APPROXIMATION, INTERPOLATION, OPTIMISATION.

2 methodes d'approximat° :
- approximat° uniforme
- methode des moindres carrés

2 types d'interpolati° :
- Lagrange
- Newton

Derivat° numérique & Intégrat° numérique

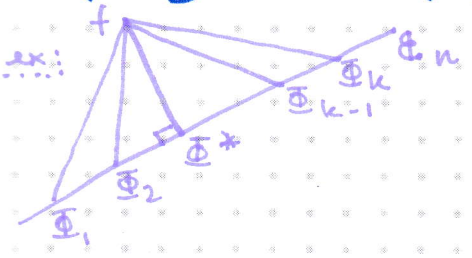
APPROXIMATION

Approximation uniforme

Soit $E = \mathcal{C}[a,b] = \{ f$ continue sur $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$
E est un e.v. normé $\|f\| = \max |f(x)|$ (norme de la cv uni.)
E est metrique $d(f, \Phi) = \|f - \Phi\| = \max |f(x) - \Phi(x)|$
↳ distance

Soit $\mathcal{E}_n$ un sev. de E de dimension n
On appelle meilleur approx uniforme de $f \in E$ la fonct° Φ^* ($\Phi^* \in \mathcal{E}_n$) qui vérifie :
$\|f - \Phi^*\| = \min \|f - \Phi\| \Rightarrow d(f, \Phi^*) = \min d(f, \Phi)$

ex :



Or dim $\mathcal{E}_n = n$ $\exists$ une base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ de $\mathcal{E}_n$ $\boxed{\Phi^*(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^* \varphi_k}$
ce qui revient à determiner le coeff a_k^* tq $\|f - \Phi^*\| = \min_{\Phi \in \mathcal{E}_n} \|f - \Phi\|$

Polynome de Tchebyshev

Def par $\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0 = 1, \quad T_1 = x \end{cases}$

ex : $T_2(x) = 2x T_1(x) - T_0 = 2x^2 - 1$
$T_3(x) = 2x T_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

Prop : $T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) = \cos(n\theta)$ $\quad \theta = \arccos(x)$
$-1 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

Prop : le coeff dominant de $T_n(x)$ est $a_n = 2^{n-1}$

Prop : $\{T_0, T_1, \dots, T_n, \dots\}$ est une famille de polynômes orthogonaux sur $[-1, 1]$ relativement à la fct poids $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\rightarrow \langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \omega(x)\, dx$ produit scalaire

$\langle T_n, T_m \rangle = 0 \quad \forall\, n \neq m$

Prop : $T_n(x) = +1 ; -1 ; +1 ; -1 ; \dots$
pour $x_0 = 1 ; x_1 = \cos \pi/n ; x_2 = \cos 2\pi/n ; \dots ; x_k = \cos k\pi/n$

THM de Tchebyshev : Dans l'espace des polynomes de degré n ayant le coeff dominant égal à 1 c'est $T_n^*(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ qui réalise la meilleur approx uniforme de la fct nulle sur $[-1, 1]$

$\|T_n^*\| = \min_{R_n \in \mathcal{P}_n} \|R_n\|$ $\quad \mathcal{P}_n = \{\text{polyn. } 1x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0\}$

THM : Soit f une fct continue sur $[a, b]$.
On designe par $\mathcal{P} = \{\text{polynômes de } d° \leq n\}$
Soit $p_n(x) \in \mathcal{P}_n$ tq $\mathcal{E}_n(x) = f(x) - p_n(x)$ atteint les valeurs extrêmes alternées M et $-M$ où $M = \|\mathcal{E}_n\| = \max |\mathcal{E}_n(x)|$ en au moins $(n+2)$ points $X_1, X_2, \dots, X_{n+2} \in [a, b]$
alors $\boxed{p_n = p_n^*}$ meilleure approximat° uniforme de f.

Rq : Condit° suffisante mais pas necessaire
Demo : par l'absurde.

Approximat° des moindres carrés

Soit E ev sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $(f, g) \in E^2 \mapsto \langle f, g \rangle \in \mathbb{R}$
$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$
Soit F sev de E. Dim F supposée finie.

THM : Une condit° nécessaire et suffisante pour que $\Phi^* \in F$ soit une meilleure approximat° de $f \in E$ tq $\langle f - \Phi^*, \Phi \rangle = 0 \ \forall\, \Phi \in F$

Demo : Supposons que Φ^* soit la meilleure approximat° de $f \in E$
On veut mq $\langle f - \Phi^*, \Phi \rangle = 0 \quad \forall\, \Phi \in F$

Supposons le contraire : $\exists\, \Phi_1 \in F$ tq $\langle f - \Phi^*, \Phi_1 \rangle = \alpha \neq 0$
Soit $\Phi_2 = \Phi^* + \beta \Phi$ avec $\beta = \alpha / \|\Phi_1\|^2$ $\quad \Phi_2 \in F$ car F sev

$$\|f-\Phi_2\|^2 = \langle f-\Phi_2, f-\Phi_2\rangle = \langle f-\Phi^*-\beta\Phi_1, f-\Phi^*-\beta\Phi_1\rangle$$
$$= \langle f-\Phi^*, f-\Phi^*\rangle - 2\beta\langle f-\Phi^*, \Phi_1\rangle + \beta^2\langle \Phi_1, \Phi_1\rangle$$
$$= \|f-\Phi^*\|^2 - 2\beta\alpha + \beta^2\|\Phi_1\|^2$$
$$= \|f-\Phi^*\|^2 - 2\frac{\alpha^2}{\|\Phi_1\|^2} + \frac{\alpha^2}{\|\Phi_1\|^2} = \|f-\Phi^*\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|\Phi_1\|^2}$$

$\|f-\Phi_2\|^2 < \|f-\Phi^*\|^2 \Rightarrow \|f-\Phi_2\| < \|f-\Phi^*\|$

Absurde par déf de Φ^* $\quad \|f-\Phi^*\| = \min \|f-\Phi\|$

Ccl° : $\langle f-\Phi^*, \Phi\rangle = 0 \ \forall \Phi \in F$

- Supposons $\exists \Phi_1 \in F$ tq $\langle f-\Phi_1, \Phi\rangle = 0 \ \forall \Phi \in F$

$$\|f-\Phi\|^2 = \langle f-\Phi, f-\Phi\rangle = \langle (f-\Phi_1)-(\Phi-\Phi_1), (f-\Phi_1)-(\Phi-\Phi_1)\rangle$$
$$= \|f-\Phi_1\|^2 - 2\langle f-\Phi, \underbrace{\Phi-\Phi_1}_{\in F}\rangle + \|\Phi-\Phi_1\|^2$$

$\|f-\Phi\|^2 = \|f-\Phi\|^2 + \|\Phi-\Phi_1\|^2 \Rightarrow \|f-\Phi_1\| \leq \|f-\Phi\|$

$\Rightarrow \|f-\Phi_1\| = \min\|f-\Phi\| \ \forall \Phi \in F \Rightarrow \Phi_1 = \Phi^*$

Matrice de Gram

$\langle f-\Phi^*, \Phi\rangle = 0 \quad \forall \Phi \in F$

$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ base de F $\qquad \Phi^*(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^* \varphi_k(x)$

$\langle f - \sum_{k=1} a_k^* \varphi_k, \varphi_j\rangle = 0 \quad \forall j$

$$(S)\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k^* \langle \varphi_k, \varphi_j\rangle = \langle f, \varphi_j\rangle \\ \forall j = 1 \text{ —— } n \end{cases}$$

Système linéaire

$\boxed{G_{kj} = \langle \varphi_k, \varphi_j\rangle}$ symétrique : Matrice de Gram.

Cas continu : $E = \mathcal{C}([a,b]) = \{f \text{ continue sur } [a,b]\}$

$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx \qquad (\omega(x) \text{ poids})$

$$(S)\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k^* \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_j(x)\omega(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi_j(x)\omega(x)dx \\ \forall j = 1 \text{ —— } n \end{cases}$$

Cas discret : $E = \mathcal{C}([a,b])$ $\qquad (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de F

$f(x)$ est définie par pt $f(x_i)$ $(i = 0 \text{ —— } N)$ $\quad (N > n)$

Le ps discret $\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)g(x_i)\omega_i$ $\quad$ avec $\omega_i = \omega(x_i)$

$$(S)\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k^* \sum_{i=0}^{N} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)\omega_i = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\varphi_j(x_i)\omega_i \\ \forall j = 1 \text{ —— } n \end{cases}$$

INTERPOLATION

f continue sur $[a,b]$. $f(x_i)$ connu en $(n+1)$ pts de $[a,b]$

Polynôme de Lagrange

$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x)f(x_i)$ où $L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$ $\quad L_i(x)$ polynôme de d° $\leq n$.

$$L_i(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n+1})$$

$$L_i(x_i) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(x_i - x_j)} \Rightarrow \boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}}$$

$L_i(x)$ appelée base de Lagrange.

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} f(x_i)}$$ polynome de Lagrange.

$$P_n(x_k) = \sum_{i=1}^{n+1} \underbrace{L_i(x_k)}_{\delta_{ik}} f(x_i) = f(x_k) \quad \forall k$$

δ_{ik} : $i \neq k$: 0 ; $i = k$: 1

$\rightarrow P_n$ interpolle f au pt x_k ($k=1 - n+1$)

$\Downarrow$

polynôme d'interpollat° de Lagrange

Ex : Polynôme d'interpollat° $P_3(x)$ de f

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	1	3	2	5

$$P_3(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} f(0) + \frac{x(x-3)(x-4)}{1(-2)(-3)} f(1) + \frac{x(x-1)(x-4)}{3(2)(-1)} f(3)$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-3)}{4(3)(1)} f(4) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{17}{6}x^2 + \frac{13}{3}x + 1$$

Erreur d'interpollat° : $\mathcal{E}(x) = f(x) - P_n(x)$

THM : Si f est de $\mathcal{C}^{n+1}[a,b]$ (classe $(n+1)$)
alors $\exists\, y_x \in]a,b[$ tq $\boxed{\mathcal{E}(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x-x_i) \frac{f^{(n+1)}(y_x)}{(n+1)!}}$

Posons $M_{n+1} = \max\limits_{a\leq x\leq b} |f^{(n+1)}(x)| \Rightarrow |\mathcal{E}(x)| \leq \left|\prod\limits_{i=1}^{n+1}(x-x_i)\right| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$

Si les x_i sont les racines du polynôme de Tchebyshev $T_{n+1}(x)$

$T_{n+1}(x) = 2^n \prod\limits_{i=1}^{n+1}(x-x_i) \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{n+1}(x-x_i) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$ $\quad |T_n(x)| \leq 1$ sur $[-1;1]$

$$\Rightarrow \boxed{|\mathcal{E}(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}}$$