Optimizasyon Teknikleri

1. Hafta

Prof. Dr. Bilal ALATAŞ

Giriş ve Temel Kavramlar

Tarihsel Süreç, Optimizasyon Problem ve Model Formülasyonu

Hedefler

- Optimizasyon yöntemlerinin gerekliliğini ve temelini kavrayabilme.
- Mühendislikte kullanılan optimizasyon yöntemlerinin çeşitli uygulamalarının geniş bir resmini edinme.
- Bir optimizasyon probleminin temel bileşenlerini inceleme.
- Tasarım problemlerinin matematiksel programlama problemleri olarak formüle edilmesi.

İÇERİK

- Giriş
- Kısa tarihçe
- Optimizasyon tekniklerinin bileşenleri
- Optimizasyon tekniklerinin grupları
- Bazı gerçek hayat problemleri ve optimizasyon yaklaşımıyla çözümleri
- Model kurma örnekleri
- Optimizasyon problemlerinin sınıflandırılması

Giriş

- Optimizasyon: Verilen koşullar altında en iyi sonucu elde etme eylemidir.
- Mühendislik sistemlerinin tasarımı, yapımı ve bakımı hem yönetimsel hem de teknolojik seviyede karar vermeyi içerir.
- Bu tür kararların hedefleri:
  - Gereken çabayı en aza indirgemek (minimize etmek) veya
  - Arzu edilen yararı maksimize etmek için yöntemlerinin gerekliliğini ve temelini kavrayabilme.
- İstenen kar veya gerekli çaba, karar değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilir.

- Optimizasyon sürecinde bu fonksiyonun minimum veya maksimum değerini oluşturan şartlar bulunur.

Giriş

- Optimizasyon bir şeyin daha iyisini gerçekleştirme sürecidir. Bir mühendis veya bilim adamı yeni bir fikir ortaya koyar. Optimizasyon bu fikrin geliştirilmesine yardımcı olur.
- En basit anlamı ile optimizasyon eldeki kısıtlı kaynakları en optimum biçimde kullanmak olarak tanımlanabilir.
- Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse optimizasyon

  kısaca bir fonksiyonun minimize veya maksimize edilmesi olarak tanımlanabilir.
- Diğer bir değişle optimizasyon "en iyi amaç kriterinin en iyi değerini veren kısıtlardaki değişkenlerin değerini bulmaktır".

Giriş

- Matematiksel modelleme tekniği öncelikle doğrusal ve az sayıda değişkenlerin kullanılmasıyla başlamıştır.
- Bir süre sonra doğrusallık varsayımını her problem için geçerli olmadığı anlaşılmıştır. Bu durumda doğrusal olmayan modellemeye gidilmiştir.
- Ancak doğrusal olmayan modellerin kendine özgü çözümleri uygulamada birçok sorunu beraberinde getirmiştir.
- Zamanla geliştirilen bazı yöntemlerle doğrusal olmayan modellerin hızla çözümlenmesi sağlanmış ve bu optimizasyon teorisini geliştirmiştir.

Giriş

- Değişen teknolojilerin, sınırlı kaynakların, artan rekabetin, karmaşık hale gelen sistemlerin doğurduğu problemlerin klasik yöntemlerle (matematiksel veya matematiksel olmayan, analitik veya sayısal) çözümünün güçleşmesi optimizasyon kavramını güncelleştiren en önemli sebeptir.
- Bu yönüyle optimizasyonun kullanılmadığı bir bilim dalı hemen hemen yok gibidir.

Giriş

- Çünkü Optimizasyon "En İyileme" anlamına gelir ve her zaman için hedeflenen bir sonuçtur.
- Bir işin yapılmış olması demek, o işin en iyi şekilde yapıldığı anlamına gelmez. Optimizasyon teknikleri, yapılmış veya yapılmakta olan işin en iyi çözümünü ortaya koymak için kullanılır.
- Bu teknikler kullanılarak ortaya konulmuş olan çözüm, Optimum Çözüm olarak adlandırılır. Hedef her zaman için bu optimum çözümü yakalayabilmektir. Optimizasyon, anlamından da anlaşılacağı gibi, her alanda kullanılmaktadır. Yapılacak olan bir inşaattan tutun bir web sitesine kadar her alanda bu tekniklere ihtiyaç duyulur.
  - **En az maliyetle malzeme kesme stratejisi**
  - **Minimum ağırlık ve maksimum mukavemet için uçak tasarımı**
  - **Uzay araçlarının optimum yörüngeleri**
  - **Maliyeti minimuma indirmek için planlı bakım gibi milyonlarca örnek optimizasyonun mühendisliğe uygulanışının göstergesidir**

Optimum masa tasarım problemi

Amaç: Aşağıdaki özelliklere sahip bir masa tasarlamak

•Rijit olmalı

•Hafif olmalı

•Maliyeti düşük olmalı

•Yeteri derecede dayanaklı olmalı

• veya sizin ekleyebileceğiniz diğer kriterler....

Rijit cisim; mühendislik terimi olarak hiçbir etkiye maruz kalmayan, sürtünmesiz ortamda, kuvvet ya da moment etkisi altında şekil değiştirmeyen, formunu koruyan cisimlere denir.

▪Yukarıda verilen kriterler birbirleri ile çelişkilidir

▪Bu nedenle bu kriterler arasında bir orta yolu bulmalıyız veya bunu bulacak bir ifade olmalı.

Hedefe ulaşabilmek için matematiksel bir tanımlama kullanabilir miyiz?

Tarihsel Gelişim

- Gerçek hayatta karşılaşılan birçok problem için geliştirilen karar modellerinin kısıtları ve amaç fonksiyonlarında her zaman doğrusal bir ilişki kurulamadığından 1950'li yıllardan sonra geliştirilmeye başlamıştır.
- Temelleri 18. ve 19. yüzyıllara dayanan yeni analitik ve sayısal yöntemler 1960'lı yıllardan sonra sayısal bilgisayarlarında desteği ile hızla çoğalmıştır.

Tarihsel Gelişim

- Özellikle kimyasal işlemlerin süreklilik arz etmesi, planlamacıların, tasarımcıların, mühendislerin, jeologların, ekonomistlerin, iktisatçıların, işletmecilerin vb. kendi alanlarındaki problemleri çözmek için yaptıkları çalışmalar optimizasyon ve buna bağlı teknikleri hızla ortaya çıkarmıştır.
- Benzer şekilde bu tekniklerin amaçlandığı alanlara, sistemin özelliklerine, kullanılan matematiksel yöntemlere ve kıstasların tasnifleri aşamalar geçirmiştir.

Tarihsel Gelişim

- Klasik optimizasyon teorisi Cauchy, Lagrange ve Newton tarafından geliştirilmiştir.
- Newton ve Leibnitz' in analiz çalışmaları optimizasyonun diferansiyel hesap metodlarının geliştirilmesine katkıda bulunmuştur.
- Kısıtlı problemler için optimizasyon metodunu adıyla anılan Lagrange geliştirmiştir. Kısıtsız optimizasyon problemlerini çözmek için Steepest Descent (en dik iniş,eğim) metodunun ilk uygulaması da Cauchy tarafından yapılmıştır.

Tarihsel Gelişim

- Optimizasyon konusundaki bu çalışmalar 20. yüzyılın ortalarına kadar çok yavaş ilerlemiştir. 1950’ lerden sonra sayısal bilgisayarların icadı optimizasyonda çok büyük çalışmaları beraberinde getirerek birçok yeni teori ve metodun ortaya çıkmasını sağlamıştır.
- Fakat 1960’ lı yıllarda kısıtsız optimizasyon konusundaki sayısal metodlar sadece İngiltere’ de geliştirilmiştir.
- Simpleks metodunu 1947’ de Dantzing, Dinamik Programlama Tekniğini 1954’ de Bellmann geliştirmiştir.

Tarihsel Gelişim

- Doğrusal Olmayan Programlama konusundaki ilk önemli çalışmalar 1951 yılında Karush – Kuhn ve Tucker tarafından optimal çözüm için gerek ve yeter şartlar teorisi başlığı adı altında sunulmuştur.
- 1960' lı yıllarda Zoutendijk ve Rosen' de Doğrusal Olmayan Programlama sahasında önemli çalışmalar yapmışlardır.

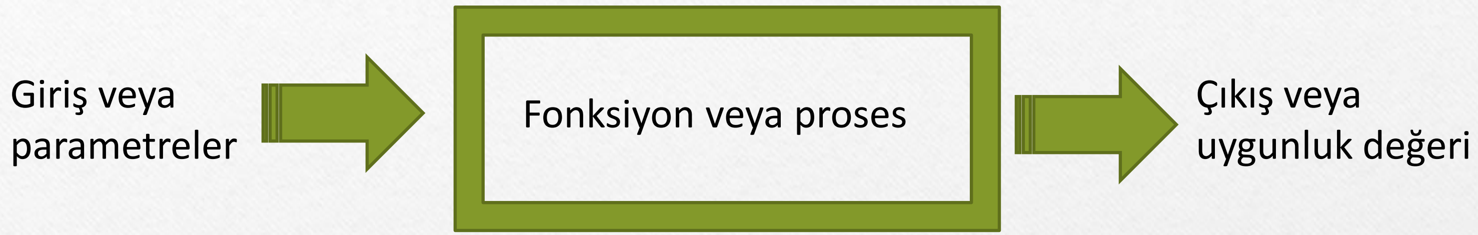
Tarihsel Gelişim

- Doğrusal Olmayan Programlama alanındaki en büyük gelişme kısıtsız optimizasyonun bilinen tekniklerini kullanarak çok zor problemlerin çözümünü kolaylaştıran ciddi çalışmaların Carroll, Fiacco ve Mc Cormick tarafından ortaya konmasıdır.
- Geometrik Programlama ise 1960' lı yıllarda Peterson, Zener ve Duffin tarafından geliştirilmiştir.
- Düzlemsel Kesme Algoritması ise 1969'da Zangwill tarafından ortaya konmuştur.
- İndirgenmiş Gradient Metod ise Wolfe tarafından 1963' de geliştirilmiştir

Optimizasyon Teknikleri Bileşenleri

- Bir optimizasyon probleminin temel özelliği üç kategoriye ayrılmasıdır. Bunlar :
  - En az bir amaç fonksiyonunun optimize edilmesi
  - Eşitlik kısıtları
  - Eşitsizlik kısıtlarıdır.

Optimizasyon Teknikleri Bileşenleri



- Bir deney düzeneğinde, maksimum veya minimum sonuç/çıkış elde edebilmek için, sistemin giriş karakteristiklerinin ayarlanması işlemi de bir optimizasyon sürecidir.
- Bir fonksiyonun girişinde, çeşitli parametreler çıkışında, uygunluk veya maliyet değerleri vardır.
- Fonksiyon veya süreç; maliyet (cost) fonksiyonu, amaç (objective) fonksiyonu veya uygunluk (fitness) fonksiyonu olarak tanımlanır.
- Eğer süreç deneysel ise, giriş parametreleri fiziksel büyüklüklerden oluşur.

Optimizasyon Teknikleri Bileşenleri

- Genel bir optimizasyon probleminin çözümü altı adımda gerçekleştirilir.

i. İşlem analiz edilerek işlem değişkenlerinin bütün bir listesi çıkarılır.
ii. Optimizasyon için amaç fonksiyonunu tanımlayacak kriterler belirlenir.
iii. Matematiksel ifadelerde kullanılabilir bir işlem gerçekleştirilir.
iv. Problem çok büyükse,
   a) Kontrol edilebilir ve modeli basitleştirilir.
   b) Amaç fonksiyonu tekniği matematiksel ifadeye uygulanır.
v. Uygun optimizasyon tekniği matematiksel ifadeye uygulanır.
vi. Cevaplar kontrol edilir.

- Bütün optimizasyon problemlerinin çözümü için etkili tek bir metot olmadığından optimizasyon metotları optimizasyon problemlerinin farklı türleri için geliştirilmiştir.

Optimizasyonun Temel Tanımı

- Optimize edilecek büyüklük (maksimum veya minimum) ***hedef fonksiyon olarak*** adlandırılır.
- Optimum değeri bulmak için, aldıkları değerleri değiştirilen parametreler ***tasarım değişkenleri*** olarak adlandırılır.
- Parametrelerin değer alması üzerine konulan sınırlamalara ***kısıtlayıcılar*** olarak adlandırılır.

Optimizasyon Teknikleri Bileşenleri

Genel bir optimizasyon probleminin matematiksel tanımı

minimize $f(\mathbf{x})$ $\qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

subject to

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad j=1,\ldots,m$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \qquad k=1,\ldots,l$$

Tasarım Değişkenleri:	x
Hedef (Amaç) fonksiyonu:	$f(\mathbf{x})$
Eşitsizlik kısıtlayıcıları:	$g_j(\mathbf{x})$
Eşitlik kısıtlayıcıları:	$h_k(\mathbf{x})$

- Bu genel tanım altında amaç fonksiyonun en iyi tanımını veren
- $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$
- ***n***-boyutlu çözüm vektörüne model vektörü de denir.
- ***n***’ nin sıfır olması problemin kısıtsız olması, sıfırdan farklı olması da problemin kısıtlı olması anlamına gelir.

Hedef Fonksiyonu

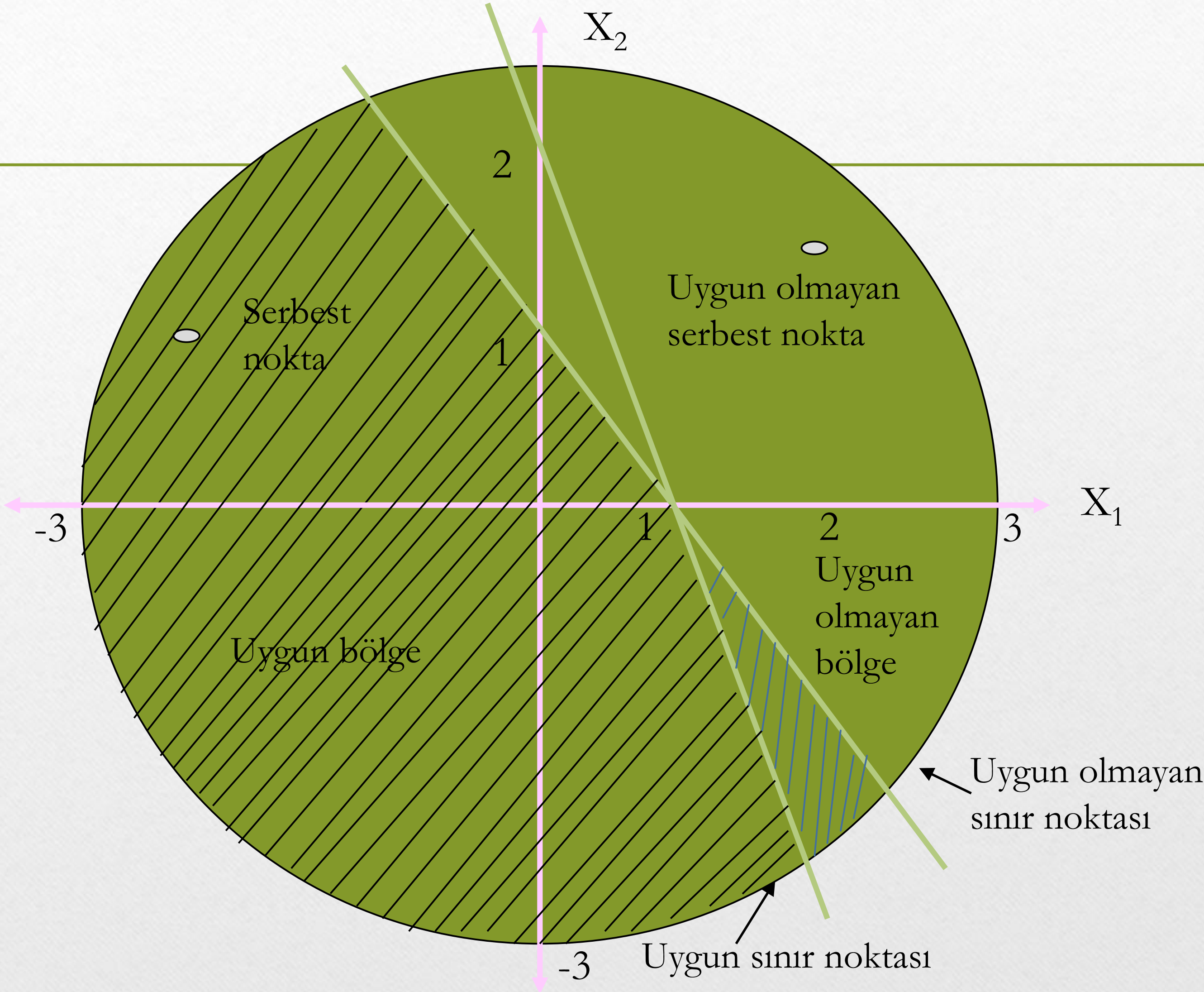
- Bir sistemin birden fazla mümkün çözümleri olabilir. Bunlardan bazıları diğerlerinden daha iyi olabilir. Bu nedenle, bu alternatif tasarımları karşılaştıracak bir kriter olmalıdır.
- Bu tür kriterlere Hedef fonksiyonu denir, ve isteklere bağlı olarak ya minimize edilir veya maksimum değeri aranır.
  - Maliyet (minimize edilecek)
  - Ağırlık (minimize edilecek)
  - Kar (maksimize edilecek)
  - Enerji kullanımı (minimize edilecek).....

Tasarım Değişkenleri

- Tasarım değişkenleri, sistemi tanımlayan değişken setidir. Masanın yüksekliği veya genişliği gibi.
- Tasarım değişkenlerine herhangi bir değer atanabilmelidir.
- Tasarım değişkenleri birbirlerinden bağımsız olmalıdırlar.
- Probleme ait uygun ve gerekli tasarım değişkenlerinin seçimi oldukça önemlidir. Aksi halde problem tanımı eksik veya hatalı olabilir.

