2020-2021 BAHAR DÖNEMİ

YMH214
SAYISAL ANALIZ
LAB. DERSİ

14.DERS

Arş. Gör. Alev KAYA

28.05.2021
SAAT:16:00-17:00

Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

- A-Taylor seri açılımı
- B-Euler Yöntemi
- C-Runge Kutta Yöntemi
- LAB: Euler Yöntemi Matlab örnek programı

Adi Diferansiyel Denklemler ve Mühendislik Uygulamaları

- Düşen bir paraşütçünün hızını (v) zamanın (t) bir fonksiyonu olarak hesaplamak için Newton'un ikinci yasasına dayalı olan aşağıdaki eşitlik türetilebilir:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \quad (1)$$

- Burada g yerçekimi ivmesi, m kütle ve c direnç katsayısıdır.
- Bilinmeyen fonksiyonu ve onun türevini içeren bu tür denklemler, diferansiyel denklem diye adlandırılır: (Yukarıdaki denklem, değişkenler ve parametrelerin bir fonksiyonu olarak bir degişkenin değişiminin hızını gösterdiği için bazen hız (oran) denklemi adıyla da anılır)

Adi Diferansiyel Denklemler ve Mühendislik Uygulamaları

- Birçok fiziksel oluşum en iyi şekilde matematiksel olarak değişimin hızı cinsinden formüle edilebildiği için bu tür eşitlikler mühendislikte temel bir öneme sahiptir.
- Yukarıdaki denklemde diferansiyeli alınan büyüklük v , bağımlı değişken diye adlandırılır. v’nin diferansiyeli alınırken göz önüne alınan büyüklük t, bağımsız değişkendir.
- Eğer bir fonksiyon bir bağımsız değişken içeriyorsa, denkleme *adi diferansiyel denklem* (*veya ADD*) denir.
- Buna karşılık, iki veya daha çok bağımsız değişken içeren eşitlikler *kısmi diferansiyel denklemdir* (*veya KDD*).

Adi Diferansiyel Denklemler ve Mühendislik Uygulamaları

- Diferansiyel denklemler derecelerine göre de sınıflandırılır.
  - Örneğin $\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$ birinci dereceden bir denklemdir, çünkü denklemdeki en yüksek dereceli türev, birinci türevdir.
  - İkinci dereceden denklem ise ikinci türevi içerir. Örneğin, sönümlemeli bir kütle-yay sisteminin konumunu (x) belirten denklem, ikinci derecedendir.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2)$$

  - Burada c sönümleme katsayısı ve k yay sabitidir. Benzer şekilde, n'inci dereceden bir denklem n'inci türevi içerecektir.

Adi Diferansiyel Denklemler ve Mühendislik Uygulamaları

- Yüksek dereceli denklemler birinci dereceden denklemlere indirgenebilir. Eşitlik (2) için bu, yeni bir y değişkeni tanımlanarak yapılabilir:

$$y = \frac{dx}{dt} \qquad (3)$$

  - Bu şekilde tanımlanan bu ifadenin de diferansiyeli alınabilir:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (4)$$

  - Daha sonra Eşitlik (3) ve (4), (2)'de yerine konursa:

$$m\frac{dy}{dt} + cy + kx = 0$$

  - Elde edilir.

- Bu bölümde *başlangıç değer problemlerinin çözümü* için sayısal yöntemler ele alınacaktır.
- *Adımlı yöntemler,* verilen bir diferansiyel denklemden ve yi'den hareketle yi+1'i hesaplamaya dayanmaktadır. Runge Kutta tekniği diye adlandırılırlar.
  - Euler Yöntemi
  - Heun Tekniği Yöntemi
  - Orta Nokta Yöntemi
  - Runge-Kutta (veya RK)
  - Adım büyüklüğünü otomatik olarak ayarlayan uyarlanmış RK yöntemi
- *Çok adımlı yöntemler* ise, i'dekilerden başka ek y değerlerini de gerektirmektedir. Katı ADD'lerin çözümünde kullanılırlar.
- Katı ADD'ler hem tek hem de sistem halinde olan ADD'lerdir ve çözümleri için *hem hızlı hem de yavaş bileşenler* vardır.
  - Kendiliğinden Başlamayan Heun Yöntemi

Adımlı Yöntemler

- Problem en temel biçimde şu şekilde ifade edilir.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

