Egalité de Parseval

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt}_{\text{energie temporelle}} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2}_{\text{energie frequentielle}} \quad \left(= a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right)$$

Decroissance des coefficients

☒ à partir du moment où on a une discontinuité,

$$\boxed{|C_n| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

☒ x admet des derivées jusqu'à l'ordre k.

$(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ $\quad x^{(k)} \equiv 1^e$ discontinuité.

$$\boxed{|C_n| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{k-1}}}$$

Def: La transformation de Fourier d'un signal $x : t \mapsto x(t)$ est definie (si elle existe) par :

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\nu \longrightarrow X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-i2\pi n f t}\, dt$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{TF :} & x(t) \longrightarrow X(\nu) \\ \text{(F)} & x(t) \longrightarrow \hat{x}(f) \end{array}}$$

X existe $\Leftrightarrow |X(\nu)| < +\infty$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt\right| < +\infty$$

$$< \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,|e^{-i2\pi\nu t}|\, dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty \Rightarrow \boxed{x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})}$$

Si $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors x admet une TF

Dirichlet : SF : $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{+i2\pi \frac{n}{T} t}$

$$\boxed{TF : x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu}$$

(sous certaines conditions)

transformation inverse (TF^{-1})

$X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow TF^{-1}$ existe !

$x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow X$ existe

$\not\Rightarrow X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

* $F(\Pi_T(t)) = \hat{\Pi}_T(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \Pi_T(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi\nu t}\, dt$

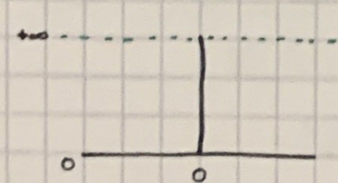
$$= \frac{-1}{i2\pi\nu}\left(e^{-i\pi\nu t} - e^{i\pi\nu t}\right)$$

$$= \frac{T}{\pi\nu}\,\frac{\sin(\pi\nu T)}{T} = T\left(\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T}\right)$$

$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$\boxed{\hat{\Pi}_T(\nu) = T\,\text{sinc}(\pi\nu T)}$$

Delta de Dirac :



$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1 \equiv$ masse de Dirac

[*] $x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$

$\Rightarrow$ on echantillone x en t_0 !

[*] δ est l'élément neutre de la convolution $(x * y)(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x(\tau)\,y(\tau - t)\,d\tau$

$$(x * \delta)(t) = (\delta * x)(t) = x(t)$$

[*] $x * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$ $\Rightarrow$ convoluée avec un Dirac retardé de t_0 $\equiv$ retarder x de t_0

[*] Idempotence

$$F(x(t)) = X(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,e^{-i2\pi\nu t}\,dt \text{ et } x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(\nu)\,e^{i2\pi\nu t}\,d\nu = F^{-1}(X(\nu))$$

$$x(-t) = \int_{\mathbb{R}} X(\nu)\,e^{i2\pi\nu(-t)}\,d\nu = F(X(\nu)) = F(F(x(t)))$$

Cas particulier : x pair $\Rightarrow x(-t) = x(t) \Rightarrow F(F(x(t))) = x(t)$

[*] x à valeurs réelles :

$$X(-\nu) = \overline{X(\nu)} \Rightarrow X \text{ sym hermitienne}$$

$|X(\nu)|$ symétrique (tout comme C_n dans les SF)

[*] Si x est réel et pair

$$X(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \int_{\mathbb{R}} x(t)\cos(2\pi\nu t)\,dt - i\underbrace{\int_{\mathbb{R}} x(t)\sin(2\pi\nu t)\,dt}_{=0}$$

$\Rightarrow$ La TF est réelle et pair

[*] Si x est réel et impair, TF est imaginaire et impaire

De manière générale, on a :

$(X(\nu) \in \mathbb{C})$ $\quad X(\nu) = Re(X(\nu)) + Im(X(\nu))$

$$\boxed{X(\nu) = \underbrace{|X(\nu)|}_{\text{module}} e^{i \overbrace{\varphi(X(\nu))}^{\text{phase}}}}$$

module = amplitude des fréquences

phase = positions des fréquences

$X(\nu) = F(x(t))$

- $F(x(t-t_0)) = \int_{\mathbb{R}} x(t-t_0) e^{i2\pi\nu t} dt \underset{t = u + t_0}{\overset{u = t - t_0,\ du = dt}{=}} \int_{\mathbb{R}} x(u) e^{-i2\pi\nu(u+t_0)} du$

$$= \int_{\mathbb{R}} x(u) e^{-i2\pi\nu u} e^{-i2\pi\nu t_0} du$$

$$= e^{-i2\pi\nu t_0} \int x(u) e^{-i2\pi\nu u} du = \boxed{e^{-i2\pi\nu t_0} X(\nu)}$$

