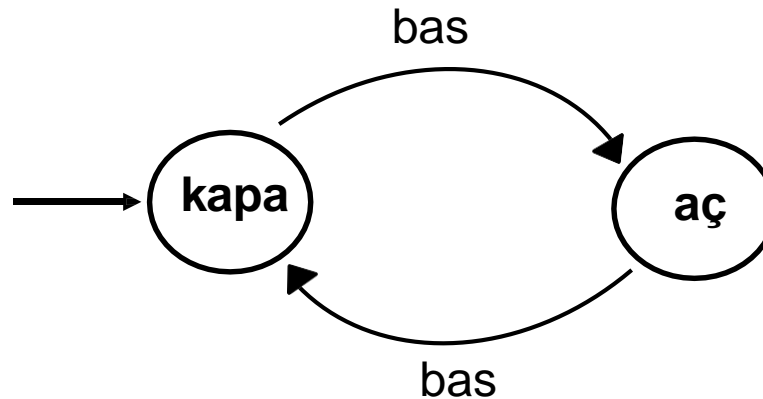


# Biçimsel Diller ve Otomata Teorisi

## Hafta 4: Sonlu Otomata (II.Bölüm)

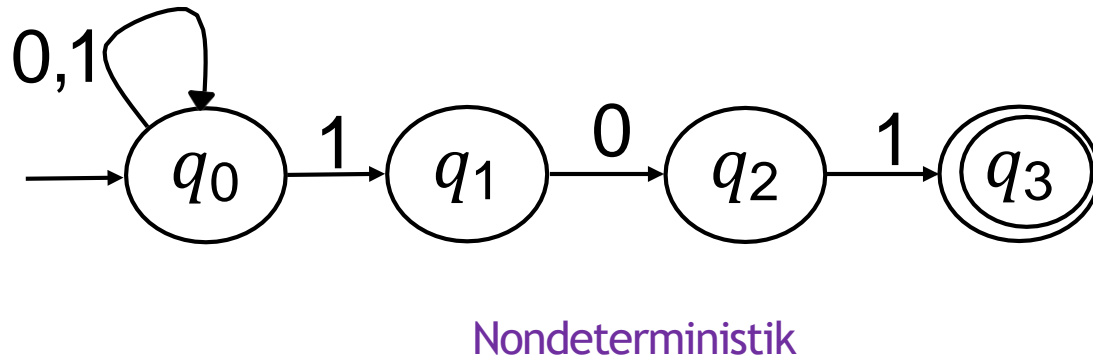
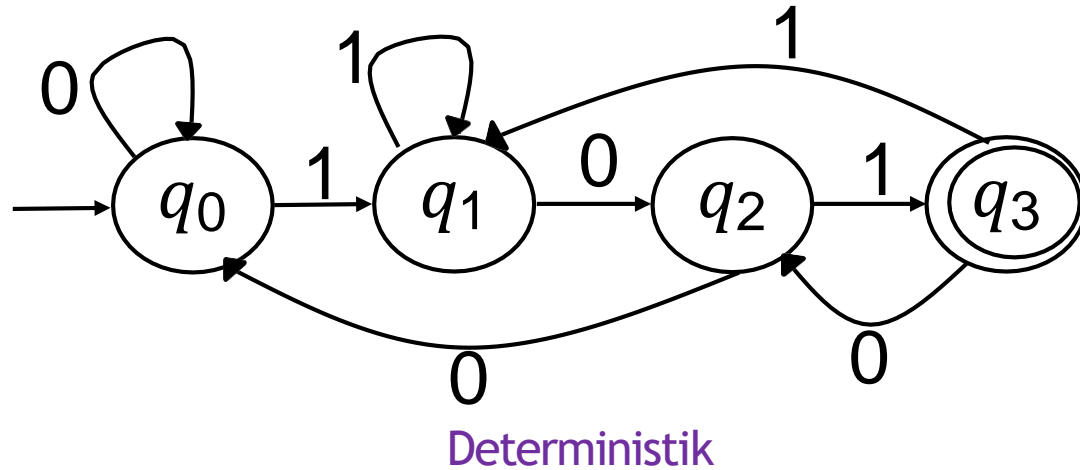


# Hafta 4

## Plan

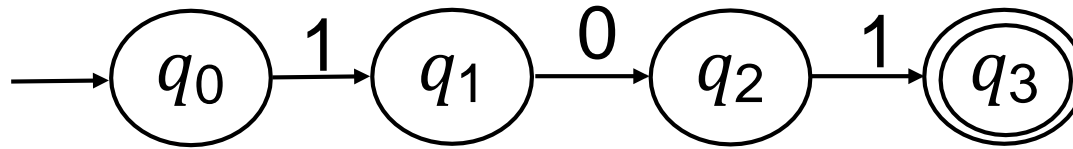
1. NFA inşası
2. Epsilon Geçişleri
3. Nondeterministik Sonlu Otomata'nın Resmi Gösterimi
4. Bir NFA'yı bir DFA'ya Dönüştürme

**ör.**  $\Sigma = \{0,1\}$  alfabesi kullanılarak üretilen kelimelerden sonu '101' ile biten kelimeleri kabul eden deterministik ve nondeterministik sonlu otomatalar:

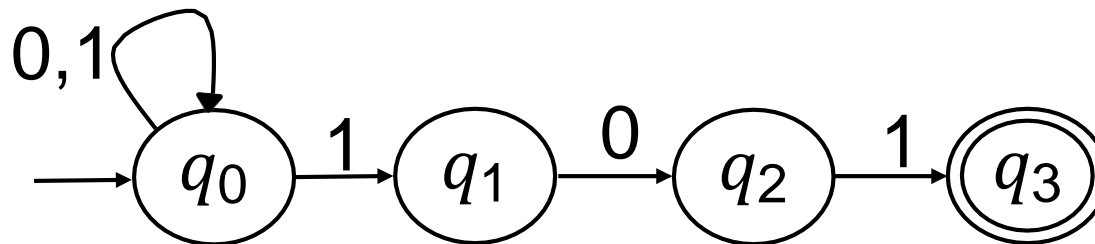


Bir önceki soruda NFA'yı inşa ederken:

Öncelikle 101 geldiğinde kabul durumuna ulaşan otomata inşa edilir:

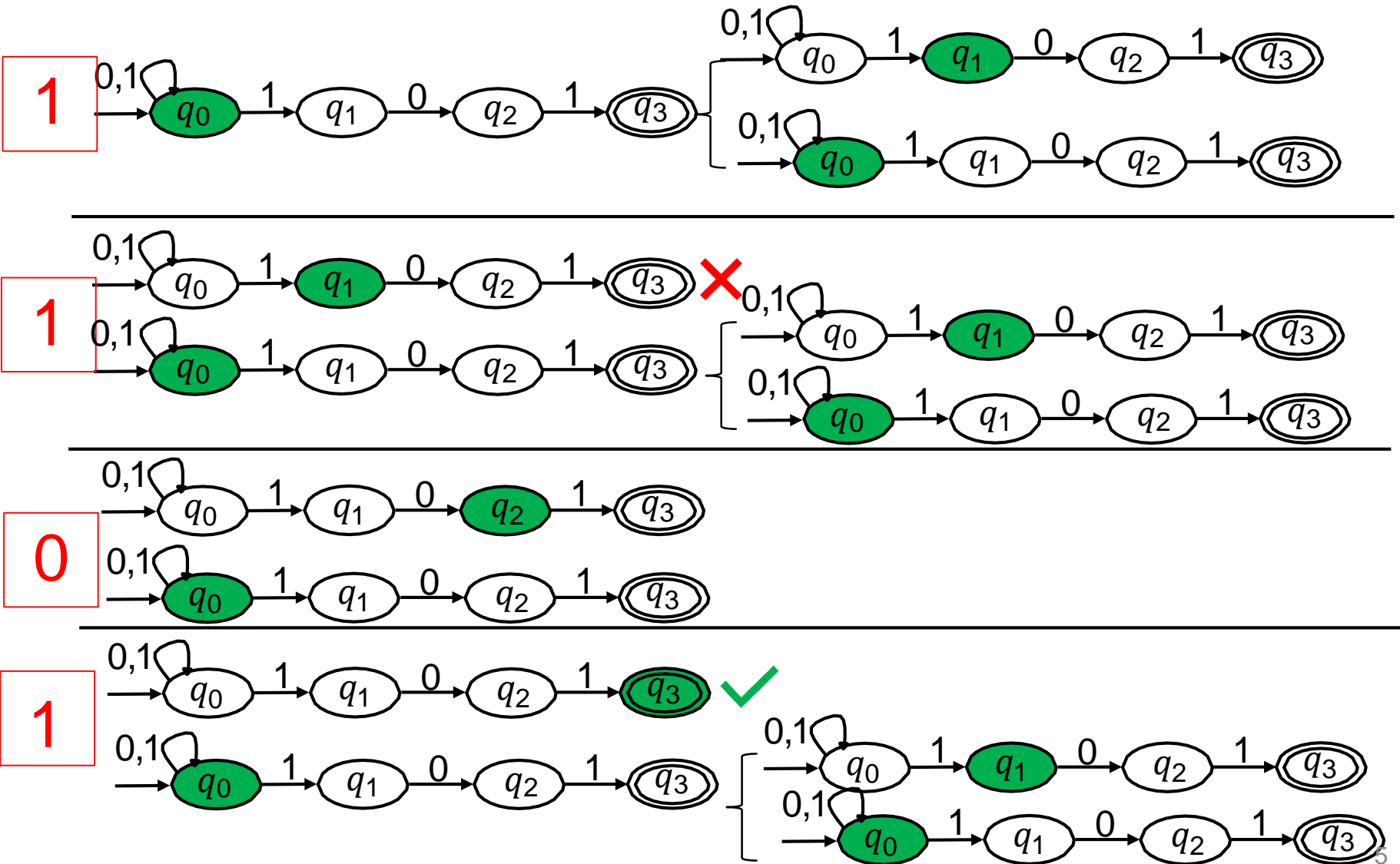


Ve buna  $q_0$ ' dan 0 ve 1 oklari ekleriz ki, 0 yada 1 ile başlayıp 101 ile biten kelimeleri kabul etsin.



## Ek bilgi:

Önceki örnekteki nondeterministik otomata  $q_0'$  da karşılık gelen her 1 harfi için kendini kopyalar. Örnek olarak 1101 kelimesini aldığını düşünelim.