- Çözüm de şu şekildedir

$$Yeni\ Değer = Eski\ Değer + Eğim \times Adım\ Büyüklüğü$$

- Matematiksel olarak

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

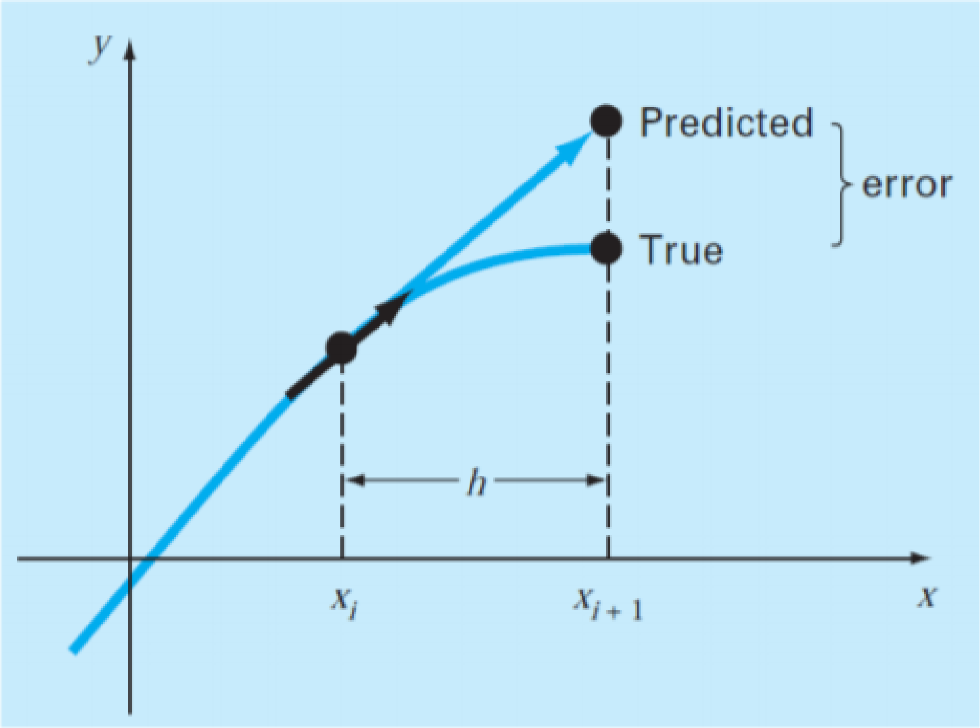
- O halde problemimiz yeni y değerleri (y_{i+1}) bulmak üzere eğim tahmini (ϕ) yapmaya indirgenmiştir.
- Geliştirilen yöntemler bu tahmini yapma konusundaki çözüm önerileri doğrultusunda birbirinden ayrılırlar.

Euler Yöntemi

- Birinci türev, x_i'deki eğimi verir, yani $\phi = f(x_i, y_i)$, böylece bir sonraki adımdaki y değeri

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

- Euler yöntemi, fonksiyon doğrusal veya doğrusala yakınsa iyi çalışır onun dışında yüksek hatalara neden olur.



Euler Yöntemi: Örnek

Problem: Aşağıdaki eşitliği $x = 0$'dan $x = 4$'e kadar sayısal olarak integre etmek için Euler yöntemini kullanınız. Başlangıç koşulu $x = 0$'da $y = 1$ Çözümünüzü $h = 0.5$, $h = 0.25$, $h = 0.1$ ve $h = 0.01$ aralıklar için tekrarlayın.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Çözüm:

Dikkat ederseniz, problemin analitik çözümü vardır; Euler yönteminin yeteneğini sınamak üzere analitik çözümü elde edelim.

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + \mathrm{c}$$

Elde edilen çözüm başlangıç koşullarında değerlendirilirse $c = 1$ olarak bulunur.

Analitik Çözüm:

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

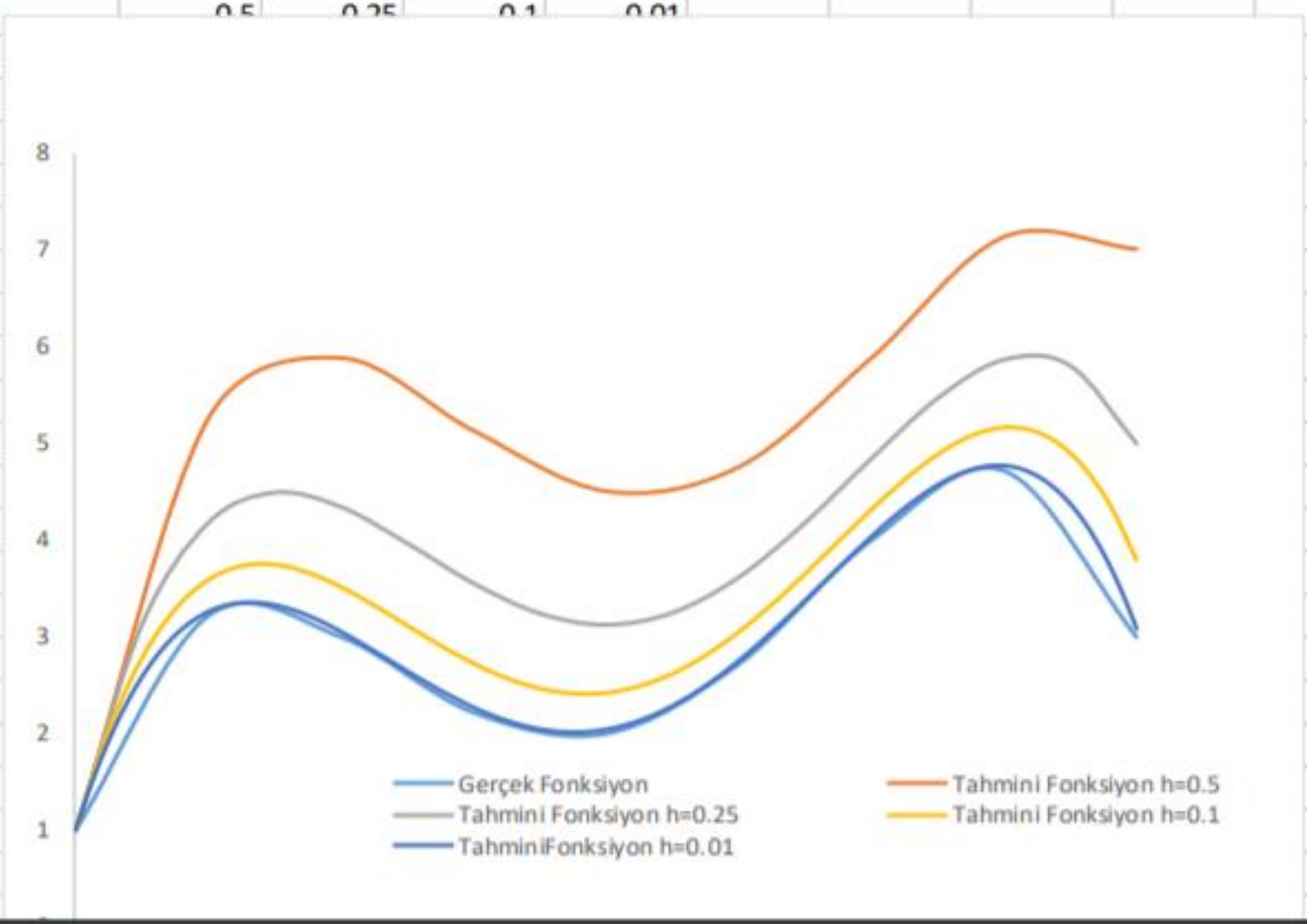
Euler Yöntemi: Örnek

Sayısal Çözüm: $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$

$$\frac{dy}{dx} = \phi = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

h	0.5	0.25	0.1	0.01
x				



x	y (Gerçek)	Φ	y (Tahmin)
0	1	8,5	1
0,1	1,75395	6,618	1,85
0,2	2,3312	4,964	2,5118
0,3	2,75395	3,526	3,0082
0,4	3,0432	2,292	3,3608
0,5	3,21875	1,25	3,59
0,6	3,2992	0,388	3,715
0,7	3,30195	-0,306	3,7538
0,8	3,2432	-0,844	3,7232
0,9	3,13795	-1,238	3,6388
1	3	-1,5	3,515
1,1	2,84195	-1,642	3,365
1,2	2,6752	-1,676	3,2008
1,3	2,50995	-1,614	3,0332
1,4	2,3552	-1,468	2,8718
1,5	2,21875	-1,25	2,725
1,6	2,1072	-0,972	2,6
1,7	2,02595	-0,646	2,5028
1,8	1,9792	-0,284	2,4382
1,9	1,96995	0,102	2,4098

Euler Yöntemi için Hata Analizi

- ADDilerin sayısal çözümü iki tür hata içerir:
  - Kesme veya ayrıklaştırma hataları, y'nin yaklaşık değerini tahmin etmek için uygulanan tekniklerin doğasından kaynaklanır.
  - Yuvarlatma hataları, bilgisayar tarafından korunabilen anlamlı basamakların sayısının sınırlı olmasından kaynaklanır.
- Kesme hataları iki kısımdan oluşmaktadır:
  - Yerel kesme hatası olup, incelenen yöntemin tek bir adım boyunca uygulanmasından kaynaklanır.
  - Yayılmış kesme hatası olup, önceki adımlar boyunca kullanılmış yaklaştırmalardan dolayı oluşur.
  - Bu ikisinin toplamı toplam veya genel kesme hatasıdır.

Euler Yöntemi için Hata Analizi

- Kesme hatası kavramını, Euler yöntemini doğrudan Taylor serisi açılımından türeterek anlamaya çalışalım. Aradığımız;

$$y' = f(x, y)$$

Bu ifadeyi (x_i, y_i) başlangıç değerleri civarında Taylor serisi ile açarsak;

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \cdots + \frac{y_i^n}{n!} h^n + R_n$$

$$R_n = \frac{y^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f^{n-1}(x_i, y_i)}{n!} h^n + O(h^{n+1})$$

- Euler Yönteminde yerel kesme hatası $O(h^2)$; ancak yayılmış kesme hatası O(h) dır. Yaptığımız örnekten de görüldüğü gibi adım büyüklüğü düşürülerek hata azaltılır.
- Çalışılan fonksiyon doğrusalsa tam çözüm bulunur.

Euler Yöntemi: Örnek

Problem: Aşağıdaki eşitliği $t = 0$'dan $t = 2$'ye kadar sayısal olarak integre etmek için Euler yöntemini kullanınız. Başlangıç koşulu $t = 0$'da $y = 1$ Çözümünüzü $h = 0.5$ ve $h = 0.25$, aralıklar için tekrarlayın.

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

Çözüm:

Dikkat ederseniz, problemin analitik çözümü vardır; Euler yönteminin yeteneğini sınamak üzere analitik çözümü elde edelim.

$$\frac{dy}{y} = (t^3 - 1.5\,)dt \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int (t^3 - 1.5\,)dt$$

$$\ln y = \frac{t^4}{4} - 1.5t + c$$

Elde edilen çözüm başlangıç koşullarında değerlendirilirse $c = 0$ olarak bulunur.

Analitik Çözüm:

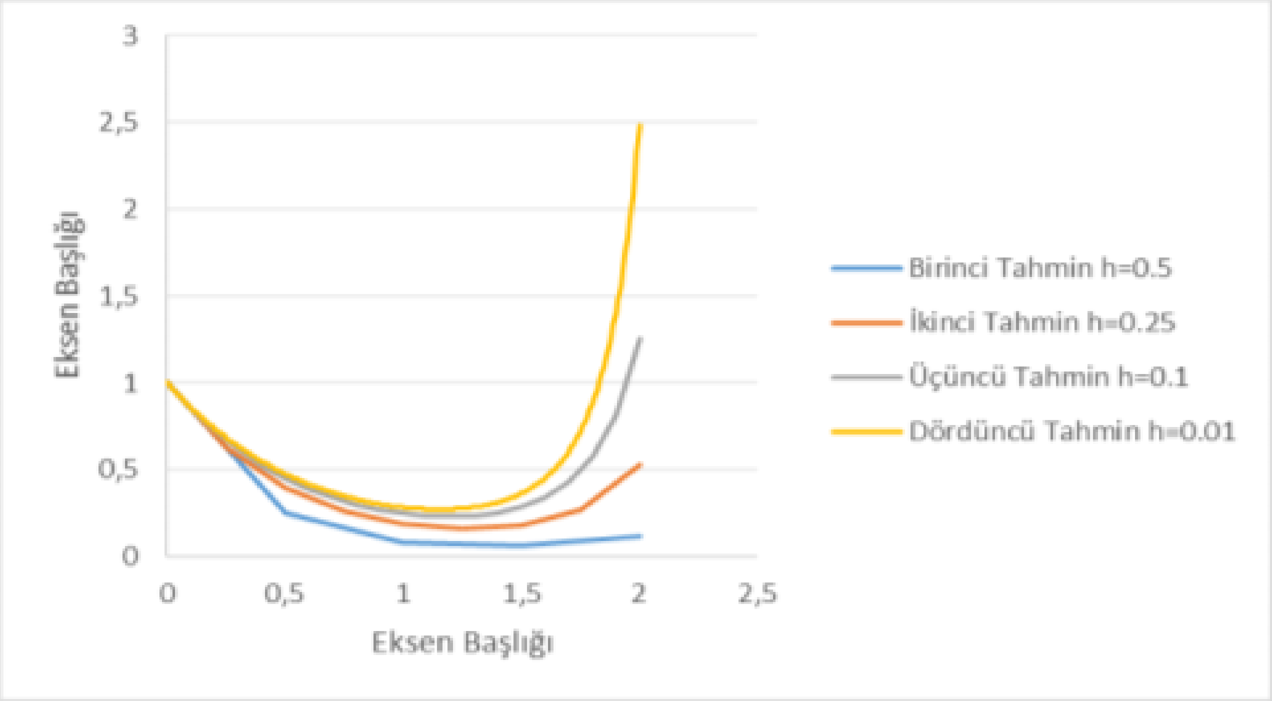
$$y = e^{\frac{t^4}{4} - 1.5t}$$

Euler Yöntemi: Örnek

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

Sayısal Çözüm:

t	y	f(t,y)
0	1	-1,5
0,5	0,25	-0,3438
1	0,0781	-0,0391
1,5	0,0586	0,10986
2	0,1135	0,73792



Yüksek Dereceli Taylor Serisi Yöntemleri

- Taylor serisi açılımında daha çok terim kullanılarak, yüksek dereceli yöntemler türetilebilir.

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + E$$

Bu denklemde $f'(x, y)$'ye ihtiyacımız var.

$$f'(x, y) = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}f(x, y)$$

- Daha yüksek mertebeden türevli yöntemler çok daha karmaşık olduğundan, sadece fonksiyonun değerini kullanan fonksiyonun türevlerini kullanmayan yöntemler geliştirilmiştir.

Heun Yöntemi

- Eğim tahminini iyileştirmenin bir yolu, biri aralığın başında diğeri sonunda olmak üzere aralık için iki türev hesaplamaktır.
- Göz önüne alınan aralık için iyileştirme elde etmek amacıyla, daha sonra bu iki türevin ortalaması alınır. Bu yaklaşım Heun yöntemi diye bilinir.

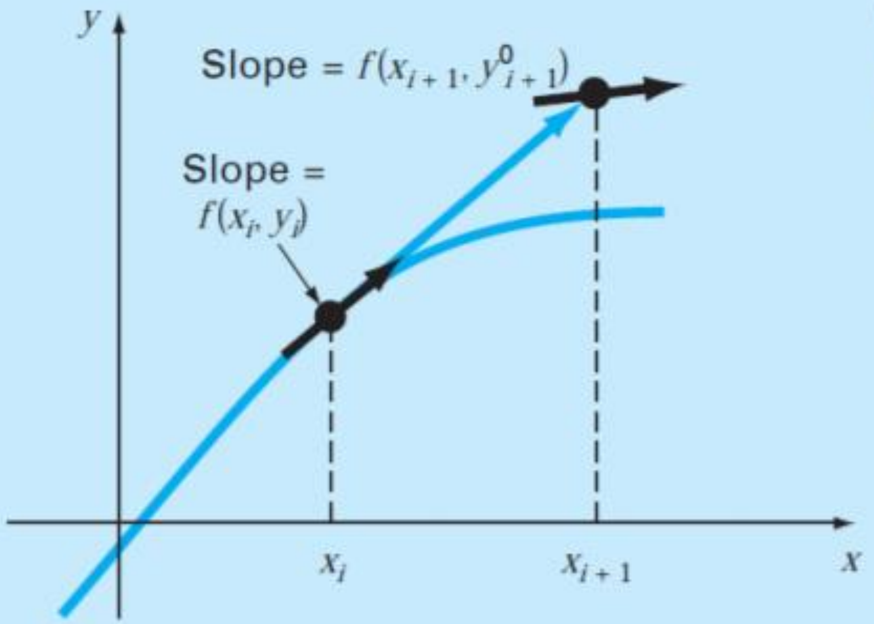
$$y_i' = f(x_i, y_i)$$

Deneme adımı (Şekil a)

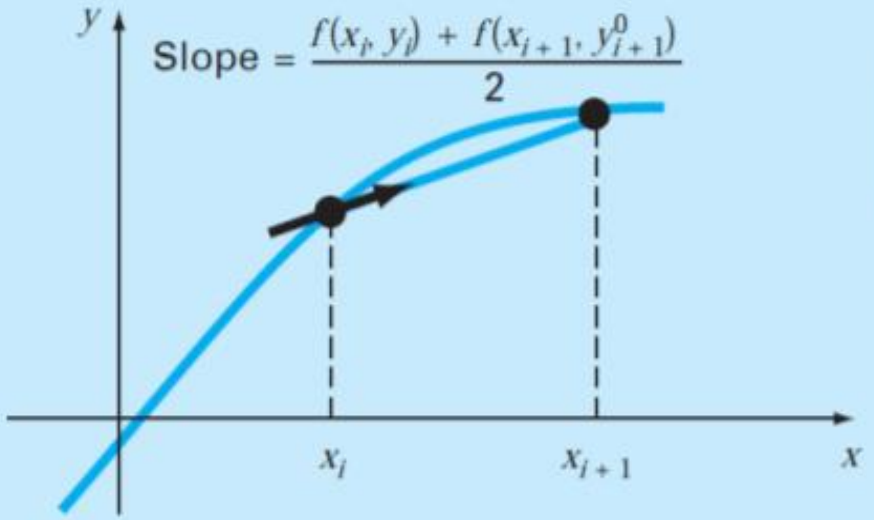
$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$$
$$y_{i+1}' = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)$$
$$\bar{y}' = \frac{y_i' + y_{i+1}'}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}$$

Düzeltme adımı (Şekil b)

$$y_{i+1} = y_i + \bar{y}'h = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}h$$



(a)



(b)

Heun Yöntemi

- Deneme adımı çözümü daha iyi hale getirmek için tekrarlanabilir.
- Eğer f=f(x) gibi bir fonksiyonunuz varsa yani y'ye bağlı değilse heun yöntemini kullanamazsınız.
- Heun yöntemi ikinci dereceden doğruluğa sahiptir yani ilgilenilen fonksiyon ikinci derece ise kesin sonuç verir.
- Heun Yönteminde yerel kesme hatası $O(h^3)$; ancak yayılmış kesme hatası $O(h^2)$ dır. Adım büyüklüğü düşürülerek hata azaltılır.

Orta Nokta (geliştirilmiş poligon) yöntemi

- Eğim tahminini iyileştirmenin diğer bir yolu, aralığın tam ortasındaki türevi hesaplamaktır.
- Yöntem şöyle çalışır.

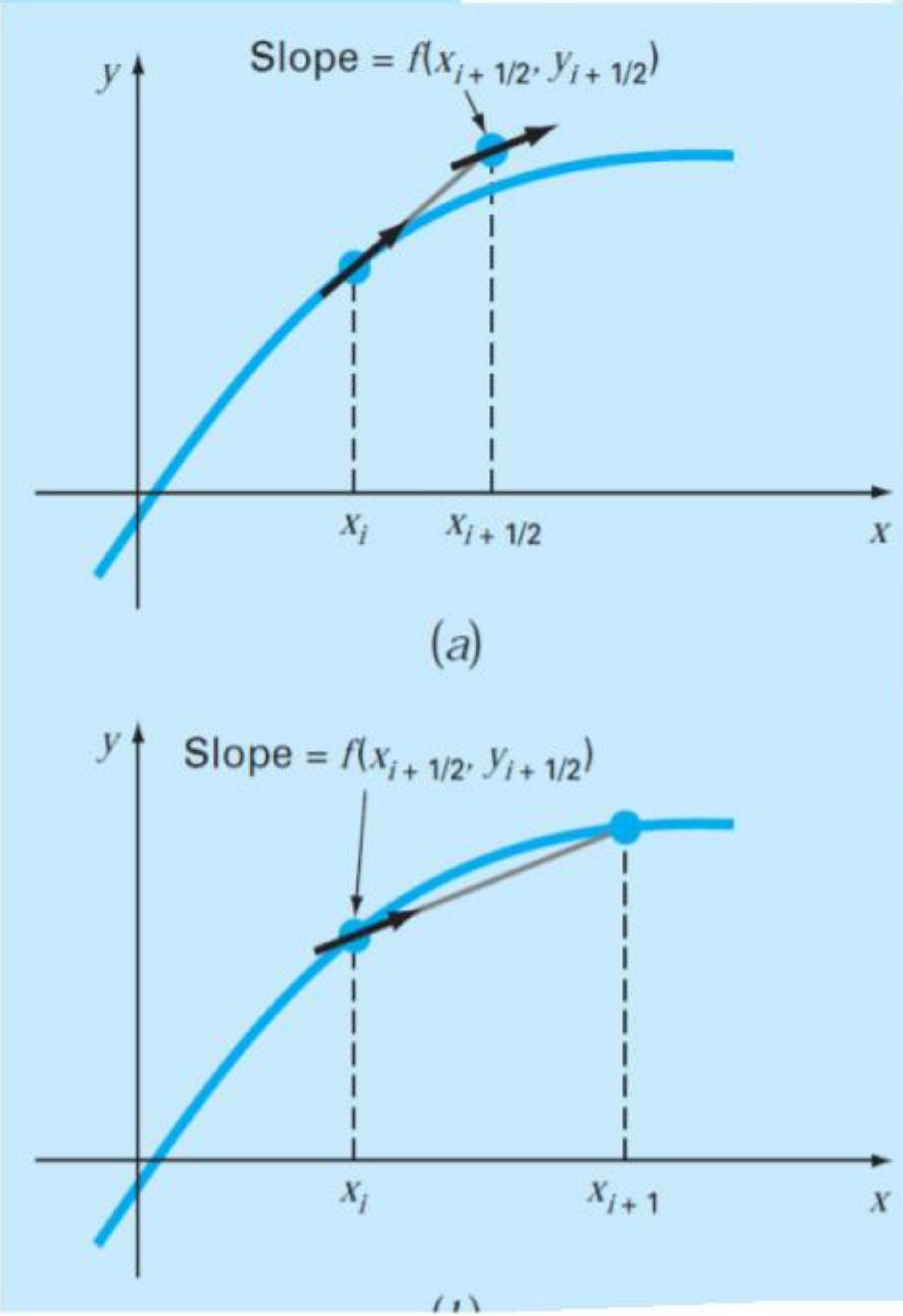
$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

Bulunan $y_{i+1/2}$ değeri $f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)$ bulmak için kullanılır. Böylece bi sonraki adımdaki değer

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)h$$

Olarak bulunur.

- Orta Nokta Yönteminde yerel kesme hatası $O(h^3)$; ancak yayılmış kesme hatası $O(h^2)$ dır. Adım büyüklüğü düşürülerek hata azaltılır.



Adımlı Yöntemler: Örnek

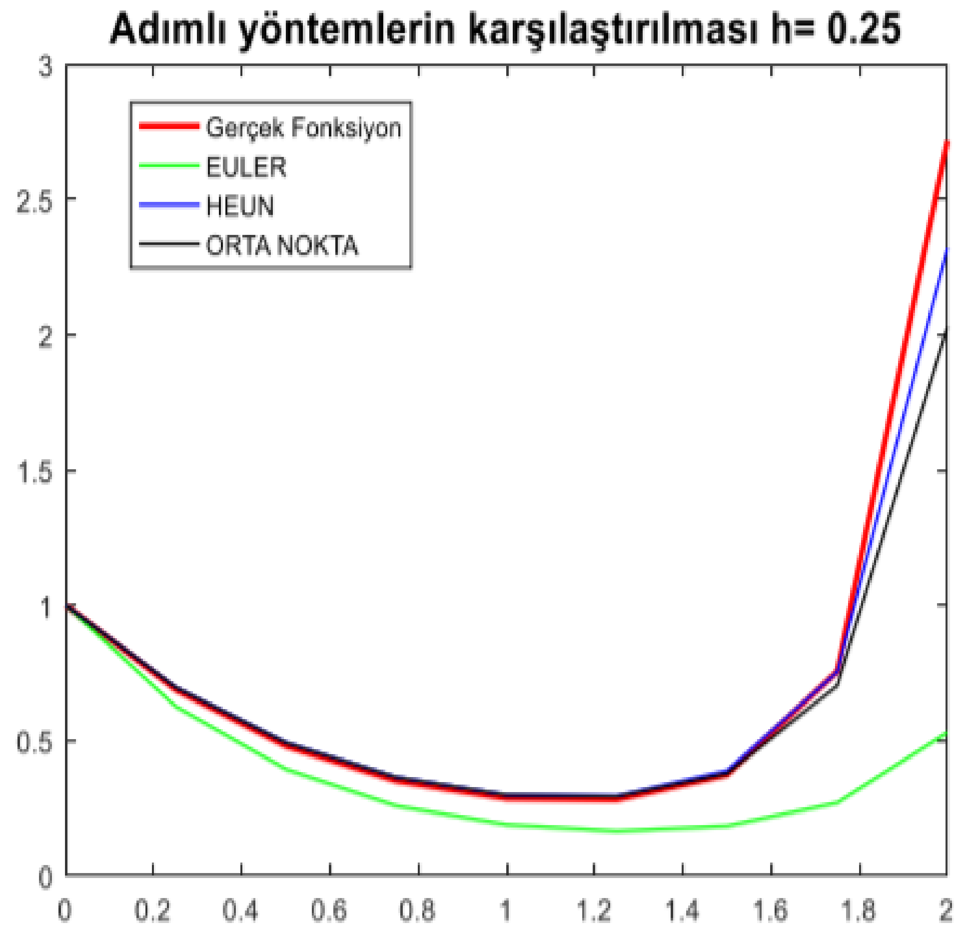
Problem: Aşağıdaki eşitliği $t = 0$'dan $t = 2$'ye kadar sayısal olarak integre etmek için Euler yöntemi, Heun Yöntemini ve Orta nokta yöntemini sırasıyla kullanınız, sonuçları karşılaştırınız. Başlangıç koşulu $t = 0$'da $y = 1$. Çözümünüzü her yöntemde $h = 0.5$ aralıklar kullanarak yapın.

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

Çözüm:

Euler Yöntemi			Heun Yöntemi						Orta Nokta Yöntemi				
t	y	f(t,y)	t	y	f1(t,y)	$y_{(i+1)}^0$	f2(t,y)	f_ave	t	y	f1(t,y)	y0rta	f2(t,y)
0	1	-1,5	0	1	-1,5	0,25	-0,34	-0,9	0	1	-1,5	0,6	-0,9277
0,5	0,25	-0,3438	0,5	0,5391	-0,74	0,168	-0,08	-0,4	0,5	0,5361	-0,7372	0,4	-0,3793
1	0,0781	-0,0391	1	0,3327	-0,17	0,25	0,47	0,15	1	0,3465	-0,1732	0,3	0,13737
1,5	0,0586	0,10986	1,5	0,4081	0,765	0,791	5,14	2,95	1,5	0,4152	0,77842	0,6	2,35329
2	0,1135	0,73792	2	1,8842	12,25	-22,6	33,9	23,1	2	1,5918	10,3467	-8,8	4,37745

Problemin Matlab ile Çözümü



Matlab Kodu

```
%Adýmlý yöntemler
clear all;close all;clc;
y0=1;h=0.01;
t=[0:h:2];b=length(t);
GF=zeros(1,b);E=zeros(1,b);H=zeros(1,b);O=zeros(1,b);
E(1)=y0;H(1)=y0;O(1)=y0;
for i=1:length(t)
GF(i)=exp((t(i)^4/4)-1.5*t(i));
if i>1
E(i)=E(i-1)+(E(i-1)*t(i-1)^3-1.5*E(i-1))*h;
y_ara=H(i-1)+(H(i-1)*t(i-1)^3-1.5*H(i-1))*h;
H(i)=H(i-1)+((H(i-1)*t(i-1)^3-1.5*H(i-1))+((y_ara)*t(i)^3-1.5*y_ara))*h/2;
y_ara=O(i-1)+(O(i-1)*t(i-1)^3-1.5*O(i-1))*h/2;
O(i)=O(i-1)+(y_ara*(t(i)-h/2)^3-1.5*y_ara)*h;
end
end
plot(t,GF,'-r','linewidth',2);hold on;
plot(t,E,'-g','linewidth',1);hold on;
plot(t,H,'-b','linewidth',1);hold on;
plot(t,O,'-k','linewidth',1);hold on;
s=sprintf('Adýmlý yöntemlerin karþýlaþtýrýlmasý h=%5.2f',h);
legend('Gerçek Fonksiyon','EULER','HEUN','ORTA NOKTA')
title(s,'fontsize',14)
```

Runge-Kutta Yöntemi

- Euler yöntemi, Heun yöntemi ve orta nokta yöntemi genel olarak Runge-Kutta yöntemleri olarak genelleştirilebilirler.
- Runge-Kutta yöntemleri fonksiyonun türevini kullanmadıkları için uygulanmaları oldukça kolaydır.
- Birinci derece Runge-Kutta yöntemi Euler yöntemidir.
- İkinci dereceden Runge-Kutta yöntemleri katsayıların seçimine bağlı farklı isimler alabilirler;

Runge-Kutta Yöntemi

Problemin genel hali

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

Aslında problem aşağıdaki eğim ifadesini en doğru ve kolay şekilde belirleme problemi

$$\phi(x_i, y_i, h) = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$

Burada a'lar sabit.

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$
$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$$
$$\vdots$$
$$k_n = f\left(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{(n-1)1}k_1h + q_{(n-1)2}k_2h + \cdots + q_{(n-1)(n-1)}k_{(n-1)}h\right)$$

Burada p'ler ve q'lar sabit.

İkinci Dereceden Runge-Kutta Yöntemleri

İkinci dereceden Runge-Kutta yöntemlerinin genel ifadesi.

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$
$$\phi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2$$

Burada

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

Dikkat ederseniz, $a_1,\ a_2, p_1\ ve\ q_{11}$ olmak üzere 3 bilinmeyenin belirlenmesi gerekiyor. Çözüm aşağıdaki gibi bulunur (İspat bkz Kitap).

$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

Dört bilinmeyen 3 denklem var, analitik çözüm mümkün değil, değişkenlerden birini keyfi olarak belirleyip diğerlerini bu seçime göre çözebiliriz.

İkinci Dereceden Runge-Kutta Yöntemleri

Eğer $a_2 = 1/2$ seçilirse→ **Heun Yöntemi Ortaya Çıkar**

$a_1 = 1/2; p_1 = 1$ ve $q_{11} = 1$ olur.

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Eğer $a_2 = 1$ seçilirse→ **Orta Nokta Yöntemi Ortaya Çıkar**

$a_1 = 0; p_1 = 1/2$ ve $q_{11} = 1/2$ olur.

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

İkinci Dereceden Runge-Kutta Yöntemleri

Eğer $a_2 = 2/3$ seçilirse→ **Ralston Yöntemi Ortaya Çıkar**

$a_1 = 1/3; p_1 = 3/4$ ve $q_{11} = 3/4$ olur. $a_2 = 2/3$ seçimi kesme hatalarını minimumda tutar.

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

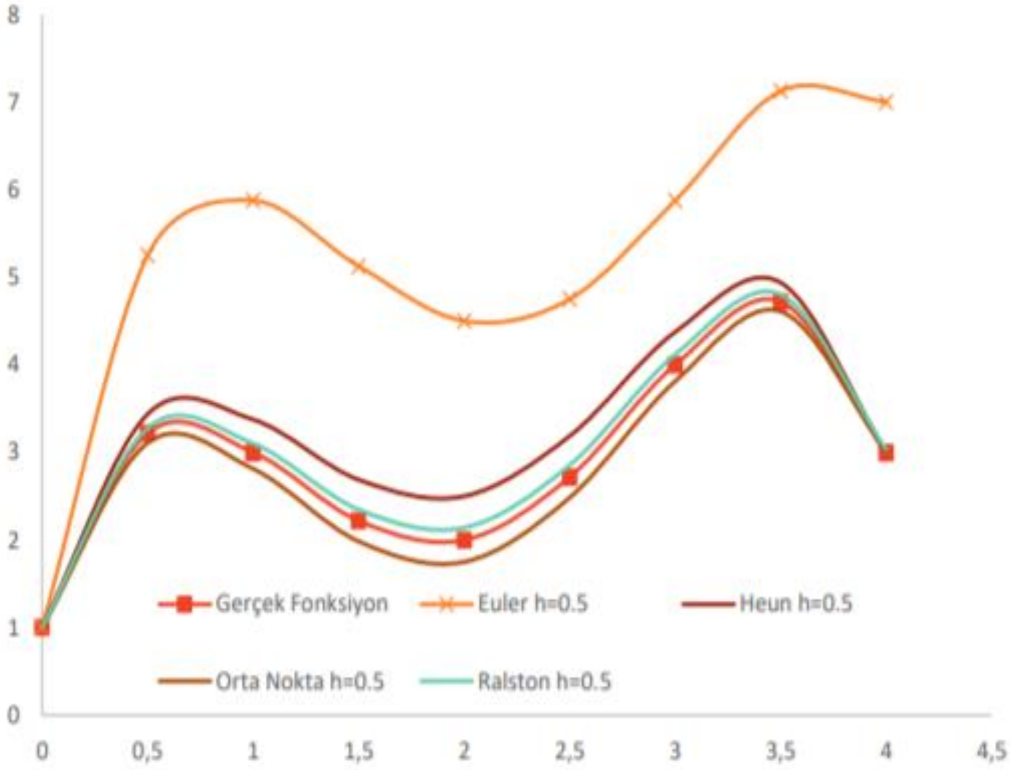
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Örnek:

Problem: Aşağıdaki eşitliği $x = 0$'dan $x = 4$'e kadar sayısal olarak integre etmek için Euler, Heun, Orta nokta ve Ralston yöntemini kullanınız. Gerçek sonuçla karşılaştırınız. Başlangıç koşulu $x = 0$'da $y = 1$. Çözümünüzü $h = 0.5$ adım aralığında yapınız.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

h	0,5								
			Euler		Heun		Orta Nokta		Ralston
x	y (Gerçek)	k1	y (Tahmin)	k2	y (Tahmin)	k2	y (Tahmin)	k2	y (Tahmin)
0	1	8,5	1	1,25	1	4,219	1	2,58203	1
0,5	3,21875	1,25	5,25	-1,5	3,4375	-0,594	3,109375	-1,1523	3,27734375
1	3	-1,5	5,875	-1,25	3,375	-1,656	2,8125	-1,5117	3,1015625
1,5	2,21875	-1,25	5,125	0,5	2,6875	-0,469	1,984375	0,00391	2,34765625
2	2	0,5	4,5	2,25	2,5	1,469	1,75	1,89453	2,140625
2,5	2,71875	2,25	4,75	2,5	3,1875	2,656	2,484375	2,66016	2,85546875
3	4	2,5	5,875	-0,25	4,375	1,594	3,8125	0,80078	4,1171875
3,5	4,71875	-0,25	7,125	-7,5	4,9375	-3,219	4,609375	-5,1836	4,80078125
4	3	-7,5	7	-20,8	3	-13,28	3	-16,793	3,03125



Üçüncü Dereceden Runge-Kutta Yöntemleri

- Çıkarılmasına yer verilmeksizin en yaygın versiyonunun formülü şu şekilde özetlenebilir.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$
$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

- Üçüncü Dereceden Runge-Kutta Yöntemlerinde yerel kesme hatası $O(h^4)$; ancak yayılmış kesme hatası $O(h^3)$ dür.
- Kübik fonksiyonlarda tam sonuç verir.

Dördüncü Dereceden Runge-Kutta Yöntemleri

- En yaygın kullanılan Runge-Kutta yöntemidir. Bu nedenle klasik Runge-Kutta diye de isimlendirilir.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Örnek

Problem:

a.) Aşağıdaki eşitliği $x = 0$'dan $x = 0.5$'e kadar sayısal olarak integre etmek için klasik runge kutta yöntemini kullanınız. Başlangıç koşulu $x = 0$'da $y = 1$ Çözümünüzü $h = 0.5$ adımı için yapınız.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

b.) Benzer şekilde, aşağıdaki eşitliği $x = 0$'dan $x = 0.5$'e kadar sayısal olarak integre etmek için klasik runge kutta yöntemini kullanınız. Başlangıç koşulu $x = 0$'da $y = 2$ Çözümünüzü $h = 0.5$ adımı için yapınız.

$$\frac{dy}{dx} = 4e^{0.8x} - 1.5y$$

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

$$k_1 = f(0) = 8.5$$

$$k_2 = f(0.25) = 4.21875$$

$$k_3 = f(0.25) = 4.21875$$

$$k_4 = f(0.5) = 1.25$$

$$y(0.5) = 1 + \frac{1}{6}(8.5 + 2 \cdot 4.21875 + 2 \cdot 4.21875 + 1.25)0.5 = 3.21875$$

Bu değer kesin çözümdür. Gerçek çözüm dördüncü dereceden olduğu için dördüncü dereceden runge-kutta kesin çözümü üretmektedir.

Matlab ile Çözüm

```
%Klasik Runge Kutta Konksiyon sadece x'ebaðlý
%dy/dx=f(x)=-2x^3+12x^2?20x+8.5
x0=0;y0=1;h=0.5;
X=(0:h:0.5);b=length(X);
y=zeros(1,length(b));y(1)=y0;
for i=1:b-1
x=X(i);
    k1=-2*x^3+12*x^2-20*x+8.5;
x=X(i)+h/2;
    k2=-2*x^3+12*x^2-20*x+8.5;
    k3=k2;
x=X(i)+h;
    k4=-2*x^3+12*x^2-20*x+8.5;
 y(i+1)=y(i)+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
end
```

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = 4e^{0.8x} - 1.5y$$

$$k_1 = f(0,2) = 4e^{0.8\cdot 0} - 1.5\cdot 2 = 1$$

$$k_2 = f\left(0.25{,}2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0.5\right) = f(0.25{,}2.25) = 4e^{0.8\cdot 0.25} - 1.5\cdot 2.25 = 1.510611$$

$$k_3 = f\left(0.25{,}2 + \frac{1}{2}\cdot 1.510611\cdot 0.5\right) = f(0.25{,}2.377653) = 1.3191$$

$$k_4 = f(0.5, y_i + k_3 h) = f(0.5{,}2 + 1.3191\ \cdot 0.5) = f(0.5{,}2.6596) = 1.9779$$

$$y(0.5) = 1 + \frac{1}{6}(3 + 2\cdot(1.510611\ + 1.3191\ ) + 1.9779\ )0.5 = 2.7198$$

Bu değer kesin çözüme çok yakındır.

Matlab ile Çözüm

```
%Klasik Runge Kutta
%dy/dx=f(x,y)=4*exp(0.8*x)-1.5*y
clear all;clc;
x0=0;y0=2;h=0.5;
X=(0:h:0.5);b=length(X);
Y=zeros(1,length(b));Y(1)=y0;
for i=1:b-1
x=X(i);y=Y(i);
    k1=4*exp(0.8*x)-1.5*y;
x=X(i)+h/2;y=Y(i)+k1*h/2;
    k2=4*exp(0.8*x)-1.5*y;
x=X(i)+h/2;y=Y(i)+k2*h/2;
    k3=4*exp(0.8*x)-1.5*y;
x=X(i)+h;y=Y(i)+h*k3;
    k4=4*exp(0.8*x)-1.5*y;
 Y(i+1)=Y(i)+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
end
```