1. Önerme Mantığı ve İspatlar

Mantık önermelerin doğruluğunu kanıtlamak için kullanılır. Önermenin ne olduğu ile ilgilenmek yerine bazı kurallar koyar ve böylece önermenin genel formunun geçerli olup olmadığını yargılar. Mantığın bize sağladığı kurallar, belirtilen aşamalardan çıkan sonucun tutarlı olup olmadığını veya sonucun doğruluğunun ispatlanması aşamasındaki basamaklarda hatalı bir kısmın bulunup bulunmadığını değerlendirmemizi sağlar.

1.1 Önermeler ve Doğruluk Tabloları

Önerme, doğru veya yanlış değerinden sadece ve sadece birini alabilen ifadedir. Fakat aynı anda iki değeri birden alamaz. Örneğin aşağıdaki ifadeler birer önermedir.

1. Bu gül beyazdır.
2. Üçgenin dörtkenarı vardır.
3. $3 + 2 = 6$.
4. $6 < 24$
5. Yarın benim doğum günümdür.

Aynı önermenin nerede, ne zaman ve kim tarafından söylendiğine bağlı olarak bazen doğru bazen yanlış olabileceğine dikkat ediniz. Yarın doğum günü olan biri için 5. önerme doğru iken, başka biri tarafından ifade edildiğinde yanlış olacaktır. Hatta bugün herhangi biri için doğru olan bir önerme başka bir gün için yanlış olabilir.

Ünlemler, sorular ve istekler doğru veya yanlış diye ifade edilemediklerinden birer önerme değildirler. Bu nedenle aşağıdakiler önerme değildir.

6. Çimlerden uzak durun.
7. Çok yaşa kraliçe!
8. Jane'in partisine gittin mi?
9. Öyle söyleme.

Bir önermenin doğruluğu (T) veya yanlışlığı (F) önermenin **doğruluk değeri** şeklinde adlandırılır. 4. önerme doğru (T) doğruluk değerini taşırken, 2 ve 3. önermeler yanlış (F) doğruluk değerini taşır. 1 ve 5 numaralı önermenin doğruluk değerleri ifade edildikleri duruma bağlıdır.

Geleneksel olarak önermeler p,q,r… harfleri kullanılarak sembolize edilirler. Örneğin p: Manchester İskoçya'dadır, q: Dinozorlar hala yaşamaktadır.

1.2 Mantıksal Bağlılıklar ve Doğruluk Tabloları

Bundan önceki konudaki 1-5 numaralı ifadeler basit birer ifade oluşturduklarından **basit önerme**lerdir. Bu bölümde basit önermelerin nasıl bağlanarak **bileşik önerme**ler şeklinde adlandırılan daha karışık önermeler oluşturulacağı anlatılacaktır. Önerme çiftlerini bağlamaya yarayan araçlara mantıksal bağlayıcılar denir ve herhangi bir bileşik önermenin doğruluk değeri tamamen (a) kendisini oluşturan basit önermelerin doğruluk değerleri (b) bunları bağlayan özel bağlayıcı veya bağlayıcılar tarafından belirlenir.

En çok kullanılan bağlaçlara geçmeden önce, basit bir önerme üzerinde gerçekleştirilebilen bir işleme bakalım. Bu işleme **tersini alma** denir ve önermenin doğruluk değerini tersine çevirme etkisi yapar. Tersini alma sonucunda önerme eğer doğru ise yanlış, yanlış ise doğru değerini alır. Bu işlemi bir tablo ile özetleyebiliriz. Eğer p bir önermeyi sembolize ediyorsa, $\overline{p}$ (~p,-p veya $\neg$p) p'nin tersini temsil eder. Aşağıdaki tablo p ve $\overline{p}$ 'nün doğruluk değerleri arasındaki ilişkiyi gösterir.

p	$\overline{p}$
T	F
F	T

Soldaki sütun p için tüm olası doğruluk değerlerini verirken sağ sütun p' nin tersi $\overline{p}$ için karşılık gelen doğruluk değerlerini verir. Bu şekilde, önermelerin doğruluk değerlerini özetleyen tabloya **doğruluk tablosu** denir.

Bir önermenin tersini ifade etmenin çeşitli yolları vardır. "Bütün köpekler vahşidir" önermesini düşünürsek, bu önermenin tersi şunlar olabilir:

Bütün köpeklerin vahşi olması söz konusu değildir.
Köpeklerin hepsi vahşi değildir.
Bazı köpekler vahşi değildir.

Dikkate edilirse "Hiçbir köpek vahşi değildir" önermesi "Bütün köpekler vahşidir" önermesinin tersi değildir. Tersini alma işleminde, ilk ifadenin doğru olduğu her durumda ikinci ifade yanlış olmalı ya da tam tersi olmalıdır. "Bütün köpekler vahşidir" önermesi sadece bir köpek bile vahşi olduğunda yanlıştır ancak "Hiçbir köpek vahşi değildir" önermesi bu durumda doğru değildir.

Mantıksal bağlayıcılar önerme çiftlerini bağlamaya yararlar. Burada çok kullanılan beş mantıksal bağlayıcıdan bahsedilecektir: kesişim, dahili birleşim, harici birleşim, koşullu önerme ve iki yönlü koşullu önerme.

1.2.1 Kesişim (Conjunction)

İki basit önerme aralarına 've' kelimesi koyarak bağlanabilir. Bunun sonucunda oluşan bileşke önermeye iki basit önerme bileşeninin kesişimi denir. Eğer p ve q iki basit önerme ise $p \wedge q$ (veya p.q) p ve q 'nun birleşimini temsil eder.

p: Güneş Parlıyor.
q: Köpekler havlar.
$p \wedge q$: Güneş parlıyor ve köpekler havlar.

Alttaki doğruluk tablosu p ve q 'nun tüm olası doğruluk değerleri için $p \wedge q$ 'nun doğruluk değerlerini gösterir.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Yukarıdaki tablodan da görülebildiği gibi $p \wedge q$ sadece p ve q 'nun her ikisinin de doğru olduğu zaman doğrudur.

1.2.2 Birleşim (Disjunction)

Veya kelimesi iki basit önermeyi birleştirmek için kullanılabilir. Oluşan bileşke önerme iki basit önermenin birleşimi olarak adlandırılır. Mantıkta iki çeşit birleşim vardır: dahili ve harici. Gerçek hayatta kullandığımız veya kelimesi bazen kafa karıştırıcı olabilir.

p ve q birer önerme ise p v q, p ve q ‘nun dahili birleşimini temsil eder. Bu bileşke önerme bileşenlerinden herhangi birisi veya her ikisinin doğru olması durumunda doğru aksi halde yanlıştır. $p \vee q$ için doğruluk tablosu aşağıdadır.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p ve q’ nun harici birleşimi ise $p \veebar q$ şeklinde gösterilir. Bu bileşke önerme sadece bir bileşenin doğru olması durumunda doğrudur. $p \veebar q$ ‘nun doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir:

p	q	$p \veebar q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

İki basit önerme “veya” kullanılarak bağlanırken hangi tip birleşimin kullanılacağı cümlenin genel durumundan anlaşılır. Örneğin, ‘Yarın yüzmeye gideceğim veya golf oynayacağım’ cümlesi iki işin birden yapılmayacağı anlamı taşıdığından harici birleşimdir. Diğer taraftan, ‘Adaylar 25 yaşın üzerinde veya en az 3 yıllık tecrübeye sahip olmalıdır’ cümlesinde iki koşuldan birini sağlayan adaylar dikkate alınacakmış izlenimi verdiğinden dahili birleşimidir.

1.2.3 Koşullu Önermeler

Koşullu önerme bağlayıcısı → işareti ile sembolize edilir. Koşullu önermenin normal dildeki karşılığı örnekte de görüleceği gibi ‘Eğer …’ dir.

p: Kahvaltı yaparım.
q: Öğlen yemeği yemem.
$p \rightarrow q$: Eğer kahvaltı yaparsam, öğlen yemeği yemem.

Yukarıdaki örnekteki $p \rightarrow q$ için diğer alternatifler:

Sadece eğer öğlen yemeği yemezsem kahvaltı yaparım.
Kahvaltı yapmam öğlen yemeği yemeyeceğim anlamına gelir.
Ne zaman kahvaltı yapsam öğlen yemeği yemem.

Aşağıdaki tablo $p \rightarrow q$’ nun doğruluk tablosudur.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Dikkat edilirse ‘p ise q’ önermesi sadece p’ nin doğru q’ nun yanlış olması durumunda yanlıştır.(örneğin doğru bir ifade yanlış bir ifade anlamına gelemez.) Eğer p yanlış ise bileşke önerme q’nun doğruluk değeri ne olursa olsun doğrudur. Şu önermeye bakalım: ‘Eğer derslerimi geçersem çok sevineceğim’. Bu ifade eğer sınavlarımı geçemezsem ne yapacağım hakkında hiçbir şey söylemiyor. Belki sevinirim, belki sevinmem ama hiçbir durumda söylenen ifade yanlış değildir. Önermenin yanlış olabileceği tek durum sınavlarımı geçip sevinmediğim durumdur.

Koşullu önermelerde, p önermesi önceki ve q önermesi sonraki olarak adlandırılır. p önermesi q için **yeterli** koşul, q ise p için **gerekli** koşuldur.

1.2.4 Çift Yönlü Koşullu Önermeler

Çift yönlü koşullu bağlayıcı ↔ ile gösterilir ve ‘sadece ve sadece …. ise …….’ şeklinde ifade edilir. Önceki örneğe tekrar dönersek:

p: Kahvaltı yaparım.
q: Öğlen yemeği yemem.
p ↔ q : Sadece ve sadece öğlen yemeği yemezsem kahvaltı yaparım.(alternatif olarak sadece ve sadece kahvaltı yaparsam öğlen yemeği yemem.)

p ↔ q ‘nin doğruluk tablosu şu şekildedir:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Dikkat edilirse p ↔ q nun doğru olabilmesi için p ve q nun her ikisinin de aynı doğruluk değerine sahip olması gerekir.

Örnek 1.1: p, ‘Bugün Pazartesi’ ve q ‘İstanbul’a gideceğim’ önermeleri olsun. Buna göre aşağıdaki önermeleri sembollerle ifade ediniz.

(i) Eğer bugün Pazartesi ise İstanbul’a gitmeyeceğim.
(ii) Bugün Pazartesi veya İstanbul’a gideceğim fakat ikisi birden değil.
(iii) Bugün İstanbul’a gideceğim ve bugün Pazartesi değil.
(iv) Sadece ve sadece bugün Pazartesi değilse İstanbul’a gideceğim.

Çözüm 1.1:

(i) $p \rightarrow \overline{q}$
(ii) $p \veebar q$
(iii) $q \wedge \overline{p}$
(iv) $\overline{p} \leftrightarrow q$.

Örnek 1.2: Aşağıdaki bileşik önermeler için doğruluk tabloları oluşturunuz.

(i) $\overline{p} \vee q$

(ii) $\overline{p} \wedge \overline{q}$

(iii) $\overline{q} \rightarrow p$

(iv) $\overline{p} \leftrightarrow \overline{q}$

Çözüm 1.2:

(i)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

(ii)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(iii)

p	q	$\overline{q}$	$\overline{q} \rightarrow p$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F

(iv)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \leftrightarrow \overline{q}$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

1.3 Tutolojiler ve Çelişkiler

Bileşenlerinin doğruluk değeri ne olursa olsun her zaman doğru olan birçok bileşik önerme mevcuttur. Benzer şekilde bileşenlerinden bağımsız olarak her zaman yanlış olanlar da vardır. Her iki durumda da bu özellik bileşke önermenin yapısının sonucudur.

Tutoloji, basit bileşenlerinin doğruluk değeri ne olursa olsun doğru olan bileşke önermedir. Örnek : insanlar erkektir veya kadındır önermesi her zaman doğrudur. O nedenle bu önerme bir tutolojidir.

Çelişki ise, basit bileşenlerinin doğruluk değeri ne olursa olsun yanlış olan bileşke önermedir.

Tutoloji *t* ile, çelişki ise *f* ile gösterilir.

Örnek 1.3 : $p \vee \overline{p}$ ‘nin tutoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm1.3 : Eğer $p \vee \overline{p}$ ‘in doğruluk tablosunu yaparsak:

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
T	F	T
F	T	T

Dikkat edilirse $p \vee \overline{p}$ her zaman doğru değerini verir (p yerine hangi önerme konulursa konulsun) ve bu sebeple tutolojidir.

Örnek 1.4 : $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$ ‘nin tutoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1.4 : Verilen önermenin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir:

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Doğruluk tablosunun en son sütunu sadece T doğruluk değerini gösterir ve bu nedenle $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$ ifadesi bir tutolojidir.

Son örnekte, ilk örnekten elde ettiğimiz ‘herhangi bir önermenin tersinin dahili birleşimi bir tutolojidir’ sonucunu kullanabilirdik. İkinci örnekte elimizde $p \wedge q$ önermesi ve tersi $\overline{p \wedge q}$ var. Bu nedenle önceki sonuca göre $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$ bir tutolojidir. $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$ önermesi, $p \vee \overline{p}$ önermesinin **yedek örneği**dir denir. Açıkça görülüyor ki, bir tutolojinin yedek örneği kendi başına bir tutolojidir ve dolayısıyla bir önermenin tutoloji olduğunu göstermenin bir yolu da bu önermenin tutoloji olduğu bilinen başka bir önermenin yedek örneği olduğunu göstermektir. Tıpkı tutolojilerde olduğu gibi bir çelişkinin de yedek örneği bir çelişkidir.

1.4 Mantıksal Eşdeğerlilik ve Mantıksal Anlam

İki önerme, kendilerini oluşturan bileşenlerinin tüm doğruluk değeri kümesi için aynı doğruluk değerine sahipse bu iki önerme **mantıksal eşdeğer**dir denir. P ve Q iki bileşik önerme olsun, P ve Q mantıksal eşdeğerse P ≡ Q şeklinde gösterilir.Tutolojiler ve çelişkilerde olduğu gibi mantıksal eşdeğerlilik de P ve Q’ nun yapılarının sonucudur.

Örnek 1.5 : $\overline{p} \vee \overline{q}$ ve $\overline{p \wedge q}$ ’ nun mantıksal eşdeğer olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1.5 : $\overline{p} \vee \overline{q}$ ve $\overline{p \wedge q}$ için doğruluk tablosunu çizelim.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

$\overline{p} \vee \overline{q}$ ve $\overline{p \wedge q}$ için hesaplanan sütunlardaki doğruluk değerleri karşılaştırılırsa aynı olduklarını görülür. Bu nedenle bu iki önerme mantıksal eşdeğerdir denilebilir.

Eğer iki bileşke önerme mantıksal eşdeğerse, bu iki önermenin çift yönlü koşullu bağlayıcı ile bağlanmasıyla oluşan önerme bir tutoloji olmalıdır.(P ≡ Q ise P↔Q tutoloji olmalı) Bunun nedeni, iki mantıksal eşdeğer önermenin ikisi de aynı anda ya doğrudur ya yanlıştır. Her iki durumda da çift yönlü koşullu önerme doğrudur. Bu durumun tersi de yani P↔Q bir tutoloji ise P ≡ Q. Bunun nedeni şu gerçeğe dayanır: Çift yönlü koşullu önerme P↔Q sadece P ve Q' nun her ikisinin de aynı doğruluk değerine sahip olduğu zaman doğrudur.

İki önerme arasında oluşabilecek bir diğer yapıya-bağımlı ilişki de mantıksal anlamdır. Eğer bir P önermesi her doğru olduğunda Q önermesi de doğru oluyorsa, P önermesi mantıksal olarak Q önermesi anlamına gelir. Ancak bunun tersi doğru değildir yani Q, P yanlış olduğunda da doğru olabilir. Mantıksal anlam ├ ile sembolize edilir. P ├ Q, P mantıksal olarak Q anlamına gelir demektir.

Örnek 1.6: q ├ $(p \vee q)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1.6: q'nun her doğru olduğu anda $(p \vee q)$ nun da doğru olduğunu göstermek gerekir. Doğruluk tablosunu yaparsak:

p	**q**	**p∨q**
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

q'nun doğru olduğu her durumda (1 ve 3. satırlar) p∨q da doğrudur. p∨q, q yanlış olduğunda da doğrudur (2. satır) fakat bunun q, p∨q ile mantıksal anlamdır ifadesinin sağlanmasıyla bir alakası yoktur.

'P ├ Q' ile 'P →Q bir tutolojidir' ifadeleri benzer ifadelerdir. P ├ Q ise P doğru iken Q hiçbir durumda yanlış değildir. Bu da sadece P →Q' nun yanlış olduğu durumda mümkün olduğundan P →Q bir tutoloji olmalıdır.

1.5 Önermeler Cebri

Aşağıdaki liste bir önceki konudaki teknikler kullanılarak ispatlanabilecek mantıksal eşitlikleri içerir. Bu kurallar p, q ve r gibi basit önermeler ve bunların yerine konabilecek yedek örneklerin tamamı için geçerlidir.

Aynılık (Tek Kuvvet) Özelliği(idempotence)

p ∧ p ≡ p
p ∨ p ≡ p.

Değişme Özelliği(Commutativity)

p ∧ q ≡ q ∧ p
p ∨ q ≡ q ∨ p
p ⊻ q ≡ q ⊻ p
p↔q ≡ q ↔ p.

Birleşme Özelliği(Associativity)

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r \equiv p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$$
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r).$$

Yutan Eleman(absorbtion)

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p.$$

Dağılma Özelliği(Distributivity)

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Çift ters Özelliği((Involution)

$$\overline{\overline{p}} \equiv p.$$

De Morgan Kuralları

$$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$$
$$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}.$$

Özdeşlik Özelliği(identity)

$$p \vee f \equiv p$$
$$p \wedge t \equiv p$$
$$p \vee t \equiv t$$
$$p \wedge f \equiv f.$$

Tamamlama Özelliği(Complement)

$$p \vee \overline{p} \equiv t$$
$$p \wedge \overline{p} \equiv f$$
$$\overline{f} \equiv t$$
$$\overline{t} \equiv f$$

1.5.1 Eşlik Kuralı (Duality Principle)

Sadece $\vee$ ve $\wedge$ bağlayıcılarını içeren herhangi bir P önermesi verilmiş ise, bu önermenin eşi $\vee$ yerine $\wedge$, $\wedge$ yerine $\vee$, *t* yerine *f* ve *f* yerine de *t* koyarak elde edilir. Örneğin, $(p \wedge q) \vee \overline{p}$' nin eşi $(p \vee q) \wedge \overline{p}$ olmalıdır.

Dikkat edilirse kesişim ve dahili birleşim dışındaki bağlayıcılarla bağlanmış bileşik önermelerin eşinin nasıl elde edildiğinden bahsedilmedi. Bunun önemi yoktur çünkü diğer bağlayıcılara sahip önermelerin hepsi sadece tersini alma ve kesişim bağlayıcılarını içeren mantıksal eşdeğer formunda yazılabilir. Eşlik kuralına göre eğer iki önerme mantıksal eşdeğerse, eşleri de mantıksal eşdeğerdir.

1.5.2 Yerine Koyma Kuralı

Diyelim ki, elimizde mantıksal eşdeğer P_1 ve P_2 önermeleri ile P_1 ‘i içeren Q bileşik önermesi var. Yerine koyma kuralına göre P_1 yerine P_2 koyarsak sonuçta oluşan önerme Q ile mantıksal eşdeğerdir. Bu sebeple mantıksal eşdeğer önermeleri birbirinin yerine koymak sonuçta oluşan önermenin doğruluk değerini değiştirmez. Bunun ispatı şu şekilde yapılabilir: Doğruluk tablosunda P_1 sütunu yerine P_2 sütununu koyarsak sonuç değişmez zira P_1 ve P_2 ‘nin doğruluk tabloları aynıdır.

Yerine koyma kuralı ve önermeler cebri kuralları doğruluk tabloları çizmeden önermeler arasında mantıksal eşitlikler kurabilmemizi sağlar.

Örnek 1.7: $(\overline{p} \wedge q) \vee \left(\overline{p \vee q}\right) \equiv \overline{p}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 1.7: $(\overline{p} \wedge q) \vee \left(\overline{p \vee q}\right) \equiv (\overline{p} \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$ (De Morgan Kuralı)

$\equiv \overline{p} \wedge \left(q \vee \overline{q}\right)$ (Dağılma özelliği)

$\equiv \overline{p} \wedge t$

$\equiv \overline{p}$

1.5.3 Koşullu önermler ile ilgili diğer özellikler

Verilen $p \rightarrow q$ koşullu önermesi için;

a) $p \rightarrow q$ ‘nün karşıtı(converse) $q \rightarrow p$

b) $p \rightarrow q$ ‘nün tersi(inverse) $\overline{p} \rightarrow \overline{q}$

a) $p \rightarrow q$ ‘nün ters pozitifi(contrapositive) $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$

Doğruluk Tablosu

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\overline{p} \rightarrow \overline{q}$	$\overline{q} \rightarrow \overline{p}$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

Tablodan $p \rightarrow q$ ‘nün ters pozitifi olan, $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$ ‘nin mantıksal eşdeğer oldukları görülmektedir.

$$p \rightarrow q \equiv \overline{q} \rightarrow \overline{p}$$

Koşullu önermenin karşıtı veya tersi kendisi ile mantıksal eşdeğer değildir. Hâlbuki karşıt ve zıttı birbiriyle mantıksal eşdeğerdir.

