Cours EDP pour la finance: Différences finies

présentée par :

Mohamed Hedi Riahi

Unité pédagogique: Mathématiques

Partie 3: Schéma implicite

Plan

1. Introduction.
2. Schéma implicite.
3. Erreur de troncature, consistance, orde de schéma, stabilité.

Plan

1. Introduction
2. Schéma implicite
3. Erreur de troncature, consistance, orde de schéma, stabilité

Introduction

Notre équation source: l'équation de la chaleur:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x,t) \quad \text{sur} \quad [0,T] \times [a,b] \\ U(t=0,x) = U_0(x) \quad \text{dans} \quad [a,b] \\ U(t,x=a) = \alpha, U(t,x=b) = \beta \quad \forall t \in [a,b]. \end{cases}$$

Objectifs

- Appliquer le schéma d'Euler implicite sur l'équation de la chaleur.
- Etudier la consistance de ce schéma.
- Déterminer l'ordre de schéma
- Etudier la stabilité de ce schéma.

Discrétisation de domaine temporelle et spatiale

1. Notre interavlle de temps est $[0, T]$:
   - on note Δt le pas de temps.
   - on note N le nombre de sous intervalle de $[0, T]$.
   - on note $t_0 = 0$, $t_1 = t_0 + \Delta t$, ..., $t_i = t_0 + i\Delta t$,..., $t_N = T$
2. Notre interavlle d'espace est $[a, b]$:
   - on note Δx le pas de temps.
   - on note M le nombre de sous intervalle de $[a, b]$.
   - on note $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + \Delta x$, ..., $x_j = x_0 + j\Delta x$,..., $x_N = b$
3. On a les points suivants (t_i, x_j) avec $i = 0, ..., N$ et $j = 0, ..., M$.
4. On note $U(t_i, x_j) = U_{i,j}$.

Plan

1. Introduction
2. Schéma implicite
3. Erreur de troncature, consistance, orde de schéma, stabilité

C'est plus compliquer que le schéma explicite.

On utilise la différence rétrograde pour approximer $\dfrac{\partial U}{\partial t}(t_i, x_j)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t_i, x_j) = \frac{U(t_i, x_j) - U(t_i - \Delta t, x_j)}{\Delta t} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta t}$$
$$\forall i \in \{1, ..., N\} \quad \text{et} \quad \forall j \in \{0, ..., M\}$$

On utilise la différence centrée pour approximer $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t_i, x_j)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t_i, x_j) = \frac{U(t_i, x_j + \Delta x) - 2U(t_i, x_j) + U(t_i, x_j - \Delta x)}{\Delta x^2}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t_i, x_j) = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta x^2}$$
$$\forall i \in \{0, ..., N\} \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, ..., M-1\}$$

La discrétisation de EDP par Schéma implicite

Terme source

$$f(t_i, x_j) = f_{i,j}$$
$$\forall i \in \{0, ..., N\} \quad \text{et} \quad \forall j \in \{0, ..., M\}$$

Equation discrétisée

$$\forall i \in \{1, ..., N\} \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, ..., M-1\}$$
$$\frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta t} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta x^2} = f_{i,j}$$

Ou encore

Equation discrétisée

$$\forall i \in \{0, ..., N-1\} \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, ..., M-1\}$$
$$\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta t} - \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} = f_{i+1,j}$$

Equation discrétisée

$$\forall i \in \{0, ..., N-1\} \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, ..., M-1\}$$
$$\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta t} - \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} = f_{i+1,j}$$

condition initiale

$$\forall j \in \{1, ..., M\} \quad U(t = 0, x_j) = U_{0,j}$$

condition aux limites

$$\forall i \in \{0, ..., N\} \quad U(t_i, x = a) = U_{i,0} = \alpha \quad \text{et} \quad U(t_i, x = b) = U_{i,M} = \beta$$

Schéma implicite

Equation discrétisée

Pour tout $0 \leq i \leq N-1$

$$U_{i+1,1} = U_{i,1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(U_{i+1,2} - 2U_{i+1,1}) + \Delta t(\frac{\alpha}{\Delta x^2} + f_{i+1,1})$$
$$U_{i+1,j} = U_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1}) + \Delta t f_{i+1,j} \text{ avec } 2 \leq j \leq M-2$$
$$U_{i+1,M-1} = U_{i,M-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(-2U_{i+1,M-1} + U_{i+1,M-2}) + \Delta t(\frac{\beta}{\Delta x^2} + f_{i+1,M-1})$$

- La connaissance de $U_{i,j}$ pour tout $1 \leq j \leq M-1$ entraîne celle de $U_{i+1,j+1}$, $U_{i+1,j}$ et $U_{i+1,j-1}$ pour tout $1 \leq j \leq M-1$.

Schéma explicite

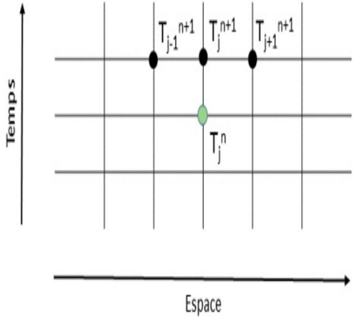

Figure : Schéma explicite

Forme matricielle de l'EDP

- Posons $U^{(i)}$ et F^i deux vecteurs de $\mathbb{R}^{M-1}$.
- Posons A une matrice carrée tridiagonale de taille $M-1$.

$$\mathbf{U}^{(i)} = \begin{pmatrix} U_{i,1} \\ U_{i,2} \\ . \\ . \\ . \\ U_{i,M-1} \end{pmatrix} . \; \mathbf{F}^{(i)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{\Delta x^2} + f_{i,1} \\ f_{i,2} \\ . \\ . \\ . \\ f_{i,M-2} \\ \dfrac{\beta}{\Delta x^2} + f_{i,M-1} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & . & . & . & & & & \\ & & & . & . & . & & & \\ & & & & . & . & . & & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Forme matricielle de l'EDP

$$(I_{M-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A) U^{(i+1)} = U^{(i)} + \Delta t F^{(i+1)}.$$

- Ce schéma est dit implicite car $U^{(i+1)}$ vérifie une équation en $U^{(i)}$.
- Déterminer $U^{(i+1)}$ revient à résoudre un système linéaire.

$$U^{(i+1)} = (I_{M-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A)^{-1} (U^{(i)} + \Delta t F^{(i+1)}).$$

Plan

1. Introduction
2. Schéma implicite
3. Erreur de troncature, consistance, orde de schéma, stabilité

Proposition

1. le schéma implicite est consistant:
    - d'ordre 1 en temps.
    - d'ordre 2 en espace.
2. Il est inconditionnellement stable càd stable pour tout couple $(\Delta t, \Delta x)$.
3. Le schéma implicite est convergente.

Erreur de troncature, consistance, orde de schéma

Démonstration: consistant

- On suppose que $f \equiv 0$
- On a l'erreur de troncature $\forall 1 \leq i \leq N-1$, $\forall 1 \leq j \leq M-1$

$$\varepsilon_{i,j}(N,M) = \frac{U(t_{i+1},x_j) - U(t_i,x_j)}{\Delta t} - \frac{U(t_{i+1},x_{j+1}) - 2U(t_{i+1},x_j) + U(t_{i+1},x_{j-1})}{\Delta x^2}$$

- Pour calculer cette erreur de troncature, on exprime toutes les quantités en fonction de $U_{i,j}$ et $U_{i+1,j}$ en effectuant des développement en série de Taylor au voisinage du point et (t_{i+1},x_j):

1. $U_{i,j} = U_{i+1,j} - \Delta t \dfrac{\partial U}{\partial t}(t_{i+1},x_j) + \dfrac{(\Delta t)^2}{2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t_{i+1},x_j) + O(\Delta t^3).$
2. $U_{i+1,j+1} = U_{i+1,j} + \Delta x \dfrac{\partial U}{\partial x}(t_{i+1},x_j) + \dfrac{(\Delta x)^2}{2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t_{i+1},x_j) + \dfrac{(\Delta x)^3}{6}\dfrac{\partial^3 U}{\partial x^3}(t_{i+1},x_j) + \dfrac{(\Delta x)^4}{4!}\dfrac{\partial^4 U}{\partial x^4}(t_{i+1},x_j) + O(\Delta x^5).$
3. $U_{i+1,j-1} = U_{i+1,j} - \Delta x \dfrac{\partial U}{\partial x}(t_{i+1},x_j) + \dfrac{(\Delta x)^2}{2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t_{i+1},x_j) - \dfrac{(\Delta x)^3}{6}\dfrac{\partial^3 U}{\partial x^3}(t_{i+1},x_j) + \dfrac{(\Delta x)^4}{4!}\dfrac{\partial^4 U}{\partial x^4}(t_{i+1},x_j) + O(\Delta x^5).$

Erreur de troncature, consistance, orde de schéma

Suite de démonstration

- En reportant ces développements dans l'erreur de troncature , il vient:
$\varepsilon_{i,j}(N,M) = \frac{\partial U}{\partial t}(t_{i+1},x_j) - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t_{i+1},x_j) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t_{i+1},x_j) - \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(t_{i+1},x_j)$
- On utilise ensuite le fait que U vérifie l'équation exacte au point (t_i, x_j):
$\frac{\partial U}{\partial t}(t_{i+1},x_j) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t_{i+1},x_j) = 0$
- L'expression de l'erreur de troncature locale du schéma explicite:
$\varepsilon_{i,j}(N,M) = -\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t_{i+1},x_j) - \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(t_{i+1},x_j)$
- Cette erreur de troncature tends bien vers zéro, lorsque Δt et Δx tendent vers zéro indépendamment.
- Le schéma implicite est donc consistant à l'équation de la chaleur.

Suite de démonstration

- L'expression de l'erreur de troncature locale du schéma implicite: $\varepsilon_{i,j}(N,M) = -\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t_{i+1},x_j) - \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(t_{i+1},x_j)$
- On a U est suffisament régulier donc : $\varepsilon(M,N) = \max_{0\leq i\leq N-1}\ _{1\leq j\leq M}|\varepsilon_{i,j}| = \max_{0\leq i\leq N-1}\ _{1\leq j\leq M}| -\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t_{i+1},x_j) - \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(t_{i+1},x_j)|$.
- Après majoration on a $\varepsilon(M,N) \leq C_1\frac{\Delta t}{2} + C_2\frac{(\Delta x)^2}{12}$.
- $C_1 = \max_{1\leq i\leq N}\ _{1\leq j\leq M}|\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t_{i+1},x_j)|$.
- $C_2 = \max_{1\leq i\leq N}\ _{1\leq j\leq M}|\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(t_{i+1},x_j)|$.
- le schéma implicite est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

Erreur de troncature, consistance, orde de schéma

Idée de la preuve

- la stabilité est lié au spectre $(I_{M-1} + \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} A)^{-1}$ donc à celui de $(I_{M-1} + \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} A)$:
  - Les valeurs propre de $(I_{M-1} + \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} A)^{-1}$ sont:

$$\lambda_j = \frac{1}{1 + 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(1 - \cos(\frac{j\pi}{M}))}, \ 1 \leq j \leq M-1.$$

  - On a $1 - \cos(\frac{j\pi}{M}) > 0$ pour $1 \leq j \leq M-1$.
  - On déduit que $\lambda_j < 1$ pour $1 \leq j \leq M-1$.
  - Alors on a $\rho(I_{M-1} + \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} A)^{-1} < 1$
- D'où la stabilité.

Remarques

1. L'avantage par rapport au schéma explicite est le côté **inconditionnellement stable** , ce qui évite une condition sur Δx par rapport à Δt .
2. Inconvénient: Par contre il y a un système linéaire à résoudre.
3. Comme la matrice est tridiagonale cette résolution n'est pas très coûteuse : $O(M)$ en nombre d'opérations élémentaires avec une décomposition LU faite au début.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION