1 Théorèmes de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

1.1 Théorème de Cauchy-Schwarz

Théorème 1 (Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, <, >)$ préhilbertien réel.. Alors

$$\forall (x,y) \in E^2, \ |< x, y >| \leqslant \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}$$

1.2 Théorème de Minkowski

Théorème 2 (Minkowski)

Soit $(E, <, >)$ préhilbertien réel. Alors

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \sqrt{< x+y, x+y >} \leqslant \sqrt{< x, x >} + \sqrt{< y, y >}$$

1.3 Norme issue d'un produit scalaire

Définition 1

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle *norme* sur E, toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x,y) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} N(x) \geqslant 0 \\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \end{cases}$$

Proposition 1

Soit $(E, <, >)$ préhilbertien réel.

Alors $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in E$ par $N(x) = \sqrt{< x, x >}$ est une norme sur E.