ÖRNEK : $x^2+y^2+z^2=a^2$ kapalı fonk. için $z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, z_{yy}=?$

ÇÖZÜM : $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z}$$

$$z_{xx}=-\frac{(x)'\cdot z-z_x\cdot x}{z^2}=-\frac{1\cdot z-z_x\cdot x}{z^2}$$

$$=-\frac{z-\left(\frac{-x}{z}\right)\cdot x}{z^2}=+\frac{x^2+z^2}{z^3}$$

$$z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z}$$

$$z_{yy}=-\frac{y'\cdot z-z_y\cdot y}{z^2}=-\frac{1\cdot z-\left(-\frac{y}{z}\right)\cdot y}{z^2}$$

$$=\frac{-z^2-y^2}{z^3}$$

$$z_{xy}=(z_x)_y=\left(-\frac{x}{z}\right)_y=-\frac{x'\cdot z-z_y\cdot x}{z^2}$$

$$=-\frac{0\cdot z-\left(\frac{-y}{z}\right)\cdot x}{z^2}=-\frac{xy}{z^3}$$

HERHANGİ BİR YÖNDE TÜREV ALMA

$f(x,y,z)$ fonksiyonu $x=g(t)$, $y=h(t)$, $z=k(t)$ eğrisi üzerinde verildiğinde zincir kuralına göre

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\quad\ldots\ldots\quad(*)$$

yazılabildiğini görmüştük. Eğer, eğri özel olarak $P(a,b,c)$ noktasından geçen $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ vektörüne paralel olan $x=a+u_1t$, $y=b+u_2t$, $z=c+u_3t$ doğrusu ise $(*)$ eşitliği

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_P=\frac{\partial f}{\partial x}u_1+\frac{\partial f}{\partial y}u_2+\frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

şeklini alır. Bu ifade. u vektörü ile f nin <u>gradiyenti</u> denilen

(Nabla)

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{k}$$

vektörünün skaler çarpımıdır. Bunun $P(a,b,c)$ noktasındaki değeri $(\nabla f)_P$ ile gösterilir.

<u>TANIMI</u> $f(x,y,z)$ fonksiyonunun (a,b,c) noktasındaki kısmi türevleri var olsun. u <u>birim vektör</u> olmak üzere

$$(D_u f)_P=(\nabla f)_P\cdot u$$

{u birim vektör ise $\|u\|=1$ dir. $\|u\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$ 'dir.}

sayısına f nin u yönündeki türevinin P noktasındaki değeri denir.

ÖRNEK: $f(x,y,z) = xy^2 + yz$ fonksiyonunun $u = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k}$ yönündeki türevinin $P(1,7,7)$ noktasındaki değerini bulunuz.

ÇÖZÜM: $f_x = y^2$, $f_y = 2xy + z$, $f_z = y$ olduğundan f nin $P(1,7,7)$ noktasındaki gradiyenti

$$(\nabla f)_P = (\nabla f)_{(1,7,7)} = y^2\vec{i} + (2xy+z)\vec{j} + y.\vec{k}\,\Big|_{(1,7,7)}$$

$= 49\vec{i} + 21\vec{j} + 7\vec{k}$ olur. Buna göre

$$(D_u f)_{(1,7,7)} = (\nabla f)_{(1,7,7)} \cdot u = (49\vec{i} + 21\vec{j} + 7\vec{k}) \cdot \left(\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k}\right)$$

$$= 49.\frac{2}{7} + 21.\frac{3}{7} + 7.\left(-\frac{6}{7}\right) = 17.$$

NOT: $\frac{u}{\|u\|} = \frac{\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2}} = \frac{\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k}}{1} = \boxed{\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k}}$

$\vec{u}$ vektörü birim vektör yapılıyor.

($\vec{u}$ birim vektör old. tekrar birim vektör yapmaya gerek yok)

AÇIKLAMA (Doğrultman Kosinüsleri)

u birim vektörünün koordinat eksenleri ile yaptığı açıların ölçüleri, sırası ile θ, φ, γ ise u nun bileşenleri $\cos\theta$, $\cos\varphi$, $\cos\gamma$ olur. Bunlara u vektörünün doğrultman kosinüsleri denir. Bu durumda f nin u yönündeki türevi

$$D_u f = f_x \cos\theta + f_y \cos\varphi + f_z \cos\gamma$$

olur.

f iki değişkenli bir fonksiyon ise, u vektörünün OX-ekseni ile yaptığı açının ölçüsü θ ise Oy ekseni ile yaptığı açının ölçüsü $\frac{\pi}{2} - \theta$ dır. $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ olacağından $f(x,y)$ fonksiyonunun u yönündeki türevi

$$D_u f = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK: $f(x,y) = 2xy + 3x^3y$ fonksiyonu için $(D_{\frac{\pi}{4}} f)(1,2)$ türevini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $f_x(x,y) = 2y + 9x^2y$, $\quad f_y(x,y) = 2x + 3x^3$

$$D_{\frac{\pi}{4}} f = (2y + 9x^2y) \cdot \cos\frac{\pi}{4} + (2x + 3x^3) \cdot \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\left(D_{\frac{\pi}{4}} f\right)(1,2) = (2.2 + 9.1.2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (2+3)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{27}{2}\sqrt{2}$$

<u>ÖRNEK</u> : $f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$ fonksiyonunun Ox- ekseni ile $60°$ lik açı yapan vektör yönündeki türevini bulunuz. $P(1,2)$ noktasındaki değerini hesaplayınız.

<u>ÇÖZÜM</u> f iki değişkenli bir fonksiyon ise u vektörünün Ox- ekseni ile yaptığı açının ölçüsü θ ise Oy- ekseni ile yaptığı açının ölçüsü $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ olur. Yani $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ olacağından $f(x,y)$ nin u yönündeki türevi

$$D_u f = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta$$

dır. $f_x(x,y) = 2x - y$, $f_y(x,y) = -x - 4y$

$$\Rightarrow D_u f = (2x - y)\cos 60 + (-x - 4y)\cdot\sin 60$$

$$\Rightarrow (D_u f)(1,2) \; (2\cdot 1 - 2)\frac{1}{2} + (-1 - 4\cdot 2)\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

<u>ÖRNEK</u> : $f(x,y,z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ fonksiyonunun eksenlerle α, β, γ açılarını yapan vektör yönündeki değerlerini hesaplayınız. Bu türevin orjindeki değerini bulunuz.

<u>ÇÖZÜM</u> : $(D_u f) = f_x \cdot \cos\alpha + f_y \cos\beta + f_z \cos\gamma$

$$= \frac{e^x}{e^x + e^y + e^z}\cdot\cos\alpha + \frac{e^y}{e^x + e^y + e^z}\cos\beta + \frac{e^z}{e^x + e^y + e^z}\cos\gamma$$

$$\Rightarrow (D_u f)(0,0,0) = \frac{1}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$$

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

(Tam Dif. – Kapalı Fonk. Türevi – Herhangi bir yönde türev – Taylor Açılımı)

① $\sqrt{(5,98)^2+(8,01)^2}$ sayısının yaklaşık değerini hesaplayınız.

