P

La pensée $\underline{\underline{\text{est}}}$ $\boxed{\text{verte}}$

$$P : \boxed{V(P)}$$

Sens qu'on donne dépend d'une ~~norme~~ sementif

Contexte

- Interprétat° du 1er ordre
  - Comment construit-on un langage 1er ordre
  - Symbôle : V : symbôle de var
    $\mathcal{L}$: $C_1 \dots C_n$ constantes
    Partie spécifiq : $f_1 \dots f_k$: fonct° $(a_1 \dots a_k)$ arité
    $R_1 \dots R_p$ relat° $(a_1 \dots a_k)$
    + connecteur logiq & quantificateur de Lx
  - Termes : "mot qui ont vocat° à avoir du sens"

A : Symboles de C^{te} et var

Θ : f

$\mathcal{E}$: ω :

Syntaxe : $A : \bot ; T ; R_n \, t_1 \dots t_n$

↳ terme correct^t construit

$\mathcal{O}$: Connections et quantificat$^{\circ}$ Lx de formules

$\mathcal{E}$: ω nb fini d'utilisat$^{\circ}$ des règles.

exemples : $\mathcal{L}_A = ((0 ; 1) ; (\nearrow ; + ; \times) ; (\equiv))$

↳ langage de l'arithmétiq

Termes : $\nearrow\nearrow 0 + \nearrow 1 \times \nearrow 1$

$\nearrow (\equiv 1) \to \not$ terme mais une phrase

$(\nearrow 1 + \nearrow 0) \times \nearrow x \to$ terme

formules : $\nearrow 0 \equiv 1$ oui

$\forall x \; x + 0 \equiv x$ oui

$T \Rightarrow \bot$ oui (car formule en logiq propositionnel (logiq $\subset \mathcal{O}$))

• $\mathcal{L}_{\leq} = (\emptyset ; \emptyset ; (\leq ; \equiv))$

(langage des ordres)

termes : $x ; \alpha_{17} ; e_{42} \to$ seul terme, symbole atomiq car on a ni ~~variable~~ constante ni fonct$^{\circ}$

formules : $x \equiv y$; $x \leq x_{17}$; $\forall x \forall y \exists z \; x < y \Rightarrow (x \leq z \wedge z \leq y)$

$\forall x \forall y \exists z (\neg x = z \wedge \neg y = z) \Rightarrow [x \leq y \Rightarrow (x \leq y \wedge z \leq y)$

Rien $\neq$ des symbole $\quad \wedge \neg x = y$

- $\mathcal{L}_? = ((0, \square, \emptyset); (\mathbb{P}; \cap; \cup; +; \times); (\mathcal{S}; \subset; \leq; =))$
  (1) (2) (1) (2)

termes : $\mathbb{P}\emptyset$; $(x \cap y) \times \mathbb{P}(\square)$

formules : $\forall x \forall y (\neg \mathcal{S}x \wedge \mathcal{S}y) \Rightarrow \mathbb{P}_y \leq x$

- <u>Interprétations par induct°</u>

On se donne $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to A$ une valuat° de A

où A est une collect° d'individu

On appelle $\mathcal{L}$-interprétat° ou encore $\mathcal{L}$-réalisat° de domaine A

La donnée de : $\mathcal{A} = \langle A, \langle C_i \rangle ; \langle f_k \rangle ; \langle R_p \rangle \rangle$

$\mathcal{L} = \begin{cases} C \\ f \\ R \end{cases}$ où pr chq C_i de $\mathcal{L}$ on attribue $C_i^{\mathcal{A}} \in A$

f_k de $\mathcal{L} \to f_{k(a_k)} : A^{a_k} \to A$

R_p de $\mathcal{L} \to R_p \subset A^{r_p}$

notat° : si $\boxed{?}$ est un symbole de $\mathcal{L}$, on note $\boxed{?}^{A}$ son interprétat° du A

Termes : On écrit $\mathcal{I}_\nu^A(\tau)$, l'interprétation du terme τ dans A (selon ν)

Atomes : $\mathcal{I}_\nu^A(*) = \begin{cases} \bar{*}^A \text{ si symbole cste } (\bar{c}^A = c \in A) \\ \nu(*) \end{cases}$

cste

$\circledcirc$: $\mathcal{I}_\nu^A(\underset{(\text{arg } n)}{f}\overset{\text{symbole}}{\tau_1}, \dots, \tau_n) = f(\mathcal{I}_\nu^A(\tau_1); \dots; \mathcal{I}_\nu^A(\tau_n))$

où l'on a $f = \bar{f}^A$

morphisme

$(\mathcal{E} : \omega)$

- Semantiq des formules : $\varphi \in F(\mathcal{L})$

Atome : $\|R\tau_1 \dots \tau_n\|_{\mathcal{I}_\nu}^*$ vrai ssi $R \ni (\mathcal{I}_\nu(\tau_1), \dots, \mathcal{I}_\nu^A(\tau_n))$

(où l'on a $R = \bar{R}^A$)

Opérateur : si $*$ est un connecteur logiq (2) alors $\|\varphi * \psi\|_{\mathcal{I}_\nu}^*$ est donné par la table de vérité de $*$

Version $\bigoplus$: $\|\varphi \bigoplus \psi\|_{\mathcal{I}_\nu}^* =$ vrai

ssi $\|\varphi\|_{\mathcal{I}_\nu}^* =$ vrai braodi

$\mathcal{E} : \omega$ $\|\psi\|_{\mathcal{I}_\nu}^* =$ vrai

Quantif : (cas de la negat° triviale)

$$\|\forall x\, \varphi(x)\|_{\mathcal{J}^A_\nu} = \min_{a\in A} \|\varphi(x)\|_{\mathcal{J}^A_{\nu_x^a}}$$

on pose t arbitraire vrai ? faux

où $\nu_x^a : * \mapsto \begin{cases} \nu(*) & \text{si } x \neq * \\ a & \text{si } x = * \end{cases}$

$$\|\exists x\, \varphi(x)\|_{\mathcal{J}^A_\nu} = \max_{a\in A} \|\varphi(x)\|_{\mathcal{J}^A_{\nu_x^a}}$$

Ex : $\|\heartsuit x\|_{\mathcal{J}^1_{\nu_x}}$ = Vrai puisq $1 \in \mathbb{Z}^*$

avec $\heartsuit \to \mathbb{Z}^*$

$\clubsuit$ ea03

TP