Optimizasyon Teknikleri

Ders Notu – 5

DOĞRUSAL (LINEER) OPTIMIZASYON

Prof. Dr. Bilal ALATAŞ

İÇERİK

- **LİNEER OPTİMİZASYON PROBLEMİ**
- **SIMPLEX METODU**

LINEER OPTIMIZASYON PROBLEMI

- Lineer optimizasyon problemleri, daha efektif bir çözüm için non lineer problemlerden farkli olarak asagidaki sekilde ifade edilir:

Minimize / Maximize

$$g_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$x_j \geq 0$$

LINEER OPTIMIZASYON PROBLEMI

Esitsizlik seklindeki kisitlar gevsek/yapay degiskenler (Slack variables) yardimiyla esitlik seklindeki kisitlara dönüstürülür:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

is converted to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+1} \geq 0$$

- Slack variables yaklasimi, optimizasyon probleminde degisken sayisinin artmasina neden olur. Bu da hesap maliyetinin artmasina neden olabilir.

- Lineer optimizasyon problemlerini çözmek için degisken sayisi esitlik seklindeki kisit sayisindan fazla olmalidir, aksi takdirde çözüm olmaz.

LINEER OPTIMIZASYON PROBLEMI

Lineer optimizasyon problemleri matris formunda:

$$\text{Minimize / Maximize} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Yukaridaki formülasyon Simplex metot için standarttir.

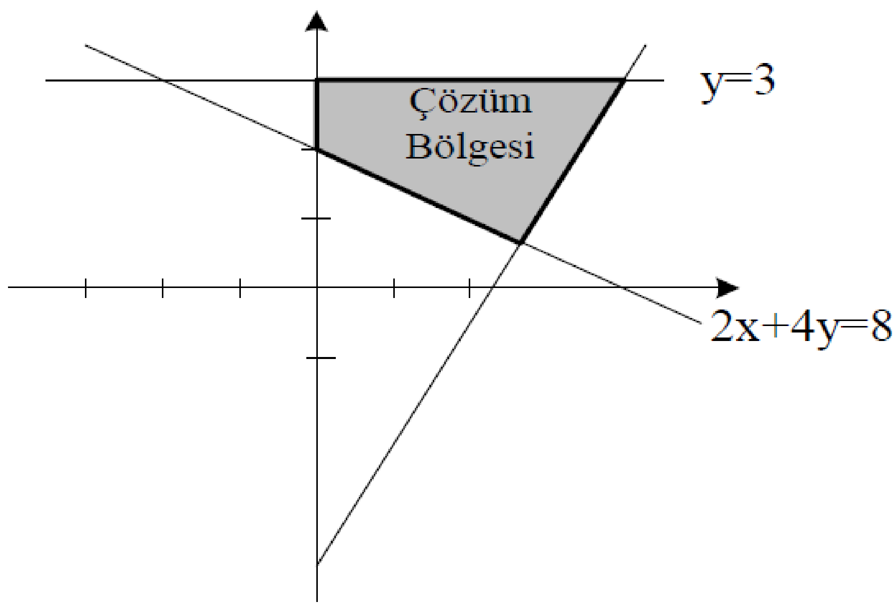
Lineer Programlama

- Eşitsizlik sistemleri

Örnek:

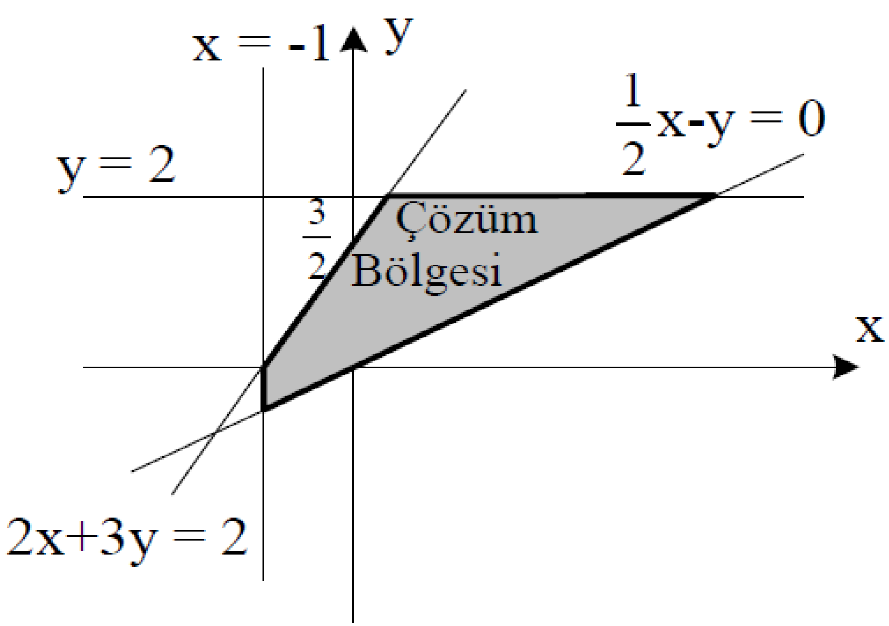
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y \geq 8 \\ 3x - 2y \leq 6 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$$ sistemini sağlayan çözüm bölgesini bulalım.

Çözüm:



Örnek : $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}x - y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 2 \\ y \geq 2 \\ x \geq -1\end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin grafik çözümünü bulunuz.

Çözüm:



Not: Her iki örnekte elde edilen çözüm bölgesini bulmak için öncelikle eşitsizlikler eşitlikler haline getirilerek her birinin grafiği çizilir. Daha sonra, eşitsizliğin durumuna göre bir test noktası yardımıyla doğrunun altı veya üstü çözüm bölgesi olarak alınır. Sonuç olarak, bütün eşitsizliklerin aynı anda sağlandığı bölge istenen çözüm bölgesi olarak alınır.

Lineer Programlama Grafik Çözümü

Lineer programlama lineer fonksiyonlardan oluşan problemleri çözmek için geliştirilmiş bir metottur. Bu metotla problemlerde istenilen amaca ulaşılmaya çalışılır. Bu amaç maksimum kar, minimum maliyet, maksimum ağırlık vb.gibi olabilir. Bunun anlamı şudur. **x,y** değişkenleri gerçek hayatta bir olayı temsil ettiklerinden hiçbir zaman negatif olmazlar. Bir lineer programlama problemi;

amaç $z=f(x_i)$

Kısıtlar;

$g_i(x) \leq (\geq) b_i$

$x_i \geq 0$ şeklinde tanımlanır. Burada,amaç maksimum ise $g_i(x) \leq b_i$,

amaç minimum ise $g_i(x) \geq b_i$

Lineer Programlama İşlem Basamakları

1)

i-) Bilinmeyenler belirlenir ve buna göre değişkenler tanımlanır.

ii-) Kısıtlar lineer eşitsizliklere çevrilir.

iii-) Amaç fonksiyonu oluşturulur.

2) Uygun bölgenin grafiği çizilir.

i-) Eşitsizlikler standart forma çevrilir.

ii-) Her bir eşitsizliğin grafiği çizilir.

iii-) Her eşitsizliğin aynı anda sağlandığı uygun bölge bulunur.

3) Uygun bölgenin köşe noktaları bulunur.

4) Bu köşe noktalarda amaç fonksiyonu belirtilir. En iyi amaca ulaşılan nokta Optimal Çözüm Noktasıdır.

Problem: Aşağıdaki tabloda pirinç ve soya fasulyesinde birim bardakta bulunan kalori, vitamin ve B_2 vitamin miktarları verilmiştir. Buna göre minimum maliyete sahip diyeti elde edebilmek için günde ne kadar pirinç ve soya fasulyesi (bardak cinsinden) üretilmelidir?

	Pirinç	Soya	Günlük Gereksinim
(gr) Protein	15	22.5	90
Kalori	810	270	1620
(mg) B_2 Vitamin	1/9	1/3	1
Maliyet	21	14	

Çözüm: x = günde üretilecek bardak cinsinden pirinç miktarı.

y = günde üretilecek bardak cinsinden soya miktarı.

Modeli kurarsak; Minz=21x+14y

Kısıtlar

x	0	6
y	4	0

$\leftarrow$ $15x + 22.5y \geq 90$

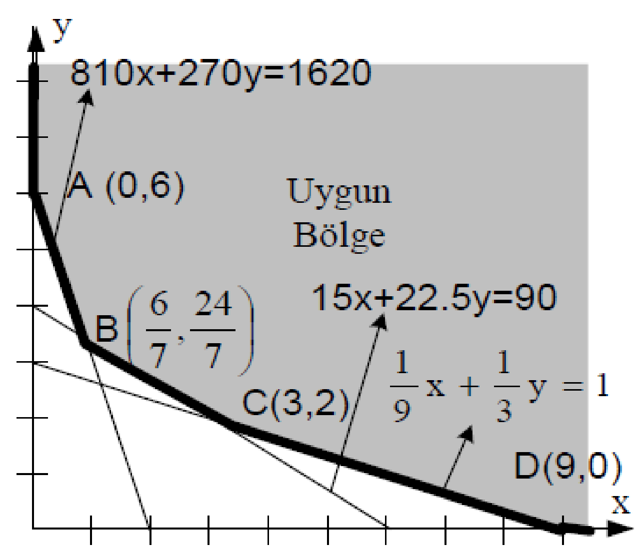
x	0	2
y	6	0

$\leftarrow$ $810x + 270y \geq 1620$

x	0	9
y	3	0

$\leftarrow$ $\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}y \geq 1$

$x \geq 0$; $y \geq 0$



B için ; 810 x + 270 y = 1620

15 x + 22.5 y = 90

$$x = \frac{6}{7} \quad ; \quad y = \frac{24}{7}$$

C için ; 15 x + 22.5 y = 90

$$\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}y = 1$$

x=3 ; y=2

Sonuçların değerlendirilmesi ;

A (0, 6) $\Rightarrow$ z = 21 . 0 + 14 . 6 = 84

$$B\left(\frac{6}{7}, \frac{24}{7}\right) \Rightarrow z = 21 \cdot \frac{6}{7} + 14 \cdot \frac{24}{7} = 66$$

C (3 , 2) $\Rightarrow$ z = 21 . 3 + 14 . 2 = 91

D (9, 0) $\Rightarrow$ z = 21 . 9 + 14 . 0 = 189

Yorum : Günde 6/7 bardak pirinç ve 24/7 bardak soya üretirsek 66 T.L.‘na malolur ve optimum çözümdür

Problem: Aşağıdaki tabloda verilenlere göre işletmenin maksimum karı elde edebilmesi için günde kaç tane hangi tip bıçak üretilmelidir.

	(A tipi bıçak) **x**	(B tipi bıçak) **y**	Mevcut Kapasiteler
İş gücü	2	6	90
Çelik	20	35	700
Odun	4	3	120
Kar	2	5	

Çözüm:

x = Günde üretilecek A tipi bıçak sayısı.

y = Günde üretilecek B tipi bıçak sayısı.

Model : Maksimum z= 2x + 5y

Kısıtlar :

x	0	45
y	15	0

$2x + 6y \leq 90$

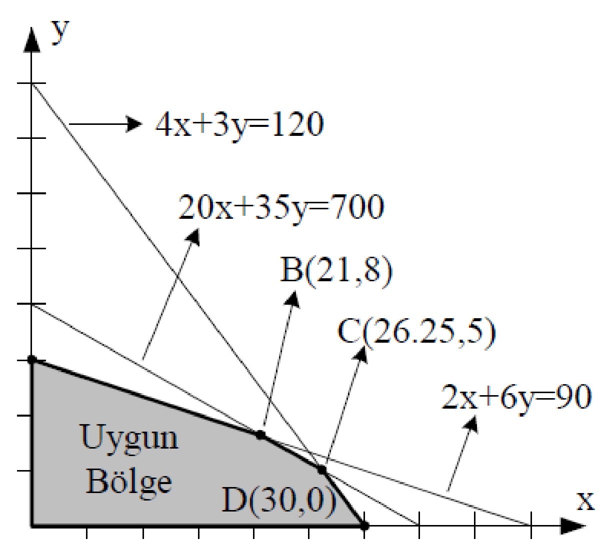
x	0	35
y	20	0

$20x + 35y \leq 700$

x	0	30
y	40	0

$4x + 3y \leq 120$

$x \geq 0 \; ; \; y \geq 0$



B noktası için ;

$$\begin{array}{rl} & 20x+35y=700 \\ -10/ & 2x+6y=90 \\ \hline \end{array}$$

x=21 ve y=8

C noktası için ;

$$\begin{array}{rl} & 20x+35y=700 \\ -5/ & 4x+3y=120 \\ \hline \end{array}$$

x=26.25 ve y=5

B (21, 8) noktası için ;

z = 2 . 21 + 5 . 8 = 82

C (26.25, 5) noktası için ;

z = 2 . (26.5) + 5 . 5 = 77.5

Optimum çözüm B (21, 8)'dir.

Problem: Aşağıdaki tabloya göre günde üretilecek pamuk ve floş ipliği miktarını bulunuz.

	(Pamuk) x	(Floş) y	Mevcut Kapasiteler
Hallaç	1	4	8
Cer-fitil	1	1	5
Taraklama	2	1	7
Maliyet	20	30	

Çözüm:

x= Günde üretilecek Pamuk İpliği miktarı.

y= Günde üretilecek Floş İpliği miktarı.

Model 1 .

Min z=20x+30y

Kısıtlar

x	0	8
y	2	0

$\Rightarrow x + 4y \geq 8$

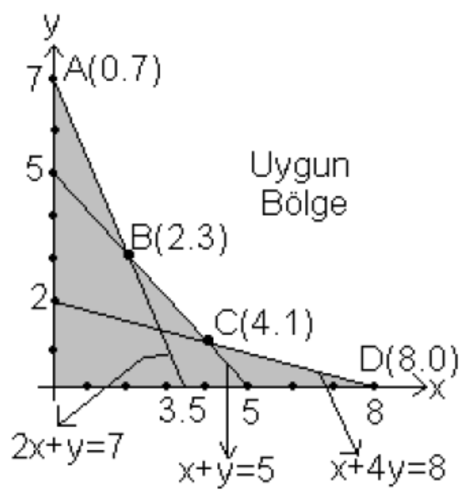
x	0	5
y	5	0

$\Rightarrow x + y \geq 5$

x	0	7
y	3.5	0

$\Rightarrow 2x + y \geq 7$

$x \geq 0 \ ; \ y \geq 0$



B Noktası

x+y =5

2x+y =7

x=2 , y=3

C Noktası

x+4y =8

x+y =5

x=4 , y=1

B için z=20.2+30.3=130 , C için z=20.4+30.1=110 Optimum çözüm.

Problem:

<table>
<tr><td rowspan="6">Yandaki tabloda verilenlere göre işletmenin maksimum karı elde edebilmesi için günde hangi tip malzemeden ne kadar üretmesi gerekir.</td><td></td><td>(A Tipi)
x</td><td>(B Tipi)
y</td><td>Mevcut
Kapasiteler</td></tr>
<tr><td>1.Atölye</td><td>1</td><td>4</td><td>340</td></tr>
<tr><td>2.Atölye</td><td>3</td><td>4</td><td>380</td></tr>
<tr><td>3.Atölye</td><td>5</td><td>2</td><td>330</td></tr>
<tr><td>Kar</td><td>80</td><td>120</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Çözüm:

x = A tipi malzemeden günde üretilecek miktar.

y = B tipi malzemeden günde üretilecek miktar.

Model :

Maksimum z = 80x + 120y

Kısıtlar

x	0	340
y	85	0

$\Rightarrow x + 4y \leq 340$

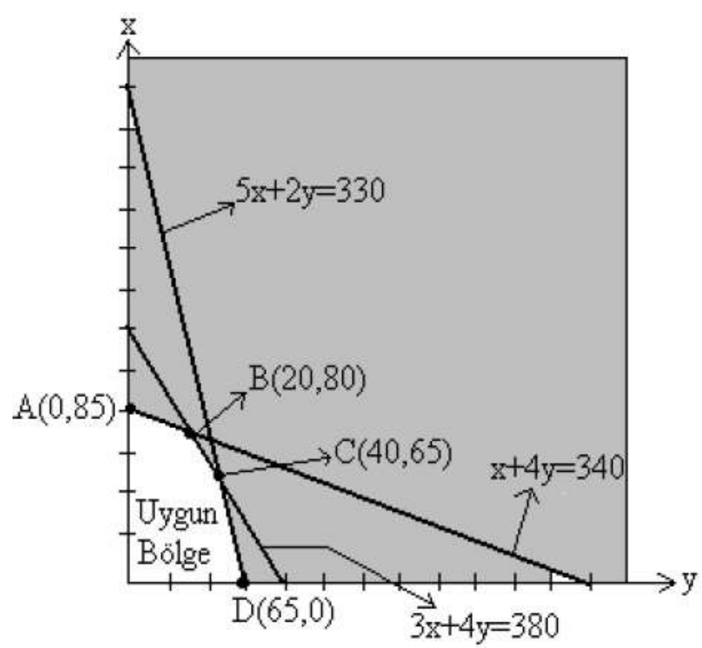
x	0	380/3
y	95	0

$\Rightarrow 3x + 4y \leq 380$

x	0	65
y	165	0

$\Rightarrow 5x + 2y \leq 330$

$x \geq 0$; $y \geq 0$



B için	C için	B(20,80) ➔ Z=80.20+120.80=11.200
3x+4y=380	5x+2y=380	C(40,65) ➔ Z=80.40+120.65=11.000
x+4y=340	x+4y=340	O halde B(20.80) noktası optimum çözüm noktasıdır.
x=20 , y=80	x=40 , y=65	

Problem: Bir işletmede radyo ve TV üretilmektedir .Bu üretim tasarım montaj ve test atölyelerinde gerçekleştirilmektedir. Birim radyo üretimi için bu atölyede sırasıyla 6saat,4saat,3saat iş gücü, gerekli iken birim TV üretimi için bu atölyede sırasıyla 3saat,4saat, ve saat iş gücü gerekmektedir .Atölyelerin günlük maksimum kullanım süreleri sırasıyla 90,72 ve 96 saattir.Birim karlar sırasıyla 10 ve 20 dolardır.Buna göre işletmenin maksimum karı elde edebilmesi için günde kaç tane radyo ve TV üretilmesi gerekir.

Çözüm: x: günde üretilecek radyo sayısı

y:günde üretilecek TV sayısı

	x	y	Mevcut kapasite
Tasarım	6	3	90
Montaj	4	4	72
Test	3	6	96
Kar	10	20	

Maksimum $z = 10x + 20y$

x	0	15
y	30	0

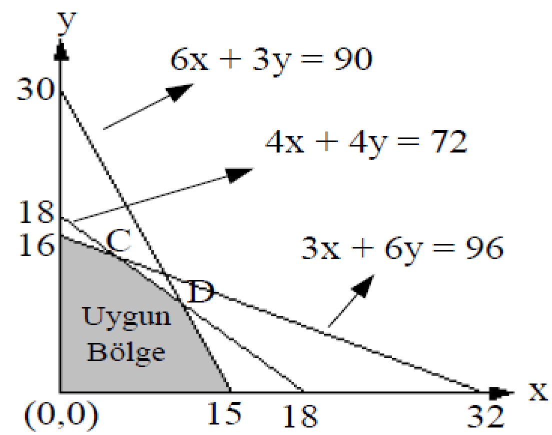
$\leftarrow$ $6x + 3y = 90$

x	0	18
y	18	0

$\leftarrow$ $4x + 4y = 72$

x	0	32
y	16	0

$\leftarrow$ $3x + 6y = 96$



$x \geq 0,\ y \geq 0$

$4x + 4y = 72$ ise $x = 4$ C (4,14) ise $z = 10.4 + 20.14 = 320$

$3x + 6y = 96$ $y = 14$

$4x + 4y = 72$ ise $x = 12$ D (12,6) ise $z = 10.12 + 20.6 = 240$

$6x + 3y = 90$ $y = 6$

İşletme günde 4 tane radyo , 14 tane TV üretmesi gerekir.

Problem:

Bir işletmede pamuk ve floş ipliği üretilmektedir. Bu üretim hallaç, cer-fitil ve taraklama dairesinde gerçekleşmektedir. Atölyelerin günlük kullanım süreleri mil olup 16,72,56 saattir. Birim pamuk üretimi için bu atölyede sırasıyla 2,12,4 saat iş gücü gerekirken birim floş üretimi için 2,6,14 saat iş gücü gereklidir.Birim maliyetler sırasıyla 5 ve 6 dolardır. Buna göre, işletmenin minimum maliyeti elde edebilmesi için günlük ne kadar pamuk ve floş ipliği
üretmesi gerekir.

