LOGIQUE DU 1^ER ORDRE

lgg du 1 ordre :
- connecteurs
  $\vee \wedge \neg \Leftrightarrow \ \forall \exists \ \top \bot$
- $\mathcal{V}$ symboles de var
  {alphabet latin/grec min avec indice eventuel}

Partie spé : lgg relationnel

#arg
- 0 $\mathcal{C}$ symbole cst
- (n) $\mathcal{F}$ symb. fct.°
- (k) $\mathcal{R}$ symb. relat.°

Reconstruction

algèbre, logique

naturel	lettres	mots	mots du dico	phrases	recits	contextes
log° form°	symboles	mots (Kleene)	termes	formules	demonstration	theories

$X = (\mathcal{C} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{L}_0)^*$

termes :
- atomes | $\forall$ elt de $\mathcal{V}$
  $\forall$ sym. de cst
- constructeurs | Si $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$ sont des termes et f est symb de fct d'arité n alors $f\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_n$ est un terme.
- cond° d'arrêt | ω

formules :
- atomes | $\top \bot$
  Pour tout R symb de relat° d'arité n et tous termes $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$, $R\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_n$ est une formule atomique
  ex : $0=0$ formule atomique de maths
  terme de chimie
- constructeurs | Si φ et ψ désignent des formules alors
  $\varphi \wedge \psi$ $\varphi \vee \psi$ $\neg\varphi$ $\varphi \Leftrightarrow \psi$ $\varphi \Rightarrow \psi$ formules
  et ss condit° $\forall x\, \varphi$ $\exists x\, \varphi$ formules quantifiées
- condi° d'arret | ω

φ est dite formule close ou énoncé lorsque "plus de symbole de var ayant une occurence libre dans φ"

démonstrat° : (on écrit $\varphi \vdash \psi$ pour dire φ permet de demontrer ψ)
- atomes : $\forall \varphi$ on a $\varphi \vdash \varphi$ (règle axiome)
  ex : $\bot \vdash \bot$; $\forall x\ x*e \equiv x \vdash \forall x\ x*e \equiv x$
- constructeur :
  ($\varphi \vdash \psi$ est un séquent)
  si le séquent s_1 permet de construire le séquent s_2 en écrivant $\frac{s_1}{s_2}$

$$\frac{\varphi \vdash A \qquad \psi \vdash B}{\varphi \wedge \psi \vdash A \wedge B}\ \wedge\text{-intro} \qquad \frac{\varphi \vdash A \wedge B}{\varphi \vdash A}\ \wedge\text{-elim}$$

$$\frac{\varphi \vdash A}{\varphi \vdash A \vee B}\ \vee\text{-intro} \qquad \frac{\varphi \vdash A \vee B \qquad \psi \vdash \neg B}{\psi \wedge \varphi \vdash A}\ \vee\text{-elim}$$

$$\frac{\varphi \wedge A \vdash \bot}{\varphi \vdash \neg A}\ \neg\text{intro} \qquad \frac{\varphi \vdash A \Rightarrow B \quad \varphi \vdash A}{\varphi \vdash B}\ \begin{matrix}\text{MPonens}\\(\Rightarrow \text{elim})\end{matrix} \qquad \frac{\varphi \vdash A \Rightarrow B \quad \varphi \vdash B \Rightarrow A}{\varphi \vdash A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow\text{intro}$$

Raisonnement par l'absurde : $\dfrac{\varphi \wedge A \wedge \neg B \vdash \bot}{\varphi \vdash A \Rightarrow B}$

LK equiv

$$\frac{\varphi \vdash \neg\neg A}{\varphi \vdash A}\ \neg\neg\text{ elim} \qquad \frac{\varnothing}{\varphi \vdash A \vee \neg A}\ \text{1/3 exclu}$$

$$\frac{\varphi \vdash A[x/*]}{\varphi \vdash \forall x\, A[x/*]}\ \forall\text{intro} \quad x \in \mathcal{V} \text{ libre} \qquad \frac{\varphi \vdash \forall x\, A[x]}{\varphi \vdash A[\rho/x]}\ \forall\text{ elim} \quad \rho \text{ terme qqconque}$$

$$\frac{\varphi \vdash A[\rho/x]}{\varphi \vdash \exists x\, A(x)}\ \exists\text{ intro}$$

preuve d'existence constructive

~~$\dfrac{\varphi \vdash \exists x\, A(x)}{\varphi \vdash A[\rho/x]}$ pour un certain ρ terme~~

→ en general, ρ n'existe pas toujours.