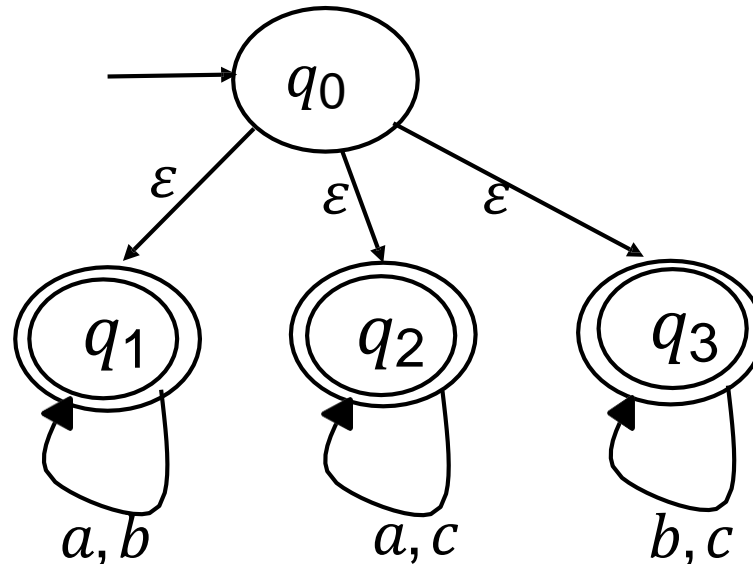


## Epsilon( $\epsilon$ ) geçişleri

NFA'nın bir diğer güzelliği epsilon geçişlerine izin vermesidir.

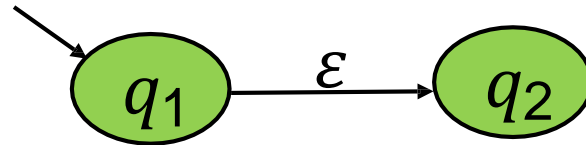
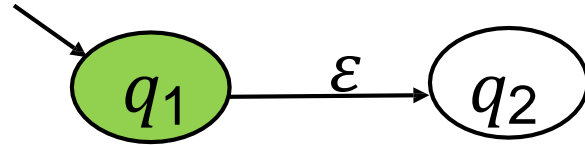
Bu geçiş diğer geçişlerden farklı olarak harf almaz. Yani epsilon ( $\epsilon$ ) ile bağlanan iki durumdan, birinden diğerine geçmek için bir harf gerekmez; otomatik olarak geçeriz. Yani bu iki durumdan ilkinde vardığımızda diğerine de varmış oluruz.

**ör.**  $\Sigma = \{a, b, c\}$  alfabesi kullanılarak oluşturulan kelimelerden  $a, b, c$  harflerinden herhangi ikisini içerip birini içermeyen kelimeleri tanıyan otomata:

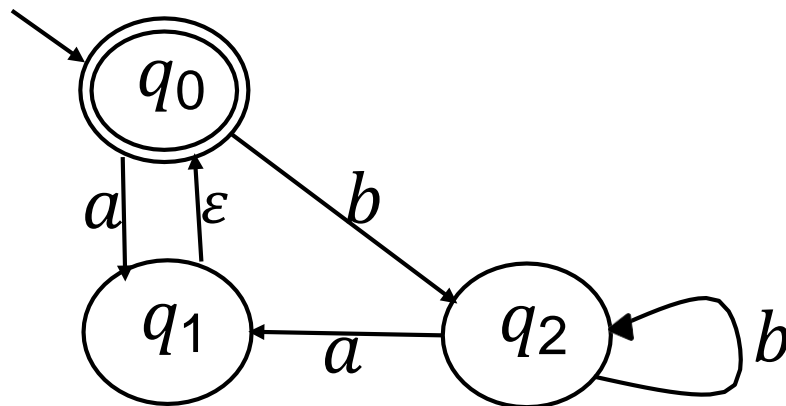


## Epsilon( $\varepsilon$ ) geçişleri

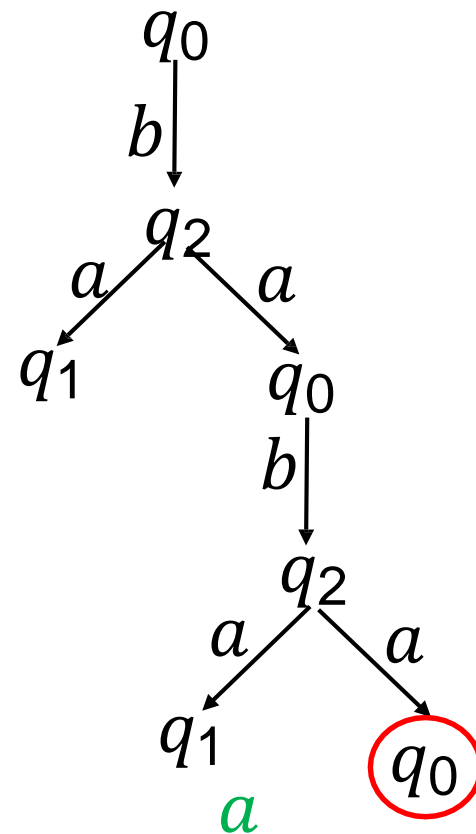
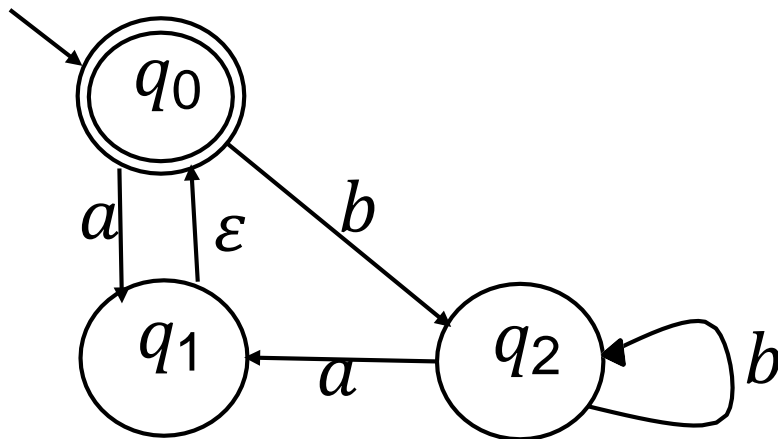
Aralarında bir  $\varepsilon$  geçişi olan iki durumdan ilkine vardığımızda ilkiyle beraber ikinciye de otomatik olarak varmış oluruz.



