olarak ikiye ayrılsaydı şirketin işi çok daha kolay olurdu.

Bu örnek, attribute tanımlamak için önemli bir noktayı göstermiştir. Bir kayıt örneğindeki potansiyel yararlı bilgi parçalarının her biri bir attribute ile belirtilmelidir. Bu mecburi bir kural değildir zira 'potansiyel yararlı bilgi parçası' verinin kullanıldığı yere göre değişir.

Yukarıdaki örnekte eğer coğrafik konumun bir önemi yoksa adresleri tek bir attribute olarak belirtmek daha mantıklıdır.

İlişkisel veritabanı modelinde kayıt dosyası bir tablo olarak gösterilir. Tablonun sütunları attribute isimlerini, satırları ise her bir kayıt örneğini oluşturur.

Bir kayıt tipinin A_1, $A_2,\ldots,A_n$ şeklinde n tane attribute' ten oluştuğunu düşünelim. Bu durumda herhangi bir A_i attribute' u için bir veri girişleri kümesi olacaktır. X_i' ye de A_i attribute' u ile elde edilen değerler kümesi diyelim. X_i kümeleri zamana bağımlıdır ve kayıt dosyasına yeni girişler oldukça veya kayıt silindikçe değişir.

Bu notasyona göre; verilen bir kayıt örneği her bir x_i, Xi kümesine ait olmak üzere n-tuple' dır(x_1, $x_2,\ldots x_n$). Bunun anlamı tüm kayıt örnekleri n tane aynı tip bilgi parçasından oluşur. $x_i \in X_i$ olmak üzere tüm n-tupple' ların (x_1, $x_2,\ldots x_n$) kümesi X_1 x X_2 x…x X_n kartezyen çarpımıdır. Bu yüzden R kayıt dosyası kartezyen çarpımın alt kümesidir ($R \subseteq (X_1 \text{ x } X_2 \text{ x} \ldots \text{x } X_n)$).

Örnek 3.6: $A_1 \ldots A_5$ sırasıyla bağışlayanın_adı, bağışlayanın_adresi, bağışlayanın_telefonu, bağış_miktarı ve bağış_tarihi olsun. Her bir A_i attribute' u için bu attribute'a karşılık gelen X_i kümesi olduğunu varsayarız. O halde, bir kayıt örneği $x_i \in X_i$ olmak üzere 5 ögeli (5-tuple)' dır.

Bu kayıt tipine göre önemli sayıda bilgi yinelemesi olur. Örneğin, bağış yapanın ismi, adresi ve telefonu her bağış yaptığında tekrar kaydedilir. Bu bilginin tutulduğu yerden kayıplara yol açacağı gibi kayıt dosyasının güncellenmesini de zorlaştırır. Mesela, iki bağış yapmış Bay Kaya adres değiştirdi diyelim. Bu durumda, kayıt dosyasını güncelleştirmek için iki kayıtta da adresi değiştirmek gerekecektir.

Bu sebeplerle veriyi aşağıdaki gibi iki ayrı kayıt dosyasına bölmek daha mantıklıdır.

A_1, A_2, A_3: bağışlayanın_adı, bağışlayanın_adresi, bağışlayanın_telefonu

A_1, A_4, A_5: bağışlayanın_adı, bağış_miktarı, bağış_tarihi

Bu durumda orijinal veritabanındaki yineleme probleminden kurtulmuş oluruz ve daha kolay güncelleme yapabiliriz. Mevcut durumda veritabanı iki ilişkili kayıt dosyası içerir; birisi X_1 x X_2 x X_3 'ün, diğeri X_1 x X_4 x X_5 'ün alt kümesidir. Tabii ki, iki kayıt dosyasını bağışlayanın_adı attribute' u bağlar.

Tablo 3.3 ve tablo 3.4, tablo 3.2' deki bilginin nasıl iki kayıt dosyasına ayrıldığını göstermektedir.

bağışlayanın_adı	***bağışlayanın_adresi***	***bağışlayanın_telefonu***
Kaya, R	Çayırova, Kocaeli	262 614-3939
Verir,S	Pendik,İstanbul	216 467-1297
Beyaz, S	Gebze, Kocaeli	262 578-4108

Tablo 3.3

bağışlayanın_adı	***bağış_miktarı***	***bağış_tarihi***
Kaya, R	100	Ocak 1997
Kaya, R	150	Mart 1999
Beyaz, S	300	Ekim 1998
Verir,S	250	Kasım 2000
Verir, S	500	Aralık 1999

Tablo 3.4

Tanım: A_1, A_2,…, A_n attribute' ler topluluğu olsun ve her bir A_i' ye ilişkin bir X_i veri kümesi olduğunu düşünelim. **İlişkisel veritabanı** her biri bazı X_i kümeleri arasındaki bağıntılar topluluğudur. Her bir bağıntı bir **kayıt dosyası**dır.

