1 Orthogonalité de deux vecteurs et orthogonal d'une partie

1.1 Orthogonalité de deux vecteurs

Définition 1

Soit $(E, <,>)$ préhilbertien réel.

On dit que 2 vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si $< x, y >= 0$.

Théorème 1 (Pythagore)

Soient $(E, <,>)$ préhilbertien réel, x et y deux vecteurs orthogonaux de E. Alors

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

1.2 Orthogonal d'une partie d'un espace préhilbertien réel

Définition 2

Soient $(E, <,>)$ préhilbertien réel et $A \subset E$.

On appelle *orthogonal* de A l'ensemble noté $A^\perp$ défini par

$$A^\perp = \left\{x \in E,\ \forall y \in A\ \ < x, y >= 0\right\}$$

Proposition 1

Soient $(E, <,>)$ préhilbertien réel et $A \subset E$. Alors $A^\perp$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Proposition 2

Soient A et B deux parties d'un espace préhilbertien $(E, <,>)$. Alors

1. $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$
2. $A^\perp = \left(\text{Vect}(A)\right)^\perp$
3. $A \subset A^{\perp\perp}$
4. $A \cap A^\perp \subset \{0\}$ et, si A est un sev de E, $A \cap A^\perp = \{0\}$.