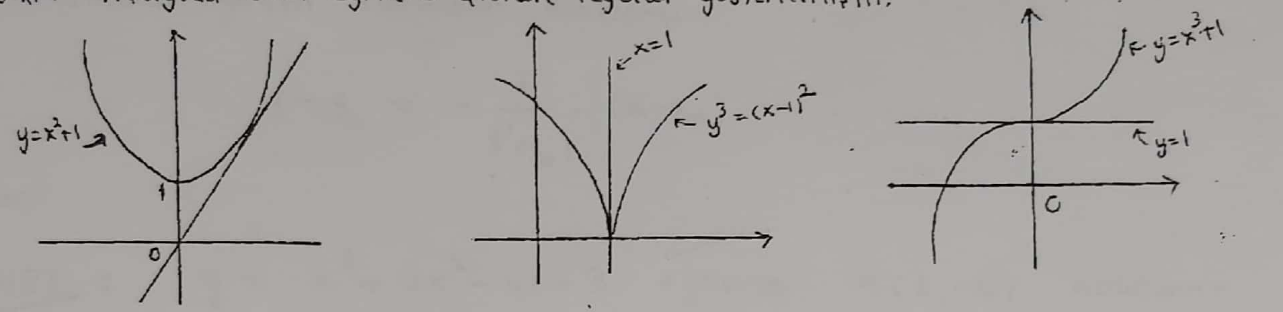
## TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

$y=f(x)$ denklemi ile verilen sürekli bir $f$ fonksiyonunun grafiği üzerinde bir $A(x_0, y_0)$ noktası alalım. Eğri üzerinde diğer hareketli bir nokta $P(x,y)$ olsun. $P$ noktası $A$ noktasına yaklaştığında $P$ noktası değiştikçe $AP$ kirişi konum değiştirir. $P$ nin $A$ ile çakışması durumunda $AP$ kirişinin pozisyonuna, eğrinin $A$ noktasındaki teğeti denir. Aşağıda bazı eğrilere çizilen teğetler gösterilmiştir.



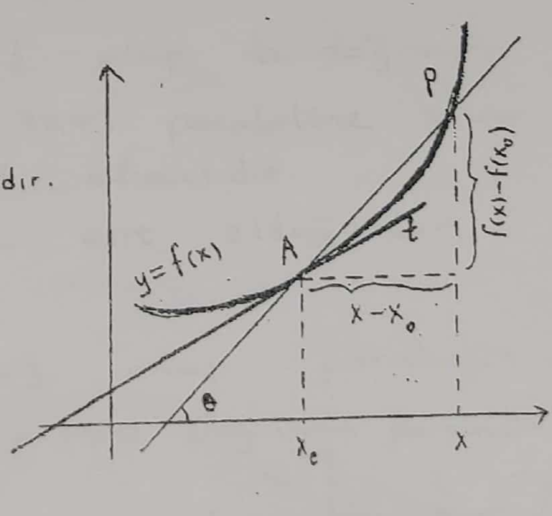

$f$ fonksiyonu $x_0$ noktasında türevli ve eğriye $A$ noktasında çizilen teğet $t$ olsun. $AP$ kirişinin eğimi

$$\tan\theta = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

olur. $P$ noktası eğri üzerinde $A$'ya doğru hareket ettiğinde $AP$ keseni $t$ teğetine yaklaşır. $x$, $x_0$ ile çakışırken $AP$ keseni $t$ ile çakışır. O halde teğetin $m_t$ eğimi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limitine eşittir. Halbuki bu limit $f'(x_0)$'dır.




O halde

$$m_t = f'(x_0)$$

olur.

Buna göre $y=f(x)$ denklemiyle verilen $f$ fonksiyonunun eğrisine üzerindeki $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi

$$y-y_0 = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

olacaktır. $m_t \neq 0$ olduğunda $n$ normalinin eğimi $m_n$ ise

$$m_t \cdot m_n = -1$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre $m_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$ olup $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen normalin denklemi

$$y-y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$$

olur.

<u>ÖRNEK</u>: $y = x^3+2x^2-4x-3$ eğrisine $A(1,-4)$ noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.

<u>Çözüm</u>: $y'=f'(x)= 3x^2+4x-4 \Rightarrow f'(1)=3.1^2+4.1-4=3$ olduğundan eğim $m_t=3$ tür. O halde teğetin denklemi

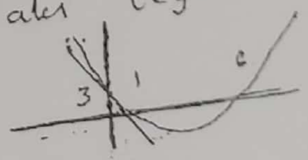
$$y-(-4) = 3.(x-1) \Rightarrow y=3x-7$$ olur.

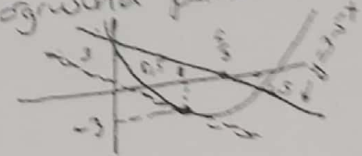
<u>ÖRNEK</u>: $y=x^2-7x+3$ parabolünün hangi noktasındaki teğeti $5x+y-3=0$ doğrusuna paraleldir?

<u>Çözüm</u>: $5x+y-3=0 \Rightarrow y=-5x+3$ olup bu doğrunun eğimi $-5$'tir. O halde $y=x^2-7x+3$ parabolüne çizilecek olan teğetin eğimi de $-5$ olmalıdır. Eğim, o noktadaki türeve eşit olduğundan

$y' = 2x-7 = -5 \Rightarrow x=1$ olup parabolün

$x=1 \Rightarrow y=1^2-7.1+3=-3$ bulunur. $(1,-3)$ noktasındaki teğeti $5x+y-3=0$ doğrusuna paraleldir.





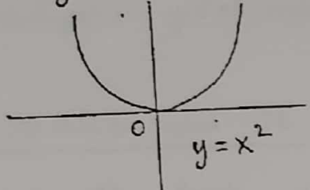
## MAKSİMUM – MİNİMUM NOKTALARI

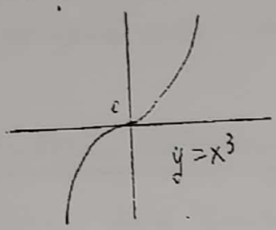
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve her $x \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $\forall x \in (a,b)$ için

$f'(x) > 0$ ise $f$ fonk. $[a,b]$ 'de artan,

$f'(x) < 0$ ise $f$ fonk. $[a,b]$ 'de azalandır.

TANIM: $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonk. verilsin. $f'(c) = 0$ şartını sağlayan $c$ noktasına (türevin köklerine) $f$ nin duraklama veya kritik noktası denir.




$y = x^2$ fonk. $(-\infty, 0)$ 'da azalan $(0, \infty)$ 'da artan.

$y = x^3$ fonk. ise $(-\infty, \infty)$'da artandır.

ÖRNEK: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM: Öncelikle $f(x)$ fonksiyonunun duraklama noktalarını bulalım.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ ve $x_2 = 2$ bulunur.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | $\phi$ | − | $\phi$ | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

$f$ fonk. $(-\infty, -1)$ ve $(2, \infty)$ aralığında artan,
$(-1, 2)$ aralığında azalandır.

ÖRNEK: $f(x) = x \cdot e^x$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu yerleri bulunuz.

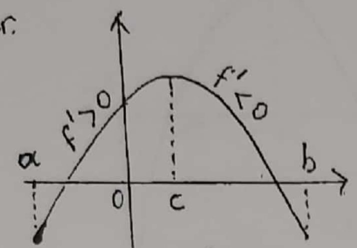
ÇÖZÜM: $f'(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x = \underbrace{e^x}_{>0} \underbrace{(1+x)}_{=0} = 0 \Rightarrow x = -1$ dir.

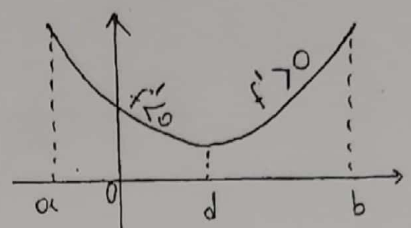
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | − | $\phi$ | + | |
| $f$ | | ↘ | | ↗ | |

$f(x) = xe^x$ fonk. $(-\infty, -1)$ aralığında azalan, $(-1, \infty)$'da artandır.

## Yerel Maksimum ve Yerel Minimum Noktaları

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonk. $[a,b]$'de sürekli ve $c,d\in(a,b)$ olsun. f fonk. $(a,c)$'de artan, $(c,b)$'de azalan ise c noktasında bir yerel maksimuma sahip olur. Eğer $(a,d)$'de azalan, $(d,b)$'de artan ise d noktasında bir yerel minimuma sahip olur.




NOT! Bir fonksiyonun yerel maks. ve yerel min. noktalarına yerel ekstremum nok. denir.

## Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum Değerleri

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonk verilsin. $\forall x\in[a,b]$ için $f(c)\leq f(x)$ olacak şekilde bir $c\in[a,b]$ noktası varsa $f(c)$ değerine f fonksiyonunun mutlak minimum değeri (en küçük değeri) denir. Benzer şekilde $f(c)\geq f(x)$ olacak şekilde bir $c\in[a,b]$ varsa $f(c)$ değerine f nin mutlak maksimum değeri (en büyük değeri) denir.

Her mutlak maksimum bir yerel maksimum, her mutlak minimum bir yerel minimum olup tersi doğru değildir. Bir fonksiyonun birden fazla y. maks veya y. min değeri olabilir fakat varsa sadece bir tane m. maks veya m. min değeri vardır.

Kapalı bir aralıkta tanımlanmış sürekli bir fonksiyonun mutlak maks ve mutlak min. değeri vardır. Bu değerleri ya aralığın uç noktalarında ya da durakalama noktalarında alır.

ÖRNEK: $f(x)=x^3-3x$ fonksiyonunun $[-3,2]$ aralığında yerel maks, yerel min., mutlak maks. ve mutlak min. noktalarını bulunuz.

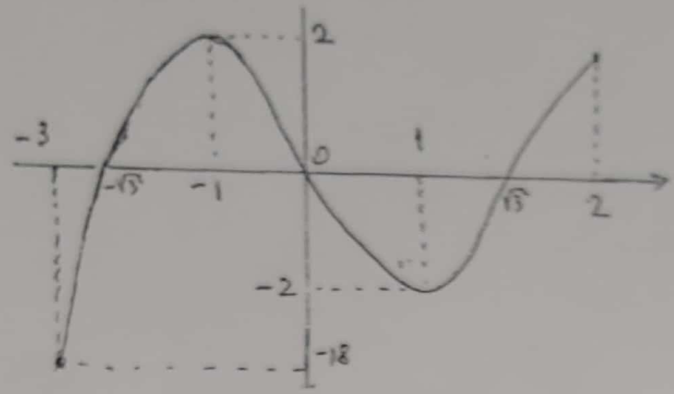
Çözüm: $f:[-3,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$ fonk. verilmiş.

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=1$ ve $x=-1$.

$f(-3)=-18$
$f(-1)=2$
$f(1)=-2$
$f(2)=2$

| x | -3 | | -1 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | -18 | ↗ | 2 | ↘ | -2 | ↗ | 2 |
| | | | y. maks | | y. min | | |

Tabloya göre $(-1,2)$ noktası yerel maks. $(1,-2)$ noktası yerel min noktasıdır. f nin aldığı değerlerin içinde $-18$ en küçüğü old. f nin mutlak min. değeri $-18$ 'dir ve bu değerlerin içinde en büyüğü 2 old. mut. maks. değeri 2 'dir.




ÖRNEK : $f(x) = x\sin x + \cos x$ , $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$ dir. $(0, 2\pi)$ aralığında $x > 0$ olduğundan $f'(x)$ in işareti $\cos x$ 'in işareti ile aynıdır. Buna göre tablo aşağıdaki gibi olacaktır.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f$ | 1 | ↗ | $\frac{\pi}{2}$ | ↘ | $-\frac{3\pi}{2}$ | ↗ | 1 |

$x = \frac{\pi}{2}$ 'de yerel maksimum, $x = \frac{3\pi}{2}$ 'de yerel minimum vardır.
Yerel maks. değeri $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ , yerel min. değeri $f(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$ dir.

Fermat Teoremi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $c \in (a,b)$ noktasında bir yerel minimum veya maksimumu varsa ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebiliyorsa $f'(c) = 0$ dır.

Uyarı : • Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani f nin bir $c \in (a,b)$ noktasındaki türevinin var ve $f'(c) = 0$ olması fonksiyonun c noktasında bir yerel min. veya maks. noktasına sahip olmasını gerektirmez. (Şekil a)