Örnek: **p** : bu gün salı **q**: bu gün bir sınavım var

$p \rightarrow q$: eğer bugün salı ise bugün bir sınavım var

a) $p \rightarrow q$ 'nün karşıtı(converse) $q \rightarrow p$: Eğer bugün sınavım var ise bugün salı.

b) $p \rightarrow q$ 'nün tersi(inverse) $\overline{p} \rightarrow \overline{q}$: Eğer bu gün salı değil ise bugün sınavım yok

a) $p \rightarrow q$ 'nün ters pozitifi(contrapositive) $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$: Eğer bugün sınavım yok ise bugün salı değil.

Tez(Argument): birbirini oluşturan önemeleri dayanak olarak alan önemeler kümesine denir ve sonunda bir sonuca ulaşır. Dayanak noktalarındaki önermeler bağlaç ile birbirine bağlanırlar ve sonunda mantıksal bir sonuca ulaşırlar. Aksi halde tez geçersizdir.

Eğer dayanak noktasındaki önermeler $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ve sonucu Q ise tez,

Eğer $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \vdash Q)$ veya $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q)$ bir tutolojidir. $P_1, P_2, \ldots, P_n$ doğru olduğunda , Q doğru olmalıdır.

1.5.4 Yüklem mantığı(Predicate Logic)

Yüklem, bir veya birkaç nesnenin veya bireylerin özelliklerini açıklar.

…. kırmızı,

….. nın uzun dişleri var

……Başı üzerinde durmaktan hoşlanır . gibi.

Yüklemi ifade etmek için büyük harf ile semboller kullanırız.

M: kırmızıdır

B: uzun dişleri var

G: başının üzerinde durmaktan hoşlanır

Küçük harf semboller ise bireyleri ifade etmekte kullanılır.

a : bu gül

b: Ahmet

Basit önerme aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

M(a) : Bu gül kırmzıdır

M(b) :Ahmet kırmızıdır

G(b) : Ahmet başı üzerinde durmaktan hoşlanır.

Eğer M , kırmızıdır yüklemi olarak ifade edilirse M 'yi M(x) olarak ifade ederiz ve "x kırmızıdır" anlamına gelir. Burada x değişkeni, herhangibir nesne veya birey adı ile yer değiştirilebilir. Bu nedenle M(x) önermesel fonksiyon olarak adlandırılır. Önermesel fonksiyonun tersi ,

Eğer M(x) : "x kırmızıdır" ise $\overline{M(x)}$: "x kırmızı değildir" anlamına gelir.

Evrensel Niteleyici :"Bütün sıçanlar gridir" önermesini düşünelim. Bunu ilk yolu bütün sıçanlar için ; eğer x bir sıçan ise x gridir . önermesi ifade edilebilir. Bu bize yeni bir gösterim tanımlamayı getirir.

R(x) : x bir sıçandır , G(x) : x gridir. Her x için ‘i $\forall$ x olarak ifade edip

($\forall$ x)[R(x) →G(x)] şeklinde yazılır. Burada $\forall$ evrensel niteleyici olarak adlandırılır.

Varlık Niteleyici :Eğer aynı önermede “Enaz bir adet x” vardır ‘ı ∃x şeklinde ifade ederek, “Bazı sıçanlar gridir” önermesini ; vardır şeklinde yazarız.

(∃x)[R(x) →G(x)] olarak yazabiliriz burada ∃ ye varlık niteleyici denir ve en az bir x vardır veya bazı x’ler için şeklinde söylenir.

Yüklem mantığında Düşünceler

Yüklem mantığında bir tezin geçerliliği sağlanır. Bütün yüklemler doğruluğunun sağlandığı durumda sonuçta doğrudur. Aşağıdaki dört kural yüklem mantığında geçerlidir.

1. Evrensel tanım : Eğer önerme ($\forall$ x)F(x) doğru ise F(a) ‘da evrendeki her a için doğrudur.

2. Evrensel Genelleştirme: Eğer önerme F(a), evrendeki her a için doğru ise ($\forall$ x)F(x) ‘da doğrudur.

3. Varlık tanımı : Eğer önerme (∃x)F(x) doğru ise, evrende, F(a)‘yı doğru yapan bir a vardır.

4. Varlık genelleştirmesi : Eğer önerme evrendeki bazı a’lar için F(a) doğru oluyorsa‘ (∃x)F(x) doğrudur.

Örnek : Yeşil gözlü olan herkese güvenilmez. Ali’nin yeşil gözleri var. Öyleyse Ali’ye güvenilmez. Tezinin geçerliliğini gösterelim.

Eğer G(x) : x’in yeşil gözleri var ve T(x) : x güvenilir ve a , ali'yi gösterirse;

($\forall$ x)[G(x) $\rightarrow \overline{T(x)}$] ve G(a) $\rightarrow \overline{T(a)}$ şeklindedir.

1.6 Matematiksel İspat

Matematiksel ispatın popüler görünümü genellikle sembollerle yazılan birtakım adımların ard arda sıralanması şeklindedir. Her bir adım mantıksal olarak ispatın bir önceki adımını takip eder ve son satır ispatlanacak ifadedir. Bu imaja bağlı olarak ortak kanı, ispatın matematiksel doğruluğun mutlak ve sıkı bir testi olmasıdır. Fakat sürpriz bir biçimde, kendi aralarında ortak bir kanı olmamasına rağmen, bu görüş çoğu profesyonel matematikçinin görüşü değildir. Çoğu ispatın sosyolojik boyutunun olduğu görüşünü savunur ve ispatı, fikirlerin açıklanması ve iletimi için bir şart olarak kabul eder.

Aslında her iki görüş de doğrudur. İspat kelimesi geniş bir yelpazeyi kapsar. Bu yelpazenin bir ucunda birinci bölümdeki mantıksal işaretlerle ifade edilen çok resmi ispatlar bulunur. Her bir adım bir önceki adımı mantık kuralları çerçevesinde takip eder. Aslında, ispat yapmak için sadece semboller kullanmak mümkündür fakat bu tabi ki takip etmesi zor bir olaydır. Daha az resmi ispatlar ise kelimelerin, sembollerin ve diyagramların karışımıyla gerçekleştirilir. Matematik ile ilgili kitaplardaki ispatlar genellikle az resmi ispatlardır.

Matematikte onay verilmeyen bir şey varsa o da gözlemlere dayanarak sonuca gitmektir. Öte yandan, birçok kez bir çift sayının karesini aldığımızda sonucun bir çift sayı olduğunu gözlememize rağmen bu çift sayıların karesinin çift sayı olduğunu kanıtlamaz. Ancak buna inancımızı kuvvetlendirir ve bu gözleme geçerli bir kanıt aramaya teşvik eder. Gözlemlere dayanarak çeşitli gerçekler hakkında yargılarda bulunmaya tümevarım denir. Mantıksal çıkarımlarla sonuca varılan yargıya ise tümdengelim denir.

