



2020-2021 BAHAR DÖNEMİ

**YMH214
SAYISAL ANALİZ
LAB. DERSİ**

13.DERS

Arş. Gör. Alev KAYA

**28.05.2021
SAAT:09:00-10:00**

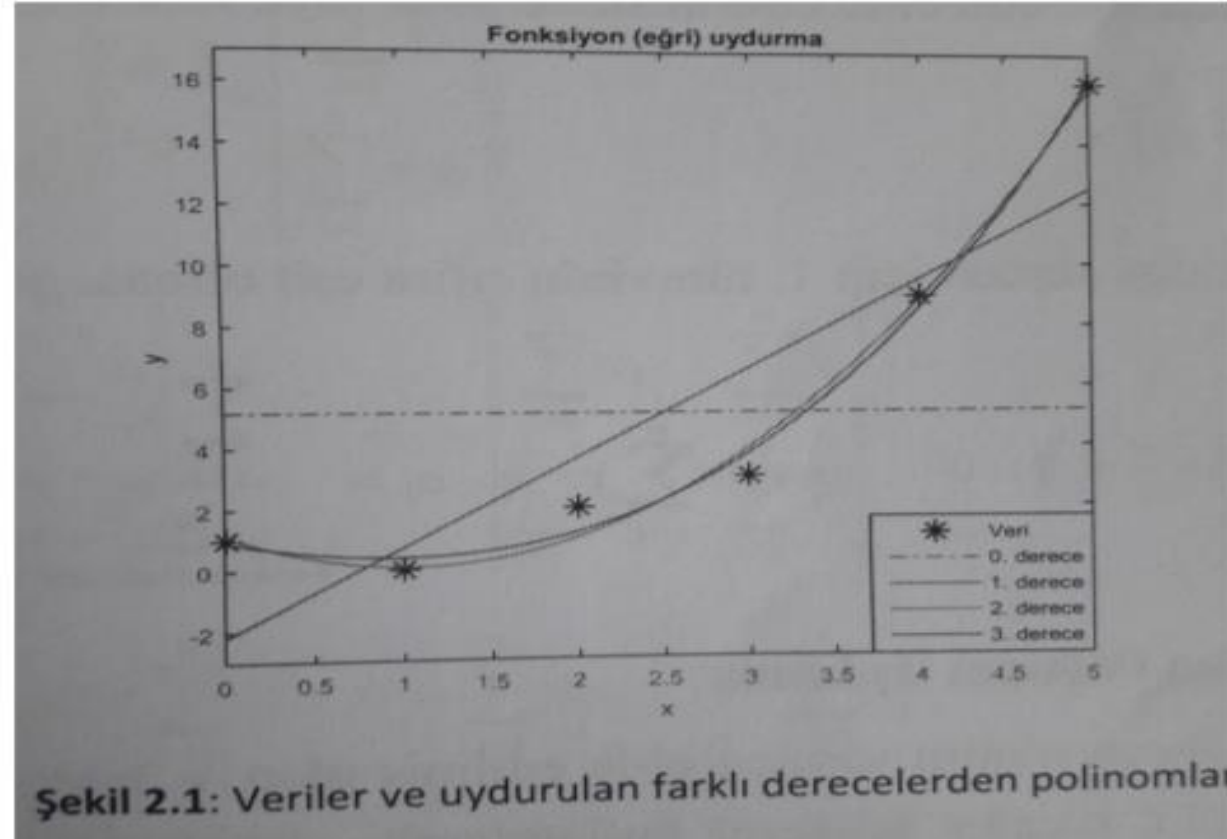


Eğri Uydurma

- ➡ **A-** En Küçük Kareler Regresyonu
- ➡ **B-** Doğrusal Olmayan Regresyon
- ➡ **LAB:** En Küçük Kareler Yöntemi Matlab örnek programı

Giriş

Uygulama veya bilim alanındaki deney ve gözlemlerden birçok veri elde edilmektedir. Bu verilerin, anlamlı fonksiyonlar şeklinde ifade edilmesi gerekmektedir. Bilinene değerlerden faydalanılarak fonksiyonun kendisini veya kendisine en yakın fonksiyonun belirlenmesi işlemi «*eğri uydurma*, *curve fitting*» olarak adlandırılır.



