Mathematique du signal

Signal = observation / mesure d'un phenomène physique ou chimique variant dans l'espace et / ou le temps et qui transporte de l'information.

Ex : - son
- electricité (intensité)
- radio

Traitement du signal

Traitement du signal = ensemble des techniques / operations / algo permettant de créer / transformer / analyser les signaux en vue de leur exploitation.

Fonction du signal :

$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$t \longrightarrow x(t)$

1) $|x(t)| < +\infty \quad \forall t \in I$

2) continu / possède un nb fini / une infinité denombrable de discontinuité de hauteur finies

* stable par addition

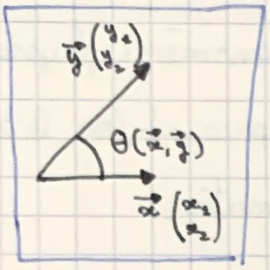
$\left.\begin{array}{l} x_1 \text{ signal} \\ x_2 \text{ signal} \end{array}\right\} x_1 + x_2$ signal

* stable par multiplication

$\left.\begin{array}{l} x_1 \text{ signal} \\ \lambda \text{ constante} \end{array}\right\} \lambda x_1$ signal

Produit scalaire :

dim 2



$$\boxed{\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \|x\| \, \|y\| \cos(\theta(\vec{x},\vec{y})) \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{aligned}}$$

dim n

$$\vec{x}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y}$$

Si complexes = $\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}}$ (produit Hermitien)

$$\langle , \rangle \quad E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

1) Symetrie : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ ‖ Si E est $\mathbb{C}$ $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}$

2) Bilinearité : $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle \lambda x_2, y \rangle$$

3) Positivité : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geqslant 0$

4) Défini : $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$

⚠ Semi linéaire : $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle$$

Norme :

$$\| \| \quad E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

1) Separation : $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

2) Homogenicité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} / \mathbb{C}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

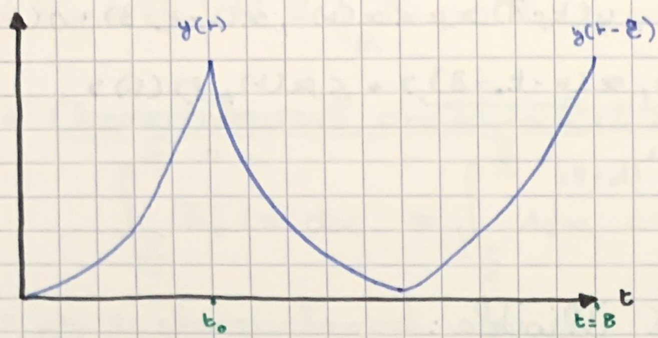
3) Inegalité : $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

distance : $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Le Retard : Autocorrelation

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t-\tau)}\,dt$$



$$y_{t_0} = y_0$$
$$y(t-\tau) = y_0 \iff t-\tau = t_0$$
$$y(t) = y_0 \iff t = t_0 + \tau$$

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x(t-\tau)}\,dt$$

x réel : $= \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,x(t-\tau)\,dt$

* $\Gamma_{xx}(0)$ maximal

$$\forall \tau \in \mathbb{R},\ \boxed{|\Gamma_{xx}(\tau)| \leqslant \Gamma_{xx}(0)}$$

* $\Gamma_{xx}(0) = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2\,dt = E_x$

* Γ_{xx} est à symétrie hermicienne

$$\Gamma_{xx}(-\tau) = \overline{\Gamma_{xx}(\tau)}$$

Intercorrelation

$y(t) = x(t-t_0) + \eta(t)$ → bruit indépendant

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle = \langle x(t), x(t-t_0-\tau) + \eta(t)\rangle$$

$$= \underbrace{\langle x(t), x(t-t_0-\tau)\rangle}_{\Gamma_{xx}(t_0+\tau)} + \underbrace{\langle x(t), \eta(t)\rangle}_{=0}$$

Signals brouillé illisible :

- seuil → pas ouf (33% d'erreur)
- filtre + seuil → mieux (3% d'erreur)

Convolution entre deux signaux

$\boxed{\text{→ Calcul de l'air de l'intersection des deux courbes.}}$

$$(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(t-x)\, dx$$

* existe : $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ $(f*g) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

* commutatif : $(f*g) = (g*f)$

* associatif : $(f*g)*h = f*(g*h)$

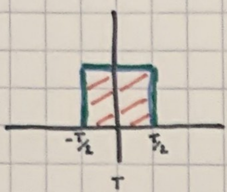
* élément neutre : $f* \quad = \delta * f = f$

