VEKTÖR ALANLARI

D, n boyutlu uzayda bir bölge ve f, D üzerinde tanımlı reel değerli bir fonk. olsun. Bu takdirde f, D nin herbir $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasına bir $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reel sayısı karşılık getirir. D bölgesi ve onun herbir noktasındaki fonksiyon değerlerine birlikte bir skalar alan denir. Bu durumda f fonksiyonu D üzerinde bir skalar alan oluşturuyor denir.

$\vec{F}$ fonksiyonu D bölgesinin herbir noktasına bir vektör karşılık getiriyorsa, $\vec{F}$ fonksiyonu D bölgesi üzerinde bir vektör alanı oluşturuyor denir. D bölgesine ve onun herbir noktasına karşılık gelen vektörlerle birlikte vektör alanı denir.

Örneğin $\vec{F}$ vektör alanı, uzaydaki herbir (x,y,z) noktasına bir (u,v,w) vektörü karşılık getirir. Vektör alanları P, Q, R bileşen fonksiyonları cinsinden

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\cdot\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k}$$

biçiminde ifade edilebilir.

<u>Tanım</u> Türevlenebilen bir $f(x,y,z)$ fonksiyonu verildiğinde

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\vec{k}$$

ifadesine f fonksiyonunun <u>gradiyenti</u> denir.

<u>Tanım</u> $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ vektör alanı için $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ türevleri mevcut olsun.

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

ifadesine $\vec{F}$ vektör alanının <u>divergensi</u> denir. $\operatorname{div}\vec{F}$ ile gösterilir. Buna göre

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

olacaktır.

Tanım| Eğer bir vektör alanı, türevlenebilen bir fonksiyonun gradiyenti ise bu vektör alanına tutarlı (konservatif) vektör alanı denir. Fizikteki vektör alanlarının hemen hepsi tutarlı vektör alanlarıdır. Örneğin

$$F(x,y,z) = -GM \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$ yerçekimi alanı

$$f(x,y,z) = \frac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$ fonksiyonunun gradiyentidir.

ÖRNEK: $\vec{F}(x,y,z) = -GM \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ yerçekimi alanı

için $\operatorname{div} F = 0$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $P = -GM \cdot \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $Q = -GM \cdot \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $R = -GM \cdot \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -GM \cdot \frac{1 \cdot (x^2+y^2+z^2)^{3/2} - \frac{3}{2} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x \cdot x}{\left[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right]^2}$$

$$= -GM \cdot \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot \left[(x^2+y^2+z^2) - 3x^2\right]}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = +GM \cdot \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Benzer şekilde

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = GM \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = GM \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$ olacağından

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = GM \cdot \frac{2x^2-y^2-z^2+2y^2-x^2-z^2+2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

bulunur.

NOT! Eğer bir $\vec{F}$ vektör alanı için div $\vec{F} = 0$ ise $\vec{F}$ serbest diverjense sahiptir denir. Şu halde yerçekimi alanı serbest diverjense sahiptir.

Tanım! $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ vektör alanının P, Q, R bileşen fonksiyonları birinci mertebeden kısmi türevlere sahip olsun.

$$\nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z)\vec{i} + (P_z - R_x)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

vektör alanına $\vec{F}$ nin rotasyonu (veya curl'u) denir. rot $\vec{F}$ (veya curl $\vec{F}$) ile gösterilir. Hatırlaması kolay old. için rotasyon vektörü

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

biçiminde yazmak daha kullanışlıdır.

ÖRNEK $\vec{F}(x,y,z) = (y+z)x\vec{i} + (x+z)y\vec{j} + (x+y)z\vec{k}$

olduğuna göre rot $\vec{F}$ alanını bulunuz.

Çözüm:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y+z)x & (x+z)y & (x+y)z \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y+z)x & (x+z)y & (x+y)z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(x+y)z\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x}(x+z)y\cdot\vec{k} + \frac{\partial}{\partial z}(y+z)x\,\vec{j}\right] - \left[\frac{\partial}{\partial y}(y+z)x\,\vec{k} + \frac{\partial}{\partial z}(x+z)y\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x}(x+y)z\,\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow \text{rot}\,\vec{F} = z\vec{i} + y\vec{k} + x\vec{j} - x\vec{k} - y\vec{i} - z\vec{j}$$ bulunur.

$$\text{rot}\,\vec{F} = (z-y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y-x)\vec{k}$$