Çözüm: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=6$, $y=8$, $dx=-0,02$, $dy=0,01$

alalım. $df = f_x\,dx + f_y\,dy = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$

$= \dfrac{6}{\sqrt{6^2+8^2}}\cdot(-0,02) + \dfrac{8}{\sqrt{6^2+8^2}}(0,01) = -0,004$ olup

$df=-0,004$ olduğundan $f=\sqrt{6^2+8^2}=10$ fonksiyonundaki değişim miktarı $-0,004$ dir. Yani

$$\sqrt{(5,98)^2+(8,01)^2} = 10-0,004 = 9,996 \text{ bulunur.}$$

② $z = x e^y$ için ikinci mertebeden d^2z tam diferansiyelini hesaplayınız.

Çözüm: $dz = z_x\,dx + z_y\,dy = \underbrace{e^y}_{z_x}dx + \underbrace{xe^y}_{z_y}dy$ dir.

$d^2z = d(dz) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(z_x\,dx+z_y\,dy\right)dx + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(z_x\,dx+z_y\,dy\right)dy$

$= \left(z_{xx}\,dx + z_{yx}\,dy\right)dx + \left(z_{xy}\,dx + z_{yy}\,dy\right)dy$

$= (z_{xx})(dx)^2 + 2.z_{xy}\,dx\,dy + z_{yy}(dy)^2$

$= (e^y)_x(dx)^2 + 2(e^y)_y\,dx\,dy + (xe^y)_y(dy)^2$

$= 0\cdot(dx)^2 + 2e^y\,dx\,dy + xe^y(dy)^2$

③ $x \cdot e^y + y e^z + 2\ln x - 2 - \ln 8 = 0$ ile verilen $z = f(x,y)$ kapalı fonksiyonunun z_x ve z_y kısmi türevlerini $(1, \ln 2, \ln 3)$ noktasında hesaplayınız.

Çözüm: Verilen fonksiyon kapalı fonksiyondur, yani $F(x,y,z)=0$ şeklindedir. Dolayısıyla türev

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{e^y + \frac{2}{x}}{y e^z} \Rightarrow z_x(1,\ln 2,\ln 3) = -\frac{e^{\ln 2} + \frac{2}{1}}{\ln 2 . e^{\ln 3}} = -\frac{4}{3\ln 2}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x.e^y + e^z}{y e^z} \Rightarrow z_y(1,\ln 2,\ln 3) = -\frac{5}{3\ln 2}$$

④ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ile verilen $z = f(x,y)$ kapalı fonksiyonunun $(2,3,6)$ noktasındaki z_x ve z_y kısmi türevlerini hesaplayınız.

Çözüm: $F(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0$ dır.

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{z^2}} = -\frac{z^2}{x^2} \Rightarrow z_x(2,3,6) = -\frac{6^2}{2^2} = -9$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-\frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{z^2}} = -\frac{z^2}{y^2} \Rightarrow z_y(2,3,6) = -4$$

⑤ $\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = 0$ ile verilen $z=f(x,y)$ kapalı fonksiyonunun (π,π,π) noktasındaki z_x ve z_y kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm: $F(x,y,z) = \sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = 0$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(x+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \Rightarrow z_x(\pi,\pi,\pi) = -\frac{\cos 2\pi + \cos 2\pi}{\cos 2\pi + \cos 2\pi} = -1$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(y+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \Rightarrow z_y(\pi,\pi,\pi) = -\frac{\cos 2\pi + \cos 2\pi}{\cos 2\pi + \cos 2\pi} = -1$$

Ödev: $f(x,y,z) = y^2 - xz + 2xy$ fonksiyonunun $u = \frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i} + 0.\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$ yönündeki türevinin $P(1,-2,1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

(*) (Gradiyent vektör hesaplanarak bulunacaktır.) ($\|u\|=1$ old. birim vektördür.) (Birim vektör olmasaydı $v = \frac{u}{\|u\|}$ şeklinde birim vektör yapıp v yönündeki türev hesaplanacaktı).

(6) Aşağıdaki fonksiyonların tam diferensiyellerini bulunuz.

a) $f(x,y) = xe^{xy}$

b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

c) $f(x,y,z) = \ln(xy)+\ln(yz)+\ln(xz)$

d) $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$

Çözüm : a) $df = f_x dx + f_y dy = (\underbrace{1.e^{xy} + ye^{xy}.x}_{\text{Çarpım türevi var}})dx + (x.x e^{xy})dy$

b) ve c) (ödev)

d) $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y} \Rightarrow df = f_x dx + f_y dy$

$$\Rightarrow df = \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} dx + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} dy = \frac{y\,dx}{y^2+x^2} - \frac{x\,dy}{y^2+x^2}$$

(7) $z = x^2y^3$ yüzeyinin $A(1,1)$ noktasındaki gradiyent vektörünü bulunuz.

Çözüm : $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ dir. $\{f(x,y,z) = x^2y^3 - z = 0\}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$ dir.

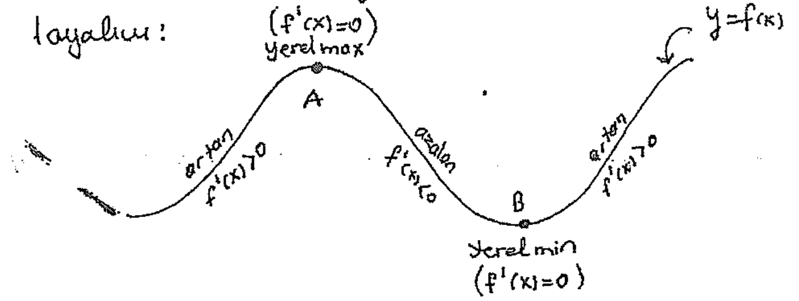
$\nabla f = 2xy^3\vec{i} + 3y^2x^2\vec{j} - 1.\vec{k}$ bulunur.

(8) $\sqrt{(2,01)^2+(1,98)^2+(1,05)^2}$ sayısının yaklaşık değerini hesaplayınız (Tam diferensiyel hesabıyla çözülecek)

Çözüm (ÖDEV)

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA MAKSİMUM VE MİNİMUMLAR

Öncelikle tek değişkenli fonksiyonlarda maksimumu ve minimumu hatırlayalım:



Türev fonksiyonunun (+)'dan (−)'ye geçtiği nokta yerel mak., (−)'den (+)'ya geçtiği nokta yerel min. noktasıdır.