$\exists \neq$ il existe

1° ordre   2° ordre

- condition d'arret : ω

Une démonstrat° est une suite de séquents obtenus par cette construction inductive.

$\boxed{\text{LK}}$ Regles (Hto)

$\boxed{\text{LI}}$ sauf par $\bot$, $\frac{1}{3}$ exclu, $\neg\neg$ elim

$\varphi \dashv\vdash \psi$ signale que $\varphi \vdash \psi$ et $\psi \vdash \varphi$

⚠ $\varphi \vdash \psi$ n'a pas le sens de $\varphi \Rightarrow \psi$ (cf Tortue et Modus Ponens)

Théorie : Soit $\mathcal{L}$ un lgg. On dit que $\mathcal{T}$ est une théorie de lgg $\mathcal{L}$ lorsque $\mathcal{T}$ est la donnée d'un nbr fini de formules closes $\sigma_1 \dots \sigma_n$ de $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ ainsi qu'un nombre fini d'ensembles récursivement énumérables de formules closes.

⚠ $\mathcal{T}$ peut disposer d'une $\infty^{té}$ potentielle d'axiomes mais chaque "appel" de $\mathcal{T}$ se fera avec un nombre fini.

Theorie de l'égalité :

Soit $\mathcal{L}$ contenant $\mathcal{L}_0 = \{\equiv\}$ sym. de rel° d'arité 2

on décrit $\mathcal{T}_\equiv$:

human part

- A_{reflex} : $\forall x \quad x \equiv x$
- A_{sym} : $\forall x \quad \forall y \quad x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$
- $A_{transit}$: $\forall x \quad \forall y \quad \forall z \quad x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$

computer part

Schéma d'axiomes:

pour toute formule φ de $\mathcal{F}(\mathcal{L})$

$\forall u \ \forall v \quad u \equiv v \Rightarrow [\varphi[u/x] \Leftrightarrow \varphi[v/x]]$

avec x var libre de φ.

↳ récursivemt énumérable.

Une theorie $\mathcal{T}$ est dite égalitaire lorsque :

- $\equiv$ apparait ds son lgg
- les axiomes/schémas d'axiomes de $\mathcal{T}$ contiennent ceux de $\mathcal{T}_\equiv$.

Soit $\mathcal{T}$ une thr de lgg $\mathcal{L}$. On dit que σ de $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ est un théorème de $\mathcal{T}$ lorsque :

- σ close
- il $\exists$ $\sigma_1 \dots \sigma_n$ pour un certain n (fini) les données axiomatiques de $\mathcal{T}$ tq

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \wedge \sigma_n \vdash \sigma$$

(1) Une thr est dite contradictoire lorsqu'il existe A de $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ tq $A \wedge \neg A$ en soit thm.

(2) Une thr est dite inconsistante lorsque tte formule φ close en est thm.

(3) Une thr est dite incohérente lorsque $\bot$ en est thm.

THM : Les 3 def qui précèdent sont équivalentes ds LK.

Demo :

- (3) méta implique (2)

  supposons $\mathcal{T}$ incohérente. Soient alors $\sigma_1 \dots \sigma_n$ axiomes de $\mathcal{T}$ tq $\dfrac{\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \vdash \bot}{\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \vdash \bot \vee \varphi \ (\equiv \varphi)} \vee A\Vert$ via Alg. Boole.

- (2) méta implique (1)

  Si $\mathcal{T}$ admet φ qqconque pr thm alors par méta-spec° on prend $\varphi = A \wedge \neg A$. $\mathcal{T}$ est alors contradictoire

- (1) méta implique (3)

  Supposons $\mathcal{T}$ contradictoire. Soit alors $\sigma_1 \dots \sigma_n$ tq

$$\dfrac{\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \vdash A \wedge \neg A}{\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \vdash \bot} \text{cut} \quad \text{or} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash \neg\neg A} \neg\neg\text{ intro}}{A \vdash \neg\neg A \vee \bot}}{A \wedge \neg A \vdash \bot} \neg \text{ elim}$$

On écrit $\mathcal{T} \vdash \varphi$ pour indiquer φ thm de $\mathcal{T}$.

