

YMH 214 SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği

1

6.Hafta

LİNEER (DOĞRUSAL) DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Lineer Denklemlerin Çözümü

DOĞRUDAN YÖNTEMLER:

- ❖ Cramer yöntemi
- ❖ Gauss Elimination Yöntemi-Gauss Jordan yöntemi

Doğrudan yöntemlerde, sistem, kolay bir şekilde çözülebilecek eşdeğer denklem sistemine dönüştürülür.

GİRİŞ

- Sayısal çözümlemede çok karşılaşılan doğrusal eşitliklerin çözümü için farklı sayısal çözümleme teknikleri geliştirilmiştir.
- Doğrusal eşitliklerde karşılaşılan değişken sayısı bir olabildiği gibi birden çok fazla da olabilir.
- Doğrusal denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerde genellikle değişken sayısının denklem sayısına eşit olma kuralı aranır.

Cramer Yöntemi

- Fiziksel uygulamalarda doğrusal denklem takımının çözümü önemlidir.
- Cramer yöntemi, denklem sistemlerinin çözümü için determinant değerlerini kullanmaktadır.
- Birbirlerinden doğrusal olarak bağımsız n bilinmeyenli n denklem aşağıdaki gibi yazılır:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Cramer Yöntemi

Sorul:

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$$

$$-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 8$$

$$3x_1 - 6x_2 + x_3 = 12$$

- a) Verilen denklem sistemlerini Cramer yöntemiyle çözünüz.
- b) Sorunun Matlab çözümünü yazınız.

Cramer Yöntemi

Sorunun çözümü için izlenecek adımlar:

1. Verilen denklem sistemi $[A][x]=[b]$ şeklinde yazılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$[A] \qquad [x] \qquad [b]$

Cramer Yöntemi

Sorunun çözümü için izlenecek adımlar:

2. $[A]$ matrisinin determinantı hesaplanır.

3. x_1 değişkeninin değerini bulmak için önce x_1 'i temsil eden 1. sütun yerine $[b]$ matrisinin değerleri yazılır. x_2 ve x_3 için de aynı şekilde matris oluşturulur.

$$\bar{A}x_1 = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 2 \\ 12 & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{A}x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ -2 & 8 & 2 \\ 3 & 12 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{A}x_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -2 & 7 & 8 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

Cramer Yöntemi

x_1, x_2 ve x_3 değişken değerlerini bulmak için:

$$x_1 = \det(Ax_1) / \det(A)$$

$$x_2 = \det(Ax_2) / \det(A)$$

$$x_3 = \det(Ax_3) / \det(A)$$

Cramer Yöntemi Matlab Çözümü

```
clear all;close all;clc
fprintf('Cramer yöntemini kullanarak  $2x + y + z = 3$ ,  $x - y - z = 0$ ,  $x + 2y + z = 0$  doğrusal denklemlerinin köklerini bulma \n');
A = [2 1 1; 1 -1 -1; 1 2 1]
b = [3; 0; 0]
Ax = [3 1 1 ; 0 -1 -1; 0 2 1 ]
Ay = [2 3 1; 1 0 -1; 1 0 1]
Az = [2 1 3; 1 -1 0; 1 2 0]
detA=det(A)
x = det(Ax)/detA
y = det(Ay)/detA
z = det(Az)/detA
|
```

Program Çıktısı

Cramer yöntemini kullanarak $2x + y + z = 3$, $x - y - z = 0$, $x + 2y + z = 0$ doğrusal denklemlerinin köklerini bulma

A =

```
2    1    1
1   -1   -1
1    2    1
```

detA =

3

Ax =

```
3    1    1
0   -1   -1
0    2    1
```

x =

1

Ay =

```
2    3    1
1    0   -1
1    0    1
```

y =

-2

Az =

```
2    1    3
1   -1    0
1    2    0
```

z =

3

Gauss Elimination Yöntemi

- ❖ Verilen denklem sistemlerinde denklem sayısı=bilinmeyen sayısı şeklinde olmalıdır.
- ❖ Matrislerin; üst ve alt üçgen ile köşegen gösterimleri temel alınarak sistemler çözülür.

Üst üçgen formu:

Üst üçgen formundaki eşitliğin n bilinmeyen için matris gösterimi, 3.71'de verilmektedir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination Yöntemi

Alt üçgen formu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Köşegen formu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination Yöntemi

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde izlenecek yol:

1. Adım: Denklem sistemlerini genişletilmiş katsayılar matrisi şeklinde yazmalıyız.
2. Adım: Elementer satır işlemleri ile genişletilmiş katsayılar matrisi üst/alt üçgen şeklinde yapılır. Genellikle üst üçgen tercih edilir.
3. Adım: Matrisin 1. satırının 1. elemanı 0 ise o satırı 2. veya 3. satır ile değiştirmemiz gerekir.
4. Adım: x, y, z gibi değişken değerleri en alttan başlanarak bulunmuş olur.

Gauss Elimination Yöntemi

Soru 2:

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 14$$

$$x_1 + 6x_2 - x_3 = 13$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$$

denklemlerini Gauss Elimination metodu ile çözünüz.

Çözüm:

1. Adım:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 1 & 6 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

2. Adım: $S_2 - 1/2S_1$ ve $S_3 - S_1$ gibi elementer satır işlemleri yapılarak üst üçgen elde edilmesi amaçlanır.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 0 & 6 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

3. Adım: Matrisin 1. satırının 1. elemanının 0 olup olmadığı kontrol edilir.
4. 2.adım uygulanarak sonuç matrisi elde edilir.

5. adım:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 8 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array} \right]$$

$2x+8y+2z=14$ denkleminde $z=-2$ ve $y=1$ değerleri yerine koyularak $x=5$ değeri elde edilir.

$2y-2z=6$ denkleminde $z=-2$ değeri yerine koyularak $y=1$ değeri elde edilir.

$-9z=18$ $z=-2$ elde edilir

Sonuç olarak $x=5$, $y=1$ $z=-2$ değerleri elde edilerek denklem sistemi çözülür.

Gauss Jordan Yöntemi

Gauss Elimination yöntemi

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gauss Jordan Yöntemi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination Matlab Çözümü

```
clear all;close all;clc
fprintf('Gauss Elimination yöntemini kullanarak  $2x + 8y + 2z = 14$ ,  $x+6y-z = 13$ ,  $2x -y + 2z = 5$  doğrusal denklemlerinin köklerini bulma \n');
A=[2 8 2;1 6 -1;2 -1 2];
%[2 8 2
% 1 6 -1
% 2 -1 2]
b=[14;13;5];
[n,~]=size(A);
x=zeros(n,1);
A
for i=1:n-1
    m= A(i+1:n,i)/A(i,i)
    A(i+1:n,:)=A(i+1:n,:)-m*A(i,:)
    b(i+1:n,:)=b(i+1:n,:)-m*b(i,:)
end

x(n,:)=b(n,+)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
    x(i,:)=(b(i,:)-A(i,i+1:n)*x(i+1:n,:))/A(i,i);
end
x
```

Program Çıktısı

Gauss Elimination yöntemini kullanarak $2x + 8y + 2z = 14$, $x+6y-z = 13$, $2x -y + 2z = 5$ doğrusal denklemlerinin köklerini bulma

A =

2	8	2
1	6	-1
2	-1	2

m =

-4.5000

m =

0.5000
1.0000

A =

2	8	2
0	2	-2
0	0	-9

A =

2	8	2
0	2	-2
0	-9	0

b =

14
6
18

b =

14
6
-9

x =

5
1
-2