2 Küme Teorisi

2.1 Kümeler ve Üyeler

Küme notasyonu matematikteki temel konseptlerden biridir. Bir kümenin kusursuz bir tanımı burada verilmeyecektir zira küme teorisine göre küme çoğunlukla tanımsızdır. Ancak bu terimle ne demek istediğimizi açıklayabiliriz: hangi tip olursa olsun objeler topluluğu küme olarak düşünülür. Objeler her şey olabilir ve bunlara kümenin elemanları denir. Bir kümedeki elemanların ortak özelliği olmasına gerek yoktur (aslında en bariz ortak noktaları aynı küme içinde bulunmalarıdır). Benzer şekilde eleman sayısında da belli bir kısıtlama yoktur; sonsuz sayıda, sonlu sayıda veya hiç eleman olmayabilir. Diğer yandan tek bir sınırlama vardır: verilen bir küme ve obje ile objenin kümenin elemanı olup olmadığına karar verebilmemiz gerekir.

Örnek 2.1:

1. Bir küme Picasso' yu, Eyfel Kulesini ve π sayısını içerecek şekilde tanımlanmış olabilir. Bu (biraz garip olsa da) sonlu bir kümedir.

2. Tüm pozitif çift tamsayıları içeren küme açıkça sonsuz bir kümedir.

3. Gelmiş geçmiş en iyi 10 şarkıyı içeren kümeyi düşünelim. Eğer en iyinin tanımını vermezsek bu küme geçerli bir küme olmaz. Kime göre en iyi? Bu tanım bir elemanın bir kümenin elemanı olup olmadığına karar verebilmemiz koşuluna uymaz.

2.1.1 Notasyon

Genellikle kümeleri ifade etmek için büyük harfler, elemanları ifade etmek için küçük harfler kullanılır. $\in$ sembolü '-e ait' veya '-nin elemanıdır' anlamına gelir. Bu nedenle

$\alpha \in A$ 'nın anlamı α elemanı A kümesine aittir ve

$\alpha \notin A$ 'nın anlamı $\sim(\alpha \in A)$ veya α A'ya ait değildir.

2.1.2 Kümeleri Tanımlamak

Kümeler değişik biçimlerde tanımlanabilir. En basiti elemanları köşeli parantezler {} arasına listelemektir. Örnek 2.1' deki iki kümeyi bir daha yazarsak:

$A=\{\text{Picasso, Eyfel Kulesi}, \pi\}$

$B=\{2,4,6,8.....\}$

İkinci kümede bütün elemanları listelemeyiz. Bu yüzden '…' kullanarak listenin daha böyle devam ettiğini belirtiriz. Diğer küme gösterim örnekleri şunlardır:

Sabit bir pozitif n tamsayısı için, $C_n=\{1,2,\ldots n\}$, ilk n pozitif tamsayının kümesidir. Yine sonlu sayıda olmasına rağmen arada birçok elemanın var olduğunu göstermek için '…' kullandık.

D={}, **boşküme**dir yani hiçbir elemanı yoktur. Bu küme genellikle $\varnothing$ ile gösterilir.

Bir kümenin elemanlarını listelemek küçük veya belli bir kalıba sahip elemanlı kümeler haricinde pek pratik değildir. Alternatif bir yol küme elemanlarını bir özellik ile tanımlamaktır. Daha açık bir ifadeyle, P(x) tek değişkenli bir önermesel fonksiyon ise elemanları, α için P(α)'nın doğru bir önerme olduğu tüm α objeleri olan kümeyi oluşturabiliriz.

Bu şekilde tanımlanan bir küme; A={x:P(x)} şeklinde ifade edilir. (Bu şu şekilde okunur: P(x)' i sağlayan tüm x'lerin kümesi)

2.1.3 Kümelerin Eşitliği

İki küme sadece ve sadece aynı elemanları içeriyorsa eşit olarak tanımlanır; şöyle ki, eğer $(\forall x)\left[x \in A \leftrightarrow x \in B\right]$ doğru ise A=B' dir yada tersi. Listelenen elemanların sırası önemsizdir.

Şunu da unutmamak gerekir ki; sadece bir boş küme vardır veya tüm boş kümeler eşittir. Çünkü tüm boş kümeler aynı elemanı içerir yani hiçbir elemanı.

Ayrıca, eğer P(x) ve Q(x) aynı x objeleri için doğru olan önermesel fonksiyonlar ise tanımladıkları kümeler eşittir.

$$\{x:P(x)\}=\{x:Q(x)\}.$$

Tanım: Eğer A sonlu bir küme ise kardinal itesi, |A|, içerdiği (farklı) elemanların sayısıdır.

