Kural $\int \frac{du}{k^2+u^2} = \frac{1}{k}\arctan\frac{u}{k} + c$ (k sbt)

Örnek $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + c$

Örnek $\int \frac{dx}{16+9x^2} = ?$

Çözüm: $\int \frac{dx}{4^2+(3x)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{4^2+u^2}$

$3x=u$
$3dx=du$
$dx=\frac{du}{3}$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\arctan\frac{u}{4} + c = \frac{1}{12}\arctan\frac{3x}{4} + c$

Örnek $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = ?$

Çözüm: $x^2-6x+13 = (x-3)^2+4$

$\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dx}{4+(x-3)^2} = \int \frac{du}{4+u^2}$

$x-3=u$
$dx=du$

$= \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} + c = \frac{1}{2}\arctan\frac{x-3}{2} + c$

Örnek $\int \frac{dx}{4x^2+8x+4} = ?$

Çözüm: $4x^2+8x+4 = (2x+2)^2$

$\int \frac{dx}{4x^2+8x+4} = \int \frac{dx}{(2x+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}$

$2x+2=u$
$2dx=du$

$= -\frac{1}{2u} + c = -\frac{1}{2(2x+2)} + c$

NOT $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ integralinde $\Delta = b^2-4ac = 0$ ise tam kare yapılıp $\int \frac{du}{u^2}$ ye dönüştürülür. $\Delta > 0$ ise basit kesirlere ayırarak çözülür. Basit kesirlere ayırma metodu ileride verilecektir.

2. KISMİ İNTEGRASYON METODU

Genelde iki fonksiyonun çarpımının integralinin hesaplanmasında kısmi integrasyon metodu kullanılır.

u ve v türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

formülü kullanılır. Bu metotla integral alırken verilen ifade iki parçaya ayrılır. Bunlardan birine u, diğerine dv denilir. Bu seçim yapılırken

(i) $\int dv$ integralinden v fonksiyonu kolayca bulunabilmelidir.

(ii) $\int v\,du$ integrali, $\int u\,dv$'den daha kolay hesaplanabilmelidir.

Örnek $\int x \cdot e^x\,dx = ?$

Çözüm: $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x\,dx}_{dv} = ?$

$$\text{dif.} \begin{cases} x = u \\ dx = du \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} e^x\,dx = dv \\ e^x = v \end{matrix}\right\} \text{int.}$$

$$\int x e^x\,dx = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{dx}_{du} = x e^x - e^x + c$$

Eğer $e^x = u$, $x\,dx = dv$ denilirse $e^x dx = du$, $\frac{x^2}{2} = v$ olacağından

$$\int x e^x dx = e^x \frac{x^2}{2} - \underbrace{\int \frac{x^2}{2} \cdot e^x\,dx}_{\int v\,du} \text{ olup}$$

sağ taraftaki integral daha da zorlaşıyor

Örnek $\int x \cdot \cos x\,dx = ?$

Çözüm:
$$D \begin{cases} x = u \\ dx = du \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} \cos x\,dx = dv \\ \sin x = v \end{matrix}\right\} i$$

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + c$$

Örnek $\int x^2 \ln x\,dx = ?$

Çözüm
$$\ln x = u, \quad x^2 dx = dv$$
$$\frac{dx}{x} = du, \quad \frac{x^3}{3} = v$$

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

Örnek $\int \arcsin x \, dx = ?$

Ödev $\int \arctan x \, dx = ?$

Çözüm: $\arcsin x = u$, $dx = dv$

$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$, $x = v$

$$\boxed{\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \underbrace{\int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_1}$$

I_1 'de $1-x^2 = t \Rightarrow -2x\,dx = dt \Rightarrow -x\,dx = \dfrac{dt}{2}$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Örnek $\int \ln x \, dx = ?$

Çözüm $\ln x = u$ $dx = dv$

$\dfrac{dx}{x} = du$ $x = v$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + c$$

Örnek $\int x^2 \sin x \, dx = ?$

Çözüm: $x^2 = u$ $\sin x \, dx = dv$

$2x\,dx = du$ $-\cos x = v$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2\underbrace{\int x \cos x \, dx}_{I_1}$$

$I_1 = \int x \cos x \, dx$ integraline tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + c$$

Ödev $\int e^{\sqrt{x}} dx = ?$

Örnek $\int \sin\sqrt{x} \, dx = ?$

Çözüm $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt \Rightarrow \int \sin\sqrt{x}\,dx = 2\int t \sin t \, dt$

$t = u$, $\sin t\,dt = dv$

$dt = du$, $-\cos t = v$

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = 2\int t \sin t \, dt = 2\left[-t\cos t + \int \cos t \, dt\right]$$
$$= 2\left[-t \cos t + \sin t\right] + c$$

$\{t = \sqrt{x}$ yazılır$\}$

Örnek $\int e^{3x} \cdot \sin 2x \, dx = ?$ **Ödev** $\int e^{2x} \cos 3x \, dx = ?$

Çözüm:
$$e^{3x} = u \qquad \sin 2x \, dx = dv$$
$$3e^{3x} dx = du \qquad -\frac{1}{2}\cos 2x = v$$

$$\int e^{3x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \underbrace{\int e^{3x} \cos 2x \, dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int \underbrace{e^{3x}}_{u} \underbrace{\cos 2x \, dx}_{dv} = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \sin 2x \, dx \qquad \left\{ \begin{array}{ll} e^{3x} = u & \cos 2x \, dx = dv \\ 3e^{3x} dx = du & \frac{1}{2}\sin 2x = v \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \int e^{3x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \sin 2x \, dx \right].$$

$$\left(1 + \frac{9}{4}\right) \int e^{3x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \sin 2x$$

$$\Rightarrow \int e^{3x} \sin 2x \, dx = -\frac{2}{13} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{13} e^{3x} \sin 2x + C$$

Örnek $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = ?$

Çözüm: $\int \frac{dx}{1+x^2}$ integraline kısmî int. uygulayalım:

$$\left\{ \frac{1}{1+x^2} = u \qquad dx = dv \quad \Rightarrow \quad -\frac{2x \, dx}{(1+x^2)^2} = du \, , \qquad x = v \right\}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\left[\int \frac{(x^2+1)dx}{(1+x^2)^2} - \int \frac{1 \, dx}{(1+x^2)^2} \right]$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{dx}{1+x^2} - 2 \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + c$$

Örnek $\int x(2+x)^4 dx = ?$

Çözüm:
$$x = u \qquad (2+x)^4 dx = dv$$
$$dx = du \qquad \frac{(2+x)^5}{5} = v$$

$$\int x(2+x)^4 dx = \frac{x(2+x)^5}{5} - \frac{1}{5} \int (2+x)^5 dx = \frac{x(2+x)^5}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{(2+x)^6}{6} + C$$