En Küçük Kareler Yöntemi (Least-Squares Method)

Bu yöntem, gerçek (ölçülen) değerler ile uydurulan yaklaşık fonksiyon değerleri arasındaki farkların kareleri toplamının minimum yapılması esasına dayanana eğri uydurma yöntemidir.

Eğer gerçek fonksiyon $y=f(x)$ ve uydurulan fonksiyon $z=g(x)$ ise, n tane nokta için fark fonksiyonunun minimum yapılmasıyla $z=g(x)$ fonksiyonunun katsayıları/parametreleri elde edilir.

$$H = \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f(x_i)]^2$$

Hatanın minimum olması, fark fonksiyonunun birinci türevinin sıfıra eşitlenmesi ile sağlanır.

Sıfırıncı Dereceden Polinom (Sabit) Uydurma

Elde edilmiş olan n tane (x_i, y_i) verisi için en küçük kareler yöntemi kullanılarak $g(x)=a_1$ şeklinde sıfırıncı dereceden (sabit) fonksiyonun elde edilmesinde hata veya fark fonksiyonu:

$$H(a_1) = \sum_{i=1}^n [a_1 - y_i]^2$$

şeklinde olup minimum olması için 1. türevinin sıfıra eşit olması gerekmektedir.

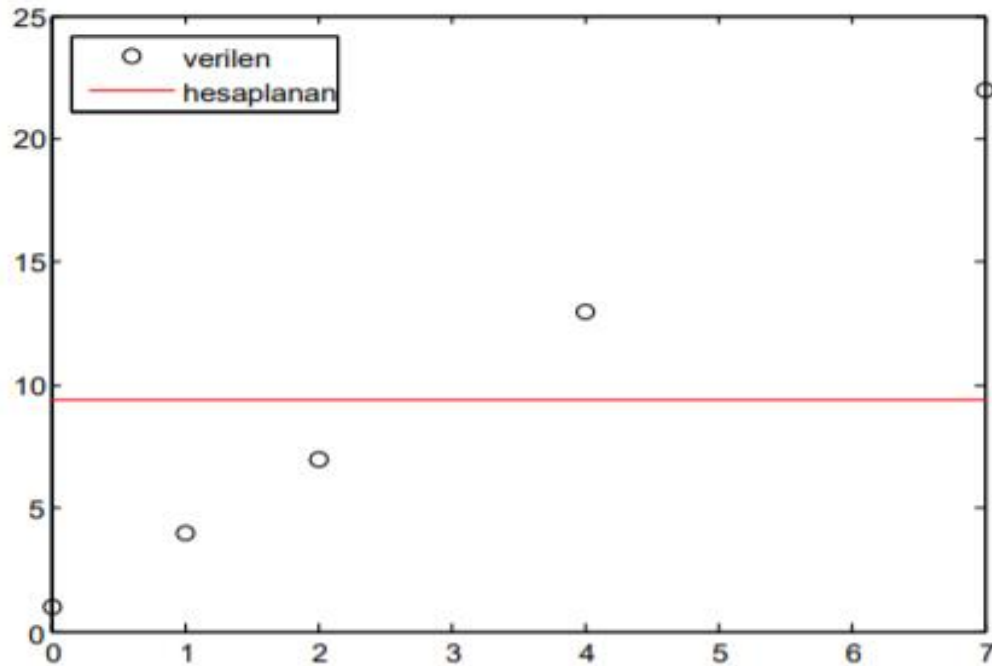
$$\frac{\partial H(a_1)}{\partial a_1} = 0 \quad \longrightarrow \quad 2 \sum_{i=1}^n [a_1 - y_i] \cdot 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad n \cdot a_1 = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

Sıfırıncı Dereceden Polinom (Sabit) Uydurma

x	0	1	2	4	7
y	1	4	7	13	22

bilinen değerleri için en uygun sabiti bulan MATLAB kodlarını yazınız.



```
enKucukKarelerYontemi.m x +
1 — clc; clear all; close all;
2
3 — x=[0 1 2 4 7];
4 — y=[1 4 7 13 22];
5
6 — fx=(sum(y)/length(y))*ones(1,5)
7
8 — plot(x,y,'k o',x,fx,'r')
9 — legend('verilen','hesaplanan')
```

