# İspatlar (Proofs)

- Bir matematik sistemi
  - Tanımlanmamış terimler (Undefined terms)
  - Tanımlar (Definitions)
  - Aksiyomlar (Axioms)

# Tanımlanmamış Terimler (Undefined Terms)

- □ Tanımlanmamış terimler bir matematik sisteminin temel taşını oluşturur. Bu terimler bir matematiksel sistemin başlangıç kavramları olarak da kabul edilebilir.
  - Örnek: Euclidean geometride tanımlanmamış terimler
    - Nokta (Point)
    - □ Doğru (Line)

# Tanımlar (Definitions)

□ Tanım (definition), yeni bir kavram yaratmak amacıyla önceden kabul edilmiş kavramlar ve tanımlanmamış terimlerden bir proposition oluşturmaktır

Örnek: Euclidean geometrideki tanımlar:

- Eğer iki üçgenin karşılıklı kenarları ve açıları birbirinin aynı ise bu iki üçgen eş üçgendir
- İki açının toplamı 180 derece ise bu açılara birbirini tamamlayan açılar denir

# Aksiyomlar (Axioms)

- Aksiyom (axiom), matematiksel bir sistem içerisinde ispat yapmaksızın doğru kabul edilen proposition'dır
- Matematikteki aksiyomlara örnek:
  - Örnek: Euclidean geometrideki aksiyomlar
    - □ İki nokta verilmiş olsun. Bu noktalardan geçen bir doğru her zaman mevcuttur.
    - □ Bir doğru ve doğru üzerinde yer almayan bir nokta mevcut olsun. Bu noktadan geçen doğruların bir tanesi verilen doğruya mutlaka paraleldir.

# Teoremler (Theorems)

□ Teorem, Önceden ispatlanmış teoremleri, aksiyomları, tanımlamaları kullanarak ve p nin doğru olduğunu farzederek doğruluğu önerilebilen p → q formundaki proposition'a denir

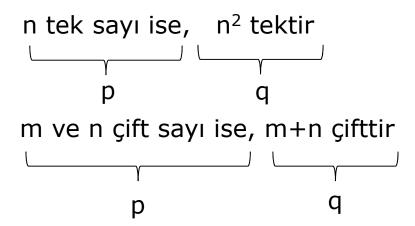
# İspat Çeşitleri

- □ *İspat (proof)*, Teoremin doğruluğunu belirlemek için önermeleri kullanan bir seri işlemden oluşan mantıksal çıkarımdır
- $\square$  Doğrudan ispat (Direct proof): p  $\rightarrow$  q
  - q önermesinin doğruluğunu elde etmek amacıyla ispatlanmış teoremleri, aksiyomları ve p önermesinin doğruluğunu kabul ederek çözüme ulaşmadır
- □ Dolaylı/Olmayana Ergi ispat (Indirect proof): (~q)→(~p)
  - p→ q önermesinin çelişkisinden çözüme ulaşmaktır

## Doğrudan İspat

 $p \rightarrow q$  durumunda kullanılır.

p'nin doğru olduğu kabul edilerek, çıkarım kuralları kullanılarak, q'nun da doğru olduğu gösterilir.



Not : p önermesi n, m gibi sade eşitlikler olmalıdır. n², m+n gibi durumlarda doğrudan ispat yapılmaz.

#### **Adımlar:**

- 1.  $p \rightarrow q$  için p doğru kabul edilir
- 2. q önermesinin doğruluğu gösterilmeye çalışılır
- 3. p  $\rightarrow$  q nun doğruluğu söylenir

## Örnek

n çift sayı ise n² de çift sayıdır önermesini ispat ediniz.

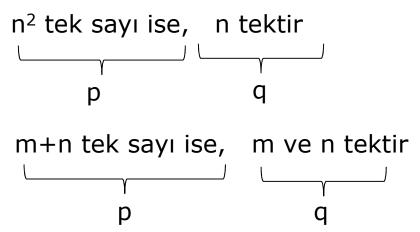
- 1. n=2k,  $k \in Z$  doğru kabul edilir
- 2.  $n^2=4k^2=2(2k^2)$
- $P \in Z$ ,  $p=2k^2$  için,  $n^2=2p$  olur
- 3. n²=2p bir çift sayı formunda olduğundan n² de çift sayıdır

Not: m+n çift sayı ise, m ve n çift sayıdır önermesi doğrudan ispat yöntemi ile ispat edilemez

## Dolaylı İspat / Olmayan Ergi / Indirect İspat

p → q durumlarında doğrudan ispat ile ispatın mümkün olmadığı durumlarda dolaylı ispat kullanılır

### Örnek



Bir önermenin p $\rightarrow$ q karşıt tersi (contrapositive) karşılığı bulunur ve bu karşılık doğrudan ispat ile elde edilir

 $p \rightarrow q$  için 'contrapositive'  $q' \rightarrow p'$  alınır ve doğrudan ispat yapılır

n² tek sayı ise n' de tek sayıdır önermesini ispat ediniz.

p: n² tek sayıdır p': n² çift sayıdır q: n tek sayıdır q': n çift sayıdır

Önermenin yeni hali: 'n çift sayı ise n² çift sayıdır'

Yeni önermeyi doğrudan ispat ile ispatlayalım

- 1. n çift sayı ise n² çift sayıdır
- 2. n=2k, k ∈ Z doğru kabul edilir
- 3.  $n^2=(2k)^2=4k^2$  $u \in Z$ ,  $u=2k^2$  için,  $n^2=4k^2=2*2k^2=2u$  olur

Karşıt tersi doğru olunca, kendisi de doğrudur. n² tek sayı ise n' de tek sayıdır

n bir tam sayı ve 3n+2 tek ise, n'nin tek olduğunu ispatlayınız

Önce doğrudan ispat yapalım:

3n+2 tek sayı ise, her hangi bir k tam sayısı için 3n+2=2k+1

3n+2 = 2k+1

3n+1 = 2k olduğunu görüyoruz, fakat n değerinin tek olduğunu gösteremeyiz

Şimdi de dolaylı ispat yapalım:

n çift ise, 3n+2' de çift sayıdır

Her hangi bir k tam sayısı çift n= 2k ise 3n+2 = 3(2k)+2 çift sayıdır

3n+2=6k+2=2(3k+1) olur, bu da bize 3n+2'nin çift sayı olduğunu söyler

Koşullu önermenin sonucunun negatifi, hipotezin yanlış olduğunu gerektirdiği için orijinal koşullu önerme doğrudur

# Matematiksel sonuç çıkarma (Tümevarımsal ispat / Mathematical induction)

- □ ∀ n ∈ A, S(n) formundaki ifadenin ispatına bakalım
  - \* N, pozitif tamsayılar veya doğal sayılardan oluşan bir küme
  - \* A, N'nin bir alt kümesi
  - \* S(n) de bir önerme olsun

Genel olarak özdeşliklerin ispatında kullanılır

- Her pozitif tamsayının, S(n) önermesini doğru veya yanlış yaptığını farzedelim
  - 1. S(1) doğru olduğunu teyit et (ilk eleman ile)
  - 2. n keyfi seçilmiş pozitif bir tamsayı olsun
     i pozitif bir tamsayı olup, i < n olarak belirle</li>
  - 3. S(i) 'nin doğruluğundan yola çıkarak, S(i+1)'in doğru olduğunu göster

$$S(i) \rightarrow S(i+1)$$

 4. Sonuç olarak, tüm pozitif tamsayılar için S(n) doğrudur

# Matematiksel sonuç çıkarım: terminoloji

- □ Temel adım (basis step):
  - S(1) 'in doğruluğunun gösterilmesi
- □ Tümevarımsal adım (Inductive step):

S(i)'nin doğru farzedilmesi

 $ispat S(i) \rightarrow S(i+1)$ 

if S(i) is true, for all i<n+1, then S(n+1) is true

□ Sonuç (Conclusion):

Bütün pozitif tamsayılar için S(n)'nin doğruluğu

İlk n adet pozitif tamsayının toplamı Sn olup, Sn =1+2+3+...+n olarak gösterilsin.

Sn'nin n=1,2,3... için  $\mathbf{Sn} = \frac{n(n+1)}{2}$  olduğunu ispatlayınız.

1. 
$$n=1$$
 için,  $1=1(1+1)/2=1$  (doğru)

2. n=2 için, 1+2 = (2\*3)/2=3 (doğru)  
n=k için, 1+2+3+...+k = 
$$\frac{k(k+1)}{2}$$
 (doğru kabul edilir)

3. n=k+1 için,

$$1+2+3+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ Doğrudur}$$

İlk **n** adet pozitif tek sayının toplamı **n**<sup>2</sup> olduğunu ispatlayınız.

$$S_n=1+3+5+...=n^2$$

1.  $n=1$  için,  $1=1^2=1$  (doğru)

2.  $n=2$  için,  $1+3=2^2=4$  (doğru)

 $n=k$  için,  $1+3+5+...+(2k-1)=k^2$  (doğru kabul edilir)

3.  $n=k+1$  için,
$$1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

$$k^2 + (2k+1) = k^2 + 2k + 1$$
 Doğrudur

**n** pozitif tamsayı iken (n³-n)'nin 3'e tam olarak bölünebildiğini ispatlayınız.

$$S_n = (n^3-n) / 3 = mod((n^3-n),3) = 0$$

1.  $n=1$  için,  $1^3 - 1=0$  ( $0/3 = 0$  doğru)

1.  $n=2$  için,  $(8-2)/3 = 6/3 = 2$  (tam bölünüyor)

 $n=k$  için,  $(k^3-k) / 3$  (tam olarak bölündüğü kabul edilir)

3.  $n=k+1$  için,

 $(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1)$ 
 $= (k^3 + 3k^2 + 3k - k + 1 - 1)$ 
 $= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) = (k^3 - k) + (3k^2 + 3k)$ 
 $= (k^3 - k) + 3(k^2 + k)$ 

Her ikisi de 3'e bölünebiliyorsa Doğrudur