Condensé SG3

Martin

July 2020

1 Rappel ING1

Variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une application mesurable le $(\Omega, \varphi, \rho) \rightarrow (R, B)$ où B est la tribu Borélien c'est-à-dire la tribu engendré par les intervalles de R.

Espérance

On appelle espérance de X (var.aléatoire discrète) $E(X) = \sum_i x_i P[X = x_i]$

Variance de X

On appelle variance de X : $V(X) = E((X - E(X))^2)$
$\sigma(x) = \sqrt{V(X)}$ écart-type

Formule de König-Hughens

$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Loi uniforme discrète

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme discrère lorsqu'elle prend ses valeurs dans (1,...,n) avec des probabilités élémentaires identiques. Puisque la somme de ces dernières doit valoir 1, on en déduit qu'elles doivent toutes être égales à 1/n :

$P[X = k] = 1/n$ avec $\forall k = 1, 2, ..., n$ valeurs de $X = 1, 2, ..., n$

$E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Loi de Bernouilli

Cette loi est celle de toute varianle aléatoire X modéliasant une expérience dont l'issue ne possède que deux alternatives de type "succès ou échec", "vrai ou faux"... Un succèes est représenté par l'évenement (X=1) tandis que (X=0) correspond à un échec, $X(\Omega) = 0, 1$. Puisque l'on a $P[X = 0] = 1 - P[X = 1]$, la loi de X ne dépend que d'un paramètre, on parle alors de la loi de Bernouilli de paramètre p :

$$P[X = 1] = P$$
$$P[X = 0] = 1 - P$$

$E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

Loi binomiale

On répète n fois l'expérience de Bernouilli de manière indépendante et dans des conditions identiques. Soit X la v.a. : nb de réalisation de l'event A.

$$X = \sum_{i=1}^{n} Xi$$

où $X_i\ suit\ \forall i\ B(p)$

$E(X) = np$ et $V(X) = npq$

$P(X = k) = (^k_n p^k (1 - p)^{n-k}$ avec $\forall k = 0, 1, 2..., n$
$(^k_n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Loi de Poisson

Cette loi peut modéliser les évenements rares. Par exemple, elle peut modéliser le nombre d'appels réçus par un standard téléphonique, le nombre de voyageur se présentant à un guichet dans la journée, etc... Elle s'exprime avec la fonction exp et dépend de $\lambda > 0$, qui correspond au nombre moyen d'occurence du phénomène observé pendant la durée donnée.

$$P[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

avec $\forall k \in N$ $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

Lois conditionnelles

Soit $B \in \rho/P(B) \neq 0$
$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
A et B sont indépendants
$P(A/B) = P_B(A)$

Formule de Bayes

$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$
$P(B_i/A) = \frac{(P(A/B_i)P(B_i)}{\sum P(A/B_k)P(Bk)}$

2 ANDO

Loi conjointe

On appelle loi conjointe du couple (X,Y) l'ensemble des couples (x$_i, y_j, P_{ij})où\ x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)$
$P_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Loi marginale

Les variables X et Y sont appelés variables marginales.
$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P_{ij} = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_i))$
$P_{\forall j}(X = x_i) = \sum_{j \in J} P_{ij} = Pi\bullet$
$P_{\forall i}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P_{ij} = P \bullet j$

Indépendance

X et Y sont indépendants ssi :

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$\iff P_{ij} = P_{i\bullet} * P_{\bullet j}(\forall (i, j) \in IxJ)$$

$$\iff P(X = x/Y = y) = P(X = x)$$

Espérance Z

$Z = g(X, Y)$

$$E(Z) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j)P_{ij}$$

Si X et Y sont indépendants alors : $E(X, Y) = E(X)E(Y)$

Covariance d'un couple (X

On appelle covariance du couple (X,Y) :

$$COV(X, Y) = E(X, Y) - E(X)E(Y)$$

et le coef. de corrélation : $P(X, Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$
$(\sigma_x = \sqrt{V(X)}, \sigma_y = \sqrt{V(Y)})$

Matrice de VAR-COV

$$V =^t YDY$$

Inertie

On appelle inertie totale du nuage de points la moyenne pondérée des carrés des distances des points au centre de gravité :

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} P_i^t (e_i - g) M (e_i - g) = \sum_{i=1}^{n} P_i ||e_i - g||^2$$

On peut montrer que l'inertie du nuage est égale à la trace de la matrice MV :

$$I_g = Trace(MV) = Trace(VM)$$

3 TEC1

Convergence en loi

La suite X_n converge en loi vers la variable X de répartition F(x) si en tout point de continuité de F, la suite (F_n) des fonctions de répartition de X_n converge vers F :

$$lim_{x \to +\infty} F_n(x) = F(x)$$

$\forall x$ un point de continuité de F.

Théorème

X_n converge en loi vers X ssi $lim_{x \to +\infty} \Phi_{X_n}(t) = \Phi_x(t)$
Où $\Phi_{X_n}(t)$ est la fonction caractéristique de X_n et $\Phi X(t)$ est la fonction caractéristique de X.

Convergence en probabilité

X_n étant une suite de variables aléatoires réelles. On dit que X_n converge en probabilité vers une v.a. X lorsque pour $\forall \epsilon > 0$

$$lim_{x \to +\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

Inégalité de Tchebyschev

$$\forall \epsilon > 0,\ P(|X_n - E(X_n)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\epsilon^2}$$

Convergence en moyenne d'ordre p

X_n converge en moyenne d'ordre p ssi

$$E((X_n - X)^p)$$

si $p = 2E((X_n - X)^2)$

Loi Laplace-Gauss (Loi normale)

X suit la loi normale $N(m, \sigma)$ de paramètres m et σ. Si sa densité est $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})), \forall x \in R, m = E(X), \sigma = \sqrt{V(X)}$

Loi normale centrée et réduite

Soit $X\ Suit\ N(m, \sigma)$
On pose $U = \frac{X-m}{\sigma}$ variable normale centrée et réduite. Sa densité est : $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$
$E(U) = \frac{E(X)-m}{\sigma} = 0$
U est centrée $V(u) = 1$

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une v.a. X est la transformée de Fourirer de sa loi de probabilité :

$$\Phi_x(t) = E(exp(itx))$$

— Si X est continue :

$$T_x(t) = \int_R e^{itx} f(x) dx$$

(f(x) est la densité)

— Si X est discrète :

$$T_x(t) = \sum_k e^{itk} P(X = k)$$

Formule de Mac-Laurrin

$$T_x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} i^k E(X^k)$$