2020-2021 BAHAR DÖNEMİ

YMH214
SAYISAL ANALIZ
LAB. DERSİ

11.DERS

Arş. Gör. Alev KAYA

Sayısal Türev

- A- İleri Sonlu Farklar Yöntemi
- B- Geriye Sonlu Farklar Yöntemi
- C-Merkezi Sonlu Farklar Yöntemi
- LAB: Sayısal Türev Matlab örnek programı

- NÜMERİK DİFERANSİYEL (NUMERICAL DIFFERENTIATION)

Nümerik diferansiyelleme f(x) fonksiyonunun herhangi bir x=a noktasındaki türevinin, verilen $(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n.$ ayrık noktaları yardımı ile hesaplanmasıdır. Fonksiyonun sonlu fark türev yaklaşımları için Taylor serisinden faydalanılır.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \qquad \text{(a)}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) - \cdots \qquad \text{(b)}$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \qquad \text{(c)}$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) - \cdots \qquad \text{(d)}$$

Buradan yukarıdakı denklemleri topladığımız ve çıkardığımızda aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+h^2f''(x)+\frac{h^4}{12}f^{(4)}(x)+\cdots \tag{e}$$

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{h^3}{3}f'''(x)+\cdots \tag{f}$$

$$f(x+2h)+f(x-2h)=2f(x)+4h^2f''(x)+\frac{4h^4}{3}f^{(4)}(x)+\cdots \tag{g}$$

$$f(x+2h)-f(x-2h)=4hf'(x)+\frac{8h^3}{3}f'''(x)+\cdots \tag{h}$$

MERKEZİ SONLU FARK YAKLAŞIMLARI (CENTRAL DIFFERENCE APPROXIMATION)

(f) denkleminden

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \cdots$$

elde ederiz. Böylece sağ taraftaki ilk terimi tutarsak fonksiyonun 1. Türevinin merkezi sonlu fark yaklaşımı

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

ile ifade edilir. (e) denkleminden ise 2.türevin merkezi sonlu fark yaklaşımı

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) + \cdots$$

veya

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

ile ifade edilir. (f) ve (h) denklemlerinde 1.türevi elimine edersek 3.türev yaklaşımını

$$f'''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

olarak buluruz ve aynı şekilde (e) ve (g) denklemlerinde 2.türevi elimine edersek 4.türev yaklaşımını

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} + \mathcal{O}(h^2)$$

olarak elde ederiz.

MERKEZİ OLMAYAN SONLU FARKLAR (NONCENTRAL FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION)

Burada tek yönlü türevlerden bahsedeceğiz ve bu ifadeler ileri ve geri sonlu fark yaklaşımları (forward and backward finite difference approximations) olarak adlandırılır. (a) denkleminden

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \frac{h^3}{4!} f^{(4)}(x) - \cdots$$

elde ederiz veya sadece sağ taraftaki ilk terimi yazarsak

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

ileri fark yaklaşımını elde ederiz. Benzer şekilde (b) denkleminden de

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

geri fark yaklaşımını elde ederiz. Tabi burdaki O(h) kesme hatası merkezi farkta ki O(h^2) kadar iyi değildir. (a) ve (c) denklemlerinden 2.türev sonlu fark yaklaşımı

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

olarak bulunur.

Şimdi merkezi olmayan 1.türev yaklaşımındaki yuvarlama hatasını daha iyi hale getirelim.(a) ve (c) denklemlerinde yani

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \cdots$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4h^3}{3}f'''(x) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) + \cdots$$

denklemlerinde 2.türevi elimine edersek,

$$f(x+2h) - 4f(x+h) = -3f(x) - 2hf'(x) + \frac{2h^2}{3}f'''(x) + \cdots$$

sonucunu elde ederiz böylece daha iyi bir kesme hatası içeren 1.türev merkezi olmayan sonlu fark yaklaşımı

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

ile ifade edilir.

SONLU FARK YAKLAŞIMLARINDAKİ HATALAR (ERRORS IN FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION)

Bütün sonlu fark yaklaşımlarının katsayıları toplamı sıfırdır. Yuvarlama hatları böylece kaçınılmazdır. Yeterince küçük h değeri için $f(x)$, $f(x \pm h)$, $f(x \pm 2h)$, birbirine çok yakındır. Böylece sonlu fark yaklaşımlarındaki katsayılar ile çarpılıp toplandığında bazı terimler kaybolur.

Diğer yandan h yeterince büyük olduğunda ise kesme hatası oldukça büyük olmaktadır. Bu durumdan kurtulmak için aşağıdaki durumları takip ederiz.

1. Çift haneli hassaslıkta hesaplamalar kullanın
2. En az $\mathcal{O}(h^2)$ kararlılığına sahip sonlu fark yaklaşımlarını tercih etmelisiniz.

Alıştırma 1. $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonun x=1 noktasında 2.türevini sonlu fark yaklaşımı ile MATLAB da hesaplayınız.

Editor - C:\Matlab_Dersler\turev_sonlu_fark.m

turev_sonlu_fark.m

```
function turev_sonlu_fark
clc;clear all;
% ikinci türev yaklaşımı farklı h adımları içinh
h(1)=0.64;x=1;y2turev(1)=(f(x+h(1))-2*f(x)+f(x-h(1)))/h(1)^2;
fprintf('%6s | %17s | %17s | \n','h','6 haneli yaklaşım', '8 haneli yaklaşım')
fprintf('_____________________________________________________ \n')
fprintf('%6.5f | %7.6f \t \t \t| %9.8f \t \t |\n',h(1),y2turev(1),y2turev(1))
for i=2:10
 h(i)=h(i-1)/2;
 y2turev(i)=(f(x+h(i))-2*f(x)+f(x-h(i)))/h(i)^2;
 fprintf('_____________________________________________________ \n')
 fprintf('%6.5f | %7.6f \t \t \t| %9.8f \t \t |\n',h(i),y2turev(i),y2turev(i))
end
function y=f(x);
y=exp(-x);
```

Command Window

h	6 haneli yaklaşım	8 haneli yaklaşım
0.64000	0.380609	0.38060910
0.32000	0.371029	0.37102941
0.16000	0.368665	0.36866492
0.08000	0.368076	0.36807569
0.04000	0.367928	0.36792849
0.02000	0.367892	0.36789170
0.01000	0.367883	0.36788251
0.00500	0.367880	0.36788021
0.00250	0.367880	0.36787963
0.00125	0.367879	0.36787949

fx >>

MATLAB DA DİFERANSİYEL KOMUTLARI (DERIVATIVES IN MATLAB)

MATLAB da diferansiyel diff() komutu ile uygulanılır. diff komutu iki vektörün farkını alabildiği gibi aynı zamanda fonksiyonun sembol olarak yazılması durumunda türevi de hesaplayabilir. Ancak noktaları verilen analitik ifadesi verilmeyen fonksiyonlar için yine de diff komutu ile sonlu fark yaklaşım yöntemleri ile hesaplamalar yapılır.

Editor - C:\Matlab_Dersler\matlab_turev.m

turev_sonlu_fark.m | matlab_turev.m

```matlab
function matlab_turev
% MATLAB da diff komutu ile türev
clc;clear all;
syms x y
f=exp(-x);g=sin(x)*exp(-pi*y^2);
fx=diff(f,x);gx=diff(g,x);gy=diff(g,y);
xx=linspace(0,1,50);yy=xx;
[X Y]=meshgrid(xx,yy);
fi=inline(f);fxi=inline(fx);gi=inline(g);gxi=inline(gx);gyi=inline(gy);
figure
plot(xx,fi(xx),xx,fxi(xx),'r')
legend('f(x)=exp(-x)','df/dx=-exp(-x)');
title('f(x) fonksiyonu ve türevinin grafiği')
figure('Renderer', 'painters', 'Position', [10 10 900 600])
subplot(1,3,1)
mesh(X,Y,gi(X,Y));title('g(x,y)=sin(x)*exp(-pi*y^2) fonksiyonu');
subplot(1,3,2)
mesh(X,Y,gxi(X,Y));title('g_x(x,y)=cos(x)*exp(-pi*y^2) fonksiyonu');
subplot(1,3,3)
mesh(X,Y,gyi(X,Y));title('g_y(x,y)=-2*pi*y*sin(x)*exp(-pi*y^2)fonksiyonu');
```

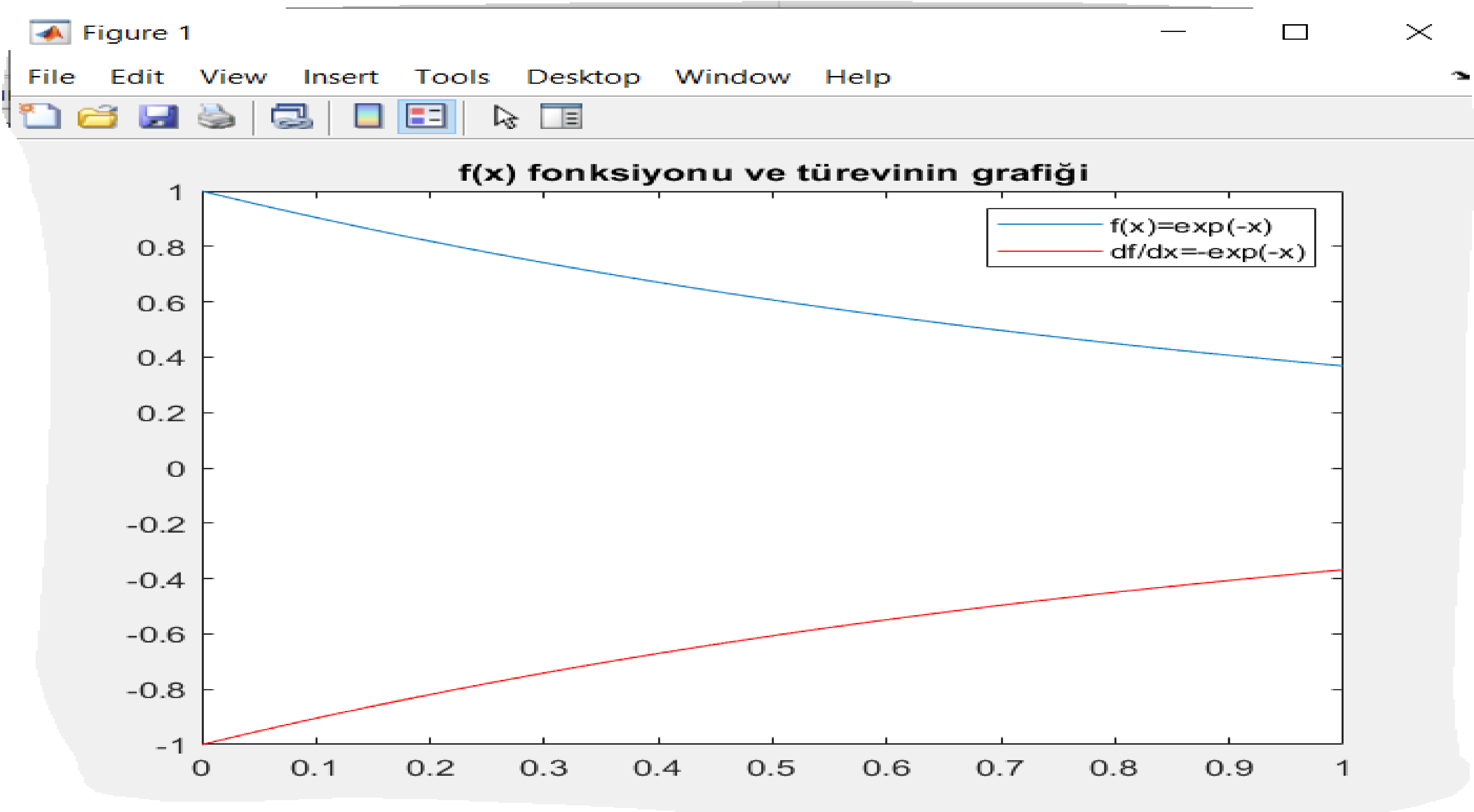
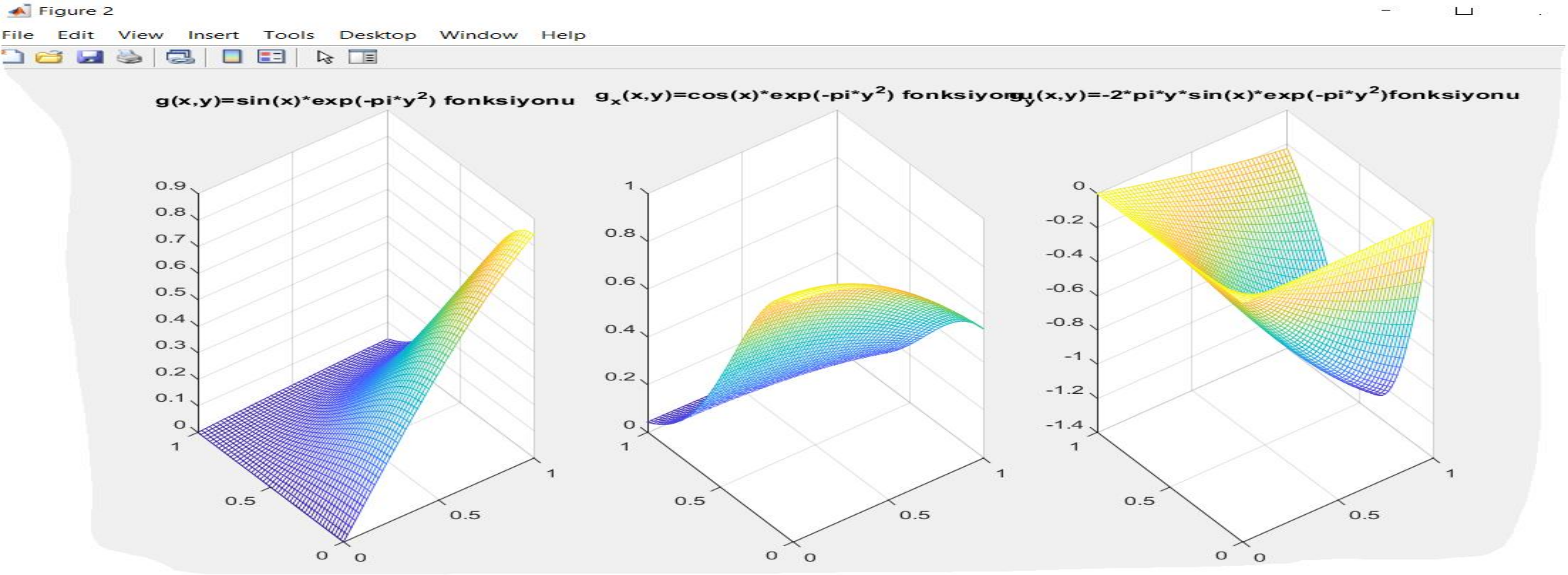


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
f(x) fonksiyonu ve türevinin grafiği
f(x)=exp(-x)
df/dx=-exp(-x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1



Ayrıca `d = gradient(y,h)` komutu verilen h adımı ve y noktaları için dy/dx türevini hesaplar ve `d2 = del2(y,h)` komutu da yine verilen h adımı ve y noktaları için 2.türevi hesaplar.