3. BÖLÜM

İNTEGRAL

Diferensiyel Kavramı

$f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in A$ için türevlenebilir ise $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ dir. $df(x) = f'(x)dx$ ifadesine f fonksiyonunun $x \in A$ noktasındaki diferensiyeli denir. Buna göre $y = f(x)$ fonksiyonunun diferensiyeli $dy = f'(x)dx$ dir.

Örnek $y = x^3 + 2x + 5 \Rightarrow dy = (x^3 + 2x + 5)'dx$

$\Rightarrow dy = (3x^2 + 2)dx$

I - BELİRSİZ İNTEGRAL

Tanım $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ve $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ türevlenebilir iki fonksiyon olsun. Her $x \in (a,b)$ için $F'(x) = f(x)$ ise $F(x)$'e $f(x)$'in belirsiz integrali veya ilkeli denir. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$$

şeklinde gösterilir. Burada $f(x)$ fonksiyonuna integrand, c sayısına integrasyon sabiti ve dx'e integrasyon değişkeni denir.

$\int f(x)dx$ integralini hesaplamak demek türevi $f(x)$ olan fonksiyonu bulmak demektir.

Örnek $\int 2x dx = ?$

Çözüm: x^2 fonksiyonunun türevi $2x$ olduğundan

$\int 2x dx = x^2 + c$

dır.

Örnek $\int \cos x\, dx = ?$

Çözüm : $\sin x$ fonksiyonunun türevi $\cos x$ olduğundan

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

dir.

Şimdi belirsiz integrallere ait bazı özellikleri inceleyelim:

Özellik 1 Her $a \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$\int a . f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

dir. Yani integral içindeki sabit çarpan integralin dışına alınabilir.

Özellik 2 Sonlu sayıda terimlerin toplamından oluşan bir ifadenin integrali, bu terimlerin ayrı ayrı integrallerinin toplamına eşittir. Yani

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

dir. Özellik 1 ve 2 göz önüne alınırsa

$$\int [a . f(x) + b . g(x)]\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$$ olur.

Temel İntegral Formülleri

1) $\int a\, dx = ax + c$

2) $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ (n \neq -1)$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4) $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

5) $\int e^x\, dx = e^x + c$

6) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

7) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$

11) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\text{arccot}\, x + c$

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \mp a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \mp a^2}\right) + c$

13) $\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$

14) $\int \cosh x\, dx = \sinh x + c$

15) $\int \dfrac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c$

16) $\int \dfrac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + c$

17) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{arcsinh}\, x + c$

18) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{arccosh}\, x + c$

19) $\int \dfrac{dx}{x^2-1} = \text{arctanh}\, x = -\text{arccoth}\, x + c$

Örnek $\int (9x^2 + 4x - 3)\,dx = ?$

Çözüm : $\int (9x^2 + 4x - 3)\,dx = 9\int x^2 dx + 4\int x\,dx - 3\int dx$

$= 9\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x + C = 3x^3 + 2x^2 - 3x + C$

ÖRNEK $\int \left(3\sin x + 5\sqrt{x^3} + \frac{2}{x}\right)dx = ?$

Çözüm : $\int \left(3\sin x + 5\sqrt{x^3} + \frac{2}{x}\right)dx = 3\int \sin x\,dx + 5\int x^{\frac{3}{2}}dx + 2\int \frac{dx}{x}$

$= -3\cos x + 5\,\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2\ln|x| + C$

$= -3\cos x + 2x^{5/2} + 2\ln|x| + C$

Örnek $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)dx = ?$

Çözüm : $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}\right)dx$

$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C$

Örnek $\int x(x-1)^2 dx = ?$

Çözüm : $\int x(x-1)^2 dx = \int x(x^2 - 2x + 1)\,dx$

$= \int (x^3 - 2x^2 + x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

Örnek $I = \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - 2e^x + \frac{4}{1+x^2}\right)dx = ?$

Çözüm : $I = 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2\int e^x dx + 4\int \frac{dx}{1+x^2}$

$= 3\tan x - 2e^x + 4\arctan x + C$

$\boxed{\text{Örnek}}$ $\int \left(5 + 3\sin x + \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = ?$

Çözüm: $\int 5dx + 3\int \sin x . dx + 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= 5x - 3\cos x - 2\cot x - 3\arcsin x + c$

$\boxed{\text{Örnek}}$ $\int (x^3 + 3^x)\, dx = ?$

Çözüm: $\int x^3 dx + \int 3^x dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3^x}{\ln 3} + c$

$\boxed{\text{Örnek}}$ $\int \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x}}\, dx = ?$

Çözüm: $\int \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \int x^{5/2} dx + 2\int x^{-1/2} dx$

$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + 2\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{7} x^{7/2} + 4\sqrt{x} + c$

$\boxed{\text{Örnek}}$ $\int \tan^2 x\, dx = ?$

Çözüm: $\int \tan^2 x\, dx = \int [(\tan^2 x + 1) - 1]\, dx$

$= \int (\tan^2 x + 1) dx - 1.\int dx = \tan x - x + c$

İNTEGRAL ALMA METOTLARI

1) DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME METODU

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$ biçimindeki integralleri hesaplamak için $u = g(x)$ dönüşümü yapılır ve her iki tarafın diferensiyeli alınırsa $du = g'(x)dx$ elde edilir. Böylece

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

biçimine dönüşür. $\int f(u)du$ integrali hesaplandıktan sonra u yerine $g(x)$ yazılır.

Örnek $\int (x^2+1)^3 \cdot 2x\,dx = ?$

Çözüm: $u = x^2+1 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$\int (x^2+1)^3 \cdot 2x\,dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(x^2+1)^4}{4} + c$$

Örnek $\int \sqrt[5]{x^3-x+2} \cdot (3x^2-1)\,dx = ?$

Çözüm: $x^3-x+2 = u \Rightarrow (3x^2-1)dx = du$

$$\int \sqrt[5]{x^3-x+2} \cdot (3x^2-1)dx = \int \sqrt[5]{u} \cdot du$$

$$= \int u^{\frac{1}{5}} du = \frac{u^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + c$$

$$= \frac{5}{6}(x^3-x+2)^{\frac{6}{5}} + c$$

$*$ $\int \tan^2 x\,dx \neq \frac{\tan^3 x}{3} + c$

$*$ $\int \tan^2 x \cdot (1+\tan^2 x)dx = \int u^2 du$

$$= \frac{u^3}{3} = \frac{\tan^3 x}{3} + c$$

Örnek $\int \cos(x^3-x) \cdot (3x^2-1)dx = ?$

Çözüm: $x^3-x = u \Rightarrow (3x^2-1)dx = du$

$$\int \cos(x^3-x) \cdot (3x^2-1)dx = \int \cos u\,du = \sin u + c = \sin(x^3-x) + c$$

Örnek $\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx = ?$

Çözüm: $\sin x = u \Rightarrow \cos x\,dx = du$

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

2. yol: $\cos x = u \Rightarrow -\sin x\,dx = du$

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \cos x \sin x\,dx$$

$$= -\int (1-\cos^2 x) \cdot \cos x \sin x\,dx$$

$$= +\int (1-u^2) \cdot u \cdot du = \int (u-u^3)\,du = \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} + c$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - \frac{\cos^4 x}{4} + c$$