POISSON DAĞILIMI

Araştırmacıların en çok kullandıkları olasılık dağılımlarından birisi de Poisson dağılımıdır. Poisson dağılımına küçük olasılıklar dağılımı da denir. Belli ve çok dar bir zaman aralığında az rastlanan olaylar bu tür dağılım gösterirler.

Poisson dağılımında zaman öyle küçük parçalara bölünür ki, bu küçük zaman parçalarında birden fazla olayın gerçekleşmesi istenmez. Başka bir ifade ile, belirlenen o dar zaman birimi içerisinde olay ya gerçekleşir ya da gerçekleşmez. Bu nedenden dolayı, binom dağılımı n tane deneydeki başarı sayısı ile ilgilenirken Poisson dağılımı da belirli bir aralıkta ilgilenilen sonucun sayısı ile uğraşır.

Araştırıcının Poisson dağılımını kullanabilmesi için aşağıdaki koşulların gerçekleştiğini görmesi gerekir.

a) İki ayrık zaman aralığında (ya da uzayda) ortaya çıkan olaylar birbirinden bağımsızdır.

b) Tanımlanan aralıkta (ya da uzayda) ilgilenilen olayın ortaya çıkma olasılığı sabit olup, değişmemektedir.

Tanım: Poisson Dağılımı

X rassal değişkeni yukarıdaki özellikleri taşıyorsa, ona Poisson Rassal Değişkeni ve X'in fonksiyonuna da Poisson Dağılımı adı verilir ve $\lambda > 0$ olmak üzere aşağıdaki gibi gösterilir.

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & , x = 0, 1, 2, \ldots \text{ için} \\ 0 & , \text{d.d.} \end{cases}$$

Poisson dağılımının tek bir parametresi vardır; o da λ'dır. Bu parametre kesirli değerlere de sahip olabilir.

Poisson Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu

$$M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} (\lambda e^t)^x \frac{1}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\left[1 + \frac{\lambda . e^t}{1!} + \frac{(\lambda e^t)^2}{2!} + \dots\right]$$

$$= e^{-\lambda} . e^{\lambda e^t}$$

$$= e^{\lambda(e^t - 1)}$$

olarak bulunur.

Poisson Dağılımının Beklenen Değer ve Varyansı

Poisson dağılımının beklenen değer ve varyansının değeri, dağılımın parametresi olan λ'ya eşittir. Poisson dağılımında $E(X)$ ve $V(X)$; birincisi beklenen değer tanımından ikincisi de moment çıkaran fonksiyonun özelliklerinden yararlanılarak iki farklı şekilde bulunabilir.

a) Beklenen Değer Kavramından Yararlanarak:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x . \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \lambda . e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots\right)$$

$$= \lambda . e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$= \lambda$$

bulunur.

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} (x(x-1)+x) \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\left[\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} x . \frac{\lambda^x}{x!}\right]$$

$$= e^{-\lambda}\left[\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2} . \lambda^2}{(x-2)!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1} . \lambda}{(x-1)!}\right]$$

$$= e^{-\lambda}\left(\lambda^2 e^{+\lambda} + \lambda . e^{+\lambda}\right) = \lambda^2 + \lambda \text{ olur.}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \text{ bulunur.}$$

b) Moment Çıkaran Fonksiyondan Giderek:

$$M(t) = E(e^{tx}) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M'(t) = \lambda.e^t.e^{\lambda(e^t-1)} \Rightarrow E(X) = M'(0) = \lambda$$

$$M''(t) = \lambda.e^t.e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda.e^t\,\lambda.e^t e^{\lambda(e^t-1)} \Rightarrow E(x^2) = M''(0) = \lambda + \lambda^2$$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$ bulunur.

Binom Dağılımının Poisson Dağılımına Yaklaşımı

X, Binom dağılımına sahip bir rassal değişken olsun. Deney sayısı n'nin çok artırıldığını ve ilgilenilen sonuçların anakütledeki oranının da çok küçük olduğunu varsayalım. Yani, $n \to \infty$ ve $p \to 0$. Bu durumda $n.p = \lambda$ sabit bir sayı olmak üzere, n sonsuza giderken Binom dağılımı Poisson dağılımına yaklaşır.

$$\lim_{n\to\infty} B(n,p) = \lim_{n\to\infty}\left[\binom{n}{x}p^x.q^{n-x}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n.(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x!}.\frac{\lambda^x}{n^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{\underbrace{n.n.\dots.n}_{x \text{ tane}}}.\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right]$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right] = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} B(n,p) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ bulunur.

Bazla bir ifade ile n sonsuza giderken, Binom dağılımı Poisson dağılımına yaklaşır. n sayısı ne kadar büyük ve p de ne kadar küçük olursa, bu yaklaşım o kadar iyi olur.