Thm de compacité :

Soit $\mathcal{T}$ une thr de lgg $\mathcal{L}$.
$\mathcal{T}$ est cohérente ssi tte ss-thr $\mathcal{T}_0$ realisant des axiomes de $\mathcal{T}$ l'est.

Formalisat° du meta thm : $\mathcal{T}_{modele} \vdash (\mathrm{Coh}(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall \mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \ |\mathcal{T}'| \in \mathbb{N} \ \mathrm{coh}(\mathcal{T}'))$

Demo : Supposons $\mathcal{T}$ cohérente.

S'il existait $\mathcal{T}_0$ finie ssthr de $\mathcal{T}$ incohérente, on aurait :
pour $\sigma_1 \dots \sigma_n$ axiomes de $\mathcal{T}_0$, $\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \vdash \bot$
Mais $\sigma_1 \dots \sigma_n$ sont des axiomes de $\mathcal{T}$ qui contient $\mathcal{T}_0$
Par def des thm d'une thr, $\mathcal{T} \vdash \bot$
↳ c'est une meta contradiction
Donc toute $\mathcal{T}_0$ finie ss thr de $\mathcal{T}$ est cohérente.

Supposons $\mathcal{T}$ incohérente. Par def $\mathcal{T} \vdash \bot$ de $\exists$ $\sigma_1 \dots \sigma_n$ axiomes de $\mathcal{T}$ tq $\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \vdash \bot$. Posons alors $\mathcal{T}_0$ d'axiomes $\sigma_1 \dots \sigma_n$
$\mathcal{T}_0$ est finie, $\mathcal{T}_0$ est une ss thr de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_0$ incohérente.

Une thr $\mathcal{T}$ est dite **complète** lorsque :
- $\mathcal{T}$ non contradictoire
- $\forall$ formule close σ de $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ $\mathcal{T} \vdash \sigma$ ou $\mathcal{T} \vdash \neg\sigma$ (x)

⚠ Toute theorie vérifie $\mathcal{T} \vdash \sigma$ ou $\mathcal{T} \vdash \neg\sigma$
mais tte théorie n'est pas complète !

"ou"	"et"
$\left.\begin{array}{c}\mathcal{T} \vdash A \\ \text{ou} \\ \mathcal{T} \vdash B\end{array}\right\} \mathcal{T} \vdash A \vee B$	$\begin{array}{c}\mathcal{T} \vdash A \\ \text{et} \\ \mathcal{T} \vdash B\end{array}$ équiv. $\mathcal{T} \vdash A \wedge B$

ex :

Theorie des groupes

$\mathcal{T}_G$ de lgg $\mathcal{L}_G = \{\underset{c^{te}}{e}, \underset{fct2}{*}, \underset{rel2}{\equiv}\}$ égalitaire (dc contient axiome égalité)

On rajoute les axiomes :
- A_{neutre} $\forall x \quad x * e \equiv x \;\wedge\; e * x \equiv x$
- A_{assoc} $\forall x \forall y \forall z \quad (x * y) * z \equiv x * (y * z)$
- A_{inv} $\forall x \exists y \quad x * y \equiv e \;\wedge\; y * x \equiv e.$

→ Nous montrerons que $\mathcal{T}_G$ est cohérente.

→ $\mathcal{T}_G$ n'est pas complète : l'axiome de commutativité A_{com} $\forall x \forall y \; x * y = y * x$ permet de l'attester ($(\mathbb{R}; +)$ est un grp commutatif et $(GL_n(\mathbb{R}); \times)$ est un grp non commutatif)

Nous établirons la validité de cette méthode.

ex :

Arithmétique de Peano

$\mathcal{L}_P = \{\underset{c^{te}}{0}, \underset{fct2}{+}, \underset{fct2}{\times}, \underset{rel2}{\equiv}, \underset{fct1}{\nearrow}\}$