1.6.1 Aksiyomlar ve Aksiyom Sistemleri

Matematiksel bir teori, örneğin küme teorisi, sayı teorisi veya grup teorisi değişik bileşenler içerir. Bunların en önemlileri:

1. Tanımlanmamış terimler.
2. Aksiyomlar.
3. Tanımlar.
4. Teoremler.
5. İspatlar.

3, 4 ve 5. maddelerde sıralananlar hakkında herkes bilgi sahibi olabilir. Matematikte tanımlanmamış terimlere ihtiyaç duymamız sürpriz gelebilir fakat biraz düşünülürse bunun gerekliliği anlaşılabilir.

Diyelim ki, küme teorisi üzerine eksiksiz bir çalışma yapmak istiyoruz. Açıktır ki başlangıç noktası kümenin ne olduğunu anlatmaktır: Tanım 1: Küme …..- Yani? Problem şu ki, kümeyi tarif etmek için başka bir terime ihtiyacımız var (örneğin topluluk) ancak bu sefer de diğer terim tanımlanmamış durumdadır. Diğer terimi tanımlayabilmek için yine başka bir tanımlanmamış terime ihtiyacımız var ve bu böyle devam eder. Açık ki, sonsuz bir tanım dizisinden uzak durmamız gerekiyor. Bu da bizi bazı terimleri tanımlanmamış bırakmaya zorlar. Tabi ki, hala aklımızdakini sezgisel biçimde ifade edebiliriz ancak bu sezgisel tanımlama teorimizin bir parçası olmak zorunda değildir.

Listedeki 2 numaralı eleman olan aksiyomların da biraz açıklanmaya ihtiyacı var. Matematiksel bir teorideki bütün terimleri tanımlayamadığımız gibi aynı sebeple teorideki her ifadeyi de kanıtlayamayız. Bir yerden başlamak için kanıtlanmayacak bazı ifadelere ihtiyaç vardır. Bu ifadelere **aksiyom** denir. Aksiyomlar teorinin temel özelliklerini temsil ederler.

Bilmek gerekir ki, aksiyomların doğruluğundan veya yanlışlığından söz edilmez; onlar sadece teorinin ilerleyebilmesini sağlayan tanımlanmamış terimler hakkındaki ifadelerdir. Öte yandan kendi aralarında tutarlı olmalıdırlar ve aynı anda hepsinin doğru olma imkanı olmalıdır. Kendi aralarında çelişen aksiyomlar kabul edilemez. Matematiksel bir ifadeyi uygulamaya gelince, tanımlanmamış terimler yorumlanırlar ve aksiyomlar doğru veya yanlış şeklinde önermeler haline gelir.

Bir aksiyomatik teori tanımlar yaparak ve teorem ispatlanarak gelişir. Tanımlar, tanımlanmamış terimlerin yanlış şeylerle ilişkilendirilmemeleri için yapılırlar. Teorem ise birinci bölümde anlatılan mantıksal yargıları kullanan aksiyomları takip eden, sistemdeki çeşitli terimler hakkındaki ifadelerdir. Teorem orijinal aksiyomlardan gittikçe uzaklaşarak yayılır fakat sonuçta onlar üzerine inşa edilir. Teoremler ve ispatları saf matematiğin kalbini oluşturur.

1.7 İspat Yöntemleri

Görüldüğü gibi, resmi matematik, aksiyomatik yöntem üzerine inşa edilmiştir. Tanımlanmamış terimler ve aksiyomlar ile başlar, mantık kurallarını kullanarak teoremleri ispatlayarak gelişir. Bu bölümde ispatın temel özellikleri ve bazı ispat yöntemlerinin genel yapısından bahsedilecektir.

Diyelim ki, $A_1, A_2, \ldots A_n$ bir aksiyom sistemi veridi. Teorem, aksiyomların birleşimi ile mantıksal olarak anlamlandırılan sistem terimleri hakkındaki ifadelerdir. Bu sebeple, sistem içindeki bir teoremi resmi olarak bir T önermesi şeklinde öyle ki;

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \vdash T.$$

Hatırlarsak P $\vdash$ Q, P' nin doğru olduğu her durumda doğrudur. Aksiyom sisteminin herhangi bir modelinde aksiyomlar doğru önermeler şeklinde yorumlara sahiptir böylece her teorem doğru önerme şeklinde bir yoruma sahiptir. Bu nedenle teoremler, aksiyom sistemindeki her modelde doğru olan önermeleridir.

O halde bir teoremin ispatını ne oluşturur? Gayri resmi olarak ispat, sonucu teorem olan mantıklı düşüncelerdir. Bir teorem bir kez ispat edildiğinde diğer teoremlerin ispatı için diğer aksiyomlar ile birlikte kullanılabilir. Bundan dolayı, A_i (i=1,2, …,n) aksiyomlar; T_j (j=1,2,…m) ispatlanmış teoremler olmak üzere T teoremini ispat etmek için

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_m) \vdash T$$

olduğunu göstermek gerekir. Bunu aksiyomların doğruluğunu varsayarak ve bunun T' nin doğruluğunu garantilediğini göstererek yaparız.

1.7.1 Koşullu Önermelerin Doğrudan İspatı

Birçok matematiksel varsayım koşullu önerme (P→Q) biçiminde ifade edilebilir. Bu sebeple bunların ispatları, A_i ve T_j aksiyomlar ve teoremler olmak üzere

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_m) \vdash (P \to Q)$$

olduğunu göstermeyi içerir. Bu

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_m) \to (P \to Q)$$

ifadesinin bir tutoloji olduğunu ve $R \to (P \to Q)$ ve $(R \wedge P) \to Q$ mantıksal eşdeğerliliğini kullanarak

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_m \wedge P) \to Q$$

ifadesinin bir tutoloji olduğunu veya

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_m \wedge P) \vdash Q$$

olduğunu göstermeye denktir. O halde, P→Q şeklindeki teoremlerin direkt ispatı için aksiyomların doğruluğunu ve bundan dolayı tüm ispatlanmış teoremlerin doğruluğunu varsayarız.

Örnek 1.8: Tüm n tamsayıları için, n çift ise n^2'nin de çift olduğunu kanıtlayınız.

İspat: n çift bir tamsayı olsun. Bu halde 2, n'in çarpanlarından biridir ve n, m bir tamsayı olmak üzere n=2m şeklinde ifade edilebilir. Buradan yola çıkarak $n^2=(2m)^2=4m^2$ olur. $4m^2$ ifadesi $2m^2$ tamsayı olmak üzere $2(2m^2)$ şeklinde yazılabilir. Bu sebeple n^2 çifttir.

Dikkat edilirse birçok adımda sebepler göz ardı edilmiştir. Örneğin, $(2m)^2=4m^2$ eşitliğinin doğruluğu için herhangi bir sebep belirtilmedi. Bunun nedeni bu adımın çok açık olması.Öte yandan ciddi bir ispatta eksik detaylar sağlanmalıdır.

1.7.2 Koşullu Önermelerin Ters Pozitif(contrapositive) Kullanarak İspatı

Hatırlarsak ters pozitif $\overline{Q} \rightarrow \overline{P}$, P→Q koşullu önermesi ile mantıksal eşdeğerdir. Bu nedenle, ters pozitifin doğruluğunu sağlarsak koşullu önermenin de doğru olduğu sonucuna varabiliriz. Bu da $\overline{Q} \rightarrow \overline{P}$ 'nun kendisi de koşullu bir önerme olduğundan direkt ispatını kullanabilmemize rağmen P→Q 'nun dolaylı ispatını oluşturur.

Örnek 1.9: Ters pozitifini sağlayarak, her n tamsayısı için n^2 çift ise n de çifttir ifadesini ispatlayınız.

İspat: İspatlanacak ifade P(n) 'n^2 çifttir', Q(n) 'n çifttir' ve n seçilmiş bir tamsayı olmak üzere, P(n) → Q(n)' dir. Ters pozitif ise ~Q(n) →~P(n): n tek ise n^2 tektir. Bu ifadeyi 'n tektir' in doğru olduğunu varsayarak ve n^2 'nin tek olduğunu göstererek kanıtlayabiliriz.

n tek bir tamsayı olsun.

$n=2m+1$ m tamsayı

$\Rightarrow$ $n^2=(2m+1)^2$

$=4m^2+4m+1$

$=2(2m^2+2m)+1$ $(2m^2+2m)$ tamsayı

$\Rightarrow$ n^2 tektir.

Örnek 1.10: m ve n birer pozitif tamsayı ve mn=100 ise, $m \leq 10$ veya $n \leq 10$ olduğunu ispatlayınız.

İspat: P(m,n), 'm ve n, mn=100 olan iki rastgele pozitif tamsayı' ve Q(m,n), '$m \leq 10$' ve '$n \leq 10$' önermelerinin dahili birleşimi olmak üzere P(m,n) →Q(m,n) olduğunu göstermek gerekir. De Morgan kuralından $\overline{(p \vee q)} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$ böylece Q(m,n)'nin tersi 'm>10' ve 'n>10' dur. Ters pozitif ~Q(m,n) →~P(m,n), bu nedenle 'm ve n rastgele tamsayılar olmak üzere m>10 ve n>10 ise mn≠100'.

m ve n pozitif tamsayılar olsun. Böylece,

$m>10$ ve $n>10$

$\Rightarrow$ $mn>100$

$\Rightarrow$ $mn \neq 100$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

1.7.3 Çelişki(contradiciton) ile İspat

Bir doğruluk tablosu kullanarak f bir çelişki olmak üzere P ve $\overline{P} \rightarrow f$ ' nin mantıksal eşdeğerliklerini kolayca sağlayabiliriz. Bu sebeple T teoremini ispatlamak için bunun yerine $\overline{T} \rightarrow f$ koşullu önermesini ispat edebiliriz. Bu da aksiyomların ve teoremlerin ve de $\overline{T}$' nün doğruluğunu (T' nin yanlışlığını) varsayarak gerçekleştirilebilir. Daha sonra bunun daima yanlış olan bir önerme yani bir çelişki anlamına geldiğini gösterebiliriz. Çoğunlukla, çelişki bir önerme ve tersinin kesişimi $Q \wedge \overline{Q}$ şeklindedir. $\overline{T} \rightarrow f$ 'nin doğru olduğu sonucuna varabiliriz ve bu nedenle T teoremi doğrudur.

Örnek 1.11: $\sqrt{2}$ 'nin rasyonel olmadığını ispatlayınız.(p ve q tamsayı ve q≠0 olmak üzere p/q biçiminde yazılabilen tamsayılara rasyonel sayı denir.)

İspat: Bu teoremin ispatı çelişki ile ispatlamanın bilinen bir örneğidir. $\sqrt{2}$ nin rasyonel olduğunu varsayarak bunun bir çelişkiye neden olduğunu göstermemiz gerekir.

Diyelim ki, $\sqrt{2}$ rasyonel bir sayı ve m ile n tamsayı ve n≠0 olmak üzere $\sqrt{2}$ =m/n. m/n kesrinin en sadeleşmiş halinde yani m ve n'nin ortak çarpanlarının olmadığını varsayabiliriz. Eğer ortak çarpanları varsa sadeleştiririz. Şimdi,

$$
\begin{array}{ll}
 & \sqrt{2} = m/n \\
\Rightarrow & 2 = m^2/n^2 \\
\Rightarrow & 2n^2 = m^2 \\
\Rightarrow & m^2 \text{ çifttir.} \\
\Rightarrow & m \text{ çifttir. (Örnek 1.9)} \\
\Rightarrow & m = 2p \quad \text{herhangi bir p tamsayısı için} \\
\Rightarrow & m^2 = 4p^2.
\end{array}
$$

Bu sonucu $2n^2=4p^2$ eşitliğinde yerine koyarsak,

$$
\begin{array}{ll}
 & 2n^2 = 4p^2 \\
\Rightarrow & n^2 = 2p^2 \\
\Rightarrow & n^2 \text{ çifttir} \\
\Rightarrow & n \text{ çifttir.}
\end{array}
$$

Böylece hem m hem de n'nin çift olduğunu yani 2'nin ortak çarpan olduğunu göstermiş olduk. Ancak m ve n hiçbir ortak çarpana sahip değildi çünkü böyle bir çarpan en başta sadeleştirildi. Bu nedenle bir önerme ve tersinin birleşimini yani bir çelişkiyi ortaya çıkardık ve bu da teoremi ispatlamaktadır.

1.7.4 Çift Yönlü koşullu Önermelerin İspatı

Çift yönlü bir önermeyi $P \leftrightarrow Q$, ispat etmek için genellikle $P \leftrightarrow Q$ ve $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$' nin mantıksal eşdeğerliliğine başvururuz. Bu nedenle çift yönlü koşullu önermelerin ispatı iki ayrı bölüm içerir: biri $P \rightarrow Q$'yu diğeri $Q \rightarrow P$' yi ispatlamak.

Örnek 1.12: Herhangi x ve y tamsayıları için xy çarpımının, sadece ve sadece 'x çiftse' veya 'y çiftse' çift olduğunu ispatlayınız.

İspat: Önce direkt ispat kullanarak x çiftse veya y çiftse xy' nin çift olduğunu kanıtlarız.

x çift olsun. Örneğin n bir tamsayı olmak üzere x=2n. O halde xy=2ny yani xy çifttir. Eğer y çift olsaydı benzer bir argüman xy' nin çift olduğunu gösterebilir.

Şimdi tersini ispatlayalım: Eğer xy çift ise x çifttir veya y çifttir. Bunun için ters pozitifin direkt ispatını kullanabiliriz: x ve y tek ise xy de tektir.

O halde x ve y tek olsun.

$$
\begin{array}{ll}
\Rightarrow & x = 2n+1,\ y = 2m+1 \quad \text{m ve n tamsayı olmak üzere} \\
\text{Öyleyse} & xy = (2n+1) \quad (2m+1)
\end{array}
$$

$=4mn+2n+2m+1$

$=2(2mn+n+m)+1$

$\Rightarrow$ xy tektir. Bu da ispat demektir.

