KISMİ TÜREVLERİN GEOMETRİK ANLAMI

Üç değişkenli fonksiyonların grafiklerini çizmek için dört boyutlu bir uzaya ihtiyacımız olduğunu biliyoruz. Ancak fonksiyonun sabit değerler aldığı yüzeyler incelenerek fonksiyonun grafiği hakkında bilgi edinilebilir.

Örneğin, $u = x^2+y^2+z^2+1$ fonksiyonu $x^2+y^2+z^2=4$ küresi üzerinde $u=5$ sabit değerini, $x^2+y^2+z^2=1$ küresi üzerinde $u=2$ sabit değerini alır. Genel olarak $x^2+y^2+z^2=k^2$ küreleri üzerinde fonksiyon $u=1+k^2$ sabit değerini alır. Fonksiyonun sabit değerler aldığı $x^2+y^2+z^2=k^2$ yüzeylerine seviye yüzeyleri denir.

Tanım: f diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $A(a,b,c)$, $f(x,y,z)=k$ seviye yüzeyinin bir noktası olsun. Normali $\text{grad} f(a,b,c)$ olan düzleme, $f(x,y,z)=k$ yüzeyinin $A(a,b,c)$ noktasındaki teğet düzlemi denir.

Düzlem içinde değişken bir $P(x,y,z)$ noktası alınırsa $\text{grad} f$ ile AP vektörleri dik olacaklarından

$$\text{grad} f(a,b,c) \cdot AP = 0$$

olur.

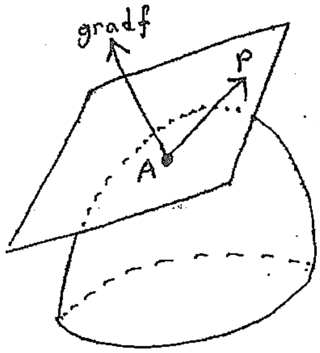
$$\text{grad} f(a,b,c) = f_x(a,b,c)\vec{i} + f_y(a,b,c)\vec{j} + f_z(a,b,c)\vec{k}$$

$$AP = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} + (z-c)\vec{k}$$

olduğundan teğet düzleminin denklemi,

$$\boxed{f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c) = 0}$$

dir.



Eğer yüzeyin denklemi $z=f(x,y)$ biçiminde verilmişse $f(x,y)-z=0$ olacağından teğet düzlemin denklemi

$$f_x(a,b).(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z-c) = 0$$

biçiminde olur. $c=f(a,b)$ olacağından teğet düzlemin denklemi

$$\boxed{f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z-f(a,b)) = 0}$$

olur.

ÖRNEK: $x^2+y^2+z^2=14$ küresine üzerindeki $A(1,2,3)$ noktasından çizilen teğet düzlemin denklemini yazınız.

Çözüm: $f_x = 2x$, $f_y = 2y$, $f_z = 2z$

$f_x(1,2,3) = 2.1 = 2$, $f_y(1,2,3) = 4$, $f_z(1,2,3) = 2.3 = 6$

Teğet düzlemin denklemi

$$2(x-1)+4(y-2)+6.(z-3)=0$$

ÖRNEK: $z = 3x^2+4y$ denkleminin $(-2,1,16)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Çözüm $f(x,y,z) = 3x^2+4y-z$.

$f_x = 6x \Rightarrow f_x(-2,1,16) = -12$

$f_y = 4 \Rightarrow f_y(-2,1,16) = 4$

$f_z = -1 \Rightarrow f_z(-2,1,16) = -1$

$$\Rightarrow -12(x-(-2))+4.(y-1)-1.(z-16)=0$$

$$\Rightarrow -12x+4y-z-12=0$$

ÖRNEK: $x^2+2y^2+3z^2=21$ yüzeyinin $x+4y+6z=0$ düzlemine paralel olan teğet düzleminin denklemini yazınız.

Çözüm: Öncelikle $f(x,y,z)= x^2+2y^2+3z^2-21=0$ yüzeyinin (x_0,y_0,z_0) noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulalım:

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow 2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow x_0x+2y_0y+3z_0z = \boxed{x_0\cdot x_0+2y_0\cdot y_0+3z_0\cdot z_0} = \underbrace{x_0^2+2y_0^2+3z_0^2}_{21}$$

{(x_0,y_0,z_0) noktası $x^2+2y^2+3z^2=21$ yüzeyinin üzerinde bir noktadır.}

Teğet düz. denk.

$$\Rightarrow \boxed{x_0x+2yy_0+3zz_0=21}$$ bulunur. Bu yüzeyin $x+4y+6z=0$ düzlemine paralel olabilmesi için

$$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{4}=\frac{3z_0}{6}$$ olmalıdır. Buradan $y_0=2x_0$, $z_0=2x_0$

$$\Rightarrow x_0^2+2.(2x_0)^2+3.(2x_0)^2=21 \Rightarrow x_0=\pm 1 \Rightarrow y_0=\pm 2 \Rightarrow z_0=\pm 2$$

$(1,2,2)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemi $x+4y+6z=21$, $(-1,-2,-2)$'deki teğet düzlemin denklemi $-x-4y-6z=21 \Rightarrow x+4y+6z=-21$ dir.