Eğer A sonsuz sayıda elemana sahipse, sonsuz kardinalitesi vardır deriz ve şu şekilde ifade ederiz: |A|=∞.

A' nın kardinalitesi için kullanılan diğer notasyonlar n(A), #(A) ve $\overline{\overline{A}}$.

Örnek 2.2:

4. $|\varnothing|=0$ çünkü $\varnothing$' nın hiç elemanı yoktur.
5. |{ π ,2,Einstein}|=3.
6. Eğer X={0,1,……..,n} ise |X|=n+1.
7. |{2,4,6,8,…..}| = ∞

Kardinalite basit bir konsept gibi görünse de verilen bir kümenin kardinalitesini hesaplamak bazen pratikte zor olabilir. Bu durum genellikle verilen kümenin elemanlarından bazıları kendileri birer küme olduğunda gerçekleşir. Küme elemanlarının kendi başlarına bir küme olması geçerli bir yapıdır.

Örneğin, X={{1,2}} olsun. Bu durumda X sadece tek bir eleman içerir yani {1,2} kümesini ve |X|=1' dir. Kardinalitesi 2 olan {1,2} kümesi ile tek elemanı {1,2} kümesi olan X kümesini ayırt etmek son derece önemlidir. Benzer şekilde $\varnothing$ ve $\{\varnothing\}$ kümeleri de farklıdır zira $|\{\varnothing\}|=1$' dir.

Örnek 2.3: |{1,2,{1,2}}|=3,

$|\{\varnothing,\{1,2\}\}|=2$,

$|\{\varnothing,\{\varnothing\}\}|=2$,

$|\{\varnothing,\{\varnothing\},\{1,2\}\}|=3$,

$|\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}|=2$.

2.2 Alt Kümeler

Tanım: A' nın tüm elemanları aynı zamanda B' nin de elemanları ise A kümesi B kümesinin alt kümesidir denir ve $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir. Sembolik olarak, $(\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B]$ ise $A \subseteq B$' dir.

Eğer A B' nin alt kümesi ise B, A 'nın süper kümesidir (superset) veya kapsar deriz ve $B \supseteq A$ yazarız. $A \subset B$ notasyonu 'A, B 'nin tam alt kümesidir' ifadesi için kullanılır. Bu nedenle sadece ve sadece $A \subseteq B$ ve $A \neq B$ ise $A \subset B$' dir. Ayrıca tüm A kümeleri için $\varnothing \subseteq A$' dir.

İki kümenin eşit olduğunu kanıtlamak için her birinin diğerinin alt kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. Esasen bu, aşağıdaki bileşik önemelerin mantıksal eşdeğerliliğinden kaynaklanır.

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \equiv (p \leftrightarrow q).$$

Alt kümenin tanımı ile $A \subseteq B$' nin anlamı $(\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B]$ doğrudur ve $B \subseteq A$ 'nin anlamı $(\forall x)[x \in B \rightarrow x \in A]$ doğrudur, bu durumda $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ sadece ve sadece $(\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B] \wedge (\forall x)[x \in B \rightarrow x \in A]$ ise doğrudur. $(\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B]$' nin ve $(\forall x)[x \in B \rightarrow x \in A]$' nin doğruluğu $(\forall x)[x \in A \leftrightarrow x \in B]$'nin doğruluğunu garantiler ve tam tersi. Bu sebeple, A=B olduğu zaman $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ifadelerinin ikisi de doğrudur. Özet olarak:

Teorem 2.1: İki küme; A ve B sadece ve sadece $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise eşittir.

Örnek 2.4: A={{1},{2},{1,2}} ve B {1,2}' nin boş olmayan tüm alt kümeleri olsun. A=B olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A \subseteq B$ 'dir çünkü A' nın 3 elemanının her biri {1,2}'nin boş olmayan alt kümesidir ve bu nedenle B' nin bir elemanıdır.

$B \subseteq A$' dır çünkü {1,2}' nin boş olmayan tüm alt kümeleri A' da yer alır. Yukarıdaki teoremi kullanarak A=B sonucuna varabiliriz.

Küme konsepti çok geniş olduğundan çoğunlukla belirli konteks için gerekli olan kümelere önem verilir. Mevcut görevi veya çalışmayı ilgilendiren kümeleri içine alan evrensel bir küme tanımlamak uygundur. Evrensel kümenin dışında kalan her şey göz ardı edilir. Evrensel küme her zaman için sabit olan bir şey değildir- kontekse göre değişir.

Evrensel küme olarak kullanılan bazı özel sayı kümeleri aşağıdadır.

N= {0,1,2,3,….} doğal sayılar kümesi.

