

7. Hafta

YMÜ 215 Mantık Devreleri

Dr. Öğr. Üyesi Feyza Altunbey Özbay

İçerik

- Karnaugh Haritaları

Karnaugh Haritalama Yöntemi

Boolean fonksiyonlarını teoremler, kurallar ve özdeşlikler yardımı ile indirgenebilir. Ancak yapılan bu sadeleştirme işleminde birbirini izleyen her adım için farklı bir işlem yapma gerekliliği indirgemenin tam olarak yapılamamasına ve indirgemedede hata yapma olasılığını arttırmaktadır.

Karnough haritalama yöntemi, Boolean fonksiyonlarının indirgenmesinde basit ve dolaysız bir yöntem sağlar.

Karnaugh Haritalama Yönteminin Kuralları

- Karnaugh Haritaları giriş değişkeni sayısına bağlı olarak standart sayıda kutudan oluşur.
- n =giriş değişkeni sayısı olmak üzere 2^n formülüyle kutu sayısı belirlenir. 2,4,8,16... olmak üzere 2'ye katlanarak devam eder.
- Karnaugh Haritalarında hedef en çok "1" i gruplamaktır. Kutuların içindeki "1" ler dikkate alınır. "0" olan kutular dikkate alınmaz. Gruplamalardaki kutu sayısı 1,2,4,8,16.... şeklinde olmalıdır.
- Her bir grup çıkış ifadesinde giriş değişkenleri çarpım (AND) şeklinde ifade edilir. Birden fazla gruba sahip Karnaugh Haritasının çıkış ifadesinde gruplar toplama (OR) işlemine tabi tutulur.
- Karnaugh Haritasında tüm kutular "1" ise çıkış "1" , tüm kutular "0" ise çıkış "0" dır dır.

Karnaugh Haritalama Yöntemi

A	B	
	B'	B
A'	$A'B'$	$A'B$
A	AB'	AB

A	BC			
	$B'C'$	$B'C$	BC	BC'
A'	$A'B'C'$	$A'B'C$	$A'BC$	$A'BC'$
A	$AB'C'$	$AB'C$	ABC	ABC'

AB	CD			
	$C'D'$	$C'D$	CD	CD'
$A'B'$	$A'B'C'D'$	$A'B'C'D$	$A'B'CD$	$A'B'CD'$
$A'B$	$A'BC'D'$	$A'BC'D$	$A'BCD$	$A'BCD'$
AB	$ABC'D'$	$ABC'D$	$ABCD$	$ABCD'$
AB'	$AB'C'D'$	$AB'C'D$	$AB'CD$	$AB'CD'$

İki Girişli Karnaugh Haritası

	B	B'	B
A			
A'	A'B'	A'B	
A	AB'	AB	

A	B	Q
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

	B	B'	B
A			
A'	0	0	
A	1	1	

- $Q=A.(A+B)$ fonksiyonu karnaugh haritası ile sadeleştirilim.
- Tablodaki A-B değişkenlerinin bağıntıya göre karşılıkları ilgili kutucuğa yazılır. Karno haritası üzerinde yapılması gereken bütün 1'leri gruplar içerisine almaktır. Bunun için içerisinde 1 bulunan birbirine komşu gruplar varsa 4'lü, yoksa 2'li yoksa da tekli gruplar oluşturulur.
- Gruplar 2'nin kuvvetlerinden(1,2,4,8,16...) başka olamaz.
- Gruplama işleminde esas, mümkün olduğunca geniş gruplar oluşturmaktır. Ne kadar büyük gruplama yapılırsa o kadar sade sonuçlar elde edilir.
- Herhangi bir grup içine alınarak kullanılan bir kutu başka bir gruplama amacıyla da kullanılabilir. **Yani bir kutu birden fazla grupta yer alabilir.**

İki Girişli Karnaugh Haritası

	B	B'	B
A			
A'	A'B'	A'B	
A	AB'	AB	

A	B	Q
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

	B	B'	B
A			
A'	0	0	
A	1	1	

Gruplamadan sonra grup bölgesinde 0 ve 1 değerlerini beraber içeren değişkenler elenir.

Örnekte B değişkeni, grup içine alınan bölgede hem 1 hem de 0 olduğu için elenir.

Bu durumda sadece A değişkeni geriye kalmıştır.

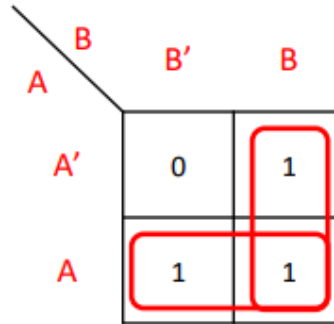
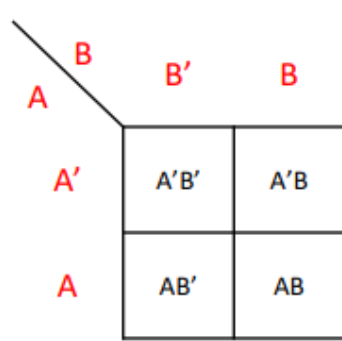
Grubun işaretlendiği bölgede A değişkeni 1 değerindedir.

Bu nedenle karno sonucu A'dır.

$Q = A.(A+B)$ fonksiyonu $Q = A$ olarak sadeleşmiş olur.

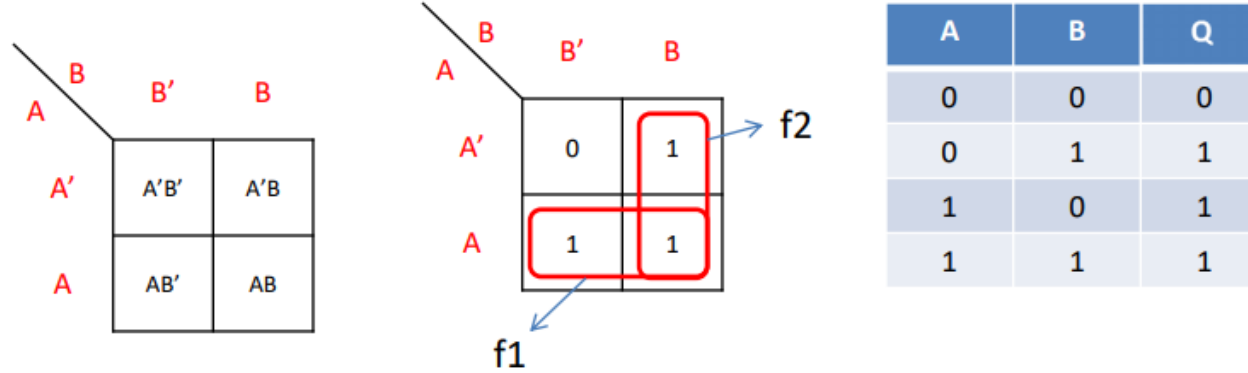
İki Girişli Karnaugh Haritası

- Lojik ifadeler doğrudan karno haritasına yerleştirilebilir.
- Örneğin; $Q = A'B + AB + AB'$ ifadesini karnoya aktaralım.
- Bu ifadede üç tane AND işlemi OR işlemi ile birleştirilmiştir.
- AND işlemleri karnoda karşılıklarının bulunduğu kutulara 1 olarak yazılır.
- Boş kalan kutuların değerleri 0'dır. Daha sonra gruplama işlemi yapılır.



A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

İki Girişli Karnaugh Haritası



A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Q eşitliğini sağlayan f1 ve f2 olmak üzere iki tane grup oluştu.
- Haritada bütün 1'ler grup içine alındı.
- f1 grubu A değişkeninin 1 olduğu bölgedir.
- f2 grubu B değişkeninin 1 olduğu bölgedir.
- f1 = A ve f2 = B olarak alınarak, bütün gruplar VEYA işlemine tabi tutularak sonuç $Q = f1 + f2 = A + B$ olarak bulunur. Yani:
 $Q = A'B + AB + AB' = A + B$ olarak bulunur.