- Calculer la TF d'un signal x retardé de t_0 ≡ multiplier $X(\nu)$ par $e^{-i2\pi\nu t_0}$

- $\boxed{|X(\nu)| = |e^{-i2\pi\nu t_0} X(\nu)|}$ mais $\boxed{\varphi(X(\nu)) \neq \varphi(X(\nu) e^{i2\pi\nu t_0})}$

$\quad \hookrightarrow = \varphi(X(\nu)) - 2\pi t_0 \nu$

Theorème de Planchard :

$\left.\begin{array}{l} x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \\ y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \end{array}\right\} x * y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$z(t) = (x * y)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\varepsilon) y(t - \varepsilon) d\varepsilon$

$F(x * y) = \boxed{Z(\nu) = X(\nu) Y(\nu)}$

$(x * y)(t) = F^{-1}(X(\nu) Y(\nu))$

$\boxed{F(x(t) y(t)) = (X * Y)(\nu)}$

Parceval : SF $\rightarrow$ $\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt}_{\text{temporelle}} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2}_{\text{frequentielle}}$

TF : $x, y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{\int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_{\mathbb{R}} X(\nu)\overline{Y(\nu)}\,d\nu}$

Si $x = y$ $\boxed{\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(\nu)|^2 dt}$ $|X(\nu)|^2 = \text{DSE}$

Densité Spectrale d'Energie

- $\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t-\tau)}\,dt = (x * \overline{y^-})(t)$ $\overline{y^-(t)} = \overline{y(-t)}$

- $F(\Gamma_{xy}(\tau)) = \underbrace{F(x(t))}_{X(\nu)}\underbrace{F(\overline{y^-(t)})}_{?}$

$$F(\overline{y^-(t)}) = \int_{\mathbb{R}} \overline{y^-(t)}\, e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{y(-t)}\, e^{-i2\pi\nu t}\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{y(-t)\, e^{i2\pi\nu t}}\,dt$$

$$\overset{\substack{u=-t\\du=dt}}{=} \int_{\mathbb{R}} \overline{y(u)\, e^{i2\pi\nu(-u)}}\,du = \int_{\mathbb{R}} \overline{y(u)\, e^{-i2\pi\nu u}}\,du = \boxed{\overline{Y(\nu)}}$$

$\boxed{F(\Gamma_{xy}(\tau)) = X(\nu)\overline{Y(\nu)}} = \gamma_{xy}(\nu) \equiv$ densité spectrale d'energie croisée

$F(\Gamma_{xx}(\tau)) = X(\nu)\overline{X(\nu)} = |X(\nu)|^2 \equiv \text{DSE}$

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$$

$$\Gamma_{xx}(\tau) = F^{-1}(\gamma_{xx}(\nu))$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \gamma_{xx}(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\,d\nu = \int_{\mathbb{R}} |X(\nu)|^2 e^{i2\pi\nu t}\,d\nu$$

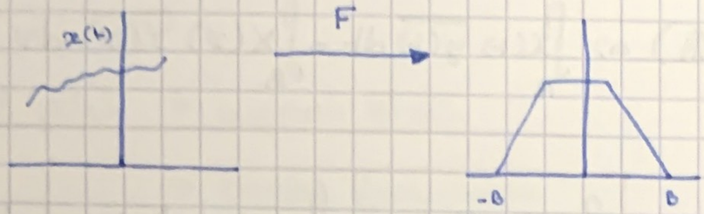
$E_x = \Gamma_{xx}(0) = \int_{\mathbb{R}} |X(\nu)|^2 e^{i2\pi\nu t}\,d\nu$ pour $t = 0$

$$= \int_{\mathbb{R}} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$$

- Un signal x est à bande limitée si il existe $B > 0$ tq :

$$X(\nu) = 0 \quad \forall |\nu| \geq B$$

D



- Le support de définition de la TF est borné

⚠ Un signal et sa TF ne peuvent pas avoir tous les 2 un support fini (ex : porte et sinc) ⚠