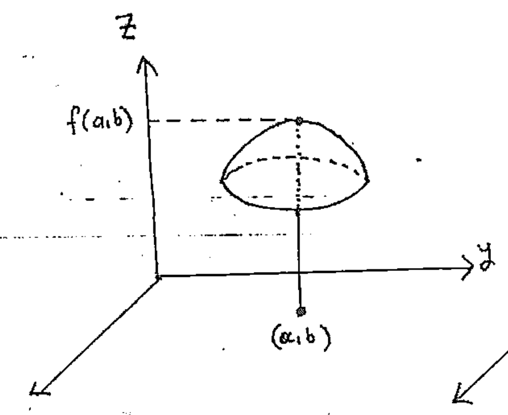
<u>Sonuçlar</u> $f'(c)=0$ ve $f''(c)<0$ ise c'de yerel mak. var.

$f'(c)=0$ ve $f''(c)>0$ ise c'de yerel min. var.

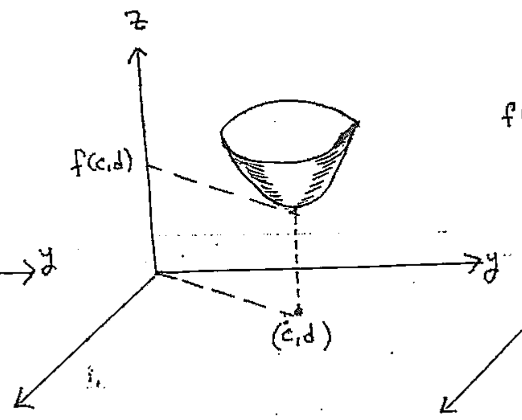
<u>Tanım</u> $A\subset\mathbb{R}^2$ bir açık küme, $f: A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon $(a,b)\in A$ ve $(c,d)\in A$ olsun. Eğer her $(x,y)\in K_1$ için $f(x,y)\le f(a,b)$ olacak şekilde (a,b) noktasının bir K_1 komşuluğu varsa f fonksiyonu (a,b) noktasında <u>yerel maksimuma</u> sahiptir denir.

Eğer $\forall (x,y)\in K_2$ için $f(x,y)\geq f(c,d)$ olacak şekilde (c,d) noktasının bir K_2 komşuluğu varsa f fonksiyonu (c,d) noktasında <u>yerel minimuma</u> sahiptir denir. Yerel maks ve yerel min. noktalarına fonksiyonun <u>yerel ekstremum</u> noktaları denir.

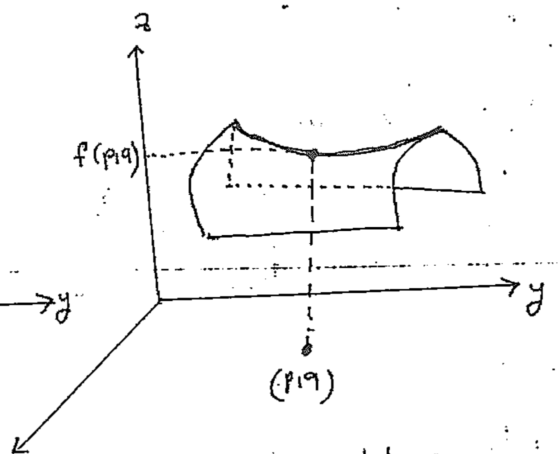
Eğer bir (p,q) noktasının her komşuluğunda $f(x_1,y_1)\le f(p,q)$ olacak şekilde bir (x_1,y_1) noktası ve $f(x_2,y_2)\geq f(p,q)$ olacak şekilde bir (x_2,y_2) noktası varsa (p,q) noktasına f fonksiyonunun <u>eyer noktası</u> denir.



yerel max



yerel min.



eyer noktası.

{eyer noktası hem çukur şeklindedir hem de tümsek şeklindedir.}

NOT: $z=f(x,y)$ fonksiyonu ekstrem değerlerini ya $f_x(x,y)=0$ ve $f_y(x,y)=0$ denklemlerini sağlayan (x,y) noktalarında ya da bu türevlerin var olmadığı noktalarda alır.

TEOREM: $z=f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında 2. mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ olsun.

1) $\Delta=f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)<0$ ise (a,b) eyer noktasıdır.

2) $\Delta=f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)>0$ ve $f_{xx}(a,b)>0$ ise (a,b) noktası yerel minimum,

3) $\Delta=f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)>0$ ve $f_{xx}(a,b)<0$ ise (a,b) noktası yerel maksimum noktasıdır.

NOT: Eğer $\Delta=0$ ise (a,b) noktası hakkında bişey söylenemez. Bu durumda f nin grafiği çizilerek noktanın cinsi belirlenmeye çalışılır.

ÖRNEK: $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$ fonksiyonunun yerel maks ve yerel min. noktalarını bulunuz.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 3y-3x^2=0 \\ f_y &= 3x-3y^2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y&=x^2 \\ x&=y^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y=(y^2)^2 \Rightarrow y-y^4=0 \Rightarrow y(y^3-1)=0 \Rightarrow y_1=0,\ y_2=1.$

$y_1=0 \Rightarrow x_1=0$, $y_2=1 \Rightarrow x_2=1$ olacağından kritik noktalar $(0,0)$ ve $(1,1)$ noktalarıdır.

$f_{xx}=-6x$, $f_{yy}=-6y$, $f_{xy}=3$ olup $(0,0)$ noktasında

$f_{xx}(0,0)=0$, $f_{yy}(0,0)=0$ ve $f_{xy}(0,0)=3$ dür.

$f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=0\cdot 0-3^2=-9<0$ olduğundan

$(0,0)$ noktası, fonksiyonun bir eyer noktasıdır.

Şimdi de $(1,1)$ noktasını inceleyelim:

$f_{xx}(1,1)=-6$, $f_{yy}(1,1)=-6$ ve $f_{xy}(1,1)=3$ dür.

$f_{xx}(1,1)\cdot f_{yy}(1,1)-f_{xy}^2(1,1)=(-6)(-6)-3^2=27>0$ dır.

Diğer yandan $f_{xx}(1,1)=-6<0$ olduğundan teoremin 3. maddesine göre $(1,1)$ noktası bir yerel maksimum noktasıdır.

NOT: Yerel max ve yerel min noktaları birden fazla olabilir. Fakat mutlak maksimumu ve mutlak minimumu varsa bir tektir. Bir B bölgesinde tanımlı bir f fonksiyonu, en büyük (mut. max) ve en küçük değerini (mut. min) B nin bir iç noktasında alıyorsa o nokta bir yerel max veya yerel minimumdur.

NOT

Bir B bölgesinde sürekli türevlere sahip bir fonksiyon, mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini ya B nin içindeki bir yerel ekstremum noktasında ya da B nin sınırı üzerinde alır.

ÖRNEK: $z = 4xy - x^4 - y^4$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: $z = f(x,y)$ old. $f_x = z_x$ ve $f_y = z_y$ demektir. Buna göre

$z_x = 4y - 4x^3 = 0 \Rightarrow y = x^3$

$z_y = 4x - 4y^3 = 0 \Rightarrow x = y^3$

$y = x^3 = (y^3)^3 \Rightarrow y = y^9 \Rightarrow y - y^9 = 0 \Rightarrow y(1 - y^8) = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow A(0,0) \\ y_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow B(1,1) \\ y_3 = -1 \Rightarrow x_3 = -1 \Rightarrow C(-1,-1) \end{array}\right\} \text{Kritik noktaları bulunur.}$$

$z_{xx} = -12x^2$, $z_{yy} = -12y^2$, $z_{xy} = 4$

$z_{xx}(0,0) = 0$, $z_{yy}(0,0) = 0$, $z_{xy}(0,0) = 4$ olup

$z_{xx}(0,0) \cdot z_{yy}(0,0) - z_{xy}^2(0,0) = 0.0 - 4^2 = -16 < 0$ olup $A(0,0)$ noktası eyer noktasıdır.

$z_{xx}(1,1) = -12$, $z_{yy}(1,1) = -12$, $z_{xy}(1,1) = 4$ olup

$z_{xx}(1,1) \cdot z_{yy}(1,1) - z_{xy}^2(1,1) = (-12)(-12) - 4^2 = 128 > 0$ dır. Diğer yandan $z_{xx}(1,1) = -12 < 0$ olduğundan $B(1,1)$ noktası yerel max. noktasıdır.

$z_{xx}(-1,-1) = -12$; $z_{yy}(-1,-1) = -12$, $z_{xy}(-1,-1) = 4$ olup

$z_{xx}(-1,-1) \cdot z_{yy}(-1,-1) - z_{xy}^2(-1,-1) = (-12)(-12) - 4^2 = 128 > 0$ dır.

Diğer yandan $z_{xx}(-1,-1) = -12 < 0$ olup $C(-1,-1)$ noktası da bir yerel maksimum noktasıdır.

NOT! $z_{xx}(a,b) \cdot z_{yy}(a,b) - z_{xy}^2(a,b)$ hesaplanırken ayrı ayrı değerler bulunup yerine yazılması zaman aldığından $z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = (-12x^2)(-12y^2) - 4^2 = 144x^2y^2 - 16$ bulunup burada $A(0,0)$, $B(1,1)$ ve $C(-1,-1)$ değerleri yerine yazılarak hesaplanabilir.

ÖRNEK : $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını hesaplayınız.

Çözüm: $f_x = 2x + y + 3 = 0$, $f_y = x + 2y - 3 = 0$ } iki denklem birlikte çözülürse $x = -3$ ve $y = 3$ bulunur. Yani $A(-3,3)$ kritik noktadır.

$f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 1$.

$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 2.2 - 1^2 = 3 > 0$ dır. Diğer yandan $f_{xx} = 2 > 0$ olduğundan $A(-3,3)$ noktası yerel minimum noktasıdır. $(-3,3)$ noktası $f(x,y)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$f_{min}(A) = (-3)^2 + (-3).(3) + 3^2 + 3.(-3) - 3.3 + 4 = -5 \text{ 'tir.}$$

ÖRNEK : Çarpımları 343 olan üç sayının toplamı en az kaçtır?

Çözüm:

$$343 = x.y.z \Rightarrow z = \frac{343}{x.y} \Rightarrow f(x,y) = x + y + \frac{343}{xy}$$

olduğundan $f(x,y) = x + y + \frac{343}{xy}$ fonksiyonunun en küçük değerini bulmalıyız.

$f_x = 1 - \frac{343}{x^2 y} = 0$

$\frac{343}{x^2 y} = 1 \Rightarrow x^2 y = 343$

$f_y = 1 - \frac{343}{xy^2} = 0$

$\frac{343}{xy^2} = 1 \Rightarrow xy^2 = 343$ } $\frac{xy^2}{x^2 y} = \frac{343}{343} = 1$

$\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow \boxed{x = y}$

$x = y$ alınırsa

$x^3 = 343 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow z = 7$ bulunur. $x + y + z = 21$ 'dir.

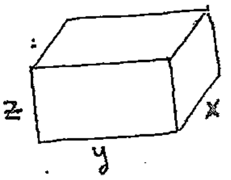
Bulunan bu toplamın gerçekten en az (minimum) olduğunu kontrol edelim:

$f_{xx} = \frac{686}{x^3 y}$, $f_{yy} = \frac{686}{xy^3}$, $f_{xy} = \frac{343}{x^2 y^2}$

$f_{xx}(7,7) = \frac{686}{7^3.7} = \boxed{\frac{2}{7} > 0}$, $f_{yy} = \frac{686}{7.7^3} = \frac{2}{7}$, $f_{xy}(7,7) = \frac{343}{7^2 7^2} = \frac{1}{7}$

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} - \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{49} > 0}$ olup $(7,7)$ noktası yerel minimum noktasıdır. O halde bulunan $x + y + z = 21$ değeri minimumdur.

ÖRNEK: Üst tarafı açık olan dikdörtgenler prizması şeklinde $4\,m^3$ hacminde bir çöp bidonu yapmak isteniyor. En az kaç m^2 saca ihtiyaç vardır.



Çözüm $V = xyz = 4$, $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2zy$.

$$z = \frac{4}{xy}$$

$$f(x,y,z) = xy + 2x\frac{4}{xy} + 2\cdot\frac{4}{xy}\cdot y = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$$

$$f_x = y - \frac{8}{x^2} = 0, \qquad f_y = x - \frac{8}{y^2} = 0$$

$$x^2y - 8 = 0 \quad , \quad xy^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2y}{xy^2} = \frac{8}{8} \Rightarrow \boxed{x = y}$$

$$\Rightarrow f_x = y - \frac{8}{x^2} = 0 \Rightarrow y - \frac{8}{y^2} = 0 \Rightarrow y^3 - 8 = 0 \Rightarrow \quad y = 2 \Rightarrow x = 2.$$

$x = 2$ ve $y = 2 \Rightarrow z = \frac{4}{2.2} = 1$ bulunur. Yani $(2,2,1)$ noktası bulunur.

$f(2,2,1) = 2.2 + 2.2.1 + 2.1.2 = 12\ m^2$ değeri minimumdur. Gerçekten,

$$f_{xx} = \frac{16}{x^3}, \quad f_{yy} = \frac{16}{y^3}, \quad f_{xy} = 1$$

$$f_{xx}(2,2) = 2, \quad f_{yy}(2,2) = 2, \quad f_{xy}(2,2) = 1 \Rightarrow .$$

$\Rightarrow f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 2.2 - 1 = 3 > 0$ ve $f_{xx}(2,2) = 2 > 0$ old. $(2,2,1)$ noktası yerel minimum noktasıdır.

ÖRNEK: $z^2 = xy - 3x + 9$ yüzeyi üzerinde orjine en yakın olan noktayı bulunuz.

Çözüm: Yüzey üzerinde orjine en yakın nokta $P(x,y,z)$ olsun. Bu durumda uzaklık $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dir.

Buradan $d = \sqrt{x^2 + y^2 + xy - 3x + 9}$ olur. Bu fonksiyonu minimum yapan x, y değerleri $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x + 9$ fonksiyonunu minimum yapan değerlerdir. Buna göre

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x + y - 3 = 0 \\ f_y = 2y + x = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 2y + x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2,\ y = -1$$

$z^2 = 2.(-1) - 3.(2) + 9 = 1 \Rightarrow z = \mp 1$ olup..

$(2,-1,1)$ ve $(2,-1,-1)$ kritik noktaları bulunur.

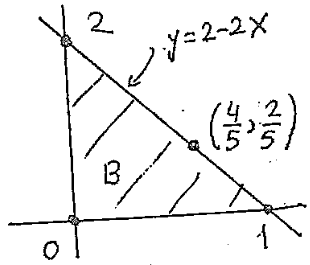
$f_{xx}=2$, $f_{yy}=2$, $f_{xy}=1 \Rightarrow g(x,y)=2.2-1^2=3>0$ ve $f_{xx}>0$

olur ki bulunan kritik noktalar yerel minimum noktası olur.

Böylece $d=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$ birim elde edilir.

Buna göre yüzeyin orjine en yakın noktaları $(2,-1,1)$ ve $(2,-1,-1)$ noktalarıdır.

ÖRNEK: $f(x,y)=x^2+y^2$ fonksiyonunun $B=\{(x,y): x\geq 0,\ y\geq 0,\ y\leq 2-2x\}$ bölgesi üzerinde mutlak ekstremumlarını (en büyük ve en küçük değerlerini) bulunuz.



Çözüm $\left.\begin{array}{l} f_x=2x=0 \Rightarrow x=0 \\ f_y=2y=0 \Rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$ kritik nokta

Şimdi çevre üzerinde (sınırlar üzerinde) ekstrem noktaları araştıralım.

$\boxed{y=0}$ doğrusu üzerinde (x-ekseni üz.) $f(x,y)=f(x,0)=x^2$ olur.

$f'(x,0)=2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow (0,0)$ kritik noktadır.

$\boxed{x=0}$ doğrusu (y-ekseni) üzerinde $f(x,y)=f(0,y)=y^2$ olur.

$f'(0,y)=2y=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow (0,0)$ kritik noktadır.

$y=2-2x$ doğrusu üzerinde $f(x,2-2x)=x^2+(2-2x)^2$ olur.

$f'(x,2-2x)=2x-4(2-2x)=0 \Rightarrow x=\frac{4}{5} \Rightarrow y=\frac{2}{5}$ olup

$(\frac{4}{5},\frac{2}{5})$ kritik noktadır. Fonksiyonun üçgenin köşelerinde

aldığı değerler $f(0,0)=0$, $f(1,0)=1$, $f(0,2)=4$ tür.

Bu değerleri bir ~~tabloda~~ gösterelim. $f(\frac{4}{5},\frac{2}{5})=\frac{4}{5}$ bulunur.

x	0	$\frac{4}{5}$	0	1
y	0	$\frac{2}{5}$	2	0
$f(x,y)$	0	$\frac{4}{5}$	4	1

Tablodan da görüldüğü gibi fonksiyon en büyük değerini $(0,2)$ noktasında alır ve en büyük değeri 4'tür. En küçük değerini $(0,0)$'da alır ve en küçük değeri 0'dır.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

(Yerel ekstremum, Mutlak Ekstremum, Maks-min problemleri)

① $f(x,y) = x^3+y^3+3xy+3$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz. Yerel ekstremum değerlerini hesaplayınız.

<u>Çözüm</u> : $\left.\begin{array}{l} f_x = 3x^2+3y=0 \\ f_y = 3y^2+3x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+y=0 \\ y^2+x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-x^2)^2+x=0 \Rightarrow x^4+x=0$

$\underbrace{x}_{x=0}\underbrace{(x+1)}_{x=-1}(x^2-x+1)=0$

$x_1=0$, $x_2=-1 \Rightarrow y_1=0$, $y_2=-1$ olur. Buna göre kritik noktalar $A(0,0)$ ve $B(-1,-1)$'dir. $A(0,0)$'da $f_{xx}(0,0)=0$, $f_{yy}(0,0)=0$, $f_{xy}(0,0)=3$ old. $f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=-9<0$ dır. o halde

$A(0,0)$ noktası bir eyer noktasıdır.

$B(-1,-1)$ noktasında $f_{xx}=-6$, $f_{yy}=-6$ ve $f_{xy}=3$ olacağından $f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=27>0$ ve $f_{xx}<0$ dır. o halde $B(-1,-1)$ noktası bir yerel maksimum noktasıdır.

$f_{max} = f(-1,-1) = -1-1+3+3=4$ olur. (Yerel ekstrem değeridir). Yani yerel maks. değeridir.

② $f(x,y) = \frac{1}{x}+xy+\frac{1}{y}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz. Yerel ekstremum değerlerini hesaplayınız.

<u>Çözüm</u> : $\left.\begin{array}{l} f_x = -\frac{1}{x^2}+y=0 \\ f_y = x-\frac{1}{y^2}=0 \end{array}\right\} \; x-\frac{1}{\frac{1}{x^4}}=0 \Rightarrow x-x^4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(1-x)(1+x+x^2)=0$

$x=0$, $x=1$

$x=0$ için fonksiyon tanımsız olduğundan bir ekstremum nokta değildir. $x=1$ için $y=1$ olup $A(1,1)$ kritik noktadır.

$f_{xx}=\frac{2}{x^3} \Rightarrow f_{xx}(1,1)=2$, $f_{yy}=\frac{2}{y^3} \Rightarrow f_{yy}(1,1)=2$, $f_{xy}=1$ olduğundan $f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2 = 2.2-1^2=3>0$ dır. $f_{xx}(1,1)>0$ olduğundan $A(1,1)$ noktası bir yerel minimum noktasıdır.

$f_{min} = f(1,1) = 1+1+1=3$ olur. (Yerel minimum değeridir).

(3) $f(x,y) = 4xy - 2x^4 - y^2$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulup yerel ekstremum değerlerini hesaplayınız.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 4y - 8x^3 = 0 \\ f_y &= 4x - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \quad y = 2x \Rightarrow 8x - 8x^3 = 0 \Rightarrow 8x(1-x^2) = 0$$

$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$

$y_1 = -2 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 2$

Buna göre $A(-1,-2)$, $B(0,0)$ ve $C(1,2)$ birer kritik noktadır.

$f_{xx} = -24x^2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 4$ olduğundan

$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 48x^2 - 16 \Rightarrow$

$A(-1,-2)$ noktasında $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 48.(-1)^2 - 16 = 32 > 0$ ve $f_{xx} < 0$ olduğundan $A(-1,-2)$ bir yerel maksimum noktası olur.

$f_{max} = f(-1,-2) = 4.(-1)(-2) - 2.(-1)^4 - (-2)^2 = 2$ dir.

$B(0,0)$ noktasında $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 0.(-2) - 4^2 = -16 < 0$ old.

$B(0,0)$ noktası bir eyer noktasıdır.

$C(1,2)$ noktasında $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 48 \cdot 1^2 - 16 = 32 > 0$ ve $f_{xx} < 0$

old. $C(1,2)$ bir yerel maksimum noktasıdır.

$f_{max} = f(1,2) = 4.1.2 - 2.1^4 - 2^2 = 2$ dir.

(4) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z = 8$ denklemiyle verilen yüzeyin yerel ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem kapalı bir fonksiyonun denklemidir.

$z_x = -\dfrac{F_x}{F_z}$ ve $z_y = -\dfrac{F_y}{F_z}$ şeklindeydi.

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \mp 1 \\ F_y &= -2y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{aligned}\right\}$$ Kritik noktalar $(1,2)$ ve $(-1,2)$ dir

$F_z = 2z + 1$

z_x yerine $-\dfrac{3x^2-3}{2z+1}$ yaz

$z_x = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{3x^2-3}{2z+1} \Rightarrow z_{xx} = -\dfrac{6x.(2z+1) - 2.z_x.(3x^2-3)}{(2z+1)^2}$

$$z_{xy} = (z_x)_y = \left(-\frac{3x^2-3}{2z+1}\right)_y = -\frac{0.(2z+1) - 2z_y.(3x^2-3)}{(2z+1)^2}.$$

$$\Rightarrow z_y = \frac{2y-4}{2z+1} \Rightarrow z_{yy} = \frac{2.(2z+1) - 2.z_y(2y-4)}{(2z+1)^2} =$$

olur. $(1,2)$ noktası için $1-4-3+8+z^2+z=8 \Rightarrow z_1=2, \ z_2=-3$. $(-1,2)$ noktası için benzer olarak $z=-2$ ve $z=1$ bulunur. O halde yüzey üzerindeki kritik noktalar $A(1,2,2)$, $B(1,2,-3)$, $C(-1,2,-2)$ ve $D(-1,2,1)$ noktalarıdır.

$A(1,2,2)$ noktası için $z_{xx}(1,2,2) = -\dfrac{6.1.(2.2+1) - 2.z_x.(3.1^2-3)}{(2.2+1)^2} = -\dfrac{6}{5}$

$$z_{yy}(1,2,2) = \frac{2.(2.2+1) - 2.z_y.(2.2-4)}{(2.2+1)^2} = +\frac{2}{5}$$

$z_{xy}(1,2,2) = 0$ olacağından $z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = -\dfrac{12}{25} < 0$ dır. Dolayısıyla $A(1,2,2)$ noktası bir eyer noktasıdır. B, C ve D noktaları da benzer biçimde gösterilebilir.

5) $z = x^3+3xy^2-15x-12y$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulup cinsini belirleyiniz. Fonksiyonun bu noktadaki değerini hesaplayınız.

Çözüm : $\left.\begin{array}{l} z_x = 3x^2+3y^2-15=0 \\ z_y = 6xy-12=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{array}\right\}$ $x^2+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2=5$

$$\Rightarrow x^2+\frac{4}{x^2}=5 \Rightarrow x^4-5x^2+4=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2-1)=0$$

$x_1=2, \quad x_2=-2, \quad x_3=1, \quad x_4=-1$

$y_1=1 \quad y_2=-1 \quad y_3=2, \quad y_4=-2$

$A(2,1)$, $B(-2,-1)$, $C(1,2)$, $D(-1,-2)$ kritik noktalardır.

$z_{xx}=6x, \quad z_{yy}=6x, \quad z_{xy}=6y$

$g(x,y) = z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2)$

$A(2,1)$ için $g(2,1) = 36 \cdot (2^2 - 1^2) = 108 > 0$ ve $z_{xx}(2,1) = 12 > 0$

old. $A(2,1)$ yerel minimum noktasıdır.

$z_{min} = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = -28$ yerel minimum değeridir.

$B(-2,-1)$ için $g(-2,-1) = 36 \cdot ((-2)^2 - (-1)^2) = 108 > 0$ ve $z_{xx}(-2,-1) = -12 < 0$

old. $B(-2,-1)$ yerel maksimum noktasıdır.

$z_{max} = (-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-2) - 12 \cdot (-1) = 28$ yerel max. değeridir.

$C(1,2)$ için $g(1,2) = 36 \cdot (1^2 - 2^2) = -108 < 0 \Rightarrow C(1,2)$ eyer noktası

$D(-1,-2)$ için $g(-1,-2) = 36 \cdot ((-1)^2 - (-2)^2) = -108 < 0 \Rightarrow D(-1,-2)$ eyer noktası.

(6) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz ve yerel ekstremum değerlerini hesaplayınız.

Çözüm

$$z_x = \frac{0 \cdot (x^2+y^2-1) - 2x \cdot (1)}{(x^2+y^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+y^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$z_y = \frac{0 \cdot (x^2+y^2-1) - 2y \cdot (1)}{(x^2+y^2-1)^2} = \frac{-2y}{(x^2+y^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

olup $A(0,0)$ noktası kritik noktadır.

$$z_{xx} = \frac{-2 \cdot (x^2+y^2-1)^2 - 2(x^2+y^2-1) \cdot 2x \cdot (-2x)}{(x^2+y^2-1)^4}$$

$$z_{yy} = \frac{-2 \cdot (x^2+y^2-1)^2 - 2(x^2+y^2-1) \cdot 2y \cdot (-2y)}{(x^2+y^2-1)^4}$$

$$z_{xy} = \frac{0 \cdot (x^2+y^2-1)^2 - 2(x^2+y^2-1) \cdot 2y \cdot (-2x)}{(x^2+y^2-1)^4} = \frac{8yx}{(x^2+y^2-1)^3}$$

$z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 \Big|_{(0,0)} = (-2) \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0$ ve $z_{xx}(0,0) = -2 < 0$ old.

$A(0,0)$ yerel max. noktasıdır. $z_{max} = z(0,0) = \dfrac{1}{0^2 + 0^2 - 1} = -1$ 'dir.

(7) $z = 6y - 2x - x^2 - y^2$ denklemi ile verilen yüzeyin en yüksek noktasını bulunuz.

Çözüm: $z_x = -2 - 2x = 0 \Rightarrow x = -1$, $z_y = 6 - 2y = 0 \Rightarrow y = 3$ } $A(-1,3)$ kritik nokta

$\Rightarrow z = 6.3 - 2.(-1) - (-1)^2 - 3^2 = 10$

$z_{xx} = -2$, $z_{yy} = -2$, $z_{xy} = 0$ } $z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = 4 > 0$ ve $z_{xx} < 0$ olduğundan $(-1, 3, 10)$ noktası yüzeyin en yüksek noktasıdır. ($(-1,3)$ noktası yerel max. noktasıdır)

(8) $z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3$ denklemi ile verilen yüzeyin en yüksek veya en alçak noktasını bulunuz.

