1. BÖLÜM

HİFSİ ALTINOK

MATRİSLER ve DETERMİNANTLAR

1. MATRİSLER

TANIM 1. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $m \times n$ tane reel veya kompleks sayıdan meydana gelen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

tablosuna bir $m \times n$ matris denir. A matrisi kısaca $A = [a_{ij}]$, $(i = 1, 2, \ldots, m\ ;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ şeklinde gösterilebilir. a_{ij} 'lere matrisin elemanları, $m \times n$ ye de matrisin mertebesi veya tipi denir.

A matrisinde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ gibi elemanların bulunduğu yatay sıralara matrisin satırları, $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ gibi elemanların bulunduğu düşey sıralara da matrisin sütunları denir. Burada i indisi matrisin satır numarasını, j indisi de sütun numarasını gösterir.

Aşağıda bazı matrisler gösterilmiştir:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

birer matristir. Bunlardan A matrisi 2×3, B matrisi 2×2 ve C matrisi de 3×2 tipindedir.

C matrisindeki 2 elemanının yeri, birinci satır, ikinci sütundur. Yani $c_{12} = 2$, $c_{31} = -5$ gibi...

Bir matris yalnız bir satır veya sütundan meydana gelmiş olabilir. Bu durumda matris, sırası ile, satır matrisi veya sütun matrisi adını alır.

Eğer bir matrisin bütün elemanları sıfır ise bu matrise sıfır matrisi denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrislerinden A bir satır matrisi, B bir sütun matrisi, C ise bir sıfır matrisidir.

TANIM 2. (İki Matrisin Eşitliği)

$A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrislerinin her ikisi de $m \times n$ tipinde ve karşılıklı elemanları birbirine eşitse A ve B matrisleri birbirine eşittir denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x-1 & z \\ y+1 & t \end{bmatrix}$$

matrislerinin eşit olması için x, y, z ve t ne olur

Çözüm:
$$x-1 = 0 \qquad z = 2$$
$$y+1 = 2 \qquad t = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2, \quad t = 1$$

bulunur.

MATRİSLER ARASINDA YAPILAN İŞLEMLER

1.1. Matrislerin Toplamı ve Farkı

TANIM 3. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ aynı tipten iki matris olsun. Bu durumda

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

şeklinde tanımlanan $C = [c_{ij}]$ matrisine A ve B nin toplamı denir ve $C = A + B$ şeklinde gösterilir. İki matrisin farkı da toplamın bir özel hali olup

$$c'_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

şeklinde tanımlanan yeni bir C' matrisidir.

ÖRNEK :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrislerinin toplamını bulunuz.

Çözüm :

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2. Skaler ile bir Matrisin Çarpımı :

TANIM 4. Bir k skaleri ile A matrisinin çarpımı, A nın her elemanının k ile çarpımından elde edilen yeni bir C matrisidir. Yani $A = [a_{ij}]$ olmak üzere

$$k.A = [k.a_{ij}]$$

dir.

ÖRNEK : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ matrisleri verildiğine göre $C = 2A + 3B$ matrisini bulunuz.

Çözüm

$$C = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & -24 \\ 27 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -18 \\ 27 & 14 \end{bmatrix}$$

1.3. Matris toplamı ve Skaler ile Çarpımın Özellikleri

A, B ve C aynı tipten matrisler ve $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $A + B = B + A$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) $A + O = A$ (O: A ile aynı mertebeden olan sıfır matrisidir)
4) $A + (-A) = O$
5) $k_1 (A + B) = k_1 A + k_1 B$
6) $(k_1 + k_2) A = k_1 A + k_2 A$
7) $(k_1 . k_2) A = k_1 (k_2 A)$

1.4. Matris Çarpımı

Matris çarpımı her zaman tanımlı değildir. İki matrisin çarpılabilir olması için birincinin sütun sayısı, ikincinin satır sayısına eşit olmalıdır.

TANIM 5. A ve B çarpılabilir iki matris olsun. A matrisi $m \times p$ tipinde, B matrisi ise $p \times n$ tipinde olmak üzere $A=[a_{ik}]$, $B=[b_{kj}]$ için,

$$A.B=[a_{ik}].[b_{kj}] \quad , \quad A.B=\left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}\right]$$

$$(i=1,2,\ldots,m),\ (j=1,2,\ldots,n)$$

şeklinde tanımlı $m\times n$ tipinde yeni bir C matrisidir. Eğer $C=[c_{ij}]$ ile gösterilirse, C nin bileşenleri

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}$$

ile tanımlanır.

<u>İşlemin Yapılışı:</u> A matrisinin 1. satır elemanları B matrisinin 1. sütun elemanları ile karşılıklı olarak çarpılarak toplanır. Böylece A.B çarpım matrisinin a_{11} (birinci) elemanı bulunur. Bu işlem A matrisinin bütün satırları B matrisinin bütün sütunları ile çarpılıncaya kadar devam ettirilip A.B matrisi elde edilir.

<u>ÖRNEK</u>: $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. A.B matrisini bulunuz.

<u>Çözüm</u>: A matrisi 3×3, B matrisi 3×2 tipinde olduğu için çarpım yapılabilir. A.B çarpım matrisi ise 3×2 tipinde olur. Yani

$$\underset{3\times\boxed{3}}{A} \overset{\text{aynı}}{\quad} \underset{\boxed{3}\times 2}{B} = \underset{3\times 2}{A.B}$$

şeklindedir.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2.3 + (-3).0 + 1.(-1) & 2(-2) + (-3).1 + 1.2 \\ 4.3 + 5.0 + (-2)(-1) & 4.(-2) + 5.1 + (-2).2 \\ 3.3 + (-1).0 + 6.(-1) & 3.(-2) + (-1).1 + 6.2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 14 & -7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

UYARI: Yukarıda verilen örnekte B matrisinin sütun sayısı A matrisinin satır sayısına eşit olmadığından BA çarpımı mümkün değildir. Çarpmada değişme özelliği yoktur.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ise $A \cdot B = ?$

Çözüm: A, 3×3 tipinde B, 3×1 tipinde olduğundan A ile B çarpılabilir ve yeni matris 3×1 tipinde olur.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 3.1 + 0.2 + 1.3 \\ 2.1 + (-1)2 + 0.3 \\ 4.1 + 2.2 + 5.3 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 23 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

ÖRNEK : $A=\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A \cdot B = C$ eşitliğini sağlayan B matrisini bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -8a+4c & -8b+4d \\ 0.a+3c & 0b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \ , \ b=2 \\ c=1 \ , \ d=3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$A.C = B+C$ eşitliğini sağlayan C matrisini bulunuz.

Çözüm : A matrisi 2×2 , B matrisi 2×1 tipinden old. C matrisi de 2×1 tipinden olup

$C=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ diyelim.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+b \\ a+3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+a \\ 2+b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a+b=3+a \\ a+3b=2+b \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a=4 \ , \quad b=-1 \quad \Rightarrow C=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

1.5. Karesel Matris : TANIM : Satır sayısı, sütun sayısına eşit olan bir matrise karesel matris denir. $n \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ karesel matrisinde $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarına matrisin esas köşegen elemanları denir.

$n \times n$ tipindeki bir karesel matris yerine kısaca n. mertebeden sözü kullanılır.

TANIM: Esas köşegen dışındaki bütün elemanları sıfır olan bir karesel matrise Diyagonal Matris denir. Özel olarak esas köşegen üzerindeki bütün elemanları birbirine eşit olan bir diyagonal matrise skaler matris denir.

Eğer bir skaler matriste $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ ~~ve bu durumda~~ matrise Birim matris denir.

n. mertebeden birim matris genellikle I_n ile gösterilir. Matris çarpımında birim matris, birim eleman rolündedir. Yani bir matrisle çarpıldığında yine o matrisi verir:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

dır.

ÖRNEK : $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ karesel matrislerdir.

ÖRNEK : $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

matrisleri verilsin. A diyagonal, B skaler, C birim matristir.