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{-B}^{B} |X(\nu)|^2 d\nu < +\infty$$

→ x est d'énergie finie

- $x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \int_{-B}^{B} X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$

- $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{-B}^{B} X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu\right) = \int_{-B}^{B} X(\nu) \frac{d}{dt}\left(e^{i2\pi\nu t}\right) d\nu$

$$= i2\pi \int_{-B}^{B} \nu X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

- $|x'(t)| = \left| i2\pi \int_{-B}^{B} \nu X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \right| = 2\pi \left| \int_{-B}^{B} \nu X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \right|$

$$\leq 2\pi \int_{-B}^{B} |\nu| |X(\nu)| |e^{i2\pi\nu t}| d\nu = 2\pi \int_{-B}^{B} |\nu| |X(\nu)| d\nu$$

$$\leq 2\pi B \int_{-B}^{B} |X(\nu)| d\nu$$

$$\Rightarrow \boxed{|x'(t)| \leq 2\pi B \int_{-B}^{B} |X(\nu)| d\nu}$$

Théorème de Bernstein

La vitesse de variation du signal est bornée par une quantité qui dépend de la longueur du support de sa TF

- [*] B petit → support étroit
  → basses fréquences
  → x varie lentement

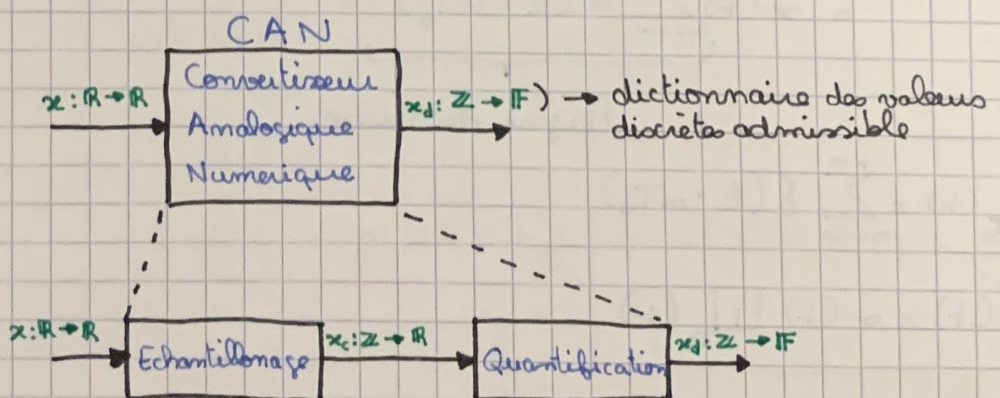
- [*] B grand → support large
  → hautes fréquences
  → x varie rapidement

Signaux analogique et numérique

phénomène physique/naturel → analogique

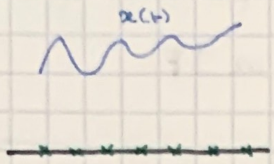
ordinateur → mémoire finie → numérique

=> besoin de convertir pour stocker l'informatisation !

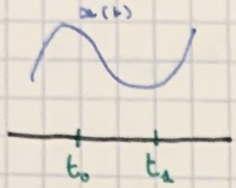


Echantillonage : prélèvement des valeurs de x aux points de mesure.

$x(t_m) \equiv$ échantillon $\qquad (t_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ → discrétisation de l'axe temps

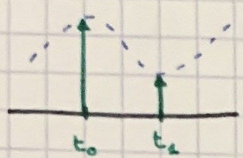


prelever la valeur de x à un point donné t_0 ≡ multiplié x par le delta de Dirac centré en t_0



$\boxed{*}$ x pour $t = t_0$

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$



$\boxed{*}$ x pour t_0 et t_1

$$x(t)\,\delta(t-t_0) + x(t)\,\delta(t-t_1)$$

$$= x(t)\big(\delta(t-t_0) + \delta(t-t_1)\big)$$

$\boxed{*}$ . . .

T_e = periode d'echantillonnage

$t_m = mT_e$

$\boxed{*}$ $x_e(t) = x(t)\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_m)$

$$= x(t)\underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT_e)}_{\text{Peigne de Dirac}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} Ш_{T_e}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT_e) \\ x_e(t) = x(t)\,Ш_{T_e}(t) \end{gathered}}$$

$$- x_e(t) = x(t)\,Ш_{T_e}(t) = x(t)\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT_e)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-mT_e)$$

$$\boxed{x_e(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_e)\,\delta(t-mT_e)}$$

$\frac{1}{T_e} = \nu_e$ = fréquence d'échantillonage

$\boxed{*}$ ν_e trop grand → T_e trop petit = sur-échantillonage

$\boxed{*}$ ν_e trop petit → T_e trop grand = sous-échantillonage

$$F(x_e(t)) = F(x(t)\,Ш_{T_e}(t))$$

$$= \underbrace{F(x(t))}_{X(\nu)} * \underbrace{F(Ш_{T_e}(t))}_{?}$$

$$F(Ш(t)) = F\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_e)\right)$$

$$= \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{m}{T_e}\right)$$

$$= \frac{1}{T_e} Ш_{\frac{1}{T_e}}(\nu)$$

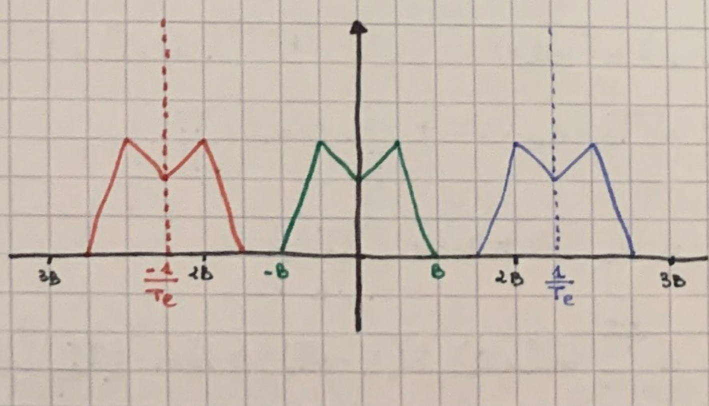
$$F(x_e(t)) = X(\nu) * \left(\frac{1}{T_e} Ш_{\frac{1}{T_e}}(\nu)\right)$$

$$= X(\nu) * \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{m}{T_e}\right)$$

$$= \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(\nu) * \delta\left(\nu - \frac{m}{T_e}\right)$$

$$= \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(\nu - \frac{m}{T_e}\right)$$

$$= \frac{1}{T_e}\left(\dots + X\left(\nu + \frac{1}{T_e}\right) + X(\nu) + X\left(\nu - \frac{1}{T_e}\right) + \dots\right)$$



$$\boxed{\frac{1}{T_e} \geqslant 2B}$$

* $\frac{1}{T_e} < 2B$ ⇒ Recouvrement

⇒ Recouvrement spectral

= aliasing

$$\frac{1}{T_e} \geq 2B$$
$\nu_e = \frac{1}{T_e}$, $B = \nu_{max}$

Théorème de Shannon :

Pour échantillonner un signal x de fréquence maximale ν_{max}, il faut respecter :

x à bande limitée

$$\boxed{\nu_e \geq 2\nu_{max}}$$ Condition de Nyquist

⚠ Si signal "pas à bande limitée" → on ne peut pas échantillonner sans perte.

En théorie si la condition de Nyquist est respectée, on peut reconstruire le signal

$$X_e(\nu) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\nu - \frac{n}{T_e}\right)$$

$$X(\nu) = T_e X_e(\nu) \Pi_{\frac{1}{T_e}}(\nu)$$

$$F^{-1}(X(\nu)) = F^{-1}\left(T_e X_e(\nu) \Pi_{\frac{1}{T_e}}(\nu)\right)$$

$$= F^{-1}(T_e) * F^{-1}(X_e(\nu)) * F^{-1}\left(\Pi_{\frac{1}{T_e}}(\nu)\right)$$

OR : $F^{-1}(\Pi_T(t)) = T\,\text{sinc}(\pi\nu T)$

$F(F(x(t))) = x(t)$ $\qquad$ $F^{-1}(x(t)) = F(x(t))$

Donc $\quad x(t) = T_e x_e(t) * \frac{1}{T_e}\,\text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_e}\right)$

$$= x_e(t) * \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_e}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\,\delta(t-nT_e) * \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_e}\right)$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\,\text{sinc}\left(\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e}\right)}$$ Interpolation de Shannon-Whittaker

En théorie, on est capable de reconstruire un signal à partir de ses échantillons