Çözüm $z_x = 2x - 2 = 0$, $z_y = 2y - 2 = 0$ } $x = 1$, $y = 1$ } $A(1,1)$ kritik noktadır.

$z_{xx} = 2$, $z_{yy} = 2$, $z_{xy} = 0$ } $z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = 4 > 0$ ve $z_{xx} = 2 > 0$ olduğundan $(1,1)$ noktası yerel minimum noktasıdır.

$z_{min} = 1^2 - 2.1 + 1^2 - 2.1 + 3 = 1$ olup yüzeyin en alçak noktası $(1,1,1)$ idir.

(9) $z = \dfrac{1}{10 - 2x - 4y + x^2 + y^4}$ denklemi ile verilen yüzeyin en yüksek veya en alçak noktasını bulunuz.

Çözüm $t = 10 - 2x - 4y + x^2 + y^4$ diyelim. $z = \frac{1}{t}$ olur. t nin minimum olduğu yerde z maksimum, t nin maksimum olduğu yerde z minimum olur. Buna göre t yi incelemek daha kolay olur.

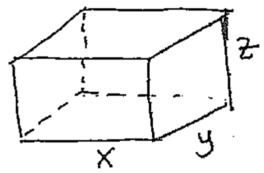
$t_x = -2+2x = 0 \Rightarrow x=1$
$t_y = -4+4y^3 = 0 \Rightarrow y=1$ $\Big\}$. $(1,1)$ kritik noktadır.

$t_{xx} = 2,\quad t_{yy} = 12y^2,\quad t_{xy} = 0 \Rightarrow t_{xx}\cdot t_{yy} - t_{xy}^2 = 24y^2$ dir.

$(1,1)$ noktasında $t_{xx} t_{yy} - t_{xy}^2 = 24 > 0$ ve $t_{xx}(1,1) > 0$ olacağından $(1,1)$ noktası bir yerel minimum noktasıdır. Dolayısıyla z nin $(1,1)$ noktasında bir yerel maksimumu vardır. $z_{max} = \dfrac{1}{10-2-4+1+1} = \dfrac{1}{6}$ olur. O halde yüzeyin en yüksek noktası $A(1,1,\frac{1}{6})$ dır.

(10) Yüzey alanı $600\,cm^2$ olan dikdörtgenler prizmasının hacmi en fazla ne olabilir?

Çözüm : $2(xy + yz + zx) = 600$



$xy + yz + zx = 300 \Rightarrow z = \dfrac{300 - xy}{x+y}$

Prizmanın hacmi $V = xyz = \dfrac{300xy - x^2y^2}{x+y}$ bulunur.

$$V_x = \frac{(300y - 2xy^2)\cdot(x+y) - 1\cdot(300xy - x^2y^2)}{(x+y)^2} = \frac{y\,\overbrace{(300y - 2xy^2 - x^2y)}^{=0}}{(x+y)^2} = 0$$

$$V_y = \frac{x\,\overbrace{(300x - 2x^2y - xy^2)}^{=0}}{(x+y)^2} = 0$$ olur. $x>0$ ve $y>0$ olduğundan $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ dır.

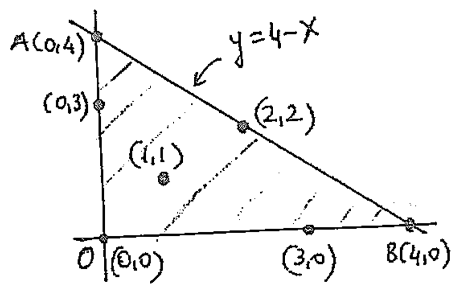
Dolayısıyla. $\left.\begin{array}{l} 300y - 2xy^2 - x^2y = 0 \\ 300x - 2x^2y - xy^2 = 0 \end{array}\right\}$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa $300(y-x) - xy(y-x) = 0$

$\Rightarrow (300 - xy)(\underbrace{y-x}_{0}) = 0 \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow y = x$ olur. Bulunan değer $300y - 2xy^2 - x^2y = 0$ denkleminde yazılırsa $300x - 2x^3 - x^3 = 0$

$\Rightarrow 3x(\underbrace{100 - x^2}_{=0}) = 0 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow z = \dfrac{300 - 10.10}{10+10} = 10$ olur.

O halde hacim $V = 10.10.10 = 1000\ cm^3$

11. $B = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 4-x\}$ bölgesi üzerinde tanımlı $f(x,y) = xy(3-x-y)$ fonksiyonunun mutlak ekstremumlarını bulunuz.



__Çözüm__: B bölgesindeki kritik noktaları bulalım:

$$f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 3y - 2xy - y^2 = y(3-2x-y) = 0 \\ f_y &= 3x - x^2 - 2xy = x(3-x-2y) = 0 \end{aligned}\right\}$$

sistemini sağlayan (x,y) ikilileri

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ 3-x-2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ 3-2x-y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3-2x-y=0 \\ 3-x-2y=0 \end{cases}$$

sistemlerini sağlayan (x,y) ikilileri olacağından, kritik noktalar $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$ ve $(1,1)$ olarak bulunur. Fonksiyonun bu noktalarda aldığı değerler $f(0,0)=0$, $f(0,3)=0$, $f(3,0)=0$ ve $f(1,1)=1$ dir. Şimdi sınır üzerinde aldığı ekstrem değerleri bulalım: $[OA]$ üzerinde, $x=0$ olduğundan $f(x,y)=0$ olup fonksiyonun bu doğru parçası üzerinde aldığı tüm değerler sıfırdır. Dolayısıyla $f(0,4)=0$ dır. Benzer şekilde $[OB]$ üzerinde $y=0$ old. $f(x,y)=0$ ve dolayısıyla $[OB]$ üzerinde fonksiyonun aldığı tüm değerler sıfırdır. Bu nedenle $f(4,0)=0$ dır. $[AB]$ üzerinde $y=4-x$ old. $f(x,4-x) = x^2-4x$ fonksiyonunun $[0,4]$ aralığı üzerindeki ekstremum değerlerini bulmak gerekir.

$$f'(x,4-x) = 2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=2$$

old. $(2,2)$ noktası de bir kritik noktadır. f fonksiyonunun bu noktada aldığı değer $f(2,2)=-4$ dür. Şimdi bütün değerleri bir tabloda gösterelim:

üçgenin köşeleri

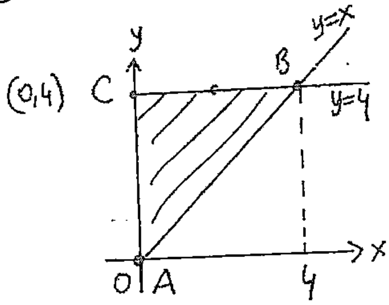
x	0	0	0	1	2	3	4
y	0	3	4	1	2	0	0
f(x,y)	0	0	0	1	-4	0	0

mutlak minimum

mutlak maksimum

Tablodan da görüldüğü gibi fonksiyonun aldığı en küçük değer (mutlak minimum) -4 olup fonksiyon bu değeri $(2,2)$ noktasında alır. Fonksiyonun aldığı en büyük değer (mutlak maksimum) 1 'dir. Fonksiyon bu değeri $(1,1)$ noktasında alır.

12) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ fonksiyonunun $B = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \leq 4,\ y \geq x\}$ bölgesindeki mutlak ekstremumlarını bulunuz.



Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x - y = 0 \\ f_y = -x + 2y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} A(0,0) \text{ kritik noktadır.}$$

. [AB] üzerinde $\boxed{y=x}$ olduğundan

$f(x,x) = x^2 - x^2 + x^2 + 1 = x^2 + 1$

$f'(x,x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ olup $(0,0)$ kritik noktadır.

[AC] üzerinde $\boxed{x=0}$ olduğundan $f(0,y) = y^2 + 1$

$\Rightarrow f'(0,y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$ kritik noktadır.

[BC] üzerinde $\boxed{y=4}$ olduğundan $f(x,4) = x^2 - 4x + 17$

$f'(x,4) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2,4)$ kritik noktadır.

"Bir fonksiyon bir bölge üzerinde mutlak ekstremumlarını ya bölgenin sınırı üzerinde ya da bölgenin içindeki kritik noktalarda alır".

Tablo yapalım:

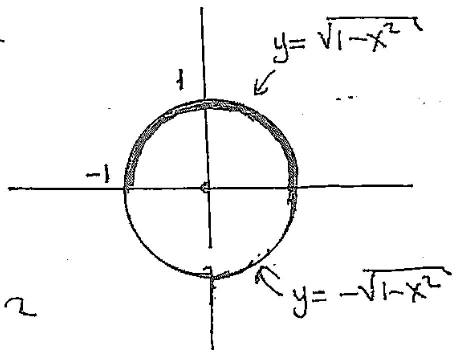
	kritik	kritik	sınır	sınır
x	0	2	4	0
y	0	4	4	4
f(x,y)	1	13	17	17

Mut-min

$f(0,0) = 1$ 'dir.
$f(2,4) = 13$
$f(4,4) = 17$
$f(0,4) = 17$

Tabloya göre mutlak minimum değer 1, mutlak minimum nokta (0,0) dır. mutlak maksimum değer 17, mutlak maksimum noktalar (4,4) ve (0,4) 'tür.

(13) $f(x,y) = x^2 - y^2$ fonksiyonunun $B = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}$ bölgesi üzerindeki mutlak ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz



Çözüm: $\left.\begin{aligned} f_x &= 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y &= -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\}$ A(0,0) kritik noktadır.

Üst yarı dairede

$y=\sqrt{1-x^2}$, $\quad f(x,\sqrt{1-x^2}) = x^2 - (\sqrt{1-x^2})^2$

$\Rightarrow f(x,\sqrt{1-x^2}) = 2x^2 - 1$

$f'(x,\sqrt{1-x^2}) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow$ (0,1) kritik noktadır.

Alt yarı dairede,

$y = -\sqrt{1-x^2}$, $\quad f(x,-\sqrt{1-x^2}) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow y = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow$ (0,−1) kritik noktadır.

(X-eksenini kestiği noktalar)

x	0	0	0	1	-1
y	0	1	-1	0	0
f(x,y)	0	-1	-1	1	1

mut min. mut. max

Tabloya göre fonksiyonun mutlak maksimum değeri 1 'dir. Mutlak max. noktaları (1,0) ve (−1,0) 'dır. Mutlak minimum değeri −1 olup bu değeri (0,1) ve (0,−1) noktalarında alır.

14) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların yerel ekstremum noktalarını bulup cinsini belirleyiniz. Fonksiyonun bu noktalardaki değerini hesaplayınız.

a) $z = (x-1)^2 + 2y^2$ $\{(1,0)$ yerel min$\}$

b) $z = x^3 - y^3 - 2xy + 6$ $\{(0,0)$ eyer nok; $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ yerel max$\}$

c) $z = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$ $\{(0,0)$ yerel min; $(1,-1)$ eyer nok$\}$

d) $z = \dfrac{-4}{1+x^2+y^2}$ $\{(0,0)$ yerel min$\}$

e) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ $\{(1,1)$ yerel max, $(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)$ eyer noktaları$\}$

f) $z = x^3 + y^3 + 3x^2 - 18y^2 + 81y + 5$ $\{(0,3)$ eyer, $(0,9)$ yerel min, $(-2,3)$ yerel max. $(-2,9)$ eyer$\}$

g) $z = (x-1) \cdot \ln(xy)$. $\{(1,1)$ eyer nok$\}$

15) : Toplamları 9 olan üç reel sayının kareleri toplamı en az kaçtır.

Çözüm: $x + y + z = 9$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$z = 9 - (x+y)$

$\Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (9 - (x+y))^2 = x^2 + y^2 + 81 - 18(x+y) + (x+y)^2$

$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x - 18 + 2(x+y) = 0 \\ f_y &= 2y - 18 + 2(x+y) = 0 \end{aligned}\right\}$ $\boxed{x=y}$ bulunur. f_x'de yerine yazılırsa

$2x - 18 + 2(x+x) = 0 \Rightarrow x = 3$ ve $y = 3$ bulunur.

$z = 9 - (3+3) = 3 \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 27$ bulunur.

VEKTÖR ALANLARI

D, n boyutlu uzayda bir bölge ve f, D üzerinde tanımlı reel değerli bir fonk. olsun. Bu takdirde f, D nin herbir $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ noktasına bir $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reel sayısı karşılık getirir. D bölgesi ve onun herbir noktasındaki fonksiyon değerlerine birlikte bir skalar alan denir. Bu durumda f fonksiyonu D üzerinde bir skalar alan oluşturuyor denir.

$\vec{F}$ fonksiyonu D bölgesinin herbir noktasına bir vektör karşılık getiriyorsa, $\vec{F}$ fonksiyonu D bölgesi üzerinde bir vektör alanı oluşturuyor denir. D bölgesine ve onun herbir noktasına karşılık gelen vektörlerle birlikte vektör alanı denir.

Örneğin $\vec{F}$ vektör alanı, uzaydaki herbir (x, y, z) noktasına bir (u, v, w) vektörü karşılık getirir. Vektör alanları P, Q, R bileşen fonksiyonları cinsinden

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\cdot\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Tanım: Türevlenebilen bir $f(x,y,z)$ fonksiyonu verildiğinde

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\vec{k}$$

ifadesine f fonksiyonunun gradiyenti denir.

Tanım: $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ vektör alanı için $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ türevleri mevcut olsun.

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

ifadesine $\vec{F}$ vektör alanının divergensi denir. div $\vec{F}$ ile gösterilir.

Buna göre
$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$ olacaktır.