**ör.**  $\Sigma = \{a, b\}$  alfabeti kullanılarak üretilen kelimelerden  $\varepsilon, a, baa$  ve  $baba$  kelimelerini kabul eden; fakat  $b$  ve  $bb$  kelimelerini kabul etmeyen sonlu otomata:



$w = \text{baba}$

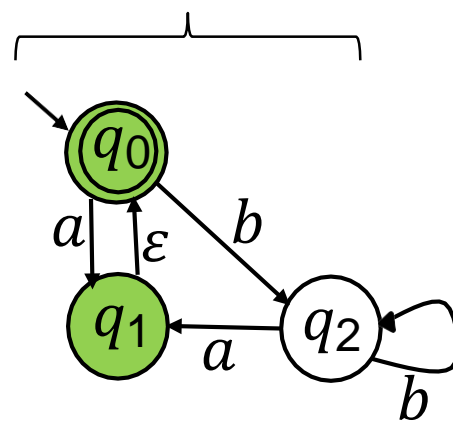
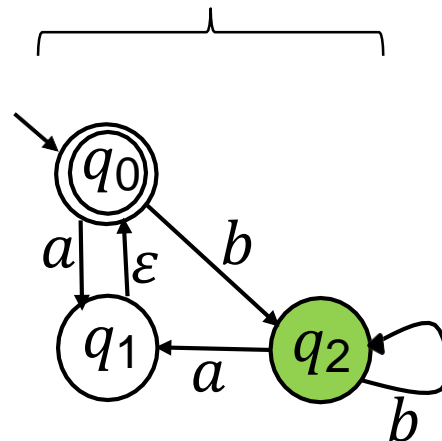
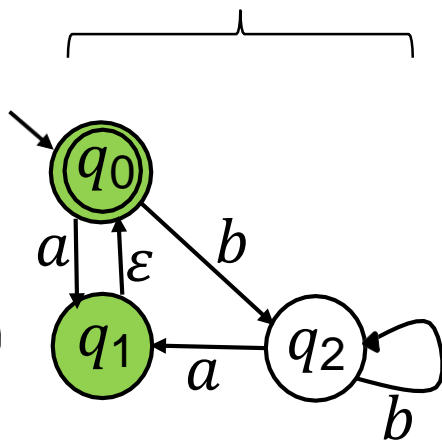
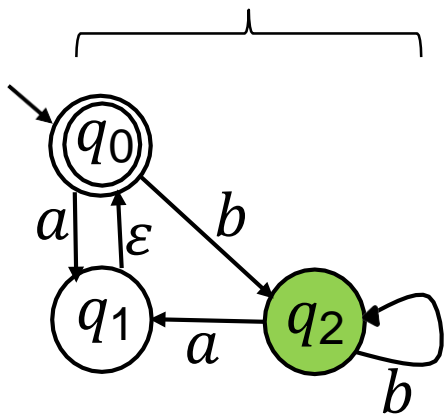


