MATHEMATIQUES DU SIGNAL

2 sortes de signaux :
- Continus : signal existe tjs au cours du tps $f(t) = tps$
- Discrets : n'existent pas à tt instant
  $f(kt)$ avec k entier et t periode d'echantillonage
  → traitement numérique

2 espaces :
- temporel : on observe les signaux
- frequentiel : on traite les signaux (amplificat°, etc)

Ds le cas continu, on peut passer de temporel vers frequentiel avec une transformat° de Laplace $t \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} p$

Ds le cas echantilloné, transformat° en Z $kT \underset{Z^{-1}}{\overset{Z}{\rightleftarrows}} z$

($\mathcal{L}^{-1}$, Z^{-1} transfo inverse)

SIGNAUX CONTINUS

Rappel : Equ. diff. linéaire à coeff constants : ex: $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 12t + 20$

→ Pas de produit de dérivée/puissance de dérivée : linéaire
→ Coeff ne dependent pas de t → constantes

Methode de résolut° classique :

a) On considère l'équat° sans second membre : $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 0$
→ on cherche la solut° gen. sous la forme $y(t) = e^{rt}$: $r = ?$
$\dot{y}(t) = re^{rt}$
$\ddot{y}(t) = r^2 e^{rt}$

Solut° gen : $y(t) = \underbrace{A}\times e^{2t} + \underbrace{B}\times e^{-3t}$ dependent de 2 cond° init.

b) on considère l'EASM avec 2nd membre → solut° particulière.
solut° ss la forme $y(t) = at + b$ • $\dot{y}(t) = a$ • $\ddot{y}(t) = 0$
$a - 6at - 6b = 12t + 20 \Rightarrow a = -2 \quad b = {}^{11}/_{3} \Rightarrow y(t) = -2t - {}^{11}/_{3}$

c) Solut° gen EASM : solut° gen ESSM + sol° part. EASM
$= A\times e^{2t} + Be^{-3t} - 2t - {}^{11}/_{3}$

Rappel : Produit de convolut°

$x(t)$ et $y(t) \rightarrow x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau) \cdot d\tau$

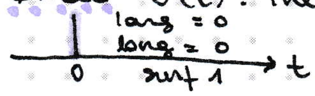
- Commutatif : $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
- Associatif : $x(t) * (y(t) * z(t)) = (x(t) * y(t)) * z(t)$
- Distributivité par rapport à l'add° : $x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$

→ Unité de convolut° ? $u(t)$

$u(t)$? $x(t) * u(t) = u(t) * x(t) = x(t) \quad \forall x(t)$

→ Pic de Dirac $\delta(t)$: théorie des distributeurs de cannettes.

=



Fct complexe d'une var complexe

$F(p)$ ← nb comp, nb comp

$p \xrightarrow[F]{} F(p)$

Transformation de Laplace (aussi appelée travaux)

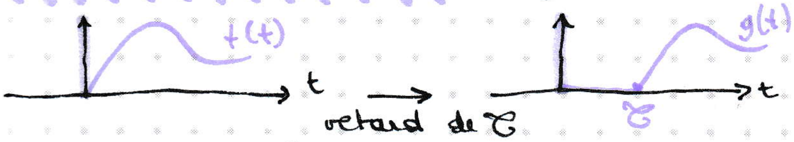
$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \times e^{-pt} . dt$ $\quad$ p = nb complexe $= \sigma + j\omega$
w/ ω = pulsat° (rd /sec) $= 2\pi \times f$ & f = freq(hz)

$\mathcal{L}$ réalise le passage de l'espace temporel vers l'espace fréquentiel

Condit° d'existence de $F(p)$: Pour tous les signaux que l'on peut observer, $F(p)$ existe. (Cependant, on peut inventer des signaux étranges sur lesquels elle ne s'applique pas)

Prop : Linéarité : $\mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda F(t) + \mu G(T)$

Prop : théorème du retard : Signal causal $f(t)$ [nul, $t \leq 0$]



$g(t) = f(t - \tau)$
$t = \tau$
$\Rightarrow g(\tau) = f(0)$

$\mathcal{L}[f(t) - \tau] = e^{-\tau p} . F(p)$

Prop : Dérivat° / Intégrat° $= \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p . F(p) - f(t) = 0$ → cdt° initiale

Hyp : C.I nulles ⇒ dérivat° = multiplicat° par p.
→ dériver 3 fois $p^3 = F(p)$ / intégrer 2 fois $F(p)/p^2$

Très facile d'intégrer ou de dériver dans l'espace de Laplace :

Prop : Convolut° : $\mathcal{L}[x(t) * y(t)] = X(p) \times Y(p)$

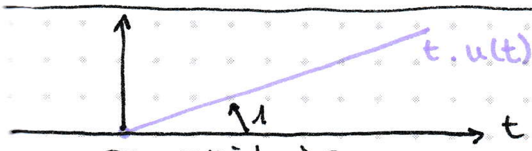
Prop : Théorème de la valeur initiale / valeur finale

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{p \to +\infty} [p . F(p)] \\ \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0} [p . F(p)] \end{cases}$$

→ Régime perman^t en automat^q

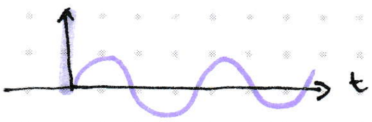
Rq : $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)$
$F(p)$ ↳ transformée de Laplace
$\mathcal{L}$ ↳ transformat° de Laplace.

Tableau des transformat° usuelles

t	p
direct° $= \delta(t)$	1
 échelon heaviside	$\frac{1}{p}$
 rampe unitaire	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-at}.u(t)$ a réel ou complexe	$\frac{1}{p+a}$

Rq : Ce tableau $\Rightarrow$ Calcul des transformées de Laplace d'autres signaux.

Ex : $\mathcal{L}[\sin(\omega t).u(t)]$



formule d'Euler : $\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t).u(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}.u(t)\right] = \frac{1}{2j}\left[\mathcal{L}[e^{j\omega t}u(t)] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}u(t)]\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right] = \frac{1}{2j}\frac{2j\omega}{p^2+\omega^2} \quad \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Transformat° de Laplace inverse :

$$F(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

Méthode la + courante : Décomposit° de F(p) en élém^t simple.

Ex : $F(p) = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p(p^2 + p + 6)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$ Décomposit° : $p^2 + 5p + 6 = (p+2)(p+3)$

3 pôles simples : $\frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$

On trouve ABC avec 2 xpr :
- On multiplie les 2 membres par p puis on fait $p = 0$
  $\Rightarrow 1 = A$
- On multiplie les 2 membres par $p+2$ puis on fait $p = -2$
  $\Rightarrow 5 = B$
- On multiplie par $p+3$ puis $p = -3$
  $\Rightarrow -4 = C$

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{5}{p+2} + \frac{-4}{p+3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = (1 + 5e^{-2t} - 4e^{-3t})u(t)$$

t	p
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$

Résolut° d'une équat° diff. lin. et à coeff const à l'aide de $\mathcal{L}$.

$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 12t + 20$, $t \geq 0$ C.I nulles
$= (12t + 20)\,u(t)$

$\mathcal{L}[\ddot{y}(t)] + \mathcal{L}[\dot{y}(t)] - 6\,\mathcal{L}[y(t)] = 12\,\mathcal{L}[t\,u(t)] + 20\,\mathcal{L}[u(t)]$

P3 $= p^2.\Psi(p) + p.\Psi(p) - 6\Psi(p) = 12\dfrac{1}{p^2} + 20\dfrac{1}{p}$

$\Rightarrow (p^2 + p - 6)\Psi(p) = \dfrac{12+20p}{p^2} \Rightarrow \Psi(p) = \dfrac{12+20p}{p^2(p^2+p-6)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$

$\Rightarrow p^2 + p - 6 = (p-2)(p+3) \Rightarrow \dfrac{12+20p}{p^2(p-2)(p+3)} = \dfrac{A}{p^2} + \dfrac{B}{p} + \dfrac{C}{p-2} + \dfrac{D}{p+3}$

- $\times p^2$ $p = 0$ $\Rightarrow A = -2$
- $\times p-2$ $p = 2$ $\Rightarrow C = 13/5$
- $\times p+3$ $p = -3$ $\Rightarrow D = 16/15$
- $\times p$ $p = +\infty$ $\Rightarrow B = -11/3$

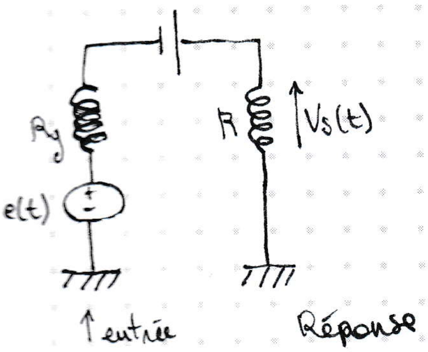
$\Rightarrow \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{11}{3p} + \dfrac{18}{5(p-2)} + \dfrac{16}{15(p+3)}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = (2t - 11/3 + 13/5\,e^{2t} + 16/15\,e^{-3t})\,u(t)$
$y(t) = A.e^{2t} + Be^{-3t} - 2t - 11/3$

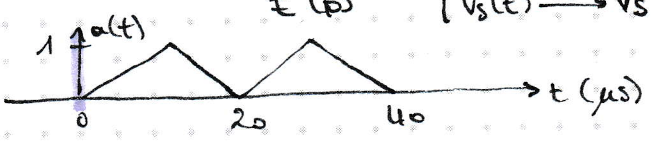
CI Nulles : $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$
$y(0) = 0 = A + B - 11/3$
$\dot{y}(t) = 2Ae^{2t} - 3Be^{-3t} - 2$
$\dot{y}(0) = 0 = 2A - 3B - 2$
$\Rightarrow \begin{cases} A = 13/5 \\ B = 16/15 \end{cases}$

$\mathcal{L}$ permet de résoudre facilem^t une eq° diff lin. et à coeff cst lorsque les CI sont nulles.

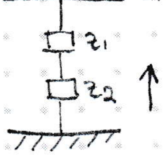
Applicat° en électronique :



3 étapes :
- Calcul fct° de transfert du circuit
  e(t) → [$\mathcal{S}$] → Vs(t)
  Fct° de transfert $\dfrac{\mathcal{L}\text{ sortie}}{\mathcal{L}\text{ entrée}}$ avec CI nulles
  Ici $G(p) = \dfrac{V_s(p)}{E(p)} \rightarrow \begin{cases} e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) \\ V_s(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_s(p) \end{cases}$

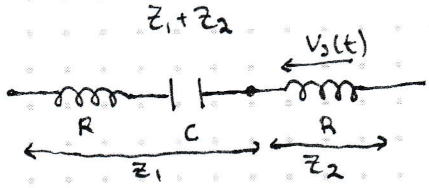


Rappel : pdt :



$V_2 = V_1 \times \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$

En l'appliquant : e(t)



$Z_1 = R_g + \dfrac{1}{Cp}$

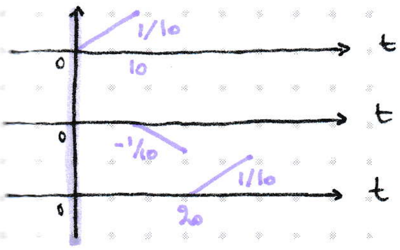
$Z_2 = R$

Fct de transfert : $G(p) = \dfrac{R}{R + R_g + \dfrac{1}{Cp}} = \dfrac{RCp}{1 + (R + R_g)Cp}$

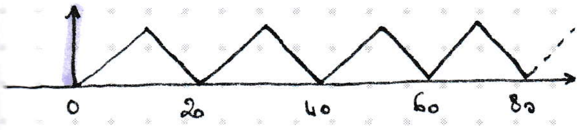
• Calcul $e(t)$

$\mathcal{L}[h(t)]$

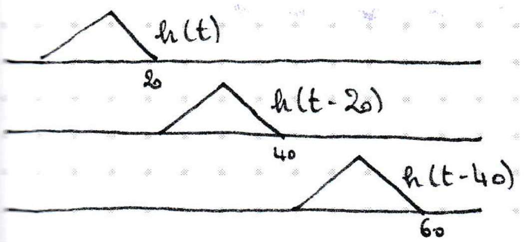
On peut décomposer $h(t)$ comme une somme de 3 signaux élémentaires



$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$$
$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$$
$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{p^2} \ast e^{-10p}\left(\frac{-2}{10} \times \frac{1}{p^2}\right) + e^{-20p}\left(\frac{10}{10} \times \frac{1}{p^2}\right)$$
$$= \frac{1}{10p^2}\left(1 - 2e^{-10p} + e^{-20p}\right)$$



$E(p)$?



Σ

$$\Rightarrow e(t) = h(t) + h(t-20) + h(t-40) + \ldots$$
$$\xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = H(p) + e^{-20p} H(p) + e^{-40p} H(p) + \ldots$$
$$= H(p)\left[e^{-20} + e^{-40} + \ldots\right]$$

Or $|x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x}$ $\Rightarrow$ sommat° de la suite géom^q de raison x

$$E(p) = H(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{-20p}} = \frac{1}{10p^2} \times \frac{1 - 2e^{-10p} + e^{-20p}}{1 - e^{-20p}}$$

Or $1 - 2e^{-10p} + e^{(10p)^2} = (1 - e^{-10p})^2 \Rightarrow E(p) = \frac{1}{10p^2} \times \frac{1 - e^{-10p}}{1 + e^{-10p}}$

• La sortie

→ on a la f° de transfert $G(p) = \frac{V_s(p)}{E(p)}$

→ on a $E(p)$

→ On cherche $V_s(p)$

$$V_s(p) = \frac{RCp}{1 + (R+R_g)Cp} \times \frac{1}{10p^2} \times \frac{1 - 2e^{-10p} + e^{-20p}}{1 - e^{-20p}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} V_s(t)$$

On a $(R+R_g)C = 1\,\mu s$ et $V_s(p) = \frac{RC}{10} \times \frac{1}{p(1+p)} \times \frac{1 - e^{-10p} + e^{-20p}}{1 - e^{-20p}}$

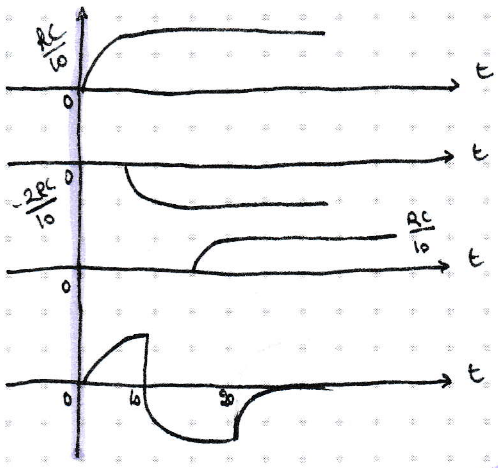
$$X(p) = \frac{RC}{10} \frac{1}{p(1+p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t)$$
$$= \frac{RC}{10}\left[\frac{A}{p} + \frac{B}{1+p}\right] \rightarrow A = 1 \text{ et } B = -1$$

Donc $X(p) = \frac{RC}{10}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{1+p}\right] \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = \frac{RC}{10}\left[1 - e^{-t}\right] u(t)$

Donc $x(t)$

On donne $N(p) = X(p)\left[1 - e^{-10p} \times 2 + e^{-20p}\right]$
$$= X(p) - 2e^{-10p} . X(p) + e^{-20p} . X(p)$$

$$n(t) = x(t) - 2x(t-10) + x(t-20)$$



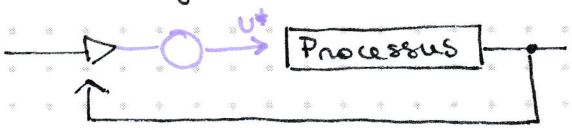
- $V_s(p) = \dfrac{N(p)}{1 - e^{-20p}}$ et $E(p) = \dfrac{H(p)}{1 - e^{-20p}}$
- $e(t)$ reproduit le motif $H(t)$ toutes les 20 µs
- $V_s(t)$ reproduit le motif $n(t)$ toutes les 20 µs.

SIGNAL ÉCHANTILLONÉ

ou signal discret.

Contexte : Svt un signal échantilloné est délivré par un ordinateur

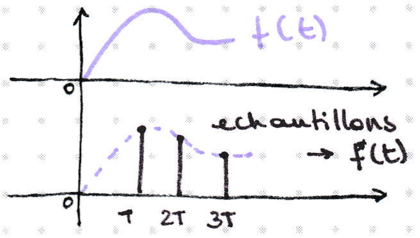
ex :



Commande numérique d'un processus.

Nouvel outil pour le passage en fréquentiel : Z (Z^{-1} en inverse)

Def : Signal échantillonné



Echantilloneur idéal

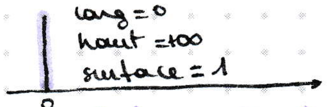
T = période d'échantillonage.

def 1 : $f^*(t) = \{ f(0), f(T), f(2T), \dots \}$: collect° d'échantillon

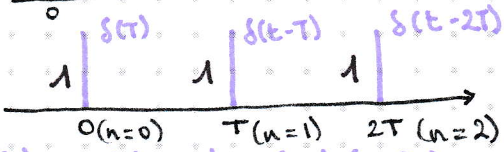
Passage dans le domaine fréquentiel ? Suite de nbr indef pour Laplace.

def 2 : $f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) . \delta(t . nT)$

↳ Dirac

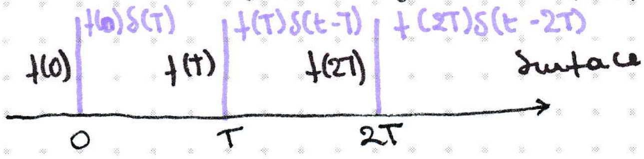


→ Peigne de Dirac : $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT)$



Surface

→ $f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) . \delta(t . nT)$



Surface

Peigne de Dirac : train d'impulsions, wagons identiques (m̂ surface)

$f^*(t)$ → échantillons $f(0), f(T) \dots$ prennent le train et chaque échantillon

s'installe dans un wagon dont il recouvre toute la surface
→ moyen de transport des échantillons.

Calcul de la transformée de Laplace $[f^*(t)] = \mathcal{L}[\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT).\delta(t-nT)]$

linéarité de $\mathcal{L}$

$\Rightarrow \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}[f(nT)\,\delta(t-nT)]$

cste → linéarité

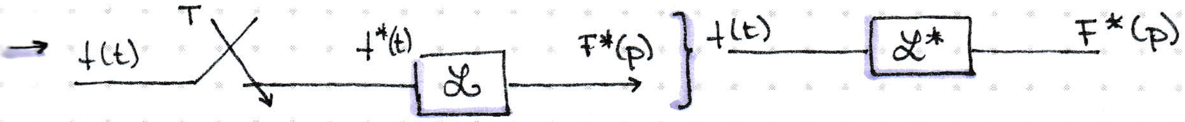
$= \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\,\mathcal{L}[\delta(t-nT)]$

THM du retard : $\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-Tp}.F(p)$ $\quad = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\,e^{-nTp}.\mathcal{L}[\delta(t)]$

t	$\delta(t)$	$u(t)$	$e^{-at}u(t)$	$t\cdot u(t)$
p	1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1}{p^2}$

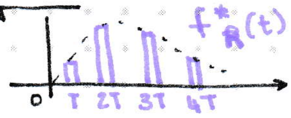
$\Rightarrow F^*(p) = \mathcal{L}[f^*(t)]$
$= \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT).e^{-nTp}$

Rq : $F^*(p)$ = Transformée de Laplace échantillonée de $f(t)$
= Transformée de Laplace des signaux échantillonés



Rq : Échantillonage idéal

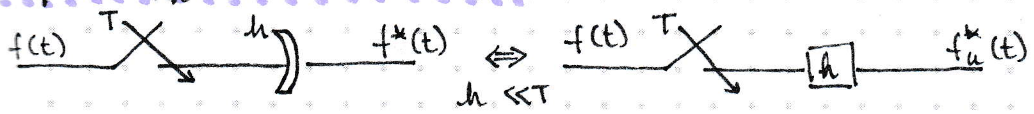
Pour un échantillonage réel :



avec h durée de prélèvement

⚠ La transformée de Laplace de $f_h^*(t)$ est complexe dans le cas général. Cas particulier : $h \ll T$

Mq $\mathcal{L}[f_h^*(t)] \simeq h.F^*(p)$

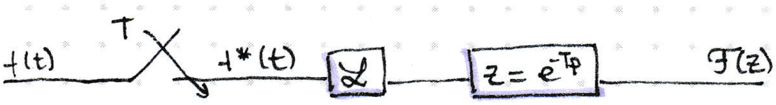


Dans la suite, on suppose tjs l'échantillonage idéal. Mais si on veut tenir compte de la durée de prélèvemᵗ h, on peut le faire "après coup" en multipliant la solutᵒ finale par h [si $h \ll T$].

$\Rightarrow F^*(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT).e^{-nTp}$. Changemᵗ de var pr éliminer l'exp. $z = e^{Tp}$

$F^*(p)$ devient $\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT).z^{-n}$

Résumé :



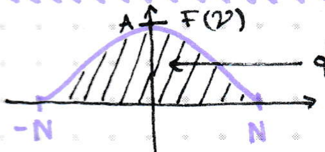
Choix de T : Thm de Shannon

Reconstitutᵒ du signal continu à partir du signal échantilloné
→ On échantillone f(t) pour transporter le signal. Peut-on reconstituer le signal continu à partir de l'échantiloné ?

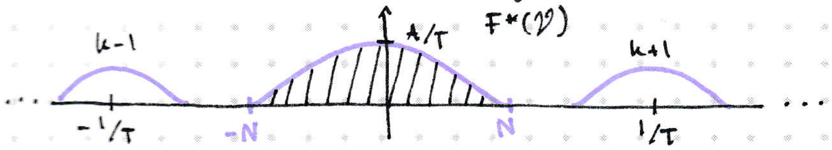
⇒ Ça dépend de T.

Shannon : Y a-t-il perte d'info lors de l'échantillonage ?
Cmt mesurer la qté d'info contenue ds un signal ?
→ Spectre de Fourier

Transformat° de Fourier $f(T) \xrightarrow[F]{} F(\nu)$ → complexe ; ↳ frqce ($\in \mathbb{R}$)



Spectre de Fourier du signal échantilloné : $f^*(t) \xrightarrow{F} F^*(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{+\infty} F(\nu - \frac{k}{T})$

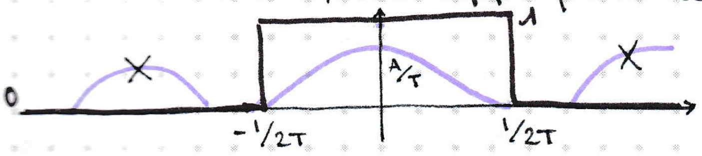


$k = 0 \rightarrow \frac{1}{T} \times F(\nu)$

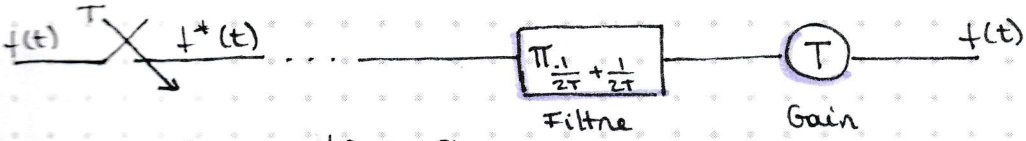
$k = 1 \rightarrow \frac{1}{T} \times F(\nu - \frac{1}{T})$

Échantillonage du signal ⇒ Recopie de l'info une ∞^{t} de fois le long de l'axe fréquentiel

→ Peut-on reconstituer le signal continu grâce à l'échantilloné ?
⇒ oui, en appliquant 2 opérateurs



→ Filtre en Π : $\Pi_{-\frac{1}{2T} + \frac{1}{2T}}$



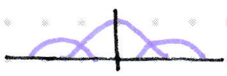
Conditi° de Shannon :

Vrai ssi $N < 1/2T$

N connu, la condit° de Shannon impose un choix de valeur pour T
→ $T < \frac{1}{2N}$
- f_e = frqce d'échantillon = $1/T$
- $f_e > 2N$

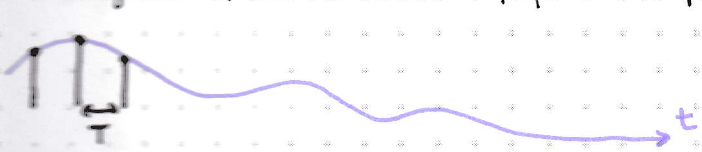
Thm de Shannon : Lorsqu'on échantillone un signal continu de spectre frqtiel [-N, +N], on ne perd aucune info si la frqce d'échantillonage $f_e = 1/T$ est supérieure au double de la + haute frqce N contenue dans le signal continu.

Si ce n'est pas le cas



Interprétat° φ^{q} de Shannon :

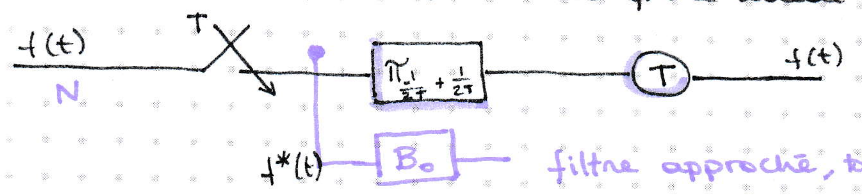
Signal f(t) de basse frqce : N petit ⇒ $\frac{1}{2N_{gd}}$ ⇒ T_{gd}



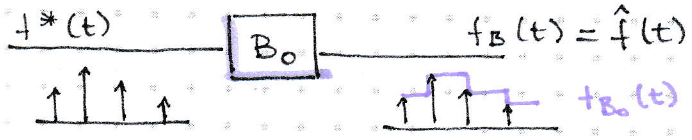
Signal de hte frqce : N gd ⇒ $\frac{1}{2N_{pt}}$ ⇒ T_{pt}

Norme CD : $f_e \simeq 43$ kHz

Reconstitut° approchée du signal continu à partir du signal échantilloné
↳ car le filtre idéal n'existe pas.



filtre approché, bloqueur d'ordre 0



Comportem^t frq^{tiel} de B_0 = fct° de transfert $= \dfrac{\mathcal{L}(\text{sortie})}{\mathcal{L}(\text{entrée})} = B_0(p)$

$\begin{cases} f_{B_0}(t) = f(0) \text{ si } 0 \leq t < T \\ f_{B_0}(t) = f(T) \end{cases} \qquad = \dfrac{\mathcal{L}[f_{B_0}(t)]}{\mathcal{L}[f^*(t)]}$

$f_{B_0}(t) = f(0) \times [u(t) - u(t-T)] + f(T) \times [u(t-T) - u(t-2T] + \ldots$

$F_{B_0}(p) = f_0\left[\frac{1}{p} - e^{-Tp} \times \frac{1}{p}\right] + f(T)\left[e^{-Tp} \times \frac{1}{p} - e^{-2Tp} \times \frac{1}{p}\right] + \ldots$

$= \dfrac{1-e^{-Tp}}{p} \times \left\{ f(0) + f(T) \times e^{-Tp} + f(2T) \times e^{-2Tp} + \ldots \right\}$

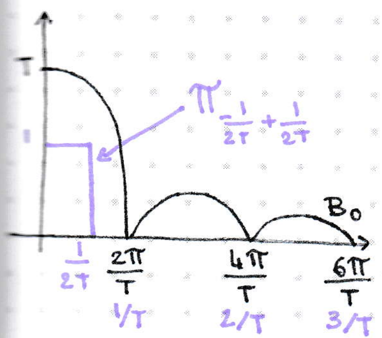
$= \dfrac{1-e^{-Tp}}{p} \times \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(nT) \times e^{-nTp}$

$B_0(p) = \dfrac{\mathcal{L}[f_{B_0}(t)]}{\mathcal{L}[f^*(t)]} = \dfrac{1-e^{-Tp}}{p}$

Bode = $|B_0(\omega)|$ en fct° de ω

↳ $= \left| \dfrac{1-e^{-Tj\omega}}{j\omega} \right| = \left| \dfrac{1-\cos T\omega + j\sin T\omega}{j\omega} \right|$

$|B_0(\omega)| = \dfrac{\sqrt{(1-\cos T\omega)^2 + \sin^2 T\omega}}{\omega} = \dfrac{\sqrt{2-2\cos T\omega}}{\omega}$



$\omega = 2\pi \times \nu$

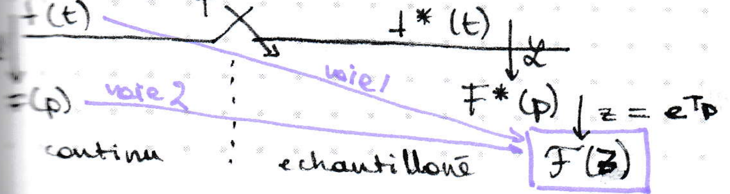
$\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$

B_0 réalise une approximat° de filtre idéal suivi du gain T

→ Ne rattrape pas un non respect de Shannon.

Transformat° en Z / en Z inverse

Calcul d'une transformée en Z



- Voie 1 : $f(t) \longrightarrow \mathcal{F}(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(nT) . z^{-n}$
- Voie 2 : $F(p) \longrightarrow \mathcal{F}(z) = \Sigma$ résidus sur les pôles p_i de $F(p)$ de $\dfrac{F}{1-e^{Tp}.z^{-1}}$

En pratique, on fait la liste des pôles p_i de $F(p)$
- pôles simples
- pôles multiples d'ordre n

Ex : $F(p) = \dfrac{(2p+5)(p-7)^2}{(p+3)(5p^3+12)}$

- 2 zéros
  - $P_1 = -5/2$ zéro simple
  - $P_2 = 7$ zéro multiple d'ordre 2
- 2 pôles
  - $P_3 = -3$ pôle simple
  - $P_4 = -12/5$ pôle multiple d'ordre 3

Résidu d'un pôle simple : $r_i = \dfrac{N(p_i)}{D'(p_i)} = \dfrac{1}{1-e^{Tp}\, z^{-1}}$

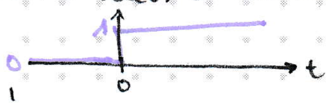
en prenant $F(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ $\quad D'(p) = \dfrac{dD(p)}{dp}$

Résidu d'un pôle multiple : $r_i = \dfrac{1}{(n-1)!}\left[\dfrac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left\{(p-p_i)^n \cdot \dfrac{F(p)}{1-e^{Tp}\cdot z^{n}}\right\}_{p=p_i}\right]$

$\Rightarrow \mathcal{F}(z) = \sum r_i$

Applicat° :

$\begin{cases} f(t) = u(t) = \text{echelon Heaviside} \end{cases}$



$F(p) = \dfrac{1}{p}$

$$\begin{tikzcd} t \arrow[rr, bend left, "1"] & p \arrow[r, "2"] & z \\ u(t) & 1/p & z \end{tikzcd}$$

$f(t) = u(t) \quad \mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(nT) \times z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n$

$\begin{cases} \to 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ \to |x| < 1 \to 1 + x + x^2 + \dots = \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$

Donc on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n = 1 + z^{-1} + (z^{-1})^2 \dots = \dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z}{z^{-1}}$

Voie 2 : $F(p) = \dfrac{1}{p}$ 1 seul pôle simple $p_1 = 0$

$\mathcal{F}(z) = r_1 \quad F(p) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{N(p)}{D(p)} = \begin{cases} N(p) = 1 \\ D(p) = p \end{cases}$

$\Rightarrow r_1 = \dfrac{N(p_1)}{D'(p_1)} = \dfrac{1}{1-e^{-Tp_1}\cdot z^{-1}} = \dfrac{1}{1} \times \dfrac{1}{1-e^{T\times 0}\cdot z^{-1}} = \dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$

→ Même chose avec :

t	p	z
$e^{-at}\cdot u(t)$	$1/p+a$	?

Voie 1 : $f(t) = e^{-aT} \times u(t) \longrightarrow f(nT) = e^{-anT} \times u(nT) \to u(nT) = 1$

$\Rightarrow f(nT) = e^{-anT}$

$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-anT} \times z^{-n} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-aT} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Voie 2 : $F(p) = \frac{1}{p+a}$ 1 pôle simple $p_1 = -a$

$r_1 \Rightarrow N(p) = 1$
$D(p) = 1 + p \rightarrow D'(p) = 1$

$$r_1 = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} \times \frac{1}{1 - e^{-Tp_1} z^{-1}}$$

$$r_1 = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

→ Même chose avec

t	p	z
$t.u(t)$	$1/p^2$	?

Voie 1 : $f(t) = t.u(t)$
$f(nT) = nT \times u(nT) = nT$

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} nT z^{-n} = T.\sum_{n=0}^{+\infty} n (z^{-1})^n = T \times \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

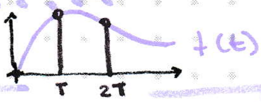
Voie 2 : $F(p) = \frac{1}{p^2}$ 1 pôle $p_1 = 0$ d'ordre 2 $n = 2$

$$r_i = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left\{ (p - p_i)^n \frac{F(p)}{1 - e^{Tp} z^{-1}} \right\} \right] \Rightarrow r_1 = \frac{1}{1} \times \left[\frac{d}{dp} \left\{ p^2 \times \frac{\frac{1}{p^2}}{1 - e^{Tp} z^{-1}} \right\} \right]$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{T \times e^{Tp} \times z^{-1}}{(1 - e^{Tp} z^{-1})^2} = \frac{T z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Rappel : signal échantilloné

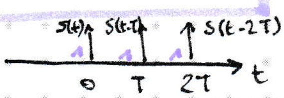
$f(t) \xrightarrow{T} f^*(t)$



$f^*(t) = \{f(0), f(T), \dots\} \xrightarrow{\mathcal{L}} ?$

2° def : $\boxed{f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\,\delta(t-nT)}$

peigne de Dirac



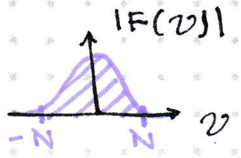
$\sum f(nT)\,\delta(t-nT)$

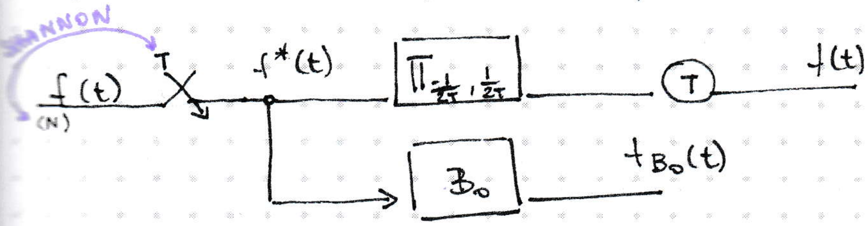
$\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\,\delta(t-nT)\right] = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \cdot e^{-nTp} = F^*(p)}$ $\mathcal{L}$ du signal échantilloné

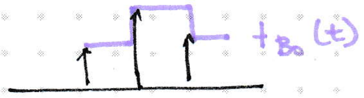
$\boxed{\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \cdot z^{-n}}$ Def de la Z $\quad z = e^{Tp}$

Choix de T → Shannon : $f_e = \frac{1}{T} > 2 \times N$

$f(t)$ caractérisé par son spectre de Fourier







$\boxed{B_0(p) = \frac{1-e^{-Tp}}{p}}$ Approximat° de l'ensemble $\left(\Pi_{-\frac{1}{2T},\frac{1}{2T}}\right) \times$ gain T

Transformée en z

Calcul pratique

$f(t) \xrightarrow{\quad} f^*(t)$

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)$

$f^*(t) \downarrow \mathcal{L}$

$F^*(p) \downarrow z = e^{Tp}$

$\mathcal{F}(z)$

- Voie 1 : $\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\, z^{-n}$
- Voie 2 : $\mathcal{F}(z) = \sum$ résidus r_i

pôles de $F(p)$ ↗ simple ↗ $r_i \; \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \; \frac{1}{1-e^{Tp_i} z^{-1}}$ 2a , $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$

$D'(p) = \frac{dD(p)}{dp}$

↘ multiples → r_i 2b

t	p	z
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$t\,u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

Tableau des transformées en Z élémentaires.

Applicat° : Soit $f(t)$: $F(p) = \dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$. Calculer $F(z)$.

$$f(t) \xrightarrow{1} F(z) = \Sigma r_i \xleftarrow{2} F(p)$$

2 pôles $\left| \begin{array}{l} p_1 = -a \\ p_2 = -b \end{array} \right.$ 2 pôles simples.

$N(p) = 1 \qquad D(p) = (p+a)(p+b) \qquad D'(p) = 2p + a + b$

$$r_1 = \frac{1}{-a+b} \times \frac{1}{1-e^{-aT} z^{-1}} \qquad r_2 = \frac{1}{a-b} \times \frac{1}{1-e^{-bT} z^{-1}}$$

$$Z\left[\frac{1}{(p+a)(p+b)}\right] = \frac{1}{-a+b}\left[\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{-a+b}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}}\right]$$

→ En plus des 2 methodes directes (voies 1 et 2), il existe 2 methodes indirectes (& servent du tableau des transformées en z elementaires)

M1: Developpem^t en elements simples de $F(p)$

On dvp $F(p)$ en elem^t simples :

$$F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b} \quad \text{(cas des pôles simples)}$$

- $\times(p+a)$ puis $p = -a$ $\qquad \dfrac{1}{-a+b} = A$
- $\times(p+b)$ puis $p = -b$ $\qquad \dfrac{1}{-b+a} = B$

$$Z\left(\frac{1}{(p+a)(p+b)}\right) = \frac{1}{-a+b} \times \underbrace{Z\left(\frac{1}{p+a}\right)}_{\frac{z}{z-e^{-aT}}} + \frac{1}{-b+a} \times \underbrace{Z\left(\frac{1}{p+b}\right)}_{\frac{z}{z-e^{-bT}}}$$

M2 : Fonct° trigonométriques

$Z[\sin(\omega t) \cdot u(t)]$

- $\sin\alpha = \dfrac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$ $\qquad$ • $\cos\alpha = \dfrac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$ $\qquad$ Formules d'Euler

$$Z[(\sin(\omega t)) \cdot u(t)] = Z\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} u(t)\right] = \frac{1}{2j}\Big[\underbrace{Z(e^{j\omega t} \cdot u(t))}_{a=-j\omega \,\to\, \frac{z}{z-e^{j\omega T}}} - \underbrace{Z(e^{-j\omega t} \cdot u(t))}_{a=j\omega \,\to\, \frac{z}{z-e^{-j\omega T}}}\Big]$$

$$\Rightarrow Z[\sin(\omega t) \cdot u(t)] = \frac{1}{2j} z \left[\frac{1}{z-e^{j\omega T}} \cdot \frac{1}{z-e^{-j\omega T}}\right]$$

$$= \frac{z}{2j} \cdot \frac{\overbrace{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}^{\sin}}{z^2 - \underbrace{\boxed{(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})}}_{2\cos} z + 1}$$

$\Rightarrow Z[\sin(\omega t).u(t)] = \dfrac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2\cos(\omega T) z + 1}$ (**Rappel** : T periode d'echantillonage → cste)

Principales prop de la transformée en Z

→ $\mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda . \mathcal{F}(z) + \mu \mathcal{G}(z)$

→ thm du retard

(Rappel $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau p} F(p)$)

- $Z[f(t - \underbrace{kT}_{\text{retard (k = entier)}})] = z^{-k} \mathcal{F}(z)$

→ Convolut°

(Rappel $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(p).G(p)$)
$\mathcal{L}[*] = .$

- $Z[f_1(nT) * f_2(nT)] = \mathcal{F}_1(z).\mathcal{F}_2(z)$
$Z[*] = .$

produit de convolut° discret : $\sum_{k=0}^{+\infty} f_1(kT).f_2[(n-k)T] \rightarrow f_1(nT) * f_2(nT)$

→ Thm de la val. initiale / Thm de la val. finale

(Rappel : $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} [p.F(p)]$ $\quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} [p.F(p)]$)

- $\lim_{n \to 0} f(nT) = \lim_{z \to +\infty} [\mathcal{F}(z)]$
- $\lim_{n \to +\infty} f(nT) = \lim_{z \to 1} [\frac{z-1}{z} \mathcal{F}(z)]$

Transformée en Z inverse

Idée :

CONTINU ECHANTILLONNÉ

Déf : $\boxed{Z^{-1}[\mathcal{F}(z)] = \{f(nT)\}_{n=0,1,2,\dots}}$

notat° : $= \{f(nT)\}$ ✓ $\quad = f(nT)$ ✗

Eg : ⚠ lecture d'une table ⚠

t	p	z
$t u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$

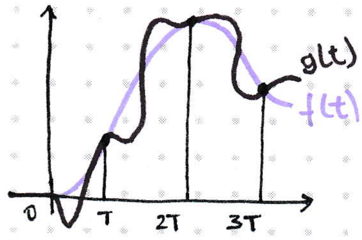
$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{-1}$, Z, ⚠ Z^{-1} ⚠

$\rightarrow Z^{-1}[\frac{Tz}{(z-1)^2}]$ ~~$= t\,u(t)$~~ FAUX

$= \{nT u(nT)\} = \{nT\}$

Rq: $\exists$ une ∞^{t} de fct continue du tps qui possède la même transformée en Z

Ex :



$f(t) \neq g(t)$
$f(nT) = g(nT)$

$\left| \begin{array}{l} \mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\, z^{-n} \\ \mathcal{G}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(nT)\, z^{-n} \end{array} \right.$

$\mathcal{F}(z) = \mathcal{G}(z)$

$\Rightarrow Z^{-1}[\mathcal{F}(z)] = Z^{-1}[\mathcal{G}(z)] = \{f(nT)\} = \{g(nT)\} \cancel{=} f(t) \cancel{=} g(t)$

4 méthodes de calcul de Z^{-1}

- 2 méthodes analytiques : résultat littéral donnent $f(nT)$ en fct de n et de T
  → cas les + simples
- 2 méthodes numériques : résultat ss la forme $\left[\begin{array}{l} f(0) = \dots \\ f(T) = \dots \\ f(2T) = \dots \end{array} \right.$ Collect° de nombres
  → les + utilisées.

M1 : Méthode des résidus.

$f(nt) = \Sigma$ résidus de $\mathcal{F}(z) \cdot z^{n-1}$

Hyp. : $\mathcal{F}(z)$ n'a que des pôles simples.
fct auxiliaire $\mathcal{G}(z) = \mathcal{F}(z) \cdot z^{n-1} = \dfrac{N(z)}{D(z)}$

$$\Rightarrow \boxed{f(nt) = \sum_i \frac{N(z_i)}{D'(z_i)}} \qquad z_i = \text{pôles de } \mathcal{F}(z)$$

Ex : $\mathcal{F}(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-a)(z-b)}$ Calculer la transformée en Z inverse de $\mathcal{F}(z)$

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{F}(z) \cdot z^{n-1} = \frac{z(z+1)\,z^{n-1}}{(z-a)(z-b)} = \frac{z^n (z+1)}{(z-a)(z-b)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$D'(z) = 2z - a - b$

$$f(nt) = \sum_i \frac{z_i^n (z_i+1)}{2z_i + a + b} \qquad \text{et } z_1 = a \quad z_2 = b \quad \text{2 pôles simples.}$$

$$\Leftrightarrow f(nt) = \frac{a^n (a+1)}{2a - a - b} + \frac{b^n (b+1)}{2b - a - b} = \frac{a^n (a+b)}{a-b} + \frac{b^n (b+1)}{-a+b}$$

$$\Rightarrow Z^{-1}\left[\frac{z(z+1)}{(z-a)(z-b)}\right] = \left\{ \frac{a+1}{a-b}\, a^n + \frac{b+1}{b-a}\, b^n \right\}_{n=0,1,2,\dots}$$

$$= \left\{ 1,\ \frac{a+1}{a-b}\, a + \frac{b+1}{b-a}\, b,\ \text{etc} \dots \right\}$$

M2 : Dvp$^{\text{nt}}$ en fct élém$^{\text{r}}$

⚠ pour $\mathcal{L}^{-1} \longrightarrow F(p) = \dfrac{1}{(p+a)(p+b)} = \dfrac{A}{p+a} + \dfrac{B}{p+b}$

$\xmapsto{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = A.e^{-at}u(t) + B.e^{-bt}u(t)$

Ne marche pas pour Z^{-1} ! $\mathcal{F}(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)} = \dfrac{A}{z+a} + \dfrac{B}{z+b} \xmapsto{Z^{-1}}$???

$\rightarrow \dfrac{1}{z+a}$ n'est pas une transf. en z simple.

2 étapes :

- $g(z) = \dfrac{\mathcal{F}(z)}{z}$. On décompose $g(z)$ en élém$^{\text{t}}$ simples.

  $\Rightarrow g(z) = \dfrac{C}{z+a} + \dfrac{D}{z+b} + \dots$

- On revient à $\mathcal{F}(z) = z.g(z) = \dfrac{zC}{z+a} + \dfrac{zD}{z+b} + \dots$

  On peut trouver $Z^{-1}[\mathcal{F}(z)]$ à partir de la table.

Ex : $\mathcal{F}(z) = \dfrac{2z}{(z-1)(z-0{,}5)}$ Calculer la transformée en Z inverse.

$$g(z) = \frac{\mathcal{F}(z)}{z} = \frac{2}{(z-1)(z-0{,}5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0{,}5}$$

$\dfrac{2}{0{,}5} = A \Rightarrow A = 2/0{,}5 = 4$ $\quad \dfrac{2}{-0{,}5} = B \Rightarrow B = -2/0{,}5 = -4$

$$\mathcal{F}(z) = z\,g(z) = z \times \left(\frac{4}{z-1} + \frac{-4}{z-0{,}5}\right) = \frac{4z}{z-1} - \frac{4z}{z-0{,}5}$$

$f(nT) = 4\,u(nT) - 4\,e^{-anT}u(nT) = 4(1-e^{-anT}) = 4(1-0{,}5^n)$

avec a : $0{,}5 = e^{-aT} \Rightarrow 0{,}5^n = e^{-aTn}$

$\Rightarrow Z^{-1}[\mathcal{F}(z)] = \{4(1-0{,}5^n)\}_{n=0,1,2\dots} = \{0, 2, 3, \dots\}$

M3 : Division selon les puissances de z^{-1}

Pb inverse : $\underset{\text{CONNU}}{\mathcal{F}(z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \underset{???}{f(nT)}\, z^{-n}$

$f(nT)$ = coeff de z^{-n} ds un dvpm$^{\text{t}}$ de $\mathcal{F}(z)$ ss la forme d'un polynôme de la var. z^{-1}

Le dvpm$^{\text{t}}$ peut être obtenu par division polynomiale.

Ex : $\mathcal{F}(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z^2-0{,}4z-0{,}1)}$ Calculer $Z^{-1}[\mathcal{F}(z)]$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1{,}4z^2 + 0{,}5z - 0{,}1} \xrightarrow{\text{div par + gde puissance}} = \frac{z^{-1}}{1 - 1{,}4z^{-1} + 0{,}5z^{-2} - 0{,}1z^{-3}}$$

DIVIDENDE | DIVISEUR

$$\begin{array}{l|l}
z^{-1} & 1 - 1{,}4z^{-1} + 0{,}5z^{-2} - 0{,}1z^{-3} \\
- \text{DIVISEUR} \times z^{-1} & \overline{z^{-1} + 1{,}4z^{-2} + 1{,}46z^{-3} + 1{,}44z^{-4} + 1{,}43z^{-5} + \dots} \\
\overline{1{,}4z^{-2} - 0{,}5z^{-3} + 0{,}1z^{-4}} & \text{QUOTIENT} \\
- \text{DIVISEUR} \times 1{,}4z^{-2} & \hookrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\, z^{-n} \\
\overline{1{,}46z^{-3} - 0{,}6z^{-4} + 0{,}14z^{-5}} & \\
- \text{DIVISEUR} \times 1{,}46z^{-3} & \\
\dots &
\end{array}$$

RESTE

$Z^{-1}[F(z)]$ $\begin{cases} f(0) = 0 \quad f(T) = 1 \quad f(2T) = 1{,}4 \quad f(3T) = 1{,}46 \quad f(4T) = 1{,}44 \\ f(5T) = 1{,}43 \quad (\text{et } f(6T \longrightarrow \infty T) = 1{,}43) \end{cases}$

Critères d'arrêt :
- sur le nb échantillon
- convergence : $|f(nT) - f[(n-1)T]| < \varepsilon$

Rq : ⚠ accumulat° des erreurs d'arrondis.

Rq : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(nT)$? → THM des vals. finales.

$$\lim_{n \to +\infty} f(nT) = \lim_{z \to 1} \left[\frac{z-1}{z} F(z)\right] = \lim_{z \to 1} \left[\frac{z-1}{z} \frac{z^2}{(z-1)(z^2 - 0{,}4z + 0{,}1)}\right]$$

$$= \frac{1}{1 - 0{,}4 + 0{,}1} = \frac{1}{0{,}7} = \frac{10}{7} \; (\simeq 1{,}42857)$$

M4 : Méthode de l'équat° aux différence

→ Transposit° en numérique d'une équat° différentielle en var continues.

Ex : $\dfrac{X(z)}{Y(z)} = \dfrac{0{,}3z}{z - 0{,}2}$ → On cherche $Z^{-1}[X(z)]$ càd $\{x(nT)\}$
→ on suppose connu $Z^{-1}[Y(z)]$ càd $\{y(nT)\}$

Rq : Automatique $\quad y \xrightarrow{} \boxed{\$} \xrightarrow{} x$

on connait — on cherche

transmittance échantillonnée

On s'appuie sur le thm du retard : $Z[f(t - kT)] = z^{-k} f(z)$

$$\rightarrow \boxed{Z^{-1}[z^{-k} F(z)] = \{f[(n-k)T]\}}$$

Ex (suite) : $\dfrac{X(z)}{Y(z)} = \dfrac{0{,}3}{1 - 0{,}2z^{-1}}$ (que des puissances nég. de z)

$$X(z) - 0{,}2z^{-1} X(z) = 0{,}3\, Y(z)$$

Z^{-1}

$x(nT) - 0{,}2\, x[(n-1)T] = 0{,}3\, y(nT)$ → ep. aux diff. du 1° ordre

→ Se résout si on connait 1 condit° initiale

cond. init : $x(-T) = 0 = x_{-1}$

Notat° : $x(nT) = x_n \quad y(nT) = y_n \qquad x_n = 0{,}2x_{n-1} + 0{,}3y_n$

n	$0{,}2x_{n-1}$	$0{,}3\,y_n$	x_n
0	0	0,3	0,3
1	0,06	0,3	0,36
2	0,072	0,3	0,372
3	...	0,3	...
⋮	⋮	⋮	⋮

On suppose $y_n = 1 \ \forall n$

$z^{-1}[X(z)] = \{x(nT)\} = \{x_n\}$

Rq: $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} L$?

$$\underbrace{x_n}_{\downarrow\, L} = 0{,}2 \underbrace{x_{n-1}}_{\downarrow\, L} + \underbrace{0{,}3\, y_n}_{\downarrow\, 0{,}3 \cdot 1} \rightarrow L = 0{,}2L + 0{,}3$$

$$\Rightarrow 0{,}8L = 0{,}3 \Rightarrow L = 3/8$$