

Giriş

1-) Proje Amacı:

Bu çalışmada bir üçgenin diklik merkezi ve çemberler ile ilgili ilginç özellikler bulmayı ve bu yolla bilime katkı yapmayı amaçladık. Daha önceki ödül alan projelere baktığımızda üçgenin diklik merkezi ile ilgili bir çalışmanın olmadığını gördük ve çalışmalarımıza başladık.

2-) Proje Yöntemi

Bu çalışmada herhangi bir ABC üçgenindeki diklik merkezinin, farklı üçgenlerin çevrel çemberleri ile bağıntıları incelenmiştir. Ayrıca yeni noktalar tanımlanıp bu noktaların bulduğumuz özelliklerdeki yeri incelenmiştir. Kağıt üstünde bulunan ilk çalışmalarımızı daha sonra çeşitli çizim programlarına aktararak tekrar ispatladık. Aşağıdaki özelliklerden bazılarının farklı ispatları da yapılmıştır.

3-) Proje Bulguları

a-) Nokta Tanımları:

- ABC üçgeninde H diklik merkezi,
- A_1, B_1, C_1 sırasıyla A,B,C den inilen diklik ayakları,
- V, [AH] çaplı çember ile BHC üçgeninin çevrel çemberinin kesişim noktası,
- K, [AH] çaplı çember ile ABC üçgeninin çevrel çemberinin kesişim noktası,
- AV doğrusunun [BC]'yi kestiği nokta M olsun.

b-) Bulduğumuz Özellikler:

Özellik-1: AK, VH, BC ve B_1C_1 doğruları bir K noktasında kesişir.

İspatı: Başlangıçta herhangi 3 çemberin kuvvet doğrularının aynı noktada kesiştiğini ispatlayalım. Herhangi U_1, U_2, U_3 çemberlerini ele alalım. Kuvvet doğrusunun tanımından dolayı U_1, U_2 ve U_1, U_3 çemberlerinin kuvvet doğrularını aldığımızda bu iki doğrunun kesişim noktasının U_2 ve U_3 çemberlerine kuvveti eşittir. Öyle ise kesişim noktası U_2 ve U_3 çemberlerinin kuvvet doğrusu üzerindedir.

Şimdi ise üç çemberin ikişerli kuvvet doğrularının aynı noktada kesiştiği bilgisini kullanarak özellik-1'i ispatlayacağız. [AH] çaplı çemberi, ABC'nin çevrel çemberi ve B, C, B_1, C_1 noktalarından geçen ($BC_1C = BB_1C = 90^\circ$ olduğundan B_1, C_1, B, C noktaları

çemberseldir) çemberi alalım. Bu çemberlerin ikişerli kuvvet doğruları AK, B_1C_1 , BC dir. Yani, bu 3 doğru aynı noktada kesişir.

V,H,B,C den geçen çemberi [AH] çaplı çemberi ve ABC'nin çevrel çemberini alalım. İkişerli kuvvet doğruları VH, BC, AK doğruları bir noktada kesişir. Sonuç olarak BC, B_1C_1 , AK, VH doğruları bir noktada kesişir. Bu noktaya X noktası diyelim.

Özellik-2: AV doğrusunun [BC] kenarını kestiği nokta M olmak üzere M, H, K doğrusaldır.

İspatı: $XVA=AA_1X=90^\circ$ olduğu için AMX üçgeninde H noktası diklik merkezidir. $AKH=90^\circ$ ve MH da diklik merkezinden geçtiği için AX'i dik keser. Aynı zamanda K noktasında keser. Yani M,H,K noktaları doğrusaldır.

Özellik-3: M noktası, aynı zamanda [BC] kenarının orta noktasıdır.

İspatı: $BVM=ABC$, $CVM=ACB$ olduğunu gösterelim. B,H,V,C noktaları çembersel olduğundan dolayı $BVM=XVM-BVX=90^\circ-HCB=ABC$, $BHC=ABC+ACB=BVC=BVM+MVC=ABC+MVC$. Yani, $ACB=MVC$ dir. AV doğrusunun ABC'nin çevrel çemberini kestiği nokta L olsun. $VLB=ACB$, $VLC=ABC$ olduğundan BVCL paralelkenardır. M ise köşegenlerin kesişim noktasıdır. [BC] köşegen olduğundan $|MB|=|MC|$ dir.

Özellik-4: (A,A₁), (B,B₁), (C,C₁), (V,X) ve (K,M) kümelerinden herhangi ikisinin oluşturduğu noktalar çemberseldir.

İspatı: Bu özelliğin ispatında B ve C noktaları simetrik noktalar olduğu için B ve C noktaları için ayrı ayrı ispat yazmamıza gerek yoktur. (A,A₁) ve (B,B₁) çembersel olduğunu gösterelim. $AB_1B=AA_1B=90^\circ$ olduğundan A,A₁,B,B₁ noktaları çemberseldir. Benzer şekilde (A,A₁), (B,B₁), (C,C₁) kümelerinden ikisinin oluşturduğu noktalar çemberseldir.

A, A₁, V, X noktalarının çembersel olduğunu gösterelim. $AA_1X=XVA=90^\circ$ olduğundan A, A₁, V, X noktaları çemberseldir. B, B₁, V, X noktalarının çembersel olduğunu gösterelim. $XBB_1=XVB_1$ olduğunu gösterelim. $XVB_1=XVA+AVB_1=90^\circ+AVB_1=90^\circ+BHA_1=90^\circ+ACB$ dir. $XBB_1=180^\circ-HBC=90^\circ+ACB$ dir. Yani B, B₁, V, X çemberseldir. Benzer şekilde (A,A₁), (B,B₁), (C,C₁) kümelerinden bir tanesi ile (V,X) kümelerinin oluşturduğu noktalar çemberseldir.

A, A₁, K, M noktalarının çembersel olduğunu gösterelim. $AKM=AA_1M=90^\circ$ olduğundan bu 4 nokta çemberseldir. B, B₁, K, M noktalarının çembersel olduğunu gösterelim.

$B_1BM=B_1KM$ olduğunu gösterelim. $B_1BM=90^\circ-ACB$ ve $B_1KM=HAB_1=90^\circ-ACB$. Yani B, B_1 , K, M çemberseldir.

K, M, V, X çemberseldir. H, AXM'nin diklik merkezi olduğundan K ve V sırasıyla M ve X'den inilen diklik ayaklarıdır. $XVM=MKX=90^\circ$ olduğundan K, V, M, X çemberseldir.

Özellik-5: $[MB_1]$, $[MC_1]$ ışınları $[AH]$ çaplı çembere teğettir.

İspatı: M, $[BC]$ kenarının orta noktasıdır. B_1BC üçgeni dik üçgenidir. Bundan dolayı $MB_1B=90^\circ-ACB$ 'dir. A_1AC $90^\circ-ACB$ 'ye eşittir. O zaman MB_1 $[AH]$ çaplı çembere teğettir. Benzer şekilde MC_1 de $[AH]$ çaplı çembere teğettir.

Özellik-6: $IBVI / IVCI = IABI / IACI$

İspatı: $BVM=XVM-BVX=90^\circ-HCB=ABC$ (B, H, V, M çembersel olduğundan), $BHC=ABC+ACB=BVC=BVM+MVC=ABC+MVC$. Yani $ACB=MVC$ 'dir. VBM üçgeninde sinüs teoremini uyguladığımızda $|BM|/|BV| = \sin BVM / \sin VMB = \sin ABC / \sin VMB$ (1). VMC üçgeninde sinüs teoremini uyguladığımızda $|MC|/|VC| = \sin MVC / \sin VMC = \sin ACB / \sin VMB$ (2)

$|MB|=|MC|$ olduğundan (1) ve (2) den $|VB|/|VC| = \sin ACB / \sin ABC$. $\sin ACB / \sin ABC = |AB|/|AC|$ olduğundan $|VB|/|VC| = |AB|/|AC|$.

Özellik-7: KC_1 , B_1V , BC doğruları bir noktada kesişir

İspatı: K, C_1 , H, V, B_1 , A noktaları çembersel olduğu için Pascal teoremini uygulayabiliriz. Pascal teoremine göre KC_1 ve VB_1 doğrularının kesişim noktası, C_1H ve B_1A doğrularının kesişim noktası yani C, HV ve AK doğrularının kesişim noktası yani X noktaları doğrusaldır. Bundan dolayı KC_1 ve VB_1 doğrularının kesişim noktası CX doğrusu yani BC doğrusu üzerindedir.

Özellik-8: B_1K , VC_1 , BC doğruları bir noktada kesişir.

İspatı: B_1 , K, A, C_1 , V, H noktaları çembersel olduğu için Pascal teoremini uygulayabiliriz. Pascal teoremine göre B_1K ve C_1V doğrularının kesişim noktası, AK ve VH doğrularının kesişim noktası yani X, AC_1 ve HB_1 doğrularının kesişim noktası yani B noktaları doğrusaldır. Bundan dolayı B_1K ve C_1V doğrularının kesişim noktası XB doğrusu yani BC doğrusu üzerindedir.

4-)Sonuç ve Tartışma:

Bu çalışmada herhangi bir ABC üçgeninde diklik merkezi H olmak üzere AH çaplı çember ile ilgili özellikler bulunmuştur. Bulunan özelliklerden 8 tanesinin ispatı yapılmıştır.

Öneriler

Bu araştırma daha çok nokta tanımlanarak daha çok özellik bulunabilir. Özel üçgenler için denenerek daha ilginç özellikler bulunabilir.

5-)Kaynaklar

Bu alışmada Geometer's Skethcpad Dynamic Geometry Software for Exploring Mathematics v5.0 sürümünden yararlanılmıştır.