Çözüm:

u : günde üretilecek pamuk ipliği miktarı

v: günde üretilecek floş ipliği miktarı

	u	v	mevcut kapasite
Hallaç	2	2	16
Cer-fitil	12	6	72
Taraklama	4	14	56
Maliyet	5	6	

Min z = 5u + 6v

Kısıtlar

u	0	8
v	8	0

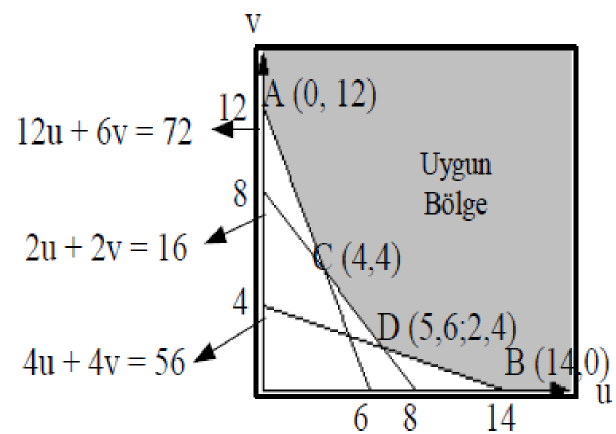
$\leftarrow$ 2u + 2v = 16

u	0	6
v	12	0

$\leftarrow$ 12u + 16v = 72

u	0	14
v	4	0

$\leftarrow$ 4u + 4v = 56



$u \geq 0, v \geq 0$

4u + 14v = 56	ise	u = 5,6	D (5.6,2.4)	ise	z = 5.5,6 + 6.2,4 = 42,4
2u + 2v = 16		v = 2,4			
12u + 6v = 72	ise	u = 4	C (4,4)	ise	z = 5.4 + 6.4 = 44
2u + 2v = 16		v = 4			

günde 5,6 birim pamuk 2,4 birim floş ipliği üretilmesi gerekir.

SIMPLEX METODU

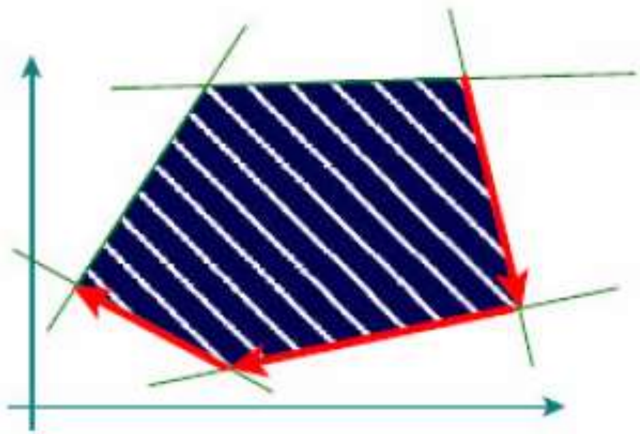
Grafikle çözümün uygulanamadığı çok değişkenli doğrusal programlama problemlerinin çözümünde yaygın biçimde kullanılan metot *simpleks metodudur*.

George B. Dantzig tarafından geliştirilen bu yöntem tekrarlı bir yöntem olduğundan *simpleks algoritma* olarak da adlandırılmaktadır.

SIMPLEX METODU

Uç nokta (veya Simplex) teoremi:

Konveks bir bölgede lineer optimizasyon problemlerinin çözümü, konveks bölgenin köselerinden (*simplex* 'lerden) birisidir.



Konveks bölge:

Bir bölge içinde seçilen iki nokta arasinda *(örnegin, x1 ve x2)* bir dogru çizildiginde, bu dogru bölgenin disina çikmiyorsa bölge konvekstir.

SIMPLEX METODU

<u>Uç nokta (Simplex) teoreminin sonuçlari:</u>

- Sonlu sayida uç noktanin olmasi, çözüm için sonlu sayida deneme demektir.

- Sonlu sayida uç nokta bazi problemler için hala büyük sayi olabilir.

- Simplex metodu, en uygun uç noktanin bulunmasinda etkili ve yakinsamayi garanti eden (bir çözüm varsa) bir yöntem sunar.

SIMPLEX METODU

<u>Simplex metodunda çözüm adimlari</u>:

1. Çözüme uygun bir uç noktadan (a basic feasible solution) baslanir.

2. Bu uç noktaya bitisik, baska bir uç nokta bulunur. Yeni uç noktada amaç fonksiyonu degeri daha iyi ise bir sonraki adima geçilir, degilse bir önceki uç nokta optimum çözümdür.

3. Bitisik uç noktalar arasindan, amaç fonksiyonu degerini en fazla iyilestiren uç nokta seçilir.

4. 2 ve 3. adimlara optimum çözüm bulunana kadar (veya problemde feasible bir çözümün olmadigi veya çözümün sonsuz bir deger oldugu gösterilene kadar) devam edilir.

SIMPLEX METODU

<u>Bitisik uç nokta arastirmasi:</u>

- Uç nokta arastirmasinda degiskenler temel (*basic*) ve diger degiskenler (*non-basic*) olmak üzere iki kisma ayrilir.
- Çözüm adimlarinda *basic* ve *non-basic* degiskenler yer degistirilerek, bitisik uç noktalardan hangisinin amaç fonksiyonunu daha çok iyilestirdigi arastirilir.

Basic ve *non-basic* degiskenler seçiminde önemli sorular:

1) Hangi *non-basic* degisken *basic* yapilmali ki yeni bitisik uç nokta çözümü daha da iyilestirsin?
2) Hangi *basic* degisken *non-basic* yapilsin ki yeni bitisik uç nokta hala *feasible* olmaya devam etsin?

SIMPLEX METODU

<u>Basic Non-basic degisken degisimleri</u>:

Genel kural:

Amaç fonksiyonu degerini en çok iyilestirecek *non-basic* degisken *basic* yapilir.

- Infeasibiliteye ilk sebep olacak *basic* degisken *non-basic* yapilir.

NOT: Bunlar sezgisel (heuristic) kurallardir !!

Bu kurallarin biraz daha farkli versiyonlari da vardir

Kanonik Ve Standart Biçimler

1. Kanonik Biçim

$Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \quad . \qquad . \qquad ... \qquad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0 \end{array}$$

olarak formüle edilen doğrusal programlama aşağıdaki özelliklere sahipse, *kanonik* biçimde olduğu söylenir.

1. Tüm karar değişkenleri negatif değildir.
2. Amaç fonksiyonu en büyükleme tipindedir.
3. Tüm kısıtlayıcı fonksiyonlar (≤) işaretlidir.

2. Standart Biçim

$Z_{enk/enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \qquad . \qquad ... \qquad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0 \end{array}$$

olarak formüle edilen doğrusal programlama modeli aşağıdaki özelliklere sahipse, *standart* biçimde olduğu söylenir.

1. Tüm karar değişkenleri negatif değildir.
2. Amaç fonksiyonu en büyükleme veya en küçükleme tipindedir.
3. Tüm kısıtlayıcı fonksiyonlar (negatif olmama koşulu dışında) = işaretlidir.
4. Kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitleri negatif değildir.

Standart ve Kanonik Biçim Dönüştürme İşlemleri

1.En iyilemenin anlamını değiştirme

$Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$ olarak tanımlanmışken,

$= (-Z_{enb}) = -C_1x_1 - C_2x_2 - ... - C_nx_n$

veya

$Z_{enk} = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$ olarak verilmişken,

$= (-Z_{enk}) = -C_1x_1 - C_2x_2 - ... - C_nx_n$

yazılabilir.

Örnek olması bakımından amaç fonksiyonunun aşağıdaki gibi formüle edildiğini düşünelim.

$Z_{enk} = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4$

Amaç fonksiyonundaki tüm terimlerin işaretlerinin değiştirilmesiyle amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$= (-Z_{enk}) = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$

Dönüştürme işlemi, karar değişkenlerinin en iyi değerlerini değiştirmez. Problemi çözdükten sonra amaç fonksiyonunun en iyi değeri (-1) ile çarpılırsa orijinal problemin Zenk (Zenb) değeri bulunur.

Dönüştürme İşlemleri-devam

2.Eşitsizliklerin yönünü değiştirme: Herhangi bir eşitsizliğin her iki tarafı (-1) ile çarpıldığında eşitsizlik yön değiştirir. Sözgelimi, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ ile her iki tarafının (-1) ile çarpılmasıyla elde edilen $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$ birbirlerine eşittir. Benzer biçimde, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ yerine $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \geq -b_1$ yazılabilir.

3.Eşitliği eşitsizliğe dönüştürme: Eşitlik biçimindeki bir kısıtlayıcı fonksiyon iki eşitsizlikle açıklanabilir. Örneğin, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ biçimindeki bir fonksiyon yerine, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ ve $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ veya $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b$ ve $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$ yazılabilir.

4.İşareti sınırlandırılmamış değişkenler: İşareti sınırlandırılmamış bir değişken (pozitif, negatif veya sıfır) negatif olmayan iki değişken arasındaki fark olarak açıklanabilir. Sözgelimi, x işareti sınırlandırılmamış bir değişken ise, x yerine $(x^+ - x^-)$ kullanılabilir. Burada, $x^+ \geq 0$ ve $x^- \geq 0$'dır. Negatif olmayan x^+ ve x^- değişkenlerinden en fazla biri en iyi çözümde pozitif değerli olur.

Dönüştürme İşlemleri-devam

5.Eşitsizlik biçimindeki kısıtlayıcı fonksiyonların eşitlik biçimine dönüştürülmesi: Simpleks yöntem bir eşitlikler sistemine, standart işlemlerin tekrar tekrar uygulanmasıyla çözüm arayan bir süreçtir. Bu nedenle yöntemin en önemli adımı kısıtlayıcı fonksiyonların eşitlik biçiminde yazılmasıdır. Eşitsizlik biçimindeki bir kısıtlayıcının eşitsizliğin yönü bakımından iki türlü olduğu bilinmektedir. Eşitsizlikler $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i$ veya $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \geq b_i$ biçimindedir.

($\leq$) işaretli eşitsizlikleri eşitlik biçimine dönüştürmek için bunların sol taraflarına negatif olmayan birer değişken eklenir. *Aylak değişken* adı verilen bu değişkenler x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} ile gösterilir. ($\geq$) işaretli eşitsizlikler ise, sol taraflarından negatif olmayan birer değişken çıkartılmasıyla eşitlik biçimine dönüştürülür. Eşitsizliğin iki tarafı arasındaki farkı gösteren bu değişkene *artık değişken* denir. Bu değişkenler de aylak değişkenler gibi x_{n+1}, x_{n+2} , ..., $x_{n+m,}$ sembolleriyle gösterilirler. Yukarıda açıklandığı gibi, negatif olmama koşulu karar değişkenlerinin yanı sıra aylak ve artık değişkenlere de uygulanmaktadır. Bunun nedeni, kısıtlayıcı fonksiyonlardaki ($\geq$) ve ($\leq$) şartlarının gerçekleşmesini sağlamaktır.

