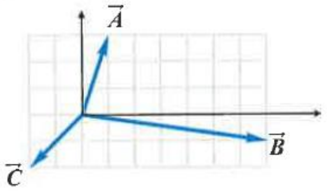
Örnek 1.4



Şekilde grafik kağıdında gösterilen $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörlerinin,

(a) $\vec{A}+\vec{B}$ *ve* $\vec{B}+\vec{C}$ *toplamlarını,*

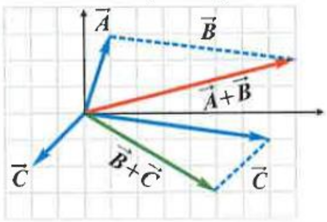
(b) $\vec{A}-\vec{B}$ *ve* $\vec{C}-\vec{B}$ *farklarını,*

üçgen kuralına göre grafik yolla hesaplayın.

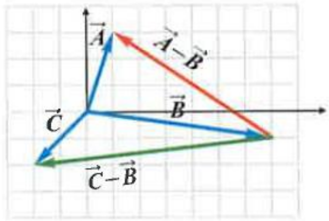
Çözüm

Üçgen kuralına göre, iki vektörden biri alınıp diğerin uç noktasına kadar, kendisine paralel kalacak şekilde kaydırılır. Daha sonra, sabit tutulan vektörün başlangıç noktasından, kaydırılan vektörün uç noktasına çizilen vektör toplam olur.

Şekilde bu toplam vektörler çizilmiştir:

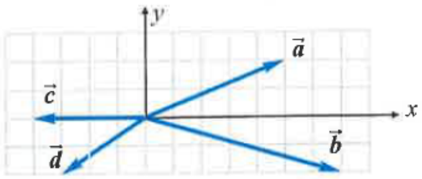


(b) İki vektörün farkı $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$ şeklinde yazılarak toplama dönüştürülür. Burada $-\vec{B}$ vektörü $\vec{B}$ ye zıt yöndedir. Üçgen kuralı yine uygulanırsa, sonuçlar şekildeki gibi olur:



Örnek 1.5

Şekilde gösterilen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektörlerinin bileşenlerini tayin edin. (Herbir bölme 1 birim *dir.)*



Çözüm

Bileşenlerin işaretlerine dikkat ederek grafik kağıdından okuyabiliriz:

$a_x = 5 \qquad a_y = 2$

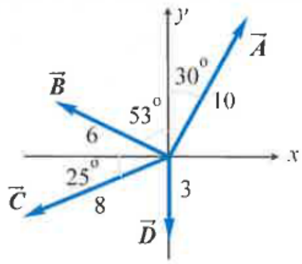
$b_x = 6 \qquad b_y = -2$

$c_x = -4 \qquad c_y = 0$

$d_x = -3 \qquad d_y = -2$

Örnek 1.6

Şekilde, boyları ve açıları belirtilmiş olan $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ vektörlerinin bileşenlerini hesaplayın. (Bilinmeyen sinüs ve kosinüsler için, kitabın sonundaki Ek C yi kullanabilirsiniz.)



Çözüm

Gerekli açılar ve şiddetler kullanılarak hesaplanır:

$A_x = A\cos(90-30)° = 10\times\cos 60° = 10\times 0.5 = 5$

$A_y = A\sin 60° = 10\times 0.87 = 8.7$

$B_x = B\cos(180-37)° = 6\times(-\cos 37°) = -6\times 0.8 = 4.8$

$B_y = B\sin(180-37)° = 6\times\sin 37° = 6\times 0.6 = 3.6$

$C_x = -C\cos 25° = -8\times 0.91 = -7.3$

$C_y = -C\sin 25° = -8\times 0.42 = -3.4$

Bir vektör eksenlerden biri üzerindeyse, diğer bileşeni sıfır demektir:

$D_x = 0$ ve $D_y = -3$

Örnek 1.7

$\vec{F}$ ve $\vec{G}$ vektörleri bileşenleri ile verilmiştir:

$$F_x = 3, \qquad G_x = -5$$
$$F_y = -4, \qquad G_y = -12$$

Bu vektörlerin şiddetlerini ve yönlerini bulun.

Çözüm

(1.3) formüllerinin şiddet ve yönü veren ifadeleri kullanılırsa,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$
$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-4}{3} = -1.33$$

Tanjantı 1.33 olan iki açı +127° ve −53° dir. Bunlardan hangisi olacağına bileşenlerin işaretine bakarak karar veririz. $\vec{F}$ nin sadece y-bileşeni negatif olduğu için, bu açı 4. çeyrektedir. O halde, cevap $\theta = -53°$ olur.

$\vec{G}$ için hesapta aynı yolu izleriz:

$$G = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$$
$$\tan\theta = \frac{-12}{-5} = 2.4$$

Tanjantı 2.4 olan iki açı +64° ve −113° dir. $\vec{G}$ nin her iki bileşeni negatif olduğu için, bu açı 3. çeyrektedir. O halde, cevap $\theta = -113°$ olur.

Örnek 1.8

$\vec{A} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{\imath} - 3\hat{k}$ $\vec{C} = 8\hat{\jmath}$ *vektörleri veriliyor.*

(a) *Herbir vektörün bileşenlerini yazın.*
(b) *$\vec{A} + \vec{B}$ toplamını ve $\vec{B} - \vec{C}$ farkını hesaplayın.*
(c) *$3\vec{A} - 8\vec{B} + 9\vec{C}$ ifadesini hesaplayın.*

Çözüm

(a) $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ birim vektörlerinin önündeki katsayılar sırasıyla x-, y- ve z-bileşenleri olurlar. Verilen vektör ifadelerinden bileşenler tespit edilir:

$$A_x = 3 \qquad A_y = -4 \qquad A_z = 7$$
$$B_x = 2 \qquad B_y = 0 \qquad B_z = -3$$
$$C_x = 0 \qquad C_y = 8 \qquad C_z = 0$$

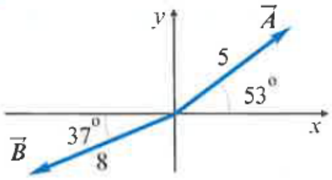
(b) Bileşenlerle toplama ve çıkarma yaparken, birim vektörlerin katsayıları cebirsel olarak toplanır veya çıkarılır:

$$\vec{A} + \vec{B} = (3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}) + (2\hat{\imath} - 3\hat{k})$$
$$= 5\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$
$$\vec{B} - \vec{C} = (2\hat{\imath} - 3\hat{k}) - (8\hat{\jmath}) = 2\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

(c) Yine, katsayılar cebirsel işlemlerle hesaplanır:

$$3\vec{A} - 8\vec{B} + 9\vec{C} = 3(3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}) - 8(2\hat{\imath} - 3\hat{k}) + 9(8\hat{\jmath})$$
$$= -7\hat{\imath} + 84\hat{\jmath} + 117\hat{k}$$

Örnek 1.9



Şekilde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin boyları ve açıları verilmiştir.

(a) *Bileşenleri hesaplayın ve bu iki vektörü birim vektörler cinsinden ifade edin,*
(b) *$\vec{R} = 3\vec{A} - 2\vec{B}$ olan $\vec{R}$ vektörünü hesaplayın.*
(c) *$\vec{R}$ vektörünün şiddeti ve yönünü tayin edin.*

Çözüm

(a) Bileşenler:

$$A_x = 5\cos 53° = 3 \qquad A_y = 5\sin 53° = 4$$

$$B_x = -8\cos 37° = -6.4 \qquad B_y = -8\sin 37° = -4.8$$

Buna göre, birim vektörler cinsinden:

$$\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$
$$\vec{B} = -6.4\hat{\imath} - 4.8\hat{\jmath}$$

(b) $\vec{R}$ vektörü hesaplanır:

$$\vec{R} = 3\vec{A} - 2\vec{B} = 3(4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) - 2(-6.4\hat{\imath} - 4.8\hat{\jmath})$$
$$\vec{R} = 24.8\,\hat{\imath} + 18.6\,3\,\hat{\jmath}$$

(c) $\vec{R}$ nin şiddeti hesaplanır:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{24.8^2 + 18.6^2} = 31$$

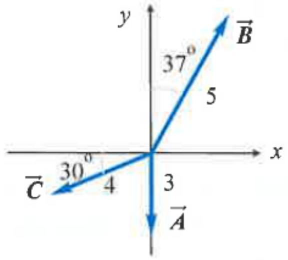
Yönü $+x$ ekseniyle yaptığı açı olarak hesaplanır:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{18.6}{24.8} = 0.75$$

Bileşenler pozitif olduğundan açı $\theta = 37°$ dir.

Örnek 1.10

Şekilde gösterilmiş olan $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin birbirleriyle skaler çarpımlarını tayin edin.



Çözüm

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ formülünü kullanırken, vektörler arasındaki açılar şekilden hesaplanır:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\ \cos(180° - 37°) = 3\times 5\times(-\cos 37°)$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 15\times(-0.8) = -12$$
$$\vec{A}\cdot\vec{C} = AC\ \cos(90° - 30°) = 3\times 4\times\cos 60°$$
$$\vec{A}\cdot\vec{C} = 12\times(0.5) = 6$$
$$\vec{B}\cdot\vec{C} = BC\ \cos(90° + 67°) = 5\times 4\times\cos 157°$$
$$\vec{B}\cdot\vec{C} = 20\times(-\cos 23°) = 20\times(-0.92) = -18$$

Örnek 1.11

$\vec{p} = 3\hat{\imath} - 8\hat{\jmath}$, $\quad \vec{q} = 8\hat{\imath} + 7\hat{k}$

(a) *$\vec{p}\cdot\vec{q}$ skaler çarpımını bulun,*

(b) *Bu iki vektör arasındaki açıyı tayin edin.*

Çözüm

(a) Skaler çarpımın bileşenli ifadesi kullanılır:

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = p_x q_x + p_y q_y = 3\times 8 + (-8)\times 7 = -32$$

(b) Önce vektörlerin şiddetleri bulunur:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{3^2 + (-8)^2} = \sqrt{73} \approx 8.5$$
$$q = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{113} \approx 11$$

Bu veriler (1.10) formülünde kullanılır:

$$\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{p\,q} = \frac{-32}{8.5\times 11} = -0.34$$
$$\theta = 110°$$

Skaler çarpım eksi olduğundan sonuç geniş açı olur.

Örnek 1.12

$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}$, $\quad \vec{B} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$

Bu iki vektörün birbirine dik olması için, bilinmeyen A_x koordinatı ne olmalıdır?

Çözüm

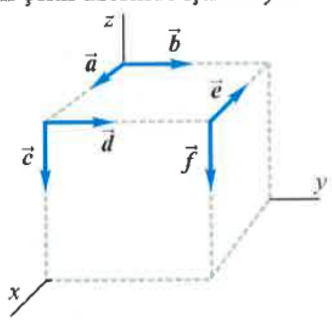
İki vektör dik ise skaler çarpımları sıfır olmalıdır. Bu koşulu bileşenler cinsinden yazarsak,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = 0$$
$$A_x\times 4 + 12\times 5 = 0 \quad\rightarrow\quad A_x = -60/4 = -15$$

Örnek 1.13

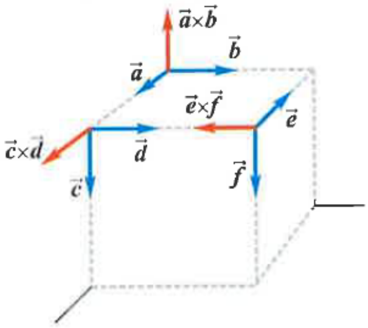
Şekilde bir kenarı birim (1) uzunlukta olan kübün köşelerine çizilmiş olan vektörler görülmektedir.

$\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{c}\times\vec{d}$, $\vec{e}\times\vec{f}$ vektörel çarpımlarının sadece yönlerini tayin edin ve bir şekil üzerinde işaretleyin.



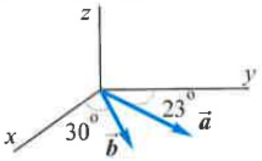
Çözüm

Sağ-el kuralına göre, dört parmak 1. vektör yönünde ve avuçiçi 2. vektöre bakacak şekilde uzatılırsa, başparmak çarpım yönünde olur. Buna göre, sonuçlar şu şekilde oluşur:



Örnek 1.14

Şekilde xy-düzleminde yeralan $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektörlerinin boyları sırasıyla $a = 15$ ve $b = 12$ birimdir.



$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ çarpımı olan $\vec{c}$ vektörünün şiddeti ve yönünü tayin edin.

Çözüm

Önce $\vec{c}$ vektörünün şiddetini bulalım. Şekilden iki vektör arasındaki açının $90 - (23 + 30) = 37°$ olduğu tayin edilir. Buna göre,

$$c = a\,b\,\sin 37 = 15 \times 12 \times 0.6$$

$$c = 108\ \mathrm{m/s}$$

$\vec{c}$ nin doğrultusu xy-düzlemine dik, yani z-doğrultusunda olmalıdır. Sağ-el kuralı uygulanırsa, $-z$ yönünde bulunur.

Örnek 1.15

$\vec{D} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$, $\vec{E} = 7\hat{\imath} - 3\hat{k}$ vektörleri veriliyor. $\vec{F} = \vec{D} \times \vec{E}$ vektörel çarpımı olan $\vec{F}$ vektörünün bileşenlerini hesaplayın.

Çözüm

Bileşenleri veren (1.12) formüllerini kullanırız. Bileşen indislerinin döner permütasyonu indisleri kolay hatırlamamızı sağlar:

$$F_x = D_y E_z - D_z E_y = -5 \times (-3) - 0 \times 0 = 15$$

$$F_y = D_z E_x - D_x E_z = 0 \times 7 - 3 \times (-3) = 9$$

$$F_z = D_x E_y - D_y E_x = 3 \times 0 - 5 \times 7 = -35$$

Buna göre, $\vec{F} = 15\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} - 35\hat{k}$ olarak yazılır.