Kısıtlayıcı Fonksiyonu

- Tasarımı sınırlayan, tasarım değişkenlerinin alacağı değerlere limit koyan fonksiyonlardır.
- **Bazı Örnekler:**
  - *Yapı, herhangi bir hasara uğramadan üzerine gelen yükleri taşıyabilmelidir.*



2 boyutlu tasarım uzayında kısıt yüzeyleri

Optimizasyon problemini çözmek için takip edilecek adımlar

STEP 1: temel konfigürasyonun oluşturulması

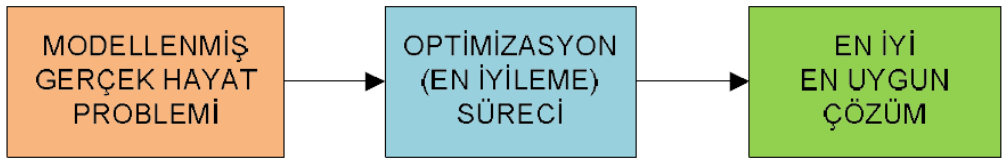
STEP 2: tasarım değişkenlerinin tanımlanması

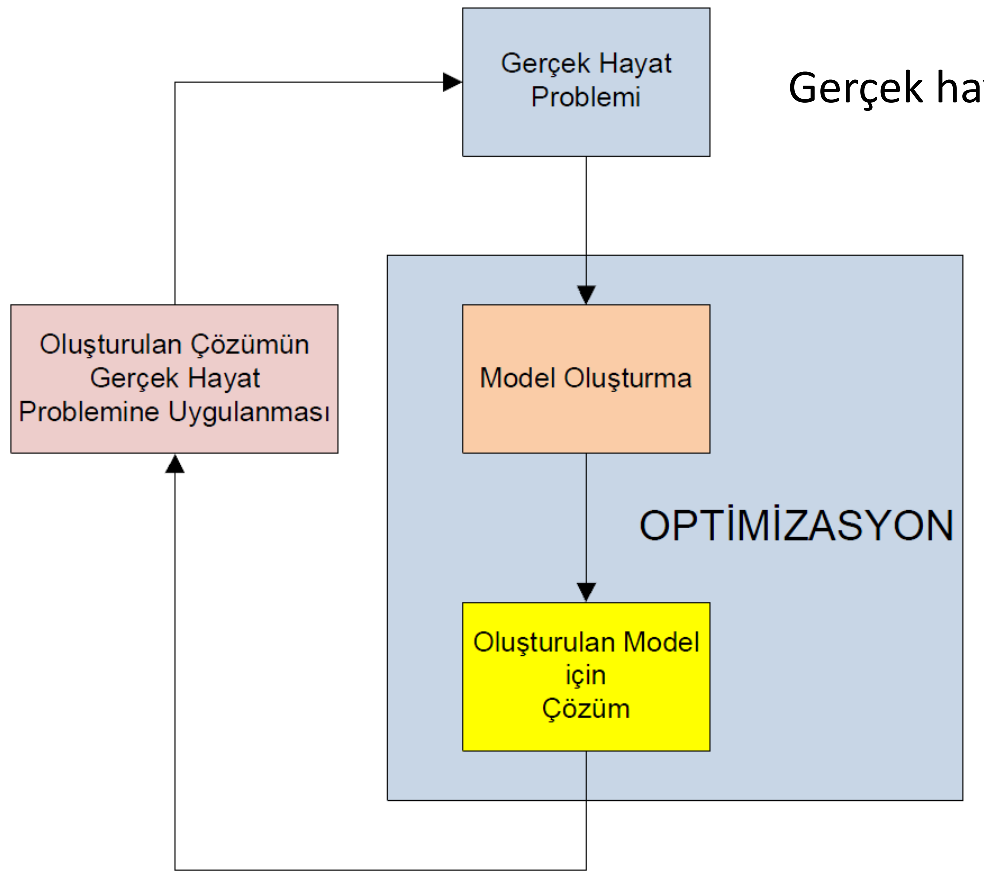
STEP 3: hedef fonksiyonun kurulması

STEP 4: kısıtlayıcı fonksiyonun tanımlanması

STEP 5: uygun optimizasyon metodunun seçilmesi ve uygulanması

Optimizasyon sürecinin temel aşamaları



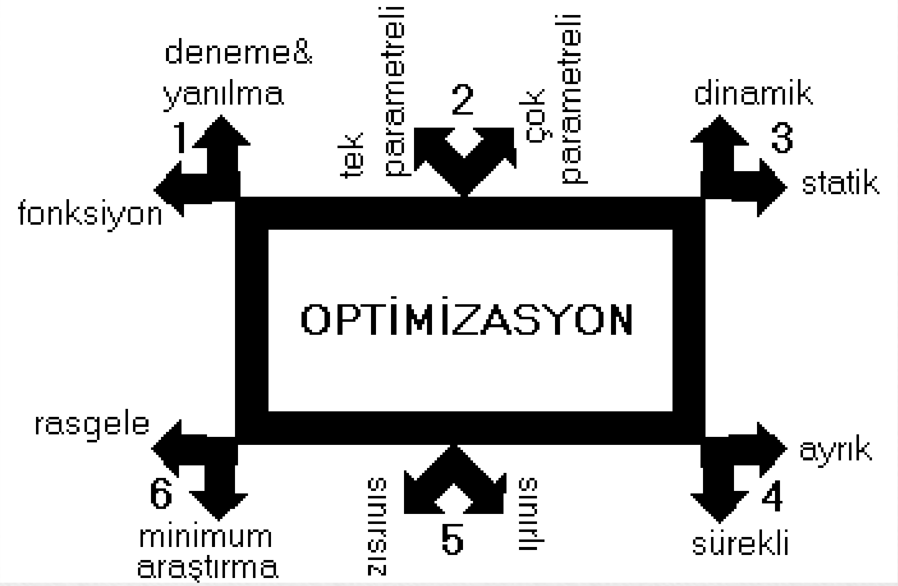


Gerçek hayat problemlerine sistematik çözüm yaklaşımı

Optimizasyon Nasıl İşe Yarar?

- Gerçek hayat problemlerinin optimizasyon yardımıyla çözümünde öncellikle bu problemleri ifade edebilen modeller oluşturulur. Böyle bir modelde ise bir amaç fonksiyon ve kısıtlar vardır.
- Bu amaç fonksiyonunun alabileceği değerler (kısıtlar dahilinde) uygun çözümü verirler. Uygun çözümde en iyiyi sağlayan değer optimum olarak bilinir. Bu nedenle uygulamalı bilimler, mühendislik, ekonomi, tıp ve istatistik problemleri optimizasyon problemleri olarak değerlendirilebilir.
- Özellikle matematiksel modeller problemleri anlayabilmek ve analiz edebilmek açısından oluşturulurlar. Optimizasyon da modelin karakteristiklerinin gerçeklerle ilişkili olduğu savunularak en iyi veya en uygun değeri belirlemek için kullanılır.
- Bunlara ilave olarak birçok karar problemi optimizasyon problemi olarak çözülerek daha iyi daha doğru sonuçlara ulaştırılabilirler.

Optimizasyon Algoritmalarının Grupları



- Altı grupta ele alınabilir. Ancak kesin hatlarıyla altı gruba ayrıldığı söylenemez. Örneğin; dinamik optimizasyon problemi sınırlı veya sınırsız olabilir. Bazı parametreler ayrık veya sürekli olarak tanımlanabilir.

Deneme- Yanılma Optimizasyonu

- İşlem hakkında çok fazla bilgi olmaksızın çıkışı etkileyen parametrelerin ayarlanmasıdır.
- Örneğin TV'de en iyi görüntü ve ses, deneme yanılma yoluyla ayarlanır. TV'deki görüntü ve sesin, antenin hangi eğiminde iyileşeceği anten uzmanları tarafından sadece tahmin edilir.
- Deneysel çalışma yapanlar ve çoğu büyük kâşifler bu yolu kullanmışlardır.
- Bunun aksine, matematiksel fonksiyonun optimizasyonunda, matematiksel formül ile süreç tanımlanır. Fonksiyonun optimum çözümünü bulmada değişik metotlar uygulanır. Bu yaklaşım teorisyenler tarafından tercih edilir.

Tek ve Çok Parametreli Optimizasyon

- Sadece bir parametre varsa, optimizasyon bir boyutludur.
- Birden fazla parametreye sahip fonksiyon için çok boyutlu optimizasyon gereklidir.
- Boyut sayısı artarsa, optimizasyonun zorluk derecesi de artar.
- Çok boyutlu optimizasyon metodunda, bir boyutlu optimizasyon metodu yaklaşımı kullanılır.

Statik ve Dinamik Optimizasyon

- Statik optimizasyon zamandan bağımsızdır, dinamik optimizasyon ise zamana bağlı olarak çıkış üretir.
- Örneğin; bir şehrin kenar mahallesinde oturan bir insanın merkezdeki işine gitmesi için birçok yol olduğunu kabul edilirse en iyi yolun hangisi olduğu sorgulanabilir. Mesafe açısından bakılacak olursa problem statiktir. Çözüm, haritayı ve arabanın kilometre/saat' kullanılarak bulunabilir.
- Pratikte değişkenlerin çokluğu nedeniyle problem, pek de basit değildir. En kısa yol, en hızlı yol değildir. En hızlı yolu bulmak dinamik bir problemdir ve zamana, havanın durumuna, kazalara vb. bağlıdır.

Sürekli ve Ayrık Parametreli Optimizasyon

- Sürekli parametreler sonsuz değer alırken ayrık parametreler sınırlı değerler alır.
- Örneğin yapılacak işler bir liste halinde verilmiştir. Bu işlerin yapılması bir birinden bağımsız olduğundan ayrık parametreli düşünülebilir.
- Ayrık parametreli optimizasyon kombinasyonel bir optimizasyon olarak da adlandırılabilir.
- Bir çizgide ***f(x)***'in minimum değerini bulmaya çalışmak, sürekli parametreli optimizasyon olarak tanımlanır.

Sınırlı ve Sınırsız Optimizasyon

- Sınırlı optimizasyon, parametreleri bir tanım aralığında değerlendirir. Sınırsız optimizasyonda ise parametreler her hangi bir değerde olabilir.
- Değişkenlerin sınırları kaldırılarak sınırlı parametreler sınırsız parametrelere çevrilirler. Çoğu nümerik optimizasyon rutinleri sınırsız parametrelerle çalışırlar.
- Örnek olarak ***f(x)*** fonksiyonunu ele alalım ve sınırlar ***-1≤ x ≤ 1*** arasında olsun. Bu fonksiyon ***x=sin(u)*** tanımı kullanılarak sınırsız optimizasyona dönüştürülür. Burada ***u***'nun değeri ne olursa olsun ***x***; ***(-1,1)*** aralığında değişecektir.
- Sınırlı optimizasyon, lineer denklemler ve lineer sınırlarla parametreleri optimize ettiği zaman, program lineer program olarak adlandırılır. Sınırlar ve maliyet denklemleri nonlineer ise, program da nonlineer programlama problemi olur.

