$x \to x_0$ ... $(a > 0,\ a \neq 1)$

8.1.4. Belirsizlik Durumları:

Çarpım, bölüm, toplam ve kuvvet halinde bulunan ifadeler değişkenin belli bir değeri için $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

1) $a+(+\infty) = +\infty$ 1') $a+(-\infty) = -\infty$

2) $a-(+\infty) = -\infty$ 2') $a-(-\infty) = +\infty$

3) $a.(+\infty) = \infty$, $(a > 0)$ 3') $a.(+\infty) = -\infty$, $(a < 0$ ise$)$

4) $a.(-\infty) = -\infty$, $(a>0$ ise$)$ 4') $a.(-\infty) = +\infty$, $(a<0$ ise$)$

5) $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$ 5') $(+\infty).(+\infty) = +\infty$

6) $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$ 6') $(-\infty).(-\infty) = +\infty$

7) $(-\infty).(+\infty) = -\infty$ 7') $(-\infty).(-\infty) = +\infty$

8) $\frac{a}{+\infty} = 0$ 8') $\frac{a}{-\infty} = 0$

9) $\frac{+\infty}{a} = +\infty$, $(a>0$ ise$)$ 9') $\frac{+\infty}{a} = -\infty$, $(a<0$ ise$)$

10) $(+\infty)-(+\infty)$ = belirsiz 10') $(+\infty)+(-\infty)$ = belirsiz

11) $0.(+\infty)$ = belirsiz 11') $0.(-\infty)$ = belirsiz

12) $\frac{+\infty}{+\infty}$ = belirsiz 12') $\frac{+\infty}{-\infty}$ = belirsiz

13) $\frac{0}{0}$ = belirsiz

14) $1^{(+\infty)}$ = belirsiz 14') $1^{(-\infty)}$ = belirsiz

15) $(+\infty)^0$ = belirsiz 15') $(-\infty)^0$ = belirsiz

16) 0^0 = belirsiz

şeklinde olabilirler. Bunlardan karşılarında belirsiz yazılı olanlara belirsiz şekiller denir. Belirsiz şekillerin gerçek değerlerini bulmak için limit işlemi kullanılır. Ayrıca bu belirsizliklerin hesabında daha kullanışlı olan L'Hospital kuralını ilerde vereceğiz.

I) m ve n doğal sayılar olmak üzere

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

kesirli rasyonel fonksiyonu $x \to \infty$ için $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğini verir. Buna göre

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

ifadesini hesaplıyacağız. Bu fonksiyon

$$f(x)=\frac{a_m x^m\left(1+\frac{a_{m-1}}{a_m}\cdot\frac{1}{x}+\dots+\frac{a_1}{a_m}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{a_o}{a_m}\cdot\frac{1}{x^m}\right)}{b_n x^n\left(1+\frac{b_{n-1}}{b_n}\cdot\frac{1}{x}+\dots+\frac{b_1}{b_n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{b_o}{b_n}\cdot\frac{1}{x^n}\right)}$$

şeklinde yazılabilir. $x \longrightarrow \infty$ için $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ olacağından parentez içindeki ifadelerin bölümü 1 e yaklaşır ve

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m}{b_n}\cdot\frac{x^m}{x^n} = \frac{a_m}{b_n}\cdot\lim_{x\to\infty} x^{m-n}$$

kalır. m ve n nin alacağı değerlere göre üç hal olabilir:

i) $m > n$ ise $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

ii) $m = n$ ise $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_m}{b_n}$

iii) $m < n$ ise $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0.$

ÖRNEK 8.1.4:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x-1}{x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \infty .$$

ÖRNEK 8.1.5:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+5x}{4x^3-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3\left(1+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x^2}\right)}{4x^3\left(1-\frac{6}{4}\cdot\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{3}{4} .$$

ÖRNEK 8.1.6:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^3-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x^3}\right)} = 0.$$

II) g(x) ve h(x), sırası ile, m. ve n. dereceden iki polinom ve

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

olsun. $x \longrightarrow x_o$ için $g(x) = 0$ ve $h(x) = 0$ oluyorsa bu durumda

$$f(x) = \frac{0}{0}$$

belirsizlik hali ortaya çıkar. Eğer x_o, $g(x)$ in m katlı ve $h(x)$ in de n katlı bir kökü ise

$$f(x) = \frac{(x-x_o)^m . g_1(x)}{(x-x_o)^n . h_1(x)}$$

yazılabilir. m ve n nin alacağı değerlere göre üç hal olabilir.

i) $m > n$ ise $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$

ii) $m = n$ ise $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \frac{g_1(x_o)}{h_1(x_o)}$

iii) $m < n$ ise $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \infty$.

ÖRNEK 8.1.7:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2+3x-3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x^2+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x^2+3}$$

$$= 0.$$

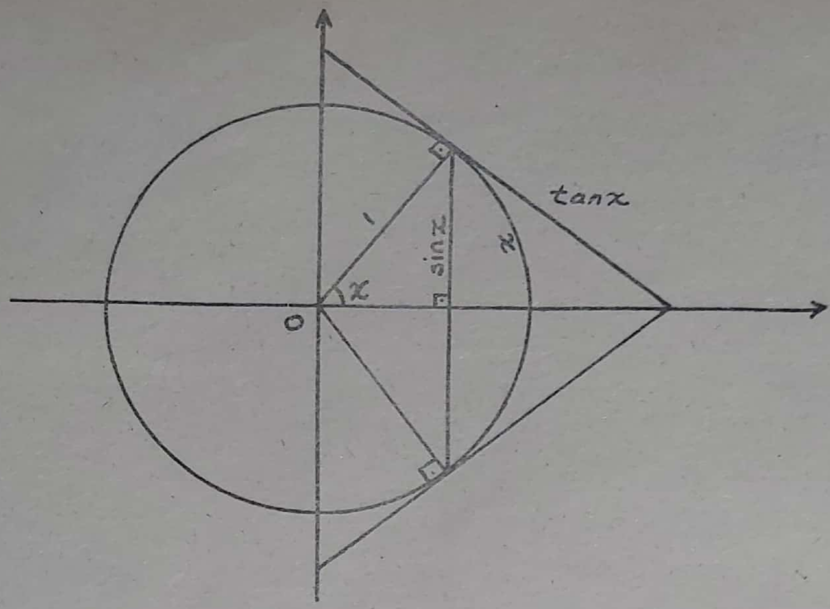
ÖRNEK 8.1.8:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(2x-4).x}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2).x}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{x-1} = 4 .$$

ÖRNEK 8.1.9:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:



Şekil 8.1

Şekil 8.1 den de görüldüğü gibi x, birim çemberde merkez açının ölçüsüdür. Bu ölçü, açının karşısındaki yayın uzunluğuna eşittir. Buna göre;

$$2.\sin x < 2x < 2.\tan x$$

veya

$$\sin x < x < \tan x$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

yazılabilir. $x \longrightarrow 0$ için $\cos x = 1$ olduğundan

$$1 \leq \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

dolayısıyla

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

elde edilir.

ÖRNEK 8.1.10:

$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$= 1.\ \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

ÖRNEK 8.1.11:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$, $(a,b\in \mathbb{R})$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{1}\cdot\frac{1}{\sin bx}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}.ax\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{1}{bx}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx}$$

$$= \frac{a}{b}.$$

ÖRNEK 8.1.12:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3-x^2-1}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2\left(1+\frac{2}{3x^2}\right)}{x\left(2.\sqrt{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \infty.$$

III) $f(x) = g(x)-h(x)$ şeklinde verilsin. $x\to x_0$ için $g(x)=\infty$, $h(x)=\infty$ olsun. Bu durumda