9 Yineleme (Recurrence) Bağıntıları

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ şeklindeki sekansları ele aldığımızda, a_r, belirli kombinasyonel problemlerde r girişine bağlı olan çözümdür. Bazı durumlarda a_r, sekansın önceki elemanlarına bağlı olarak ifade edilebilir. Örneğin, 4,7,10,13,16,…. Şeklindeki, dizide, $a_0=4$ ve ortak fark 3 'tür. Dolayısı ile, sıranın r. terimi a_r kendinden önceki (r-1) terime bağlı olarak $a_r= a_{r-1}+3$ şeklinde ifade edilebilir. Bu şekilde ifade edilen bağıntılara yineleme(recurrence) bağıntıları denir. $a_0=4$ ise başlangıç koşuludur. Başlangıç koşulu esas alınarak herhangi bir terim ardışık olarak hesaplanabilir. Diğer bir yol ise yineleme bağıntısını çözerek r. terimin bulunmasıdır. Bu örnekte $a_r=4+3r$ olarak bulunur. Diğer terimler bu çözümden hesaplanabilir.

Yineleme bağıntıları, fark(difference) ve diferansiyel denklemleri

Gerçel sayılardan oluşan bir $\{a_n\}$ dizisinde, ilk fark, $d\{a_n\}$, a_n-a_{n-1}, ikinci fark $d^2\{a_n\}$ ise, $d\{a_n\}-d\{a_{n-1}\}$ dir bu ise $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}$ dir Daha genel olarak, k. fark $d^k\{a_n\}$, $d^{k-1}\{a_n\}-d^{k-1}\{a_{n-1}\}$ dir. Bir fark denklemi a_n ve onun farklarını içeren denklemdir. Örnek, $3d^2(a_n)+2d(a_n)+7a_n$, ikinci dereceden homojen bir fark denklemidir. Herbir $a_i(i=0,1,2,\ldots,n-1)$ a_n'in terimleriyle ifade edilebilir çünkü $a_{n-1}=a_n-d(a_n)$, $a_{n-2}=a_{n-1}-d(a_{n-1})$ …. Olduğundan herbir yineleme bağıntısı bir fark denklemi olarak ifade edilebilir.

Örnek olarak, $3d^2(a_n)+2d(a_n)+7a_n$ fark denklemi, $12a_n=8a_{n-1}-3a_{n-2}$ şeklindeki yineleme bağıntısı olarak ifade edilebilir. Böylece bazı yazarlar fark denklemleri ve yineleme bağıntılarını değiştirerek kullanırlar. Yineleme bağıntılarının çözümünde, fark denklemlerinin çözüm yöntemleri kullanılır. Bu yöntemler ise, diferansiyel denklem sistemlerinin çözüm yöntemlerine benzerdir. Gerçekte, fark(Difererans) denklemleri diferansiyel denklemlerin sayısal ortamdaki ifade edilmesi şeklindedir. Bu noktada kısaca diferansiyel denklemleri hatırlamakta fayda vardır.

Diferansiyel denklemler, bilinmeyen y = y(x) fonksiyonunun türevlerini içeren bir eşitliktir. Bu eşitlikte türevlerle beraber y = y(x) fonksiyonunun kendisi x in bilinen fonksiyonları ve sabitler de bulunabilir. Türevler denildiğinde I. mertebeden, II. mertebeden,…. türevler kastediliyorlar. Denklemdeki en yüksek mertebeden türevin mertebesine **diferansiyel denklemin mertebesi** denir. Örneğin,
$y' = \sin x$, $y' - y = 0$, $xy' + x2y = 3$ denklemleri I. mertebeden,
$y'' + 4y = 0$, $y'' + 3y' + 5y = 0$ denklemleri ise II. mertebeden denklemlerdir.
Not: Yukarıdaki denklemlerde y, y', y'' fonksiyonları x değişkeninin fonksiyonlarıdır.
Genellikle, denklem yazılımında y, y', y'', . . . altındaki x değişkeni yazılmıyor.

Örneğin, $y'(x) - y(x) = 0$ yerine kısaca $y' - y = 0$ yazılır.

Diferansiyel denklemlerin fark denklemleriyle olan ilişkisini açıklamak için ise, Hesap bilimlerinden bildiğiniz gibi, y' sürekli bir y(x) fonksiyonunun türevidir. x ayrık olduğu zaman $y'(x)= y(x+1)-y(x)$'dir. Bu, $d\{y\}$ fark operatörü ile aynıdır. Bu ifade, türev ile benzer olan "fark sekanslarını" oluşturur

Daha yüksek mertebeden türevler olduğu gibi daha yüksek mertebeden fark sekansları vardır. $y''(x) = y'(x+1)-y'(x)$ türevi, $y(x+2)-2y(x+1)+y(x)$'e genişletilebilir..

Örnek: $y'-y=0$ diferansiyel denklemini fark denklemi olarak ifade edersek;
$y'(x)= y(x+1)-y(x)$ ve $y=y(x)$ dir. Sonuçta;
$y(x+1)-y(x)-y(x)=0$
$y(x+1)- 2y(x)=0$ (benzer şekilde $a_{n+1}=2a_n$ dir.)

Örnek: n farklı elemanı bir satıra dizme yollarının sayısını (a_n) hesaplamak için gerekli ifadeyi yineleme bağıntısı olarak bulun.

Çözüm: Seçilen bir elemanı ilk konuma yerleştirmek için n adet yol vardır. Bir elemanı ilk konuma yerleştirdikten sonra, kalan n-1elemanı yerleştirme şekli a_{n-1} dir. Böylece yineleme bağıntısı $a_n=na_{n-1}$ olarak ifade edilir. (burada başlangıç koşulu $a_1=1$'dir.)

Yineleme bağıntıları diferansiyel denklemlerde olduğu gibi homejen ve homojen olmayan olarak iki grupta toplanır. Burada doğrusal ve sabit katsayılı yineleme bağıntılarının çözümü üzerinde durulacaktır.

Tanım: Eğer $c_i(i=1,2,\ldots,r)$ sabitler ise, $a_n = c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ra_{n-r}+f(n)$ ye r. dereceden sabit katsayılı doğrusal yineleme bağıntısı denir. Eğer f(n)=0 ise yineleme bağıntısı homojen, değil ise homojen olmayan yineleme bağıntısı denir. Eğer g(n) , $a_n=g(n)$ (n=0,1,2,….) şeklinde olan bir fonksiyon ise, g(n) yineleme bağıntısının bir çözümüdür.

Homojen Yineleme Bağıntılarının Çözümü

Teorem :(Süper pozisyon prensibi): Eğer $g_i(n)$ (i=1,2,…,k),
$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ra_{n-r} + f_i(n)$ şeklindeki bir yineleme bağıntısının çözümleri ise;
$A_1g_1(n)+A_2g_2(n)+\ldots+ A_kg_k(n)$ şeklindeki k çözümün kombinasyonu;
$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ra_{n-r} + A_1f_1(n) + A_2f_2(n) +\ldots A_kf_k(n)$ şeklindeki bir yineleme bağıntısının çözümüdür. Burada, A_i(i=1,2,…k) gerçel sayılardır. Herhangi bir homojen yineleme bağıntısının çözümlerinin doğrusal kombinezonu, homojen yineleme bağıntısının yine bir çözümüdür.

İspat: $h(n)= A_1g_1(n) + A_2g_2(n) +\ldots A_kg_k(n)$ olsun.
$g_i(n)$, $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ra_{n-r} + f_i(n)$ 'in çözümü olduğu için;
$g_i(n)= c_1g_i(n-1) + c_2g_i(n-2) +\ldots c_rg_i(n-r) + f_i(n)$ yazılabilir.
Bu nedenle; $h(n)= c_1h(n-1) + c_2h(n-2) +\ldots c_rh(n-r) + A_1f_1(n) + A_2f_2(n)+\ldots+ + A_kf_k(n)$ iddiamızı ispatlar.

Sabit katsayılı homojen doğrusal yineleme bağıntılarını çözmek için basit yöntem vardır. Bu yöntem;
r bir sabit olmak üzere, $a_r=x^r$;$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ra_{n-r}$ 'nin bir çözümü kabul edilir ve kabul edilen çözüm bağıntıda yerine koyulursa;
$x^n = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_rx^{n-r}$. elde edilir.
Bu denklemi r^{n-r} 'ye böler ve sağ tarafı sola geçirirsek;
$x^r - c_1x^{r-1} - c_2x^{r-2} - \ldots - c_{r-1}x - c_r = 0$ bulunur ve derecesi r olan ve genelde r adet kökü olan bu polinoma yineleme bağıntısının karakteristik denklemi denir. Bu denklemin kökü birden fazla veya karmaşık sayı olabilir.
Eğer x_i(i=1,2,…,r) karakteristik denklemin r adet kökü ise, $a_n=(x_i)^n$ homojen yineleme bağıntısının bir çözümüdür ve önceki önermede olduğu gibi böyle çözümlerin doğrusal kombinezonuda bağıntının bir çözümüdür.
Örnek olarak, $a_n=5a_{n-1} -6a_{n-2}$ bağıntısının karakteristik denklemi $x^2-5x+6=0$ dır ve kökleri $x_1=2$ ve $x_2=3$ dür. Böylece;
$A_n= A(2)^n +B(3)^n$ A ve B'sabitlerinin herhangi bir seçimi için yineleme bağıntısının bir çözümüdür. Diğer bir deyişle, herbir r kök, x_i (i=1,2,..,r) gerçel ve farklı ise, herbir genel çözüm bu $(x_i)^n$ çözümlerinin doğrusal bir kombinasyonudur.
Teorem: r. dereceden bir doğrusal homojen yineleme bağıntısının karakteristik denkleminin r kökü x_i (i=1,2,..,r) gerçel ve farklı ise, herbir genel çözüm bu $(x_i)^n$ çözümlerinin doğrusal bir

kombinasyonudur. Bununla birlikte, yineleme bağıntısının r ardışık başlangıç değeri $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+r-1}$ biliniyorsa, bu r adet başlangıç değerin çözüme uygulanmasıyla r keyfi sabit hesaplanır ve bu çözüm tektir.

Örnek: $a_n-9a_{n-2}=0$ bağıntısını, $a_0=6$, $a_1=12$ için çözün.

Çözüm: Karakteristik denklem $x^2-9=0$ dır ve denklemin kökleri $x_1=3$ ve $x_2=-3$ dür. Buradan bağıntının genel çözümü; A ve B keyfi sabitler olmak üzere;
$a_n= A(3)^n +B(-3)^n$
Şimdi verilen başlangıç koşullarına bakarak A ve B sabitlerini bulalım.
$A+B=6$; $a_0=6$ için ve;
$3A-3B=12$; $a_1=12$ için
Bu iki denklemin çözümünden, A=5 ve B=1 bulunur. Buradan genel çözüm,
$a_n= 5(3)^n + (-3)^n$

Eğer karakteristik denklemin kökleri tekrarlanan çoklu kök ise bu durumda aşağıdaki örneği inceleyelim,

Örnek :
$a_n = 4a_{n-1}-4a_{n-2}$ yineleme bağıntısının karakteristik denklemi, $(x-2)^2=0$ dır ve denklemin kökleri $x_1=2$ ve $x_2=2$ dir. Bu durumda $A(2)^n$ bir çözümdür. Diğer çözüm ise elbette $Bn(2)^n$ şeklinde ve genel çözüm ise, $A(2)^n + Bn(2)^n$ şeklinde olacaktır. Yine benzer şekilde başlangıç koşullarının çözüme uygulanmasıyla A ve B sabitlerinin değeri hesaplanır.

Teorem: (a) Bir yineleme bağıntısının karakteristik denklemin bir çarpanı (t kök ve s de katlılık olmak üzere) $(x-t)^s$, olsun. Buradan,
$u= (t)^n(A_1+A_2n+A_3n^2+\ldots.+A_sn^{s-1})$ yineleme bağıntısının bir çözümüdür. Burada, $A_j(j=1,2,,\ldots,s)$ keyfi sabitlerdir. Bu çözüm, bağıntının r'ye göre temel çözümüdür.
(b) Yineleme bağıntısının kökleri t_k (k=1,2,…,q, burada s_k, t_k'nın katlılığıdır) ve u_k, bağıntının t_k köküne göre temel çözümü olsun. Buradan, yineleme bağıntısının her çözümü, bu q temel çözümün toplamıdır.

Örnek: Karakteristik denklemi $(x-2)^3(x+3)(x-4)^2$ şeklinde olan bir yineleme bağıntısının genel çözümünü bulun.

Çözüm : Denklemin kökleri 2,2,2,-3,4 ve 4 'dür. Tekrarlanan kök 2 için temel çözüm ;
$u_1= 2^n(A_1+A_2n+A_3n^2)$, kök -3 için temel çözüm, $u_2= A_4(-3)^n$ ve tekralanan kök 4 için temel çözüm $u_3= 4^n(A_5+ A_6n)$ dir. Böylece genel çözüm $u_1 + u_2 + u_3$ şeklindedir.

Homojen Olmayan Yineleme Bağıntıları.

Bu bölümde, $a_n = h_n +f(n)$ tipindeki doğrusal yineleme bağıntılarının çözümü üzerinde durulacaktır. Burada, $h_n= c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2} +\ldots..+c_ra_{n-r}$,ve f(n) n'in bir fonksiyonudur. Verilen homojen olmayan bağıntının homojen parçası $a_n=h_n$ dir. Eğer verilen bağıntının homojen parçasının bir çözümü $a_n=u_n$ ve homojen olmayan bağıntının bir çözümü, $a_n=v_n$ ise süper pozisyon prensibi gereği, $a_n=u_n + v_n$ de aynı homojen olmayan bağıntının bir çözümüdür. Eğer, u_n 'in r keyfi sabiti var ise , $u_n + v_n$'in de r keyfi sabiti vardır. Eğer homojen olmayan bağıntının r ardışık başlangıç koşulu biliniyor ise, bu başlangıç koşulları, tek bir çözüm veren r değişkenli r denklem tanımlamak için kullanılır. Diğer bir deyimle, eğer homojen olmayan yinelemeli bağıntının homojen kısmının bir genel çözümü u_n ise ve eğer v_n de homojen olmayan bağıntının bir kısmi çözümü ise, $u_n + v_n$ aynı homojen olmayan bağıntının bir genel çözümüdür.

Örnek: $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}+6(4)^n$ bağıntısının genel çözümün bulun.
Çözüm: Bağıntının homojen kısmının karakteristik denklemi $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ dür. Buradan $x_1=2$,$x_2=3$ bulunur. Dolayısı ile homojen parçanın çözümü;
$u_n= A(2)^n +B(3)^n$ dir.
Kısmi çözüm için ise;
$f(n)= (4)^n$ olduğundan $vn=A.f(n)= A.4^n$ bir çözüm kabul edilsin ve bu çözüm bağıntıda yerine koyulursa;
$A(4)^n =5.A(4)^{n-1} -6.A(4)^{n-2} +6(4)^n$
Buradan A=48 ve $v_n=48(4)^n$ bulunur. Sonuçta; $a_n=u_n + v_n =A(2)^n +B(3)^n +48(4)^n$ bulunur. A ve B keyfi sabitleri, ardışık başlangıç koşulları kullanılarak bulunur.

Homojen yineleme bağıntısının çözümünün tersine, homojen olmayan bağıntıların kısmi çözümü için genel bir yöntem yoktur. Bununla birlikte iki özel durumda:

i. Eğer $f(n)= c(q)^n$ ise(burada c bilinen bir sabit) ve eğer q karakteristik denklemin kökü değil ise, $A(q)^n$ kısmi çözüm olarak seçilir. Burada A, homojen olmayan eşitlikte a_n yerine $A(q)^n$ koyularak hesaplanabilecek bir sabittir. Eğer q karakteristik denklemin k katlı bir kökü ise, bu durumda $A(n)^k(q)^n$ kısmi çözüm olarak seçilir
ii. Eğer, $f(n)= c(n)^k$ ise ve eğer karakteristik denklemin kökü 1 değil ise, kısmi çözüm için $A_0+A_1n +A_2n^2+\dots+A_kn^k$ şeklinde derecesi k olan n'e bağlı bir polinom seçilir. Eğer 1, karakteristik denklemin t katlı kökü, ise, kısmi çözüm için $A_0n^t + A_1n^{t+1} +A_2n^{t+2}+\dots+A_kn^{t+k}$ şeklindeki polinom seçilir.

Örnek: Homojen olmayan bir yineleme bağıntısının karakteristik denklemi, $(x-1)^2(x-2)((x-3)^2=0$ dır. Aşağıdaki f(n) değerlerine göre kısmi çözümleri bulun.
(a) $f(n)=4n^3 +5n$
(b) $f(n)=4^n$
(c) $f(n)=3^n$

Çözüm: Karakteristik denklemin kökleri, iki katlı kök 1, bir katlı kök 2 ve iki katlı kök 3 dür. Homojen parçanın genel çözümü u_n ve v_n de kısmi çözümler olmak üzere;
$u_n= c_1 + c_2.n + c_3.2^n +c_4.3^n + c_5.n.3^n$ dir.

(a) $v_n = An^2 +Bn^3 + Cn^4 + Dn^5$
(b) $v_n = A.4^n$
(c) $v_n = A.n^2 3^n$.

Yineleme Bağıntılarının iterasyon ile çözümü

Yineleme bağıntıları iterasyon yöntem ile de çözülebilir. Bu çözüm şekli için;

Örnek: $a_n=k.a_{n-1}+f(n)$ şeklindeki bir bağıntının çözümünü ele alalım.
Çözüm: Önce açıklandığı gibi, u_n homojen parçanın çözümü, v_n ise kısmi çözüm olmak üzere $a_n=u_n + v_n$ dir.
Durum(1): k=1, c keyfi bir sabit olmak üzere,u_n=c dir , böylece, $a_n=c + v_n$ dir. Burada v_n'in özelliği f(n)'e bağlı ve u_n de bir sabittir. Bununla birlikte;

$a_n=a_{n-1}+f(n)$
$a_{n-1}=a_{n-2}+f(n-1)$
.
.
$a_2=a_1+f(2)$
$a_1=a_0+f(1)$ dir. Bu n adet eşitlik toplanırsa;

$a_n = a_0 + f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ elde edilir.Böylece,
$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = a_n - a_0 = c + v_n - a_0$ elde edilir.
Durum(2): k, 1'e eşit değil ise, $u_n = c\,k^n$'dir. daha önce anlatıldığı gibi v_n, f(n) ve u_n 'e bağlıdır.

Örnek: $a_n = k.a_{n-1} + bn$ şeklindeki yineleme bağıntısının çözümünü iterasyon ile bulun.
$a_n = k.a_{n-1} + bn$
$k/\ a_{n-1} = k.a_{n-2} + b(n-1)$ (eşitlik k ile çarpılır)
$k^2/a_{n-2} = k.a_{n-2} + b(n-2)$ (eşitlik k^2 ile çarpılır)
.
.
$k^{n-2}/a_2 = k.a_1 + b(n-(n-2))$ (eşitlik $k^{n-2}/$ ile çarpılır)
$k^{n-1}/a_1 = k.a_0 + b(n-(n-1))$ (eşitlik $k^{n-1}/$ ile çarpılır)Bu eşitlikler toplanırsa;

$$a_n = a_0.k^n + bn + kb(n-1) + k^2b(n-2) + \ldots + k^{n-1}b(n-(n-1))$$
$$= a_0.k^n + b[n(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}) - k(1 + 2k + 3k^2 + \ldots + (n-1)k^{n-2})] \text{ dir.(2. seri 1.nin türevi)}$$
$$= a_0.k^n + b[n(\frac{k^n - 1}{k - 1}) - k(\frac{n.k^{n-1}(k-1) + 1 - k^n}{(k-1)^2})] \text{ dir.}$$

$a_0 = 1$, k=2 ve b=1 için çözüm $a_n = 3.2^n - 2 - n$ dir.
Not: Aynı problemi önceki yöntem ile çözünüz

9.1 Alıştırmalar:

1. n elemanlı bir kümenin tüm alt kümlerinin sayısını bulmak için gerekli yineleme bağıntısını tanımlayın.
2. Bir satırdaki n farklı elemanın dizilişinin sayısını veren yineleme bağıntısını tanımlayın.
3. Bir bankanın yıllık faiz oranının %r olduğunu kabul edelim.Eğen a_n , n yıl sonraki para miktarı ise, a_n için basit ve bileşik faize göre yineleme bağıntısını bulun.
4. f(n)= 2f(n-1) yineleme bağıntısını f(0)=1 için çözün.
5. f(n)=3f(n-1) + 4f(n-2) yineleme bağıntısını f(0)=1 f(1)=2 için çözün.
6. $F(n) = 4f(n-1) + 5(3)^n$ yineleme bağıntısını f(0)= 1 için çözün.
7. F(n)=4f(n-1) -4f(n-2) +n yineleme bağıntısını f(0)=1 ve f(1)=2 için çözün