

3. Hafta

YMÜ 215 Mantık Devreleri

Dr. Feyza Altunbey Özbay

İçerik

- İşaretli Sayılar
- İşaretli Sayıların Onluk Sisteme Dönüştürülmesi
- İşaretli Sayılarda Dört İşlem

İŞARETLİ SAYILAR

- İşaretsiz sayılarda, sayıyı oluşturan bit değerlerinin tamamı büyüklüğü göstermekteydi.
- İşaretlı sayılar hem işaret hem büyüklük bilgisi içerirler.
- İşaret sayının pozitif ya da negatif olduğunu, büyüklük ise sayının değerini gösterir. İkili sistemde işaret sayıların gösterimi üç şekilde olur:
 - İşaret-büyüklük
 - 1'e tümleyen
 - 2'ye tümleyen

Tüm bu gösterim tiplerinin ortak özelliği; MSB bitinin 1 olması durumunda sayının negatif olması, 0 olması durumunda ise pozitif olmasıdır.

İşaret Büyüklük Gösterimi

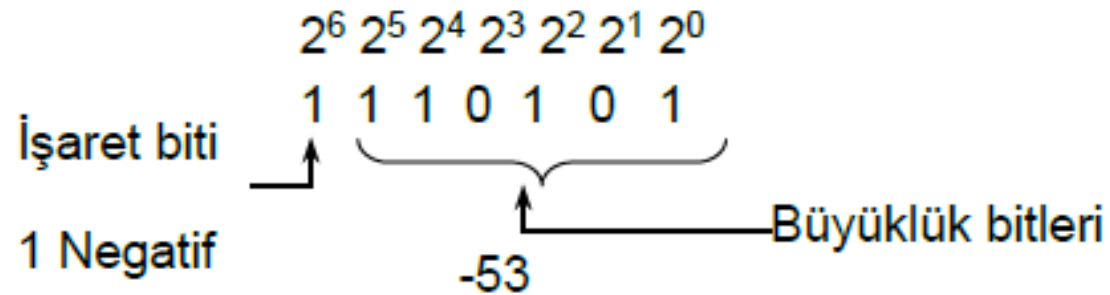
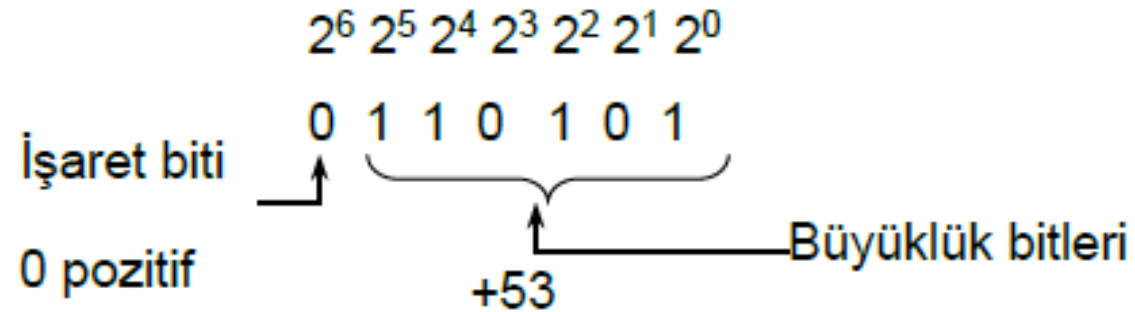
İşaretli bir sayı bu sistemde gösterildiğinde en sol bit (MSB) işaret, geri kalan bitler de büyüklük için kullanılır. Büyüklük, ikilik sistem ile gösterilir.

- İşaretli büyüklük gösteriminde N bitlik bir tam sayının alabileceği minimum ve maksimum değerler sırasıyla $-(2^{N-1} - 1)$ ve $+(2^{N-1} - 1)$ 'dir.
- N = 8 için sağdaki 7 bit 0 ile $2^7 - 1 = 127$ arasındaki sayıları temsil edebildiği için -127 ile +127 arasındaki tam sayıları ifade edebilir.

Örnek:

+53 ve -53 arasındaki tek gösterim farkı işaret bitidir. Çünkü büyüklük bitleri standart ikilik sistemdedir.

İşaret Büyüklük Gösterimi - Örnek




- İşaret-büyüklük sisteminde gösterilen bir negatif sayının büyüklük bitleri, sayının pozitif karşılığı ile aynıdır ama bundan farklı olarak işaret biti 1 dir.

