2020-2021 BAHAR DÖNEMİ

YMH214
SAYISAL ANALIZ
LAB. DERSİ

3.DERS

Arş. Gör. Alev KAYA

3.HAFTA
Lineer Olmayan Denklem Sistemlerimin Çözümü

- Kapalı Yöntemler

A- Grafik Yöntemi

B- Bisection Yöntemi

LAB: Grafik yöntemi ve Bisection yöntemi örnek Matlab programı

DOĞRUSAL OLMAYAN (NONLINEAR) DENKLEM SİSTEMLERİ

Kapalı Yöntemler

- İki veya daha yüksek dereceli polinomlar veya trigonometrik, üstel ve logaritmik gibi lineer olmayan terimler içeren denklemler **lineer olmayan denklemlerdir.**

Örnek: $x^3 + 2x^2 - 5\sin x = 0$ veya $x - \tan x = e^{-x}$

denklemleri tek bilinmeyenli lineer olmayan denklemlerdir

- Genelde lineer olmayan denklemler $f(x) = 0$ **kapalı formunda** yazılırlar.
- Karşılaşılan denklemlerin **çoğu tek değişkenli** olmakla beraber **çok değişkenli** $f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = 0$ denklemlerin çözümü de söz konusu olabilir.
- Kök bulma işlemi, verilen $f(x)$ denkleminde $f(x_k) = 0$ değerini sağlayan x_k değerlerinin bulunması işlemidir.
- Tek değişkenli bir fonksiyon için bu değerler aynı zamanda **eğrinin x eksenini kestiği noktalardır.**
- Kök bulma işlemlerinde öncelikle kökün hangi aralıkta olduğu belirlenir.
- a ve b gibi iki farklı sayı ile belirlenen aralıkta ($a \leq x_k \leq b$) tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta sürekli ise $f(a) \times f(b) < 0$ ise, öyle bir x_k değeri vardır ki, $f(x_k) = 0$ eşitliğini sağlar.

DOĞRUSAL OLMAYAN (NONLINEAR) DENKLEM SİSTEMLERİ

A-Grafik Yöntemi

- Kök bulma işlemi denklemi sağlayan bağımsız değerlerin bulunması işlemidir denebilir.
- Sayısal çözümlemeler geliştirilmeden önce denklemlerin köklerinin bulunmasına yönelik çeşitli çözümler geliştirilmiştir.
- Mesela 2. Dereceden denklemlerin çözümü için çeşitli formüller kullanılırdı.
- Ancak birçok denklem bu şekilde basitçe çözülememekteydi.
- Bazı denklemler için analitik çözümler geliştirilememekte ve yaklaşık çözümler üretilmekteydi.
- Yaklaşık çözüm elde etmenin en pratik ve en ilkel yolu grafik yöntemidir.
- **Grafik yönteminde** fonksiyona ait bazı değerler elde edilerek grafiği çizilir.
- Çizilen grafik yardımı ile grafiğin x eksenini kestiği kök noktası tahmin edilir.

TEK DEĞİŞKENLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

- Tek değişkenli $f(x) = 0$ denkleminin çözmek için değişik yöntemler kullanılmaktadır.
- Bunlar iteratif yöntemler olup kökler için tahmini değerlerin alınmasın gerektirir.
- Bu yöntemlerin bir kısmı, nonlineer denklemin yerine lineer bir denklem kabul edilip çözüme ulaşma esasına dayanır.

- Biz de yaygın olarak kullanılan;
- 1. Yarıya Bölme (Bisection)
- 2. Lineer Interpolasyon (Regula-Falsi)
- 3. Basit İterasyon
- 4. Newton-Raphson
- 5. Kiriş (Secant)

yöntemlerini inceleyeceğiz.

