İspatlar (Proofs)

- Bir matematik sistemi
  - Tanımlanmamış terimler (Undefined terms)
  - Tanımlar (Definitions)
  - Aksiyomlar (Axioms)

Tanımlanmamış Terimler (Undefined Terms)

- *Tanımlanmamış terimler* bir matematik sisteminin temel taşını oluşturur. Bu terimler bir matematiksel sistemin başlangıç kavramları olarak da kabul edilebilir.
  - Örnek: Euclidean geometride tanımlanmamış terimler
    - Nokta (Point)
    - Doğru (Line)

Tanımlar (Definitions)

- *Tanım* (*definition),* yeni bir kavram yaratmak amacıyla önceden kabul edilmiş kavramlar ve tanımlanmamış terimlerden bir proposition oluşturmaktır

Örnek: Euclidean geometrideki tanımlar:

- Eğer iki üçgenin karşılıklı kenarları ve açıları birbirinin aynı ise bu iki üçgen eş üçgendir
- İki açının toplamı 180 derece ise bu açılara birbirini tamamlayan açılar denir

Aksiyomlar (Axioms)

- Aksiyom (*axiom),* matematiksel bir sistem içerisinde ispat yapmaksızın doğru kabul edilen proposition'dır

- Matematikteki aksiyomlara örnek:
  - Örnek: Euclidean geometrideki aksiyomlar
    - İki nokta verilmiş olsun. Bu noktalardan geçen bir doğru her zaman mevcuttur.
    - Bir doğru ve doğru üzerinde yer almayan bir nokta mevcut olsun. Bu noktadan geçen doğruların bir tanesi verilen doğruya mutlaka paraleldir.

Teoremler (Theorems)

- *Teorem*, Önceden ispatlanmış teoremleri, aksiyomları, tanımlamaları kullanarak ve *p* nin doğru olduğunu farzederek doğruluğu önerilebilen $p \rightarrow q$ formundaki proposition'a denir

İspat Çeşitleri

- *İspat (proof),* Teoremin doğruluğunu belirlemek için önermeleri kullanan bir seri işlemden oluşan mantıksal çıkarımdır

- *Doğrudan ispat (Direct* proof): $p \rightarrow q$
  - *q* önermesinin doğruluğunu elde etmek amacıyla ispatlanmış teoremleri, aksiyomları ve *p* önermesinin doğruluğunu kabul ederek çözüme ulaşmadır

- *Dolaylı/Olmayana Ergi ispat (Indirect* proof): $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$
  - $p \rightarrow q$ önermesinin çelişkisinden çözüme ulaşmaktır

Doğrudan İspat

$p \rightarrow q$ durumunda kullanılır.

p'nin doğru olduğu kabul edilerek, çıkarım kuralları kullanılarak,
q'nun da doğru olduğu gösterilir.

$$\underbrace{\text{n tek sayı ise,}}_{p}\ \underbrace{n^2 \text{ tektir}}_{q}$$

$$\underbrace{\text{m ve n çift sayı ise,}}_{p}\ \underbrace{\text{m+n çifttir}}_{q}$$

Not : p önermesi n, m gibi sade eşitlikler olmalıdır.
n^2, m+n gibi durumlarda doğrudan ispat yapılmaz.

Adımlar:

1. $p \rightarrow q$ için p doğru kabul edilir
2. q önermesinin doğruluğu gösterilmeye çalışılır
3. $p \rightarrow q$ nun doğruluğu söylenir

Örnek

n çift sayı ise n^2 de çift sayıdır önermesini ispat ediniz.

1. $n=2k$, $k \in Z$ doğru kabul edilir
2. $n^2=4k^2= 2(2k^2)$

$P \in Z$, $p=2k^2$ için, $n^2=2p$ olur

3. $n^2=2p$ bir çift sayı formunda olduğundan n^2 de çift sayıdır

Not : m+n çift sayı ise, m ve n çift sayıdır önermesi
doğrudan ispat yöntemi ile ispat edilemez

Dolaylı İspat / Olmayan Ergi / Indirect İspat

$p \rightarrow q$ durumlarında doğrudan ispat ile ispatın mümkün olmadığı durumlarda dolaylı ispat kullanılır

Örnek

$$\underbrace{n^2 \text{ tek sayı ise,}}_{p} \quad \underbrace{n \text{ tektir}}_{q}$$

$$\underbrace{m+n \text{ tek sayı ise,}}_{p} \quad \underbrace{m \text{ ve } n \text{ tektir}}_{q}$$

Bir önermenin $p \rightarrow q$ karşıt tersi (contrapositive) karşılığı bulunur ve bu karşılık doğrudan ispat ile elde edilir

$p \rightarrow q$ için ‘contrapositive’ **q’** $\rightarrow$ **p’** alınır ve doğrudan ispat yapılır

Örnek

n^2 tek sayı ise n′ de tek sayıdır önermesini ispat ediniz.

p: n^2 tek sayıdır p′: n^2 çift sayıdır
q: n tek sayıdır q′: n çift sayıdır

Önermenin yeni hali: '**n çift sayı ise n^2 çift sayıdır**'