Birinci Dereceden Polinom Uydurma

Elde edilmiş olan n tane (x_i, y_i) verisi için en küçük kareler yöntemi kullanılarak $g(x)=a_1+a_2x$ şeklinde birinci dereceden fonksiyonun elde edilmesinde hata veya fark fonksiyonu:

$$H(a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n [a_1 + a_2 x_i - y_i]^2$$

şeklinde olup minimum olması için a_1 ve a_2 ye göre kısmi türevlerin sıfıra eşit olması gerekmektedir.

$$\frac{\partial H(a_1, a_2)}{\partial a_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2$$

$$2 \sum_{i=1}^n [a_1 + a_2 x_i - y_i] \cdot 1 = 0$$

$$2 \sum_{i=1}^n [a_1 + a_2 x_i - y_i] \cdot x_i = 0$$

$$n \cdot a_1 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

Birinci Dereceden Polinom Uydurma

$$n \cdot a_1 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

Yukarıdaki iki bilinmeyenli denklem sistemi aşağıdaki şekilde matris formatında yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \end{bmatrix}$$

İlgili matris sistemi çözülerek a_1 ve a_2 katsayıları bulunabilir.

Birinci Dereceden Polinom Uydurma

x	0	1	2	4	7
y	1	5	8	13	21

bilinen değerleri için en uygun birinci dereceden polinomu bulunuz.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 14 & 70 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 224 \end{bmatrix}$$

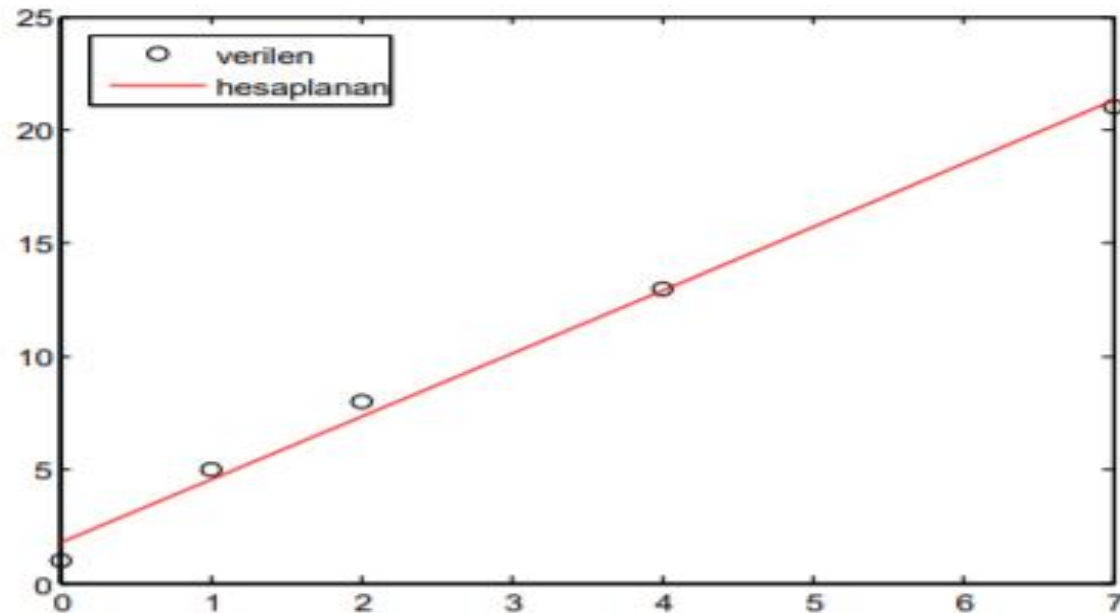
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8182 \\ 2.7792 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = 1.8182 + 2.7792x$$

Birinci Dereceden Polinom Uydurma

x	0	1	2	4	7
y	1	5	8	13	21

bilinen değerleri için en uygun birinci dereceden polinomu bulan MATLAB kodlarını yazınız.



```
clc; clear all; close all;  
x=[0 1 2 4 7];  
y=[1 5 8 13 21];
```

```
A(1,1)=length(x);  
A(1,2)=sum(x);  
A(2,1)=sum(x);  
A(2,2)=sum(x.*x);
```

```
b(1,1)=sum(y);  
b(2,1)=sum(x.*y);
```

```
a=inv(A)*b  
fx=a(1,1)+a(2,1)*x  
plot(x,y,'k o',x,fx,'r')  
legend('verilen','hesaplanan')
```

İkinci Dereceden Polinom Uydurma

Elde edilmiş olan n tane (x_i, y_i) verisi için en küçük kareler yöntemi kullanılarak $g(x)=a_1+a_2x+a_3x^2$ şeklinde birinci dereceden fonksiyonun elde edilmesinde hata veya fark fonksiyonu:

$$H(a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^n (a_1 + a_2x_i + a_3x_i^2 - y_i)^2$$

şeklinde olup minimum olması için a_1 , a_2 ve a_3 e göre kısmi türevlerin sıfıra eşit olması gerekmektedir.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot y_i \end{bmatrix}$$

İkinci Dereceden Polinom Uydurma

x	0	2	3	5	8
y	-6	0	7	21	65

bilinen değerleri için en uygun ikinci dereceden polinomu bulan MATLAB kodlarını yazınız.

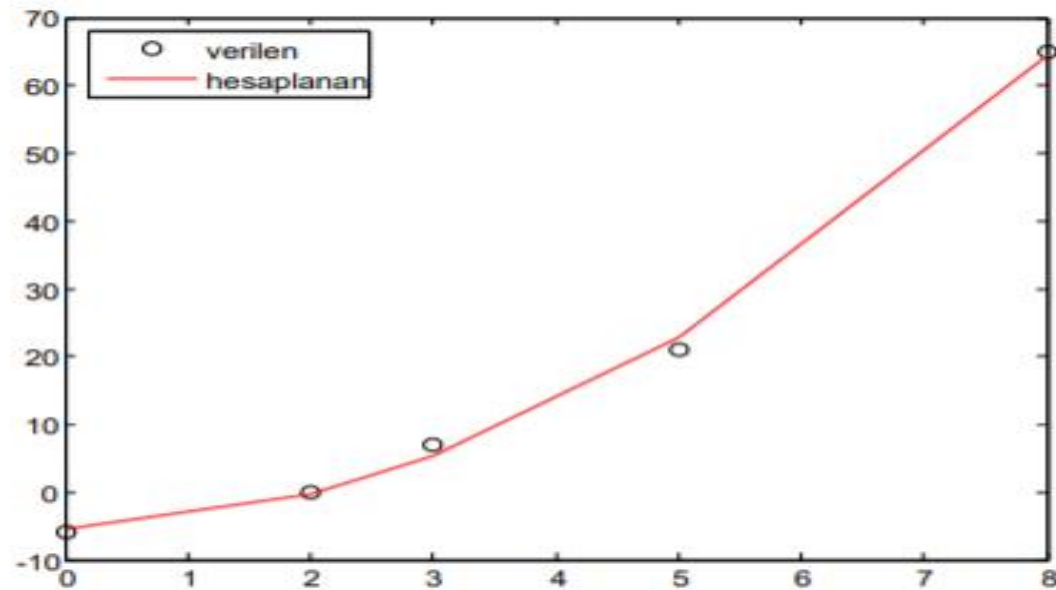
$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot y_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 18 & 102 \\ 18 & 102 & 672 \\ 102 & 672 & 4818 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102 \\ 646 \\ 4748 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = -5.46 + 0.5278x + 1.0274x^2$$

İkinci Dereceden Polinom Uydurma

x	0	2	3	5	8
y	-6	0	7	21	65

bilinen değerleri için en uygun ikinci dereceden polinomu bulan MATLAB kodlarını yazınız.



```
clc; clear all; close all;  
x=[0 2 3 5 8];  
y=[-6 0 7 21 65];  
  
A(1,1)=length(x);  
A(1,2)=sum(x);  
A(1,3)=sum(x.^2);  
A(2,1)=sum(x);  
A(2,2)=sum(x.^2);  
A(2,3)=sum(x.^3);  
A(3,1)=sum(x.^2);  
A(3,2)=sum(x.^3);  
A(3,3)=sum(x.^4);  
  
b(1,1)=sum(y);  
b(2,1)=sum(x.*y);  
b(3,1)=sum((x.^2).*y);  
A  
b  
a=inv(A)*b  
fx=a(1,1)+a(2,1)*x+a(3,1)*x.^2  
plot(x,y,'k o',x,fx,'r')  
legend('verilen','hesaplanan')
```


Yüksek Dereceden Polinom Uydurma

Elde edilmiş olan n tane (x_i, y_i) verisi için en küçük kareler yöntemi kullanılarak $g(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+....+a_px^{p-1}$ şeklinde birinci dereceden fonksiyonun elde edilmesinde hata veya fark fonksiyonu:

$$H(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^n \left(a_1 + a_2x_i + a_3x_i^2 + \dots + a_px_i^{p-1} - y_i \right)^2$$

şeklinde olup minimum olması için a_1 , a_2 ve a_3 e göre kısmi türevlerin sıfıra eşit olması gerekmektedir.

$$\frac{\partial H(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)}{\partial a_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, p$$

Yüksek Dereceden Polinom Uydurma

$$\begin{bmatrix}
 n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^p \\
 \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{p+1} \\
 \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{p+2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \sum_{i=1}^n x_i^p & \sum_{i=1}^n x_i^{p+1} & \sum_{i=1}^n x_i^{p+2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2p}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot y_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n x_i^p \cdot y_i \end{bmatrix}$$

İlgili matris sistemi çözülerek $a_1, a_2, a_3, \dots, a_p$ katsayıları bulunabilir.

Yüksek Dereceden Polinom Uydurma

x	0	2	5	9	15	25	40
y	5	12	23	37	44	60	81

bilinen değerleri için en uygun beşinci dereceden polinomu bulan MATLAB kodlarını yazınız.

MATLAB ile Polinom Uydurma

MATLAB'ta verilere en uygun polinom uydurma işlemi için «*polyfit*» komutu kullanılır. Bunun genel kullanım şekli:

$$\text{polinomKatsayıları} = \text{polyfit}(x, y, \text{derece})$$

şeklindedir. Verilen x , y değerlerine göre belirtilen dereceden polinom katsayılarını hesaplar.

```
>> pk=polyfit([-3 0 3],[-9 -3 3],1)
```

```
pk =
```

```
2.0000 -3.0000
```

```
1 — x=0:5;  
2 — y= [0 20 60 68 77 110];  
3 — yciz=20*x  
4 — hata=yciz-y  
5 — OKH= mean(hata.^2)  
6 — KOKH= sqrt(OKH) % ORTALAMA KARESEL HATANIN KAREKOKU  
7 — plot(x,y,'o',x,yciz)  
8 — title('dogrusal tahmin')  
9 — xlabel('zaman,s')  
10 — ylabel('sicaklik,derece F')  
11 — grid  
12 — axis([-1 6 -2 120])  
13 — legend('ölçülen','tahmin edilen')
```

Command Window

>> Dogrusal_Egri_Uydurma

yciz =

0	20	40	60	80	100
---	----	----	----	----	-----

hata =

0	0	-20	-8	3	-10
---	---	-----	----	---	-----

OKH =

95.5000

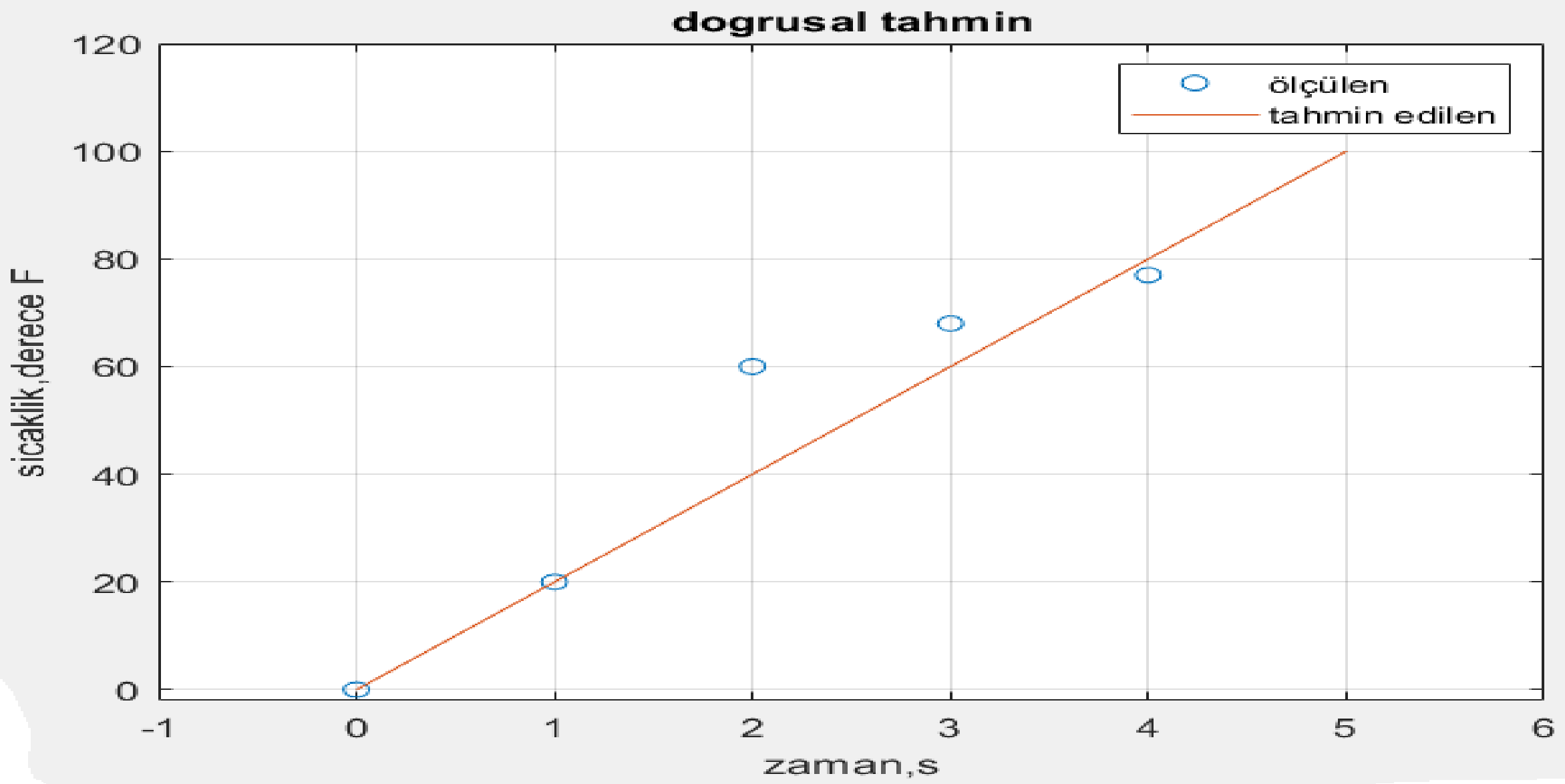
KOKH =

9.7724

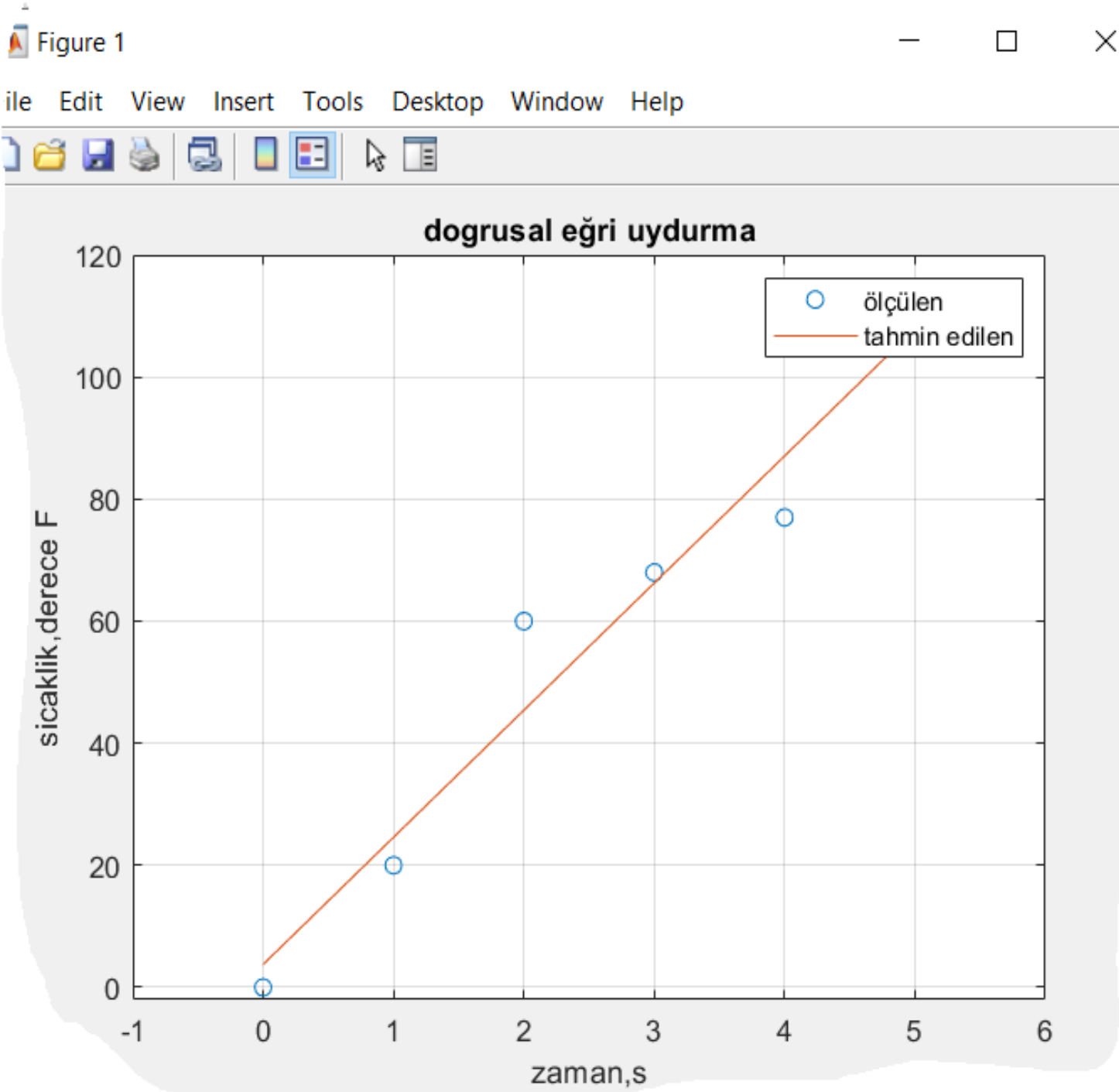


Figure 1

File Edit View Insert Tools Desktop Window Help



```
1 - x=0:5;
2 - y= [0 20 60 68 77 110];
3 - a=polyfit(x,y,1)
4 - yciz=polyval(a,x); % bulunan a katsayıları ile doğrusal polinomun değeri hesaplanıyor.
5 - hata=yciz-y
6 - OKH= mean(hata.^2)
7 - KOKH= sqrt(OKH) % ORTALAMA KARESEL HATANIN KAREKOKU
8 - plot(x,y,'o',x,yciz)
9 - title('dogrusal eğri uydurma')
10 - xlabel('zaman,s')
11 - ylabel('sicaklik,derece F')
12 - grid
13 - axis([-1 6 -2 120])
14 - legend('ölçülen','tahmin edilen')
```



