[formules] On se donne une $\mathcal{L}$-interprétation $\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}$ valuat° de $\mathcal{A}$.

Atomes : φ atomique est soit $\top$ soit $\bot$ soit $R\,\Gamma_1 \dots \Gamma_n$
avec Γ_k : termes et R : symbole rel d'arité n

$$\|\top\|_{\mathcal{J}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{V}}} = \text{Vrai} \quad ; \quad \|\bot\|_{\mathcal{J}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{V}}} = \text{Faux}$$

et

$$\|R\,\Gamma_1 \dots \Gamma_n\|_{\mathcal{J}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{V}}} = \text{vrai ssi } \overline{R}^{\mathcal{A}}(\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}}(\Gamma_1;\dots;\Gamma_n)) = \text{Vrai}$$

(cas : $(\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}}(\Gamma_1);\dots;\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}}(\Gamma_n)) \in \overline{R}^{A}$)

Constructeur : • $\|\varphi \,\&\, \psi\|_{\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}}} = \text{Vrai}$ ssi $\|\varphi\|_{\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}}} = \text{Vrai}$ brocoli $\|\psi\|_{\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}}} = \text{vrai}$.

• $\|\neg\varphi\|_{\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}}} = \text{Vrai}$ ssi $\|\varphi\|_{\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}}} = \text{Faux}$

• en notant $\mathcal{V}^x_a$: $\begin{cases} \mathcal{V} \mid_{\mho \setminus \{x\}} = \mathcal{V} \\ x \longmapsto a \end{cases}$

on aura $\|\forall x\ \varphi(x)\|_{\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}}} = \text{vrai}$ ssi $\min\limits_{a:A} \|\varphi\|_{\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}^x_a}} = \text{Vrai}$
$\exists$ est traité similairem^t avec $\max\limits_{a:A}$

Notation : si $\mathcal{A}$ désigne une $\mathcal{L}$-interprétation on écrira $\mathcal{A} \models_{\mathcal{V}} \varphi$ pour $\|\varphi\|_{\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}}} = \text{Vrai}$

Proposit° : Si $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ est close alors $\|\varphi\|_{\mathcal{J}^{A}_{\mathcal{V}}}$ ne dépend pas de $\mathcal{V}$
Csqce : pour σ énoncé, on peut écrire :
$\mathcal{A} \models \sigma$ sans ambiguïté.

Propriété : Pour tout $\mathcal{L}$ lgg relation^l et tout $\mathcal{L}$-réalisat° $\mathcal{A}$ on a :
si σ formule close de $\mathcal{L}$ alors $\begin{cases} \mathcal{A} \models \sigma \\ \mathcal{A} \models \neg\sigma \end{cases}$ les 2 cas s'excluent mutuellem^t

Démo : on procède par induct° sur la construct° des formules.

$\Rightarrow$ toute formule close a une valeur de vérité.

Sémantique des théories
Soit $\mathcal{T}$ une théorie de lgg $\mathcal{L}$ et $(\sigma_n)_{n\in I}$ et $(Sch_n)_{n\in J}$ ses axiomes et schémas d'axiomes.
On dit que $\mathcal{A}$ est un modèle de $\mathcal{T}$ lorsque $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{L}$ réalisat° vérifiant :
• $\mathcal{A} \models \sigma_k \quad \forall k \in I$
• $\mathcal{A} \models \tau_k(\varphi)$ pour $\tau_k(\varphi)$ un des axiomes générés par Sch_k (pr le caractère φ)

Ex : $\langle \mathbb{R}\,;\langle 0_{\mathbb{R}}\rangle;\langle +_{\mathbb{R}}\rangle;\langle =_{\mathbb{R}}\rangle\rangle \models \mathcal{T}_G$ (théorie des groupes)
$\langle \mathbb{N}\,;\langle 1_{\mathbb{N}}\rangle;\langle +_{\mathbb{N}}\rangle;\langle =_{\mathbb{N}}\rangle\rangle \not\models \mathcal{T}_G$

Thm : Pour tout σ théorème de $\mathcal{T}$, on a $\mathcal{A} \models \sigma$ dès que $\mathcal{A}$ modèle de $\mathcal{T}$.