$b$

$a$

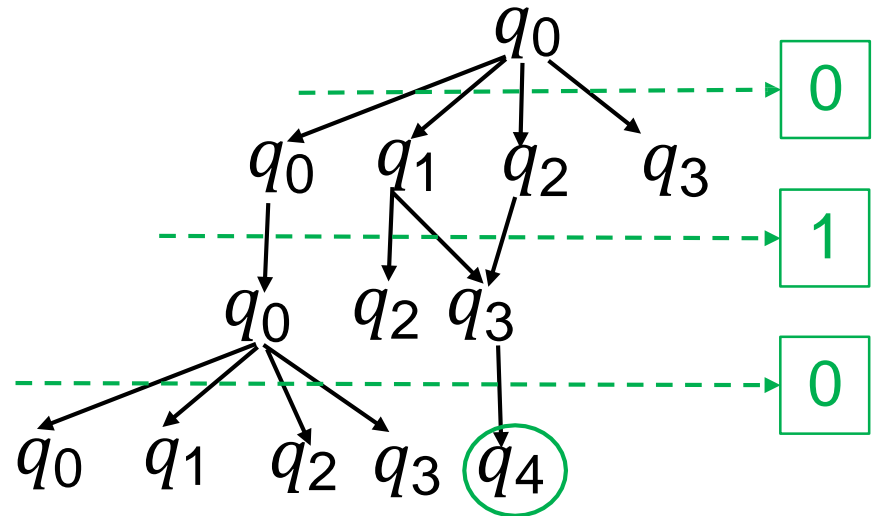
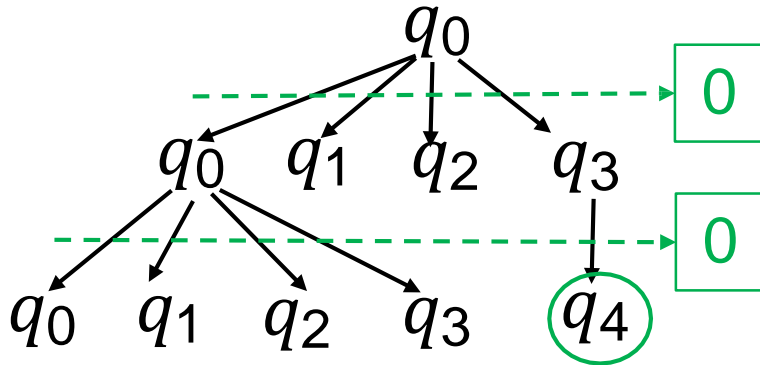
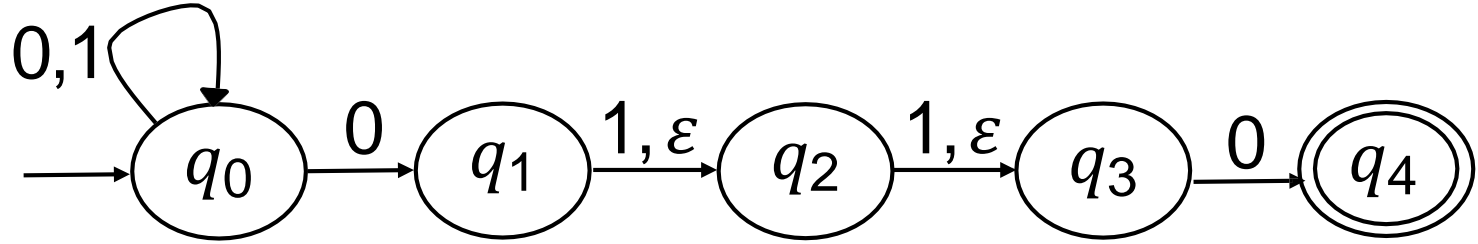
$b$

$a$

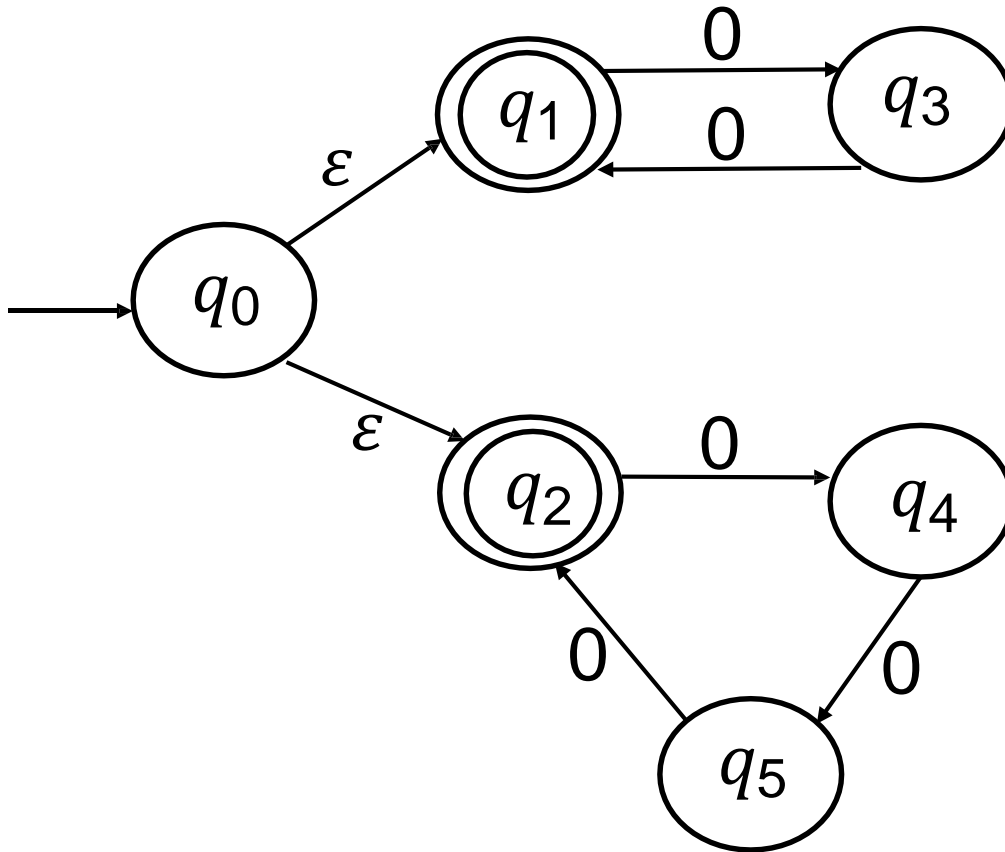




**ör.**  $\Sigma = \{0,1\}$  alfabeti kullanılarak üretilen kelimelerden sonu '00' yada '010' yada '0110' ile biten kelimeleri kabul eden nondeterministik sonlu otomata:

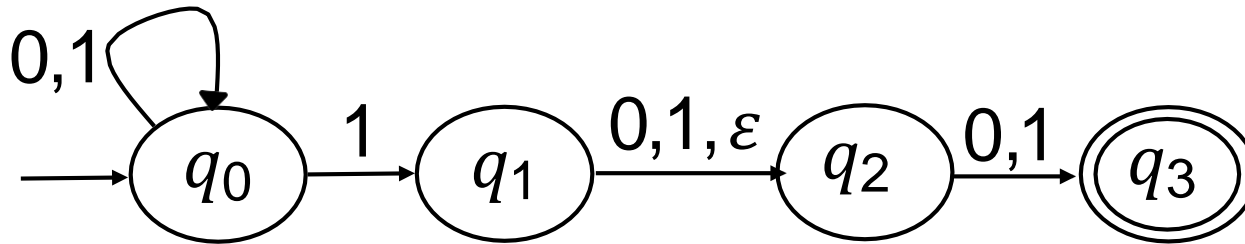


ör.  $\Sigma = \{0\}$  alfabeti kullanılarak oluşturulan kelimelerden 2'nin yada 3'ün katı uzunluğundaki kelimeleri tanıyan sonlu otomata:

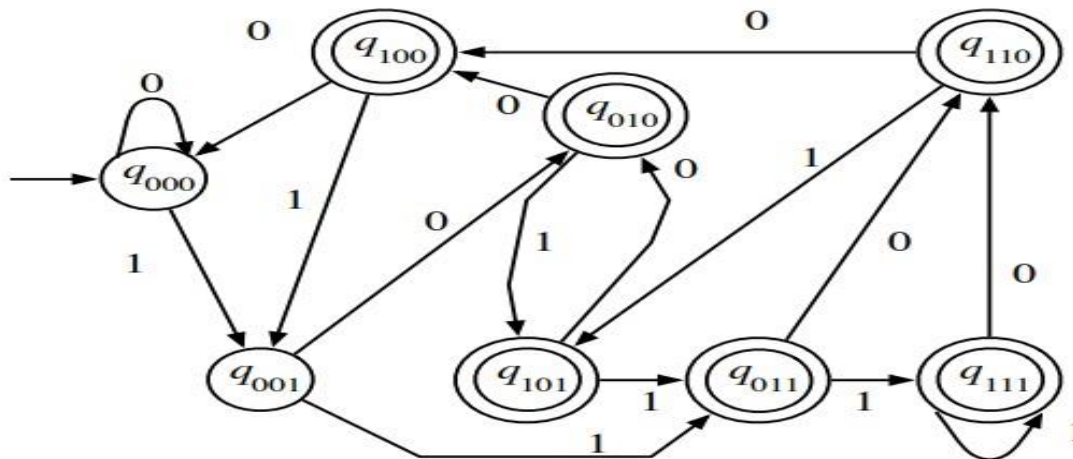


## Neden Nondeterministik?

ör.  $\Sigma = \{0,1\}$  alfabeti kullanılarak üretilen kelimelerden sondan 3. harfi yada sondan 2. harfi 1 olan kelimeleri tanıyan nondeterministik sonlu otomata:



Nondeterministik



Deterministik

# Nondeterministik Sonlu Otomatanın Formal Tanımı

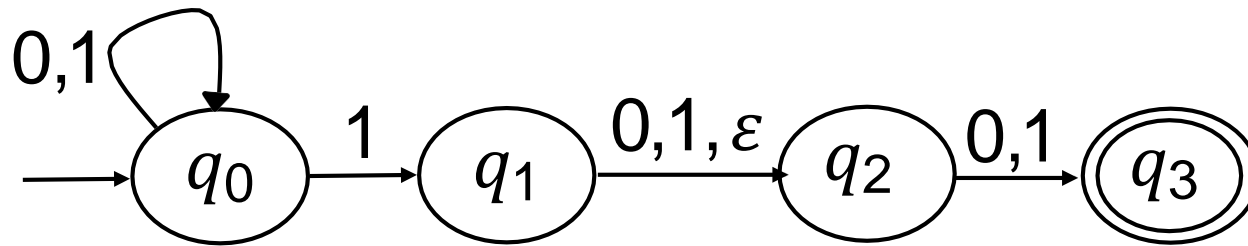
Bir nondeterministik sonlu otomata 5-li sıradır ve  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ile gösterilir. Burada:

1.  $Q$  tüm durumları içeren sonlu bir kümedir,
2.  $\Sigma$  kullandığımız harfleri (inputları) içeren alfabadir,
3.  $\delta: Q \times \Sigma_{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  geçiş fonksiyonudur (transition function),
4.  $q_0 \in Q$  başlangıç durumudur,
5.  $F \subseteq Q$  final durumları içeren kümedir.

**Not 1.**  $\Sigma_{\varepsilon} = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  Yani NFA'da  $\varepsilon$  geçişine de izin veriyoruz.

**Not 2.** Dikkat et! NFA'da geçiş fonksiyonun değer kümesi  $Q$  değil,  $Q$ 'nun güç kümesi olan  $\mathcal{P}(Q)$ ' dur.  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin elemanları  $Q$ 'nun altkümeleri idi. Yani böylece NFA'da bir durumdan yalnız bir duruma değil birden çok duruma geçiş yapabiliriz.

ör.



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$q_0,$$

$$F = \{q_3\}.$$

$\delta$	0	1	$\varepsilon$
$q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
$q_1$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$q_2$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$q_3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

## NFA ve DFA'nın Denklığı

NFA, DFA'dan daha güçlü görünmesine karşın, aslında NFA ve DFA aynı dili tanırlar; yani birbirlerine denktirler.

**Teorem 1** : Her bir DFA zaten bir NFA dur. ( $DFA \subseteq NFA$ )

Bir DFA, bir NFA'ya dönüştürülürken yalnızca geçiş fonksiyonu aşağıdaki gibi değiştirilir:

$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$  iken,  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  olur.