Örneğin: $f(x) = xe$^x − 2 ifadesini [0,1] aralığında 0.25 aralıklar ile inceleyelim:

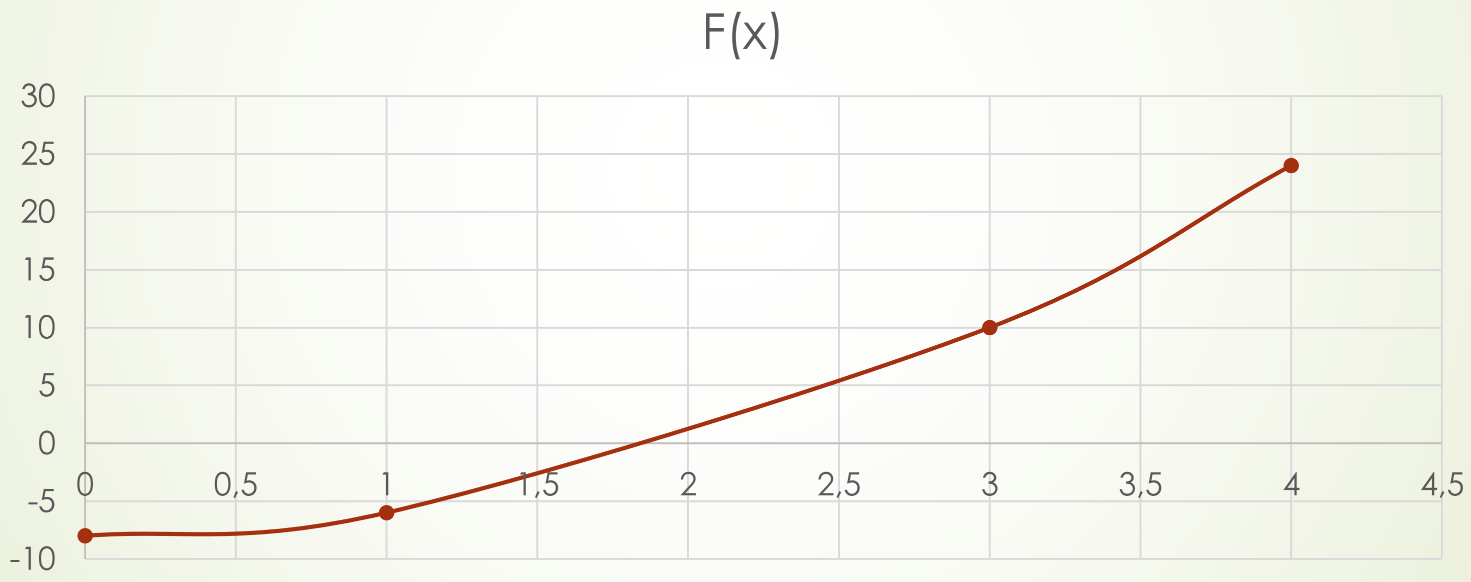
x	F(x)
0,0	-2
0,25	--1,6788993
0,5	-1,175639
0,75	-0,412250
1,0	0,718281

f (0,75) × f (1,0) < 0 olduğundan aranan kök *0.75,1.0+ aralığındadır.

f(0,85) = −0,011300 olduğundan aranan kök *0.85,1.0+ aralığındadır.

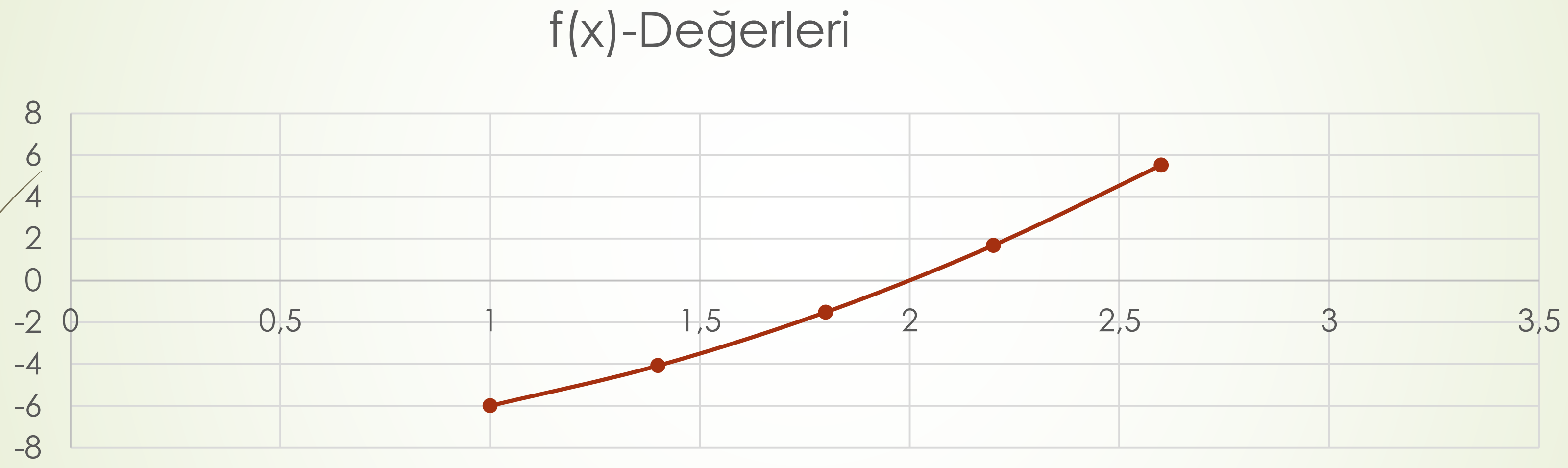
Örnek: $f(x) = 2x^2 - 8$ denkleminin kökünü grafik yöntemi ile bulalım.

x	0	1	3	4
F(x)	-8	-6	10	24



İlk aşamada kökün [1,3] aralığında olduğu belirlenmiştir.
Şimdi aralığı biraz daha daraltalım.

X-1.52	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0
F(x)	-6	-4.08	-1.52	1.68	5.52	10



Buradan da aranan kökün x = 2 olduğu kolayca bulunabilmektedir. Yalnız her problemde kök bu kadar kolay bulunamayacağı açıktır.

DOĞRUSAL OLMAYAN (NONLINEAR) DENKLEM SİSTEMLERİ

B-.YARIYA BÖLME (BİSECTİON) YÖNTEMİ

- $f\ x = 0$ şeklinde bir denklem verilsin.
- $f\ (x)$ fonksiyonu [a,b] aralığında sürekli ve $f(a) \times f(b) < 0$ ise $f\ x$ fonksiyonunun (a,b) aralığında bir yada birden fazla kökü vardır.
- Bu yöntem birden fazla kök için geçerli olsa da biz $f\ (x)$ 'in (a,b) aralığında sadece bir kökünün olduğunu varsayacağız.
- $f(a) \times f(b) < 0$ olduğundan (a,b) aralığında kök vardır.
- **1. iterasyon:** $x1 = (a+b)/\ 2$;
- **2. iterasyon:IF** $f(a) \times f(x1) < 0$ ise

  $x2 =(\ a+x1)/\ 2$;

  ELSE

  $x2 = (b+x1)\ /2$;

- **3.iterasyon: IF** $f(a) \times f(x2) < 0$ ise

  $x3 = (a+x2)/\ 2$;

  ELSE

  $x3 = (x1+x2)\ /2$;

İterasyonlar istenen hata aralığına ulaşıncaya kadar devam eder.

Örnek: $f(x) = x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 120x - 130$ eşitliğinin (1,2) aralığında bir köke sahip olduğu bilinmektedir. Bu kökü $\varepsilon y \leq 0{,}0132$ yaklaşım hatası ile bulunuz.

- **Çözüm:** $a = 1.0 \ ve \ b = 2.0$

$a = 1.0 \ iken \ f(1.0) = -20 \ ve \ b = 2.0 \ iken \ f(2.0) = 46$

1.Adım : $f(a) \times f(b) = (-20) \times 46 < 0$ $olduğundan \ bu \ aralıkta \ kök \ vardır.$

$x1 = (a + b)/\ 2 = (1 + 2)/\ 2 = 1.5 \ ve$

$f(1.5) = 20.2$

$b = x1 = 1.5$ olur.

2.Adım : $f(a) \times f(b) < 0 \ olduğundan$

$x2 = (a + b)/\ 2 = (1 + 1.5)/\ 2 = 1.25 \ ve$

$f\ (1.25) = 1.8 \ olur.$

Bu durumda $b = x2 = 1.25$ olur.

- **3.Adım :** $f(a) \times f(b) < 0 \ olduğundan$

$x3 = (a + b)/\ 2 = (1 + 1.25)/\ 2 = 1.125 \ ve$

$f\ (1.125\ ) = -8.7$

$a = x3 = 1.125$ olur.

4.Adım : $f(a) \times f(b) < 0 \ olduğundan$

$x4 = (a + b)/\ 2 = (1.125 + 1.25)/\ 2 = 1.1875 \ ve$

$f\ (1.1875\ ) = -3.4028$

$a = x4 = 1.1875$ olur.

DEVAMI

5.Adım : $f(a) \times f(b) < 0$ *olduğundan*

$x5 = (a + b)/\ 2 = (1.1875 + 1.25)/\ 2 = 1.21875\ ve$

$f\ (1.21875\ ) = -0.80688$

$a = x5 = 1.21875$ olur.

6.Adım : $f(a) \times f(b) < 0$ *olduğundan*

$x6 = (a + b\ )/2 = (1.21875+1.25)/\ 2 = 1.234375$

ve

$f(x6) = 0{,}472092$

$b = x6 = 1.234375$ olur.

$\varepsilon y \leq \left| (1.234375 - 1.21875)/\ 1.234375 \right| = 0{,}01265$

- ALGORİTMA
- 1. $IF\ f(a) \times f(b) < 0$
- 3. $REPEAT$
- 4. $xk = (a+b)/2\ ;$
- 5. $IF\ f(a) \times f(xk\ ) < 0$
- 6. $b = xk$
- 7. $ELSE$
- 8. $a = xk$
- 9. *Hatayı Hesapla* (ε)
- 9. $UNTIL$ $(\varepsilon \leq$ *Hata Toleransı*$)$
- 10. $ELSE$
- 11. “ $(a,\ b)$ *aralığında kök yoktur.* ”

Teorem: $f \in C\,[a, b]$ ve $f\,(a\,) * f\,(b) < 0$ olsun.

- Bu duruma aralık yarılama yöntemi ile f'in kökü xr 'ye yaklaşan bir $\{xn\}n=1$ den ∞ dizisi oluşturur.

- Oluşabilecek maksimum hata;

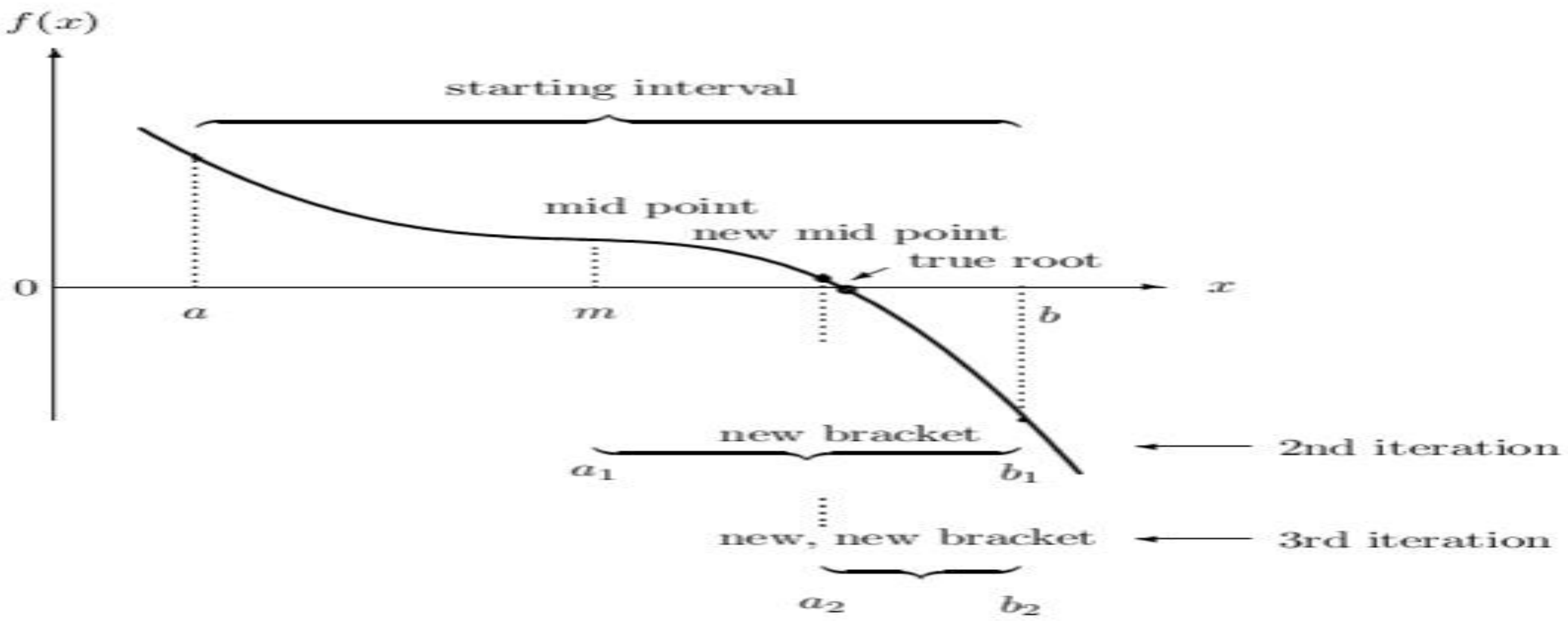
  $\varepsilon \leq (b - a)/\,(2\wedge n)$

- Oluşabilecek maksimum hata ise;

  $\varepsilon max = (b - a)/\,(2\wedge n)$ şeklinde hesaplanır.

İKİYE BÖLME YÖNTEMİ (BISECTION METHOD)

Eğer f(x)=0 denkleminin (a,b) aralığında kökü olması için f(a).f(b)<0 koşulu sağlanması gerekmektedir.



Yöntem için adımlar aşağıdaki gibidir:

Algoritma

1.Adım: i=1 olarak belirle

2.Adım: m=(a+b)/2

3.Adım: Eğer f(m)<eps veya |b-a|/2<eps ise m çözümdür ve programdan çık

4.Adım: Eğer f(a)f(m)<0 ise b→m olarak belirle, Eğer f(m)f(b)<0 ise a→m olarak belirle

5.Adım i→i+1 olarak belirle ve 2.Adıma dön

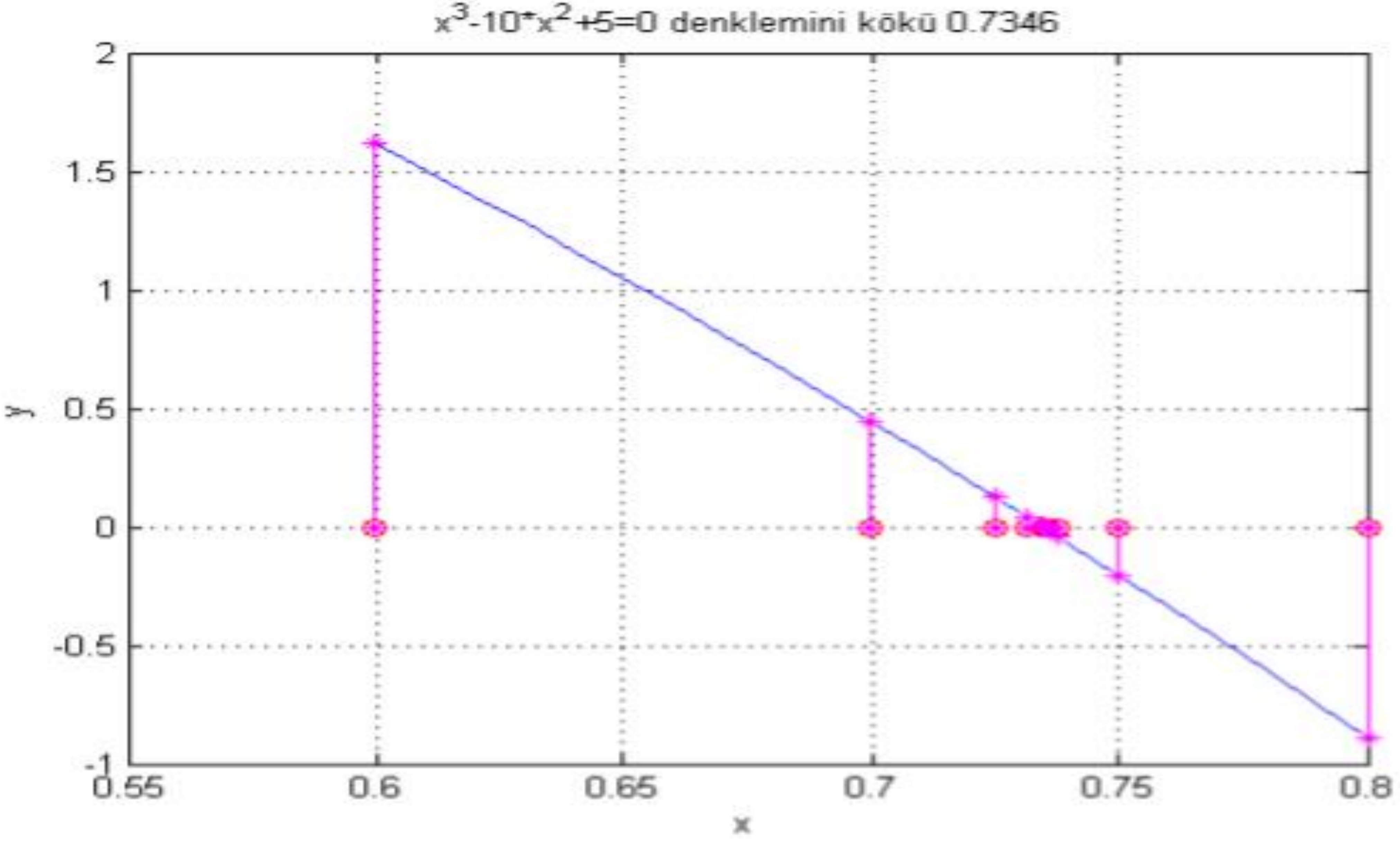
Örnek: f(x)=x^3-10x^2+5=0 fonksiyonunun (0.6,0.8) aralığındaki kökünü ikiye bölme yöntemi ile MATLAB programında yazınız.

```matlab
function ikiye_bolme %bisection method
clc;clear all;
a=0.6;b=0.8;
x=[a:0.01:b];
y=f(x);
it=1;
if f(a)*f(b)>0
    fprintf('x^3-10*x^2+5 fonksiyonunun (%4.2f,%4.2f) aralığında kökü yoktur',a,b)
else
    m=(a+b)/2;
    while(abs(f(m))>eps) & ((b-a)/2>eps)
        plot(a,0,'or');
        line([a a],[0,f(a)],[1 1],'Marker','*','LineStyle','-','Color','m');
        hold on;
        plot(b,0,'or');
        line([b b],[0,f(b)],[1 1],'Marker','*','LineStyle','-','Color','m');
        hold on;it=it+1;

        if f(a)*f(m)<0 b=m;
        elseif f(m)*f(b)<0 a=m;
            end

            m=(a+b)/2;
        end
    end
    plot(x,y);
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    title(['x^3-10*x^2+5=0 denklemini kökü ',num2str(m)])
    grid on
    fprintf('x^3-10x^2+5=0 denkleminin kökü %6.4f dir ve iterasyon %6.4f dir',m,it)

    function y=f(x);
    y=x.^3-10*x.^2+5;
```



x3-10*x2+5=0 denklemini kökü 0.7346
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
y
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
x