1'e Tümleyen Gösterimi

- Bu sistemde pozitif sayılar işaret-büyüklik sistemindeki gibi gösterilir. Negatif sayılar ise pozitif karşılığın 1-tümleyeni ile gösterilir.

Örnek: - 53, + 53 sayısının 0110101, 1-tümleyeni 1001010 olarak gösterilir.


$$-54 + 1 = -53$$

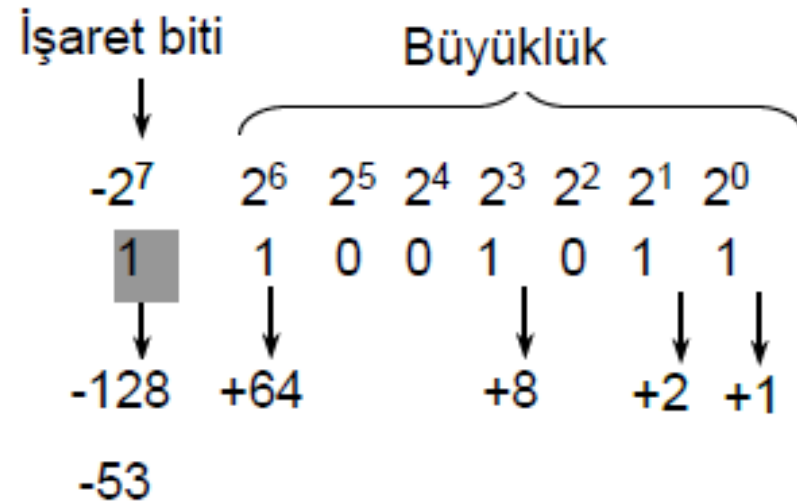
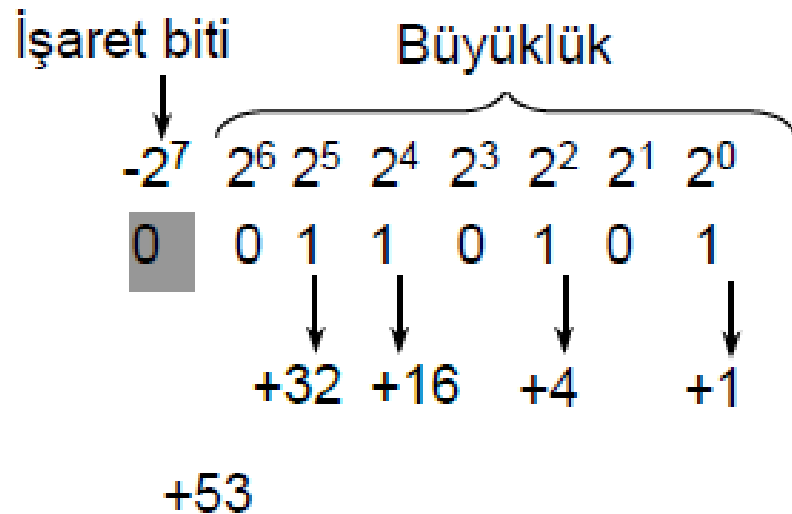
1'e tümleyende sonuc negatifse 1 eklenir

2'ye Tümleyen Gösterimi

- Pozitif sayıların gösterimi bu sistemde de aynıdır.
- Negatif sayılar ise pozitif karşılığın 2-tümleyeni olarak gösterilir.
- Örnek olarak yine -53 sayısını verelim. Bu sistemde +53 0110101 olarak, -53 ise 1001011 olarak gösterilir.

İşaretli Sayıların Onluk Sisteme Dönüştürülmesi

- 2-tümleyen sisteminde pozitif ve negatif sayıların onluk değerleri, 1 bulunan basamakların ağırlıkları toplanarak bulunur. Bilgisayarlarda işaretli sayıların işlenmesinde en yaygın kullanılan sistem 2'ye tümleyendir.



!

- 2-tümleyen sisteminin 1-tümleyen sistemine yeğlenme nedenlerinden birini söyleyebiliriz:

Sayının pozitif yada negatif olmasından bağımsız olarak, yalnızca basamak ağırlıklarının toplanmasıyla onluk değer bulunabilmektedir. İşaret-büyüklik sisteminde ağırlıkların toplanması ve işaret bitinin denetimi olmak üzere iki aşama vardır. 1-tümleyen sisteminde bunlara ek olarak eğer sayı negatifse toplama 1 eklenmesi gerekir.

Çoğu bilgisayar sistemlerinde 2-tümleyen sisteminin yeğlenme ve kullanılma nedeni aritmetik işlemlerin bu ortamda daha kolay yapılmasıdır.

İşaretili Sayılarla Aritmetik İşlemler

- Bilgisayar ve mikroişlemci temelli sistemlerde işaretili sayılar için en yaygın gösterim 2'ye tümleyen sistemi olduğundan, bu bölümdeki örnekler tümüyle bu sistemi kapsayacaktır.

Toplama

İki ikilik sayı toplandığında oluşabilecek dört durum vardır:

- Her iki sayı pozitiftir.
- Pozitif sayı negatif sayıdan büyüktür.
- Negatif sayı pozitif sayıdan büyüktür.
- Her iki sayı negatiftir.

Her iki sayı pozitif

01011101	93
+ 00011011	+ 27
- 01111000	120

Toplam pozitifdir ve ikilik olarak doğrudur

Pozitif sayı negatif sayıdan büyük

Oluşan elde atılır. →

$$\begin{array}{r} 01011101 \\ + 11011000 \\ \hline 1\ 00110101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 93 \\ + -40 \\ \hline 53 \end{array}$$

Sonuçta çıkan elde göz ardı edilir ve böylece sonuç pozitif ve ikilik olarak gerçek olur.

Negatif sayı pozitif sayıdan büyük

$$\begin{array}{r} 00011101 \\ + 11011000 \\ - 11110101 \\ \hline \end{array}$$

isaret biti (-128)

$$\begin{array}{r} 29 \\ + -40 \\ \hline -11 \end{array}$$

Toplam negatiftir.

Her iki sayı da negatif

Oluşan elde atılır.

$$\begin{array}{r} 11011101 \\ + 11011000 \\ \hline 110110101 \end{array}$$

elde biti (128)

$$\begin{array}{r} -35 \\ + -40 \\ \hline -75 \end{array}$$

Çıkan elde göz ardı edildiğinde çıkan sonuç negatiftir

Çıkarma

- Çıkarma, toplamanın özel bir durumudur. Örneğin +9 dan (**eksilen**) +6'yı (**eksilten**) çıkarmakla, -6 ile +9 u toplamak aynı sonucu verir. Çıkarma işlemi, *eksiltenin işareti değiştirilip eksilen ile toplanmasıyla* gerçekleştirilir.
- İşaretli iki sayıyı çıkarmak için eksiltenin 2'ye tümleyeni alınır ve varsa elde biti göz ardı edilir.

Örnek:

$$00001000 - 00000011 = 00001000 + 11111101 = \mathbf{100000101}$$

Çıkarma-Örnekler

$$\begin{array}{r} 00011110 \quad (+30) \\ - 00001111 \quad -(+15) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 00001110 \quad (+14) \\ - 11101111 \quad -(-17) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 11111111 \quad (-1) \\ - 11111000 \quad -(-8) \\ \hline \end{array}$$

Çıkanın 2'ye tümleyeni ve çıkarılan ile toplanması

$\begin{array}{r} 00011110 = +30 \\ 11110001 = -15 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 00001110 = +14 \\ 00010001 = +17 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 11111111 = -1 \\ 00001000 = +8 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} \cancel{1}00001111 = +15 \\ \uparrow \\ \text{Elde önemsiz} \end{array}$	$\begin{array}{r} 00011111 = +31 \end{array}$	$\begin{array}{r} \cancel{1}00000111 = +7 \\ \uparrow \\ \text{Elde önemsiz} \end{array}$

Çarpma

- Çarpma işlemindeki sayılar, çarpılan, çarpan ve çarpım olarak adlandırılırlar. Çoğu bilgisayarda çarpma işlemi de çıkarma gibi toplama işlemi kullanılarak yapılır.
- Çarpılan sayı çarpanın en sağ basamağından (enaz önemli bit - LSB) başlanıp sola doğru her basamağıyla birer birer çarpılır. Bu çarpımların sonucuna kısmi çarpım denir ve her biri sola doğru bir basamak kaydırılarak sırayla toplanır.
- İşaret biti negatifse, sonucun 2'ye tümleyeni alınır. Pozitifse olduğu gibi bırakılır. Elde edilen çarpımın önüne işaret biti eklenir.
- Çarpımın işareti çarpan ve çarpılanın işaretlerine bağlıdır.
 - İşaretler aynı ise çarpım pozitifdir.
 - İşaretler farklı ise çarpım negatiftir.

