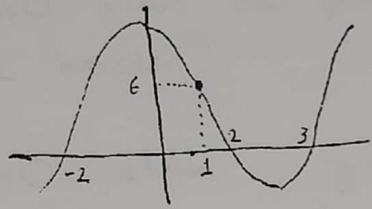
(2) $f''(a)=0$ olması, a nın dönüm noktası olmasını gerektirmez, çünkü ikinci türevin çift katlı köklerinde işaret değişmez.

(3) f'' fonk. a noktasında işaret değiştiriyorsa a noktası f in bir dönüm noktasıdır.

ÖRNEK : $f(x)=x^3-3x^2-4x+12$ fonksiyonunun konveks veya konkav olduğu aralıkları belirleyiniz. Varsa dönüm noktasını bulunuz.

Çözüm : $f'(x)=3x^2-6x-4$, $f''(x)=6x-6=0 \Rightarrow x=1$

Eğrinin dönüm noktası $(1,6)$ noktasıdır.



x	$-\infty$		1		∞
f''		$-$	0	$+$	
f		konkav	6	konveks	

ÖRNEK : $f(x)=\dfrac{(x-1)^4}{4}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun konkav ve konveks olduğu aralıkları ve dönüm noktasını bulunuz.

Çözüm : $f''(x)=3(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$ çift katlı köktür.

$x=1$ dönüm noktası değildir, çünkü f'' türevi işaret değiştirmemiştir.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$+$		$+$
f	konveks (çukur)		konveks (çukur)

MAKSİMUM – MİNİMUM PROBLEMLERİ

Bu tip problemleri çözmek için verilenler kullanılarak değişkenin birisi yok edilip tek değişkenli olacak şekilde maksimumu veya minimumu istenen f fonksiyonu elde edilir ve bu fonksiyonun türevi sıfıra eşitlenerek "c" durağlama noktaları bulunur. Daha sonra istenen fonksiyonun ikinci türevi alınarak daha önceden bulunan duraklama noktaları ikinci türevde yerine yazılarak işaretine bakılır. $f''(c) > 0$ ve c noktasında yerel minimum, $f''(c) < 0$ ise c'de yerel maksimum vardır. (Maksimum veya minimum kontrolü, f nin birinci türevinin işaret tablosuna bakılarak da bulunabilir.) Son olarak maksimum veya minimumu belirleyen c noktası istenen f fonksiyonunda yerine yazılarak çözüm bitirilir.

Örnek: Toplamları 40 olan iki pozitif tamsayının karelerinin toplamı en az kaçtır?

Çözüm: $x + y = 40$ olsun. $y = 40 - x$. dir. Buna göre minimumu istenen ifade $x^2 + y^2$ dir. Buna göre

$f(x) = x^2 + (40-x)^2$ fonksiyonunun minimumunu bulmalıyız.

$f'(x) = 2x + 2(40-x)\cdot(-1) = 4x - 80 = 0 \Rightarrow x = 20$

$x = 20 \Rightarrow y = 20$ bulunur.

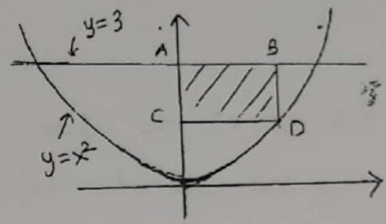
Şimdi $x = 20$ değerinde minimum olup olmadığını kontrol edelim.

$f''(x) = 4 \Rightarrow f''(20) = 4 > 0$ old. $x = 20$'de minimum vardır. Buna göre

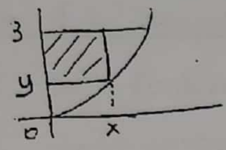
$$x^2 + y^2 = 20^2 + 20^2 = 800$$

bulunur.

ÖRNEK : Şekle göre ABCD dikdörtgeninin alanı en fazla kaç olabilir?



Çözüm :



$$A(x) = x(3-y) = x(3-x^2)$$

$$\Rightarrow A(x) = 3x - x^3$$

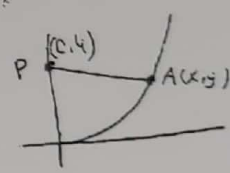
$$\Rightarrow A'(x) = 3 - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad \boxed{x = +1}$$

$A(x) = 3.1 - 1^3 = 2$ br^2 bulunur.

$A''(x) = -6x \Rightarrow A''(1) = -6.1 < 0$ old. $x = +1$ noktasında maksimum vardır.

ÖRNEK : $y = x^2$ parabolünün $P(0,4)$ noktasına olan en kısa uzaklığını bulunuz.



Çözüm: $|PA| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2-4)^2}$

$$\Rightarrow |PA|'(x) = \frac{2x + 2(x^2-4).2x}{2\sqrt{x^2+(x^2-4)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 4x(x^2-4) = 0 \Rightarrow 2x(2x^2-7) = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{7}{2}}, \quad x_3 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$ bulunur.

x		$-\sqrt{\frac{7}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{7}{2}}$	
$\|PA\|'$	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$
$\|PA\|$	↘	min	↗		↘	min	↗

$x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ için en kısa (minimum) uzaklık

$|PA| = \sqrt{x^2 + (x^2-4)^2}$ ifadesinde $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ yazılarak

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2} - 4\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$ bulunur.

NOT $|PA| = \sqrt{x^2 + (x^2-4)^2}$ fonksiyonunu en küçük yapan değer $f(x) = x^2 + (x^2-4)^2$ fonksiyonunu da en küçük yapacağı için $|PA|$ nın türevini alıp sıfıra eşitlersek yanır değil de $f(x) = x^2 + (x^2-4)^2$ nin

$f'(x) = 2x + 2(x^2-4).2x = 2x(2x^2-7) = 0$

olacağından aynı sonuç çıkar.

BELİRSİZ LİMİT ŞEKİLLERİ

Teorem (L'Hospital) f ve g, [a,b] aralığında sürekli ve (a,b)'de türevli iki fonksiyon olsun. f ve g': $x_0 \in (a,b)$ olmak üzere bir x_0 noktasında türevli ve $g'(x_0) \neq 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \text{ise} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ dir.}$$

UYARI: L'Hospital kuralı sadece $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerine uygulanabilir. Uygulandığında belirsizlik devam ediyorsa belirsizlikten kurtuluncaya kadar uygulanabilir.

1) $\frac{0}{0}$ Belirsizliği:

ÖRNEK: $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2x^2-3x+1} = ?$

ÇÖZÜM $\frac{\ln 1}{2\cdot 1^2-3\cdot 1+1} \equiv \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2x^2-3x+1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{4x-3} = \frac{\frac{1}{1}}{4\cdot 1-3} = 1$$

ÖRNEK: $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = ?$

Çözüm: $\frac{0-\sin 0}{0^3} \equiv \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

bulunur.

2) $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği:

Örnek: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+3x^2)}{2x} = ?$

Çözüm: $\frac{\ln(e^\infty+3\infty^2)}{2\infty} = \frac{\ln\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+3x^2)}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x+6x}{e^x+3x^2}}{2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+6x}{e^x+3x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+6}{e^x+6x} \overset{L'H}{=} \frac{1}{2}\lim \frac{e^x}{e^x+6} \overset{L'H}{=} \frac{1}{2}\lim \frac{e^x}{e^x} = \frac{1}{2}$$

3) $0.\infty$ Belirsizliği:

$u.v = \frac{u}{\frac{1}{v}}$ eşitliği yardımıyla $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ haline getirilir.

Örnek: $\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\cot x = ?$ $(0.\infty)$ belirsizliği var.

Çözüm: $\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\cot x = \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x = \lim\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)\cdot 1$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

4) $\infty-\infty$ Belirsizliği

Bu belirsizlik hali de $\frac{0}{0}$ belirsizliğine dönüştürülebilir.

Örnek: $\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = ?$ $(\infty-\infty)$ belirsizliği vardır.

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}\right) = \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

5) 0^0, ∞^0, 1^∞ Belirsizlikleri

$y = [u(x)]^{v(x)}$ biçiminde bir fonksiyon verildiğinde önce her iki tarafın ln logaritması alınarak

$$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra limit alınarak

$\lim_{x\to a} \ln y = \lambda$ bulunarak $\lim_{x\to a} y = e^{\lambda}$ sonucuna ulaşılır.

ÖRNEK: $\lim_{x\to 0^-} (1-e^x)^{\sin x} = ?$

Çözüm: 0^0 belirsizliği vardır.

$y = (1-e^x)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln (1-e^x)^{\sin x} = \sin x \cdot \ln(1-e^x)$

$\Rightarrow \lim \ln y = \lim \sin x \cdot \ln(1-e^x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(1-e^x)}{\frac{1}{\sin x}} \equiv \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{e^x}{1-e^x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{1-e^x}$$

$$\overset{L'H}{=} 1 \cdot \lim \frac{2\sin x \cos x}{-e^x} = 0$$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^-} (1-e^x)^{\sin x} = e^0 = 1$$ bulunur.

ÖRNEK: $\lim_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = ?$ .. (1^∞ Belirsizliği)

Çözüm: $y = (1+3x)^{\frac{1}{x}}$ olsun. Buradan ln alınırsa

$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1+3x)$ olur. Limit alınırsa

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} \equiv \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{1} = 3$$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = e^3$$

olur.