# 2. BÖLÜM

## TÜREV



Tanım: Eğer $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in A$ noktası verilsin.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

limiti veya $x = a+h$ alınmasıyla elde edilen

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

limiti varsa $f$ fonksiyonu $a$ noktasında türevlenebilirdir denir. Bu limitin değerine $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki türevi denir ve bu türev

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad Df(a)$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

Eğer,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{veya} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

limitleri varsa bu limite $f$ nin $a$ noktasındaki sağdan türevi denir ve $f'(a^+)$ ile gösterilir.

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{veya} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

limitleri varsa bu limite $f$ nin $a$ noktasındaki soldan türevi denir ve $f'(a^-)$ ile gösterilir.

Teorem: Bir $a$ noktasındaki türevin var olması için gerek ve yeter şart $a$ noktadaki sağ ve sol türevlerin birbirlerine eşit olmasıdır.

ÖRNEK: $f(x) = x^3 + 2x$ fonksiyonunun $a=1$ noktasındaki türevini bulalım:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim \frac{x^3+2x-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+3)}{\cancel{x-1}} = 5$$

ÖRNEK: $f(x)=|x|$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

Çözüm: $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}$ olur.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\frac{x}{x}=1\\[2ex]\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\frac{-x}{x}=-1\end{array}\right\}\quad 1\neq -1$$

olduğundan $x=0$ noktasında türev yoktur.

TEOREM: $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a\in A$ olsun. Eğer $f$ fonksiyonu $a$ noktasında türevli ise o noktada da süreklidir.

NOT: Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Yani bir fonksiyon bir noktada sürekli olduğu halde o noktada türevli olmayabilir. Örneğin $f(x)=|x|$ fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli olduğu halde türevli değildir.

TÜREV ALMA KURALLARI

1. Sabit Fonksiyonun Türevi:

Eğer $c$ bir sabit ise $\boxed{c'=0}$ dır.

* $y=3$ ise $y'=0$ dır.
* $f(x)=1+\sqrt{3}$ ise $f'(x)=0$ dır.

* $(\pi^2)'=0$
* $e'=0$

2. $f(x)=x^n$ fonksiyonunun Türevi:

$n\in\mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere, $f(x)=x^n$ fonksiyonunun türevi

$$\boxed{f'(x)=n\cdot x^{n-1}}$$

dir.

* $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$ * $y = -2x \Rightarrow y' = -2$

* $y = 5x \Rightarrow y' = 5$ * $y = x \Rightarrow y' = 1$

* $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = ?$

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

* $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = ?$

$y = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow y' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

* $y = \frac{x}{3}$ ise $y' = \frac{1}{3}$

* $y = x^{\sqrt{2}}$ ise $y' = \sqrt{2}\cdot x^{\sqrt{2}-1}$

③ $y = [c \cdot f(x)]$ fonksiyonunun Türevi :

$c$ bir sabit ise

$$\boxed{[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)}$$

dir.

* $y = 2x^3 \Rightarrow y' = [2x^3]' = 2\cdot(x^3)' = 2\cdot 3x^2 = 6x^2$

* $y = 5\cdot\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' = [5\cdot\sqrt[3]{x^2}]' = 5\cdot[\sqrt[3]{x^2}]'$

$= 5\cdot[x^{\frac{2}{3}}]' = 5\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{10}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$

④ İki fonksiyonun Toplamının Türevi:

$f$ ve $g$, $x \in A$ noktasında türevlenebilen iki fonk. ise

$$\boxed{[f(x) \mp g(x)]' = f'(x) \mp g'(x)}$$

dir.

* $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 3$

* $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} - 40x + \sqrt{5} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = ?$

$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - (-2)x^{-3} - 40 + 0 = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - 40$

$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = 91.$

⑤ İki Fonksiyonun Çarpımının Türevi:

f ve g, x noktasında türevli iki fonksiyon ise f·g de x noktasında türevli olup

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$$

dır.

* $f(x) = (x^2-1)\cdot(1-x^3) \Rightarrow f'(-1) = ?$

$$f'(x) = (x^2-1)'\cdot(1-x^3) + (1-x^3)'\cdot(x^2-1)$$
$$= 2x(1-x^3) + (-3x^2)\cdot(x^2-1)$$
$$\Rightarrow f'(-1) = 2\cdot(-1)\cdot(1-(-1)^3) + (-3(-1)^2)((-1)^2-1) = -4.$$

* $y = 3\cdot(x^2+1) \Rightarrow y' = ?$

I. yol: $y' = (3)'\cdot(x^2+1) + (x^2+1)'\cdot 3 = 0\cdot(x^2+1) + 3\cdot 2x = 6x$

II. yol: $y' = [3\cdot(x^2+1)]' = 3\cdot(x^2+1)' = 3\cdot 2x = 6x$ (③ nolu özellikten)

⑥ İki Fonksiyonun Bölümünün Türevi:

f ve g, x noktasında türevli iki fonk. ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

dır.

* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2} \Rightarrow f'(0) = ?$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'\cdot(x+2) - (x+2)'\cdot(x^2+1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x(x+2) - 1\cdot(x^2+1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$$

olur. $x=0$ yazılırsa $f'(0) = -\frac{1}{4}$

$*\quad y = \frac{3}{x} \Rightarrow y' = ?$

I) $y' = \frac{3' \cdot x - x' \cdot 3}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 3}{x^2} = -\frac{3}{x^2}$

II) $y = 3x^{-1} \Rightarrow y' = -3 \cdot x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$

$*\quad y = \frac{2}{3+x^2}$ ,

$*\quad y = \frac{3+x^2}{2} \Rightarrow y' = ?$ (35)

I. yol: $y' = \frac{(3+x^2)' \cdot 2 - 2' \cdot (3+x^2)}{2^2} = \frac{4x}{4} = x$

II. yol: $y = \frac{1}{2}(3+x^2)$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot (3+x^2)'$

$= \frac{1}{2} \cdot 2x = x$

⑦ Bileşke Fonksiyonun Türevi:

$f$ fonk. $x$'de, $g$ fonk. $f(x)$'de türevli ise $g \circ f$ fonksiyonu $x$'de türevli olup

$$(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

dir. Bu kural, ikiden fazla fonksiyonun bileşkesinin türevinde de kullanılır.

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'[g(h(x))] \cdot [g(h(x))]'$$

$$= f'[g(h(x))] \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Bileşke fonksiyonların zincir kuralı denilen bu türev alma kuralı $y = f(u(v(x)))$ şeklindeki bir bileşke fonksiyon için

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

biçiminde de verilebilir.

ÖRNEK: $y = f(u) = u^3 + u^2$, $u = g(z) = z^2 - 1$, $z = h(x) = x^2 - x$ ise

$\frac{dy}{dx}(-1) = f'(-1) = ?$

ÇÖZÜM: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = (3u^2 + 2u) \cdot (2z) \cdot (2x-1)$ dir.

$x = -1$ için, $z = 2$ ve $u = 3$ olacağından

$\frac{dy}{dx}(-1) = f'(-1) = (3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot (-1) - 1) = -396$ dır.

Zincir kuralından yararlanarak $y=[f(x)]^n$ şeklindeki bir üslü fonksiyonun türevinin

$$\boxed{y' = n.[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)}$$

olduğu görülebilir.

* $y = (4x^2-5x)^3 \Rightarrow y' = ?$

$y' = 3.(4x^2-5x)^2.(4x^2-5x)' = 3.(4x^2-5x)^2.(8x-5)$

* $y = \sqrt[3]{2x^2-3x+1} \Rightarrow y' = ?$

$y = (2x^2-3x+1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}(2x^2-3x+1)^{-\frac{2}{3}}(4x-3)$

* $y = \dfrac{3}{(x^2-2)^4} \Rightarrow y' = ?$

$y = 3(x^2-2)^{-4} \Rightarrow y' = -12.(x^2-2)^{-5}.2x$

## 8 Trigonometrik Fonksiyonların Türevi:

1) $(\sin x)' = \cos x$
2) $(\cos x)' = -\sin x$
3) $(\tan x)' = 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
4) $(\cot x)' = -(1+\cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$
5) $(\sec x)' = \sec x.\tan x$
6) $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x.\cot x$

$u = u(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere

1) $(\sin u)' = u'.\cos u$
2) $(\cos u)' = -u'.\sin u$
3) $(\tan u)' = u'(1+\tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
4) $(\cot u)' = -u'(1+\cot^2 u)$
$= -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
5) $(\sec u)' = u'(\sec u.\tan u)$
6) $(\operatorname{cosec} u)' = -u'(\operatorname{cosec} u \cot u)$