$\mathcal{T}_P$ égalitaire et d'axiomes :
- $\forall x \quad x + 0 \equiv x \;\wedge\; 0 + x \equiv x \;\wedge\; 0 \times x \equiv 0 \;\wedge\; x \times 0 \equiv 0$
- $\forall x \quad \neg \nearrow x \equiv 0$
- $\forall x \;\; \forall y \quad x + \nearrow y \equiv \nearrow(x + y)$
- $\forall x \;\; \forall y \quad x \times (\nearrow y) \equiv x \times y + x$
- $\forall x \;\; \forall y \quad \nearrow x \equiv \nearrow y \Rightarrow x \equiv y$ (injectivité de $\nearrow$)
- $\forall x \quad \neg x \equiv 0 \Rightarrow \exists y \;\; \nearrow y \equiv x$ (surjectivité de $\nearrow$)

} bijectivité de $\nearrow$

Schéma d'axiome de réccurence pour toute φ à une variable libre x

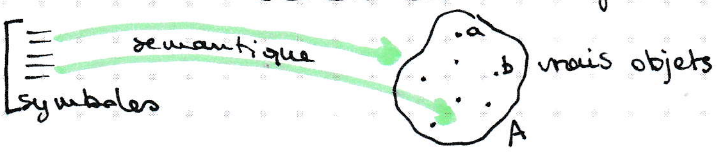
$$[\varphi[0/x] \wedge \forall n \;\; \varphi[n/x] \Rightarrow \varphi[\nearrow n/x]] \Rightarrow \forall x \; \varphi(x)$$

Sémantique : on procède par induct° à partir des atomes.

Symboles
concat ↳ termes
↳ formules
↳ Demo
↳ theorie
↳ Lgg

[Symboles] On se donne A une collect° d'individu (classe objet)

On écrit $a : A$ pour dire que a est un obj de la classe A ($a \in A$ est un reflexe de logicien)



Une interprétat° de $\mathcal{L}$ dans A est la donnée d'un objet $a : A$ pour chaque symbole C de constante de $\mathcal{L}$.
Notation : $\overline{C}^A = a : A$ choisi.

Pour f symbole de fct à k arg., on choisit une "vraie" fonct° à k arg. de la classe A à valeur dans A.
$\overline{f}^A = f : A^k \to A \qquad f \in A^{A^k}$

Pour R symbole de relat° d'arité n $\quad \overline{R}^A = R : A^n \to B$

$\overline{\equiv}^A = \mathbb{1}_{\Delta A}$ où $\Delta A = \{(a;a), a \in A\}$

Def : On appelle $\mathcal{L}$-réalisat° ou $\mathcal{L}$-interprétat° la donnée de $\mathcal{A} =$
$\mathcal{A} = \langle A ; \langle \overline{C}^A \rangle_{C:\text{const}} ; \langle \overline{f}^A \rangle_{f:\text{fct}} ; \langle \overline{R}^A \rangle_{R:\text{rel}} \rangle$

voc : A est appelé domaine de $\mathcal{A}$. On pourra écrire $\overline{\Delta}^{\mathcal{A}}$ pour Δ symbole désignant son interprétat°

ex : $\mathcal{T}_G$ de lgg $\mathcal{L}_G = \{e ; * ; \equiv\}$
$\mathcal{R} = \langle \mathbb{R} ; \langle 0_{\mathbb{R}} \rangle ; \langle +_{\mathbb{R}} \rangle ; \langle =_{\mathbb{R}} \rangle \rangle$
$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N} ; \langle 0_{\mathbb{N}} \rangle ; \langle +_{\mathbb{N}} \rangle ; \langle =_{\mathbb{N}} \rangle \rangle$
$\Big\}$ $\mathcal{L}_G$ realisat°. On pourra demander si ce sont des grp

$\mathcal{P} = \langle \mathbb{C} ; \langle i \rangle ; \langle (z ; w) \mapsto |z| w \rangle ; \langle ?\, |z| \leq |w| \rangle \rangle$
interprétat° d'un grpe ?
$\mathbb{C}$ ok
$i : \mathbb{C}$ ok
$(z;w) \mapsto |z| \times w : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ ok
$?|z| \leq |w| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{B}$ ok
$\Big\}$ oui

En revanche n'en sont pas les choses suivantes :
$\langle \mathbb{R}, \langle i \rangle, \dots \rangle \qquad i : \mathbb{R}$? NON
$\langle \mathbb{R}, \langle 1_{\mathbb{R}} \rangle ; \langle (x;y) \mapsto x/y \rangle \dots \rangle \qquad x/0 = \text{NaN} \notin \mathbb{R}$ NON
$Z = \langle \mathbb{Z} ; \langle (x;y) \mapsto x \times y \rangle ; \langle =_{\mathbb{Z}} \rangle \rangle$ où est $\overline{e}^{\mathbb{Z}}$? NON.

