YMH 214 SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği

12.Hafta

Sayısal Integral

- Trapez(Yamuk) Kuralı
- Simpson Kuralı

Sayısal Integral

- Sözlük anlamına göre *İntegral Almak* ; *Parçaları bir bütün içerisinde bir araya getirmek* ; *Birleştirmek* *Toplam miktarı göstermek* demektir.

- Basit fonksiyonların (polinom, üstel ve trigonometrik) integrali analitik olarak hesaplanabilir.

- Fakat integrali zor olan karmaşık yapıdaki fonksiyonların analitik olarak hesaplanması ya zor ya da imkansızdır.

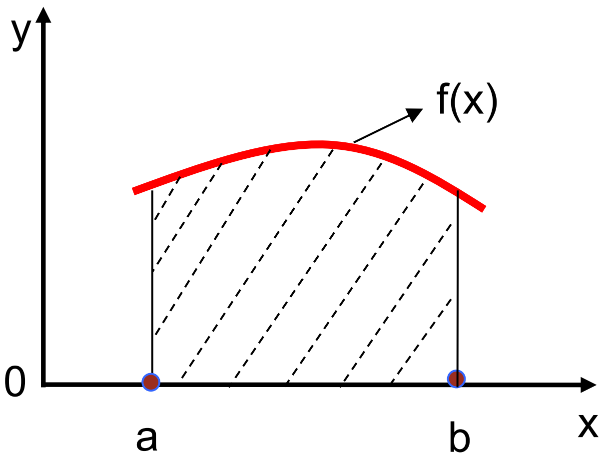
- Bu gibi durumlarda Sayısal İntegralden yararlanılır.

Sayısal Integral

- Sayısal İntegrasyon verilen herhangi bir integralin değerinin yaklaşık olarak bulunmasıdır.

$$\Rightarrow I = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

- İntegralin sınırları olan a ve b sayıları sabit ve fonksiyon bu aralıkta sürekli ise integralin sonucu sabit bir sayıdır.



Bu integralin değeri x=a ve x=b doğruları ile y=f(x) eğrisinin altında kalan alana eşittir.

- Sayısal integrasyon verilen a-b aralığında fonksiyon n parçaya ayrılarak her bir parçanın alanının bulunması yöntemlerini içerir.

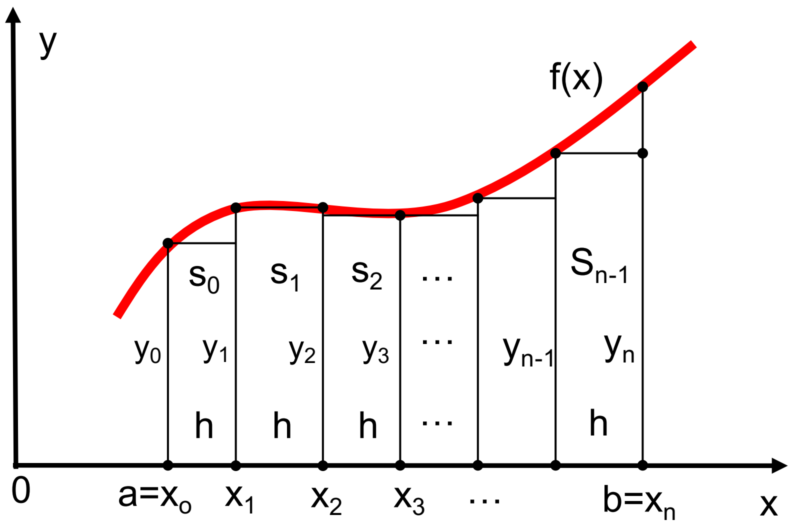
- Daha sonra ise toplam alan yani integralin yaklaşık değeri hesaplanır.

Sayısal Integral

En yaygın olarak kullanılan sayısal integral yöntemleri Newton Cotes formülleridir.

- Dikdörtgenler Yöntemi
- Yamuk (Trapez) Yöntemi
- Simpson Yöntemi

Dikdörtgenler Yöntemi



a ve b arasını n adet çubuk ile böldüğümüzde oluşan dikdörtgenlerin alanının hesaplanması amaçlanır.

$y_0= f(x_0)$ ve $y_n= f(x_n)$

$s_0= h\cdot y_0 = h\cdot f(x_0)$

$s_1= h\cdot y_1 = h\cdot f(x_1)$

.
.
.

$S_{n-1}= h\cdot y_{n-1} = h\cdot f(x_{n-1})$

$$\Rightarrow S = h\sum_{k=0}^{n-1} y_k$$

$$\Rightarrow h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

Dikdörtgenler Yöntemi

Soru 1: $\int_1^8 \frac{x+2}{x^2+2} \cdot dx$ İntegralini n=6 için dikdörtgenler yöntemini kullanarak bulunuz.

I. Basamak $x_n=8$ ve $x_0=1$ $f(x)=\frac{x+2}{x^2+2}$ $\Rightarrow h=\frac{x_n-x_o}{n}=\frac{8-1}{6}=1,16666$

II. Basamak

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	1
1	2,16666	0,6224
2	3,3333	0,4068
3	4,5	0,2928
4	5,6667	0,2247
5	6,833	0,1814
6	8	0,1515

$$\Rightarrow S = h\sum_{k=0}^{n-1} y_k$$

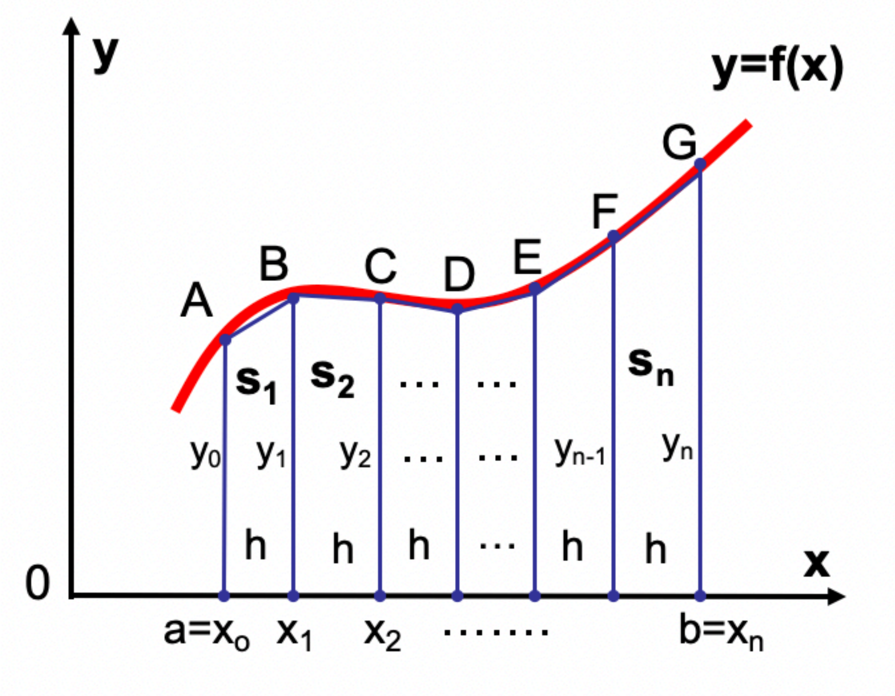
$$=1,16666\left[\sum_{k=0}^{5} f(x_k)\right]$$

$$=3,182765$$

Trapez(Yamuk) Yöntemi

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx$$ İntegralini [a,b] aralığında n eşit parçaya ayıralım.

Her bölme noktasından dikler çıkılır, bu dikler ile f(x) eğrisinin kesiştiği noktalar birer doğru ile birleştirilir. Bu durumda *n* adet yamuk elde edilir.



x_0ABx_1 yamuğunun alanı

$S_1=(1/2)\cdot h\cdot(y_0+y_1)$

$S_2=(1/2)\cdot h\cdot(y_1+y_2)$

…

$S_n=(1/2)\cdot h\cdot(y_{n-1}+y_n)$

Trapez(Yamuk) Yöntemi

Toplam Alan

$S=S_1+S_2+\ldots+S_n$

$S=(1/2)\cdot h\cdot(y_0+y_1)+\ldots+(1/2)\cdot h\cdot(y_{n-1}+y_n)$

$S=(1/2)\cdot h\cdot(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n)$

$S=h\cdot((y_0+y_n)/2+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})$

$$\Rightarrow S = h\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$y_0=f(x_0)$ $y_n=f(x_n)$

$x_0=a$ $x_n=b$

$$\Rightarrow h = \Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}$$ alarak yeniden düzenlersek

$$\Rightarrow S = \Delta x\cdot\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_0+k\Delta x)\right)$$ olur

SORU 2: $I=\int_1^2 (x+\frac{1}{x})^2 dx$

İntegralini

a) Analitik yoldan hesaplayınız.

b) *n=1 ve n=2* için Yamuk Yöntemini kullanarak hesaplayınız.

a) a=1 ve b=2

a) $\int_1^2 (x+\frac{1}{x})^2 dx = \int_1^2 (x^2+2+\frac{1}{x^2})dx = \frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\Big|_1^2 = (\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2})-(\frac{1}{3}+2-1)=\mathbf{4.833}$

b) n=1 h=(b-a)/n=(2-1)/1=1

$h\frac{(f(a)+f(b))}{2} = 1.\frac{(4+\frac{25}{4})}{2} = \mathbf{5.125}$

n=2 h=(b-a)/2=0.5

$\int_1^{1.5} (x+\frac{1}{x})^2 dx + \int_{1.5}^2 (x+\frac{1}{x})^2 dx$ =0.5.[f(1)+f(1.5)]/2+0.5.[f(1.5)+f(2)]/2=**4.909**

Matlab Çözümü ile Trapez Yöntemi

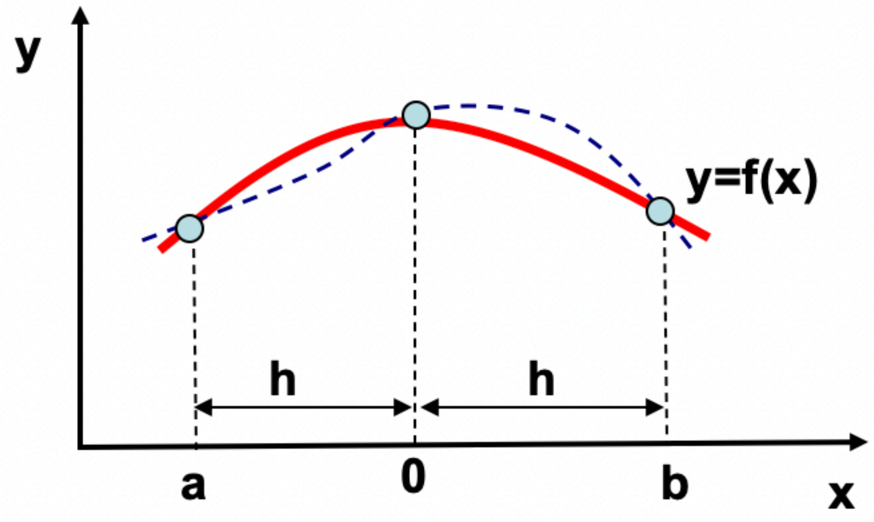
```
clear all;close all;clc;
fprintf('f(x)=(x+1/x)^2 fonksiyonun trapez yöntemi ile  yaklaşık çözümünü bulma\n');
a=1;
b=2;
n=2;
h=(b-a)/n;
toplam=0;
for x=a:h:b-h
    y=(x+1/x)^2;
  toplam=toplam+h/2*((x+1/x)^2+((x+h)+1/(x+h))^2);
end
disp(' toplam');
disp([toplam])
```

Ekran Çıktısı

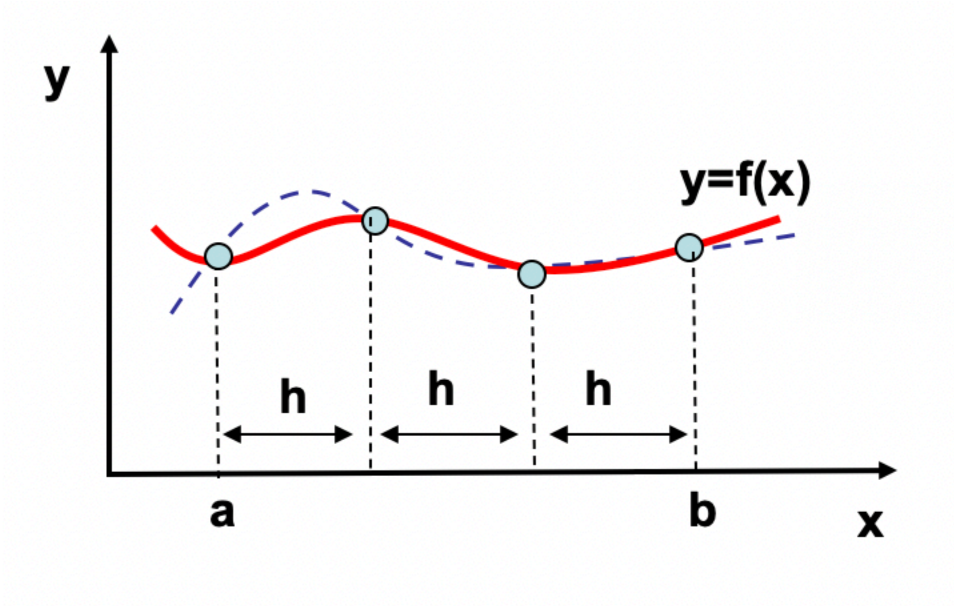
```
f(x)=(x+1/x)^2 fonksiyonun trapez yöntemi ile  yaklaşık çözümünü bulma
 toplam
    4.9097

>>
```

Simpson 1/3 Kuralı

- Yamuk Yönteminde hatayı azaltmak için aralık sayısı artırılır.
- İntegrali daha doğru hesaplamanın diğer bir yolu ise noktaları bir doğru ile birleştirmek yerine daha yüksek dereceli polinomlar kullanmaktır.
- Örneğin, $x=a$ ve $x=b$ noktaları arasında bir nokta daha varsa bu üç nokta 2. derece bir polinom ile birleştirilebilir.



Ya da $x=a$ ve $x=b$ arasında eşit aralıklı iki nokta varsa bu dört nokta 3. derece bir polinom ile birleştirilebilir.



Hem 2. dereceden hem de 3. dereceden polinomlar altında kalan alanları veren formüllere SİMPSON Kuralları denilir.

$$S=(b-a).\frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}$$

SORU 3: $I=\int_{-1}^{3}(x^3+1)dx$

İntegralini

a) Analitik yoldan hesaplayınız.

b) *n=1 ve n=2* için Simpson 1/3 Yöntemini kullanarak hesaplayınız.

a) a=-1 ve b=3

a) $\int_{-1}^{3}(\frac{x^4}{4}+x) = (\frac{3^4}{4}+3)-(\frac{1^4}{4}+(-1))=\frac{80}{4}+4=24$

b) n=1 (b-a)=(3-(-1))=4

$$\int_{-1}^{3}(x^3+1)dx = (b-a).\frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}$$

$$=(3-(-1))\,\frac{f(-1)+4f\left(\frac{-1+3}{2}\right)+f(3)}{6}$$

$$=4.\frac{f(-1)+4f(1)+f(3)}{6}$$

$$=4.(\frac{0+8+28}{6})=24$$

n=2 h=(b-a)/n =(3-(-1))/2=2

$\int_{-1}^{1}(x^3+1)\mathrm{dx} + \int_{1}^{3}(x^3+1)\mathrm{dx}$

$$= \int_{-1}^{1}(x^3+1)\mathrm{dx} = (\text{b-a}).\frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6} + \int_{1}^{3}(x^3+1)\mathrm{dx} = (\text{b-a}).\frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}$$

$$=(1-(-1))\ \frac{f(-1)+4f\left(\frac{-1+1}{2}\right)+f(1)}{6} + (3-1)\ \frac{f(1)+4f\left(\frac{3+1}{2}\right)+f(3)}{6}$$

$$=2.\frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{6} + 2.\frac{f(1)+4f(2)+f(3)}{6}$$

$$=2+22$$

$$=24$$

Matlab ile Çözümü

```
clear all;close all;clc;
fprintf('f(x)=(x^3+1) fonksiyonun Simpson yöntemi ile  yaklaşık çözümünü bulma\n');
a=-1;
b=3;
n=2;
h=(b-a)/n;
toplam=0;
for x0=a:h:b-h
    x1=(x0+(x0+h))/2;
    x2=x0+h;
    fx0=(x0^3+1);
    fx1=(x1^3+1);
    fx2=(x2^3+1);
  toplam=toplam+h/6*(fx0+4*fx1+fx2)
end
disp(' toplam');
disp([toplam])
```

Ekran Çıktısı

```
f(x)=(x^3+1) fonksiyonun Simpson yöntemi ile  yaklaşık çözümünü bulma

toplam =

     2


toplam =

    24

 toplam
    24

>>
```