ÇÖZÜMLÜ SORULAR
(Türevin Uygulamaları)

① $y = x^2 + 1$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti orjinden geçer?

Çözüm: Aranan nokta (a, a^2+1) olsun.

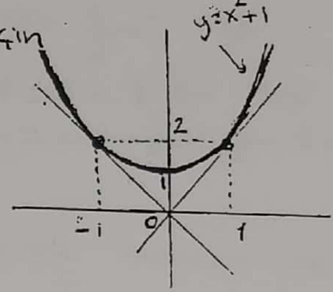
$y' = 2x \Rightarrow 2a = m_T$ olur. Teğet denklemi

$$y - y_0 = m_T(x - x_0) \Rightarrow y - (a^2+1) = 2a(x-a)$$

olur. Bu teğet doğru $(0,0)$'dan geçeceği için

$$0 - (a^2+1) = 2a(0-a)$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ bulunur.}$$



O halde aranan noktalar $(1,2)$ ve $(-1,2)$ dir.

② $y = x^3 - 5x + 3$ eğrisinin

(a) $y = -2x$ doğrusuna paralel

(b) $y = -\frac{x}{7}$ doğrusuna dik

(c) Ox- ekseni ile $45°$ lik açı yapan teğetlerinin denklemini yazınız.

Çözüm: (a) $m = -2$ old. $y' = -2 \Rightarrow 3x_0^2 - 5 = -2 \Rightarrow x_0 = \pm 1$.

$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 7$, $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1$ olur. Böylece

$y - 7 = -2(x+1) \Rightarrow y = -2x + 5$ ve

$y + 1 = -2(x-1) \Rightarrow y = -2x + 1$ teğet denklemleri bulunur.

(b) $m = 7$ olmalıdır. Bu nedenle $y' = 3x^2 - 5 = 7 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = +2$

Buradan $y_1 = 5$ ve $y_2 = 1$ bulunur. $y = -\frac{x}{7}$ doğrusuna dik denklemler

$y - 5 = 7(x+2) \Rightarrow y = 7x + 19$ ve $y - 1 = 7(x-2) \Rightarrow y = 7x + 5$ tir.

(c) $45°$ lik tanjantın eğimi 1 dir. Bu nedenle

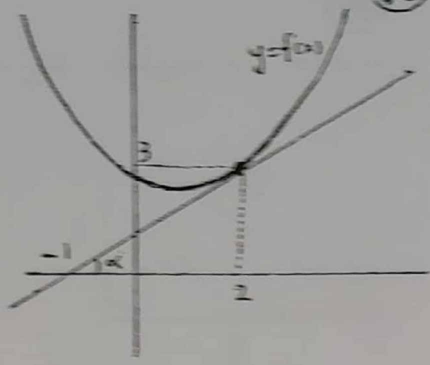
$3x_0^2 - 5 = 1 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = +\sqrt{2} \Rightarrow y_1 = 3\sqrt{2} + 3$, $y_2 = -3\sqrt{2} + 3$

$\Rightarrow y - (3\sqrt{2}+3) = 1 \cdot (x - (-\sqrt{2})) \Rightarrow y = x + 4\sqrt{2} + 3$

$\Rightarrow y - (-3\sqrt{2}+3) = 1 \cdot (x - \sqrt{2}) \Rightarrow y = x - 4\sqrt{2} + 3$ bulunur.

(76)

③ Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $(2,3)$ noktasından teğet çizilmiştir. $g(x)=f(x)\cdot(x^2-x)$ olduğuna göre $g'(2)=?$



Çözüm : $g'(x)=f'(x)\cdot(x^2-x)+(2x-1)\cdot f(x)$

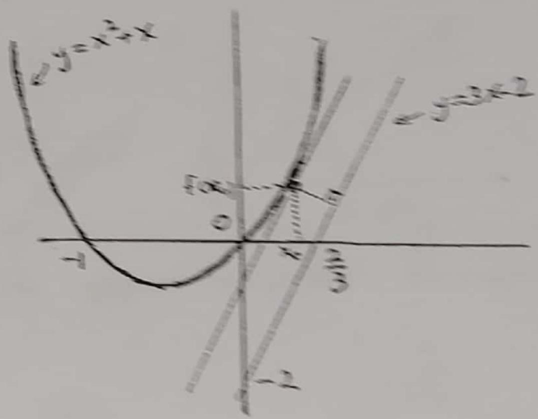
$\Rightarrow g'(2)=f'(2)\cdot 2+3\cdot f(2)$

$\Rightarrow g'(2)=1\cdot 2+3\cdot 3=11$

Teğet doğrunun eğimi $\tan\alpha=\frac{3}{3}=1$ old.

$f'(2)=1$ dir. Yani $x_0=2$ noktasındaki eğim 1 dir.

④ $f(x)=x^2+x$ fonksiyonunun grafiği üzerinde bulunan ve denklemi $y=3x-2$ olan doğruya en yakın olan noktanın apsisi kaçtır?



Çözüm : $y=x^2+x$ eğrisinin $y=3x-2$ doğrusuna en yakın noktası $A(x_0, f(x_0))$ olsun. A noktasından çizilen teğet $y=3x-2$ doğrusuna paraleldir.
O halde teğetin eğimi ile doğrunun eğimi birbirine eşit olur, yani

$f'(x_0)=3 \Rightarrow 2x_0+1=3$

$\Rightarrow x_0=1$ bulunur.

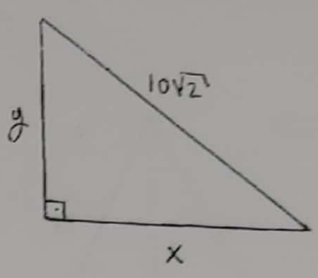
⑤ $f(x)=x^2+5x-2$ fonksiyonunun eğrisine, apsisi $x_0=-2$ olan noktadan çizilen teğetin, x ekseni ile yaptığı açının ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm : $x_0=-2$ noktasındaki eğim $f'(-2)$ dir.

$f'(x)=2x+5 \rightarrow f'(-2)=2\cdot(-2)+5=1$ olup

$f'(-2)=m_T=\tan\alpha=1$ old. $\alpha=45°$ dir.

(21) Hipotenüs uzunluğu $10\sqrt{2}$ br olan bir dik üçgenin alanı en fazla kaç br^2 dir?



Çözüm: $x^2+y^2=(10\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow \quad y=\sqrt{200-x^2}$ olur.

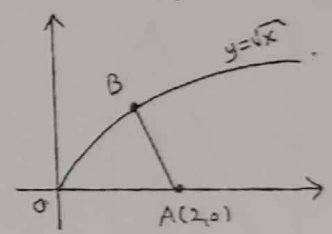
$$A=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\sqrt{200-x^2}$$

$$\Rightarrow A'=\frac{1}{2}\sqrt{200-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}=0$$

$$\Rightarrow 200-2x^2=0 \Rightarrow x^2=100 \Rightarrow x=10 \Rightarrow y=10$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}10\cdot 10=50 \ br^2$$

(22) $A(2,0)$ noktasının $y=\sqrt{x}$ eğrisine olan uzaklığını bulunuz.



Çözüm: Eğri üzerinde bir nokta $B(x,\sqrt{x})$ olsun.

$$|AB|=\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{x}-0)^2}=\sqrt{x^2-3x+4}$$

fonksiyonunu en küçük yapan değer $f(x)=x^2-3x+4$ fonksiyonunu en küçük yapan değerdir. Bu nedenle

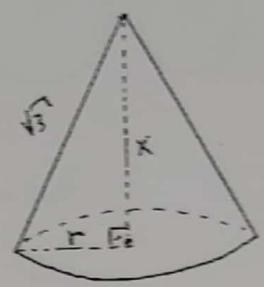
$$f'(x)=2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+4=\frac{7}{4}$$ olduğundan

$$|AB|=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$ birimdir.

Not: $f''(x)=2 \Rightarrow f''\left(\frac{3}{2}\right)=2>0$ old. $x=\frac{3}{2}$ için minimum vardır.

25 Hipotenüsü $\sqrt{3}$ br olan bir dik üçgen, dik kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dairesel koninin hacmi en fazla kaç br^3 olur?



Çözüm: Koninin hacmi

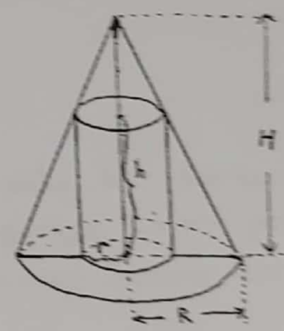
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 . x = \frac{\pi}{3}(3-x^2) . x$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}(3x - x^3)$$

$$V' = \pi(1-x^2) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$x=1$ için $r^2 = 3-1 = 2$ dir. Şu halde koninin maksimum hacmi $V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi . 2 . 1 = \frac{2\pi}{3}$ br^3 tür.

26 Taban yarıçapı R, yüksekliği H olan bir koninin içine yerleştirilebilen maksimum hacimli silindirin hacmi ne olur?



Çözüm: üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \Rightarrow r = \frac{R}{H}(H-h) \text{ olur.}$$

Silindirin hacmi

$$V = \pi r^2 h = \pi \frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 . h \text{ olur.}$$

h'ye göre

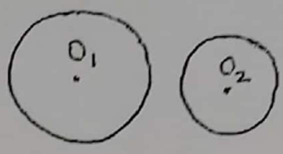
$$V' = \pi \frac{R^2}{H^2}\left[2(H-h).(-1)h + H-h\right] = 0$$

$$= \pi \frac{R^2}{H^2}(H-h)(H-3h) = 0 \Rightarrow h = H \text{ ve } h = \frac{H}{3} \text{ bulunur.}$$

$h = H$ için $r = 0$ olacağından hacim sıfır olur. Bu minimum hacme karşılık gelir. O halde $h = \frac{H}{3}$ olmalıdır.

$$V = \pi \frac{R^2}{H^2}\left(H - \frac{H}{3}\right)^2 . \frac{H}{3} = \frac{4}{27}\pi R^2 \text{ olur.}$$

(27) Şekildeki O_1 ve O_2 merkezli dairelerin çevreleri toplamı 10π olduğuna göre, alanları toplamı en fazla kaçtır?



Çözüm

$$Ç_1 + Ç_2 = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 10\pi$$
$$2\pi(r_1 + r_2) = 10\pi$$
$$r_1 + r_2 = 5 \Rightarrow r_2 = 5 - r_1 \quad \text{olur.}$$

$$A_1 + A_2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi r_1^2 + \pi(5-r_1)^2$$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 = \pi\left[2r_1^2 - 10r_1 + 25\right]$$

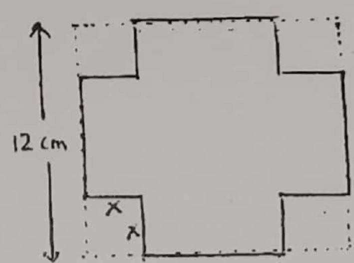
fonksiyonu bulunur. Buradan

$$(A_1+A_2)'(r) = \pi(4r_1 - 10) = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{5}{2}$$

$$r_2 = 5 - r_1 = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{olur.}$$

$$A_1 + A_2 = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25\pi}{2} \quad \text{olur.}$$

(28) Bir kenarının uzunluğu 12 c.m. olan kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden birer "eşit alanlı kare" kesilerek geriye kalan parçadan üstü açık bir kare prizma yapılıyor. Prizmanın hacmi en fazla kaç cm^3 olur?



Çözüm: Prizmanın hacmi

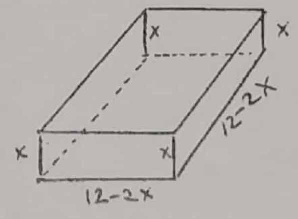
$$V(x) = (12-2x)^2 \cdot x = 4(36x - 12x^2 + x^3)$$

olacağından

$$V'(x) = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6) = 0$$

$\Rightarrow x = 2$, $x = 6$ olur.

x	0		2		6	
V'		+	0	−	0	+
V		↗	max	↘		↗



şeklinde olacağından maksimum hacim

$V(2) = 8^2 \cdot 2 = 128 \text{ cm}^3$ olur.

Not: $x = 6$ alınırsa min. hacim yani sıfır bulunur.