* symétrie : $f*g$: pair si f et g de même parité
  impair si f et g de parité contraire

* dérivation : $(f*g)'(t) = (f'*g)(t) = (f*g')(t)$

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 \ \forall t \in \left[\frac{-T}{2} ; \frac{T}{2}\right] \\ 0 \ \text{sinon} \end{cases}$$

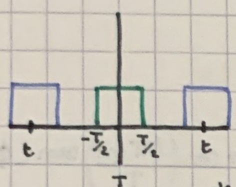
$$(\Pi_T * \Pi_T)(t) \triangleq \int_{\mathbb{R}} \Pi_T(x)\,\Pi_T(t-x)\,dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Pi_T(t-x)\,dx$$



* Chevauchement maximal $t=0$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Pi_T(x)\,dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\,dx = T$$

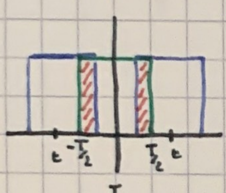
* pas de chevauchement :



$t<0$: pas de chevauchement tq $\boxed{t < -T}$

$t>0$: " " " tq $\boxed{t > T}$

* chevauchement partiel :



$$(\Pi_T * \Pi_T)(t) = \int_{-T/2}^{t+T/2} 1\,dx = t+T \quad (t<0)$$
$$= T-t \quad (t>0)$$

Lien entre convolution et intercorelation :

$x, y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{intercorelation : } \Gamma_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,\overline{y(t-\tau)}\,dt \\ \text{convolution : } (x*y)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,y(\tau-t)\,dt \end{array}}$$

$y^-(t) = y(-t)$

* $(x * y^-)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,y^-(\tau-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,y(t-\tau)\,dt = \Gamma_{xy}(\tau)$

(cas réel)

* $(x * \overline{y^-})(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,\overline{y^-(\tau-t)}\,dt = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,\overline{y(t-\tau)}\,dt = \Gamma_{xy}(\tau)$

(cas complexe)

Fourier & co

$\boxed{T}$: période

$\boxed{\frac{1}{T}}$: fréquence

$\boxed{\omega} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$: pulsation

$\boxed{\frac{m}{T}} = mf$ = harmonique de rang m

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{aligned}}$$

$$x(t) \simeq \sum_{m=1}^{N} A_m \sin\left(\frac{2\pi m t}{T} + \phi_m\right) = \sum_{m=1}^{N} A_m \left(\sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\cos(\phi_m) + \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\sin(\phi_m)\right)$$

$$x(t) = \left(\sum_{m=1}^{N} a_m \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\right) + a_0$$

moyenne du signal

$$\boxed{\begin{aligned} \text{où} \quad a_m &= A_m \sin(\phi_m) \\ b_m &= A_m \cos(\phi_m) \end{aligned}}$$

Signal discontinue ⇒ gros pics d'erreurs.

$\boxed{*}$ Lemme 1 = x T-périodique :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} x(t)\,dt = \int_0^T x(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

$\boxed{*}$ Lemme 2 :

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq k \\ \frac{T}{2} \text{ si } m = k \end{cases}$$

$\boxed{*}$ Lemme 3 : Tout pareil que (2) avec sin

$\boxed{*}$ Lemme 4 :

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt = 0$$

* Calcul de a_0 :

$$\int_0^T x(t)\,dt = \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi t n}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\right)\right] dt$$

$$= \int_0^T a_0\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt + b_n \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

(les deux dernières intégrales $= 0$)

$$= a_0 T \implies \boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt}$$

* Calcul de a_n (pareil pour b_n) :

$$x(t)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) = a_0 \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\right)$$

$$\int_0^T x(t)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt = a_0 \int \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt$$

$= 0$; $\begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ \frac{T}{2} \text{ si } n = k \end{cases}$ (lemme 2) ; $= 0$ (lemme 4)

$$= a_k \frac{T}{2} = a_n \frac{T}{2}$$

$$\implies \boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt}$$

Un signal est continu par morceaux | dérivable | si il est continu | dérivable | sur $[a, b]$ sauf éventuellement en un certain nb de points par lesquels il admet une limite à droite ou à gauche.

Théorème de Dirichlet :

Soit x un signal T-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceau sur $[0, T]$.