Üç Girişli Karnaugh Haritası

- Üç değişkenli karnaough haritasında $2^3 = 8$ tane kara (kutu) bulunur.
- Her kutu 3 değişkenli bir terime karşılık gelir.

BC	B'C'	B'C	BC	BC'
A	00	01	11	10
A' - 0	000 A'B'C'	001 A'B'C	011 A'BC	010 A'BC'
A - 1	100 AB'C'	101 AB'C	111 ABC	110 ABC'

BC	00	01	11	10
A				
0				
1				1

- Örneğin alt sırada en sağdaki satırı dikkate alalım.
- Bu kutuda
 - A değişkeni 1
 - B değişkeni 1
 - C değişkeni 0 olur.
- Buna göre kutu ABC' terimine aittir.
- Bu şekilde her kutunun hangi terime ait olduğu bulunabilir.

Üç Girişli Karnaugh Haritası

- $Q = A'BC + A'B'C + ABC' + ABC$ ifadesini karno haritasına aktaralım.

BC	B'C'	B'C	BC	BC'
A	00	01	11	10
A' - 0	000 A'B'C'	001 A'B'C	011 A'BC	010 A'BC'
A - 1	100 AB'C'	101 AB'C	111 ABC	110 ABC'

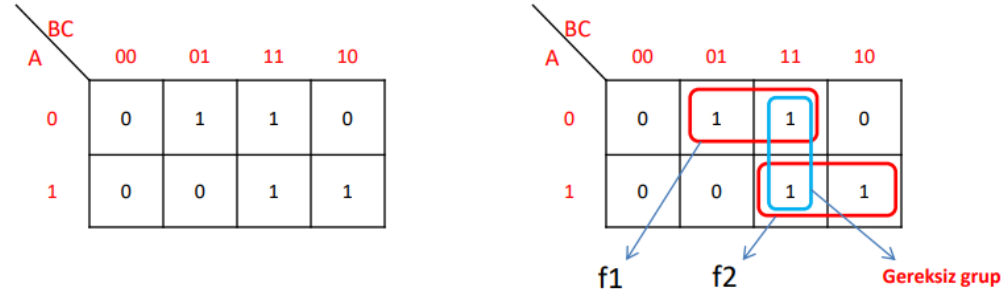
BC	00	01	11	10
A				
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

AB	00	01	11	10
C				
0	0	0	1	0
1	1	1	1	0

A	B	C	Q
0	0	0	A'B'C' - 0
0	0	1	A'B'C - 1
0	1	0	A'BC' - 0
0	1	1	A'BC - 1
1	0	0	AB'C' - 0
1	0	1	AB'C - 0
1	1	0	ABC' - 1
1	1	1	ABC - 1

Üç Girişli Karnaugh Haritası

- $Q = A'BC + A'B'C + ABC' + ABC$ ifadesini karno haritası ile sadeleştirelim.



1'ler grup içerisine alınarak sadeleştirmeye başlanır.

f1 grubu içerisinde B girişi 0 ve 1 değerleri almıştır. Fakat A yalnızca 0, C ise yalnızca 1 değeri almıştır. Bu durumda $f1 = A'C$ olur.

f2 grubu içerisinde C girişi 0 ve 1 değerleri almıştır. Fakat A yalnızca 1, B ise yalnızca 1 değeri almıştır. Bu durumda $f2 = AB$ olur.

Sadeleştirme işlemi sonucunda $Q = f1 + f2 = A'C + AB$ elde edilir.

Üç Girişli Karnaugh Haritası

Örnek: $A'B'C' + A'B'C + A'BC + A'BC' + AB'C' + AB'C$ ifadesini karno haritası ile sadeleştirelim.

		BC			
		00	01	11	10
A	0	1	1	1	1
	1	1	1	0	0

		BC			
		00	01	11	10
A	0	1	1	1	1
	1	1	1	0	0

f1 f2

Sadeleştirmede bir kutucuk birden fazla kutucuk içerisinde yer alabilir.

