OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ

Kısıtsız Optimizasyon

Giriş

- Klasik optimizasyon yöntemleri minimum veya maksimum değerlerini bulmak için türev gerektiren ve gerektirmeyen teknikler olarak bilinirler.
- Bu yöntemler çoğu kez analitik olup optimum noktaların bulunmasında diferansiyel denklem tekniklerinden yararlanırlar.
- Uygulamaya dönük bazı problemler sürekli ve/veya türevlenemeyen objektif fonksiyonları içerdiğinden türev gerektiren klasik optimizasyon teknikleri uygulamada sınırlı kalırlar.

Giriş

- Bu nedenle analitik çözümü zor olan optimizasyon problemleri için sayısal optimizasyon teknikleri bir alternatif haline gelmiştir.
- Bu kısımda ayrıca optimallik şartları ele alınmakta ve eşitlik ve eşitsizlik kısıtları içermeyen tek ve çok değişkenli tipik fonksiyonların optimum çözümleri için gerekli ve yeterli koşulları ele alınmaktadır.
- Bunun yanı sıra, fonksiyonların optimum değerlerini bulmak için farklı çözüm teknikleri de önerilmektedir.

Optimallik Şartları

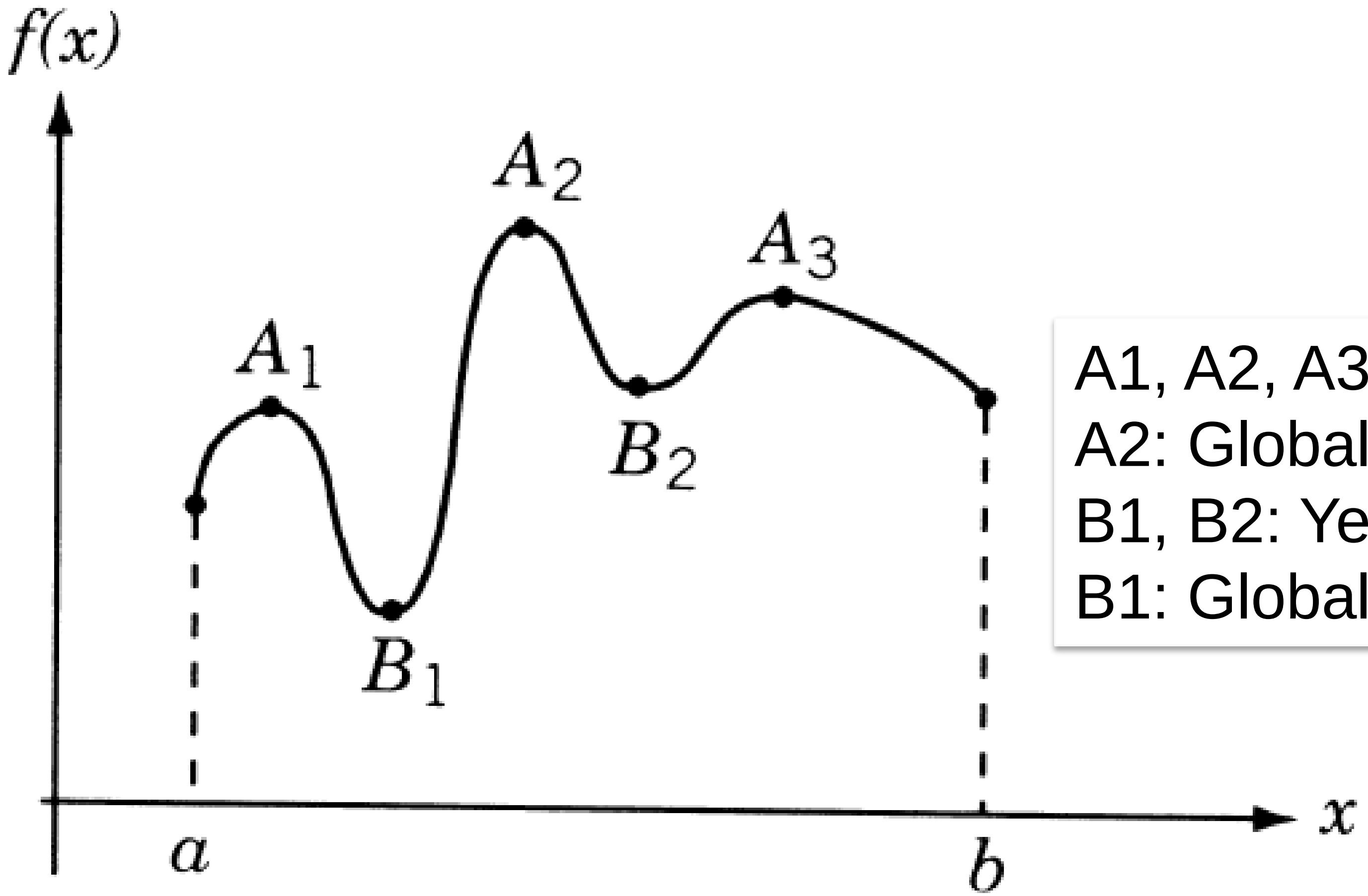
- Eğer $f(x^*) \leq f\ (x^*+h)$ şartı h'nin yeterince küçük bütün pozitif ve negatif değerleri için sağlanıyorsa tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun $x = x^*$'de yerel minimuma sahip olduğu söylenebilir.
- Benzer şekilde $f(x^*) \geq f(x^*+h)$ şartını h'nin yeterince küçük bütün pozitif ve negatif değerleri için sağlıyorsa, x^* noktası yerel maksimum olarak adlandırılır.

Optimallik Şartları

- Eğer $f(x^*) \le f(x)$ şartı bütün x değerleri için sağlanıyorsa f(x) fonksiyonu $x = x^*$'de global veya mutlak minimuma sahiptir. Bu sadece x^* noktasının yakınındaki x değerlerinden ziyade, f(x) fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgedeki bütün x değerleri için geçerlidir.

- Benzer şekilde $f(x^*) \ge f(x)$ şartını bütün x değerleri için sağlanıyorsa f(x) fonksiyonu $x = x^*$'de global veya mutlak maksimuma sahiptir.