Z= {…, -2,-1,0,1,2,…} tam sayılar kümesi.

Q= {p/q:p,q$\in$Z ve q$\neq$0} rasyonel sayılar kümesi.

$\Re$ = reel sayılar kümesi; reel sayılar sayı doğrusu üzerindeki noktalar veya ondalık şeklinde yazılan sayılar şeklinde düşünülebilir.

$C=\{x+iy:x,y\in \Re$ ve $i^2=-1\}$ kompleks sayılar kümesi.

Açıkça görüldüğü gibi bu kümeler arasında şu alt küme ilişkileri vardır:

$$N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq \Re \subseteq C.$$

Ayrıca Z^+, Q^+ ve R^+ sırasıyla pozitif tamsayıları, rasyonel sayıları ve reel sayıları ifade etmek için kullanılır. Dikkat edilirse N, Z^+ 'ya eşit değildir zira 0 ilkine dahil olmasına rağmen ikincisine değildir. Ek olarak, bazen çift ve tek sayıları ifade etmek için E ve O'yu kullanırız:

$$E=\{2n:n\in Z\}=\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$$

$$O=\{2n+1:n\in Z\}=\{\ldots,-3,-1,1,3,5,\ldots\}.$$

Eğer evrensel bir küme $\{x:P(x)\}$ notasyonu ile tanımlanmış ise bunun anlamı P(x)'i sağlayan evrensel kümedeki tüm x' lerin kümesidir. Bu nedenle eğer mevcut evrensel kümemiz Z ise $X=\{x:2x^2+3x-2=0\}$, $\{-2\}$ kümesidir fakat *U,* Q veya R ise $X=\{-2,1/2\}$. İlk durumda sınırlandırmayı daha belirgin yapabilirdik ve şekilde yazabilirdik:

$$X=\{x: x\in Z \text{ ve } 2x^2+3x-2=0\} \text{ veya } X=\{ x\in Z : 2x^2+3x-2=0\}.$$

2.3 Kümeler Üzerinde İşlemler

Venn şeması kümelerin yararlı bir görsel gösterimidir. Böyle bir şemada kümeler, düzlemdeki bölgeler olarak temsil edilir ve verilen kümeye ait elemanlar kendisini temsil eden bölgenin içine yerleştirilir. Bazen tüm kümeler evrensel kümeyi temsil eden bir kutuya yerleştirilir. Eğer bir eleman iki kümenin birden elemanı ise iki küme iç içe çizilir ve bu elemanlar iç içe geçmiş kısma konur.

Verilen A ve B kümeleri ile aşağıdaki gibi yeni iki küme tanımlayabiliriz.

A ve B' nin **kesişimi**, A ve B' nin her ikisine birden ait olan tüm elemanların kümesidir ve $A\cap B$ şeklinde gösterilir.

A ve B' nin **birleşimi**, A' ya, B' ye veya her ikisine ait olan tüm elemanların kümesidir ve $A\cup B$ şeklinde gösterilir.

Sembolik olarak;

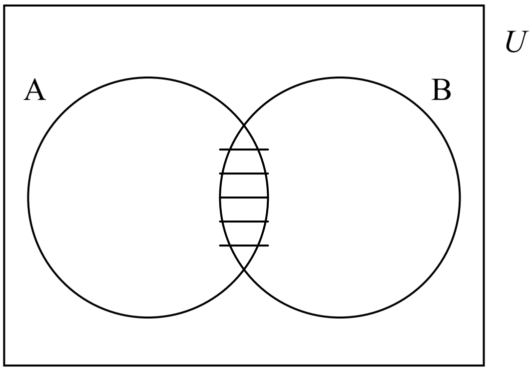
$$A\cap B=\{x: x\in A \text{ ve } x\in B\}$$
$$A\cup B=\{x: x \in A \text{ veya } x\in B \text{ veya her ikisi birden}\}.$$

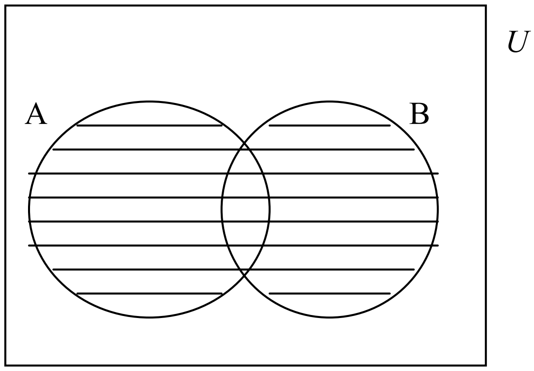
Kümelerin kesişimi ile önermelerin kesişimi arasında açık bir bağlantı vardır tıpkı kümelerin birleşimi ve önermelerin dahili birleşimi arasında olduğu gibi. Eğer A ve B, sırasıyla P(x) ve Q(x) önermesel fonksiyonları ile tanımlanmışlar ise;

$$A\cap B=\{x: P(x)\wedge Q(x)\} \text{ ve}$$

$$A\cup B=\{x: P(x)\vee Q(x)\}.$$

Bu kümeler en iyi aşağıdaki Venn şemaları ile gösterilebilir. Taralı bölgeler kesişim ve birleşimi gösterir.