Rasgele ve Minimum Araştırma Algoritmaları

- Bazı algoritmalar parametrelerin başlangıç değerlerini ayarlayarak uygunluk değerlerini minimize etmeye çalışır.
- Bu araştırma tekniği, hızlı olmakla beraber lokal minimumlara ulaşabilir. Bunlar nümerik metotlara dayanan klasik optimizasyon algoritmalarıdır.
- Bir parametreden hareketle diğer parametreyi tespit etmek, bazı deterministik adımlarla gerçekleştirilmektedir.
- Diğer taraftan rasgele metotlar; parametrelerin optimum çözümünü bulmada ihtimal hesaplarını kullanırlar. Bu metotlar yavaş olmakla birlikte global minimumu bulmada daha başarılıdırlar.

Optimizasyon Algoritmalarının Grupları

- Amaç fonksiyonuna göre
  - Tek amaçlı
  - Çok amaçlı
- Fonksiyonların derecesine göre
  - Lineer
  - Nonlineer

Optimizasyon Türleri

KARAKTERİSTİĞİ	ÖZELLİĞİ	SINIFLANDIRMA
Tasarım değişkenlerin sayısı	Bir	*Tek değişkenli*
	Birden fazla	*Çok değişkenli*
Tasarım değişkenlerinin türü	Sürekli	*Sürekli*
	Tamsayı	*Tamsayı veya kesikli*
	Hem sürekli hem de tamsayı	*Karışık tamsayı*
Hedef ve kısıtlayıcı fonksiyonlar	Doğrusal fonksiyon	*Doğrusal*
	Kuadratik fonksiyon	*Kuadratik*
	Doğrusal olmayan fonksiyon	*Doğrusal olmayan*
Problem formülasyonu	Kısıtlama var	*Kısıtlamalı*
	Herhangi bir kısıtlama yok	*Kısıtlamasız*

Optimizasyon Türleri

- Bu gruplandırmanın sonucunda optimizasyon metotları; Deterministik metotlar, İstatistiksel metotlar olmak üzere iki ana gruba ayırabilir.
- Deterministik optimizasyon metotları, lokal maksimum veya minimuma yakınsayan algoritmalardır. Türevsel hesaplamalar veya türevsel yaklaşımlar deterministik metotlara örnek verilebilir.
- Rasgele araştırma algoritmaları gibi istatistiksel metotlar ise global minimum veya maksimumu bulmada bazı stratejileri ve rasgele sayıları kullanırlar. Son yıllarda PC'lerin hızlarındaki artış bu algoritmaların uygulama sahasında sıkça görülmesine neden olmuştur.

Optimizasyon problem türleri için örnekler:

Kısıtlamasız çok değişkenli optimizasyon

$$\min\ f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_2$$

Doğrusal programlama

$$\begin{aligned}
&\min\ \ f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 6x_2 \\
&s.t. \\
&\quad -x_1 + x_2 \le 2 \\
&\quad 2x_1 + x_2 \le 2 \\
&\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Doğrusal olmayan çok değişkenli kısıtlamalı optimizasyon

$$\begin{aligned}
&\min\ f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 320x_1x_2 \\
&s.t. \\
&\quad \frac{1}{60x_2}x_1 - 1 \le 0 \\
&\quad 1 - \frac{1}{3600}x_1(x_1 - x_2) \le 0 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Optimizasyon Metotlarının Sınıflandırılması

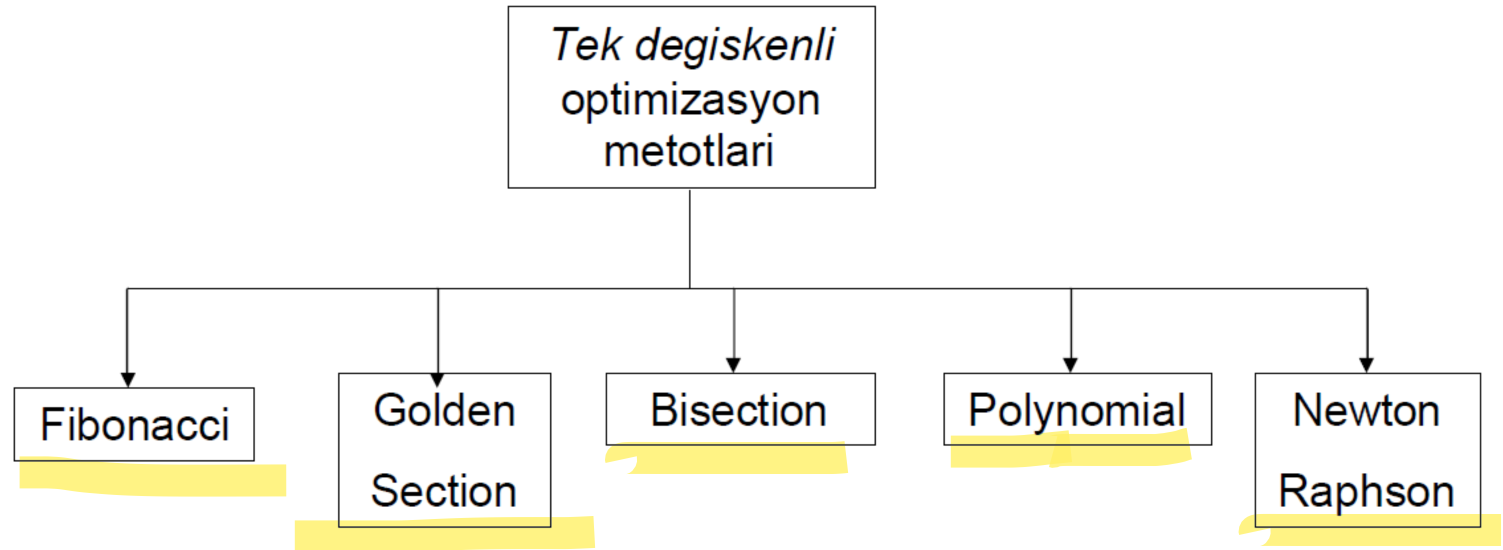
Optimizasyon Metotlarının Sınıflandırılması

- Çözümde kullandıkları bilgiye göre:
- **0 order:** fonksiyon değeri
  - Golden section, bisection, polynomial, simplex, random metot, genetik algoritma
- **1st order:** fonksiyon 1. türevi (gradyenti)
  - Steepest descent, conjugate gradient, gradient projection, feasible directions
- **2 nd order:** fonksiyon 2. türevi
  - Newton metotları

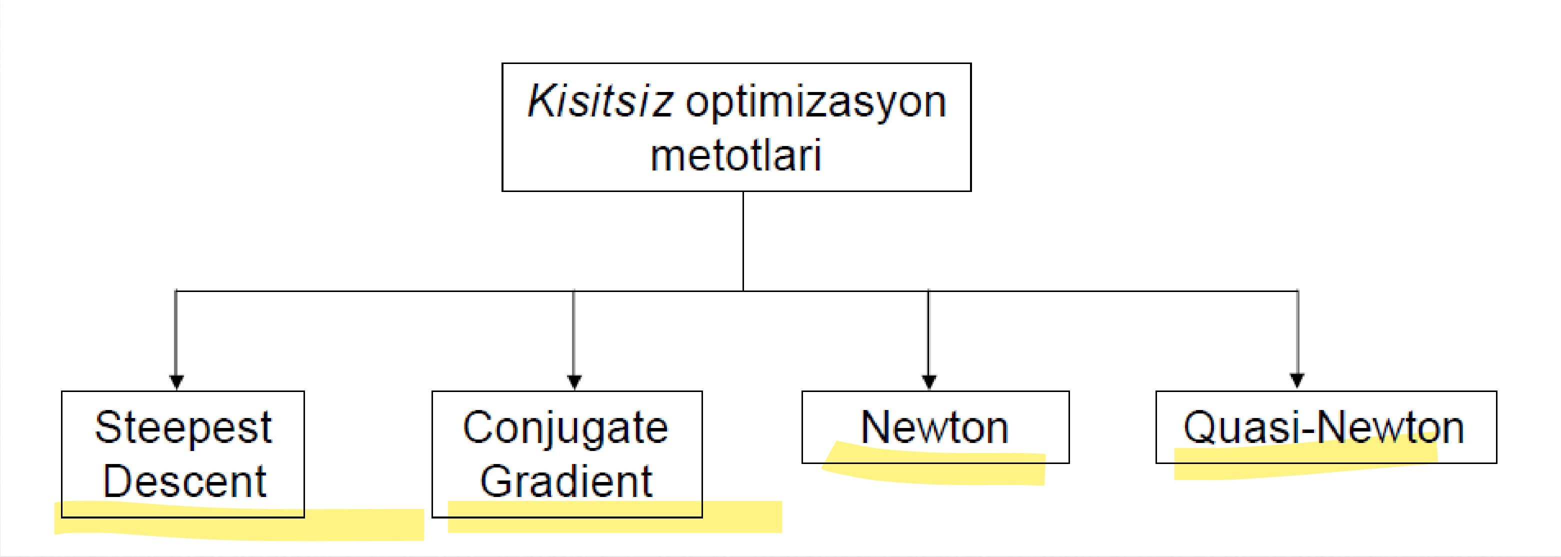
Optimizasyon Metotlarının Sınıflandırılması

- Çözüm mantığına göre:
- **Direk**
  - Steepest descent, conjugate gradient, gradient projection, feasible directions, Newton, penalty, simplex
- **Heuristik (sezgisel)**
  - Random metot, Simulated Annealing, Genetik algoritma
- **Yaklaşık metotlar**
  - Sequential linear programming, Sequential quadratic programming, response surace metot