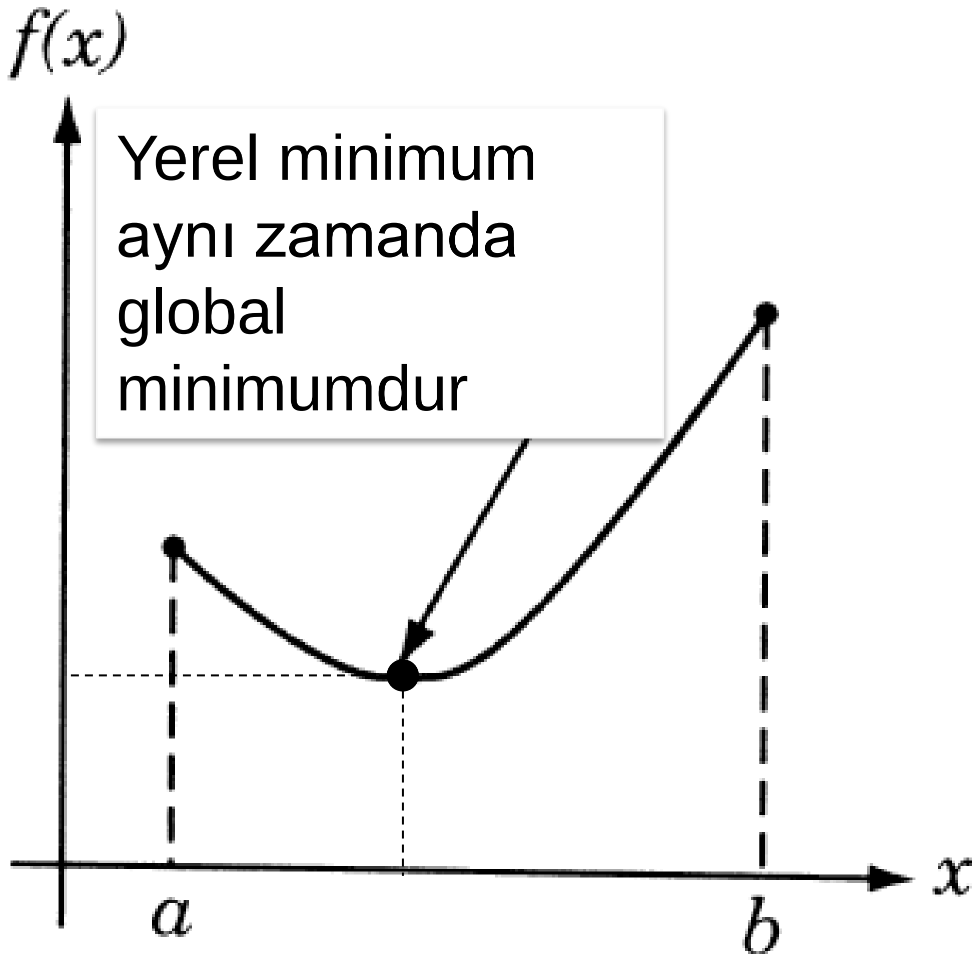
Tek Değişkenli Optimizasyon



A1, A2, A3: Yerel maksimumlar
A2: Global maksimumlar
B1, B2: Yerel minimumlar
B1: Global minimum

Şekil 1: Lokal ve global optimumlar

Tek Değişkenli Optimizasyon



Şekil 2: Lokal veya global minimum

Tek Değişkenli Optimizasyon

- Tek değişkenli optimizasyon problemi x = x* değerinin [a, b] aralığında bulunduğu ve x* değeri f(x)'i bu noktada minimum yapan bir problem olarak tanımlanır.
- Aşağıdaki iki teorem tek değişkenli yerel minimumu olan bir fonksiyon için gerekli ve yeterli koşulları ifade etmektedir.

Tek Değişkenli Optimizasyon

- Yeter Şart: $f'(x^*) = f''(x^*) = \cdot\cdot\cdot = f^{(n-1)}(x^*) = 0$ ancak $f^{(n)}(x^*) \neq 0$ olsun.
- $f^{(n)}(x^*) > 0$ ve *n* çift sayı ise f(x*), f(x)'in minimum değeridir.
- $f^{(n)}(x^*) < 0$ ve *n* çift sayı ise f(x)'in maximum değeridir.
- Eğer *n* tek ise f(x*) değeri f(x)'in ne minimumu ne de minimumudur.

Tek değişkenli optimizasyon

Örnek: $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 25x + 6$ fonksiyonunun maksimum ve minimum değerlerini belirleyiniz.

Çözüm: $f'(x) = -12x^2 + 6x + 25 = 0$ olarak bulunur. Bu denklemin kökleri, $x = 1.7149$, ve $x = -2.1490$ olarak bulunur. Yani bu noktalarda $f'(x) = 0$ değerine sahiptir.

Bu köklerin fonksiyonu maksimum mu yoksa minimum mu yaptığını anlamak için ikinci türeve bakılır.

$f''(x) = -24x+6$

Tek değişkenli optimizasyon

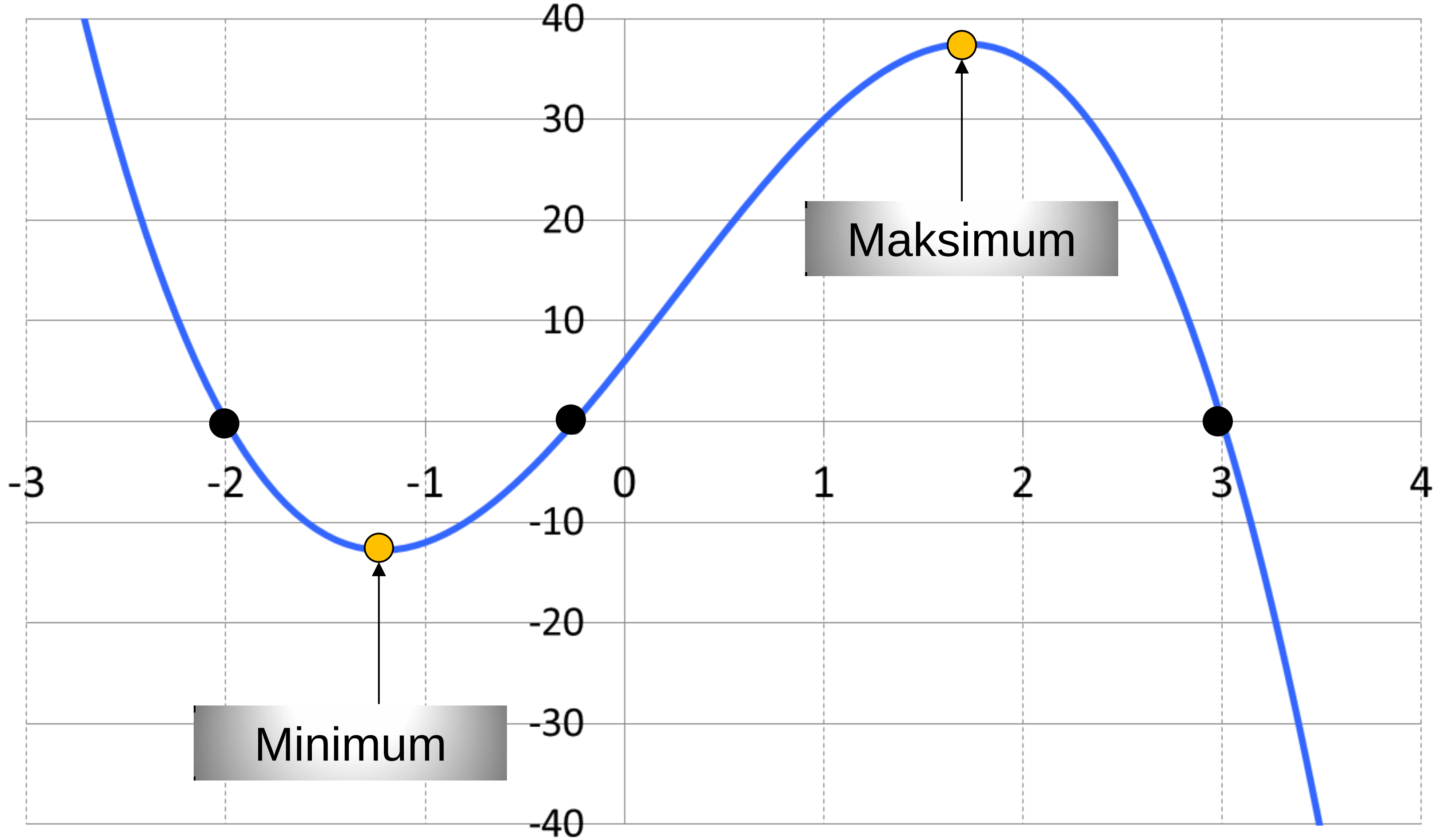
x = 1.7149'da f ''(x) = -35.1568 olup bu nokta lokal maksimumdur. Bu noktada fonksiyonun aldığı en büyük değer,

$f_{max} = f\ (x = 1.7149) = 37.5219$ olur.

x = -1.2149'da, f ''(x) = 35.1568 olup bu nokta lokal minimumdur. Bu noktada fonksiyonun aldığı en küçük değer,

$f_{min} = f\ (x = -1.2149) = -12.7719$ olur.