Şekil 2.1: $A \cap B$

Şekil 2.2: $A \cup B$

Kesişim ve birleşimin tanımlarını ikiden fazla kümeye genişletebiliriz. A_1, A_2, … A_n küme olsun. Bunların kesişimi:

$$\bigcap_{r=1}^{n} A_r = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

$= \{x\text{: } x \in A_1 \text{ ve } x \in A_2 \text{ ve } \ldots \text{ ve } x \in A_n\}$

$=\{x\text{: } x,\ r=1,2,\ldots,n$ olmak üzere her bir A_r kümesine aittir.$\}$

Birleşimi ise;

$$\bigcup_{r=1}^{n} A_r = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad = \{x\text{: } x \in A_1 \text{ veya } x \in A_2 \text{ veya } \ldots \text{ veya } x \in A_n\}$$

$=\{x\text{: } x,\ r=1,2,\ldots,n$ olmak üzere en az bir A_r kümesine aittir.$\}$

A ve B kümeleri ortak elemana sahip değilse **ayrık**tır denir yani $A \cap B = \varnothing$. Venn şemasında bu iç içe geçmemiş kümeler şeklinde gösterilir.

Verilen bir A kümesinin **tümleyeni**, A 'ya ait olmayan fakat *U*'da yer alan tüm elemanlardır. A'nın tümleyeni $\overline{A}$ (veya A') şeklinde gösterilir. Tümleyen ile tersini alma arasında açık bir ilişki vardır; eğer A={x: P(x)} ise $\overline{A}$={x: ~P(x)}' tir.

Bir kümenin tümleyeni ile bağlantılı olarak A ve B kümelerinin **farkı** A-B veya A\B şeklinde gösterilir ve bu küme A'nın B'de yer almayan tüm elemanlarını içerir:

$A-B=\{x\text{: } x \in A \text{ ve } x \notin B\}$.

A'nın tümleyeni A'=*U*-A'dır.

Örnek 2.5: $U=\{1,2,3,\ldots,10\}=\{n\text{: } n \in Z^+ \text{ ve } n \le 10\}$, $A=\{n \in U : 1 \le n < 7\}$, $B=\{n \in U$: n 3'ün katları$\}$ olsun. O halde; A={1,2,3,4,5,6} ve B={3,6,9}. Bu nedenle:

$A \cap B = \{3,6\}$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,9\}$$

$$A - B = \{1,2,4,5\}$$

$$B - A = \{9\}$$

$$\overline{A} = \{7,8,9,10\}$$

$$\overline{B} = \{1,2,4,5,7,8,10\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{7,8,10\} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \{1,2,4,5,7,8,9,10\} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

2.4 Sayma Teknikleri

Bazı kompleks matematiksel sonuçlar sayma argümanlarının ispatlarına bağlıdır: çeşitli kümelerin eleman sayılarını saymak, belli bir sonucun kaç değişik yolla elde edilebileceğini saymak gibi. Sayma kısmen kolay bir olay gibi görünse de, pratikte çok kompleks olabilir. Matematikçiler sayma problemleri için birçok teknik ve sonuç üretmişlerdir ve konuya sayma teorisi adını vermişlerdir.

Saymanın en basit sonuçlarından biri şudur: iki ayrık A ve B kümesinin toplam eleman sayısını bulmak için A'nın elemanlarını, B'nin elemanlarını sayıp toplarız.

Sayma Prensibi 1: Eğer A ve B ayrık iki küme ise $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Çoğu uygulama doğal olarak ikiden fazla küme içerir. Yukarıdaki prensip aşağıdaki şekilde genelleştirilir.

Sayma Prensibi 2: Eğer $A_1, A_2, \ldots, A_n$ küme ise ve bu kümelerin hiçbir çifti ortak bir elemana sahip değilse $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1|+|A_2|+\ldots+|A_n|$.