Kayıt dosyasındaki kayıt örneklerine anahtar (key) ile erişilir. Key, tek bir kayıt örneğini belirten attribute' lar kümesidir, fakat bu kümenin hiçbir öz alt kümesi tek bir kayıt örneğini belirtme özelliğine sahip değildir.

Pratikte birçok olası anahtar seçme imkânı vardır. Key olarak kullanılabilecek attribute'lar kümesine **candidate key** denir. Bunlardan biri gerçek key olarak seçilir ve buna **primary (birincil) key** denir.

Örneğimizde, {bağışlayanın_adı} herhangi iki bağış yapanın adının aynı olmaması durumunda Tablo 1 için bir candidate keydir. Bu durumda her bir kayıt örneği bağış yapanın adı ile belirtilebilir. Öte yandan iki farklı bağış yapan kişinin aynı adı taşıması durumunda {bağışlayanın_adı} key olmaz bunun yerine {bağışlayanın_adı, bağışlayanın_telefonu} attribute kümesi key olarak kullanılabilir.

İlişkisel veritabanları üzerinde beş çeşit işlem yapılabilir.

3.6.2 Selection (Seçme)

Selection işlemi kayıt dosyasından verilen kriter kümesini sağlayan kayıt örneklerini listeler. Örneğin, X şehrinde yaşayan müşterilerin tüm isim ve adres kayıtlarını listelemek bir selection örneğidir.

Selection işlemini yeni kayıt dosyaları tanımlamak yani veri tabanındaki kayıt dosyalarının alt kümeleri şeklinde düşünebiliriz. Bu yeni kayıt dosyaları muhtemelen geçicidir ve veritabanını oluşturan kayıt dosyaları kümesine eklenmezler. Aynı zamanda selection kayıt dosyasının tablo gösterimi şeklinde de tanımlanabilir. Bu yeni kayıt dosyaları gerekli attribute'lara sahip satırları çekerek elde edilir.

Örneğin; GYTE veritabanında 'Ocak 1999'dan sonraki tüm bağışları seçmek' istediğimizde tablo 3.3 'te gösterilen kayıt dosyasından ikinci, dördüncü ve beşinci satırlar elde edilecektir.

3.6.3 İzdüşüm (Projection)

Selection tablodaki belli satırları geri döndürürken projection işlemi sütunları döndürür. Sütunlar attribute' lara karşılık geldiğinden sonuçta ortaya çıkan kayıt dosyası orijinalden daha az sayıda attribute'lu kayıt tipine sahiptir.

Projection işleminin resmi tanımı şöyledir: R, (A_1, …, A_p) tipinde bir kayıt dosyası ve $q \leq p$ ve her bir B_i aynı zamanda R' nin attribute' u olmak üzere (B_1,…, B_q) kayıt tipi olsun. Yani, her bir B bir j için A_j' ye eşit olsun. Projection, kayıt örnekleri R' nin her bir kayıt örneklerinin B_i attribute' larından oluşan (B_1, …, B_q) tipinde yeni kayıt dosyası tanımlar.

3.6.4 Doğal Birleşim (Natural Join)

GYTE veritabanının örnek 3.6 'daki gibi ikiye ayrıldığını düşünelim. Bu durumda bağış yapanların isimlerini, telefon numaralarının ve bağış miktarlarını nasıl alabiliriz? Buradaki problem bağış yapanın telefon numarası ile bağış miktarlarının farklı kayıt dosyalarında olmalarıdır. O halde kayıt dosyalarını birleştirerek üç attribute 'u da içeren yeni bir kayıt dosyası üretmemiz gerekir. İki dosyada ayrıca bağışlayanın_adresi ve bağış_tarihi de bulunur ve sonuçta oluşacak birleşmiş tabloda bu attributeler de bulunacaktır. Ancak bu bir sorun değildir zira projection ile bu dosyadan gerekli kayıt tipleri çekilebilir.

Natural join işleminin matematiksel temeli şöyledir: R ve S, $(A_1,\ldots, A_p, B_1,\ldots, B_q)$ ve $(A_1,\ldots, A_p, C_1,\ldots, C_r)$ tipinde kayıt dosyaları olsun. R ve S' nin doğal birleşimi $(A_1,\ldots, A_p, B_1,\ldots, B_q, C_1,\ldots, C_r)$ tipinde yeni bir kayıt dosyasıdır. Doğal birleşimim oluşturan kayıt örneklerinin hepsi $(x_1,\ldots, x_p, y_1,\ldots y_q) \in R$ ve $(x_1,\ldots, x_p, z_1,\ldots z_r) \in S$ özelliğine sahip (p+q+r)-tuple $(x_1,\ldots, x_p, y_1,\ldots y_q, z_1,\ldots,z_r)$ 'dır.