Dönüştürme İşlemleri-devam

6. Mutlak değerli kısıtlayıcı fonksiyonların eşitsizlik biçiminde yazılması: Çok sık olmasa da mutlak değer içeren kısıtlayıcı fonksiyonlara rastlanabilir. Hangi yöntem uygulanırsa uygulansın bu tür kısıtlayıcılarla çözüme ulaşılamaz. Bu yüzden mutlak değerden kurtulmak gerekir. Örnek olması bakımından, kısıtlayıcı fonksiyonun $|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b$ şeklinde formüllendiğini düşünelim. Bu durumda yapılması gereken $|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b$ yerine $a_1x_1 + a_2x_2 \geq -b$ ve $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ ikilisini yerleştirmektir. Kısıtlayıcı $|a_1x_1 + a_2x_2| \geq b$ ise $|a_1x_1 + a_2x_2| \geq b$ yerine geçecek eşitsizlikler $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$ ve $a_1x_1 + a_2x_2 \leq -b$ biçimindedir.

Herhangi bir doğrusal programlama modelinin standart veya kanonik biçimde yazılmasını bir örnek üzerinde açıklayalım.

Simpleks Yönteminde, problemin çözümünde izlenecek yol;

Problemin modeli (Standart Model) kurulduktan sonra:

- Modeldeki tüm kısıtlayıcılar (eşitsizlik veya eşitlikler) yeni değişkenler ilavesiyle eşitlik haline dönüştürülür, yeni model yazılır("**Kanonik Model**")
- Başlangıç simpleks tablosu kurulur ve
- Aşamalar halinde optimum çözüme ulaşılır.

Simpleks Yönteminde Kullanılan İlave Değişkenler (Eşitliğin yönüne göre):

Kısıtın eşitsizlik yönü	Değişken	a katsayısı	c katsayısı
≤	*Aylak (Gevşek)*	+1	0
≥	*Artık (Boş)*	-1	0
	Yapay (Suni)	+1	Max : - m Min : + m
=	*Yapay (Suni)*	+1	Max : - m Min : + m

- **Aylak** değişkenler diğer değişkenler gibi çözüme girer, fakat bunların değerleri, kullanılmayan kapasiteleri ve hammaddelerin miktarlarını gösterirler.

(1)

Eğer

$$a.x \le b$$

İse eşitlik haline dönüştürmek için:

- eşitsizliğe +x (***aylak)*** değişkeni eklenir.
- c katsayısı sıfırdır.

aylak değişken
a : +1
c : 0

$$a.x + x = b$$

****Bu ilaveler yapılırken birim matris oluşmasına dikkat edilmelidir.*

(2)

Eğer

$$a.x \geq b$$

ise eşitlik haline dönüştürmek için:

- eşitsizlikten -x (***artık***) değişkeni çıkartılır.
- c katsayısı sıfırdır.
- ikinci olarak +x (***suni***) değişkeni eklenir.
- Zmax'da c katsayısı –m (*m : en büyük sayı*)
- Zmin'de c katsayısı +m

artık değişken
a: -1
c: 0

suni değişken
a: +1
c: m

$$a.x - x + x = b$$

*******Bu ilaveler yapılırken birim matris oluşmasına dikkat edilmelidir.*

(3)

Eğer

$$a.x = b$$

ise

- Sadece +x (***suni***) değişkeni eklenir
- Zmax'da c katsayısı –m (*m : en büyük sayı*)
- Zmin'de c katsayısı +m

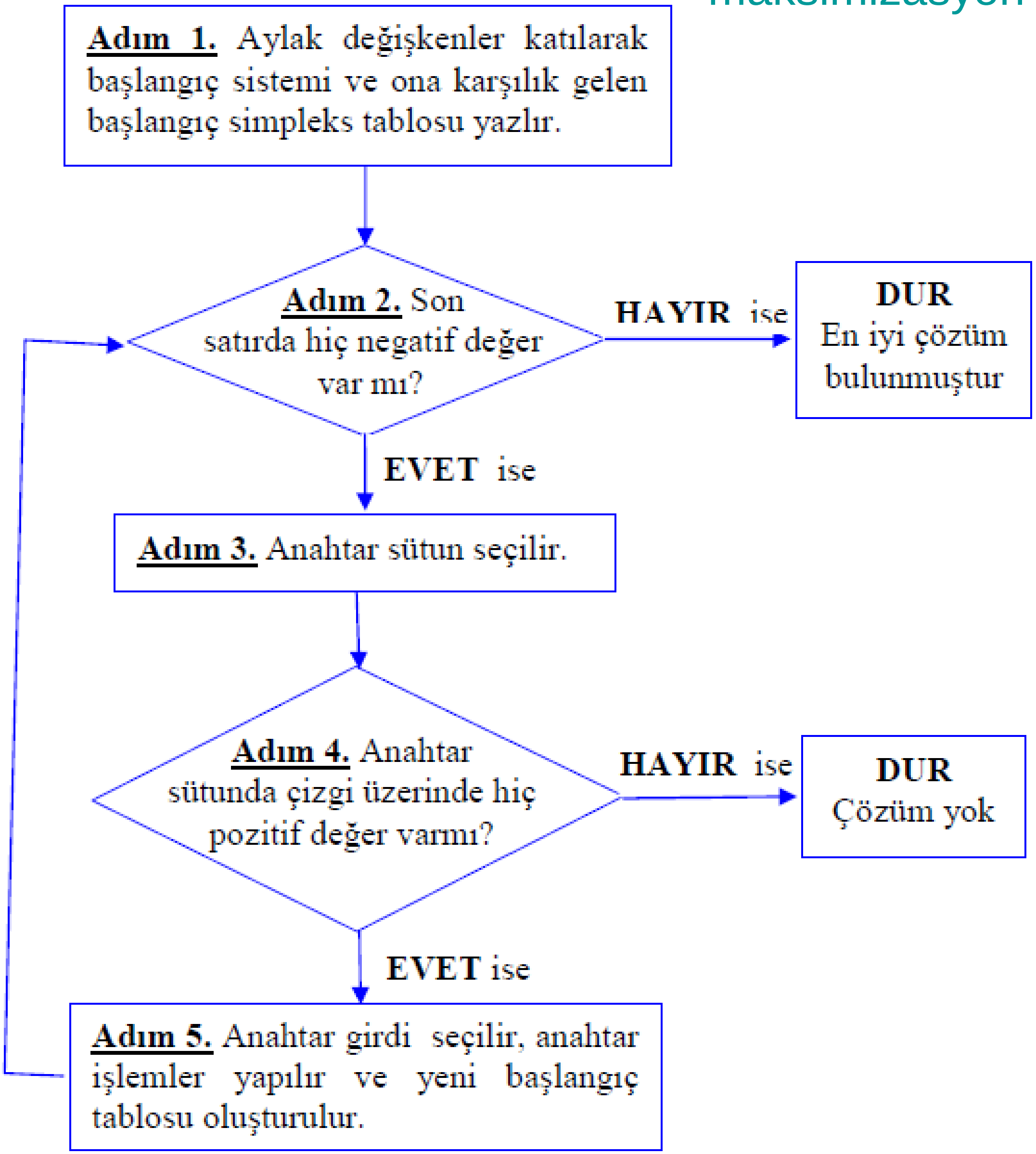
$$a.x + x = b$$

suni değişken
a : +1
c : m

****Bu ilaveler yapılırken birim matris oluşmasına dikkat edilmelidir.*

Simpleks Yöntemi Akış Şeması

standart bicimde her ≤ kısıtlamalı maksimizasyon problemi için geçerlidir.



Simpleks Çözüm Yönteminin Açıklanması

Aşağıdaki gibi bir modelin olduğunu varsayalım.

$$Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\quad . \qquad\quad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
\qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0
\end{array}$$

Simpleks Çözüm Yönteminin Açıklanması-devam

Simpleks yöntemin ilk adımı tüm eşitsizliklerin (negatif olmama koşulu hariç) eşitlik biçimine dönüştürülmesidir. Daha önce açıklandığı gibi (≤) işaretli bir eşitsizliği eşitliğe dönüştürmek için eşitsizliğin sol tarafına negatif olmayan bir aylak değişken eklenir. Her bir eşitsizlik için bir aylak değişken kullanılmasıyla yukarıdaki kısıtlayıcı fonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_2$$
$$. \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots \quad . \quad .$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 1x_{n+m} = b_m$$

Aylak değişkenlerin eklendikleri kısıtlayıcı fonksiyonlardaki katsayılarının +1, diğerlerinde sıfıra eşit olduğu görülebilir.

Karar değişkenleri ile aylak değişkenler negatif olmadığından, standart biçimin negatif olmama koşulu aşağıdaki gibi olur.

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \geq 0$$

Aylak değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları, bir başka deyişle bu değişkenlerin amaç fonksiyonuna birim katkıları (birim kârları) sıfırdır

Bu durumda amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m}$$

Standart Biçimin Matris Gösterimi

Standart biçimdeki doğrusal programlama modelinin kısıtlayıcı fonksiyonları matrislerle şöyle gösterilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{12} & . & . & . & a_{mn} & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ . \\ . \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Başlangıç Çözüm Tablosu

Standart biçimin oluşturulmasından sonra en iyi çözümün araştırılması işlemine geçilebilir. Simpleks yöntemin ardışık tekrarları *başlangıç çözüm tablosu* adı verilen bir tablonun düzenlenmesinden sonra başlar. Başlangıç çözüm tablosu, aşağıdaki tablo esasına göre düzenlenir.

Tablo 1

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

	2	3				4				5
1	TDV	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	ÇV
	0 x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
	0 x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
	.	.	.	…	.	.	.	…	.	.
	.	.	.	…	.	.	.	…	.	.
	0 x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}.	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m
6	Z_j	0	0	…		0	0	…	0	0
7	Z_j - C_j	-C_1	-C_2	…	-C_n	0	0	…	0	-

Tablo 1 kapsamındaki bölümler aşağıda açıklanmıştır.

1. ***Değişkenler satırı:*** Tablonun ilk satırıdır. Standart biçimin tüm değişkenleri önce karar değişkenleri, sonra diğer değişkenler olmak üzere bu satırda gösterilir.

2. ***Temel değişkenler sütunu***: Tablonun ilk sütunudur. Tablodaki çözüme karşılık gelen temel çözümün değişkenleri ile bu değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayılarını gösterir.

3. ***Gövde***: Problemin orijinal karar değişkenlerinin kısıtlayıcı fonksiyonlardaki katsa- yılarından (a_{ij}, i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) oluşan m x n matristir.