[termes] Pour $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-réalisat° on définit $v : \mathcal{V} \to A$ valuat° ds A comme la donnée d'un individu $a : A$ pour chaque symbole $\underline{x} : \mathcal{V}$

$\boxed{\mathcal{J}_v^A : \text{interp des termes de A}}$

Atomique : • si $\Delta : \mathcal{V}$ alors $\mathcal{J}_v^A(\Delta) = v(\Delta)$
• si Δ : symb c^{te} alors $\mathcal{J}_v^A(\Delta) = \overline{\Delta}^A$
Constructeur : si f symb de fct à k var et si $\Gamma_1 \dots \Gamma_k$ sont le termes de $\mathcal{L}$
alors $\mathcal{J}_v^A(f\,\Gamma_1 \dots \Gamma_k) = \overline{f}^{\mathcal{A}}(\mathcal{J}_v^A(\Gamma_1) ; \dots ; \mathcal{J}_v^A(\Gamma_k))$

ex : $\mathcal{R} : \mathcal{J}_v^{\mathcal{R}}(x * (e * y) * z)$
$= 1_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}} + 36_{\mathbb{R}} + \sqrt{2}_{\mathbb{R}} = (37 + \sqrt{2})_{\mathbb{R}}$

• v : $x \mapsto 1$, $y \mapsto 36$, $z \mapsto \sqrt{2}$
• $\mathcal{J}_v^{\mathcal{R}}(e) = 0_{\mathbb{R}}$
• $\mathcal{J}_v^{\mathcal{R}}(x) = 1_{\mathbb{R}}$
• $v : \mathcal{V} \to A$

$\mathcal{J}_v^{\mathcal{C}}(x * ((e * y) * z))$
$= |v(x)| \times_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_v^{\mathcal{C}}(\text{—})$
$= |\mathcal{J}_v^{\mathcal{C}}(e * y)|\sqrt{2}$
$= ||i| \times 36| \sqrt{2} = (36\sqrt{2})_{\mathbb{R}}$

[formules] On se donne une $\mathcal{L}$-interprétation $\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}$ valuat° ds A.

Atomes : φ atomique est soit $\top$ soit $\perp$ soit $R\,\Gamma_1 \dots \Gamma_n$
avec Γ_k : termes et R : symbole rel d'arité n

$$\|\top\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{A}}} = \text{Vrai} \quad ; \quad \|\perp\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{A}} = \text{Faux}$$

et

$$\|R\,\Gamma_1 \dots \Gamma_n\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{A}}} = \text{vrai ssi } \overline{R}^{\mathcal{A}}(\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{A}(\Gamma_1 ; \dots ; \Gamma_n)) = \text{Vrai}$$

(ens : $(\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{A}(\Gamma_1); \dots ; \mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{A}(\Gamma_n)) \in \overline{R}^{A}$)

Constructeur :
- $\|\varphi \,\&\, \psi\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{A}} = \text{Vrai}$ ssi $\|\varphi\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{A}} = \text{vrai}$ brocoli $\|\psi\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{A}} = \text{vrai}$.
- $\|\neg\varphi\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{A}} = \text{Vrai}$ ssi $\|\varphi\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{A}} = \text{Faux}$
- en notant $\mathcal{V}_a^x$: $\begin{cases} \mathcal{V} \mid_{\mathcal{V} \setminus \{x\}} = \mathcal{V} \\ x \longmapsto a \end{cases}$

on aura $\|\forall x\, \varphi(x)\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^{A}} = \text{vrai}$ ssi $\min\limits_{a:A} \|\varphi\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}_a^x}^{A}} = \text{Vrai}$

$\exists$ est traité similairem^t avec $\max\limits_{a:A}$