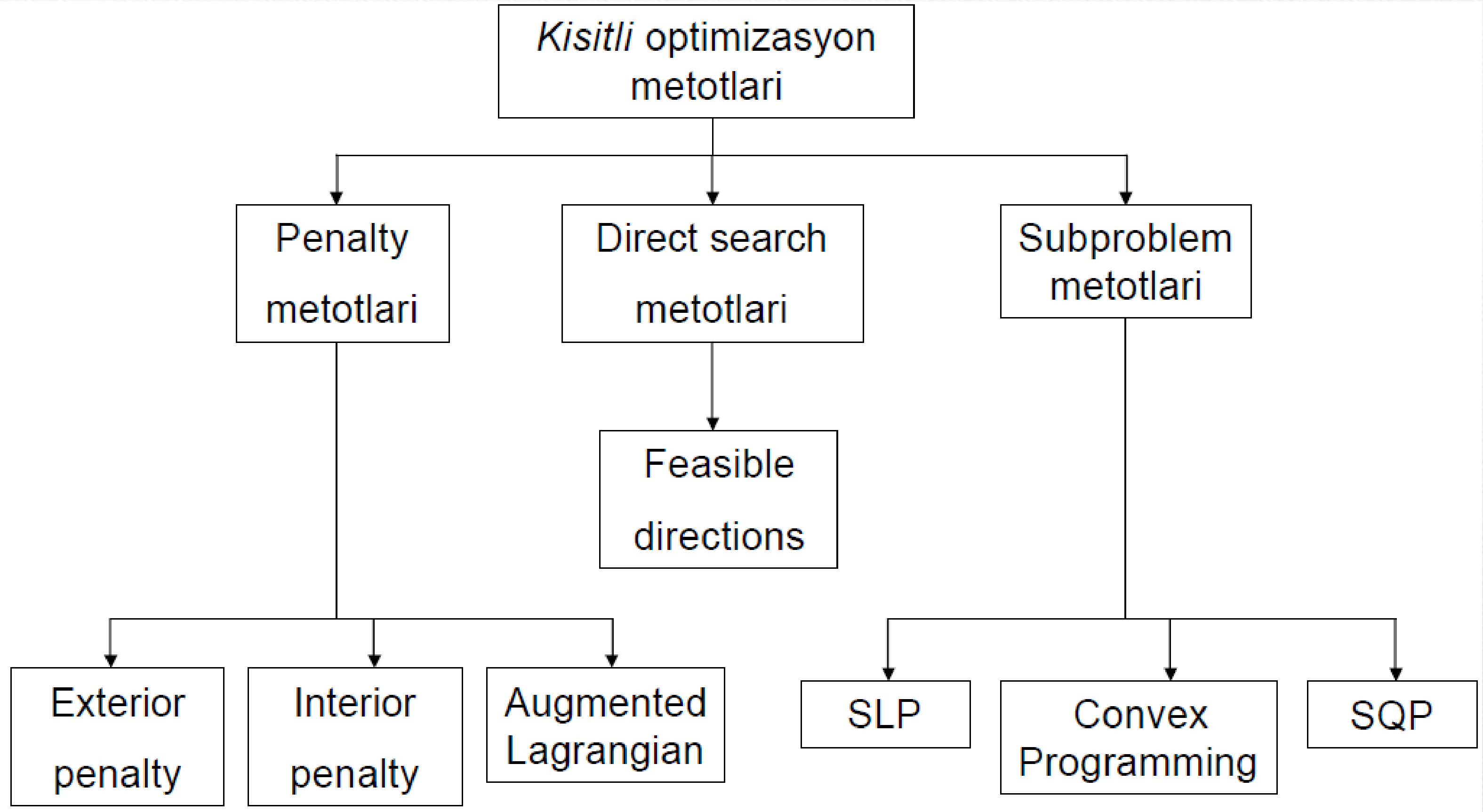
Tek Değişkenli Optimizasyon Metotları



Kısıtsız Optimizasyon Metotları



Kısıtlı Optimizasyon Metotları



Kısıtlı Optimizasyon Metotları

- **Penalty metotları:**
  - Basit metot, fakat sonuç çok garanti değil.
- **Feasible directions:**
  - Biraz karışık metot, fakat sonuç garanti.
  - Değişkenlerin farklı boyutta (ölçekte) olduğu problemlerde zorlanır.
  - Türev (gradyenti) sadece yön seçiminde kullanılır.
- **Subproblem metotları:**
  - Değişken sayısının çok olduğu ve değişkenlerin farklı boyutta (ölçekte) olduğu problemler için iyidir.
  - Türev (gradyenti) her zaman kullanabilir

Bazı gerçek hayat problemleri ve optimizasyon yaklaşımıyla çözümleri

- Örnek 1: Bir apartman 8 metre yükseklikte bir duvar ile çevrilmiş olup, duvarın apartmana mesafesi 4 metredir. En kısa merdivenle binada en fazla kaç metre yüksekliğe çıkabiliriz?

Çözüm:

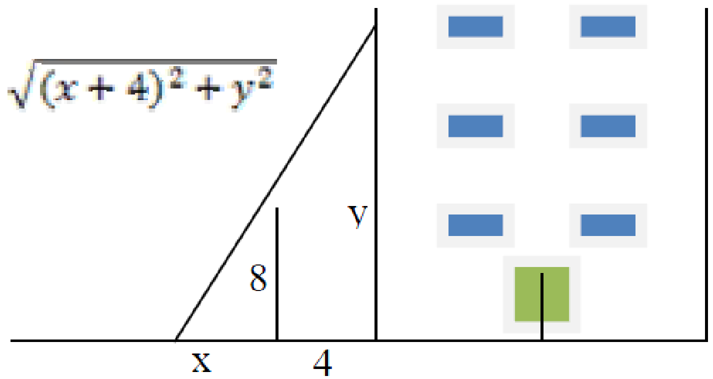
Merdivenin ulaşacağı en yüksek mesafe=y olsun.

Üçgenlerde benzerlikten;

$$\frac{x}{x+4}=\frac{8}{y}$$

$$y=\frac{8\,(x+4)}{x}$$

Merdivenin uzunluğu f(x,y) fonksiyonu olacaktır.



Şekil : Merdiven, duvar ve binanın durumu

$$Maks\ f(x,y) = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$$f(x) = \sqrt{(x+4)^2 + [\frac{8}{x}(x+4)]^2} = \sqrt{(x+4)^2 * 1 + (\frac{8}{x})^2} = (x+4) * \sqrt{1 + 64x^{-2}}$$

$$= (x+4) * (1 + 64x^{-2})^{1/2}$$

$$f'(x) = (1+64x^{-2})^{1/2} + (x+4)\frac{1}{2}(1+64x^{-2})^{1/2}(-128x^{-3}) = 0$$

$$f'(x) = x(x^2+64) - (x+4)64 = 0$$

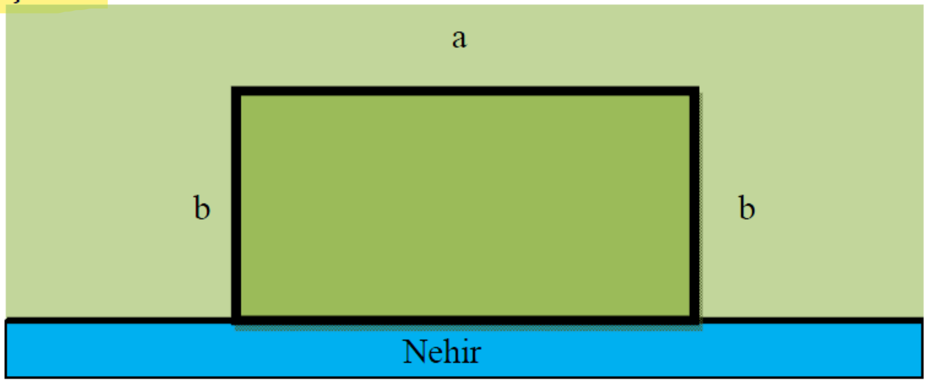
$$f'(x) = x^3 + 64x - 64x - 256 = 0$$

$x = 6{,}3496$ $\quad\quad$ $y = 13{,}0397$

$f(x,y) = 16{,}6478$

Örnek 2: Bir çiftçi nehir kenarındaki tarlasını (Şekil 4)en az çit malzemesiyle en fazla alanı sağlayacak şekilde çevirmek istemektedir. Çiftçinin 2400 metre çit malzemesi olduğuna göre dikdörtgen şeklindeki tarlasının boyutlarını ve sınırladığı alan miktarını belirleyiniz.

Çözüm:



Şekil.4 Bir kenarı nehir olan tarla

$2b + a = 2400$

Maks (a.b) = ?

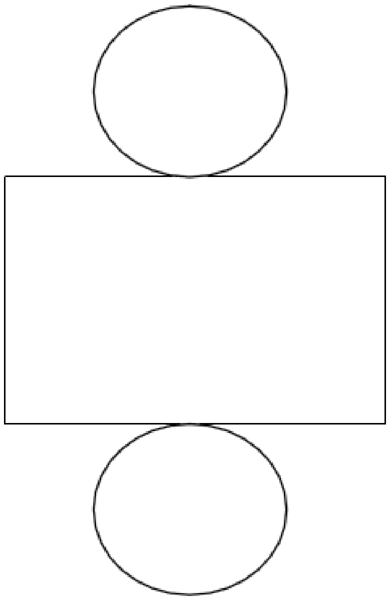
$a = 2400 – 2b$

$f(b) = \text{Maks}((2400-2b)\,b)$

$f(b) = 2400b-2b^2$ ise $f'(b) = 2400 – 4b = 0$

$b = 600$ $a = 1200$ Maks (a.b) = $1200*600 = 720000\ m^2$

Örnek 3. 1 Litre hacminde silindir şeklinde alüminyum kutu yapılacaktır. En az malzeme kullanarak oluşturabileceğimiz kutunun boyutları nelerdir?



