1. BÖLÜM

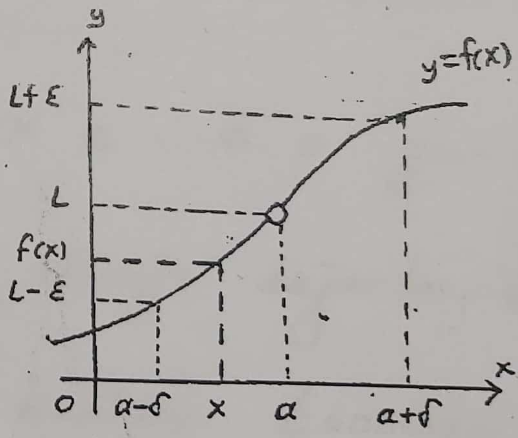
FONKSİYONLARIN LİMİTİ VE SÜREKLİLİĞİ

1. LİMİT

Tanım: $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a'ya yaklaştığında f nin limiti L'dir denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.



ÖRNEK $\lim_{x \to 2} (3x+1) = 7$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$|f(x) - L| = |3x+1-7| < \varepsilon \iff |3x-6| < \varepsilon \iff |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Burada $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ şeklinde bir δ sayısı bulunabileceğinden $\lim_{x \to 2}(3x+1) = 7$ dir.

$A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve

Örnek:

$f(x) = 2x+1$ fonksiyonun $x=3$ deki limitini inceleyelim.

x	0	1	2	2.3	2.4	2.6	2.9	2.99	2.999
$f(x)$	1	3	5	5.6	5.8	6.2	6.8	6.98	6.998

Tablodan da görüldüğü gibi x'e 3'e yaklaşan değerler verdiğimizde $f(x)$'in alacağı değerlerde 7'e yakın değerler olacaktır. Şimdi bunları tanımızda görmeye çalışalım. ε istenildiği kadar küçük bir sayı ols

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow |2x+1-7| < \frac{1}{1000} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |2x-6| = |2(x-3)| = 2|x-3| < \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow |x-3| < \frac{1}{2.1000} = \delta > 0$$

olur ki $\delta > 0$ olduğundan

$$\lim_{x \to 3} 2x+1 = 7$$ olur.

$\boxed{\text{TEOREM}}$ $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $g: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $a\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer $\lim_{x\to a} f(x)$ ve $\lim_{x\to a} g(x)$ limitleri varsa

(1) Her $c\in\mathbb{R}$ için $\lim_{x\to a} c.f(x) = c.\lim_{x\to a} f(x)$

(2) $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(3) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$

(4) $\forall x\in A$ için $g(x)\neq 0$ ve $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ ise

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

dir.

$\boxed{\text{NOT 1}}$ $f(x)=c$ sabit fonksiyonunun limiti kendisine eşittir.

Yani $\lim_{x\to a} c = c$ 'dir.

$\boxed{\text{NOT 2}}$: Teoremdeki (1) ve (2) özelliklerinden bir $P(x)$ polinomu için

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

olur.

$\boxed{\text{ÖRNEK}}$: $\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+1) = ?$

Çözüm : Verilen fonksiyon bir polinom olduğundan

$\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+1) = 3.2^2-5.2+1 = 3$ bulunur.

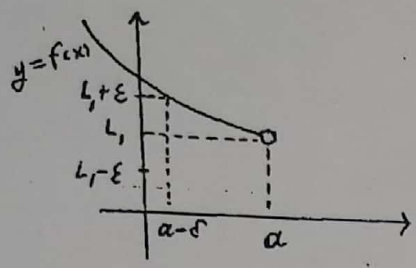
1.1. $\boxed{\text{SAĞDAN VE SOLDAN LİMİT}}$

f fonksiyonu bir (c,a) aralığında tanımlansın. $\forall\varepsilon>0$ için $a-\delta<x<a$ olduğunda $|f(x)-L_1|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ varsa f nin a noktasındaki soldan limiti L_1 dir denir ve $\lim_{x\to a^-} f(x)=L_1$ biçiminde gösterilir.

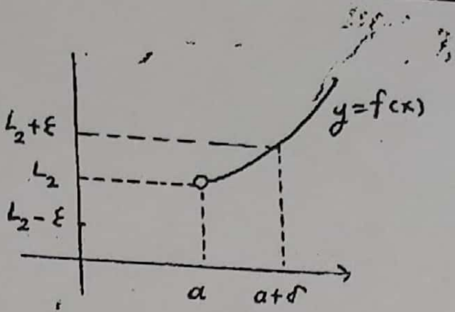
Benzer şekilde f fonk. bir (a,d) aralığında tanımlı olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $a<x<a+\delta$ olduğunda $|f(x)-L_2|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ varsa f nin a'daki sağdan limiti L_2 dir denir ve

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$$

biçiminde gösterilir.



$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$



$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$

Sonuç (1) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim f(x) = L$ 'dir.

(2) $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \Leftrightarrow \lim f(x)$ yoktur.

Sonsuz Limit: Eğer x sınırsız olarak büyüdüğünde $f(x)$'ler bir L sayısına yaklaşırsa f nin $x \to \infty$ için limiti L 'dir denir. Buna göre

$\lim f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists M \ni \forall x > M$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$.

dır.

Kritik Nokta. Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunda x yerine bir a sayısını yazdığımızda fonksiyon tanımsız oluyorsa veya $x=a$ noktasının sağında ve solunda fonksiyon farklı değerler alıyorsa $x=a$ noktası bir kritik noktadır. Kritik noktalarda genelde sağ ve sol limit incelenir.

ÖRNEK: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} = ?$

Çözüm: $x=0$ noktasının sağında ve solunda $|x|$ fonksiyonu farklı değerler aldığından sağ-sol limit incelenir.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

ve soldan limit ise,

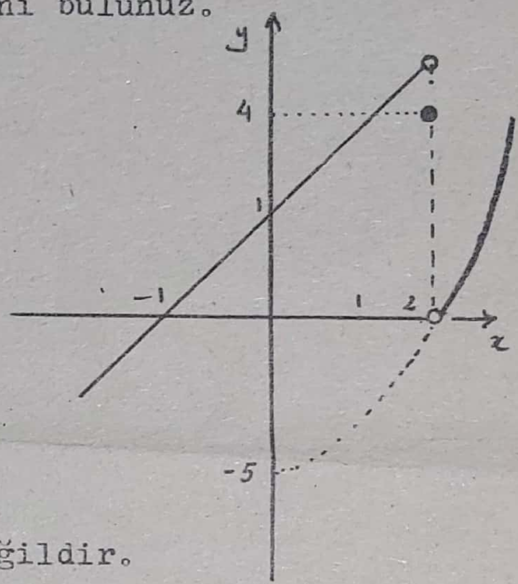
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0} e^{\frac{1}{1-h-1}} = e^{-\infty} = 0$$

olarak bulunur. Sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan fonksiyonun $x \to 1$ için limiti yoktur.

ÖRNEK 8.1.2:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-5 , & x > 2 \text{ ise} \\ 4 , & x = 2 \text{ ise} \\ x+1 , & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x_o=2$ noktasındaki limitini bulunuz.



ÇÖZÜM:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2-5) = -1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x+1) = 3$$

olur.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

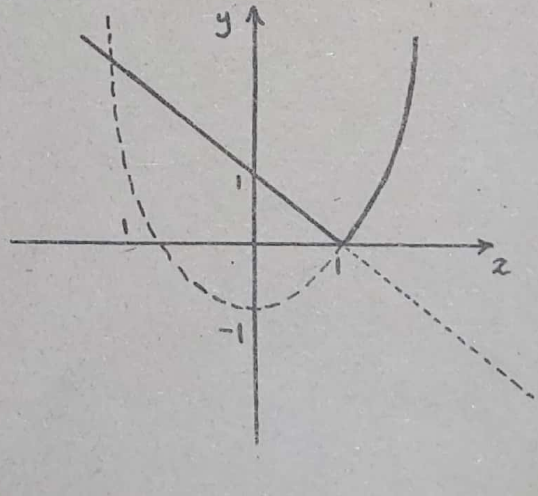
olduğundan $\lim_{x \to 2} f(x)$ limiti mevcut değildir.

ÖRNEK 8.1.3:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 , & x > 1 \text{ ise} \\ 0 , & x=1 \text{ ise} \\ 1-x , & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki limitini bulunuz.

ÇÖZÜM:



$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2-1) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (1-x) = 0$$

yani

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x)$$