

PROCESSUS DE MARKOV

Le service comptable d'une entreprise comporte 5 personnes ; celles-ci utilisent deux terminaux informatiques situés dans une salle voisine de leur bureau. Chaque comptable accède en moyenne 5 fois par heure (selon une loi de Poisson) à un terminal pour une transaction dont la durée moyenne est de 4 minutes (régie par une loi exponentielle). Lorsque les deux terminaux sont occupés, tout nouvel arrivant fait la queue.

- 1°) Quelle est la valeur du taux α de traitement de chaque terminal (prendre l'heure comme unité de temps) ? Celle du taux β d'accès à la salle des terminaux, **pour un comptable donné** ?
- 2°) a) Modéliser le fonctionnement de la salle des terminaux à l'aide d'un processus stochastique approprié. On notera E_k l'état pour lequel k comptables sont présents dans la salle des terminaux. Quel est le nombre total d'états ?
- b) Dans l'état E_k , combien de comptables sont-ils susceptibles de se rendre à la salle des terminaux ?
Combien de terminaux sont-ils occupés ?
- c) Tracer le graphe simplifié des transitions entre t et $t + dt$ et valuer ses arcs **avec soin** par les taux de transition correspondants en vous aidant du 2°) b).
Quel processus classique reconnaissez-vous ?
- 3°) Justifier **en détail** l'existence d'un régime permanent. Calculer alors les probabilités des états (sous forme de fraction simplifiée) ; montrer que $\pi_0^* = \frac{162}{737}$.
Quelle est la probabilité d'une attente nulle ? Calculer sa valeur numérique.
- 4°) Quel est le nombre moyen de terminaux utilisés ?
Prouver que le temps moyen total (exprimé en heures) qui est perdu en attente par heure de fonctionnement pour l'ensemble du personnel du service comptable est :
$$1 \cdot \pi_3^* + 2 \cdot \pi_4^* + 3 \cdot \pi_5^*.$$

Evaluer numériquement.
- 5°) Une nouvelle procédure de contrôle budgétaire fait passer la durée moyenne d'une transaction à 5 mn. On décide alors l'acquisition d'un troisième terminal : compense-t-elle l'allongement de la durée moyenne des transactions (au sens du temps perdu en attente par les comptables) ?