Yeni önermeyi doğrudan ispat ile ispatlayalım

1. n çift sayı ise n^2 çift sayıdır
2. $n=2k$, $k \in Z$ doğru kabul edilir
3. $n^2=(2k)^2= 4k^2$

   $u \in Z$, $u=2k^2$ için, $n^2=4k^2=2*2k^2=2u$ olur

Karşıt tersi doğru olunca, kendisi de doğrudur.
n^2 tek sayı ise n′ de tek sayıdır

Örnek

n bir tam sayı ve 3n+2 tek ise, n'nin tek olduğunu ispatlayınız

---

Önce doğrudan ispat yapalım:

3n+2 tek sayı ise, her hangi bir ***k*** tam sayısı için 3n+2 = 2***k***+1

3n+2 = 2***k***+1
3n+1 = 2***k*** olduğunu görüyoruz, fakat *n* değerinin tek olduğunu gösteremeyiz

Şimdi de dolaylı ispat yapalım:

n çift ise, 3n+2' de çift sayıdır

Her hangi bir ***k*** tam sayısı çift n= 2k ise 3n+2 = 3(2***k)***+2 çift sayıdır

3n+2 = 6k + 2 = 2(3k+1) olur, bu da bize 3n+2'nin çift sayı olduğunu söyler

Koşullu önermenin sonucunun negatifi, hipotezin yanlış olduğunu gerektirdiği için orijinal koşullu önerme doğrudur

Matematiksel sonuç çıkarma (Tümevarımsal ispat / Mathematical induction)

- $\forall\ n \in A$, S(n) formundaki ifadenin ispatına bakalım

  * N, pozitif tamsayılar veya doğal sayılardan oluşan bir küme

  * A, N'nin bir alt kümesi

  * S(n) de bir önerme olsun

Genel olarak özdeşliklerin ispatında kullanılır

- Her pozitif tamsayının, S(n) önermesini doğru veya yanlış yaptığını farzedelim

  - 1. S(1) doğru olduğunu teyit et (ilk eleman ile)
  - 2. *n* keyfi seçilmiş pozitif bir tamsayı olsun

    i pozitif bir tamsayı olup, $i < n$ olarak belirle
  - 3. S(i) ‘nin doğruluğundan yola çıkarak, S(i+1)’in doğru olduğunu göster

    $$S(i) \rightarrow S(i+1)$$
  - 4. Sonuç olarak, tüm pozitif tamsayılar için S(n) doğrudur

Matematiksel sonuç çıkarım: terminoloji

- *Temel adım (basis step):*

  S(1) 'in doğruluğunun gösterilmesi

- *Tümevarımsal adım (Inductive step):*

  S(i)'nin doğru farzedilmesi

  İspat $S(i) \rightarrow S(i+1)$

  if S(i) *is true*, *for all* $i<n+1$, *then* S(n+1) *is true*

- *Sonuç (Conclusion):*

  Bütün pozitif tamsayılar için S(n)'nin doğruluğu

Örnek

İlk *n* adet pozitif tamsayının toplamı Sn olup, Sn =1+2+3+…+n olarak gösterilsin.

Sn'nin n=1,2,3… için **Sn=** $\frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

1. n=1 için, 1=1(1+1)/2=1 (doğru)
2. n=2 için, 1+2 = (2*3)/2=3 (doğru)

   n=k için, 1+2+3+…+k =$\frac{k(k+1)}{2}$ (doğru kabul edilir)
3. n=k+1 için,

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{\frac{k(k+1)}{2}}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ Doğrudur

Örnek

İlk $\boldsymbol{n}$ adet pozitif tek sayının toplamı $\mathbf{n^2}$ olduğunu ispatlayınız.

$S_n = 1+3+5+ \ldots = n^2$

1. n=1 için, $1=1^2=1$ (doğru)
2. n=2 için, $1+3 = 2^2=4$ (doğru)

   n=k için, $1+3+5+\ldots+(2k-1)=\boldsymbol{k}^2$ (doğru kabul edilir)
3. n=k+1 için,

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{\boldsymbol{k}^2}+(2(k+1)-1)=(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^2$$

$$\boldsymbol{k}^2 + (2k+1) = \boldsymbol{k}^2 + 2k + 1$$ Doğrudur

Örnek

n pozitif tamsayı iken (n^3-n)'nin 3'e tam olarak bölünebildiğini ispatlayınız.

$S_n = (n^3-n) / 3 = \mathrm{mod}((n^3-n),3) = 0$

1. n=1 için, $1^3 - 1=0$ (0/3 = 0 doğru)

1. n=2 için, (8-2)/3 = 6/3 = 2 (tam bölünüyor)

   n=k için, $(\boldsymbol{k}^3-k) / 3$ (tam olarak bölündüğü kabul edilir)

3. n=k+1 için,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^3-(k+1) &= (\boldsymbol{k}^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\
&= (\boldsymbol{k}^3 + 3k^2 + 3k - k + 1 - 1) \\
&= (\boldsymbol{k}^3 - k) + (3k^2 + 3k) = (\boldsymbol{k}^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\
&= (\boldsymbol{k}^3 - k) + 3(k^2 + k)
\end{aligned}
$$

Her ikisi de 3'e bölünebiliyorsa Doğrudur