1.7.5 Aksine Örneklerin Kullanımı

Birçok matematiksel konjektür, 'tüm A lar B dir' veya 'A özelliğine sahip tüm nesneler B özelliğine sahiptir' biçimindedir. Bu ifade şu şekilde de yazılabilir: A(x) 'x, A dır(A özelliğine sahiptir)' ve B(x) 'x B dir (B özelliğine sahiptir)' olmak üzere $(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)]$.

Önerme şu şekilde de yazılabilir: x A evreni ile sınırlandırılmış olmak üzere $(\forall x)[B(x)]$. Daha önce söylenildiği gibi B özelliğine sahip olmayan bir x bulamamak teoremin ispatını oluşturmaz. Öte yandan B özelliğine sahip birçok x bulmak da bu özelliğe sahip olmayan x bulamayacağımızı garanti etmez. Ancak, evren sonlu bir evrense ve yeterli zaman varsa bütün elemanları kontrol edip özelliğin olup olmadığı sorusunun cevabını bulabiliriz. Eğer tüm elemanlarda bu özellik varsa teorem ispatlanmış olur. Bu yönteme **tüketme ile ispat** denir çünkü x' in bütün olasılıkları tüketilir.

Diğer yandan, $(\forall x)[B(x)]$ biçiminde bir konjektürün yanlış olduğunu ispat etmek için evrendeki sadece bir üyenin B özelliğine sahip olmadığını bulmamız gerekir. Bu aksine örnekle ispatın esasıdır.

1.8 Matematiksel İndüksiyon

Aslında matematiksel indüksiyon diye bilinen ispat yöntemi tümevarımsal bir ispat değildir. Olmamasının nedeni kabul edilen ispatlar sadece tümdengelimsel yargılar barındırır. İndüksiyonun doğruya yakın olan bilgiyi sağlama görevi vardır. Herhangi bir ispatla ilgili problem, onu ispatlamadan önce sonucu bilmemiz gerektiğidir.

Birçok matematiksel konjektür pozitif tamsayıların özellikleri ile ilgilidir. Örneğin şu problem: ilk n tek tamsayının toplamı için bir formül bulun. Başlama noktası olarak n' in küçük bir değerleri için toplamı yazmak ve bunun bize olası konjektür hakkında bir fikir verip vermediğini gözlemektir.

n=1 için, toplam 1' dir.
n=2 için, toplam 1+3=4' tür.
n=3 için, toplam 1+3+5=9' dur.
n=4 için, toplam 1+3+5+7=16' dır.

Bu aşamada n' in her değeri için toplamın n^2 olduğunu fark ederiz. Birkaç tane daha deneyip daha da emin olmak isteriz.

n=5 için, toplam 16+9=25' dur.
n=6 için, toplam 25+11=36' dır.

Tümevarımsal yargı bizi ilk n tek tamsayının toplamı n^2'dir konjektürüne götürür. Bunun tüm pozitif n tamsayıları için doğru olduğunu tümdengelime dayanarak ispatlamalıyız.

Matematiksel indüksiyon sonucun tüm pozitif tamsayılar için geçerli olduğunu ispatlamak için uygundur ve şu adımları içerir:

(a) Konjektürün n=1 için geçerli olduğunu ispatla
(b) Her $k \geq 1$ için, eğer sonuç n=k için sağlanıyorsa n=k+1 için de sağlanmalıdır. Bu adım tümevarımsal adım olarak bilinir.

(b) şıkkındaki koşullu önermeyi ispatlamak için bir önceki konuda anlatılan teknikler kullanılır. Öte yandan, tümevarımsal adım genellikle direkt ispat kullanılarak sağlanır. Sonucun n=k için sağlandığını varsayarız. (Bu varsayım bazen tümevarımsal hipotez şeklinde adlandırılır.) Bundan n=k+1 için de sağlandığı sonucunu çıkarırız. n=1 için sağlandığına göre tümevarımsal adım bizi n=2, n=3 vs. için de sağladığı sonucuna götürür. Matematiksel indüksiyonun prensibi, sonucun tüm n pozitif tamsayıları için sağlandığını gösterir.

Örnek 1.13: İlk n tane pozitif tek tamsayının toplamının n^2 olduğunu ispatlayınız.

İspat: İspatlamak istediğimiz şey: $\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots}_{\longleftarrow \text{n terms} \longrightarrow} = n^2$.

Dizideki son eleman 2n-1 ‘dir ve bu nedenle konjektürümüzü şu şekilde yazabiliriz:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Daha sonra aşağıdaki adımları izleriz.

(a) Konjektürün n=1 için doğru olduğunu ispatla.

n=1 için, $1=n^2$. O halde n=1 için konjektür doğrudur.

(b) $k \geq 1$ olmak üzere konjektürün n=k için doğru olduğunu varsay ve bunun n=k+1 için konjektürün doğruluğuna yol açtığını göster.

Varsayalım ki, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$. Bir sonraki tamsayı olan 2k+1’i eşitliğin iki tarafına eklersek,

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) &= k^2+(2k+1) \\ &=(k+1)^2. \end{aligned}$$

Bu eşitliğin sol tarafı ilk k+1 tane tek tamsayının toplamıdır ve tümevarımsal hipotezi kullanarak gösterdik ki, bu toplam $(k+1)^2$’dir. Böylece konjektürün eğer n=k için sağlanıyorsa, n=k+1 için de sağlandığını göstermiş olduk. Ayrıca n=1 için de sağlandığını gösterdik ve matematiksel indüksiyon kuralına dayanarak teorem tüm pozitif n tamsayıları için sağlanır diyebiliriz.

1.8.1 Matematiksel İndüksiyon Prensibinin değişimleri

Tümevarımsal prensip üzerinde değişik modifikasyonlar yapılabilir. Örneğin, S(n) önermesinin sabit bir N tamsayısından büyük veya eşit tüm tamsayılar için sağlandığını ispat etmek isteyelim. Tümevarım prensibi üzerinde bazı modifikasyonlar yaparsak şunu elde ederiz:

(a) S(N)’ in doğru olduğunu ispatla.
(b) $k \geq N$’ yi sağlayan her tamsayı için, eğer S(k) doğru ise S(k+1) de doğrudur.

Bu tümevarım ile ispatın standart metodudur sadece 1 yerine N ile başlanmıştır.

Tümevarımsal ispatın daha önemli bir modifikasyonu ‘indüksiyonun ikinci prensibi’ ile sağlanır.

Bunun önemi şudur: Tümevarımsal adıma geldiğimizde S(n)' nin sadece k yerine, k' dan küçük ve eşit tüm pozitif r tamsayıları için doğru olduğunu varsayarız.

İndüksiyonun İkinci Prensibi

S(n) doğal n sayısı ile ilgili bir ifade ve q sabit bir doğal sayı olsun. S(n) 'in tüm $n \geq q$ için doğruluğunun indüksiyon ile ispatı için adımlar;

(a) Temel adım :S(q) nin doğruluğunu ispatla ve,
(b) eğer $k \geq q$ için, S(q), S(q+1), S(q+2),…., S(k) doğru ise (tüm $q \leq k$ için S(q)' nin doğruluğu S(k+1)'in doğruluğu anlamına gelir.

