5. Hafta

YMÜ 215 Mantık Devreleri

Arş. Gör. Dr. Feyza Altunbey Özbay

İçerik

- Boolean Matematiği
- Boolean Kanunları
- Boolean Kuralları
- Doğruluk Tablosu
- Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

Boolean Matematiği

- Boolean matematiği ikilik sayı sisteminin matematiğidir. Matematikte gördüğünüz işlemlerin tamamı boole cebrinde de vardır. Fakat değişkenlerin alabileceği sadece iki değer vardır. Değişken olarak sadece "1" ve "0" ya da doğru ve yanlış vardır.
- 1854 yılında George Boole tarafından özellikle lojik devrelerde kullanılmak üzere ortaya konulmuş bir matematiksel sistemdir.
- 1938'li yıllarda da ilk defa Claude Shannon tarafından Boole'un çalışması, lojik devrelerin tasarımı ve analizinde kullanılmıştır. Boole cebri AND, OR ve NOT temel mantıksal işlemlerinden oluşan sembolik bir sistem olarak düşünülebilir.

Boolean Toplama

Boolean toplama VEYA (OR) işlemine eşittir. Basit olarak toplamanın kuralı şöyle özetlenebilir:

0+0=0

0+1=1

1+0=1

1+1=1

Görüldüğü gibi toplanan değişkenlerden en az birinin 1 olması durumda sonuç 1, aksi halde 0’dır.

Boolean Çarpma

Boolean çarpma VE (AND) işlemine eşdeğerdir. Kuralları şöyle özetlenebilir:

0.0=0

0.1=0

1.0=0

1.1=1

Görüldüğü gibi çarpımı yapılan değişkenlerden biri sıfır olduğunda sonuç 0, tümü 1 olduğunda 1’dir.

Boolean Kanunları

Değişme Özelliği

İki girişli bir VEYA veya VE kapısının girişlerine uygulanan değişkenler yer değişirse çıkış değeri değişmez. Yani; girişlerin sırası önemli değildir.

A+B=B+A

veya

A.B=B.A

şeklinde özetlenebilir.

Boolean Kanunları

- **Birleşme Özelliği**

Bir VEYA veya VE kapısının girişlerine uygulanan değişkenlerin gruplandırılmaları değişirse çıkış değeri değişmeyecektir.

$A+(B+C)=(A+B)+C$

veya

$(A.B).C = A.(B.C)$

şeklinde yazılabilir.

Boolean Kanunları

Dağılma Özelliği

A.(B+C)=A.B+A.C

VEYA’lanmış B,C değişkenlerinin A ile VE’lenmesi ile elde edilen ifade, A değişkeninin B, C değişkenleri ile VE’lenmesi sonucu VEYA’lanmasından elde edilen ifadeye eşittir.

Boolean Kuralları

- Bu kurallar özellikle lojik ifadelerin sadeleştirilmesi için kullanılırlar.

A + 0 = A

1 + 0 = 1

0 + 0 = 0

Bir VEYA kapısının girişlerinden biri "0" ise çıkış ifadesi A'nın durumuna bağlıdır. Eğer A=0 ise çıkış "0", A=1 ise çıkış "1" olur.

Boolean Kuralları

$A + 1 = 1$

$1 + 1 = 1$

$0 + 1 = 1$

Bir VEYA kapısının girişlerinden biri "1" ise, A'nın durumu ne olursa olsun çıkış daima "1" olur.

Boolean Kuralları

$A + A' = 1$

$1 + 0 = 1$

$0 + 1 = 1$

Bir VEYA kapısının girişlerine değişkenin değili ile kendisi uygulanırsa çıkış A'nın durumu ne olursa olsun daima "1" olur.

Boolean Kuralları

$A + A = A$

$1 + 1 = 1$

$0 + 0 = 0$

Bir VEYA kapısının her iki girişine aynı değişken uygulanırsa çıkış A'nın durumuna bağlıdır. Eğer A=0 ise çıkış "0", A=1 ise çıkış "1" olur.

Boolean Kuralları

$A \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 0 = 0$

Bir VE kapısının girişlerinden biri "0" ise, A’nın durumu ne olursa olsun çıkış daima "0"olur.

Boolean Kuralları

$A \cdot 1 = A$

$1 \cdot 1 = 1$

$0 \cdot 1 = 0$

Bir VE kapısının girişlerinden biri "1" ise çıkış ifadesi A'nın durumuna bağlıdır. Eğer A=0 ise çıkış "0", A=1 ise çıkış "1" olur.

Boolean Kuralları

A . A = A

1 . 1 = 1

0 . 0 = 0

Bir VE kapısının her iki girişine aynı değişken uygulanırsa çıkış A’nın durumuna bağlıdır. Eğer A=0 ise çıkış "0", A=1 ise çıkış "1" olur.

Boolean Kuralları

$A \cdot A' = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

Bir VE kapısının girişlerine değişkenin değili (tümleyeni) ile kendisi uygulanırsa çıkış A’nın durumu ne olursa olsun daima "0" olur.

Boolean Kuralları

Çift Tersleme Kuralı

$(A')' = A$

Bir Lojik ifadenin veya değişkenin iki defa değili alınırsa (terslenirse) lojik ifadenin veya değişkenin aslı elde edilir.

Boolean Kuralları

Yutma Kuralı

$A + A.B = A(1+B)$

$= A.1$

$= A$

Bu kuralı *dağılma kanunu* ve *VEYA, VE* özdeşlikleri yardımı ile açıklayalım. Eğer ifadeyi A ortak parantezine alırsak yukarıdaki dönüşüm sağlanmış olur.

Boolean Kuralları

$A + \overline{A}.B$	$= (A + A.B) + \overline{A}.B$	*Yutma kuralı*
	$= (A.A + A.B) + \overline{A}.B$	*VE özdeşliği*
	$= A.A + A.B + A.\overline{A} + \overline{A}.B$	*Çift tersleme*
	$= (A + \overline{A}).(A + B)$	*VEYA özdeşliği*
	$= 1. (A + B)$	*VE özdeşliği*
	$= A + B$	

Bu kural *yutma, VE, VEYA özdeşlikleri, çift tersleme* kuralları yardımı ile açıklanır.

De Morgan Kanunları

- De Morgan teoremleri Boolean matematiğinin en önemli teoremleridir. İki değişken için De Morgan teoremleri aşağıdaki gibi yazılır.

Teorem-1	$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$
Teorem-2	$\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$

Doğruluk Tablosu

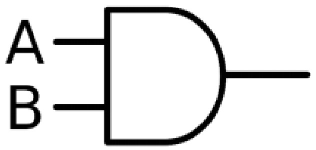
Doğruluk tablosu, bir lojik devredeki giriş değişkenlerinin alabilecekleri tüm değerlere karşılık gelen çıkışları gösterir. Doğruluk tablosundaki durum sayısı, n tane giriş değişkeni için 2^n ’dir.

A	*B*	*Çıkış*
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

A	*B*	*C*	*Çıkış*
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

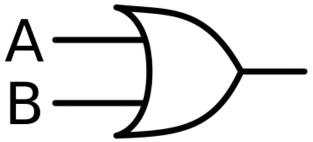
Doğruluk Tablosu

VE KAPISI (AND)



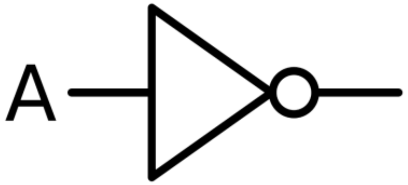
A	B	F=A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

VEYA KAPISI (OR)



A	B	F=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

DEĞİL KAPISI (NOT)



A	F
0	1
1	0

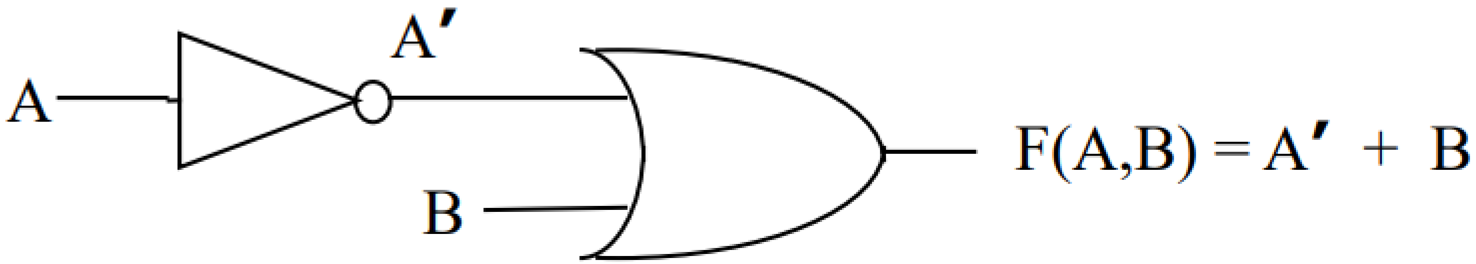
Doğruluk Tablosu

Örnek: (A+B)’=A’.B’ De Morgan teoreminin ispatını doğruluk tablosu ile gösterelim.

Eşitliğin sağ ve sol tarafındaki ifadelerden doğruluk tablosu oluşturulduğunda, ilgili sütunların aynı değerlere sahip olması, bu eşitliğin doğruluğunu ispatlayacaktır.

A	B	A'	B'	A+B	(A+B)'	A'.B'
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Doğruluk Tablosu



A	B	A′	F = A′ + B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

Karmaşık yapıdaki lojik ifadeler, Boolean cebri kuralları kullanılarak sadeleştirilebilirler. Sadeleşmiş lojik ifadelerden oluşturulacak devreler, hem daha basit hem de daha ucuz olarak elde edilmiş olacaktır. Sadeleştirmede birkaç yol takip edilebilir; ortak paranteze alma, terimleri genişletme yada terim ilave etme gibi.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

Örnek:

F(A,B,C)= ABC’+A’B’C+A’BC+A’B’C’ ifadesini sadeleştirelim.

İfadedeki 2. ve 4. terimler A’B’ parantezine alınırsa;

$$F(A,B,C) = ABC' + A'B'\underline{(C+C')} + A'BC \qquad A+A'=1 \text{ kuralından}$$

$$= ABC' + A'B' + A'BC$$

$$= ABC' + A'\underline{(B'+BC)} \qquad A+A'B = A+B \text{ kuralından}$$

$$= ABC' + A'(B'+C)$$

$$= ABC' + A'B' + A'C$$

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

Örnek:

F(A,B,C) = AB ’+ A(B+C)’ + B(B+C)’ifadesini sadeleştirelim.

İfadedeki 2. ve 3. terim için DeMorgan kuralını uygularsak;

(A.B)’=A’+B’ ***(A+B)’=A’.B’***

F(A,B,C) = AB’+A(B’C’)+B(B’C’) *B.B’= 0’dır.*

= AB’+AB’C’ AB’parantezine alınırsa;

= AB’(1+C’) 1+C’=1olduğundan;

= AB’