Ne kadar büyük gruplar oluşursa o kadar sade bir çıkış elde edilir.

f1 grubu içerisinde A girişi 0 ve 1 değerlerini almıştır. C girişi 0 ve 1 değerlerini almıştır. Fakat B girişi yalnızca 0 değerini almıştır. Bu durumda $f1 = B'$

f2 grubu içerisinde B girişi 0 ve 1 değerlerini almıştır. C girişi 0 ve 1 değerlerini almıştır. Fakat A girişi yalnızca 0 değerini almıştır. $F2 = A'$

Sadeleştirme işlemi sonucunda $Q = f1 + f2 = A' + B'$ elde edilir.

Dört Girişli Karnaugh Haritası

- Dört değişkenli karnaough haritasında $2^4 = 16$ tane kara (kutu) bulunur.
- Her kutu 4 değişkenli bir terime karşılık gelir.

CD \ AB	00	01	11	10
A'B' 00	A'B'C'D' 0000	A'B'C'D 0001	A'B'CD 0011	A'B'CD' 0010
A'B 01	A'BC'D' 0100	A'BC'D 0101	A'BCD 0111	A'BCD' 0110
AB 11	ABC'D' 1100	ABC'D 1101	ABCD 1111	ABCD' 1110
AB' 10	AB'C'D' 1000	AB'C'D 1001	AB'CD 1011	AB'CD' 1010

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

- Burada da kurallar 2 ve 3 değişkenli karnaugh diyagramlarında olduğu gibidir.
- İçinde 1 bulunan bitişik kutular onaltılı, sekizli, dörtlü, ikili veya birli gruplar içine alınırlar. Grup içine alınmamış 1 bırakılmaz.
- 16 kutunun hepsinde 1 varsa fonksiyonun değeri $Q = 1$ şeklinde olur. Hepsinde 0 varsa fonksiyonun değeri $Q = 0$ olur.

Dört Girişli Karnaugh Haritası

Örnek: $Q = A'BC'D' + AB'CD' + ABCD + ABC'D' + ABCD' + AB'CD + ABC'D$ ifadesini karno haritası ile sadeleştirelim.

CD \ AB		00	01	11	10
00	0	0	0	0	0
01	1	0	0	0	0
11	1	1	1	1	1
10	0	0	1	1	1

Diagram illustrating the Karnaugh map for the function Q . The map is a 4x4 grid with rows labeled AB (00, 01, 11, 10) and columns labeled CD (00, 01, 11, 10). The values in the cells are 0 or 1. Three groups of 1s are identified and circled in red:

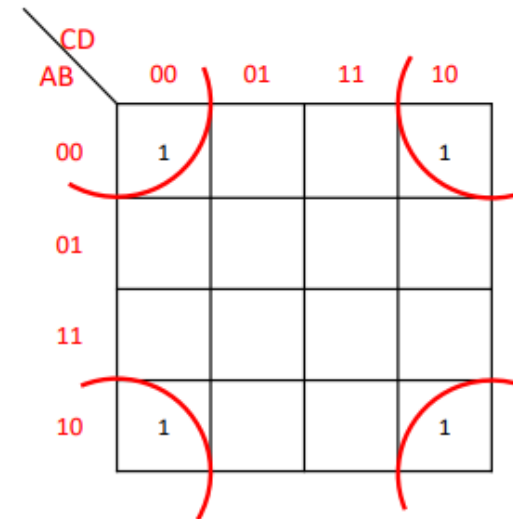
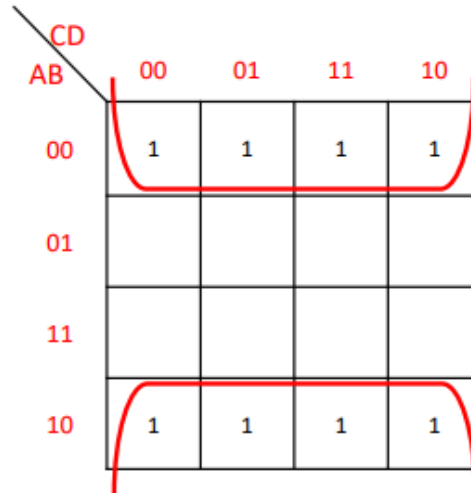
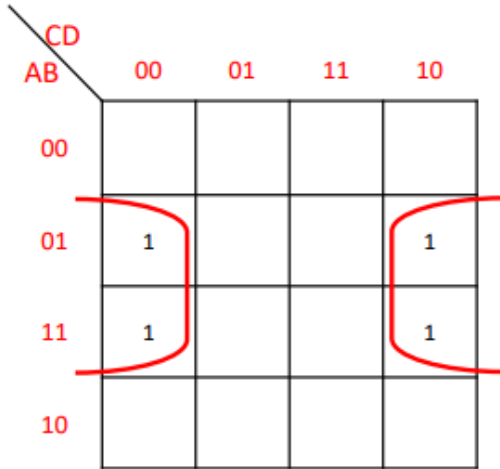
- f1** (Group 1): A vertical group of 1s in the column where CD = 01, specifically for AB = 01 and AB = 11. This group is labeled f1 with an arrow.
- f2** (Group 2): A horizontal group of 1s in the row where AB = 11, specifically for CD = 01 and CD = 11. This group is labeled f2 with an arrow.
- f3** (Group 3): A horizontal group of 1s in the row where AB = 11, specifically for CD = 11 and CD = 10. This group is labeled f3 with an arrow.

- ✓ f1 grubunda $B = 1, C = 0, D = 0$ olarak sabit kalmaktadır. Bu durumda $f1 = B\bar{C}\bar{D}$ olur.
- ✓ f2 grubunda $A = 1, B = 1$ olarak sabit kalmaktadır. Bu durumda $f2 = AB$ olur.
- ✓ f3 grubunda $A = 1, C = 1$ olarak sabit kalmaktadır. Bu durumda $f3 = AC$ olur.

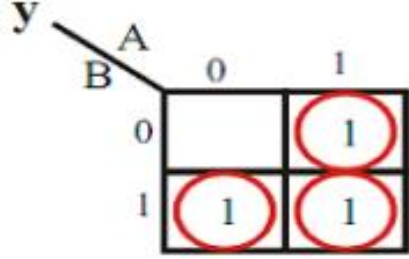
Sadeleştirme işlemi sonucunda $Q = f1 + f2 + f3 = B\bar{C}\bar{D} + AB + AC$ elde edilir.

Karnaugh Haritaları

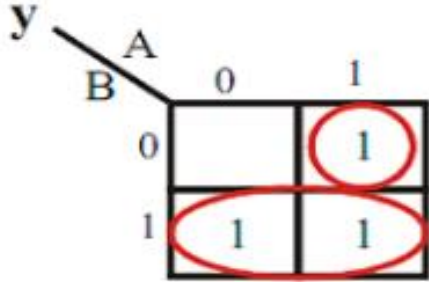
- Karnoda çapraz gruptama yapılamaz.
- Gruplama yapılırken birbirine yakın olan tüm 1'ler gruba dahil edilmelidir.
- Bir grupta ne kadar çok 1 olursa o kadar sade bir tanım elde edilir.
- Ayrıca şekilde görüldüğü gibi en dış kısımda bulunan 1'ler gruba alınabilirler.



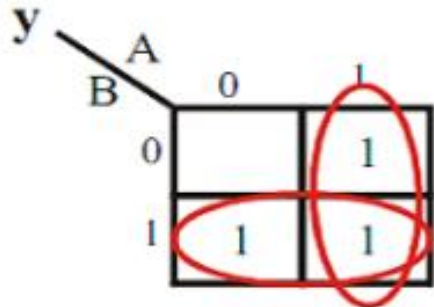
Karnaugh Haritaları – Örnek Gruplamalar



- Bu YANLIŞ bir gruplamadır.
- Çünkü en büyük grup oluşturacak şekilde gruplama yapılmamıştır.
- Üç ayrı grup yapılarak çıkış ifadesi gereksiz yere uzatılmıştır.

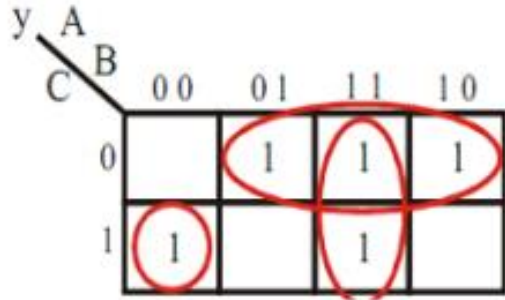


- Bu da yukarıdakine göre biraz daha doğru olsa da YANLIŞ bir gruplamadır.
- Grup yapılabiliyorsa tek başına 1 bırakılmamalıydı.

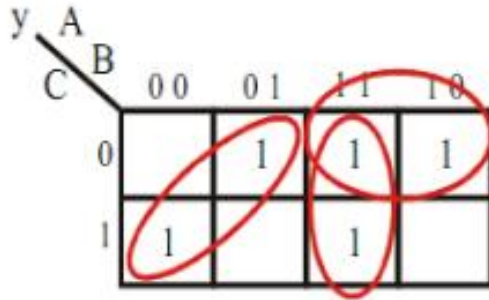


- Bu DOĞRU bir gruplamadır.
- Hiçbir "1" açıkta kalmamıştır.
- En büyük sayıdaki gruplar alınmıştır.
- AB (11) hücrendeki 1 her iki gruba da dâhil edilebilir.

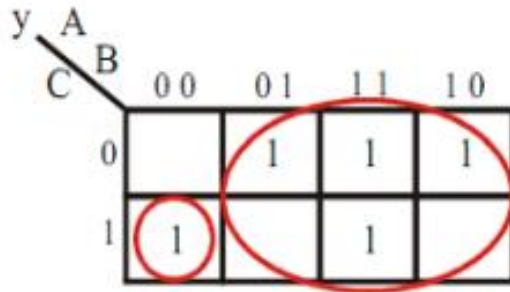
Karnaugh Haritaları – Örnek Gruplamalar



- Bu YANLIŞ bir gruplamadır.
- Çünkü 3 adet “1” ile gruplama yapılamaz.
- Grup sayısı 1, 2, 4, 8.... olmalıdır.

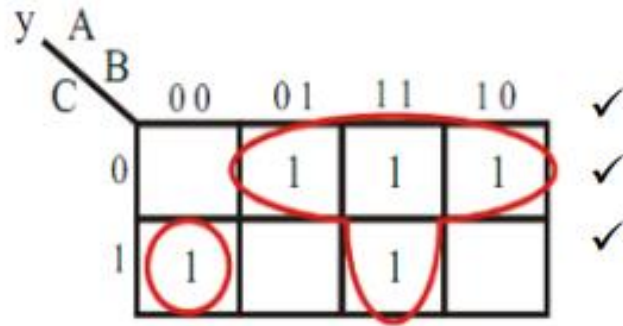


- Bu YANLIŞ bir gruplamadır.
- Çünkü çapraz grup yapılamaz.

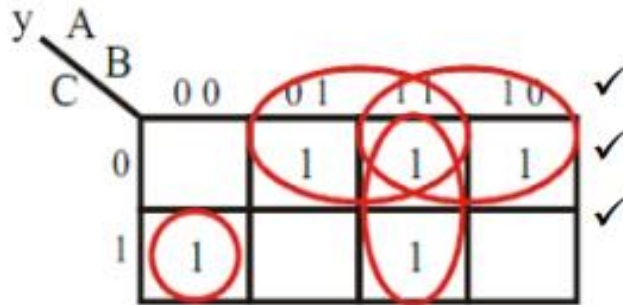


- Bu YANLIŞ bir gruplamadır.
- Boş kutular gruba dâhil edilemez.

Karnaugh Haritaları – Örnek Gruplamalar

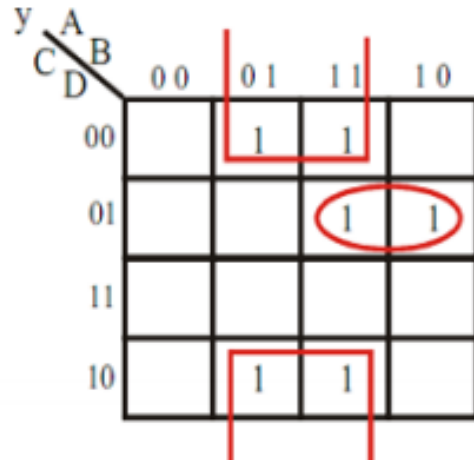


- Bu YANLIŞ bir gruptur.
- Çünkü grup içinde hem alt alta hem yan yana “1” olamaz.
- Grup ya yan yana ya alt alta olmalıdır.



- Bu DOĞRU bir gruptur.
- Burada 4 adet grup bulunmaktadır
- Karno haritasında en yukardan en aşağıya veya en sağdan en sola geçiş vardır.

Karnaugh Haritaları – Örnek Gruplamalar



- Bu DOĞRU bir gruplamadır.
- Burada dörtlü ve ikili olmak üzere 2 adet grup vardır.
- Ucu açık olan çizgiler birleşerek dörtlü grubu oluşturmaktadır.

Karnaugh Haritaları – Örnek Gruplamalar

y A C D		B			
		00	01	11	10
00					
01			1	1	
11			1	1	
10			1	1	

- Bu YANLIŞ bir gruptur.
- Çünkü altılı grup yapılamaz.

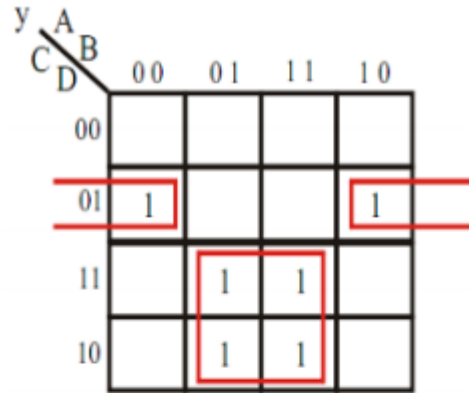
y A C D		B			
		00	01	11	10
00					
01			1	1	
11			1	1	
10			1	1	

- Bu YANLIŞ bir gruptur.
- Aslında yanlışta daha çok eksik bir gruptur.
- Dörtlü iki grup yapılabilirdi.

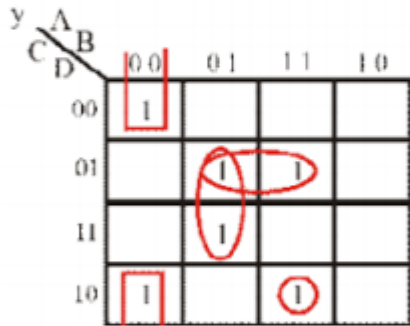
y C D		A B			
		00	01	11	10
00					
01			1	1	
11			1	1	
10			1	1	

- Bu DOĞRU bir gruptur.
- Kare içinde ve daire içinde olmak üzere 2 adet dörtlü grup vardır.

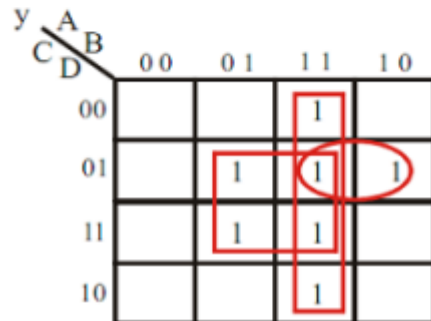
Karnaugh Haritaları – Örnek Gruplamalar



- Bu DOĞRU bir gruptur.
- Burada biri ikili biri dördü olmak üzere 2 adet grup vardır.
- Ucu açık olan çizgiler içinde ikili grup bulunmaktadır.



- Bu DOĞRU bir gruptur.



- Bu DOĞRU bir gruptur.