Tek değişkenli optimizasyon



Şekil 3: $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 25x + 6$ fonksiyonunun grafiği

Sayısal Yöntem ile Tek Değişkenli Kısıtsız Optimizasyon:

Altın Bölme Arama Yöntemi

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Tek değişkenli doğrusal olmayan bir denklemin kökünü çözmede amaç f(x) fonksiyonunun sıfır yapan x değişkenini bulmaktır.
- Tek değişkenli optimizasyon f(x)'in maksimumunu veya minimumunu veren bir x ekstremumunu bulan x değerini elde amacını güder.
- Altın bölme araması basit, genel amaçlı ve tek değişkenli arama tekniğidir.

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Bu yöntem kök bulma yöntemlerinden biri olan aralık yarılama yöntemi ile benzerlik gösterir.
- Aralık yarılamada tek kökün olduğu aralığın alt sınırın (xl) ve bir üst sınırın (xu) doğru tahmin edilmesi gerekir. Bu şekilde kök tek kökün parantez içine alınır.
- Bu sınırlar arasında bir kökün varlığı f(xl) ve f(xu) değerlerinin farklı işaretlerde olup olmadığı şeklinde belirlenir.

Altın Bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Kök aşağıdaki şekilde bu aralığın orta noktası olarak tahmin edilir.

$$xr = (xl + xu) / 2.$$

- Aralık yarılama iterasyonunda temel hedef her defasında kökü içine alan daha küçük bir parantez elde etmektir.

- Bu xl veya xu sınırlarından herhangi birinin f(xr) ile aynı işarete sahip bir fonksiyon değerine dönüştürülmesi ile yapılır.

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Bu bakımdan bir boyutlu fonksiyonun optimumunu bulmak için benzer bir yaklaşım kullanılabilir.
- İlk önce kolaylık sağlamak için maksimum bulma problemini ele almak faydalı olacaktır.
- Geliştirilen bilgisayar algoritmasında minimumu simüle etmek için gerekli olan küçük değişiklerin iyice tanımlanması önemlidir.
- Örneğin, aralık yarılamada olduğu gibi tek bir çözümün olduğu aralığı iyi tanımlamak gerekir.

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Yani, aralık tek bir maksimumu içermelidir. Bu maksimum tek tepe noktalı veya ünimodal olarak adlandırılır.

- Tahmin edilen aralığın alt ve üst sınırlarının sırasıyla xl ve xu olduğundan aralık yarılama yöntemi ile aynı terminolojiyi kullanılabilinir.

- Ancak aralık yarılamanın aksine aralık içindeki maksimumu bulmak için yeni bir stratejiye ihtiyaç duyulur.

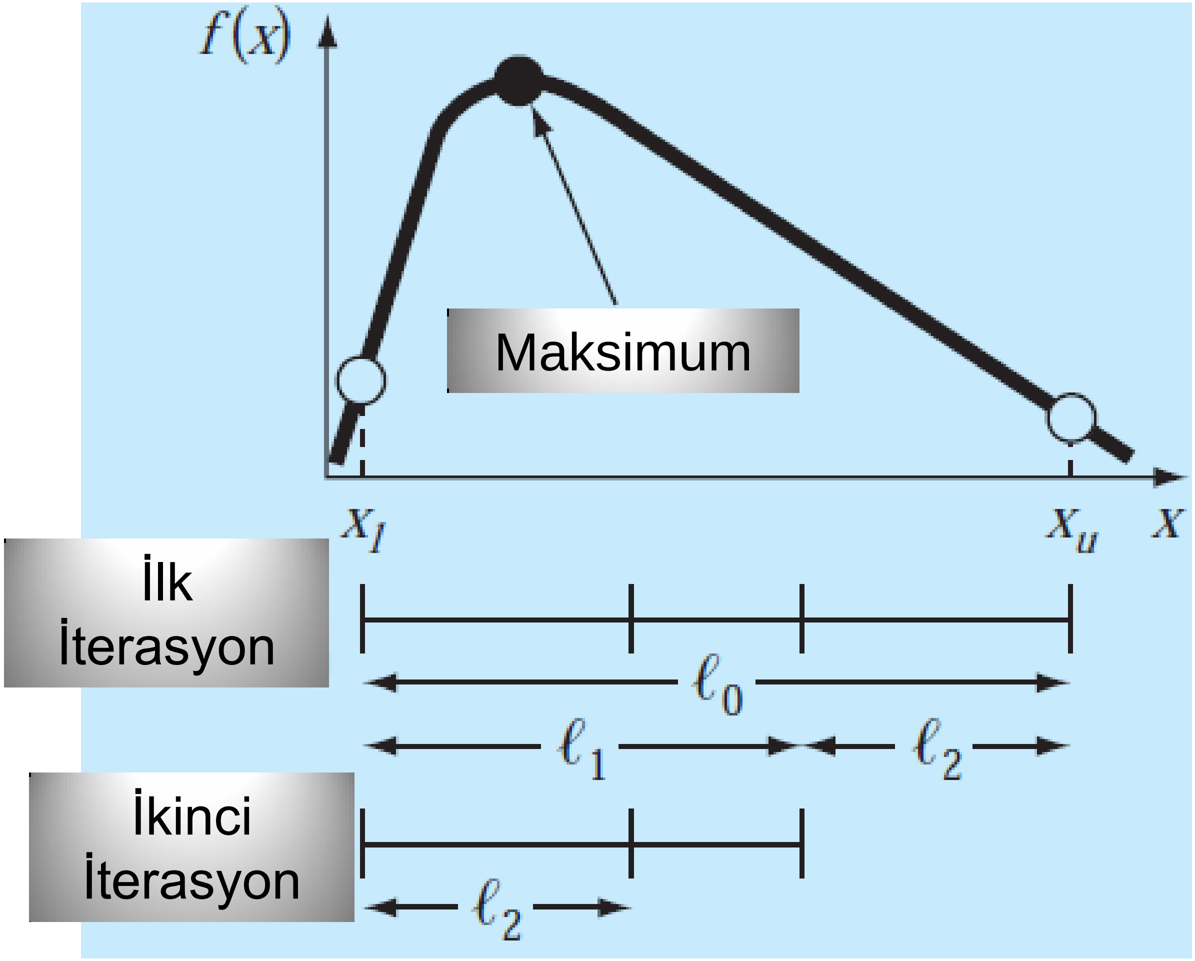
Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Aralık yarılama yönteminden farklı olarak bu yöntemde iki fonksiyon değeri yerine maksimum olup olmadığını tespit etmek için üç fonksiyon değerine ihtiyaç duyulur.
- Daha sonra maksimumun ilk üç veya son üç noktada oluşup oluşmadığını ayırt etmek için bir test uygulanabilir.
- Bu yaklaşımı etkili kılmanın yolu ara noktaların akıllıca seçilmesidir.

