⑨ Ters Fonksiyonun Türevi :

$f: A \to B$, $y = f(x)$ birebir ve örten fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}: B \to A$, $x = f^{-1}(y)$ olsun. $\forall x \in A$ için $f'(x)$ türevi var ve $f'(x) \neq 0$ ise

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

dir.

ÖRNEK : $f(x) = x^5 + x$ eşitliği ile tanımlanan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor. $(f^{-1})'(2)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $y_0 = 2$ olduğundan $f(x_0) = y_0$ eşitliğinden dolayı

$x_0^5 + x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = 1$ olur.

$f'(x) = 5x^4 + 1 \Rightarrow f'(1) = 6$ olacağından

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

⑩ Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi :

Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri aşağıda verilmiştir.

1) $f: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$

2) $f: [-1,1] \to [0,\pi]$, $f(x) = \arccos x$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$

3) $f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arctan x$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

4) $f: \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $f(x) = \text{arccot}\, x$, $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$u = u(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(\text{arccot}\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

ÖRNEKLER

* $y = \arcsin\sqrt{x} \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}$$

* $y = \arctan(\sin^2 x) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \frac{(\sin^2 x)'}{1+(\sin^2 x)^2} = \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^4 x} = \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}$$

* $y = \arctan^2(\sin x) \Rightarrow y' = ?$

$$y = [\arctan(\sin x)]^2 \Rightarrow y' = 2[\arctan(\sin x)] \cdot [\arctan(\sin x)]'$$

$$= 2\arctan(\sin x) \cdot \frac{(\sin x)'}{1+\sin^2 x} = 2\arctan(\sin x) \cdot \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

(11) Kapalı Fonksiyonların Türevi

x ve y değişken olmak üzere $F(x,y)=0$ denklemiyle verilen bağıntılara kapalı fonksiyon denir. $F(x,y)=0$ kapalı fonksiyonunun türevi hesaplanırken y sabit düşünülerek x değişkenine göre alınan türev F'_x ve x sabit düşünülerek y'ye göre alınan türev F'_y ile gösterilmek üzere

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

şeklinde türev hesaplanır.

Örnek: $F(x,y) = 2x^2 - 3x^2y + 3xy^2 + 4y - 3 = 0$ ise $y' = F'(x,y) = ?$

Çözüm: $$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{4x - 6xy + 3y^2}{-3x^2 + 6yx + 4}$$

örnek : $x \cdot \cos y + y \cdot \cos(xy^2) = 0$ ise $y' = ?$

Çözüm : $y' = -\dfrac{F_x'}{F_y'} = -\dfrac{\cos y - y \cdot (xy^2)' \sin(xy^2)}{-x \sin y + [1 \cdot \cos(xy^2) - y \cdot (xy^2)' \sin(xy^2)]}$

$$= -\frac{\cos y - y \cdot y^2 \cdot \sin(xy^2)}{-x\sin y + \cos(xy^2) - y \cdot 2xy \cdot \sin(xy^2)} = \ldots$$

(12). Parametrik Fonksiyonların Türevi

$t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} x = h(t) \\ y = g(t) \end{array}\right\} \quad y = f(x)$$

biçiminde tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonuna parametrik fonksiyon, $t \in \mathbb{R}$'ye de parametre denir. Bu durumda türev

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

şeklindedir.

örnek : $\left.\begin{array}{l} y = t^3 + 2t \\ x = \frac{t}{2} + \frac{3}{2} \end{array}\right\}$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

$\left(x = \frac{t}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow t = 2x - 3\right)$

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{3t^2 + 2}{\frac{1}{2}} = 6t^2 + 4 = 6(2x-3)^2 + 4$

(13) Logaritma Fonksiyonunun Türevi

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere

$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e$ dir.

$a = e$ alınırsa $y = \ln x$ fonk. elde edileceğinden

$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$ bulunur.

$u = u(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$ ve

$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$ olur.

ÖRNEKLER * $y = \log_3 (1+x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{1+x^2} \cdot \log_3 e$

* $y = \ln(x^2 - x) \Rightarrow y' = \frac{(x^2-x)'}{x^2-x} = \frac{2x-1}{x^2-x}$

* $y = \ln^3(\sin x) \Rightarrow y' = ?$

$y = [\ln(\sin x)]^3 \Rightarrow y' = 3[\ln(\sin x)]^2 \cdot [\ln(\sin x)]'$

$\Rightarrow y' = 3[\ln(\sin x)]^2 \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x} = 3[\ln(\sin x)]^2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$

(14) Üstel Fonksiyonun Türevi

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $y = a^x$ olmak üzere

$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$ dır.

$a = e$ alınırsa $y = e^x$ fonk. elde edileceğinden

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = e^x$ bulunur.

$u = u(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$y = a^u \Rightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ve

$y = e^u \Rightarrow y' = u' \cdot e^u$ olur.

Örnekler * $y = 3^{1+x^2} \Rightarrow y' = (1+x^2)' \cdot 3^{1+x^2} \cdot \ln 3 = 2x \cdot 3^{1+x^2} \cdot \ln 3$

* $y = 2^x \Rightarrow y' = 2^x \cdot \ln 2$

* $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

* $y = e^{3x} \Rightarrow y' = (3x)' \cdot e^{3x} = 3e^{3x}$

* $y = e^{-x} \Rightarrow y' = -e^{-x}$

* $y = e^{\sin x} \Rightarrow y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$

*

15 Logaritmik Türev Alma

$f(x)>0$, $f(x) \neq 1$ olmak üzere $y=[f(x)]^{g(x)}$ biçimindeki fonksiyonların türevi bulunurken önce eşitliğin her iki tarafının, ln'i alınır, sonra türevi alınıp y' türevi gelilir.

Örnek: $y = x^{\sin x} \Rightarrow y' = ?$

Çözüm: $y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x . \ln x$

her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)' . \ln x + (\ln x)' . \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = (\cos x) . \ln x + \frac{1}{x} . \sin x$$

$$y' = y . \left[\cos x . \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$$

$$y' = x^{\sin x}\left[\cos x . \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$$

Örnek: $y = x^x \Rightarrow y' = ?$

Çözüm: $y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x = x \ln x$

$$\frac{y'}{y} = \left(1 . \ln x + \frac{1}{x} . x\right)$$

$$y' = y(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

16 Yüksek Mertebeden Türev Alma

$y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ türevine y nin türevi veya y nin birinci mertebeden türevi denir. Eğer $y' = f'(x)$ fonksiyonu da türevlenebilirse

$$(y')' = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = f^{(3)}(x)$$

türevine y nin ikinci mertebeden türevi denir.
Eğer $y'' = f''(x)$ fonksiyonu da türevlenebilirse

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = f^{(3)}(x)$$

türevine y nin üçüncü mertebeden türevi denir. Daha yüksek mertebeden türevler de benzer şekilde tanımlanır.
Genel olarak

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = f^{(n)}(x)$$

dır. Yani her mertebeden türev, bir önceki türevin türevidir.

Örnek : $y = 4x^3 + 2x^2 - 1$ ise $y^{(5)}$ türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$y' = 12x^2 + 4x$$
$$y'' = 24x + 4$$
$$y''' = 24$$
$$y^{(4)} = 0$$
$$y^{(5)} = 0$$

Örnek : $y = \ln x$. ise $y^{(40)} = ?$

Çözüm :

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$y'' = (-1)x^{-2}$$
$$y''' = (-1)(-2)x^{-3}$$
$$y^{iv} = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$$
$$\vdots$$
$$y^{(40)} = -39!\, x^{-40}$$