4. ***Birim matris***: Aylak değişkenlerin kısıtlayıcı fonksiyon katsayılarının oluşturduğu m x m birim matristir.

5. ***Çözüm vektörü***: Temeldeki değişkenlerin çözüm değerlerini gösteren m x 1 sütun vektördür. Başlangıçta, kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitlerinden oluşur.

6. ***Z_j satırı***: Yürülükteki temelde bulunan değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları ile x_j sütunundaki katsayıların karşılıklı çar- pımlarının toplamından oluşur. Buna göre örneğin, $Z_1 = 0(a_{11}) + 0(a_{21}) + ... + 0(a_{m1}) = 0$ olur.

7. ***Z_j - C_j satırı***: Tablonun son satırıdır. Elemanları, Z_j ile o sütunla ilgili değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı arasındaki farka eşittir. $Z_j - C_j$ farkları x_j değişkeninin temele alınmasının amaç fonksiyonunda yol açacağı değişikliği ters işaretle gösterir.

Anahtar Sütun: Simpleks yönteminde, temeli terkeden değişkenin bulunduğu sütuna *anahtar sütun* denir.

Anahtar satır: Simpleks yönteminde, temeli terkeden değişkenin bulunduğu satıra *anahtar satır* denir.

Anahtar Sayı: Anahtar sütun ile anahtar satırın kesiştiği gözedeki değere *anahtar sayı* denir.

Temele girecek değişkenin yeni değerlerinin hesaplanması:

(Anahtar Satır Değerleri/Anahtar Sayı)

Diğer Satır Değerlerinin Değerleri:

$$\begin{bmatrix}\text{Eski}\\ \text{Satır}\\ \text{Elemanları}\end{bmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Eski Satırla}\\ \text{Anahtar Sütunun}\\ \text{Kesiştiği Gözedeki Sayı}\end{pmatrix} \text{ x } \begin{matrix}\text{Anahtar}\\ \text{Satırın Yeni}\\ \text{Elemanları}\end{matrix}$$

Simpleks Yöntemi İle Doğrusal Modellerin Çözümü

Bir marangoz işletmesinde masa ve sandalye üretilmektedir. Bir masa yapımı için 30 metre tahta ve 5 saat işgücüne ihtiyaç vardır. Bir sandalye yapımı için de 20 metre tahta ve 10 saat işgücü kullanılmaktadır. Bir masanın satışından 6 TL, bir sandalyenin satışından 8 TL kâr elde edilmektedir.

Maksimum $Z = 6x1 + 8x2$

Kısıtlar : $30x1 + 20x2 \leq 300$ **(tahta kısıtı)**

$5x1 + 10x2 \leq 110$ **(işgücü kısıtı)**

$x1, x2 \geq 0$

$x1$ **: Masa miktarı**

$x2$ **: Sandalye miktarı**

Simpleks Yöntemi İle Doğrusal Modellerin Çözümü

Öncelikle eşitsizlikler select ve artifical değişkenler eklenerek standart forma getirilir.

Kısıtlar : $30x_1 + 20x_2 + 0s_1 = 300$

$5x_1 + 10x_2 + 0s_2 = 110$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Amaç Fonk.:

Maksimum $Z = 6x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2$

Simpleks Yöntemi İle Doğ

30 x1+20 x2+1.s1+0.s2=300 (s=select)
5 x1+10 x2+0.s1+1.s2=110
(s1=kullanılmayan tahta,s2=kullanılmayan işgücü)

zmax =6 x1+8 x2+0.s1+0.s2 olur.

- Başlangıç tablosunun oluşturulması

Amaç Katsayıları	Cj Değişkenler	6 X1	8 X2	0 S1	0 S2	Miktar ve Çözüm
0	S1	30	20	1	0	300
0	S2	5	10	0	1	110
	zj	0	0	0	0	0
	Cj-zj	6	8	0	0	

zj gözden çıkarma satırıdır.
Z1 masa için gözden çıkarma satırıdır.
toplam(amaç katsayı sütunu *değ. Sutunu)
0x30+0.5=0=z1
cj-zj→birim kar (maliyet)-birim gözden çıkarma

Simpleks Yöntemi İle Doğrusal Modellerin Çözümü

- **Karı en fazla arttırarak ya da maliyeti en fazla azaltacak değişkenin işleme girmesi yani anahtar sutunun bulunması(seçilmesi)**

  Bunun için cj-zj satırına bakılır. Maksimizasyon amaçlarında en yüksek pozitif değerli eleman, minimizasyon amaçlarında negatif değer içinde mutlak değerce en yüksek olan seçilir. Seçilen değerlerin bulunduğu sütun **anahtar sütun** olur. Burada anahtar sütun x2 sütunudur.

Amaç Katsayıları	Cj Değişkenler	6 X1	8 X2	0 S1	0 S2	Miktar ve Çözüm
0	S1	30	20	1	0	300
0	S2	5	10	0	1	110
	zj	0	0	0	0	0
	Cj-zj	6	8	0	0	

Simpleks Yöntemi İle Doğrusal Modellerin Çözümü

- **Anahtar sıranın ya da işlemden çıkacak değişkenin belirlenmesi**

  Anahtar sütundaki birim bi'lerin aij'ye bölünmesi sonunda en düşük değeri veren satır seçilir.

	x2	bi	
S1	20	300	300/20=15
S2	10	110	110/10=11

Buna göre küçük olan s2 satırı (11) işlemden çıkacaktır. Yani anahtar satır S2 dir. Anahtar satır ve anahtar sütunun kesişime anahtar sayı adı verilir.

Amaç Katsayıları	Cj Değişkenler	6 X1	8 X2	0 S1	0 S2	Miktar ve Çözüm
0	S1	30	20	1	0	300
0	S2	5	10	0	1	110
	zj	0	0	0	0	0
	Cj-zj	6	8	0	0	

Simpleks Yöntemi İle Doğrusal Modellerin Çözümü

- Yeni sıraların hesaplanışı

Anahtar satırın yeni değerleri tüm anaht r
sayıya bölünmesi ile bulunur.
S2 yerine X2 gelir; yeni sıra değerleri s

5/10,10/10,0/10,1/10,110/10 olarak hesa

Anahtar sütünla, yeni değerleri hesaplanan satırın kesişim hücresindeki değer

s1→ 30 20 1 0
Yeni sıra elemanı=Eski sıra elemanı-(temelsayı x temelsıraelemanı)

x1→30-0.5 x 20=20
x2→20-1.20=0
S1→1- 0 x 20=1
S2→0- 0.1 x 20=-2
B1→300- 11 x 20=80

Hesaplanacak satır hücresi ile aynı sütunu paylaşan Anahtar satır hücresinin hesaplanmış yeni değeri

Simpleks Yöntemi İle Doğrusal Modellerin Çözümü

- **Başlangıç Simpleks Tablosu**

Amaç Katsayıları	Cj Değişkenler	6 X1	8 X2	0 S1	0 S2	Miktar ve Çözüm
0	S1	30	20	1	0	300
0	S2	5	10	0	1	110
	zj	0	0	0	0	0
	Cj-zj	6	8	0	0	

Simpleks Yöntemi İle Doğrusal Modellerin Çözümü

- **Birinci Simpleks Tablosu**

Amaç Katsayıları	Cj Değişkenler	6 X1	8 X2	0 S1	0 S2	Miktar ve Çözüm
0	S1	20	0	1	-2	80
8	x2	5/10	10/10	0/10	1/10	110/10
	zj	4	8	0	8/10	88
	Cj-zj	2	0	0	-8/10	

Zj satırının hesaplanması:

Z1→0x20+8x0.5=4

Z2→0x0+8x1=8

Z3→0x1+8x0=0

Z4→0x2+8x0.1=0.8

Çözüm sütununda zj=0.80+8.11=88

Simpleks Yöntemi İle Doğrusal Modellerin Çözümü

- Optimal çözüm olup olmadığına bakalım. Max göre cj-zj≤0, min cj-zj≥0 olmalıdır. Problemimiz maximizasyon olduğundan x1=2 değeri optimizasyonu bozuyor. 2. simplex tablosu oluşturulacaktır.

11:0.5=22;80:20=4 küçük→s1 işlemden çıkacaktır.

Amaç Katsayıları	Cj Değişkenler	6 X1	8 X2	0 S1	0 S2	Miktar ve Çözüm
0	S1	20	0	1	-2	80
8	x2	5/10	10/10	0/10	1/10	110/10
	zj	4	8	0	8/10	88
	Cj-zj	2	0	0	-8/10	

Simpleks Yöntemi İle Doğrusal Modellerin Çözümü

- **2.Simpleks Tablosu**

Amaç Katsayıları	Cj Değişkenler	6 X1	8 X2	0 S1	0 S2	Miktar ve Çözüm
6	X1	1	0	1/20	-2/20	4
8	x2	0	1	-1/40	3/20	9
	zj	6	8	1/10	3/5	96
	Cj-zj	0	0	-1/10	-3/5	

x1=4 x2=9 z=96 TL.dir.
30.4+20.9=300 Tüm tahta miktarı kullanılmış.
5.4+10.9=110 Tüm işgücü kullanılmış.

Yorum : Marangoz x1= 4 birim masa ve x2= 9 birim sandalye üretirse maksimum kârı Zmax = 96 TL olacaktır

Örnek

Bir motosiklet şirketi piyasaya gençlerin yaz aylarında tatilde binebilmesi için küçük boyda ve değişik tipte bisiklet ile motosiklet imal etmeyi planlamaktadır. Şirket bu iki imalatını iki ayrı işlemin yapıldığı I ve II nolu atölyelerinde gerçekleştirmektedir.

Yönetici ne kadar bisiklet ve motosiklet imal etsin ki, kar en büyük (maksimum) olsun?

Simpleks Yöntemi

Sistematik Özet

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Atölyeler</td><td colspan="2">Mallar</td><td rowspan="3">Kapasite (saat) (b)</td></tr>
<tr><td>Bisiklet</td><td>Motosiklet</td></tr>
<tr><td colspan="2">İşlem zamanı (saat/ad.)(a)</td></tr>
<tr><td colspan="2">I</td><td>6</td><td>4</td><td>120</td></tr>
<tr><td colspan="2">II</td><td>3</td><td>10</td><td>180</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kar (TL/ad.)</td><td>45</td><td>55</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Karar Değ. (c)</td><td>Simge</td><td>X_1</td><td>X_2</td><td></td></tr>
<tr><td>Birim</td><td>adet</td><td>adet</td><td></td></tr>
<tr><td>Tür</td><td>Tam sayı</td><td>Tam sayı</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Ek Bilgi</td><td colspan="3">Üretim periyodu belirtilmemiş</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problem Türü</td><td colspan="3">Tam Sayılı Doğrusal Programlama</td></tr>
</table>

Simpleks Yöntemi

Model : Doğrusal Programlama Modeli (Standart Model)

Amaç Fonksiyonu

$$Z_{max} = 45x_1 + 55x_2$$

Kısıtlar

$$6x_1 + 4x_2 \leq 120$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 180$$

Pozitiflik Koşulu

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Simpleks Yöntemi

Problemde, kısıtlayıcıları eşitlik haline dönüştürmek için aylak değişken kullanılacaktır.

Eşitsizliğin işareti $\leq$ olduğundan aylak değişkenler eşitsizliğin sol tarafına eklenir.

Kanonik Model

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 + \mathbf{(0x_4)} = 120$$

$$3x_1 + 10x_2 + \mathbf{(0x_3)} + x_4 = 180$$

Birim Matris

$$Z_{max} = 45x_1 + 55x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

c katsayısı

Başlangıç Simpleks Tablo

Kar Katsayısı (c)	**c**	45	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$		
0	$\mathbf{X_3}$	6	4			120	
0	$\mathbf{X_4}$	3	10			180	
z							
c - z							

Simpleks Yöntemi

Başlangıç Simpleks Tablo

Kar Katsayısı (c)	**c**	45	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$		
0	$\mathbf{X_3}$	6	4	1	0	120	
0	$\mathbf{X_4}$	3	10	0	1	180	
z							
c - z							

Birim Matris oluşturulur

Simpleks Yöntemi

Başlangıç Simpleks Tablo

Kar Katsayısı (c)	c	45	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	X_1	X_2	X_3	X_4		
0	X_3	6	4	1	0	120	
0	X_4	3	10	0	1	180	
z		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
c - z							

0 x 6 = 0
0 x 3 = 0
Toplamı= 0

Simpleks Yöntemi

Başlangıç Simpleks Tablo

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$		
0	$\mathbf{X_3}$	6	4	1	0	120	
0	$\mathbf{X_4}$	3	10	0	1	180	
z		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
c - z		**45**	55	0	0		

45 - 0 = 45

Simpleks Yöntemi

Başlangıç Simpleks Tablo (1. İterasyon)

Anahtar Sütun

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$		
0	$\mathbf{X_3}$	6	4	1	0	120	
0	$\mathbf{X_4}$	3	10	0	1	180	
z		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
c - z		45	**55**	0	0		

Maksimizasyon probleminde Anahtar Sütun seçiminde c-z satırındaki pozitif en büyük sayı seçilir (55)

Simpleks Yöntemi

Başlangıç Simpleks Tablo
(1. İterasyon)

Kar Katsayısı (c)	c	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$		
0	$\mathbf{X_3}$	6	**4**	1	0	**120**	**30**
0	$\mathbf{X_4}$	3	**10**	0	1	**180**	**18**
z		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
c - z		45	**55**	0	0		

120 / 4 = 30

180 / 10 = 18

Simpleks Yöntemi

Başlangıç Simpleks Tablo
(1. İterasyon)

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	X_1	X_2	X_3	X_4		
0	X_3	6	**4**	1	0	**120**	**30**
0	X_4	3	**10**	0	1	**180**	**18**
z		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
c - z		45	**55**	0	0		

Maksimizasyon probleminde Anahtar Satır seçiminde sıfır ve negatifler göz önüne alınmaz. Oranlar içerisinde Pozitif en küçük sayı seçilir (18)

Anahtar Satır

Simpleks Yöntemi

<u>Anahtar satırda neden en küçük (b/a) sayı seçilir:</u>

b'ler artan kapasitedir. a'lar o kapasiteden kullanılan miktardır. **<u>b/a</u>** ise, seçilen anahtar sütundaki değişkenin alabileceği en yüksek değeri (örneğin bitkinin ekilebileceği alanı) gösterir.

1.kısıt (örneğin alan) açısından **<u>b_1/a</u>** = 15 da

2.kısıt (örneğin işgücü) açısından **<u>b_2/a</u>** = 30 da

3.kısıt (örneğin alan) açısından **<u>b_3/a</u>** = 12 da ise,

bunlardan en küçüğü alınmak zorundadır ki diğer kaynak kısıtlarını da sağlasın. En büyüğü alınırsa, diğer kaynak kısıtlarını sağlamaz. Sıfır veya negatif olması da onun ekilemeyeceğini gösterir.

Simpleks Yöntemi

Başlangıç Simpleks Tablo
(1. İterasyon)

Anahtar Eleman

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**		
0	**X_3**	6	**4**	1	0	**120**	**30**
0	**X_4**	3	**10**	0	1	**180**	**18**
z		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
c - z		45	**55**	0	0		

Temel değişken vektöründe x_4 yerine x_2 gelecektir.

Birinci Simpleks Tablo (1. İterasyon)

Kar Katsayısı (c)	**c**	45	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$		
0	$\mathbf{X_3}$						
55	$\mathbf{X_2}$	3/10	10/10	0/10	1/10	180/10	
z							
c - z							

Anahtar elemanın bulunduğu satırdaki öğeler anahtar elemana bölünür

Simpleks Yöntemi

X_3

$6-4.(3/10)=24/5$

$4-4.(1)=0$

$1-4.(0)=1$

$0-4.(1/10)=-2/5$

$120-4.(18)=48$

Eski X3

Eski X3 te A. Sütun değeri

Yeni tabloda ilk yazılan satır değerleri

z

$X_1=(0.24/5)+(55.3/10)=165/10$

$X_2=(0.0)+(55.1)=55$

$X_3=(0.1)+(55.0)=0$

$X_4=(0.-2/5)+(55.1/10)=55/10$

$b=(0.48)+(55.18)=990$

c - z

$X_1=45-55.(3/10)=285/10$

$X_2=55-55.(1)=0$

$X_3=0-55.(0)=0$

$X_4=0-4.(1/10)=-55/10$

$b=0-55.(18)=-990$

Simpleks Yöntemi

Başlangıç S. T.

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	X_1	X_2	X_3	X_4		
0	X_3	6	**4**	1	0	**120**	**30**
0	X_4	3	**10**	0	1	**180**	**18**
z		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
c - z		45	**55**	0	0		

Birinci Simpleks Tablo

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	X_1	X_2	X_3	X_4		
0	X_3	**24/5**	**0**	1	-2/5	**48**	
55	X_2	3/10	1	0	1/10	18	
z		**165/10**	**55**	**0**	**55/10**	**990**	
c - z		285/10	**0**	0	-55/10	-990	

$$6-4.(3/10)=24/5$$

$$4-4.(1)=0$$

$$1-4.(0)=1$$

$$0-4.(1/10)=-2/5$$

$$120-4.(18)=48$$

Simpleks Yöntemi

Birinci Simpleks Tablo
(2. İterasyon)

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$		
0	$\mathbf{X_3}$	**24/5**	**0**	1	-2/5	**48**	**10**
55	$\mathbf{X_2}$	3/10	1	0	1/10	18	**60**
z		165/10	55	0	55/10	990	
c - z		**285/10**	**0**	0	-55/10	-990	

48 / (24/5) = 10

18 / (3 / 10) = 60

Simpleks Yöntemi

Birinci Simpleks Tablo
(2. İterasyon)

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$		
0	$\mathbf{X_3}$	**24/5**	**0**	1	-2/5	**48**	**10**
55	$\mathbf{X_2}$	3/10	1	0	1/10	18	**60**
z		165/10	55	0	55/10	990	
c - z		**285/10**	**0**	0	-55/10	-990	

Maksimizasyon probleminde Anahtar Satır seçiminde sıfır ve negatifler göz önüne alınmaz. Oranlar içerisinde Pozitif en küçük sayı seçilir (10)

Simpleks Yöntemi

Birinci Simpleks Tablo
(2. İterasyon)

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**		
0	**X_3**	**24/5**	**0**	1	-2/5	**48**	**10**
55	**X_2**	3/10	1	0	1/10	18	**60**
z		165/10	55	0	55/10	990	
c - z		**285/10**	**0**	0	- 55/10	-990	

Anahtar Eleman

Temel değişken vektöründe x_3 yerine x_1 gelecektir.

Simpleks Yöntemi

İkinci Simpleks Tablo
(2. İterasyon)

Kar Katsayısı (c)	c	45	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	X_1	X_2	X_3	X_4		
45	X_1	**1**	**0**	5/24	-1/12	**10**	
55	X_2						
z							
c - z							

Anahtar elemanın bulunduğu satırdaki öğeler anahtar elemana bölünür

İkinci Simpleks Tablo
(2. İterasyon)

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**		
45	**X_1**	**1**	**0**	5/24	-1/12	**10**	
55	**X_2**	0	1	-1/16	5/40	15	
z							
c - z							

Simpleks Yöntemi

İkinci Simpleks Tablo
(2. İterasyon)

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$		
45	$\mathbf{X_1}$	**1**	**0**	5/24	-1/12	**10**	
55	$\mathbf{X_2}$	0	**1**	-1/16	1/8	**15**	
z		**45**	**55**	**285/48**	**375/120**	**1275**	
c - z		0	**0**	-285/16	**-375/120**	-1275	

c – z satırının öğeleri negatif ve sıfır olduğundan optimum çözüme ulaşılmıştır.

İkinci Simpleks Tablo
(Final Tablo)

Kar Katsayısı (c)	**c**	**45**	55	0	0	Çözüm vektörü (b)	Oran (b/x_{as})
	Temel değişken vektörü	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$		
45	$\mathbf{X_1}$	**1**	**0**	5/24	-1/12	**10**	
55	$\mathbf{X_2}$	0	**1**	-1/16	1/8	**15**	
z		**45**	**55**	**285/48**	**375/120**	**1275**	
c - z		0	**0**	-285/16	**-375/120**	-1275	

Simpleks Çözüm Sonuçları Özeti ve Yorumu

Karar Değişkenleri	Çözüm Vektörü (X)	C-Z	**Açıklama**
	Optimum Çözüm (Solution Value)	Azalan Gelir (Artan Maliyet) (Reduced cost)	Çözümde yer almayan değişkenin çözüme girmesi halinde gelirde oluşacak azalma (maliyette oluşacak artış)
X1 X2	10 15	0 0	İkinci Opt. Çözüm? Xi = 0 ve (C-Z)'si de 0 ise ikinci optimum çözüm vardır
Kısıtlar-İlave Edilen Değişkenler	Artan Kapasite (Slack or Surplus)	Gölge Fiyat (Shadow price)	İlgili kapasitenin bir birim arttırılmasıyla gelirde oluşacak artış (maliyette oluşacak azalma)
X3 X4	0 0	-5.94 -3.13	
Zmaks = 1275 TL			

Örnek 3

Örnek 3: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enb} = 10x_1 + 22x_2 + 18x_3$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leq 24 \\
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 46 \\
3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\leq 60 \\
4x_1 + 8x_2 + 3x_3 &\leq 120
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 3

Çözüm 3: Problemin standart biçimi aşağıda gösterilmiştir.

$Z_{enb} = 10x_1 + 22x_2 + 18x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$

$$\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 24 \\
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 46 \\
3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + 0x_7 &= 60 \\
4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_7 &= 120
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Problemin simpleks başlangıç çözüm tablosu şöyledir.

Tablo 4

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV	Oran
0 x_4	1	**4**	3	1	0	0	0	24	24/4 = 6 → AS
0 x_5	2	2	4	0	1	0	0	46	46/2 = 23
0 x_6	3	5	6	0	0	1	0	60	60/5 = 12
0 x_7	4	8	3	0	0	0	1	120	120/8 = 15
Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	
$Z_j - C_j$	-10	-22	-18	0	0	0	0	-	

AS

Çözüm 3

Anahtar satırın yeni değerleri:

[1 4 3 1 0 0 0 24]

olduğuna göre, anahtar satırın yeni elemanları,

[1/4 4/4 3/4 1/4 0/4 0/4 0/4 24/4]

veya gerekli aritmetik işlemlerin yapılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

[1/4 1 3/4 1/4 0 0 0 6]

Bu değerlerin yeni çözüm tablosuna yerleştirilmesinden sonra bu tablonun diğer elemanları hesaplanabilir.

x_5 değişken satırından başlayarak diğer satır elemanlarını hesaplayalım. Söz konusu değerler aşağıdaki gibi bulunur.

x_5 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

	[2	2	4	0	1	0	0	46]
(-2)	[1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6]
	[3/2	0	5/2	-1/2	1	0	0	34]

x_6 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

	[3	5	6	0	0	1	0	60]
(-5)	[1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6]
	[7/4	0	9/4	-5/4	0	1	0	30]

x_7 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

	[4	8	3	0	0	0	1	120]
(-8)	[1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6]
	[2	0	-3	-2	0	0	1	72]

Çözüm 3

Tablo 5
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV	Oran
22 x_2	1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6	6/(1/4) = 24.00
0 x_5	3/2	0	5/2	-1/2	1	0	0	34	34/(3/2) = 22.33
0 x_6	**7/4**	0	9/4	-5/4	0	1	0	30	30/(7/4) = 17.11
0 x_7	2	0	-3	-2	0	0	1	72	
Z_j	11/2	22	33/2	11/2	0	0	0	132	
$Z_j - C_j$	-9/2	0	-3/2	11/2	0	0	0	-	-

Tablo 6
Simpleks İkinci (En iyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV
22 x_2	0	1	3/7	3/7	0	-1/7	0	12/7
0 x_5	0	0	4/7	4/7	1	-6/7	0	58/7
10 x_1	1	0	9/7	-5/7	0	4/7	0	120/7
0 x_7	0	0	-39/7	-4/7	0	-8/7	1	264/7
Z_j	10	22	156/7	16/7	0	18/7	0	1464/7
$Z_j - C_j$	0	0	30/7	16/7	0	18/7	0	-

Örnek 4

Örnek 4: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enb} = -2x_1 - 3x_2 - x_3$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4: Simpleks yöntemle çözüm yapabilmek için önce eşitsizlikleri eşitlik biçiminde yazalım. Her bir kısıtlayıcı fonksiyona birer yapay değişken eklenir, aynı kısıtlayıcılardan birer artık değişken çıkartılırsa örnek problemin modeli simpleks yöntem için uygun biçime dönüştürülmüş olur.

$Z_{enb} = -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - MA_1 - MA_2$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + A_1 = 8$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$$

Standart biçimdeki bilgilerin kullanılmasıyla oluşturulan tablo aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 7

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV	Oran
-M A_1	1	**4**	2	-1	0	1	0	8	8/4 = 2 → AS
-M A_2	3	2	1	0	-1	0	1	6	6/2 = 3
Z_j	-4M	-6M	-3M	M	M	M	M	-14M	
$Z_j - C_j$	-4M+2	-6M+3	-3M+1	M	M	0	0	-	
		↑ AS							

$Z_1 = (-M)(1) + (-M)(3) = -4M$
$Z_2 = (-M)(4) + (-M)(2) = -6M$
$Z_3 = (-M)(2) + (-M)(1) = -3M$
$Z_4 = (-M)(-1) + (-M)(0) = M$
$Z_5 = (-M)(0) + (-M)(-1) = M$
$Z_6 = (-M)(1) + (-M)(0) = -M$
$Z_7 = (-M)(0) + (-M)(1) = -M$
$Z_8 = (-M)(8) + (-M)(6) = -14M$

$Z_1 - C_1 = (-4M) - (-2) = -4M + 2$
$Z_2 - C_2 = (-6M) - (-3) = -6M + 3$
$Z_3 - C_3 = (-3M) - (-1) = -3M + 1$
$Z_4 - C_4 = M - (0) = M$
$Z_5 - C_5 = M - (0) = M$
$Z_6 - C_6 = (-M) - (-M) = 0$
$Z_7 - C_7 = (-M) - (-M) = 0$

Çözüm 4

Tablo 8
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-3	x_2	1/4	1	1/2	-1/4	0	1/4	0	2
-M	A_2	**5/2**	0	0	1/2	-1	-1/2	1	2 →
Z_j		$\frac{-3-10M}{4}$	-3	-3/2	$\frac{3-2M}{4}$	M	$\frac{-3+2M}{4}$	-M	-2M-6
Z_j - C_j		$\frac{5-10M}{4}$ ↑	0	-1/2	$\frac{3-2M}{4}$	M	$\frac{-3+6M}{4}$	0	-

Tablo 9
Simpleks İkinci Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-3	x_2	0	1	**1/2**	-3/10	1/10	3/10	-1/10	9/5 →
-2	x_1	1	0	0	1/5	-2/5	-1/5	2/5	4/5
Z_j		-2	-3	-3/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	-7
Z_j - C_j		0	0	-1/2 ↑	1/2	1/2	$\frac{2M-1}{2}$	$\frac{2M-1}{2}$	-

Çözüm 4

Tablo 10
Simpleks Üçüncü (En iyi) Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-1	x_3	0	2	1	-3/5	1/5	3/5	-1/5	18/5
-2	x_1	1	0	0	1/5	-2/5	-1/5	2/5	4/5
Z_j		-2	-2	-1	1/5	3/5	-1/5	-3/5	-26/5
Z_j - C_j		0	1	0	1/5	3/5	$\frac{5M-1}{5}$	$\frac{5M-3}{5}$	-

Tablo 10'daki temel uygun çözümde tüm Z_j - $C_j \geq 0$ olduğundan çözüm en iyidir. Bu çözümde, x_1 = 4/5, x_2 = 0, x_3 = 18/5, x_4 = 0, x_5 = 0, A_1 = 0, A_2 = 0 olarak belirlenmiştir. Amaç fonksiyonunun en büyük değeri Z_{enb} = -26/5'dir.

Örnek 5

Örnek 5: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enb} = 21x_1 + x_2 + x_3$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 30$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 5: Kısıtlayıcılar eşitlik biçiminde olduğundan, her birine (+1) katsayılı yapay değişken eklenmesi gerekir. Bu yolla elde edilen model aşağıda gösterilmiştir.

$Z_{enb} = 21x_1 + x_2 + x_3 - MA_1 - MA_2$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + A_1 = 20$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + A_2 = 30$$
$$x_1, x_2, x_3, A_1, A_2 \geq 0$$

Tablo 11

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	ÇV
-M A_1	2	1	**4**	1	0	20
-M A_2	1	3	4	0	1	30
Z_j	-3M	-4M	-8M	-M	-M	-50M
$Z_j - C_j$	-3M-21	-4M-1	-8M-1	0	0	-

Çözüm 5

Tablo 14
Simpleks Üçüncü (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	ÇV
21 x_1	1	0	8/5	3/5	-1/5	6
1 x_2	0	1	4/5	-1/5	2/5	8
Z_j	21	1	172/5	62/5	-19/5	134
$Z_j - C_j$	0	0	167/2	$\frac{5M + 62}{8}$	$\frac{5M - 19}{5}$	-

Son satırın tüm elemanları ≥ 0 olduğundan, en iyi çözüm elde edilmiştir. Bu en iyi çözümde, $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ve $Z_{enb} = 134$'dür.

Enküçükleme Problemleri

Örnek 6: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enk} = 3x_1 + 2x_2 + x_3$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 21$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 6: Önceden olduğu gibi öncelikle problemin standart biçimde yazılması gerekmektedir. Yukarıda yapılan açıklamalar doğrultusunda eklenen ve çıkartılan değişkenlerle problemin standart biçimi aşağıdaki gibi elde edilir.

$Z_{enk} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + MA_1 + MA_2$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + A_1 = 21$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$$

Problemin standart biçimindeki bilgilerin kullanılmasıyla düzenlenen başlangıç çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 15
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
M A_1	2	**3**	1	-1	0	1	0	21
M A_2	1	1	1	0	-1	0	1	12
Z_j	3M	4M	2M	-M	-M	M	M	33M
$Z_j - C_j$	3M-3	4M-2	2M-1	-M	-M	0	0	-

Çözüm 6

Tablo 16

Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
2 x_2	2/3	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	7
M A_2	1/3	0	**2/3**	1/3	-1	-1/3	1	5
Z_j	$\frac{M+4}{3}$	2	$\frac{2M+2}{3}$	$\frac{M-2}{3}$	-M	$\frac{-M+2}{3}$	M	5M+14
$Z_j - C_j$	$\frac{M-5}{3}$	0	$\frac{2M-1}{3}$	$\frac{M-2}{3}$	-M	$\frac{-4M+2}{3}$	0	-

Tablo 17

Simpleks İkinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
2 x_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	1/2	-1/2	9/2
1 x_3	1/2	0	1	1/2	-3/2	-1/2	3/2	15/2
Z_j	3/2	2	1	-1/2	-1/2	1/2	1/2	33/2
$Z_j - C_j$	-3/2	0	0	-1/2	-1/2	$\frac{-2M+1}{2}$	$\frac{-2M+1}{2}$	-

Tüm $Z_j - C_j \leq 0$ olduğundan, en iyi çözüme ulaşılmış ve $x_1 = 0$, $x_2 = 9/2$, $x_3 = 15/2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ ve Zenk = 33/2 olarak belirlenmiştir.

- BAŞKA ÖRNEKLER için 5-Örnekler.pdf dosyasına bakınız

Simplex (Özet)

- Temel prensibi; temel feasible çözümleri hedef fonksiyonu minimum yapacak şekilde taramaktır.

Kanonik form

$$x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m$$

$$x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$
$$x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m$$

Bu denklemde x_1'den x_m'e kadar olan değişkenler denklemlerde yalnızca bir kez bulunur. Yani x_1 sadece 1. denklemde x_2 sadece 2. denklemde bulunmaktadır. Matris formatında kononik denklem aşağıdaki gibi verilir:

$$\mathbf{I}_{(m)}\mathbf{x}_{(m)} + \mathbf{Q}\mathbf{x}_{(n-m)} = \mathbf{b}$$

$\mathbf{I}_{(m)}$:m-boyutlu birim matrisi

$\mathbf{x}_{(m)} = [x_1, x_2, \ldots, x_m]^T$ m boyutlu vektör

$\mathbf{x}_{(n-m)} = [x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n]^T$ n-m boyutlu vektör

$\mathbf{Q} : m \times (n-m)$ x_{m+1} ile x_n arasındaki değişkenlerin katsayılarını içeren matris

$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_m]^T$

Simplex tablosu:

Simplex metodunda kononik biçimdeki denklem takımı bir tabloda verilir. Bu tabloda kıstlayıcı fonksiyonların yanısıra hedef fonksiyonu da içerir. Bu tablonun genel gösterimi:

temel	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_n	RHS
x_1	1	0	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$a_{1,m+2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	b_1
x_2	0	1	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$a_{2,m+2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	0	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$a_{m,m+2}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	b_m

Pivot Adımı

- Simplex metodunda, temel feasible çözümler arasında sistematik olarak arama yaparak optimum değer bulunur. Bir temel feasible çözümden başlanılarak hedef fonksiyonun değerini azaltan diğer temel feasible çözümler aranır. Bu ise mevcut temel değişkenlerin temel olmayan değişkenlerle değiştirilerek elde edilir. Bu pivot adım ile yapılır ve yeni bir kononik denklem takımı elde edilerek temel çözümler elde edilir.

Simplex metodunun temel adımları

- Simplex metodunda bir temel çözümden başlanır ve civardaki verteks noktalara hareket edilir. Bu harekette feasibility korunur ve hedef fonksiyonun değeri azaltılır. Bu ise temel bir değişkenin temel olmayan bir değişken ile değiştirilerek elde edilir. Simplex metodu iki temel adımı vardır:
  - Temel değişkenlere çevrilecek temel olmayan değişkenlerin seçimi
  - Temel setten temel olmayan değişken olacak değişkenin seçimi

Adımlar

1. Optimizasyon problemi standart LP problemi haline dönüştürülür.
2. Simplex metodu optimum çözümü bulmak için bir başlangıç temel feasible çözümüne gerektirir. Simplex tablosu temel ve temel olmayan değişkenleri belirtecek şekilde hazırlanır. Kısıtlayıcı fonksiyonlarında sadece bir kez bulunan değişkenler temel değişkenler olarak seçilir. Eğer bütün kısıtlayıcılar "≤" tipinde iseler slack değişkenler temel değişkenler olarak atanır ve bir başlangıç feasible çözüm elde edilir. Diğer değişkenler temel olmayan değişkenler olarak Simplex tablosuna yerleştirilir. Eğer kısıtlayıcılar "≥" biçiminde veya eşitlik kısıtlayıcıları iseler suni değişkenler kullanılmalıdır.

Adımlar

3. Optimum çözümde simplex tablosunun hedef fonkisyonu içeren satırında temel olmayan değişkenlere karşılık gelen değerler negatif olmamalıdır. Eğer bu değerler pozitif ise optimum çözüm elde edilmiş demektir.
4. Eğer hedef fonksiyon satırında temel olmayan değişkenlere karşılık gelen değerler negatif ise pivot işlemi başlatılır ki bu işlemde temel değişkenlerden biri temel olmayan değişkenle yer değiştirilir. Bunun için
   a. Hangi temel olmayan değişkenin seçileceği, hedef fonksiyon satırındaki temel olmayan değişkenlere karşılık gelen değerlerden mutlak değerce en büyük olan değişken seçilir.
   b. Hangi temel değişkenin pivot işleminde seçileceği ise; seçilen temel olmayan değişkenin katsayılarından (pivot sütünu) pozitif değere sahip olanlar en sağ sütündeki b değerlerine bölünür ve elde edilen oranlardan hangisi küçük ise buna karşılık gelen temel değişken pivot işleminde seçilir. Eğer pivot sütunundaki katsayıların hepsi negatif ise,problem sınırsız bir problemdir ve dolayısıyla hedef fonksiyonu eksi sonsuza kadar minimize edilir demektir yani optimum çözüm yoktur. Pratik uygulamalarda bu durum düzgün bir şekilde kısıtlanmayan problemlerde ortaya çıkar. Dolayısıyla problem formülasyonu gözden geçirilmelidir

Adımlar

5. Pivot satır ve sütün seçildikten sonra pivot işlemi yapılacak temel olmayan değişkenin bulunduğu sütundaki katsayılar, pivot satırındaki 1 ve diğer satırdaki değerler 0 olacak şekilde eliminasyon işlemi yapılır.
6. Elde edilen değerlere göre yeniden bir Simplex tablosu oluşturulur
7. Yukarıda verilen işlemler hedef fonksiyon satırındaki, temel olmayan değişkenlere karşılık gelen katsayılar negatif olmayan değere sahip oluncaya kadar devam edilir. Eğer hedef fonksiyon satırında temel olmayan değişkenlere karşılık gelen katsayılardan en az biri sıfır ise optimizasyon probleminin birden fazla optimum çözümü var demektir.

BAŞLANGIÇ TEMEL FEASİBLE ÇÖZÜM (SUNİ DEĞİŞKENLER)

- Pek çok tasarım probleminde kısıtlayıcı fonksiyonlar "≤" tipinde bulunabilir. Lineer Programlama (LP) probleminde bu tip kısıtlayıcı fonksiyonlar standart LP problemi haline getirebilmek için surplus değişkenler eklenmektedir. Surplus değişkenler eklenmesine rağmen eğer bir temel çözüm yoksa ve LP problemi "≥" tipinde veya "eşitlik kısıtlayıcısı" şeklinde ise, çözüm elde edebilmek için negatif olmayan değişkenler eklenir ki bunlara suni değişkenler denir. Bu değişkenler temel değişken olarak kabul edilir ve temel çözümlere ulaşılır. Bununla birlikte suni değişkenler optimum çözümde bulunmamalıdır. Bu tür problemlerin çözümünde aşağıda belirtilen iki aşamalı Simplex metodu (Two phases Simplex Method) kullanılır:

- Aşama I: Simplex algoritması kullanılarak LP problemlerinin bir feasible çözümünün olup olmadığı araştırılır. Eğer feasible çözüm varsa temel feasible çözüm elde edilir.
- Aşama II: Simplex algoritması kullanılarak problemin sınırlı olup olmadığı (bounded) belirlenir. Eğer sınırlı çözüm varsa optimum olan temel feasible çözüm elde edilir.

- Optimum çözümde suni değişkenleri elimine etmek için suni bir hedef fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyon suni değişkenlerin toplamı olarak ifade edilir ve temel olmayan değişkenleri içerecek şekilde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$w = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j$$

Aşama I’in Adımları:

- Slack ve surplus değişkenler kullanılarak LP probleminin standart LP problemine çevrilir.
- “>=” tipindeki kısıtlayıcılar ve eşitlik kısıtlayıcıları için suni değişkenler ve suni değişkenlerin toplamından oluşan suni hedef fonksiyon (w) tanımlanır. w sadece temel olmayan değişkenlerden oluşacak şekilde dönüşüm yapılır.
- Simplex tablosu oluşturulur ve en son satır suni hedef fonksiyonunu içerir.
- En son satırdaki en küçük (negatif) değer aranır. Bu sütunu gösteren değer temel değişken olacaktır.
- RHS’deki oranlar bulunur ve en küçük değere sahip olan temel değişkenler bir önceki maddede bulunan değişkenle yer değiştirecektir.
- Pivot işlemleri yapılır.
- Eğer son satırdaki negatif değer varsa Adım 4’e gidilir yoksa Adım 8’e gidilir.
- Eğer son satırdaki değerlerin hepsi negatif olmayan değerlere sahip ve w sıfıra eşit ise Aşama I tamamlanmıştır. Eğer son satırdaki değerlerin hepsi negatif olmayan değerlere sahip fakat w sıfırdan farklı ise problem infeasibledır.

AŞAMA II'NİN ADIMLARI

- Aşama I'de elde edilen son satır hedef fonksiyonu ile değiştirilir ve aşağıda verilen adımlar gerçekleştirilir:
  1. Aşama I deki adım 4 ile aynı
  2. Aşama I deki adım 5 ile aynı
  3. Aşama I deki adım 6 ile aynı
  4. Eğer son satırda negatif olmayan değerler varsa adım 1'e aksi halde son tablo optimum çözümü içermektedir.

- Simplex metodu aşağıdaki sonuçlara varmayı garanti ettiğinden LP problemlerinin çözümünde oldukça güçlü bir yöntemdir:
- Eğer problem infeasible ise simplex metodu bunu belirtir
- Eğer problem sınırsız ise (unbounded) simplex metodu bunu belirtir
- Eğer problemin bir çözümü varsa bu global optimumdur.
- Eğer birden fazla çözüm varsa simplex metodu buna işaret eder.

DP PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILABİLECEK BİLGİSAYAR YAZILIMLARI

1. LINDO
2. QSB
3. WINQSB

Kaynaklar

- Hasan KURTARAN, “Mühendislik tasarımların optimizasyonu”, 2005
- Edwin K.P. Chong Stanislaw H.Zak,**“**An Introduction to Optimization”, 2001, John Wiley&Sons
- Jorge Nocedal, Stephan J. Wright, “Numerical Optimization”, 1999, Springer-Verlag
- R. Fletcher, “Practical Methods of Optimization”, 1987, John Wiley&Sons
- David G.Luenberger, “Introduction to Linear and Nonlinear Programming”, 1987, Addison-Wesley
- S.G. Nash, A. Sofer, “Linear and Nonlinear programming”, 1996, McGraw Hill
- Abbas Azimli, “Matematiksel Optimizasyon”, 2011, Papatya Yayınevi