İndüksiyonun bu ikinci prensibi ilk başta ilkinden daha genel gibi gözükür çünkü S(k+1)'in doğru olduğu sonucuna varmak için daha fazla varsayımda bulunuruz. Ancak, 'S(q), $q \leq k$' yı sağlayan tüm pozitif tamsayılar için doğrudur' önermesine T(n) dersek, ikinci prensibin iki kısmı:

(a) T(q) doğrudur, ve
(b) $k \geq q$ için T(q)'nin doğruluğu T(k+1)'in doğruluğu anlamına gelir.

Bu durumda indüksiyonun ikinci adımında öncekine göre daha fazla bilgi gerekir. Buna indüksiyonun kuvvetli prensibi denir. Bu şekle **tam indüksiyon** denir.

Örnek: birden büyük olan herhangi bir doğal sayının asal sayıların çarpımı şeklinde gösterilebileceğini ispatlayın.

S(n), n, birden büyük doğal sayı ise n'in asal sayıların çarpımı olduğunu indüksiyon ile tüm n'ler için gösterelim.

a)Temel adım. S(2) için doğru. 2 asal sayıların çarpımı şeklinde gösterilebilir

b) İndüksiyon adımı: S(2), S(3), …… ,S(k) nın doğruluğu S(k+1)'in doğruluğunu kanıtlar. Şimdi eğer k+1 asal sayı ise doğrudur , eğer k+1 asal sayı değil ise m,n <k olmak üzere k=m.n şeklinde gösterilebilir. İndüksiyon adımı ile m ve n 'nin her ikiside asal sayıların çarpımı olarak gösterilebilir.. Böylece k+1 asal sayıların çarpımı olarak gösterilebilir.

1.8.2 Tümevarımsal Tanımlar (Kümelerin ve fonksiyonların, yinelemeli(rekürsif) tanımları)

Tümevarımsal prensibin kullanımı sadece pozitif tamsayılar hakkındaki önermelerin ispatı ile sınırlandırılmamıştır; matematiksel nesnelerin ve özelliklerin tanımı için de kullanılırlar. Bazı durumlarda nesnelerin açık olarak tanımlanması zordur. Bu durumlarda nesneler kendileri cinsinden tanımlanırlar. Böyle tanımlamaya yinelemeli(rekürsif) tanımamla denir. Yinelemeli tanım, seri, fonksiyon ve kümelerin tanımında kullanılabilir. Örnek olarak, $a_n = 2^n$ (n=0,1,2, ……) olarak verilen 2'nin kuvvetleri dizisi verilsin. Bu diziyi ilk terimi $a_0 = 1$ ve sonraki elemanların öncekiler cinsinden tanımı için bir kural vererek $a_{n+1} = 2.a_n$ (n=0,1,2, ……) şeklinde tanımlanır.

Kümelerin tümevarımla tanımlanması bazı problemlerin çözümünü kolaylaştırır. Bu tanıma indüktif veya yinelemeli(recursive) tanımlama denir. Bir kümenin yinelemeli tanımı üç adımdan oluşur.

1. Temel adım. Tanımlanacak kümenin belirli elemanı kümeye ait olduğu ifade edilir.
2. Indüktif(yinelemeli) adım. Bu adımda kümenin içindeki mevcut elemanları kullanarak

kümenin daha fazla eleman bulundurabileceğini söyler.

3. Kapalı parça. Kümenin içinde 1ve 2 adımda tanımlanan elemanlar olduğunu söyler.

Örnek: 5 ile bölünebilen tamsayılarda oluşan A kümesinin tanımı aşağıdaki adımlardan oluşur.

i. 5 sayısı A'nın bir elemanıdır.

ii. Eğer n , A'nın elemanı ise, n+5'de A'nın elemanıdır.

iii. A'daki bir nesne ancak ve ancak (a) ve (b) adımlarının tekrarlanmasıyla elde edilebilir.

Fonksiyonların yinelemeli tanımı: Eğer bir fonksiyon $f(n)$ ondan önce gelen elemanlar $f(i)$ ler cinsinden tanımlanıyorsa buna yinelemeli(rekürsif) tanım denir. $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(k)$'ya da başlangıç değerleri denir. Bir başka ifade ile;

a) Fonksiyonun sıfırdaki değerini ata.

b) Fonksiyonun değerini bir tamsayı olarak hesaplayan ve kendisinden küçük sayılar cinsinden ifade eden bir kural tanımla.

Örnek : $F(n) = n!$ Faktöriyel fonksiyonunu yinelemeli olarak tanımlayalım.

a) fonksiyonun sıfırdaki değeri F(0) = 1

b) $F(n+1)$ 'i $F(n)$ cinsinden hesaplayan kural , (n+1)! 'in n!'den hesaplanabilmesi (n+1) ile çarpılarak olacaktır. Bu durumda kural:

$F(n+1)=(n+1).F(n)$ şeklinde olacaktır.

Aşağıdaki Fibonacci sayıları dizisini ele alırsak:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…

Dizideki her bir sayı kendinden önceki iki sayının toplamıdır. f_n n. Fibonacci sayısını temsil ediyorsa, diziyi şu şekilde tanımlayabiliriz:

$f_1 = 1, f_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Fark edileceği gibi tümevarımsal tanım indüksiyon prensiplerine uymaz. Tümevarımsal tanıma başlamak için, ilk iki Fibonacci sayısını tanımlamamız gerekir, sadece ilkini değil. Aşağıda pozitif n tamsayısına dayanan A_n matematiksel nesne ve özelliğine ait tümevarımsal tanımın genel formu gösterilmiştir.

Tüm pozitif tamsayılar için A_n 'i tanımlamak için:

(a) k=1,2,…r için ayrı ayrı A_k'yi tanımla

(b) k>r için A_k'yi $A_1, \ldots A_{k-1}$ biçiminde tanımla

Bazı nesneleri veya tümevarımsal olarak tanımlanmış bazı özellikleri içeren önermeleri ispatlamak için matematiksel indüksiyonu kullanmak doğaldır.

1.9 Alıştırmalar

1- Aşağıdaki mantıksal eşdeğerlilikleri sağlayınız.

(i) $(p \leftrightarrow q) \equiv (\overline{p \wedge \overline{q}}) \wedge (\overline{q \wedge \overline{p}})$

(ii) $(p \veebar q) \equiv \overline{(\overline{p \wedge \overline{q}}) \wedge (\overline{q \wedge \overline{p}})}$

2- Aşağıdaki argümanların doğruluğunu test ediniz.

(i) Okulu bırakırsam bankada işe başlayacağım. Okulu bırakmıyorum o halde bankada işe başlamayacağım.

(ii) James polis veya futbolcudur. Eğer polisse tabancası vardır. James'in tabancası yoktur o halde James futbolcudur.

3- $n>0$ olmak üzere n^3+2n 'in 3 ile bölünebildiğini tümevarım ile ispatlayınız.

4- Herhangi üç ardışık tamsayının çarpımının 6 ile bölünebildiğini ispatlayınız.

5- İlk n pozitif tamsayının karelerinin toplamının $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ olduğunu ispatlayınız.