2020-2021 BAHAR DÖNEMİ

YMH214
SAYISAL ANALIZ
LAB. DERSİ

12.DERS

Arş. Gör. Alev KAYA

Sayısal İntegral

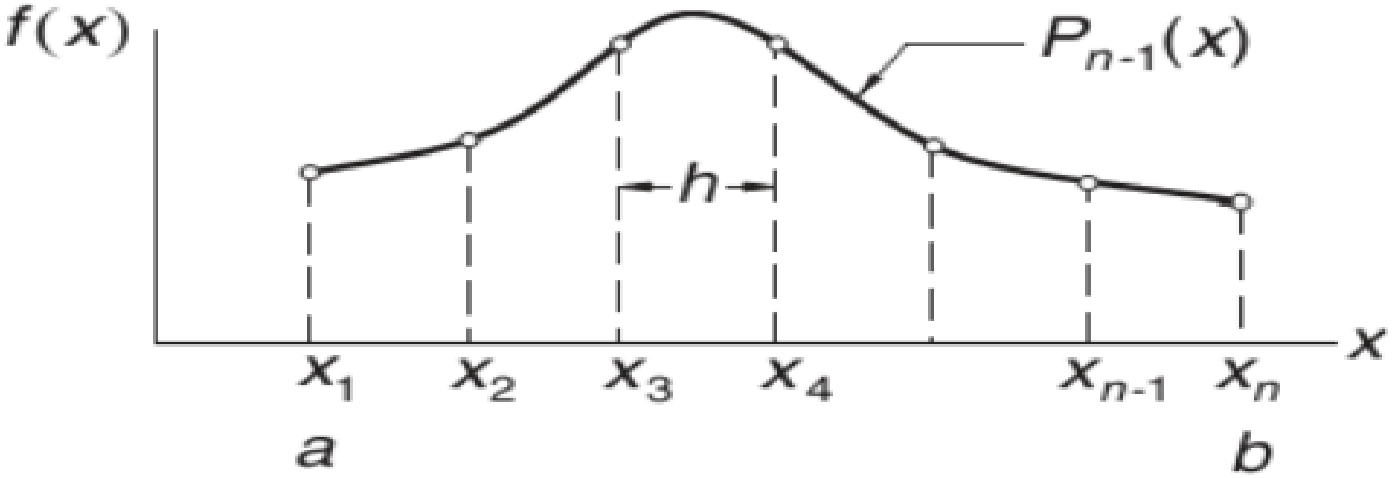
- A- Trapez (Yamuk) Kuralı
- B- Simpson Kuralı
- LAB: Trapez Kuralı ve Simpson Kuralı Matlab örnek programı

NÜMERİK İNTEGRALLEME (NUMERICAL INTEGRATION)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Bu bölümde integraline nümerik olarak elde etme yöntemlerini ele alacağız. Gerçekte nümerik integral, nümerik diferansiyelden daha kesin bir değere sahiptir. Bu yöntemler temelde 2 ye ayrılır. Birincisi Newton-Cotes formülleri ve Gaussian dörtlemesidir.

Newton – Cotes formüllerinde f(x) fonksiyonunun polinom yaklaşımı esas alınır.



(a,b) aralığını n-1 alt aralığa böldüğümüzde ki aralıkların boyu h=(b-a)/(n-1), fonksiyonun bu noktalarından geçen (n-1). Dereceden polinom uydurularak fonksiyonun integrali yerine polinomunu integrali hesaplanılır.

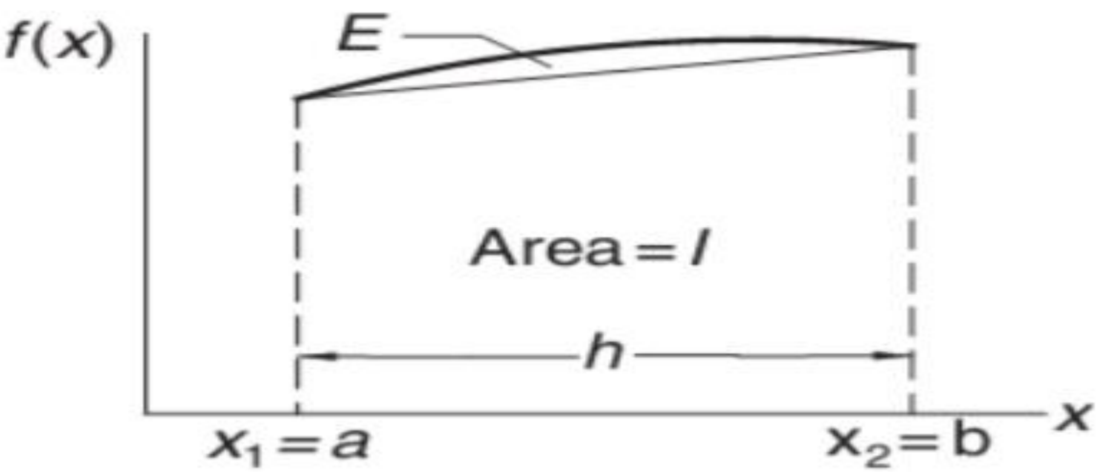
$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ell_i(x)$$

I= $\int_a^b f(x)\,dx$ = $\int_a^b P_{n-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\int_a^b \ell_i(x)dx\right] = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$ burada

$$A_i = \int_a^b \ell_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Bu formile Newton-Cotes formülü denir. n=2 durumunda formüle Yamuk yöntemi (trapezoidal rule), n=3 için Simpson yöntemi, n=4 için Simpson 3/8 kuralı denir.

YAMUK KURALI (TRAPEZOIDAL RULE)



Newton-Cotes formülünde n=2 durumudur. Bu durumda

$$\ell_1 = (x - x_2)/(x_1 - x_2) = -(x - b)/h.$$

$$\ell_2 = (x - x_1)/(x_2 - x_1) = (x - a)/h$$

$$A_1 = -\frac{1}{h}\int_a^b (x - b)\, dx = \frac{1}{2h}(b - a)^2 = \frac{h}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{h}\int_a^b (x - a)\, dx = \frac{1}{2h}(b - a)^2 = \frac{h}{2}$$

Ve bu değerleri Newton-Cotes formülünde yazdığımızda integrali,

$$\boxed{I = [\,f(a) + \,f(b)]\,\frac{h}{2}}$$

Olarak elde ederiz. Yamuk yöntemindeki hata

$$E = \int_a^b f(x)dx - I$$

➔

$$E = \frac{1}{2!}\int_a^b (x - x_1)(x - x_2)\,f''(\xi)dx = \frac{1}{2}\,f''(\xi)\int_a^b (x - a)(x - b)dx$$

$$= -\frac{1}{12}(b - a)^3\,f''(\xi) = -\frac{h^3}{12}\,f''(\xi)$$

Olarak verilir. Pratikte yamuk yöntemi (a,b) aralığının parçalanması ile elde edilir. (a,b) aralığını n-1 alt aralığa bölüp her bir alt aralıkta yamuk formülü ile integrali hesaplarsak,

$$I_i = [\,f(x_i) + \,f(x_{i+1})]\,\frac{h}{2}$$

Bu durumda integral tim alt aralıklardaki integrallerin toplamı olacaktır. Sonuç olarak

Bu durumda integral tim alt aralıklardaki integrallerin toplamı olacaktır. Sonuç olarak

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{n-1} I_i = [\,f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,\frac{h}{2}}$$

Formülüne genelleşmiş yamuk formülü denir. Burada herbir alt aralıktaki hata

$$E_i = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i)$$

olup, toplam hata

$$E = \sum_{i=1}^{n-1} E_i = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n-1} f''(\xi_i) \qquad = (n-1)\,\bar{f}'' \qquad -\frac{h^3}{12} \rightarrow$$

$$E = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$$

olarak veririz.

Alıştırma 1. $\int_0^4 400x(1-x)e^{-2x}\,dx$ integralini yamuk yöntemi ile hesaplayınız.

```
function yamuk_yontemi
clc;clear all;
a=0;b=4;n=400;h=(b-a)/n;
x=linspace(a,b,n);y=f(x);
Int=(y(1)+2*sum(y(2:n-2))+y(n))*h/2;
Matlab_Int=quad(@f,a,b);
area(x,y)
title(['Yamuk yöntemi ile integral=',num2str(Int),', quad(@func,a,b)=',
num2str(Matlab_Int)])
legend('400*x.*(1-x).*exp(-2*x)');
function y=f(x);
y=400*x.*(1-x).*exp(-2*x);
```

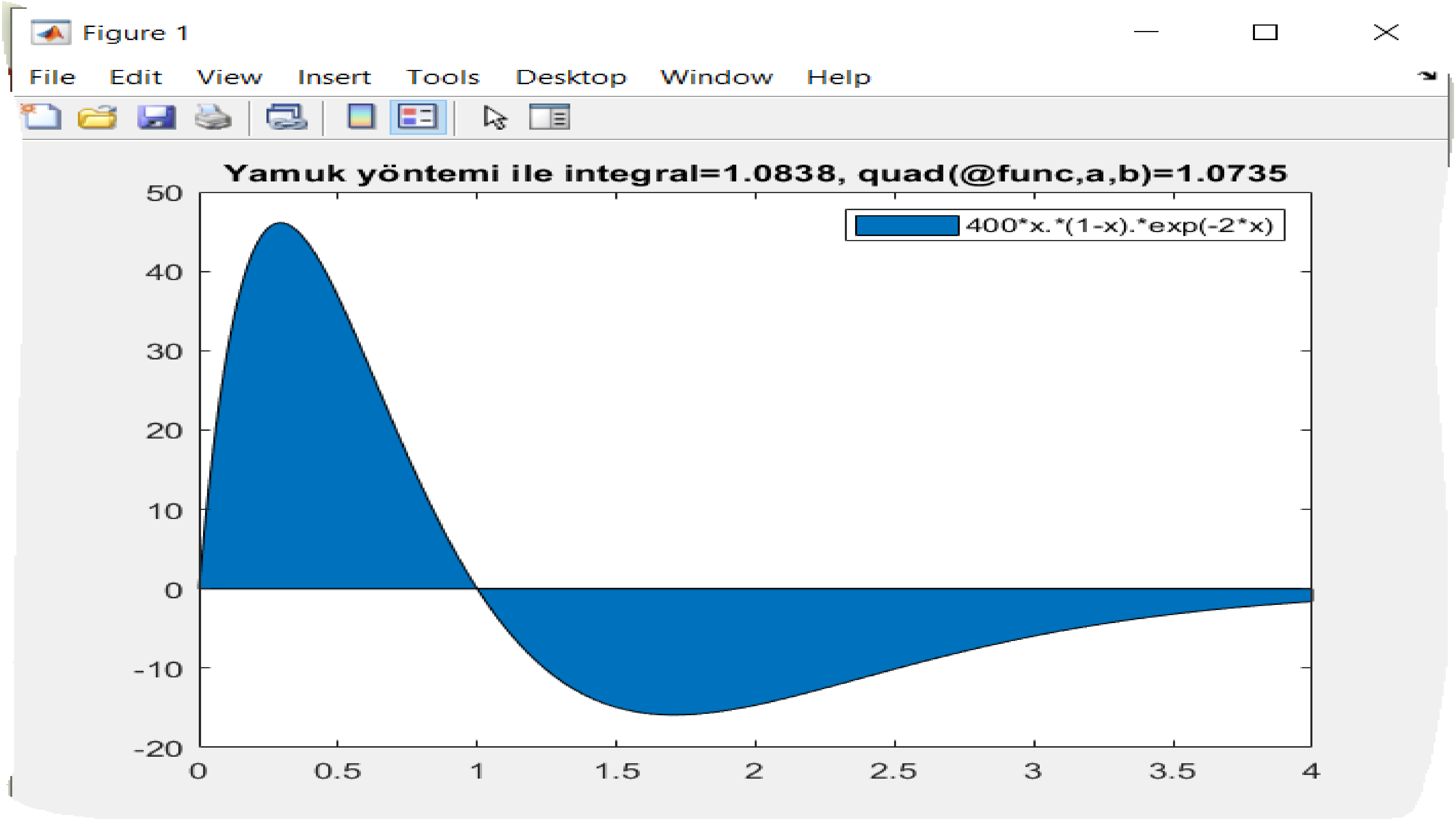
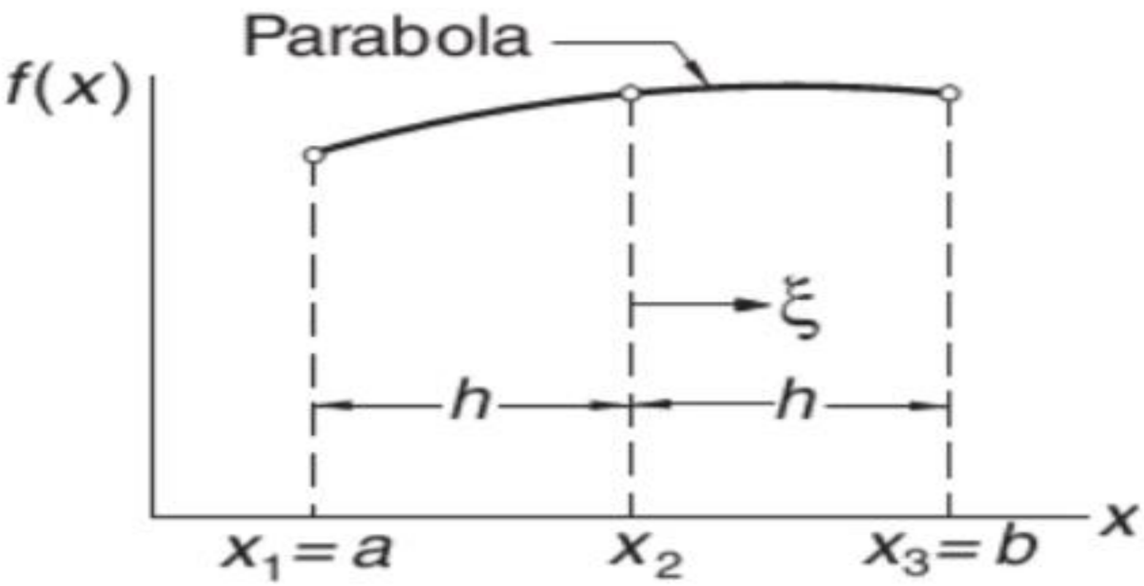


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Yamuk yöntemi ile integral=1.0838, quad(@func,a,b)=1.0735
400*x.*(1-x).*exp(-2*x)
50
40
30
20
10
0
-10
-20
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

SIMPSON KURALI (SIMPSON'S RULE)

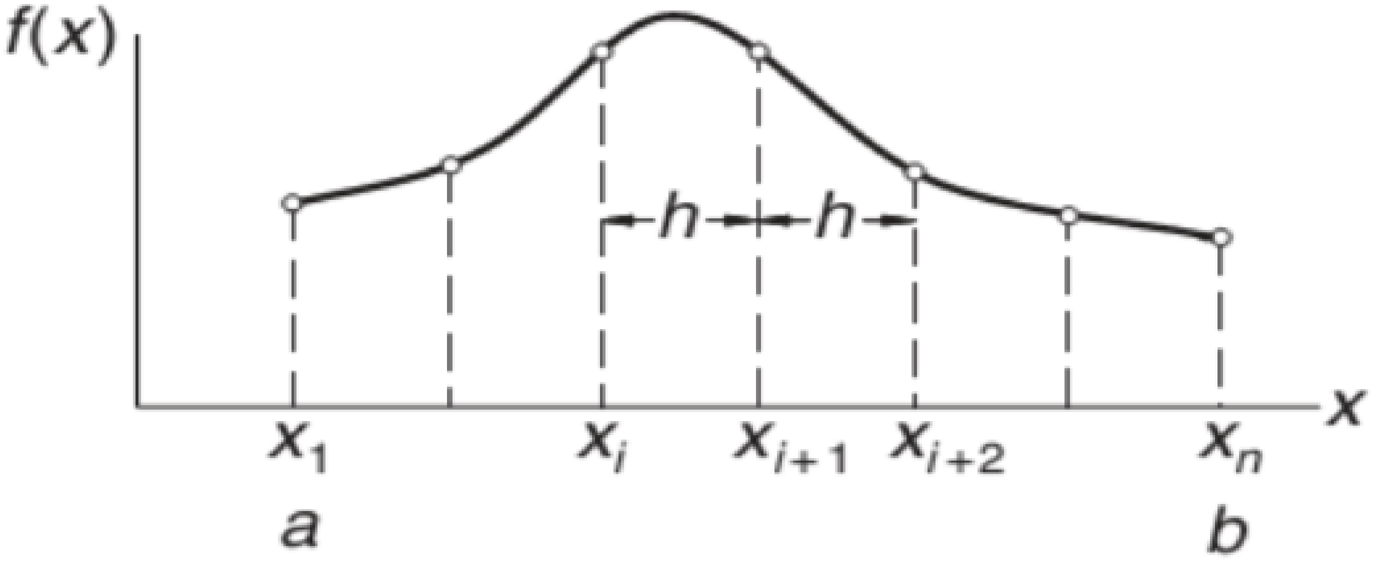


Simpson 1/3 kuralı Newton-Cotes formülünde n=3 yazarak elde edilir. Ve integral

$$I = \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \frac{h}{3}$$

Formülü ile hesaplanır.

Formülü ile hesaplanır.



(a,b) aralığını n-1 alt aralığa bölüp, herbir alt aralıkta Simpson yöntemini kullanırsak alt aralıktaki integral,

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \approx [\,f(x_i) + 4\,f(x_{i+1}) + \,f(x_{i+2})]\,\frac{h}{3}$$

elde ederiz. Böylece (a,b) aralığındaki integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1,3,\ldots}^{n-2} \left[\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx\right]$$

İntegralinden

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx I = [\,f(x_1) + 4\,f(x_2) + 2\,f(x_3) + 4\,f(x_4) + \cdots \\ \cdots + 2\,f(x_{n-2}) + 4\,f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,\frac{h}{3}\end{aligned}}$$

Genelleşmiş Simpson formülünü elde ederiz. Simspon yönteminin hatası ise

$$E = \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

Dir.

Alıştırma 2. $\int_0^4 400x(1-x)e^{-2x}\,dx$ integralini yamuk yöntemi ile hesaplayınız.

```
function Simpson13_yontemi
clc;clear all;
a=0;b=4;n=400;h=(b-a)/n;
x=linspace(a,b,n);y=f(x);
Int=(y(1)+2*sum(y(3:2:n-2))+4*sum(y(2:2:n-1))+y(n))*h/3;
Matlab_Int=quad(@f,a,b);
area(x,y)
title(['Simpson 1/3 yöntemi ile integral=',num2str(Int),', quad(@func,a,b)=', num2str(Matlab_Int)])
legend('400*x.*(1-x).*exp(-2*x)');
function y=f(x);
y=400*x.*(1-x).*exp(-2*x);
```

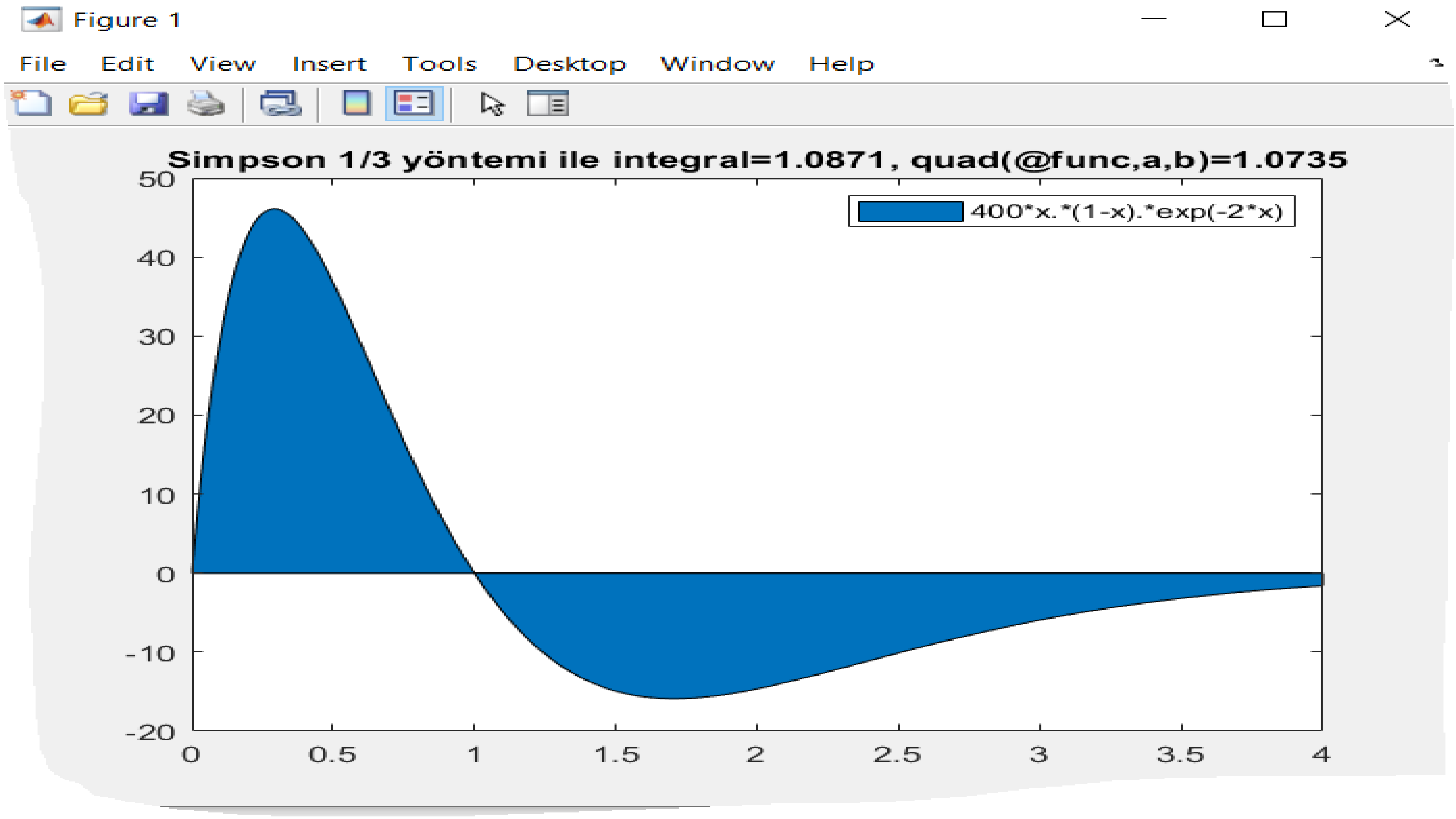


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Simpson 1/3 yöntemi ile integral=1.0871, quad(@func,a,b)=1.0735
400*x.*(1-x).*exp(-2*x)
50
40
30
20
10
0
-10
-20
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4