3.6.5 Birleşim ve Fark (Union and Difference)

Verilen iki aynı kayıt tipinde R ve S kayıt dosyasının birleşimi ve farkı, bildiğimiz küme teorisindeki birleşim ve fark işlemlerine karşılık gelir. Bu yüzden $R \cup S$, ve R ve S 'deki kayıt örneklerinin tamamını (listeyi tekrarlamadan) içeren kayıt dosyasıdır. R-S ise R de bulunan fakat S' de bulunmayan kayıt örneklerini içeren kayıt dosyasıdır.

3.7 Fonksiyonlar ve Tanımları

x^2+5x-8, $1/(x+3)^3$, cos(x), log(x) vs. gibi ifadeler genellikle $f(x)$ ile gösterilir ve "x' in fonksiyonu" olarak adlandırılır. İfadenin kendisinden daha önemli olan verilen herhangi bir x değeri için fonksiyonun değerini hesaplamak için bir kural tanımlamasıdır. İki farklı ifade $f(x)$ ve g(x), tüm x reel sayıları için aynı değerleri verebilir ve biz bu iki ifadenin aynı fonksiyonu tanımladığını söyleyebiliriz. Örneğin $f(x)=x^2+4x-5$ ve $g(x)=(x+2)^2-9$.

Tanım: A ve B iki küme olsun. A' dan B' ye bir f fonksiyonu; f: A→B şeklinde yazılır ve her bir $a \in A$ 'yı tek bir $f(a) \in B$ elemanı ile eşleştiren bir kuraldır.

Örnek 3.7: x^2+4x-5 ifadesi tek başına bir fonksiyon değildir zira tanımımıza göre A ve B kümeleri belirtilmemiştir. Öte yandan, bu ifade şu şekilde tanımlanabilir: f: R → R olmak üzere $f(x)=x^2+4x-5$.

Tanım: A ve B küme olsun. f, A' dan B' ye bir fonksiyon f: A→B şeklinde yazılır ve $f \subseteq (AxB)$ 'nin alt kümesidir ve şu kuralı sağlar:

Her bir $a \in A$ için $(a,b) \in f$ olmak üzere tek bir $b \in B$ vardır.

A kümesi f' nin tanım kümesi ve B kümesi de f' nin değer kümesi denir. $(a,b) \in f$ ise $b \in B$ elemanı $a \in A$ elemanının görüntüsüdür denir ve $b=f(a)$ veya f: a→b şeklinde yazılır.

Tanım: f: A→B ve g: A'→B' fonksiyonları

(i) A=A'

(ii) B=B'

(iii) $f(a)=g(a)$ (A=A' 'ne ait tüm a elemanları için)

ise eşittir.

Bir fonksiyonun grafiği R^2= R x R düzleminde $y=f(x)$' i sağlayan (x,y) noktalarını içeren eğridir. Ancak unutulmaması gereken nokta x-y düzlemindeki her eğri her hangi bir f: A→R ($A \subseteq R$) fonksiyonun grafiği değildir. Örneğin, merkezi orijin (0,0), yarıçapı 1 olan çemberin denklemi

$x^2+y^2=1$' dir. -1 ve 1 arasındaki her bir x değeri için iki tane y değeri vardır.

(x,y)-düzleminde verilen bir eğrinin bir fonksiyonun grafiği olup olmadığını anlamak kolaydır. x=a dikey doğrusu sadece ve sadece eğriyi tek bir yerde kesiyorsa, verilen $a \in A$ için $y=f(a)$ olacak şekilde tek bir $y \in \mathbb{R}$ vardır.

Bir fonksiyonun tanımında karışıklığa sebep olan iki özellik vardır. Birincisi, tanım kümesinin iki veya daha fazla elemanı değer kümesinde aynı görüntüye sahipse. İkincisi ise, değer kümesindeki tüm elemanların, tanım kümesindeki bir elemanın görüntüsü olmak zorunda olmadığıdır.

Tanım: ***f***: A→B bir fonksiyon olsun. ***f*' nin görüntüsü** (aralığı)

$$\text{im}(f)=\{b \in B: (a,b) \in f,\ a \in A \text{ için}\} \text{ kümesidir.}$$

Dikkat edilirse im(***f***) değer kümesi B' nin alt kümesidir ve $a \in A$ elemanının görüntüsü ***f***(a) ile karıştırılmamalıdır. Bir elemanın görüntüsü bir elemandır fakat bir fonksiyonun görüntüsü bir kümedir ; bir başka deyişle tanım kümesindeki elemanların görüntülerinin tamamını içeren kümedir.

$$\text{im}(f)=\{f(a): a \in A\}.$$

Örnek 3.8: ***f***: R→R olmak üzere $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$ fonksiyonunun görüntüsünü bulunuz.

Çözüm: Tanıma göre $y \in \text{im}(f)$ sadece ve sadece $x \in \mathbb{R}$ için $y=\dfrac{3x}{x^2+1}$ ise.

Bu eşitlik şuna eşittir: $yx^2+y=3x$ veya

$$yx^2-3x+y=0.$$

Bu durumda $x=\dfrac{3 \pm \sqrt{9-4y^2}}{2y}$ olur.

Bu nedenle gerçek çözüm $y \neq 0$ ve $9-4y^2 \geq 0$ olmalıdır.

Böylece $y^2 \leq 9/4$ yani $-3/2 \leq y \leq 3/2$ (ve $y \neq 0$) elde edilir.

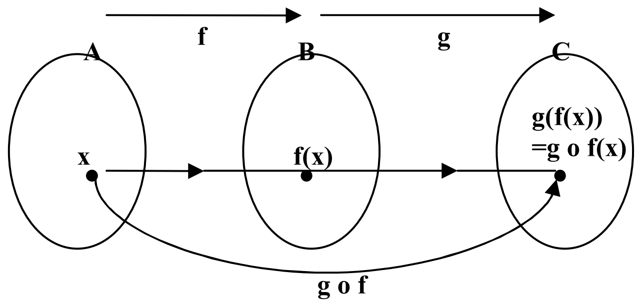
Bu durumda $-3/2 \leq y \leq 3/2$, $y \neq 0$ sağlandığında $y=f(x)$ olacak şekilde bir x reel sayısı bulunabilir. y=0 özel bir durumdur fakat açıkça $f(0)=0$' dır o halde, $0 \in \text{im}(f)$ ' dir.

Böylece, $\text{im}(f)=[-3/2, 3/2]=\{y \in \mathbb{R}: -3/2 \leq y \leq 3/2\}$.

f: R →R gibi bir fonksiyonun grafiği verilmişse bu fonksiyonun görüntüsü kolayca bulunabilir. A' nın her bir elemanının görüntüsü ***f***(a); a' dan grafiği kesene kadar dikey doğru çizerek ve sonra kesişim noktasından da y-eksenine yatay bir doğru çizerek bulunabilir.

3.7.1 Bileşik Fonksiyonlar, Birebir(injective) ve Örten(Surjektive) fonksiyonlar

f: A→B ve ***g***: B→C iki fonksiyon olsun. x, A'nın elemanı ise y=***f***(x) B' ye aittir. Bu nedenle ***g***(y)=***g***(***f***(x)) C' nin elemanıdır. A 'dan C' ye bir fonksiyon tanımlamak için ***f*** ve ***g*** 'nin bileşkesi dediğimiz ve $g \circ f$ ile gösterdiğimiz $x \mapsto g(f(x))$ ortaklığını kullanabiliriz. $g \circ f$ bileşik fonksiyonu Şekil 1.15'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 1.15. Bileşik fonksiyon

Tanıma göre $g \circ f$ fonksiyonu z= $g \circ f(x)$ olacak şekilde tüm (x,z) elemanlarını içeren A x C kartezyen çarpımının alt kümesi olmalıdır. $y=f(x) \in B$ dersek $(x,y) \in f$ ve $(y,z) \in g$ 'dir. Bu nedenle, bileşik fonksiyonları şu şekilde tanımlarız.

Tanım: f: A→B ve g: B→C iki fonksiyon olsun. **Bileşik fonksiyon** $g \circ f$: A→C:

$$g \circ f = \{(x,z) \in A \times C : (x,y) \in f \text{ ve } (y,z) \in g \ (y \in B \text{ için})\}$$

İki rastgele fonksiyonun bileşkesi $g \circ f$ olmayabilir. Yukarıdaki tanıma göre g' nin tanım kümesi, f' in değer kümesine eşittir. Ancak bu kati bir kural değildir. $g \circ f$ tanımını biraz genişletirsek:

f: A→B ve g: B'→C iki fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $g(f(a))$' nın tanımlı olabilmesi için $f(a)$'nın g' nin tanım kümesi olan B' kümesine ait olması gerekir. Bu durumda $g \circ f$ 'i tanımlamak için $g(f(a))$' nın tüm $a \in A$ için tanımlı olması şarttır. Böylece $g \circ f$ sadece ve sadece f' in görüntüsü g' nin tanım kümesinin alt kümesi ise tanımlıdır. Tabii ki, bu şart yukarıdaki tanımda olduğu gibi B=B' ise sağlanır.

Örnek 3.9: f ve g R→R ve $f(x)=x+2$, $g=1/(x^2+1)$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x+2) \\ &= \frac{1}{(x+2)^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+4x+5} \end{aligned}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(1/(x^2+1)) \\ &= \frac{1}{x^2+1}+2 \\ &= \frac{2x^2+3}{x^2+1} \end{aligned}$$

Bu örnek gösteriyor ki, genellikle $f \circ g \neq g \circ f$.

Teorem 3.6: $\boldsymbol{f}$: A→B ve $\boldsymbol{g}$: B→C iki fonksiyon olsun. Bu durumda im($\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$) $\subseteq$ im($\boldsymbol{g}$).

İspat: $c\in$ im($\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$) olsun. O halde, ($\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$)(a)=$\boldsymbol{g}$($\boldsymbol{f}$(a))=c olacak şekilde $a\in A$ mevcuttur. Bu durumda, b=$\boldsymbol{f}$(a) $\in$ B dersek $\boldsymbol{g}$(b)=c' dir ve bu nedenle $c\in$ im($\boldsymbol{g}$)' dir. Bu sebeple, im($\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$) $\subseteq$ im($\boldsymbol{g}$).

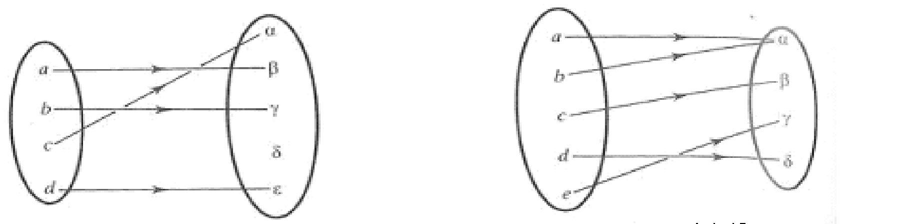
Önceki bölümlerden hatırlayacağımız gibi bir $\boldsymbol{f}$: A→B fonksiyonu

(i) tanım kümesinin farklı elemanları aynı görüntüye sahip olabilir.

(ii) değer kümesinin bazı elemanları tanım kümesinin herhangi bir elemanının görüntüsü olmayabilir.

Örneğin, $\boldsymbol{f}$: R→R, $\boldsymbol{f}$(x)=x^2 fonksiyonunda bu iki olasılık da mümkündür. Hem 2 hem de -2 aynı görüntüye sahip olduğu gibi herhangi bir negatif reel sayı $\boldsymbol{f}$' in görüntüsüne dahil değildir.(tüm x reel sayıları için $x^2\geq 0$).

Yukarıdaki maddelerden ilkinin mümkün olmadığı fonksiyonlara birebir (injective), ikincisinin mümkün olmadığı fonksiyonlara da örten (surjective) denir. Bu iki durum 1.16' te gösterilmiştir. Şekil 1.14 (a) 'daki $\boldsymbol{f}$: {a,b,c,d}→{$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$} fonksiyonu injective'dir fakat surjective değildir. Diğer yandan, şekil 1.14 (b) 'deki g: {a,b,c,d,e}→{$\alpha,\beta,\gamma,\delta$} fonksiyonu surjective'dir fakat injective değildir.



(a) injektif
Tanım kümesinin farklı elemanları farklı görüntüye sahip

(b) sürjektif
Değer kümesinin tüm elemanları tanım kümesinin bir elemanının görüntüsü

Şekil 1.16.

Tanım: $\boldsymbol{f}$: A→B bir fonksiyon olsun.

(i) Tüm a, a' $\in$ A elemanları için aşağıdaki durum sağlanıyorsa $\boldsymbol{f}$ birebir(injective)dir veya bir injeksiyon(birebir fonksiyon)dur deriz:

Eğer (a,b), (a',b') $\in\boldsymbol{f}$ ve a $\neq$ a' ise b $\neq$ b'.

(ii) Eğer her $b\in B$ için (a,b) $\in$ $\boldsymbol{f}$ olacak şekilde $a\in A$ mevcut ise $\boldsymbol{f}$ örten(surjective)dir veya bir örten fonksiyon(surjeksiyon)dur deriz.

Örnek 3.10: $\boldsymbol{f}$: R→R, $\boldsymbol{f}$(x)=3x-7 olsun. f' in hem birebir hem de örten fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\boldsymbol{f}$' in inbirebir olduğunu göstermek için tüm x ve y reel sayıları için $\boldsymbol{f}$(x)=$\boldsymbol{f}$(y) 'nin x=y anlamına geldiğini ispatlamamız gerekir.

$$\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(y)$$
$$3x-7 = 3y-7$$
$$3x = 3y$$
$$x = y.$$ O halde f birebir dir.

$\boldsymbol{f}$' in örten olduğunu göstermek için, y 'nin R değer kümesinin herhangi bir elemanı olduğunu düşünelim. $\boldsymbol{f}$(x)=y olacak şekilde $x\in R$ bulmamız gerekir. x=(y+7)/3 olsun. O halde, $x\in R$ ve

$f(x) = f((y+7)/3)$

$= 3. \frac{y+7}{3} -7$

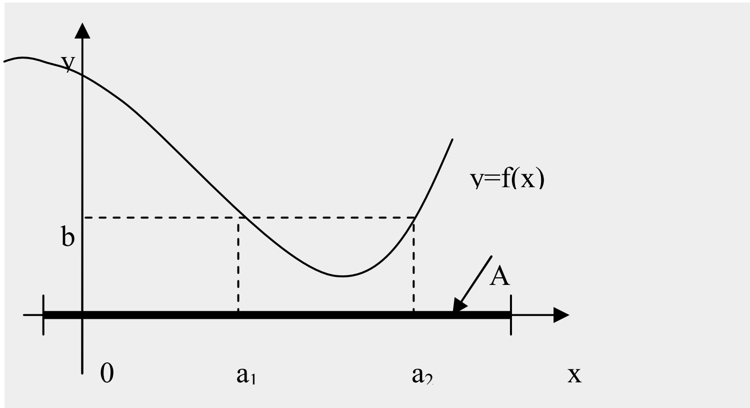
$= y+7-7$

$= y$. O halde f örtendir.

Bu ispat herhangi bir **doğrusal fonksiyon**un f: R→R, $f(x)=ax+b$ hem birebir hem de örten olduğunu göstermek için kullanılabilir.

A ve B R' nin alt kümeleri olmak üzere f: A→B fonksiyonu olsun. Bir fonksiyonun grafiğinden birebir veya örten olup olmadığını anlayabiliriz.

f ' in birebir olmadığını farz edelim. O halde, A' da $f(a_1)=f(a_2)=b$ olacak şekilde iki tane a_1 ve a_2 elemanı vardır. Bunun anlamı b 'den çizilen yatay doğru x-eksenini $x=a_1$ ve $x=a_2$ 'de keser. Bu durum şekil 1.17'de gösterilmiştir.



Şekil 1.17.

Öte yandan eğer f birebir ise bu durum hiçbir zaman gerçekleşmez. Yani yatay doğru grafiği birden fazla yerden kesmez.

Örten özelliği ise şu şekildedir: im(f)=B olmak üzere f, sadece ve sadece B' nin bir noktasından geçen her yatay doğru grafiği en az bir kere kesiyorsa örtendir.

Teorem 3.7: f: A→B ve g: B→C iki fonksiyon olsun.

(i) Eğer f ve g her ikisi birden birebir ise $g \circ f$ de birebir'dir.

(ii) Eğer f ve g her ikisi birden örten ise $g \circ f$ de örten'dir.

İspat: (i) f ve g' nin birebir fonk. olduğunu düşünelim. a, a' $\in$ A, b=f(a) ve b'=f(a') olsun. Bu durumda,

$g \circ f(a)=gf(a')$

$\Rightarrow$ $g(f(a)) = g(f(a'))$

$\Rightarrow$ $g(b) = g(b')$

$\Rightarrow$ $b = b'$ (zira g birebirdir.)

$\Rightarrow$ $f(a) = f(a')$ (çünkü $f(a)=b$, $f(a')=b'$.)

$\Rightarrow$ $a = a'$ (zira f birebirdir.)

Böylece $g \circ f$ bir birebir fonk.dur.

Teorem 3.8: f: A→B ve g: B→C iki fonksiyon olsun.

(i) $g \circ f$ bileşik fonksiyonu birebir ise f de birebirdir.

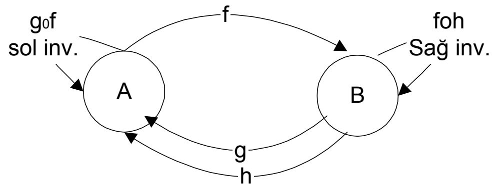
(ii) $g \circ f$ bileşik fonksiyonu örten ise g de örtendir.

Tanım: id_A: A→A fonksiyon, id_A:{(x,x):x∈A}, $id_A(x)=x$ x∈A dır.

Teorem 3.9: (i) f: A→B fonksiyonu sadece ve sadece $g \circ f = id_A$: A→A (A'nın özdeşlik fonksiyonu) olacak şekilde bir g: B→A varsa birebir'dir.

(ii) f: A→B fonksiyonu sadece ve sadece $f \circ h = id_B$: B→B (B'nın özdeşlik fonksiyonu) olacak şekilde bir h: B→A varsa birebir'dir.

Tanım: f: A→B herhangi bir fonksiyon olsun. $g \circ f = id_A$ olacak şekilde bir g: B→A fonksiyonu f için bir **sol inverse**, benzer şekilde $f \circ h = id_B$ olacak şekilde bir h: B→A fonksiyonu f için bir **sağ inverse** denir.



Şekil 3.8.

3.7.2 Ters Fonksiyonlar

Hem birebir hem de örten fonksiyonlar ilginç ve önemli özelliklere sahiptir.

Tanım: f: A→B fonksiyonu hem birebir hem de örten ise birebir ve örten(bijective)dir veya bijeksiyondur.

Teorem 3.10: A ve B R' nin alt kümeleri olmak üzere f: A→B fonksiyon olsun. O halde f, sadece ve sadece B' nin bir noktasından çizilen her doğru f' nin grafiğini tam olarak bir yerde kesiyorsa birebir ve örten'dir.

Teorem 3.11: (i) İki birebir ve örten fonksiyonun bileşkesi yine birebir ve örten fonk.dur.

(ii) f: A→B fonksiyonu sadece ve sadece hem sol hem de sağ inverse' e sahipse birebir ve örten fonk.dur.

(iii) A ve B sonlu kümeler olmak üzere f: A→B bijeksiyon ise |A| = |B|.

Dikkat edilirse (i) şıkkının tersi yanlıştır. Eğer bir bileşik fonksiyon $g \circ f$ birebir ve örten ise hem f hem de g birebir ve örten olmak zorunda değildir. Eğer A ve B aynı kardinaliteye sahip sonlu kümeler ise A' dan B' ye bir birebir ve örten fonk. vardır.

Şimdi şu soruya bir göz atalım. f: A→B şeklinde verilmiş bir fonksiyon olsun. g={(b,a):(a,b) ∈f} hangi durumlarda bir fonksiyon tanımlar? Burada g' yi f' in diyagramında okları tersine çevirmek gibi düşünebiliriz: Eğer b=f(a) ise a=g(b) 'dir.

Genel duruma bakacak olursak, f: A→B bir fonksiyon ve g={(b,a):(a,b)∈f} şeklinde tanımlanmış olsun. O halde g, her bir b∈B için (b,a) ∈g veya (a,b)∈f olacak şekilde tek bir a∈A varsa fonksiyondur. B' nin her bir elemanı için gerekli özellikleri sağlayan a' ların varlığı aynı zamanda f' in örten olması için aranan şartlardır. Bunun da ötesinde, (a,b)∈f olacak şekilde bir $a \in A$ elemanı sadece ve sadece ***f*** birebir ise tektir.

Teorem 3.12: ***f***:A→B bir fonksiyon olsun. ***g***={(b,a)B x A: (a,b) ∈***f***} bağıntısı sadece ve sadece ***f*** birebir ve örten ise B' den A' ya bir fonksiyondur.

Tanım: ***f***:A→B bir birebir ve örten fonk. ise ***g***: B→A, '***g***(b)=a sadece ve sadece ***f***(a)=b ise' şeklinde tanımlanan fonksiyona ***f***' in ters fonksiyonu denir ve f^{-1} şeklinde gösterilir.

Teorem 3.13: f:A→B bir bijeksiyon ise f^{-1}:B→A f için hem sol hem de sağ inverse' tir.

Örnek 3.11: ***f***: R -{1}→ R -{2}, ***f***(x)=2x/(x-1) fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösterin ve tersini bulun.

Çözüm: Eğer f^{-1} 'i bulabilirsek ***f*** birebir ve örten olmalıdır. f^{-1}' i bulabilmek için tanımı kullanırız: y=***f***(x) ise x=f^{-1}(y). O halde,

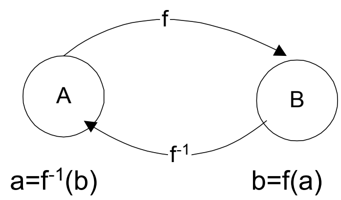
y=2x/(x-1)

y(x-1)=2x

yx-2x=y

x(y-2)=y

x=y/(y-2)



Şekil 3.9.

Bu sebeple şu fonksiyonu tanımlayabiliriz:

g: R -{2}→ R -{1}, ***g***(y)=y/(y-2).

3.8 Alıştırmalar

1- A=Z^+ x Z^+ ve R, A üzerinde '(a,b)***R***(c,d) sadece ve sadece a+d=b+c ise' şeklinde tanımlanan bir bağıntı olsun. ***R*** bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişli olduğunu fakat ters simetrik olmadığını gösteriniz.

2- ***R***, A' dan B 'ye ve ***S***, B' den C 'ye birer bağıntı olsun. ***R*** ve ***S*** 'nin bileşkesi A' dan C 'ye $S \circ R$ bağıntısıdır ve 'a($S \circ R$)c sadece ve sadece a***R***b ve b***S***c olacak şekilde bir b∈B elemanı var ise' şeklinde tanımlanmıştır.

Bu tanıma göre, ***R***, Z^+ üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun.

n ***R*** m sadece ve sadece m=n^2 olduğuna göre; Z^+ üzerinde $R^2 = R \circ R$ bağıntısını tanımlayınız.

3- A={1,2,3,4} olsun.

a. A üzerinde kaç tane eşdeğerlik bağıntısı vardır?

b. A üzerinde (1,2)***R*** özelliğine sahip kaç tane ***R*** eşdeğerlik bağıntısı vardır?

4- Bir ***R*** bağıntısı R^2 üzerinde şu şekilde tanımlanmıştır.

(x_1,y_1)***R***(x_2,y_2) sadece ve sadece $x_1<x_2$ veya hem $x_1=x_2$ hem de y_1y_2 ise.

R 'nin R^2 üzerinde bir parçalı sıra olduğunu gösteriniz.

5- Aşağıdaki üç tabloda öğrenciler, dersler ve öğrencilerin derslerde aldıkları notlar ile ilgili bilgiler yer almaktadır.

student_id	first_name	last_name	Level	concentration
100	Lynn	Icks	Senior	Independent
101	Bernard	Mac	Junior	CS- Theatre Arts
102	Mike	Soft	Freshman	Business Econ
103	June	Icks	Junior	CS-AM
104	Alan	Turing	Grad	Math

Tablo 3.5- STUDENTS

Course_id	course_name	Professor	semester	year
1	CS22: Discrete Math.	Franco	Spring	2003
2	CS22: Discrete Math.	Herlihy	Spring	2002
3	CS123: Purty Pictures	Avd	Fall	2003
4	EC187: Game Theory	Dal Bo	Fall	2002
5	CS51: Turing's Factory	Savage	Fall	2003
6	MA ∞	Unknown	Fall	2001

Tablo 3.6 – COURSES

student_id	course_id	student_grade
100	2	A
101	1	S
101	2	NC
102	4	A
102	1	B
103	5	A
104	5	A
104	6	A

Tablo 3.7 – COURSE_GRADES

Buna göre;

a. A almış Freshman seviyesindeki öğrencileri seçiniz.

b. Courses tablosunda (course_name, semester) kayıt tipine göre projection işlemini gerçekleştirin.

c. Üç tablo üzerinde natural join işlemini gerçekleştirin ve (student_name,course_name,grade) kayıt tipine göre projection yazın.

6- Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulunuz.

a. f:R→R, x↦ $(x+2)^2$

b. f:R→R, x↦ x^4

7- ***gf*** bileşke fonksiyonunu tanımlayınız.

$$f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+x, x\geq 0 \\ 1/x\ ,\quad x<0 \end{cases}$$

$$g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ g(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1}, x\geq 0 \\ 1/x\ ,\quad x<0 \end{cases}$$

8- f: A→B ve g: B→C iki fonksiyon olmak üzere, 'Hem ***f*** hem de ***g*** surjective ise ***g*∘*f*** bileşkesi de surjective'dir' şeklindeki teoremi ispatlayınız.

9- ***f***(x)= fonksiyonunun tersini (***g***(x)) bulup ***g*∘*f*** ve ***f*∘*g*** bileşke fonksiyonlarını yazarak sonucun x olduğunu ispatlayınız.

10- ***f*** ve ***g*** R→R ve k∈R olmak üzere birer fonksiyon olsun. ***f***+***g***, ***f********g*** ve k***f***: R→R fonksiyonları sırasıyla şu şekilde tanımlanmaktadır:

(***f***+***g***)(x)=***f***(x)+***g***(x)

(***f********g***)(x)= ***f***(x)****g***(x)

(k***f***)(x)= k.***f***(x).

(i) Eğer k≠0 ise kf 'in sadece ve sadece f bijeksiyon ise bijeksiyon olduğunu ispatlayınız.

(ii) Ne ***f***+***g*** 'nin ne de ***f********g*** 'nin bijeksiyon olmadığı ***f*** ve ***g*** bijeksiyonları tanımlayınız.