6. Hafta

YMÜ 215 Mantık Devreleri

Dr. Öğr. Üyesi Feyza Altunbey Özbay

İçerik

- Minterm ve Maxterm
- Maxterm ve Minterm İfadelerin Birbirlerine Dönüştürülmesi
- Sadeleştirme İşlemi

Hatırlatma

F = A . (B+C) = (A . B) + (A . C) eşitliğinin doğru olduğunu doğruluk tablosunda değişken değerlerini kullanarak ispatlayalım.

A B C	B+C	A.(B+C)	A . B	A.C	(A.B)+(A.C)
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	1	0	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0	0
0 1 1	1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	0
1 0 1	1	1	0	1	1
1 1 0	1	1	1	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1

		⇧			⇧

Minterm ve Maxterm

Bir binary değişkeni, ya kendi normal formu olan A olarak veya değili olan A' formu ile ifade edilebilir. Bu formlarla ifade edilebilen değişkenler fonksiyon halini aldığı zaman; ‘**canonical form**’ (kanun-kaide) olarak adlandırılan ‘**minterm’** (çarpımların toplamı) veya ‘**maxterm’** (toplamların çarpımı) modellerinden biri ile gösterilirler.

Yanda üç değişkenli bir sistemde oluşabilecek minterm ve maxterm terimleri.

Değişken			**Mintermler**		**Maxtermler**	
A	B	C	Terim	İsim	Terim	İsim
0	0	0	A'B'C'	m_0	A+B+C	M_0
0	0	1	A'B'C	m_1	A+B+C'	M_1
0	1	0	A'BC'	m_2	A+B'+C	M_2
0	1	1	A'BC	m_3	A+B'+C'	M_3
1	0	0	AB'C'	m_4	A'+B+C	M_4
1	0	1	AB'C	m_5	A'+B+C'	M_5
1	1	0	ABC'	m_6	A'+B'+C	M_6
1	1	1	ABC	m_7	A'+B'+C'	M_7

Minterm ve Maxterm

- Bir boolean ifadede bulunan değişkenlerin sahip olduğu veya oluşturabileceği kombinasyonların ‘VE’ (çarpım) işlemi sonucunda 1 olacak şekilde uyarlanmasına (değişkenin değeri 1 ise olduğu gibi alınıp, 0 ise değili ile ifade edilerek), ‘**minterm’** denir.
- Aynı yolla, değişkenlerin kombinasyonlarının ‘VEYA’ (toplama) işlemi sonucunda 0 değerini almasını sağlayacak şekilde değişkenlerin şekillendirilmesine ‘**maxterm’** denir.

Minterm ve Maxterm- Örnek

Doğruluk tablosunda f_1 ve f_2 fonksiyonlarını minterm formu ile tanımlayalım.

A	B	C	f_1	f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

- 'f_1' fonksiyonunda '1' olarak tanımlanan kombinasyonlardaki değişken değerleri;

001, 100 ve 111 olduğundan, bu kombinasyonları temsil eden değişkenler fonksiyon olarak,

$f_1 = m_1 + m_4 + m_7 = A'B'C + AB'C' + ABC$

şeklinde ifade edilir.

- Aynı şekilde f_2 fonksiyonu;

$f_2 = m_3 + m_5 + m_6 + m_7 = A'BC + AB'C + ABC' + ABC$

olarak tanımlanır.

Minterm ve Maxterm - Örnek

- Bu örnek bir Boolean fonksiyonunun mintermlerin toplanması seklinde tanımlanabileceği özelliğini gösterir. Bu örnekte çıkıştaki ‘1’ değerleri referans olarak alınmıştır.
- ‘f_1’ fonksiyonunda ‘0’ olarak tanımlanan kombinasyonlar referans olarak alınır ve kombinasyonlardaki değişkenlerin toplamı ‘0’ olacak şekilde kombinasyonlar formlandırılırsa, Boolean cebrinin diğer bir özelliği ortaya çıkar. Bu özellik; Boolean fonksiyonunun maxtermlerin çarpımı (AND işlemine tabi tutulması) şeklinde ifade edilebilirliği özelliğidir.

Minterm ve Maxterm - Örnek

A	B	C	f_1	f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Bu özelliği gösterecek şekilde f_1 ve f_2 fonksiyonları yazılabilir. Bu durumda f_1 fonksiyonu;

$F_1 = M0 \,.\, M2 \,.\, M3 \,.\, M5 \,.\, M6$

$= (A+B+C) \,.\, (A+B'+C) \,.\, (A+B'+C') \,.\, (A'+B+C') \,.\, (A'+B'+C)$

şeklinde, f_2 fonksiyonu ise;

$f_2 = M0 \,.\, M1 \,.\, M2 \,.\, M4$

$= (A+B+C) \,.\, (A+B+C') \,.\, (A+B'+C) \,.\, (A'+B+C)$

şeklinde tanımlanır.

Minterm ve Maxterm

Genel olarak, bir fonksiyonu minterimler kullanarak kanonik formda ifade etmek istediğimizde o fonksiyonun doğruluk tablosundan o fonksiyonu 1 yapan giriş değerlerini seçerek bu giriş değerlerine karşılık gelen miniterimlerin VEYA’sını alırız (başka bir deyişle minterimleri toplarız).

Dolayısıyla, bu şekilde elde ettiğimiz kanonik form minterimlerin toplamı olarak adlandırılır.

Eğer, bu toplam $F = m_0 + m_2 + m_7$ şeklindeyse bunu kısaca;

$$F = \sum(0, 2, 7)$$

ile toplam sembolüyle ifade ederiz. (Tabi bu toplam VEYA işlemi anlamına gelmektedir. Aritmetik toplama ile herhangi bir alakası yoktur.)

Örnek

Aşağıda doğruluk tablosu verilmiş olan fonksiyonu minterimlerin toplamı şeklinde ifade ediniz.

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Tablodan görüldüğü üzere, fonksiyon sadece $(001)_2 = 1$, $(011)_2 = 3$, $(110)_2 = 6$ ve $(111)_2 = 7$ giriş kombinasyonları için 1 olmaktadır.

$$F = \sum(1,3,6,7) = m_1 + m_3 + m_6 + m_7$$

Buna göre, olarak ifade edilir. Tabi bu da F = x'y'z + x'yz + xyz' + xyz ifadesine karşılık gelir.

Minterm ve Maxterm

Genel olarak, bir fonksiyonu maksterimler kullanarak kanonik formda ifade etmek istediğimizde o fonksiyonun doğruluk tablosundan o fonksiyonu 0 yapan giriş değerlerini seçerek bu giriş değerlerine karşılık gelen maksterimlerin VE'sini alırız (başka bir deyişle maksterimleri çarparız).

Dolayısıyla, bu şekilde elde ettiğimiz kanonik form maksiterimlerin çarpımı olarak adlandırılır. Eğer, bu çarpım $F = M_1 M_4 M_5$ gibiyse bunu kısaca

$$F = \prod(1,4,5)$$

ile çarpım sembolüyle ifade ederiz. (Tabi bu çarpım VE işlemi anlamına gelmektedir. Aritmetik çarpma ile herhangi bir alakası yoktur.)

Örnek

Aşağıda doğruluk tablosu verilmiş olan fonksiyonu maksterimlerin çarpımı şeklinde ifade ediniz.

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Tablodan görüldüğü üzere, fonksiyon sadece $(000)_2 = 0$, $(010)_2 = 2$, $(100)_2 = 4$ ve $(101)_2 = 5$ giriş kombinasyonları için 0 olmaktadır. Buna göre;

$$F = \prod(0, 2, 4, 5) = M_0 M_2 M_4 M_5$$

olarak ifade edilir. Tabi bu da F = (x+y +z)(x+y'+z)(x' +y+z)(x'+y +z') ifadesine karşılık gelir.

Maxterm ve Minterm İfadelerin Birbirlerine Dönüştürülmesi

‘Minterm’ ve ‘Maxterm’ ifadelerin elde ediliş şekilleri göz önünde tutulursa, minterm ve maxterm ifadelerin birbirlerinin tersi (komplementi-tümleyeni) olduğu bulunabilir. Çünkü mintermleri oluşturmak için fonksiyonlardaki '1' değerleri alınırken, maxtermleri oluşturmak için '0' değerleri alınmaktadır. Örnek olarak;

Örnek

F(A,B,C)=Σ(4,5,6,7) lojik ifadesini maxtermler cinsinden bulalım.

Girişler			F	F′
A	B	C		
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

F fonksiyonunun DEĞİLİ ,

$F'(A,B,C) = \Sigma(0,1,2,3) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$

F' fonksiyonunun bir daha DEĞİLİ alınırsa,

$$F(A,B,C) = (m_0 + m_1 + m_2 + m_3)' = m_0'.\ m_1'.m_2'.m_3'$$

$$= M_0.\ M_1.M_2.M_3$$

$$= \Pi(0,1,2,3) \text{ olarak bulunur.}$$

Özetle, çarpımlar toplamı formunun içerdiği terimlerin dışında kalan kombinasyonlardan, toplamlar çarpımı formu elde edilir. Bu ifadenin terside geçerlidir.

Dönüşüm İşlemleri

F(A,B,C)=AB’C+A’BC+AB’C’+ABC+A’B’C standart çarpımlar toplamı biçiminde verilmiş lojik ifadeyi standart toplamlar çarpımı formuna dönüştürelim.

Çarpım terimlerini 1 yapan kombinasyonlar; 101,011,100,111,001dir.

Bu kombinasyonların dışındakiler; 000, 010, 110 dir. O halde toplamları 0 yapan terimler (A+B+C), (A+B’+C) ve (A’+B’+C) olur. Bu üç terim çarpıldığında toplamların çarpımı formu elde edilmiş olur;

F(A,B,C)= (A+B+C).(A+B’+C).(A’+B’+C)

Ayrıca F(A,B,C) fonksiyonu mintermler cinsinden Σ(1,3,4,5,7) şeklinde de ifade edilebilir. Bu mintermler dışındaki kombinasyonlar, maxtermleri oluşturur.

$F(A,B,C) = \Sigma(1,3,4,5,7) = \Pi(0,2,6)$ yazılabilir.

Sadeleştirme İşlemi

Aşağıda verilen doğruluk tablosuna göre F fonksiyonunu minterm ve maxterm yöntemlerini kullanarak sadeleştirelim.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

İlk olarak *F* fonksiyonunu mintermler cinsinden yazarak sadeleştirelim;

$$F(A,B,C) = \Sigma(0,2,3,5,7) = \underline{A'B'C'} + \underline{A'BC'} + A'BC + \underline{\underline{AB'C}} + \underline{\underline{ABC}}$$

$$= A'C'(B'+B) + A'BC + AC(B'+B) = A'C' + \underline{A'BC} + \underline{AC}$$

$$= A'C' + C(A'B+A) = A'C' + C(A+B) = \mathbf{A'C'+AC+BC}$$

Ya da $A'C'+A'BC+AC$ terimini C değil de A' parantezine alırsak,

$A'(C'+BC)+AC = A'(B+C')+AC =$ $\mathbf{A'C'+AC+A'B}$ elde edilir.

Her iki ifade de birbirine lojik olarak eşdeğerdir.

Sadeleştirme İşlemi

Şimdi de F fonksiyonunu maxtermler cinsinden yazarak sadeleştirelim;

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F(A,B,C)=\Pi(1,4,6) \quad = (A+B+C').(A'+B+C).(A'+B'+C)$$

$$= (AA'+AB+AC+A'B+BB+BC+A'C'+BC'+C'C)(A'+B'+C)$$

$$= (\underline{AB}+AC+\underline{A'B}+\underline{B}+\underline{BC}+A'C'+\underline{BC'})(A'+B'+C)$$

$$=(B+AC+A'C')(A'+B'+C)$$

$$= A'B+\underline{BB'}+BC+\underline{A'AC}+AB'C+ACC+A'A'C'+A'B'C'+\underline{A'C'C}$$

$$= A'B+BC+\underline{AB'C}+AC+A'C'+\underline{A'B'C}$$

$$= A'B+B'(\underline{AC+A'C'})+\underline{AC+A'C'} \quad = A'B+(AC+A'C')(B'+1)$$

$$= \mathbf{A'B+AC+A'C'}$$

Sadeleştirme İşlemi

Sonuç olarak, doğruluk tablosundaki 1’lerden yola çıkarak mintermler cinsinden yada 0’lardan yola çıkarak maxtermler cinsinden F fonksiyonunu ifade edilir. Her iki form için sadeleştirme yapıldığında ise elde edilen lojik ifadeler birbirine denk olmaktadır.