Metal silindirik kutunun açılımı

Çözüm 3.

Minimum kısıtlı alana bakacağız.

$\text{Alan} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$\pi r^2 h = 1000$ idi.

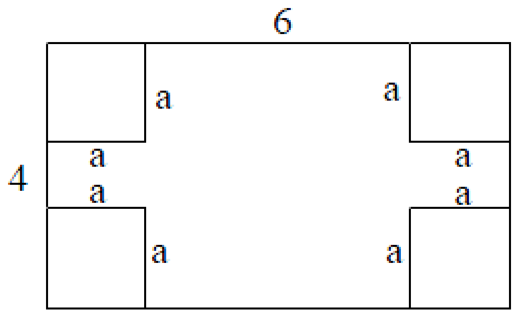
$\text{Alan} = 2\pi r^2 + 2\pi r\,(1000 / \pi r^2)$

$\text{Alan} = 2\pi r^2 + (2000 / r)$ ise $A' = 4\pi r - (2000 / r^2) = 0$

$4\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r^3 = 5000/\pi \Rightarrow r = 5{,}42$

$r = 5{,}42 \Rightarrow h = 10{,}83$ tür.

Örnek 4. Kenarları 6 cm ve 4 cm olan dikdörtgenin köşelerinden öyle bir kutu yapalım ki oluşturulacak kutu maksimum hacimde olsun.



Kutu imalatı için taslak

Çözüm

$$V = (6 - 2a)(4 - 2a)\,a$$

$$= (6 - 2a)(4a - 2a^2)$$

$$= 24a - 12a^2 - 8a^2 + 4a^3$$

$$= 4a^3 - 20a^2 + 24a$$

$$\Rightarrow V' = 12a^2 - 40a + 24 = 0$$

$a_1 = 2{,}54$ cm $\qquad a_2 = 0{,}785$ cm

Model Kurma

Model Kurma

- Bir model kurma uygulama sürecinin içerdiği adımlar beş ana aşamaya ayrılabilir:

1. Verilerin toplanması
2. Problem tanımı ve formülasyonu
3. Model geliştirme
4. Modelin geçerliliğinin denenmesi ve modelin çözümü
5. Modelin uygulaması ve sonuçların yorumlanması

Veri Toplama

- Zaman alıcı olabilir, ancak model oluşturma sürecinin temelidir.
- Model oluşturma sürecinin son derece önemli aşaması
- Verilerin kullanılabilirliği ve doğruluğu, modelin doğruluğunu ve modelin değerlendirilme yeteneğini önemli ölçüde etkiler.

Problem Tanımı ve Formülasyonu

- Problemin tanımlanması, tamamen çalışmanın sonucunu etkileyeceği için çok önemlidir.
- Bu adımda, örgütün amaçları ve problemin çözümünden önceki çalışılması gereken örgütün kısımları belirlenir.
- Uygun amaçların belirlenmesi problemin önemli bir yönünü oluşturur.
- Problemin tanımlanmasından sonra, örgüt problemine etkisi olan parametre değerlerini tahmin etmek için veriler toplanır. Bu veriler problemin doğru anlaşılması ve matematik modelin oluşturulması için önemlidir. Oluşturulan matematik model problemin esasını gösterir.

Problem Tanımı ve Formülasyonu

- Problem tanımı ve formülasyonu, ilgili adımlar:
  - Karar değişkenlerinin tanımlanması;
  - Model hedef(ler)inin formülasyonu;
  - Model kısıtlamalarının formülasyonu.
- Bu adımların gerçekleştirilmesinde aşağıdakileri göz önünde bulundurmalısınız:
  - Sorunun oluştuğu önemli unsurları tanımlayın.
  - Bağımsız değişken sayısını, sistemi tanımlamak için gerekli denklem sayısını ve bilinmeyen parametrelerin sayısını belirleyin.
  - Modelin yapısını ve karmaşıklığını değerlendirin.
  - Modelin gerekli doğruluk derecesini seçin

Model Geliştirme

- Problemin modelinin oluşturulmasından sonra, modelin çözümü için bilgisayar programları kullanılır veya geliştirilir.
- Model geliştirme şunları içerir:
- - matematiksel tanım,
- - parametre tahmini,
- - girdi geliştirme,
- - yazılım geliştirme
- Model geliştirme aşaması, model tanımına ve formülasyon aşamasına dönmeyi gerektirebilecek yinelemeli bir süreçtir.

Modelin geçerliliğinin denenmesi ve modelin çözümü

- Problemin modeli çok iyi kurulmuş ve sınanmış ise modelden elde edilecek sonuçlar problemin çözümünde izlenmesi gereken ideal faaliyet için iyi bir yaklaşım sağlar. Bu nedenle, geliştirilen modelin gerçeği doğru temsil edip etmediği doğrulanmalıdır. Bu aşama, modeli bir bütün olarak kontrol ediyor.
- Model geçerliliği, modelin varsayımlarının ve parametrelerinin doğrulanmasından oluşur.
- Modelin performansı, Kök, Ortalama, Karesel hata ve R^2 değeri gibi standart performans ölçütleri kullanılarak değerlendirilecektir.
- Model girişlerini ve parametrelerini test etmek için duyarlılık analizi.
  - Modelin çözülmesi aşamasının önemli bir yanı da duyarlılık analizini de içermesidir. Zaman içinde bazı parametrelerin değişmesi halinde modelin ne zaman optimum çözümden uzaklaşacağı hakkında bilgilere gereksinim duyulabilir.
  - Duyarlılık analizi, model parametrelerinin tam olarak tahmin edilemediği durumlarda yardımcı olmaktadır.
- Bu aşama aynı zamanda tekrarlayıcı bir süreçtir ve model tanımına ve formülasyon aşamasına dönmeyi gerektirebilir.
- Bu işlemin önemli bir yönü, çoğu durumda, formülasyon işleminde kullanılan verilerin doğrulamada kullanılan veriden farklı olmasıdır.

Modelin uygulaması ve sonuçların yorumlanması

- Bu adım, çalışmanın sonuçlarının alındığı adım olduğundan kritik bir adımdır. Bu nedenle, model sonuçlarının işlem prosedürlerine doğru bir şekilde aktarıldığından emin olunmalıdır.

Modelleme Teknikleri

- Farklı türdeki optimizasyon problemlerinin gereksinimini karşılamak için farklı modelleme teknikleri geliştirilmiştir. Modelleme yaklaşımlarının başlıca kategorileri şunlardır:
  - Klasik optimizasyon teknikleri,
  - Doğrusal programlama,
  - Doğrusal olmayan programlama,
  - Geometrik programlama,
  - Dinamik programlama,
  - Tamsayı programlama,
  - Stokastik(rastgele) programlama,
  - Evrimsel algoritmalar vb.
- Bu yaklaşımlar sonraki modüllerde tartışılacaktır.

Model Kurma Örnekleri-1

Renk Ltd. Şti., M1 ve M2 hammaddelerinin karışımından elde edilen iç ve dış duvar boyaları üretmektedir. Aşağıdaki tabloda problemin temel verileri sunulmuştur.

	Ton başına hammadde miktarı		Günlük maksimum kullanılabilirlik (ton)
	Dış boyada	İç boyada	
M1 hammaddesi	6	4	24
M2 hammaddesi	1	2	6
Ton başına kar	5	4	

Ayrıca, yapılan bir pazar araştırmasından da, günlük iç boya talebinin en çok 2 ton olduğu belirlenmiştir. Yine aynı araştırmadan, günlük iç boya talebinin günlük dış boya talebinden fazla olduğu ve bu fazlalığın günde en çok 1 ton olduğu saptanmıştır. Renk Ltd. Şti., günlük karını maksimum kılacak şekilde, dış ve iç boyanın optimum miktarlarını belirlemek istemektedir.

Model Kurma Örnekleri-1

- a. Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi
- X1 : Dış boyanın günlük üretim miktarı (ton)
- X2 : İç boyanın günlük üretim miktarı (ton)
- b. Amaç Fonksiyonun Belirlenmesi
- Modelin amaç fonksiyonunda karar değişkenleri x1, x2, ….,xn ve kar veya maliyet katsayıları c1, c2,……,cn ile gösterilirse amaç fonksiyonu:
- Max Z = 5 X1 + 4 X2 şeklinde yazılır.

Model Kurma Örnekleri-1

- c. Kısıtlayıcıların Belirlenmesi
- $6 X1 + 4 X2 \leq 24$
- $X1 + 2 X2 \leq 6$
- $-X1 + 2 X2 \leq 1$
- $X2 \leq 2$
- d. İşaret Kısıtlaması
- $X1, X2 \geq 0$

Model Kurma Örnekleri-2

Bir Belediye 20 milyon $ bütçesini iki yatırım arasında bölüştürecektir. Bu projeler:

- Her birinin maliyeti 3 milyon $ olan beş yeni okul binası,

- Her birinin maliyeti 1 milyon $ olan sekiz spor tesisi.

Ancak, belediyenin tüm bu yatırımları tamamlamak için yeterli parası yoktur. Yapılamayan her okul binası % 2' lik oy kaybına, yapılamayan her spor tesisi % 4'lük oy kaybına ve alınan her milyon $ borç % 5 oy kaybına neden olmaktadır. Sorunun DP modelini oluşturunuz.

Model Kurma Örnekleri-2

Karar değişkenleri

X_1: *yaptırılan okul sayısı*

X_2: *yaptırılan spor tesisi sayısı*

X_3: *alınan her milyon dolar borç*

Amaç fonksiyonu

$$Min\ Z = 0.02 \times (5 - X_1) + 0.04 \times (8 - X_2) + 0.05\, X_3$$

Kısıtlar

$$3\, X_1 + X_2 \leq 20$$

$$X_1 \leq 5$$

$$X_2 \leq 8$$

$$X_3 \leq 3$$

ve

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Model Kurma Örnekleri-3

- Kuşgözü Emlakçılık A.Ş.'nin Bolu Dağlarında, göl manzaralı bakir bir alanda 800 dönümlük bir arazisi vardır. Geçmişte göl kıyısına tek tük evler yapılırken dikkat edilmeyen çevre koşulları, ev sayısı arttıkça bozulmaya başlamış ve bölge yöneticilerini bir takım önlemler almaya zorlamıştır. Eskiden yapılmış evlerin fosseptiğinin olmaması, kanalizasyonun kötülüğü gibi çevre sağlığını bozan faktörler bu önlemler içinde değerlendirilmiştir. Örneğin, su kalitesindeki bozukluğun önüne geçmek için geleceğe yönelik bazı sert önlemler uygulamaya konmuştur. Buna göre
  - 1. Sadece müstakil, dubleks ve tripleks evlere iskan izni verilecektir. Bir haneli müstakil evler toplamın % 50'sini oluşturacaktır.
  - 2. Fosseptik çukuru sayısını sınırlandırmak amacıyla bir haneli müstakil evlerin en az 2 dönüm, dubleks evlerin en az 3 dönüm, tripleks evlerin de en az 4 dönümlük arazi parçasına sahip olması şart koşulmuştur.
  - 3. Her biri 1 dönüm olan eğlence ve dinlenme alanları 200 aile başına 1 adet olarak belirlenmiştir.
  - 4. Göldeki ekolojik dengeyi korumak için yer altı suları ev ve bahçe kullanımına sunulmayacaktır.

Model Kurma Örnekleri-3

- Emlak firmasının yönetimi, şirketin sahip olduğu 800 dönümlük arazinin kullanım olanaklarını araştırmaktadır. Firmanın burada kurmayı düşündüğü site de müstakil, dubleks ve tripleks tipte evlerden oluşacak ve toplam arazinin % 15'i cadde, yol ve diğer kullanım alanları için ayrılacaktır. Bundan başka, faklı tip evlerin getirilerinin de farklı olması planlanmıştır. Bu getirileri bir tablo halinde gösterecek olursak;

Model Kurma Örnekleri-3

Ev tipi	Müstakil	Dubleks	Tripleks
Ev başına net getiri (pb)	10000	12000	15000

Su getirmenin maliyeti ise yapılacak ev sayısıyla orantılıdır. Bununla birlikte, ilçe yönetimi projenin ekonomik olabilmesi için minimum 100000 pb'lik bir bağlantı olması şartını da koşmaktadır. Bunlardan başka, su harcaması gün başına en çok 200000 kg ile sınırlandırılmıştır. Aşağıdaki veriler hem bir ailenin ortalama su tüketimine ait varsayımlara, hem de su getirme maliyetlerine aittir:

Ev tipi	Müstakil	Dubleks	Tripleks	Dinlenme alanı
Birim başına su getirme maliyet (pb)	1000	1200	1400	800
Birim başına su tüketimi (kg/gün)	400	600	840	450

Model Kurma Örnekleri-3

Karar Değişkenleri

X_1 : Müstakil ev sayısı

X_2 : Dubleks ev sayısı

X_3 : Tripleks ev sayısı

X_4 : Eğlence ve dinlenme alanlarının sayısı

Amaç Fonksiyonu

$$Max\ Z = 10000\,X_1 + 12000\,X_2 + 15000\,X_3$$

Kısıtlar

Arazi kullanımı

$$2\,X_1 + 3\,X_2 + 4\,X_3 + X_4 \leq 680\ (=0.85 \times 800)$$

Müstakil evlerle ilgili kısıt

$$\frac{X_1}{X_1 + X_2 + X_3} \geq 0.50 \quad veya \quad 0.5\,X_1 - 0.5X_2 - 0.5X_3 \geq 0$$

Eğlence ve dinlenme alanları

$$X_4 \geq \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{200} \quad veya \quad 200\,X_4 - X_1 - 2\,X_2 - 3\,X_3 \geq 0$$

Su getirme parası

$$1000\,X_1 + 1200\,X_2 + 1400\,X_3 + 800\,X_4 \geq 100000$$

Su tüketimi

$$400\,X1 + 600\,X2 + 840\,X3 + 450\,X4 \leq 200000$$

Negatif olmama

$$X1,\ X2,\ X3,\ X4 \geq 0$$

Kaynaklar

- Demet Gönen, Optimizasyon için Model Kurma, Balıkesir Üniversitesi, Ders Notları
- Ramazan Yaman, Optimizasyon Nedir?, Balıkesir Üniversitesi, Ders Notları
- Fırat Evirgen, Optimizasyon ve Metotları, Balıkesir Üniversitesi, Ders Notları

Optimizasyon Problemlerinin Sınıflandırılması

Giriş

- Optimizasyon problemleri, kısıtlamaların türüne, tasarım değişkenlerinin niteliğine, problemin fiziksel yapısına, ilgili denklemlerin niteliğine, değişkenlerin deterministik doğasına, tasarım değişkenlerinin izin verilen değerine, fonksiyonların ayrıla bilirliğine ve hedef fonksiyonlarının sayısına bağlı olarak sınıflandırılabilir.

Kısıtların varlığına dayanan sınıflandırma

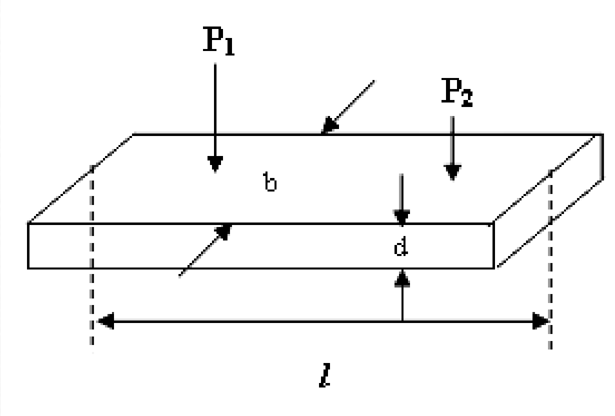
- **Kısıtlı (Constrained) optimizasyon problemleri:**
- Bir veya daha fazla kısıtlamaya tabidir.

- **Kısıtsız (Unconstrained) optimizasyon problemleri:**
- Hiçbir kısıtlama mevcut değildir.

Tasarım değişkenlerinin niteliğine göre sınıflandırma

- Bu sınıflandırma içinde iki ana sınıflandırma kategorisi vardır.
- **Birinci kategori:** Amaç, bu parametrelerin öngörülen bir fonksiyonunu minimum veya maksimuma belirli kısıtlamalara tabi kılacak bir dizi tasarım parametresi bulmaktır.
  - Örneğin, şekilde gösterilen iki yük ile bir şerit tabanının asgari ağırlık tasarımını bulmak için, yapının maksimum yerleşimine bir sınırlama getirilebilir.

Tasarım değişkenlerinin niteliğine göre sınıflandırma



Şekil: İki yüklü şerit tabanı

- Problem aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:
- $X = \begin{Bmatrix} b \\ d \end{Bmatrix}, minimize\ edecek\ X\ değerini\ bul.$
- $f(X) = h(b, d)$

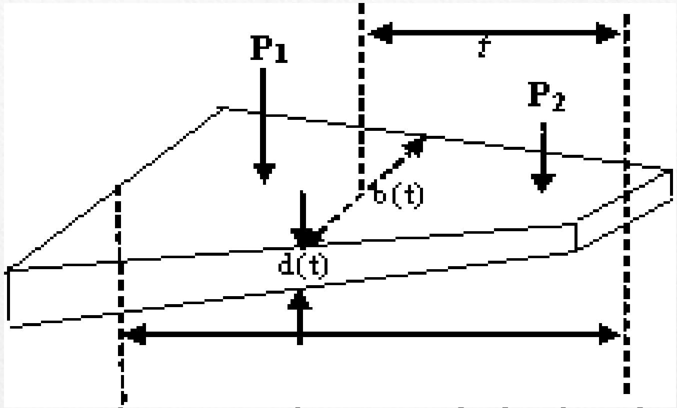
Tasarım değişkenlerinin niteliğine göre sınıflandırma

- Bağlı kısıtlar
- $\delta_s(X) \leq \delta_{max}$
- $b \geq 0$
- $d \geq 0$
- ***l*** ile belirtilen zemin uzunluğundaki $\mathbf{P_1}$ ve $\mathbf{P_2}$ yükleri arasındaki mesafe sabit olduğu varsayılır ve gerekli optimizasyona ***b*** ve ***d*** değiştirilerek ulaşılır.
- Bu gibi problemlere ***parametre*** veya ***statik*** optimizasyon problemleri denir.

Tasarım değişkenlerinin niteliğine göre sınıflandırma

- **İkinci kategori:** Amaç, kısıtlar dizisine bağlı bir hedef fonksiyonunu en aza indirgeyen (minimize eden), tasarım parametresi dizisini bulmaktır. Diğer bazı parametrelerin tamamı sürekli fonksiyondur.
- Örneğin, dikdörtgen taban malzemesinin kesit boyutlarının aşağıdaki resimde gösterildiği gibi uzunluğu boyunca değişmesine izin verilir.

Tasarım değişkenlerinin niteliğine göre sınıflandırma



- Şekil: Dikdörtgen taban malzemesinin kesit boyutları
- Problem aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:
- $X(t) = \begin{Bmatrix} b(t) \\ d(t) \end{Bmatrix}, minimize\ edecek\ X\ değerini\ bul.$
- $f(X) = g(b(t), d(t))$

Tasarım değişkenlerinin niteliğine göre sınıflandırma

- Bağlı kısıtlar
- $\delta_s\big(X(t)\big) \leq \delta_{max} \quad 0 \leq t \leq l$
- $b(t) \geq 0 \qquad\qquad 0 \leq t \leq l$
- $d(t) \geq 0 \qquad\qquad 0 \leq t \leq l$
- ***l*** ile belirtilen zemin uzunluğundaki $\mathbf{P_1}$ ve $\mathbf{P_2}$ yükleri arasındaki mesafe sabit olduğu varsayılır ve gerekli optimizasyona ***b*** ve ***d*** değiştirilerek ulaşılır.
- Bu gibi problemlere ***yörünge(trajectory)*** veya ***dinamik*** optimizasyon problemleri denir.

Problemin fiziksel yapısına dayalı sınıflandırma

- Fiziksel yapıya dayanarak optimizasyon problemlerini, **optimal kontrol** ve **optimal olmayan kontrol problemleri** olarak sınıflandırabiliriz.

i. (I) Optimal Kontrol (OK) problemi, bir takım aşamalar içeren matematiksel bir programlama problemidir. Burada her aşama önceki aşamadan önceden belirlenmiş bir şekilde gelişir.

   - İki tür değişkenle tanımlanır: kontrol veya tasarım değişkenleri ve durum değişkenleri.

Problemin fiziksel yapısına dayalı sınıflandırma

- Problem, tüm aşamalardaki toplam amaç fonksiyonunu (performans indeksi, **PI** olarak da bilinir), kontrol ve durum değişkenleri üzerindeki kısıtlamalar kümesine bağlı olacak şekilde minimize eden kontrol veya tasarım değişkenlerinin bir kümesini bulmaktır.
- Optimal Kontrol problemi şu şekilde ifade edilebilir:
- $f(X) = \sum_{i=1}^{t} f_i(x_{i,} y_i)$, $minimize\ edecek\ X değerini\ bul.$
- Bağlı kısıtlar
- $q_i(x_i, y_i) + y_i = y_{i+1} \quad i = 1,2, \dots, l$
- $g_j(x_j) \leq 0, \qquad j = 1,2, \dots, l$
- $h_k(y_k) \leq 0, \qquad k = 1,2, \dots, l$

Problemin fiziksel yapısına dayalı sınıflandırma

- Burada x_i, i. kontrol değişkeni ve y_i, i. durum değişkeni ve f_i, i. aşamanın toplam hedef fonksiyonuna katkısıdır. g_j, h_k ve q_i sırasıyla $x_j, y_j; x_k, y_k;$,x_i ve , y_i'nin fonksiyonlarıdır. l, toplam durum sayısıdır. Kontrol ve durum değişkenleri x_i ve , y_i, bazı durumlarda vektör olabilir.

ii. **Optimal kontrol problemleri olmayan problemlere optimal olmayan kontrol problemleri denir.**

İlişkili denklemlerin niteliğine dayalı sınıflandırma.

- Amaç fonksiyonu ve kısıtlamalara ilişkin ifadelerin doğasına bağlı olarak, optimizasyon problemleri doğrusal, doğrusal olmayan, geometrik ve kuadratik programlama problemleri olarak sınıflandırılabilir.

İlişkili denklemlerin niteliğine dayalı sınıflandırma.

- **Lineer (doğrusal) Programlama problemi**
  - Amaç fonksiyonu ve tüm kısıtlamalar, tasarım değişkenlerinin doğrusal fonksiyonları ise, matematiksel programlama problemine doğrusal programlama (LP) problemi denir.
  - Sıklıkla aşağıdaki standart formda belirtilir:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, f(X) maksimize\ edecek\ X\ i\ bul$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$$

Kısıtlar;

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i, \qquad j = 1,2, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1,2, \dots, n$$

Burada c_i, b_j ve a_{ij} sabitlerdir.

İlişkili denklemlerin niteliğine dayalı sınıflandırma.

- **Non-lineer (Doğrusal Olmayan) Programlama Problemi**
- Hedefler ve kısıtlama fonksiyonları arasındaki fonksiyonlardan herhangi biri doğrusal değilse, problem bir doğrusal olmayan programlama (NLP) problemi olarak adlandırılır, bu bir programlama probleminin en genel formudur.

İlişkili denklemlerin niteliğine dayalı sınıflandırma.

- **Geometrik programlama problemi**
- Bir geometrik programlama (GMP) problemi, hedef fonksiyonun ve kısıtlamaların ***X***' de polinom olarak ifade edildiği problemdir.
- ***N*** terimine sahip bir polinom aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:
- $h(X) = c_1 x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_n^{a_{1n}} + \cdots + c_m x_1^{a_{m1}} x_2^{a_{m2}} \dots x_n^{a_{mn}}$
- Böylece GMP problemi şu şekilde ifade edilebilir: minimum yapacak ***X***'i bul;
- $f(X) = \sum_{j=1}^{N_0} c_j \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}\right), c_j > 0, x_i > 0, i = 1,2, \dots, n\,, j = 1,2, \dots, m)$
- Kısıtlar
- $g_k(X) = \sum_{j=1}^{N_k} a_{jk} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{q_{ijk}}\right) > 0,\ a_{jk} > 0, x_i > 0, k = 1,2, \dots, m$
- Burada ***N₀*** ve ***Nₖ***, sırasıyla, hedef ve **k** .inci kısıt fonksiyonundaki terimlerin sayısını belirtir.

İlişkili denklemlerin niteliğine dayalı sınıflandırma.

- **İkinci dereceden (quadratik) programlama problemi**
- Kuadratik programlama problemi, ikinci dereceden hedef fonksiyon ve doğrusal kısıtlar ile en iyi doğrusal olmayan programlama problemidir. Ayrıca konkavdır (maksimize etme problemleri için). Genellikle aşağıdaki gibi formüle edilir:
- $F(X) = c + \sum_{i=1}^{n} q_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Q_i x_i x_j$
- Kısıtlar
- $b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i, \qquad j = 1,2, \dots, m$
- $x_i \geq 0, \qquad i = 1,2, \dots, n$
- Burada c, q_i, Q_{ji}, a_{ij} ve b_j sabitlerdir.

Karar değişkenlerinin izin verilen değerlerine dayalı sınıflandırma

- Bu sınıflamaya göre, nesnel fonksiyonlar tamsayı ve gerçek değerli programlama problemleri olarak sınıflandırılabilir.
- **Tamsayılı (integer) programlama problemi**
- Bir optimizasyon probleminin tasarım (karar) değişkenlerinin bir kısmı veya tamamı yalnızca tam sayı (veya ayrık) değerleri almak için sınırlandırılmışsa, problem tam sayı programlama problemi olarak adlandırılır.
  - Örneğin, gereken minimum sayıda çaba ile makalelerin sayısını bulma işlemi için karar değişkenleri, yani kullanılan makale sayısı sadece tamsayı değerler alabilir.

Karar değişkenlerinin izin verilen değerlerine dayalı sınıflandırma

- **Gerçek (reel) değerli programlama problemi**
- Gerçek değerli bir problem, sistemin gerçek değişkenlerin değerlerini izin verilen bir küme içinden seçerek gerçek bir işlevi minimize veya maksimize eden bir problemdir.
- İzin verilen küme yalnızca gerçek değerler içerdiğinde buna gerçek değerli bir programlama problemi denir.

Değişkenlerin deterministik özelliklerine dayanan sınıflandırma

- Bu sınıflamaya göre, optimizasyon problemleri **deterministik** ve **stokastik** programlama problemleri olarak sınıflandırılabilir.
- **Deterministik programlama problemi**
- Bu tip problemlerde tüm tasarım değişkenleri deterministiktir.
- **Stokastik programlama problemi**
- Bu tür bir optimizasyon probleminde parametrelerin bazıları veya tümü (tasarım değişkenleri ve / veya önceden tayin edilmiş parametreler) olasılıksaldır (deterministik olmayan veya stokastik).
- Örneğin, beton dayanım ve yük kapasitesine olasılıklı girdileri olan yapıların ömrü tahminleri. Ömrün deterministik bir değerine ulaşılamaz.

Fonksiyonların ayrılabilirliğine dayalı sınıflandırma

- Amaç ve kısıt fonksiyonlarının ayrılabilirliğine dayalı optimizasyon problemleri, ayrılabilir ve ayrılmaz programlama problemleri olarak sınıflandırılabilir.
- **Ayrılabilir programlama problemleri**
- Bu tür bir problemde amaç fonksiyonu ve kısıtlamalar ayrılabilir. Bir fonksiyonun, ***n*** tek değişkenli fonksiyonların $(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n))$ toplamı olarak ifade edilebilirse ($f(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i\,(x_i)$) ayrılabilir olduğu söylenebilir ve ayrılabilir programlama probleminin standart formu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:
- $f(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i\,(x_i)\ minimize\ edecececk\ X'i\ bul$
- Kısıtlar
- $g_j(X) = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x_i) \leq b_{j,} \quad j = 1,2, \ldots, m$
- Burada b_j, sabittir.

Amaç fonksiyonlarının sayısına dayalı sınıflandırma

- Bu sınıflandırmada, nesnel işlevler tek amaçlı ve çok amaçlı programlama sorunları olarak sınıflandırılabilir.
- **Sadece tek bir objektif fonksiyonun olduğu tek-amaçlı programlama problemi.**
- **Çok amaçlı programlama problemi**
- Çok amaçlı bir programlama sorunu şu şekilde ifade edilebilir: