0 $\quad 1+x^2$

1.3. BELİRSİZLİKLER :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limiti hesaplanırken $f(x)$ fonksiyonunda x yerine a yazıldığında $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 durumları ile karşılaşılabilir. Bu durumların herbirine belirsizlik denir. Belirsizliğe sebep olan çarpan giderildikten sonra tekrar x yerine a yazılarak limit hesaplanır.

$\frac{0}{0}$ Belirsizliği :

ÖRNEK : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} = ?$

Çözüm : $x \to 2$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)} = \frac{2-1}{4+4+4} = \frac{1}{12}.$$

ÖRNEK : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3 - \sqrt{x+8}}{x^2 - 1} = ?$

Çözüm :

$$\lim_{x \to 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(3 - \sqrt{x+8})(3 + \sqrt{x+8})}{(x^2-1)(3 + \sqrt{x+8})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{9 - (x+8)}{(x^2-1)(3+\sqrt{x+8})} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(1-x)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(3+\sqrt{x+8})} = -\frac{1}{12}$$

$\infty - \infty$ Belirsizliği:

$\boxed{\text{ÖRNEK}}$: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x-1} - x\right) = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\sqrt{x-1} - x)(\sqrt{x-1} + x)}{\sqrt{x-1} + x}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x-1-x^2}{\sqrt{x-1}+x} = \lim \frac{x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1\right)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{\infty\,(0-0-1)}{\sqrt{0-0}+1} = -\infty$$

$\boxed{\text{ÖRNEK}}$: $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right] = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x \to 1} \left[\underset{(1+x+x^2)}{\dfrac{1}{1-x}} - \dfrac{3}{1-x^3}\right] = \lim \left[\dfrac{1+x+x^2}{1-x^3} - \dfrac{3}{1-x^3}\right]$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{1-x^3} = \lim_{x \to 1} \frac{(\cancel{x-1})(x+2)}{(\cancel{1-x})(1+x+x^2)} = -1$$

$0 \cdot \infty$ Belirsizliği:

$\boxed{\text{ÖRNEK}}$ $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \sin\dfrac{4}{x} = ?$

Çözüm: $\lim x \cdot \sin\dfrac{4}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \text{ olsun} \\ x \to \infty \text{ ise} \\ t \to 0 \text{ olur} \end{array} \right\}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin 4t}{t} = 4 \text{ dür.}$$

ÖRNEK: $\lim_{x \to 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} = ?$

Çözüm: $\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\frac{1}{\tan \frac{\pi x}{2}}} = \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\cot \frac{\pi x}{2}}$ $\left\{ \begin{matrix} 1-x=t \text{ olsun} \\ x\to 1 \Rightarrow t \to 0 \end{matrix} \right\}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t}{\cot \frac{\pi}{2}(1-t)} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t)} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\tan \frac{\pi}{2}t} = \frac{2}{\pi}$$

1^∞, 0^0, ∞^0 Belirsizlikleri

$y = [f(x)]^{g(x)}$ fonksiyonunun limiti hesaplanırken

$\ln y = \ln[f(x)]^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$

ifadesinde her iki tarafın limiti alınır. Bulunan limit degeri L ise $\lim [f(x)]^{g(x)} = e^L$ olur.

Not: Konuyla ilgili örneklere Türev konusunda yer verilecektir.

HATIRLATMA: $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \to a} g(x) = \mp\infty$ ise

$$\lim_{x \to a} (1+f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x))}$$ dir.

ÖRNEK: $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = ?$

Çözüm: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ ve $\lim_{x \to \infty} x = \infty$ old.

$$\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim(\frac{1}{x} \cdot x)} = e^1 = e$$ dir.

2. SÜREKLİLİK

TANIM 1 : $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu $x=a$ noktasında süreklidir denir. Eğer her $x \in A$ noktasında sürekli ise A kümesinde süreklidir denir.

Bu tanıma göre bir f fonksiyonunun bir $x=a$ noktasında sürekli olması için

(i) f fonksiyonu $x=a$ noktasında tanımlı olmalıdır.

(ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$, yani f nin $x=a$ noktasında limiti olmalıdır.

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olmalıdır.

TANIM 2 $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonu a noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

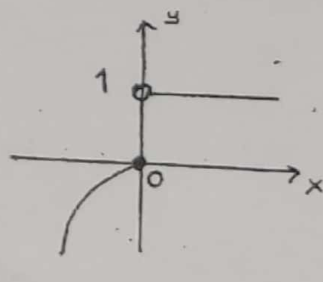
ÖRNEK: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ şeklinde tanımlanan sabit fonksiyon $\mathbb{R}$'de süreklidir.

ÖRNEK $\mathbb{R}$'de $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x<0 \text{ ise} \\ 0, & x=0 \text{ ise} \\ 1, & x>0 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x^2) = 0$

ve

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$



olacağından $x=0$ noktasında limit yoktur. Dolayısıyla fonk. bu noktada sürekli değildir.