Bazen, elemanları sayılacak kümeler yukarıdaki sayma prensiplerinin katı kuralını-herhangi bir çiftin ayrık olması- sağlamayabilir. Öte yandan, bu durumda kümeyi sayma prensiplerinin koşullarını sağlayacak alt kümeler bölmek mümkündür. Bu şekilde ispatlanabilecek en basit sonuç şudur:

Teorem 2.2(Ekleme(inclusion)-Çıkarma(exclusion) Prensibi): Eğer A ve B sonlu kümeler ise $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$.

İspat: $A \cup B$' yi sayma prensibi 2'yi sağlayan alt kümelerine böleriz: A-B, $A \cap B$ ve B-A.

Sayma prensibi 2' den,

$$|A \cup B| = |A-B|+|A \cap B|+|B-A|. \quad (1)$$

A ve B kümelerinin kendileri sırasıyla A-B, $A \cap B$ ve B-A, $A \cap B$ şeklinde ayrık alt kümelere bölünebilir. Böylece;

$$|A|=|A-B|+|A \cap B| \quad (2)$$

$$|B|=|B-A|+|A \cap B|. \quad (3)$$

Bu durumda (1), (2) ve (3) eşitliklerini birleştirerek istenilen sonucu elde etmek çok kolay bir işlemdir. Ekleme-çıkarma prensibi bu şekilde adlandırılır çünkü $A \cup B$' nin elemanlarını saymak için A'nın elemanlarını ve B'nin elemanlarını ekledik ve böylece $A \cap B$' nin elemanlarını iki kere eklemiş olduk. $A \cup B$' nin doğru eleman sayısını elde etmek için $A \cap B$'yi bir kere çıkarmak gerekir.

İki kümeden fazla durumlar için benzer sayma teknikleri vardır. Üç küme için sonuç aşağıdaki teoremdeki gibi bulunur.

Teorem 2.3: A, B ve C sonlu kümeler ise

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

2.5 Kümeler Cebri

Açıktır ki, kesişim, birleşim ve tümleyen işlemleri birbiriyle ilişkilidir. Örneğin;

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Aşağıdaki kurallar tüm A, B ve C kümeleri için geçerlidir.

Aynılık (Tek Kuvvet) Özelliği

$A \cap A = A$
$A \cup A = A.$

Değişme Özelliği

$A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$

Birleşme Özelliği

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Yutan Eleman

$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cup (A \cap B) = A.$

Dağılma Özelliği

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Çift ters Özelliği((Double negation)

$\overline{\overline{A}} = A.$

De Morgan Kuralları

$\left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\left(\overline{A \cap B}\right) = \overline{A} \cup \overline{B}.$

Özdeşlik Özelliği

$A \cup \varnothing = A$
$A \cap U = A$
$A \cup U = U$
$A \cap \varnothing = \varnothing.$

Tamlama Özelliği

$A \cup \overline{A} = U$
$A \cap \overline{A} = \varnothing$
$\overline{\varnothing} = U$
$\overline{U} = \varnothing.$

Bu kurallar uygun önermeler arasındaki mantıksal eşitliklerden de türetilebilmesine rağmen en iyi Venn şemaları ile gösterilir.

2.5.1 Eşlik Kuralı (Duality Principle)

$\wedge,\vee$ ve tersini alma bağlayıcılarını içeren bileşik önermelerin eşli önermeye sahip olduğu gibi $\cap,\cup$ ve tümleme içeren kümeler hakkındaki ifadeler de eşlidir. Böyle bir ifadenin eşi orijinal ifadedeki tüm $\cap$' lerin $\cup$ ile; tüm $\varnothing$' lerin U ile değiştirilmesi ile elde edilir. Örneğin;

$(A\cap \varnothing) \cup (B\cap U) \cup \overline{B} = U$ 'in eşi $(A\cup U) \cap (B\cup \varnothing) \cap \overline{B} = \varnothing$.

Kümeler cebrinin her bir kuralının eşi de ayrıca bir kuraldır. Bunun sonucu olarak kümeler için aşağıdaki eşlik kuralı ortaya çıkmıştır.

Kümeler için eşlik kuralı: Eğer kümeler ile ilgili bir ifade tüm kümeler için doğruysa bunun eş ifadesinin de tüm kümeler için doğru olması gerekir.

2.6 Kümelerin Aileleri

Kümelerin ailesi veya kümlerin toplanması terimiyle, kümelerin kümesi kastedilmekte ise de her iki terimde sıklıkla kullanılmaktadır.

$I=\{1,2,\ldots,n\}$ verilsin ve $\forall i \in I$ *için,* A_i kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\{A_i : i\in I\} = \{A_1, A_2, \quad , A_n\}$

I kümesine gösterge kümesi denir ve Ai 'leri birleşme için göstergeler. Eğer, $I=\{1,2,n\}= Z^+$ ise, $\{A_i : i\in I\} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\}$ dır.

Bu notasyonu kullanarak, kümelerin keyfi bir ailesine kesişim ve birleşimi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\boldsymbol{F} = \{A_i : i\in I\}$ kümelerin bir ailesi olarak verilsin burada, I herhangi bir gösterge kümesidir.

F ailesinin Kesişim ve birleşimi : $\bigcap_{i\in I} A_i = \{ x: x \in A_i$ bütün $i\in I$ için $\}$; $\bigcup_{i\in I} A_i = \{ x: x \in A_i$ bazı $i\in I$ için $\}$

Örnek: I= Z^+ = {1,2,3,…..,} ve her bir i∈ Z^+ için A_i = {i} . Böylece, A_1= {1}, A_2= {2}, ...

Bu nedenle: $\bigcap_{i\in Z^+} A_i = \varnothing$; ve $\bigcup_{i\in Z^+} A_i$ = {1,2,3,…..,} = $\mathbf{Z}^+$ dir.

2.6.1 Kuvvet Kümesi

Verilen bir A kümesinin bütün alt kümelerinin kümesine A'nın kuvvet kümesi denir ve P(A) ile gösterilir. P(A) = {B : B ⊆ A} dir

Örnek1 : A={ a,b } ise P(A)= { ∅,{a},{b},{a,b}} dir.

Örnek2 : A herhangi bir küme olsun ve kümelerin sırası A, P(A), P(P(A)), P(P(PA))), ... dır.

P*(A) bu ailede A'nın tüm elemanlarının kümesinin ailesini temsil eder.

P*(A) ={x: x ∈ A veya x ⊆ y burada , y∈ P*(A)} dır ve P*(A) sonsuz bir kümedir.

2.6.2 Bir Kümenin Bölmelenmesi

A bir küme olsun. A'nın bölmelenmesi, A'nın boş olmayan alt kümeleri { S_i : i∈I } dir öyleki;

i) $\bigcup_{i\in I} S_i = A$, ve

ii) $S_i \bigcap S_j = \varnothing$ eğer, bütün i,j ∈ I için $i \neq j$ ise) dir

Örnek 1: a={1,2,3,4,5,6} ise A'nın bölmelenmesi {{1},{2,3},{4,5,6}} dır.

Örnek 2: herbir α gerçel sayısı için L_α , (α,0) noktasından geçen düşey çizgi üzerindeki noktaların kümesi olsun:

L_α = x = α ve y gerçel birsayıdır} = {(α,y) : y ∈ $\boldsymbol{R}$} dir

{ L_α : α ∈ $\boldsymbol{R}$ } kümelerinin ailesi düzlemi bölmeler : L_α çizgileri üzerindeki herbir nokta ve herhangi iki çizgi birbirinden ayrıdır.

2.7 Kartezyen Çarpım

Bir kümenin elemanlarının hangi sıra ile listelendiği önemsizdir. Öte yandan bazı durumlarda sıra çok önemlidir. Örneğin, koordinat geometride (1,2) noktası ile (2,1) noktası faklıdır.

Sıranın önemli olduğu durumlarla başa çıkmak için x ve y objelerinin **sıralı ikili** (x,y)'yi tanımlarız.

(x,y) = (x',y') sadece ve sadece x=x' ve y=y' ise.

Bu tanımla birlikte açıktır ki (x,y) ile (y,x) faklıdır(x=y değilse) ve sıra önemlidir.

Şu an ileriki bölümlerde temel teşkil edecek iki kümenin kartezyen çarpımı kavramını tanımlayabilecek durumdayız.

Tanım: X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı X x Y, x X' e y de Y' ye ait olmak üzere tüm (x,y) sıralı ikililerinin kümesidir.

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X \text{ ve } y \in Y\}.$$

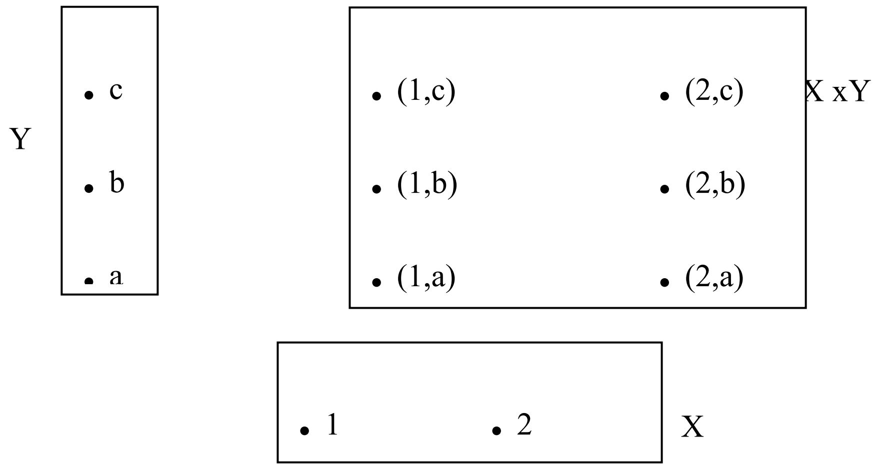
X=Y olması durumunda X x X, X^2 ile gösterilir ve 'X iki' şeklinde okunur, 'X kare' şeklinde değil.

Eğer X veya Y (veya her ikisi de) boş küme ise X x Y de boş kümedir. X ve Y' nin her ikisi de boş olmayan kümeler ise sadece ve sadece X=Y ise X x Y= Y x X 'dir.

Örnek 2.6: Eğer X={1,2} ve Y={a,b,c} ise

$$X \times Y = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}.$$

X, Y ve X x Y' nin elemanları basit bir Venn şeması ile sistematik olarak gösterilebilir. Bu Venn şeması Şekil 2.3' teki gibidir.



Şekil 2.3

Şekil 2.3 gibi diyagramlar ve R^2= R x R düzleminin koordinat geometri resimleri Kartezyen çarpımının yararlı gösterimleridir. Farklı bir gösterimde ise X ve Y kümeleri Venn diyagramlarındaki gibi iki boyutlu bölgeler yerine tek boyutlu bölgeler olarak çizilir. X ve Y doğru segmentleri olarak çizilir ve elemanları bu doğru segmentinin üzerine yerleştirilir. Uygun olan X'i temsil eden doğrunun yatay olarak çizilmesi ve doğruların birbirine dik olmasıdır. Kartezyen çarpım X 'in üzerinde,Y' nin sağında bulunan dikdörtgensel bölgedir ve (x,y) sıralı ikilileri bu dikdörtgenin içine noktalar dikey olarak x' in üzerine, yatay olarak y' nin sağına gelecek şekilde yerleştirilir.

(x,y) sıralı ikilisi aşağıdaki özellik yardımıyla sıralı n-elemanlı (ordered n-tuple) şekle genelleştirilebilir.

$(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ sadece ve sadece $x_1= x_1'$, $x_2= x_2'$,…, $x_n= x_n'$ ise.

n tane kümenin kartezyen çarpımı iki kümedeki durumun doğal genelleştirilmesidir.

Tanım: X_1, X_2, …, X_n kümelerinin kartezyen çarpımı $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ 'dir.

$$= \{(x_1,x_2,\ldots,x_n): x_1 \in X_1 \text{ ve } x_2 \in X_2 \text{ ve } \ldots \text{ ve } x_n \in X_n\}$$
$$= \quad (x_1,x_2,\ldots,x_n): \quad x_i \in X_i \quad i=1,2,\ldots,n \text{ olmak üzere}\}.$$

Örnek 2.7: A={1,2}, B={a,b} ve C={ α , β } ise
A x B x C = {(1,a, α), (1,a, β), (1,b, α), (1,b, β),(2,a, α),(2,a, β),(2,b, α),(2,b, β)}.

Üç kümeden oluşan kartezyen çarpımları göstermek kolay değildir fakat üç boyutlu bölgeler ile gösterilebilecekleri açıktır.

X ve Y sonlu kümeler olmak üzere |X|=n ve |Y|=m ise açıktır ki kartezyen çarpım X x Y mn elemana sahiptir. Öyle ki;

$$|X \times Y| = |X| \, . \, |Y|.$$

Bu sonuç aşağıdaki gibi n tane küme için genelleştirilebilir.

Teorem 2.4: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sonlu kümeler ise $| X_1 \times X_2 \times X_n|=| X_1|.| X_2|. \ldots .| X_n|$.

Kartezyen çarpım işleminin kesişim ve birleşim gibi diğer küme teoremi işlemleri ile nasıl davranacağına geçmeden önce aşağıdaki örneğe bakalım.

Örnek 2.8: A={a,b,c,d}, X={x,y,z}, Y={y,z,t} olsun. Bu durumda

$X \cap Y$={y,z} olur ve
A x (X $\cap$ Y)={(a,y),(a,z),(b,y),(b,z), (c,y),(c,z), (d,y),(d,z)}'dır. Şimdi,
A x X={(a,x),(a,y),(a,z), (b,x),(b,y),(b,z),(c,x),(c,y),(c,z), (d,x),(d,y),(d,z)} ve
A x Y={(a,y),(a,z),(a,t), (b,y),(b,z),(b,t),(c,y),(c,z),(c,t), (d,y),(d,z),(d,t)} olur. Bu nedenle,
(A x X) $\cap$ (A x Y)={ (a,y),(a,z), (b,y),(b,z), (c,y),(c,z), (d,y),(d,z)} olur.

