Exercice : (Processus de Markov)

1)- Chaque transaction dure 4 min, donc le traitement à l'heure d'un terminal est de $\alpha = \frac{60}{4} = 15$ traitement par heure.

- Pour un comptable donné, le taux d'accès à la salle des terminaux est $\beta = 5$ accès/heure.

2) a) E_k représente nb comptables présent dans la salle des terminaux, donc il y'a 6 états : E_0 0 comptable

E_1 1 "

⋮

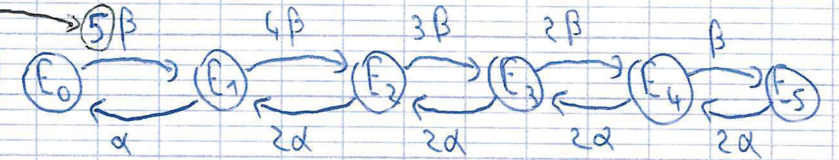
E_5 5 "

Donc $(5-k)$

b)- Dans l'état E_k, comme il y'a déjà k comptables dans la salle, et qu'il y'en 5 en tout, le taux d'arrivé de comptable ne peut être que $(5-k) \times \beta$.

- Il y'a au plus 2 terminaux occupé, si l'état est E_0 il y'a 0 terminal occupé et en E_1, seulement 1.

5 comptables susceptible d'entré

c) 

C'est un processus de naissance et de mort

3) Le graphe simplifié est fini, fortement connexe et contient au moins une boucle (même si caché car graphe simplifié), donc il est ergodique. Par conséquent, il existe un régime permanent.

- Probabilité des états en régime permanent :

• $\pi_0^* = \pi_0^*$

$$\boxed{\pi_k^* = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{k} \mu_i} \times \pi_0^*}$$

- $\Pi_1^* = \frac{5\beta}{\alpha}\Pi_0^*$
- $\Pi_2^* = \frac{5\beta\, 4\beta}{\alpha \cdot 2\alpha} \times \Pi_0^* = \frac{10\beta^2}{\alpha^2}\Pi_0^*$
- $\Pi_3^* = \frac{15\beta^3}{\alpha^3} \times \Pi_0^*$
- $\Pi_4^* = 15\frac{\beta^4}{\alpha^4} \times \Pi_0^*$
- $\Pi_5^* = \frac{15}{2}\frac{\beta^5}{\alpha^5} \times \Pi_0^*$

$\sum \Pi^* = 1$

Prenons $\psi = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$$1 = \Pi_0^*\left(1 + 5\psi + 10\psi^2 + 15\psi^3 + 15\psi^4 + \frac{15}{2}\psi^5\right)$$

$$\Rightarrow \Pi_0^* = \frac{1}{\frac{243}{243} + \frac{405}{243} + \frac{270}{243} + \frac{135}{243} + \frac{45}{243} + \frac{7{,}5}{243}} = \frac{486}{2211} = \boxed{\frac{162}{737}}$$

On a bien $\Pi_0^* = \frac{162}{737}$, $\Pi_1^* = \frac{270}{737}$, $\Pi_2^* = \frac{180}{737}$, $\Pi_3^* = \frac{90}{737}$,

$\Pi_4^* = \frac{30}{737}$, $\Pi_5^* = \frac{5}{737}$

- Proba d'attente nulle : $\Pi_0^* + \Pi_1^* = \frac{432}{737} = \boxed{0{,}59}$

4) Nb moyen de terminaux utilisés :

$= \Pi_1^* \times 1 + \Pi_2^* \times 2 + \Pi_3^* 2 + \Pi_4^* \times 2 + \Pi_5^* \times 2$

$= \frac{880}{737} = \boxed{1{,}19}$

- Dans l'état Π_3^*, il y a 1 comptable en attente d'un terminal
- ——— Π_4^*, ——— 2 ———
- ——— Π_5^*, ——— 3 ———

D'où le temps moyen : $\Pi_3^* \times 1 + \Pi_4^* \times 2 + \Pi_5^* \times 3 = \frac{165}{737} = 0{,}224$ heure

soit 13'26 sec

5)
$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, shift left, "5\beta"] & E_1 \arrow[l, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "4\beta"] & E_2 \arrow[l, shift left, "2\alpha"] \arrow[r, shift left, "3\beta"] & E_3 \arrow[l, shift left, "3\alpha"] \arrow[r, shift left, "2\beta"] & E_4 \arrow[l, shift left, "3\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & E_5 \arrow[l, shift left, "3\alpha"] \end{tikzcd}$$

$\alpha = \frac{60}{5} = 12$ traitement/heure

$\Pi_0^* = \Pi_0^*$ $\qquad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{5}{12}$

$\Pi_1^* = \frac{5\beta}{\alpha}\,\Pi_0^* = \frac{25}{12}\,\Pi_0^* = 2{,}083\,\Pi_0^*$

$\Pi_2^* = 10\,\frac{\beta^2}{\alpha^2}\,\Pi_0^* = \frac{250}{144}\,\Pi_0^* = 1{,}736\,\Pi_0^*$

$\Pi_3^* = 10\,\frac{\beta^3}{\alpha^3}\,\Pi_0^* = \frac{1250}{1728}\,\Pi_0^* = 0{,}723\,\Pi_0^*$

$\Rightarrow \Pi_0^* = 0{,}173$

$\Pi_4^* = \frac{20}{3}\,\frac{\beta^4}{\alpha^4}\,\Pi_0^* = 0{,}201\,\Pi_0^*$

$\Pi_5^* = \frac{20}{9}\,\frac{\beta^5}{\alpha^5}\,\Pi_0^* = 0{,}028\,\Pi_0^*$

$\Rightarrow$ Temps perdu : $1\,\Pi_4^* + 2\,\Pi_5^* = (0{,}201 + 0{,}056) \times 0{,}173 \simeq 0{,}044$ heure
soit 2'40 sec

→ l'acquisition d'un 3ème terminal compense donc très largement l'allongement de la durée moyenne des transactions