Alors, $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\right)$

Discontinuité $= \frac{1}{2}\left(x(t_0^-) + x(t_0^+)\right)$

$$x : t \longmapsto x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \frac{T}{2}[\\ 0 & t \in [\frac{T}{2}, T[\end{cases}$$

$$* \ a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \int_0^{\frac{T}{2}} 1\,dt = \frac{1}{T} \times \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

$$* \ a_m = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{T}{2\pi m}\sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\right]_0^{T/2} = \underset{m \geq 1}{\frac{1}{\pi m}\left(\sin(m\pi) - \sin(0)\right)}$$

$$= 0$$

$$* \ b_m = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\left[\frac{-T}{2\pi m}\cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{-1}{m\pi}\left(\cos(m\pi) - \cos(0)\right) = \frac{1-(-1)^m}{m\pi}$$

$$= \begin{cases} 0 & m \text{ pair} \\ \frac{2}{\pi m} & m \text{ impair} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{m = 2k+1 \\ k \in \mathbb{N}}}^{+\infty} b_m \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin\left(\frac{2\pi(2k+1)t}{T}\right) \quad \text{en tout point de } x$$

$$x(t_0) = \frac{1}{2}\left(x(t_0^-) + x(t_0^+)\right) \rightarrow x\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$

$$\Delta_x(t_0) = |x(t_0^-) - x(t_0^+)|$$

L'amplitude du ressaut converge vers $0{,}09\,\Delta x(t_0)$

* Propriété de symétrie :

si x pair alors $b_m = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}^*$

impair " $a_m = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}^*$

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(a_m \cos(2\pi m t f) + b_m \sin(2\pi m t f)\right)$$

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{+i2m\pi t f} \qquad \text{avec } \forall m \in \mathbb{Z},\ C_m = f\int_0^T x(t)\, e^{-i2\pi m t f}\, dt$$

Def $|C_m|, m \in \mathbb{Z} \equiv$ spectre du signal

* si x est à valeur réelles, $\forall m \geq 1$, $C_m = \overline{C_m}$

$$|C_{-m}| = |\overline{C_m}| = |C_m|$$

* $\forall m \in \mathbb{N}^* \begin{cases} a_m = C_m + C_{-m} \\ b_m = i(C_m - C_{-m}) \end{cases} \iff \begin{cases} C_m = \frac{1}{2}(a_m - ib_m) \\ C_{-m} = \frac{1}{2}(a_m + ib_m) \end{cases}$

Le spectre est symétrique => on considère uniquement $m \geq 0$

$$\langle x, U_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\langle x, U_1 \rangle = x_1 \iff x = \langle x, U_1 \rangle x_1 + \langle x, U_1 \rangle x_2$$

Une base $(U_1, U_2, \dots, U_m)$ d'un espace vectoriel de dimension m est orthogonale ssi :

$$\langle U_i, U_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\| U_i \| = 1$$

On travaille avec des signaux T-periodique

On se place dans $\mathcal{L}^2([0,T])$ de dim infinie

On definit le produit scalaire dans $\mathcal{L}^2([0,T])$

$$x, y \in \mathcal{L}^2([0,T]) \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

$$\left\{ U_m(t) = e^{i2\pi m t f} \ ; \ m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\langle u_n, u_m \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u_n(t)\,\overline{u_m(t)}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i2\pi n t f}\, e^{-i2\pi m t f}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i2\pi(n-m)f}\,dt$$

$*$ $n = m$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{i2\pi(n-m)f}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T 1\,dt = 1$$

$*$ $n \neq m$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{i2\pi(n-m)f}\,dt = \frac{1}{\cancel{T}}\left[\frac{\cancel{T}}{2\pi(n-m)}\, e^{i2\pi(n-m)f}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2\pi(n-m)}\Big(\underbrace{e^{\frac{i2\pi(n-m)T}{T}} - e^{i0}}_{=0}\Big)$$

$$= 0$$

$\forall x \in \mathcal{L}^2([0,T])$, on peut écrire $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle x(t), u_n(t)\rangle\, u_n(t)$

$\rightarrow x(t) = \sum C_n e^{i2\pi n t f}$

projection de x sur l'axe

engendré par $e^{i2\pi n t f}$

$\equiv$ coordon

$x \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $\quad E_x = \langle x, x\rangle$

$$= \|x\|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2\,dt$$

$x \in \mathcal{L}^2([0,T])$, $\quad = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt$ $\equiv$ energie de x dans le domaine temporel

Energie de l'harmonique de rang n du signal : $|C_n|^2$

L'energie totale du spectre est $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$