O halde bu örnekteki kümeler için;

A x (X $\cap$ Y)=(A x X) $\cap$ (A x Y) olduğuna göre bu özelliğin diğer A, X ve Y kümeleri için de doğru olup olmadığına bakabiliriz.

Aslında yukarıdaki örnekte elde ettiğimiz sonuçlar tüm A, X ve Y kümeleri için geçerlidir. Aşağıdaki teoremde Kartezyen çarpımın kesişim ve birleşim işlemlerinde nasıl davrandığını belirten özellikler listelenmiştir.

Teorem 2.5 (i) Tüm A, X ve Y kümeleri için
A x (X $\cap$ Y) = (A x X) $\cap$ (A x Y) ve
(X $\cap$ Y) x A = (X x A) $\cap$ (Y x A). (Bunun anlamı Kartezyen çarpım kesişim üzerine dağılabilir.)
(ii) Tüm A, X ve Y kümeleri için
A x (X $\cup$ Y) = (A x X) $\cup$ (A x Y) ve
(X $\cup$ Y) x A = (X x A) $\cup$ (Y x A). (Bunun anlamı Kartezyen çarpım birleşim üzerine dağılabilir.)

İspat: (i). kısmın ispatı şu şekildedir.

(a,x) $\in$ Ax(X $\cap$ Y) olsun. Kartezyen çarpımın tanımından bunun anlamı a $\in$ A ve x $\in$ (X $\cap$ Y)' dır. Bu sonuçla, x $\in$ X' tir, öyleyse (a,x) A x X' e aittir; x $\in$ Y' tir, öyleyse (a,x) A x Y' e aittir. Bu nedenle, (a,x) $\in$ (A x X) $\cap$ (AxY)' dir ki bu da A x (X $\cap$ Y) $\subseteq$ (A x X) $\cap$ (A x Y) olduğunu ispatlar.

Alt küme ilişkisini diğer taraftan ispatlamak için; (a,x)$\in$ (A x X) $\cap$ (A x Y) olsun.

Bu durumda (a,x)$\in$ (A x X) 'tir öyleyse a$\in$A ve x$\in$X; ayrıca (a,x)$\in$ (A x Y)'tir öyleyse a$\in$A ve x$\in$Y' dir. Bu nedenle a$\in$A ve x$\in$(X$\cap$Y)' dir ve bunun anlamı (a,x) sıralı ikilisi A x (X$\cap$Y) kartezyen çarpımına aittir. Bundan dolayı (A x X) $\cap$ (A x Y) $\subseteq$ A x (X$\cap$Y) olmalıdır.

Şu halde A x (X$\cap$Y) ve (A x X) $\cap$ (A x Y) kümelerinin eşit olduğu sonucu sağlanmış olur zira her iki küme de birbirinin alt kümesidir.

Son olarak Kartezyen çarpımın alt küme ilişkilerinde nasıl davranacağına ilişkin bir teorem yazabiliriz.

Teorem 2.6: (i) Tüm A, B ve X kümeleri için A $\subseteq$ B ,(A x X) $\subseteq$ (B x X) anlamına gelir.

(ii) Eğer X boş olmayan bir küme ise (A x X) $\subseteq$ (B x X), A $\subseteq$ B anlamına gelir.

2.8 Alıştırmalar

1- A ve B' nin ortak elemanı yoksa ve C={x: x$\in$A$\wedge$x$\in$B} ise C' nin boş küme olduğunu kanıtlayınız.

2- {x: 2x^2+5x-3=0}$\subseteq${x: 2x^2+7x+2=3/x} olduğunu ispatlayınız.

3- Aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu göstermek için Venn şemalarını çiziniz.

(i) $(\overline{A-B})$=B$\cup\overline{A}$
(ii) (A-B) $\cup$ (B-A)=(A$\cup$B)-(A$\cap$B)

4- [0,1]={x$\in$IR:0$\leq$x$\leq$1} (0,1)={ x$\in$IR:0<x<1}

[0,1)= {x$\in$IR:0$\leq$x<1} (0,1]= {x$\in$IR:0<x$\leq$1}

olsun. Bu durumda aşağıdaki kümeleri geometrik olarak tanımlayınız.

(i) [0,1] x [0,1)
(ii) [0,1) x (0,1]

5- X x Y = X x Z ise Y=Z olmak zorunda mıdır? Açıklayınız.