Çarpma - Örnek

- İşaretli 01010011 (çarpılan) ve 11000101 (çarpan) ikilik sayılarını çarpın.
- Çarpılanın işaret biti 0 çarpanın işaret biti 1 olduğu için sonucun işaret biti 1 (negatif)
- Çarpanı gerçek duruma getirmek için 2-tümleyeni alınır.
- Başlangıçta sonucun işaret biti 1 olarak belirlendiğine göre çarpımın 2-tümleyeni alınır ve işaret biti eklenir. 1001100100001 sayısının 2-tümleyeni 0110011011111 olur. İşaret biti de eklenince işaretli çarpım sonucu 10110011011111 olur.

1010011	Çarpılan
X0111011	Çarpan
1010011	1. bitin çarpımı
+ 1010011	2. bitin çarpımı
11111001	Ara toplam
+ 0000000	3. bitin çarpımı
011111001	Ara toplam
+ 1010011	4. bitin çarpımı
1110010001	Ara toplam
+ 1010011	5. bitin çarpımı
100011000001	Ara toplam
+ 1010011	6. bitin çarpımı
1001100100001	Ara toplam
+ 0000000	7. bitin çarpımı
1001100100001	Sonuç (Çarpım)

Bölme

- Bölme işlemindeki sayılar **bölen**, **bölünen** ve **bölüm** olarak adlandırılırlar. Bölme işlemi bilgisayarlarda çıkarma işlemi kullanılarak yapılır. Çıkarma işlemi toplama ile yapıldığına göre bölme işlemi de toplama ile yapılabilir.
- Bölme işlemi yapılırken şu sıra izlenir;
- Bölen ve bölünen sayıların işaretlerinin aynı olup olmadığına bakılarak sonucun işaretinin ne olacağı belirlenir. Ayrıca bölüm yazacı sıfırlanır.
- 2-tümleyen toplama kullanılarak bölen bölünenden çıkarılıp ilk kısmi kalan bulunur ve bölüme 1 eklenir. Eğer bu kısmi kalan pozitifse 3. aşamaya geçilir. Eğer sonuç sıfır ya da negatifse bölme tamamlanmıştır.
- Bölen kısmi kalandan çıkarılarak bölüme 1 eklenir. Eğer sonuç pozitifse işlem sürdürülür. Sonuç sıfır yada negatifse bölme tamamlanmıştır.

Bölme

- Bölümün işareti bölen ve bölünenin işaretlerine bağlıdır.
 - işaretler aynı ise bölüm pozitiftir.
 - işaretler farklı ise bölüm negatiftir.

Bölme - Örnek

- 01100100 sayısını 00011001 sayısına bölün.
- Her iki sayı da pozitif olduğuna göre bölüm pozitif olacaktır.
- Bölüm=00000100

$$\begin{array}{r} 01100100 \text{ Bölünen} \\ + 11100111 \text{ Bölenin 2-ye tümlenmiş hali} \\ \hline 01001011 \text{ 1. ara kalan} \end{array}$$

Bölüm kaydedicisi 1 artırılır.

$$00000000+1=00000001$$

$$\begin{array}{r} 01001011 \text{ 1. ara kalan} \\ + 11100111 \text{ Bölenin 2-ye tümlenmiş hali} \\ \hline 00110010 \text{ 2. ara kalan} \end{array}$$

Bölüm kaydedicisi 1 artırılır.

$$00000001+1=00000010$$

$$\begin{array}{r} 00110010 \text{ 2. ara kalan} \\ + 11100111 \text{ Bölenin 2-ye tümlenmiş hali} \\ \hline 00011001 \text{ 3. ara kalan} \end{array}$$

Bölüm kaydedicisi 1 artırılır.

$$00000010+1=00000011$$

$$\begin{array}{r} 00011001 \text{ 3. ara kalan} \\ + 11100111 \text{ Bölenin 2-ye tümlenmiş hali} \\ \hline 00000000 \text{ 4. ara kalan} \end{array}$$

Bölüm kaydedicisi 1 artırılır.

$$00000011+1=0000100$$