**ör.**  $\delta(q_i, 0) = q_j, \delta(q_i, 0) = \{q_j\}$  olur.

**Teorem 2** : Her bir NFA'ya karşılık bir DFA vardır.

Bir NFA'yı bir DFA'ya dönüştürürken şu süreç izlenir.

## Bir NFA'yı bir DFA'ya dönüştürme:

Bir NFA  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , bir DFA'ya dönüştürülürken:

**1.**  $\mathcal{P}(Q)$  oluşturulur, yani  $Q$ 'nun bütün altkümeleri.  $D$ 'nin durumları bu  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin elemanları olan altkümeler olur.

**2.**  $D$ 'nin başlangıç ve final (kabul) durumlarına karar verilir:

Başlangıç durumu:  $N$ 'deki başlangıç durumu  $q_0$ 'ı ve varsa  $q_0$ 'ın  $\varepsilon$  ile bağlandığı diğer durumları içeren  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin elemanı olan küme  $D$ 'nin başlangıç durumu olur.

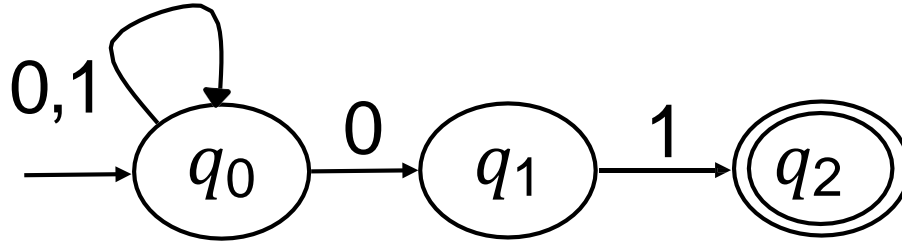
Kabul durumu:  $N$ 'deki kabul durumlarını içeren  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin her elemanı  $D$ 'nin bir kabul durumu olur.

**3.**  $D$  için geçiş tablosu oluşturulur. Bunun için  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin her biri bir altküme olan elemanı için, bu altkümedeki her bir durumun  $\Sigma$ 'daki her bir harf için hangi duruma gittiği bulunur. Bulunan durumların oluşturduğu birleşim kümesi geçiş durumu olur.

# Bir NFA'yı bir DFA'ya dönüştürme:

4. Son olarak  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin geçiş alan elemanları için 3'de bulunan geçiş tablosu yardımıyla DFA çizilir.

ör.



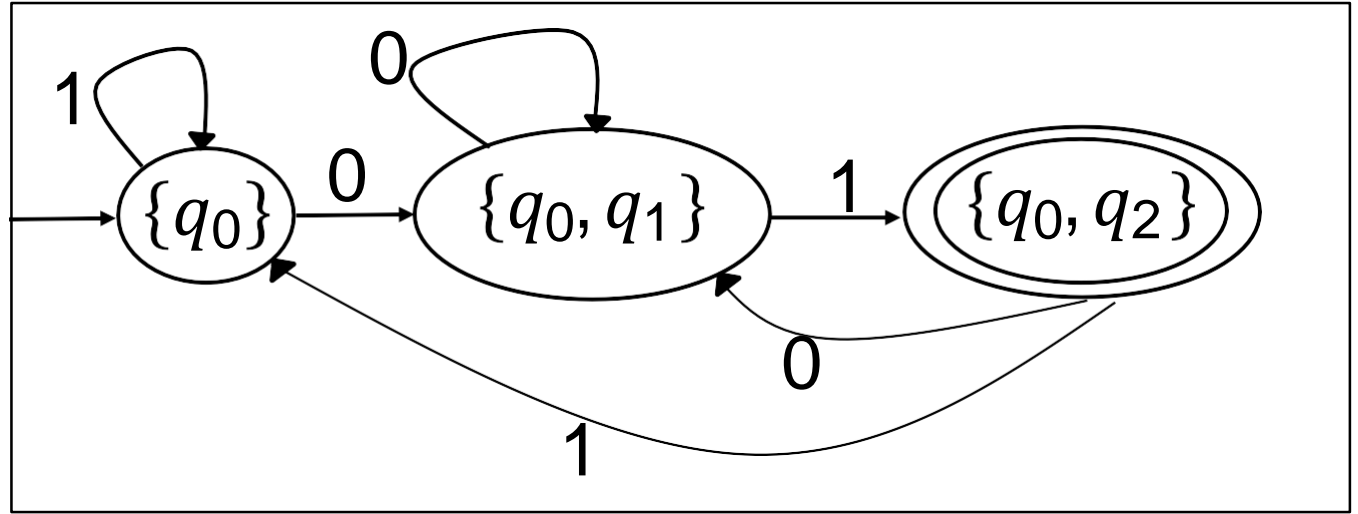
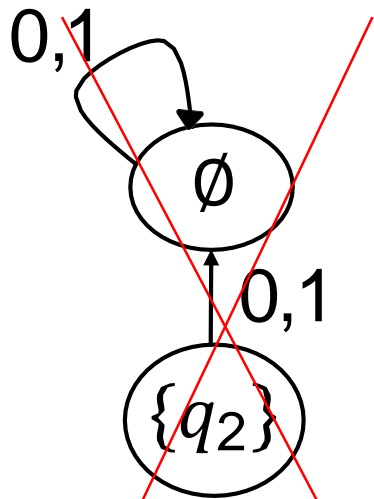
- $N = (Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma = \{0,1\}, \delta, q_0, F = \{q_2\})$
- NFA'sının DFA'ya dönüşümü:
  - 1.  $\mathcal{P}(Q) = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$
  - 2. Başlangıç durumu:  $\{q_0\}$ ,
    - Kabul durumları:  $\{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}$
  - ( $\mathcal{P}(Q)$ 'nin  $q_2$ 'yi içeren her elemanını aldık)



### 3. Geçiş tablosu:

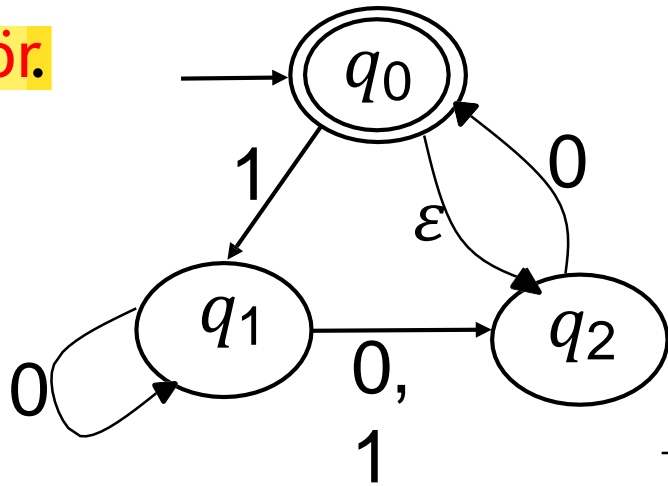
$\delta_D$		0	1
Yeni durumlar	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

4. Yukarıdaki tabloda yalnızca  $\emptyset$ ,  $\{q_0\}$ ,  $\{q_2\}$ ,  $\{q_0, q_1\}$  ve  $\{q_0, q_2\}$  durumlarına geçiş vardır. O yüzden DFA'yı inşa ederken yalnızca bu durumları dikkate alacağız.



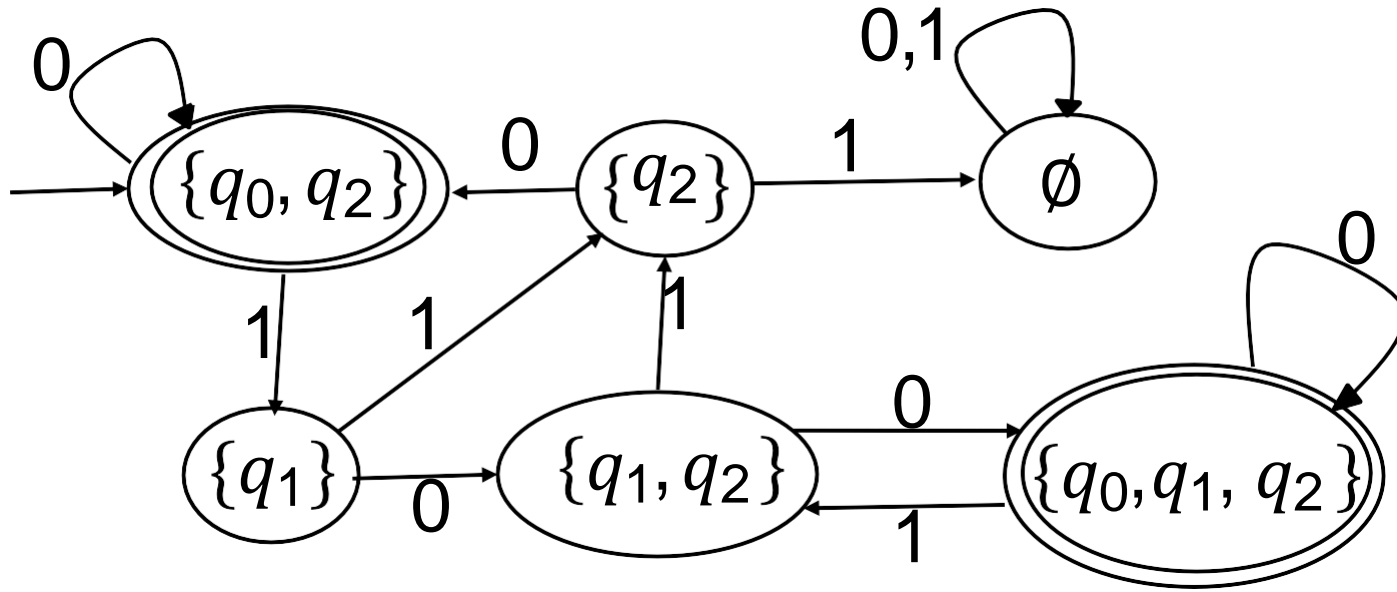
Bu parçaya  
 başlangıç durumu  
 $\{q_0\}$ 'dan  
 ulaşamayacağı için,  
 bu parçayı atıyoruz.

ör.



$\delta_D$	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$

$q_2'$  den 0 ile hem  $q_0$ 'a, hem de oradan  $\varepsilon$  ile otomatik olarak  $q_2'$  ye gidilir!



**Not 1.** Başlangıç durumu yalnız  $q_0$  değil,  $q_0$  ile birlikte  $q_0'$  ın  $\varepsilon$  ile bağlandığı  $q_2$ .

**Not 2.** Kabul durumları NFA'daki kabul durumu olan  $q_0'$  ı içeren tüm alt kümeler.