BEŞİNCİ BÖLÜM

SÜREKLİ DAĞILIMLAR

NORMAL DAĞILIM

- Tek Değişkenli Normal Dağılım
- İki Değişkenli (Bivariate) Normal Dağılım
- Çok Değişkenli Normal Olasılık Fonksiyonu

LOG-NORMAL DAĞILIM

DÜZGÜN (TEK-DÜZE) DAĞILIM

ÜSTEL DAĞILIM

GAMMA, BETA, CAUCHY VE WEIBULL DAĞILIMLARI

ÖRNEKLEME DAĞILIMLARI

- Ki-Kare Dağılımı
- t-Dağılımı
- F-Dağılımı
- Fisher-Z Dağılımı

Kesikli dağılımların en büyük özelliği; bunların sahip oldukları rassal
değişkenlerin belli bir değeri almaları idi. Bu nedenle, araştırıcılar, kesikli dağılımlardan yararlanarak rassal değişkenlerin belli bir değeri alma olasılıklarını bulmaya çalışmışlardır.

Birçok sürekli rassal değişkenin belli bir değeri almaları uygulamada sözkonusu değildir. Örneğin, ampüllerin dayanma süreleri, yetişkinlerin boyları ve insanların IQ değerleri vb... gibi. Böyle durumlarda, rassal değişkenlerin tek bir değer almasından daha çok, belirli bir aralıkta olup olmaması, araştırıcıyı daha çok ilgilendirir. Rassal değişkenleri sürekli olan ve belirli bir aralıkta bulunmasının olasılığı ile ilgilenen dağılımlara sürekli dağılımlar adı verilir.

NORMAL DAĞILIM

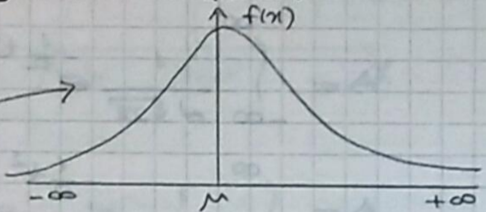
İstatistikte en çok kullanılan ve çok geniş bir uygulama alanına sahip olan normal dağılım (Laplace_Gauss dağılımı da denir) ilk olarak 1733 yılında De Moivre tarafından ortaya atılmıştır.

Normal dağılım gerek kendi özelliğinden dolayı gerekse teoremler yardımıyla uygulamada o kadar geniş alanlar yaratır ki, bazı rassal değişkenlerin dağılımlarını, ister kesikli ister sürekli olsun, normal dağılıma yaklaştırma isteği ağırlık kazanır. Normal dağılım, başlıca üç alanda yoğun olarak kullanılmaktadır.

a) Uygulamada ele alınan birçok değişken normale benzer bir dağılım gösterir. Örneğin, ölçme hataları, bir fabrikada üretilen vidaların uzunlukları, belli bir sürede uçakların almış olduğu yol vb... gibi. Aslında, bu tür rassal değişkenlerin dağılımları tam olarak bir normal dağılıma uymasa da yaklaştıkları görülür. Fakat, uygulamada, çok sayıda birbirinden bağımsız olarak ortaya çıkan rassal değişkenlerin bir normal dağılım gösterdikleri kabul edilir.

b) Normal dağılımın, istatistik tümevarım ve örnekleme teorisinde önemli bir ağırlığı vardır. Çünkü, örneklemden elde edilen aritmetik ortalama, toplam gibi bazı niteleyici değerlerin örnekleme dağılımları, anakütle normal dağılmasa bile, örneklem hacmi n yeterince büyük seçildiğinde ($n \geq 30$) normale yaklaşır.

c) Örnekleme dağılımları olan Ki_Kare, t ve F dağılımları, Normal Dağılımdan türetilmiştir. Ayrıca, örneklem hacmi n arttıkça, normal dağılım Binom ve Poisson dağılımlarının çok iyi bir yaklaşımını oluşturur.



Tek Değişkenli Normal Dağılım

Tanım: Normal Dağılım

X rassal değişkeni, gerçel sayılar uzayında tanımlanmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} & , \ \sigma > 0, \ -\infty < x < \infty \\ 0 & , \ d.d. \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse normal dağılmıştır. Burada $\pi = 3.1415$ ve $e = 2.7183$ değerlerini alan sabit sayılardır. μ ve σ^2 normal dağılımın parametreleridir. X rassal değişkeninin dağılımı normal ise kısaca şöyle gösterilir.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Normal dağılımın genel görünüşü aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi bir çana benzediğinden bu grafiğe çan eğrisi de denir.

Normal dağılımın beş tane önemli özelliği vardır.

Dağılım, aritmetik ortalama etrafında simetriktir.

Normal dağılımın aritmetik ortalaması, Modu ve Medyanı birbirine eşittir.

$y=0$ doğrusu aynı zamanda bir yatay asimptottur.

Dağılım, $X=\mu$ değerinde bir maksimuma sahiptir. $X=\mu$, dağılımda yerine konulursa, maksimum noktayı veren y değeri

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$ olarak elde edilir.

Normal eğri ile X_ekseni arasında kalan alanın değeri bire eşittir.

$f(x)$, bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğu için toplam alan bire eşittir.

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=1$$

İSPAT:

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow \frac{dx}{\sigma}=dt \Rightarrow dx=\sigma . dt$$

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}.\sigma.dt$$

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

bulunur. $f(x)$ bir pozitif fonksiyon olduğu için $A=1$ yerine $A^2=1$ gösterilirse, o da aynı anlamı taşır. O zaman

$$A.A=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t_1^2}dt_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t_2^2}dt_2\right)$$

$$\Rightarrow A^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)}dt_1dt_2$$

$$J(t_1,t_2)=\begin{pmatrix}\frac{\partial t_1}{\partial r} & \frac{\partial t_1}{\partial \theta}\\ \frac{\partial t_2}{\partial r} & \frac{\partial t_2}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

Kutupsal ~~[illegible]~~ dönüştürmelerden faydalanarak

$$t_1=r.\cos\theta \qquad t_2=r.\sin\theta$$

olarak yazılırsa

$$J(t_1,t_2)=r.\cos^2\theta+r.\sin^2\theta=r$$

$$J(t_1,t_2)=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

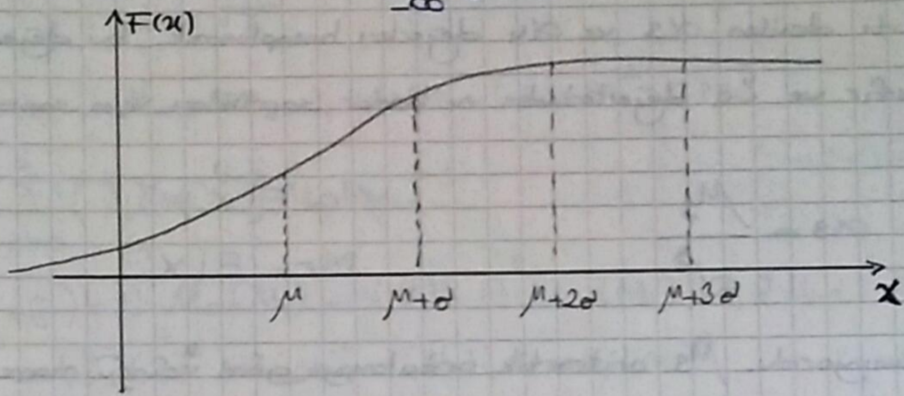
olur.

$$A^2=\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{r=0}^{\infty}}_{0<r<\infty}\underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi}}_{0<\theta<2\pi}2\pi r e^{-\frac{1}{2}r^2}d\theta dr=\int_0^{\infty}re^{-\frac{1}{2}r^2}dr=1$$

Tanım: Birikimli Normal Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

X rassal değişkeni $f(x)$ gibi bir normal olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. O zaman, X in birikimli dağılımı şöyledir.

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt$$



Normal Dağılımın Moment Çıkaran Fonksiyonu

Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu

$$M(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=e^{\mu.t+\frac{\sigma^2.t^2}{2}}$$

Normal Dağılımın Beklenen Değer ve Varyansı

Normal dağılımın beklenen değeri $E(X)=\mu$ ve varyansı da $V(X)=\sigma^2$ dir.

$$M(t)=e^{\mu.t+\frac{\sigma^2.t^2}{2}} \Rightarrow E(X)=M'(0)=\mu$$

$$M'(t)=(\mu+\sigma^2.t).e^{\mu.t+\frac{\sigma^2.t^2}{2}} \Rightarrow M'(0)=\mu$$

$$E(x^2)=M''(0)=\sigma^2+\mu^2$$

$$M''(t)=\sigma^2\left(e^{\mu.t+\frac{\sigma^2.t^2}{2}}\right)+(\mu+\sigma^2.t)^2e^{\mu.t+\frac{\sigma^2.t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow M''(0)=\sigma^2+\mu^2$$

$$V(X)=E(x^2)-[E(x)]^2 \Rightarrow V(X)=\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$$