Command Window

```
>> Dogrusal_Egri_Uydurma_2
```

a =

```
20.8286    3.7619
```

hata =

```
3.7619    4.5905   -14.5810   -1.7524   10.0762   -2.0952
```

OKH =

```
59.4698
```

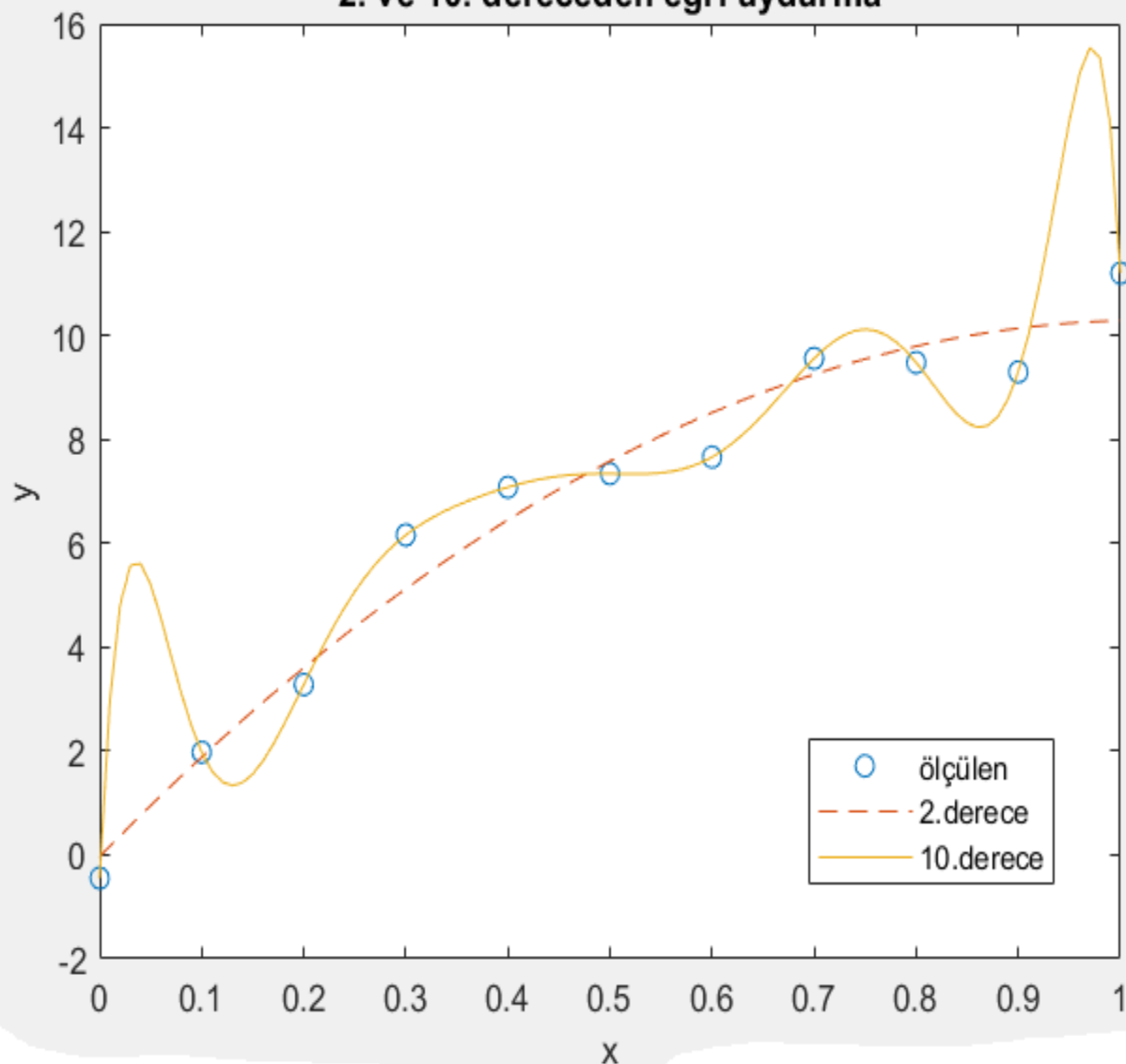
KOKH =

```
7.7117
```

```
1 - x=0:0.1:1;  
2 - y=[-0.447 1.978 3.28 6.16 7.08 7.34 7.66 9.56 9.48 9.30 11.2];  
3 - a2=polyfit(x,y,2)  
4 - disp('a2 katsayilari:')  
5 - disp(a2')  
6 - a10=polyfit(x,y,10);  
7 - disp('a10 katsayilari:')  
8 - format short e  
9 - disp(a2')  
10 - xi=linspace(0,1,101);  
11 - yi2=polyval(a2,xi);  
12 - yi10=polyval(a10,xi);  
13 - plot(x,y,'o',xi,yi2,'--',xi,yi10)  
14 - xlabel('x')  
15 - ylabel('y')  
16 - title('2. ve 10. dereceden eğri uydurma')  
17 - legend('ölçülen','2.derece','10.derece')
```



2. ve 10. dereceden eğri uydurma



```
>> Dogrusal_Olmayan_Egri_Uydurma
```

```
a2 =
```

```
-9.8108    20.1293   -0.0317
```

```
a2 katsayilari:
```

```
-9.8108
```

```
20.1293
```

```
-0.0317
```

```
a10 katsayilari:
```

```
-9.8108e+00
```

```
2.0129e+01
```

```
-3.1671e-02
```