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Aralık yarılamada olduğu gibi burada amaç, yeni fonksiyon değerleri ile eski değerleri değiştirerek hesaplama sayısını en aza indirmektir.
- Bu amaç, aşağıda verilen iki koşulun geçerli olması durumunda gerçekleşebilir.
- Birinci koşul, iki alt uzunluk l_1 ve l_2'nin toplamının orijinal aralık uzunluğuna eşit olmalıdır.
- İkincisi, uzunlukların oranının eşit olmasıdır.

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon



Şekil 4: Altın bölme arama algoritmasının ilk adımı.

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

$$\ell_0 = \ell_1 + \ell_2 \qquad \frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1}$$

$$\frac{\ell_1}{\ell_0} = \frac{\ell_2}{\ell_1} \qquad R = \ell_2 / \ell_1$$

$$1 + R = \frac{1}{R} \qquad R^2 + R - 1 = 0$$

$$R = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.61803\ldots$$

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Antik çağlardan beri bilinen bu değere **altın oran** denir.
- Bu değer optimumların etkili bir şekilde bulunmasına izin verdiği için, kavramsal olarak geliştirilen altın bölme yönteminin ana unsurudur.
- Bu yaklaşımı bilgisayarda uygulamak için bir algoritma oluşturmak mümkündür.
- Yukarıda belirtildiği gibi yöntem f(x)'in bir lokal optimumunu paranteze alan iki başlangıç tahmini x_l ve x_u ile başlar.

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Daha sonra, altın oranına göre iki iç nokta x1 ve x2 belirlenir.
- Fonksiyonun bu iki iç noktada değeri bulunur.

$$d = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(x_u - x_l)$$

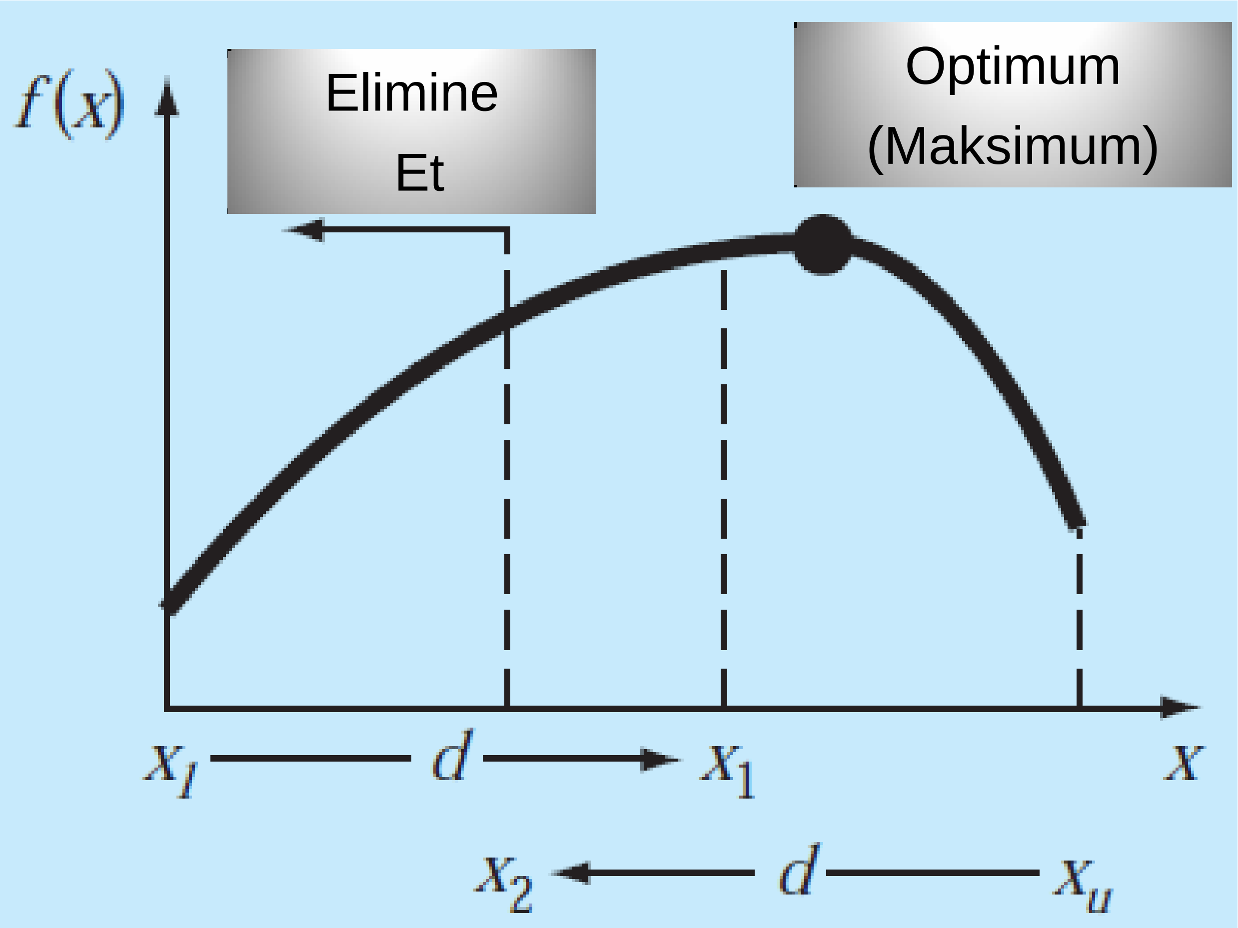
$$x_1 = x_l + d$$

$$x_2 = x_u - d$$

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

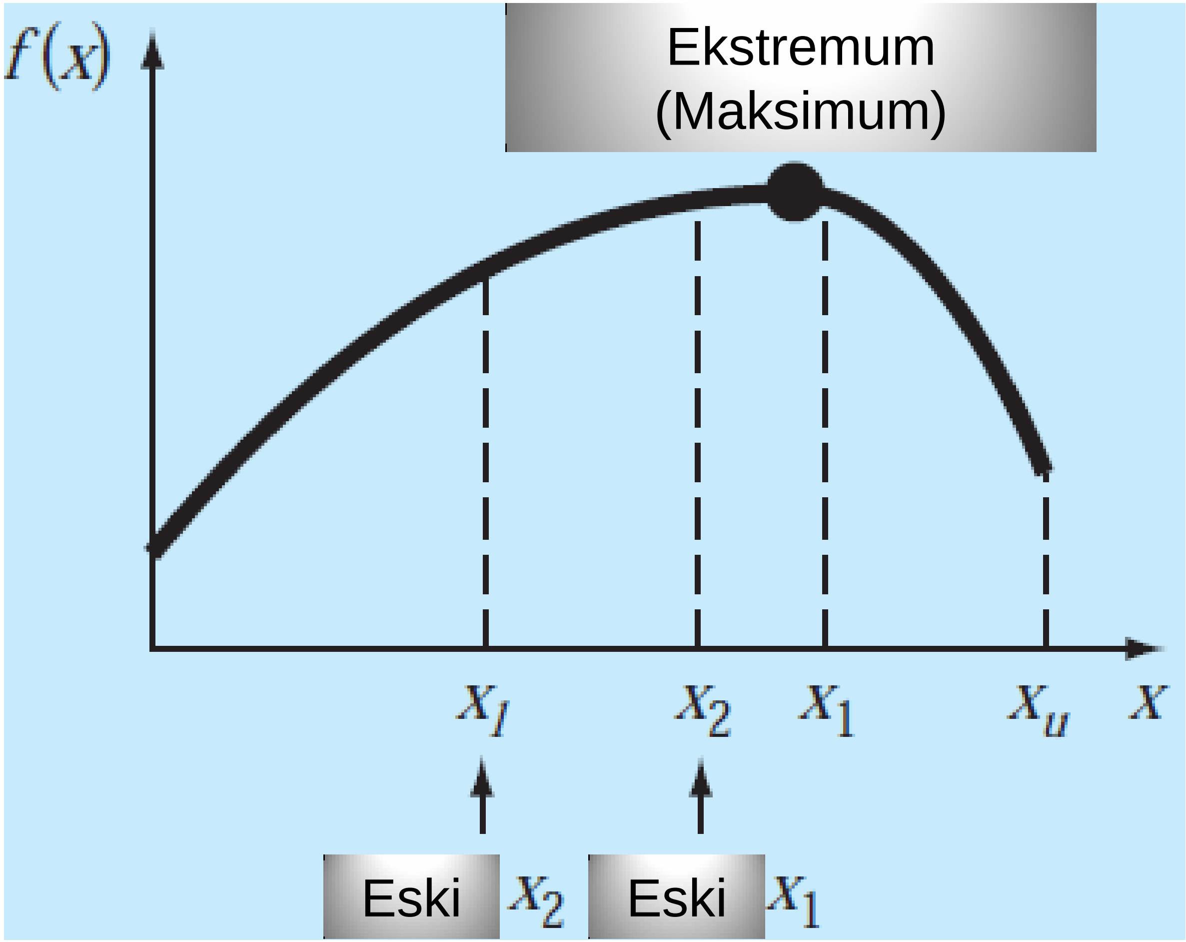
- f(x1)>f(x2) ise x'in x1'den x2'ye kadar olan x'in alanı, maksimum içermediğinden elimine edilir. Bu durumda, x2 bir sonraki iterasyon için yeni xl olur.
- f(x2)>f(x1) ise x1'in sağındaki x'in x1'den xu'ya kadar olan alanı elimine edilir. Bu durumda, x1 sonraki iterasyon için yeni xu olur.

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon



Şekil 5: Altın orana göre iki iç noktanın belirlenmesi.

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon



Şekil 6: Optimumu içeren yeni bir aralığın tanımlanması.

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Şimdi, altın oranı kullanmanın gerçek faydası buradadır. Zira orijinal x1 ve x2 altın oran kullanılarak seçildiğinden, bir sonraki iterasyon için tüm fonksiyon değerlerini yeniden hesaplamak gerekmez.

- Örneğin, Şekil 6‘da gösterilen durum için eski x1 yeni x2 olur. Bu, eski x1'deki fonksiyon değeri ile aynı olduğu için, yeni f(x2) değerine zaten sahip olunduğu anlamına gelir.

- Algoritmayı tamamlamak için şimdi sadece yeni x1'i belirlenmelidir. Bu önceki gibi aynı orantılıkla yapılmalıdır.

$$x_1 = x_l + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(x_u - x_l)$$

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Benzer bir yaklaşım, sol alt-aralığa düşen optimumun olduğu alternatif durum için de kullanılır.

- İterasyonlar tekrarlandığında, optimumu içeren aralık hızla küçülür. Yani her iterasyonda aralık altın oran faktörü kadar azaltılır (yaklaşık% 61.8). Bu 10 iterasyon sonra aralığın yaklaşık ilk uzunluğun %0.8'ine kadar daraldığı anlamına gelir.

- 20 iterasyon sonra daralma ilk uzunluğun %0.0066'ısı civarındadır. Bu aralık yarılamada elde edilen küçülme kadar iyi değildir; ancak bu daha zor bir problemdir.

Altın bölme arama yönteminin kodlanması

```
FUNCTION Gold (xlow, xhigh, maxit, es, fx)
R = (5^0.5 − 1)/2
xℓ = xlow; xu = xhigh
iter = 1
d  = R * (xu − xℓ)
x1 = xℓ + d; x2 = xu − d
f1 = f(x1)
f2 = f(x2)
IF f1 > f2 THEN
  xopt = x1
  fx = f1
ELSE
  xopt = x2
  fx = f2
END IF
DO
  d = R*d
```

Altın bölme arama yönteminin kodlanması

```
IF f1 > f2 THEN
    xℓ = x2
    x2 = x1
    x1 = xℓ+d
    f2 = f1
    f1 = f(x1)
ELSE
    xu = x1
    x1 = x2
    x2 = xu−d
    f1 = f2
    f2 = f(x2)
END IF
iter = iter+1
```

Altın bölme arama yönteminin kodlanması

```
  IF f1 > f2 THEN
     xopt = x1
     fx = f1
  ELSE
     xopt = x2
     fx = f2
  END IF
  IF xopt ≠ 0. THEN
     ea = (1.−R) *ABS((xu − xℓ)/xopt) * 100.
  END IF
  IF ea ≤ es OR iter ≥ maxit EXIT
END DO
Gold = xopt
END Gold
```

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

- Örnek: $f(x) = 2\sin x - x^2/10$ fonksiyonunun xl = 0 ve xu = 4 aralığındaki maksimum değerini altın bölme arama yöntemi kullanarak bulunuz.

- Çözüm:

$$d = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(4-0) = 2.472$$

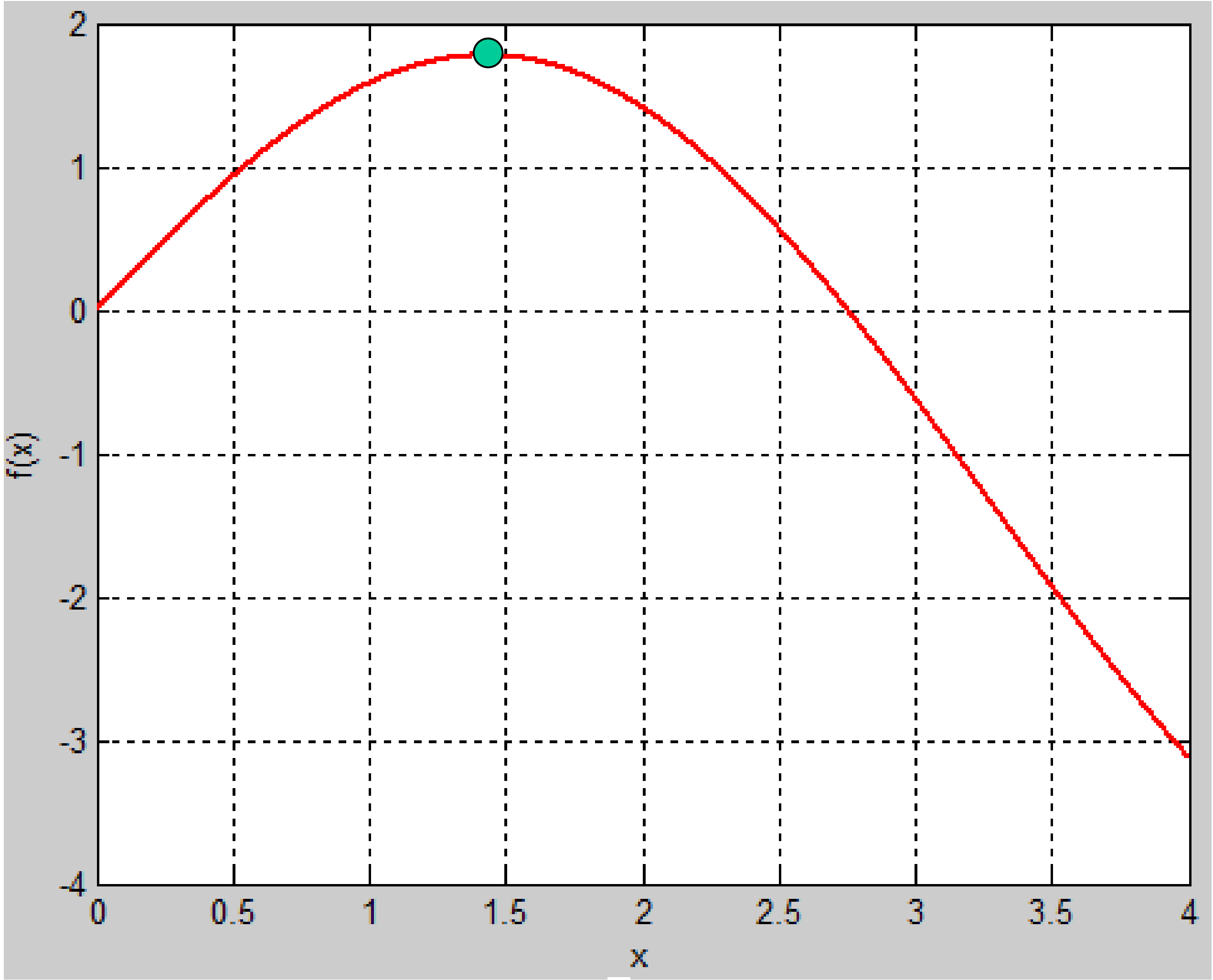
$$x_1 = 0 + 2.472 = 2.472$$

$$x_2 = 4 - 2.472 = 1.528$$

$$f(x_2) = f(1.528) = 2\sin(1.528) - \frac{1.528^2}{10} = 1.765$$

$$f(x_1) = f(2.472) = 0.63$$

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon



Şekil 7: $f(x) = 2\sin x - x^2/10$ fonksiyonunun grafiği.

Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

$$d = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(2.472-0) = 1.528$$

$$x_2 = 2.4721 - 1.528 = 0.944$$

$$\begin{aligned}
\Delta x_a &= x_1 - x_2 \\
&= x_l + R(x_u - x_l) - x_u + R(x_u - x_l) \\
&= (x_l - x_u) + 2R(x_u - x_l) \\
&= (2R - 1)(x_u - x_l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x_b &= x_u - x_1 \\
&= x_u - x_l - R(x_u - x_l) \\
&= (1 - R)(x_u - x_l)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_a = (1 - R)\left|\frac{x_u - x_l}{x_{\text{opt}}}\right| 100\%$$

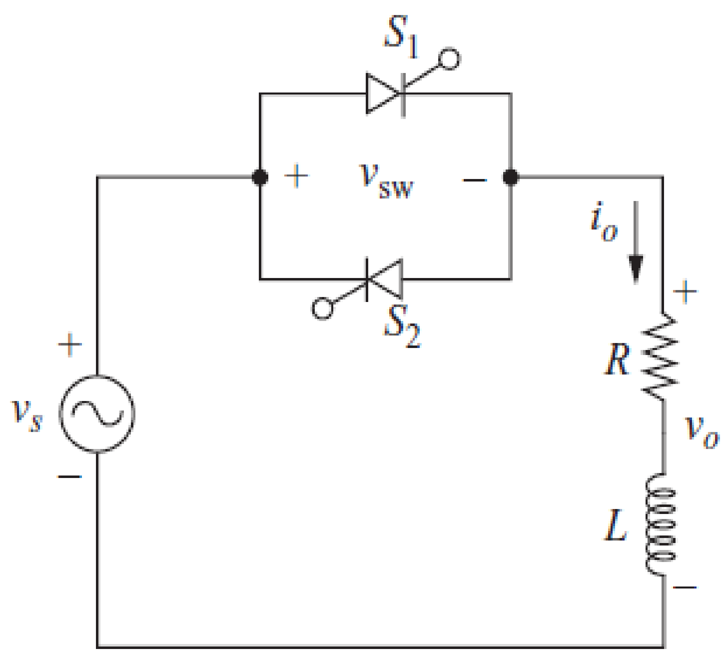
Altın bölme arama yöntemi ile tek değişkenli optimizasyon

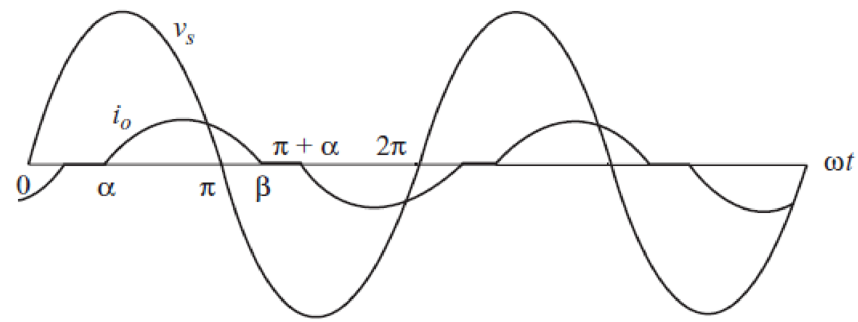
i	x_l	$f(x_l)$	x_2	$f(x_2)$	x_1	$f(x_1)$	x_u	$f(x_u)$	d
1	0	0	1.5279	1.7647	2.4721	0.6300	4.0000	−3.1136	2.4721
2	0	0	0.9443	1.5310	1.5279	1.7647	2.4721	0.6300	1.5279
3	0.9443	1.5310	1.5279	1.7647	1.8885	1.5432	2.4721	0.6300	0.9443
4	0.9443	1.5310	1.3050	1.7595	1.5279	1.7647	1.8885	1.5432	0.5836
5	1.3050	1.7595	1.5279	1.7647	1.6656	1.7136	1.8885	1.5432	0.3607
6	1.3050	1.7595	1.4427	1.7755	1.5279	1.7647	1.6656	1.7136	0.2229
7	1.3050	1.7595	1.3901	1.7742	1.4427	1.7755	1.5279	1.7647	0.1378
8	1.3901	1.7742	1.4427	1.7755	1.4752	1.7732	1.5279	1.7647	0.0851

Ödev-1 (28.02.2018-14.03.2018)

- Ödev-1) Şekildeki devrede $v = 310\sin(2\pi 50t)$ V, R=4 Ω, L=10 mH alarak α= 0°, 30° ve 45° değerlerine karşılık gelen maksimum akım değerlerini bulunuz.

$$V_m \sin(\omega t) = Ri_o(t) + L\frac{di_o(t)}{dt}$$





$$i_o(\omega t) = \begin{cases} \frac{V_m}{Z}\left[\sin(\omega t - \theta) - \sin(\alpha - \theta)\, e^{(\alpha - \omega t)/\omega\tau}\right] & \text{for } \alpha \le \omega t \le \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$i_o(\beta) = 0 = \frac{V_m}{Z}\left[\sin(\beta - \theta) - \sin(\alpha - \theta)\, e^{(\alpha - \beta)/\omega\tau}\right]$$

Direkt Yöntemler ile Çok Değişkenli Kısıtsız Optimizasyon:

Rastgele Arama Yöntemi

Rastgele Arama Yöntemi

- Çok boyutlu kısıtsız optimizasyon teknikleri çeşitli şekillerde sınıflandırılabilir.
- Bu teknikler türev gerektiren ve türev gerektirmeyen yaklaşımlar olarak ikiye ayrılır.
- Türev gerektirmeyen yaklaşımlara türevsiz (nongradyan) veya doğrudan yöntemler denir.
- Türev gerektirenlere türevli (gradyan) veya azalan ya da artan yöntemler denir.

Rastgele Arama Yöntemi

- Bu yöntemler verilen fonksiyonunun özelliğini kullanarak basit yaklaşımlardan daha karmaşık teknikler olarak değişim gösterir.
- Basit yöntemlerin en başında rastgele arama yöntemi gelir.
- Adından da anlaşılacağı gibi, bu yöntem bağımsız değişkenlerin rastgele seçilen değerlerinde fonksiyonun defalarca değerini hesağlar.

Rastgele Arama Yöntemi

Örnek: $f(x, y) = y - x - 2x^2 - 2xy - y^2$ fonksiyonunu maksimum yapan x ve y değerlerini x için [-2, 2] ve y için [1, 3] aralıklarında bulunuz.

Çözüm: Önce 0 ile 1 arasında rastgele değerler üretilir. Böyle bir sayıyı r olarak belirlersek, aşağıda verilen denklem ile xl ve xu arasındaki bir aralıkta rasgele x değerlerini üretmek mümkün olabilir.

$$x = xl + (xu - xl)r$$

Rastgele Arama Yöntemi

Bu örnek için görüldüğü üzere xl = -2 ve xu = 2 olup formül şu şekildedir:

$$x = -2 + (2 - (-2))r = -2 + 4r$$

Bu ifadede sırasıyla alt ve üst sınır değerlerini bulmak için r'ye 0 ve 1 vererek test edilebilir. Benzer şekilde y için mevcut örneğe göre aşağıdaki gibi bir formül yazılabilir.

$$y = yl + (yu - yl)r = 1 + (3 - 1)r = 1 + 2r$$

Rastgele Arama Yöntemi

- Basit bir kod ile (x, y) çifti rasgele sayı işlevi Rnd'yi kullanarak oluşturulur.
- Üretilen bu değerler daha sonra yukarıda verilen denklemdeki x ve y değerleri ile değiştirilir.
- Bu rastgele denemeler arasındaki maksimum değer, **maxf** değişkeninde ve karşılık gelen x ve y değerleri sırasıyla **maxx** ve **maxy**'de saklanır.
- Bu basit yaklaşım süreksiz ve türevi alınamayan fonksiyonlar için bile çalışır.

Rastgele Arama Yöntemi Kodu

```
maxf = –1E9
for j = 1 to n
x = –2 + 4 * rnd
y = 1 + 2 * rnd
fn = y – x – 2 * x ^ 2 – 2 * x * y – y ^ 2
if fn > maxf then
maxf = fn
maxx = x
maxy = y
end if
j=j+1
```

Rastgele Arama Yöntemi

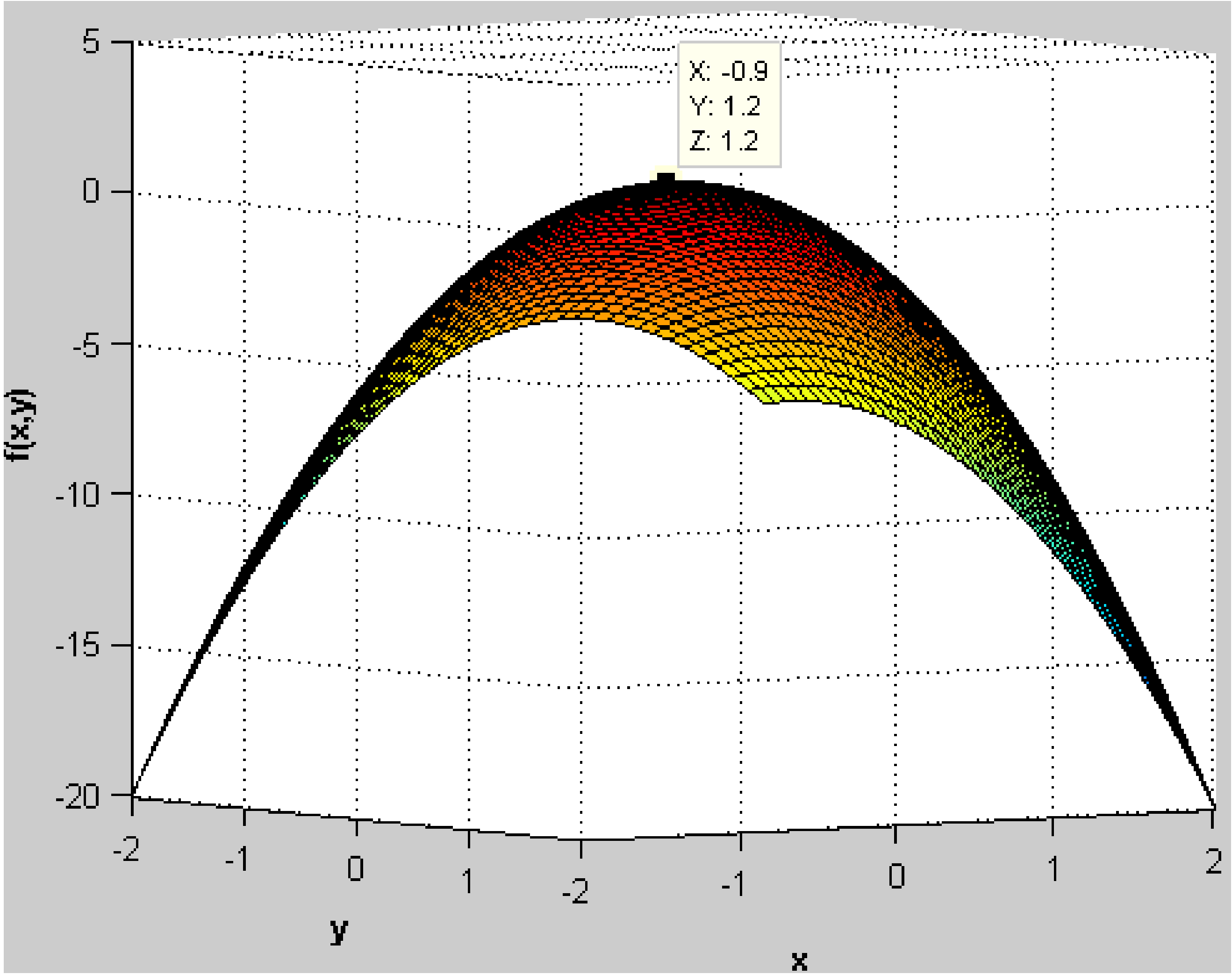
```
%Verilen problemi çözen için basit MATLAB kodu
clc; clear all;
maxf = -1e9;n=1000;
for j = 1:n
x = -2 + 4 * rand;
y = 1 + 2 * rand;
fn = y-x-2 * x ^ 2-2 * x * y-y ^ 2
if fn > maxf
maxf = fn;
maxx = x;
maxy = y;
end
end
disp(maxf); disp(maxx); disp(maxy)
```

Rastgele Arama Yöntemi

Çizelge 1. Rastgele Arama Yönteminin Sonuçları

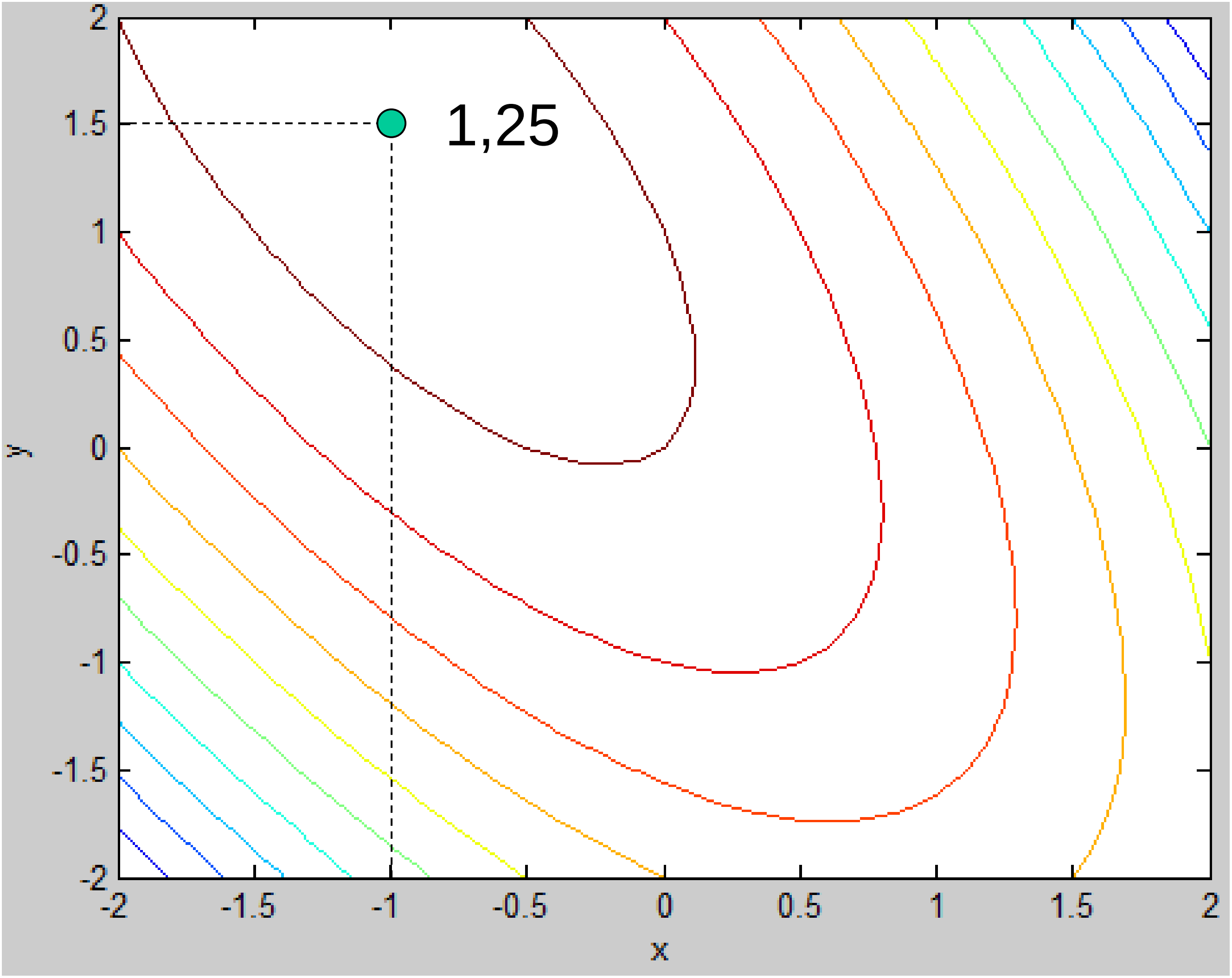
İterasyon	x	y	$f(x, y)$
1000	−0.9886	1.4282	1.2462
2000	−1.0040	1.4724	1.2490
3000	−1.0040	1.4724	1.2490
4000	−1.0040	1.4724	1.2490
5000	−1.0040	1.4724	1.2490
6000	−0.9837	1.4936	1.2496
7000	−0.9960	1.5079	1.2498
8000	−0.9960	1.5079	1.2498
9000	−0.9960	1.5079	1.2498
10000	−0.9978	1.5039	1.2500

Rastgele Arama Yöntemi



Şekil 8: $f(x, y) = y - x - 2x^2 - 2xy - y^2$ için 2 boyutlu çizim

Rastgele Arama Yöntemi



Şekil 9: $f(x, y) = y - x - 2x^2 - 2xy - y^2$ için 2 boyutlu çizim

Rastgele Arama Yöntemi

- Ayrıca bu yöntem yerel bir optimumdan ziyade daima global optimumu bulur.
- En büyük eksikliği, bağımsız değişkenlerin sayısı arttıkça uygulanmasının zor hale gelmesidir.
- Buna ek olarak, kullanılan fonksiyonun özelliğini dikkate almadığından etkili bir yöntem değildir.
- Bu amaçla kullanılan yaklaşımların diğerleri, yakınsama hızını artırmak için önceki sonuçları da fonksiyon davranışı olarak dikkate alır.

Rastgele Arama Yöntemi

- Böylece, rasgele arama belirli problem türlerinde kesinlikle kullanışlı olmasına rağmen, başka benzer yöntemlerin daha genel bir kullanıma sahiptir. Bu yöntemlerin çoğu hemen hemen her zaman daha iyi yakınsama yaparak optimal sonuçları bulur.
- Bu yöntemler arasında basit olduğu kadar daha karmaşık arama tekniklerinin mevcut olduğunun bilinmesi gerekir.
- Bunların bir kısmı klasik optimizasyon ile çözülemeyen doğrusal olmayan ve/veya süreksiz problemleri çözebilen sezgisel ve meta sezgisel tekniklerdir.

Rastgele Arama Yöntemi

- Benzetim tavlaması, tabu arama, yapay sinir ağları ve genetik algoritmalar bu yöntemlere bir kaç örnek olarak verilebilir.
- Bunların içinde en çok uygulaması olan genetik algoritmalar yöntemi olup birçok ticari paketi mevcuttur.
- Holland (1975) genetik algoritma yaklaşımının öncülüğünü yapmış ve Davis (1991) ve Goldberg (1989) yöntemin teorisini ve uygulamasını iyi bir şekilde incelemiştir.