Démo : Par induct° sur la construct° des démonstrat°

Note : ceci démontre le bien fondé des modèles pour interpréter des théories.

Ex : $\mathcal{T}_G \vdash \underbrace{\forall x [\forall y\ (x * y \equiv y \wedge y * x \equiv y) \Rightarrow x \equiv e]}_{\text{unicité de l'elmt neutre}}$

or $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R} ; \langle 0_{\mathbb{R}} \rangle ; \langle +_{\mathbb{R}} \rangle ; \langle =_{\mathbb{R}} \rangle \rangle \models \mathcal{T}_G$ donc $\mathcal{R} \models$ unicité du neutre
d'où $0_{\mathbb{R}}$ est le seul elmt de $\mathbb{R}$ associé à $+_{\mathbb{R}}$ et $=_{\mathbb{R}}$ usuelles.

(via contraposée) $\Sigma = \langle \Lambda^* ; \langle \varepsilon \rangle ; \langle @ \rangle ; \langle =_{\Lambda^*} \rangle \rangle$ monoïde mots usuels avec card $\Lambda = 2$

On a $\Sigma \not\models \forall x \exists y\ (x * y \equiv e \wedge y * x \equiv e)$
donc $\Sigma \not\models \mathcal{T}_G$

Thm : le problème d'entrées $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ formules closes d'un lgg $\mathcal{L}$
et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$ réalisat° descriptible en $\Theta(n)$
et en sortie si $\mathcal{A} \models \mathcal{T}$ avec $\mathcal{T}$ d'axiomes $\sigma_1, \dots, \sigma_n$
est N.EXP complet.

Theorème : Complétude de Gödel (Demo en Poly)
Une theorie $\mathcal{T}$ de lgg $\mathcal{L}$ est cohérente
ssi elle admet un modèle (Une $\mathcal{L}$ interpretat° $\mathcal{M}$ tq $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$)

Applicat° à l'indécidabilité
Soit $\mathcal{T}$ une théorie cohérente de lgg $\mathcal{L}$
Supposons qu'il existe σ énoncé de $\mathcal{L}$ (close) telle que $\begin{cases} \mathcal{M} \models \mathcal{T} \\ \mathcal{M} \models \sigma \end{cases}$
pour un certain $\mathcal{M}$ et $\begin{cases} \mathcal{N} \models \mathcal{T} \\ \mathcal{N} \models \neg\sigma \end{cases}$ pour un certain $\mathcal{N}$
Alors $\mathcal{T}$ est incomplète.

Demo : $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$ donne la cohérence de $\mathcal{T}$ si non supposée.
Notons $\mathcal{T}_+$ la théorie formée des axiomes/schéma d'axiomes de $\mathcal{T}$ et de σ
$\mathcal{T}_-$ ——— de $\mathcal{T}$ et de $\neg\sigma$
On a clairement que $\mathcal{T}_+$ est cohérente par complétude ($\mathcal{M} \models \mathcal{T}_+$)
$\mathcal{T}_-$ ——— ($\mathcal{N} \models \mathcal{T}_-$)
Si $\mathcal{T} \vdash \sigma$ alors $\mathcal{T}_-$ est incohérente puisque $\mathcal{T}_- \vdash \sigma$ (cut)
Méta absurde $\mathcal{T}_- \vdash \neg\sigma$ (Ax)
Si $\mathcal{T} \vdash \neg\sigma$ alors par argument $\mathcal{T}_+$ incohérente.
Méta bottom
D'où $\mathcal{T}$ incomplète.

Ex : Prenons $\mathcal{T}_G$ considérons A_{com} $\forall x \forall y\ (x * y \equiv y * x)$
$\mathcal{R} \models A_{com}$ et $\mathcal{R} \models \mathcal{T}_G$
pour $\mathcal{G}_2 = \langle Gl_2(\mathbb{R}), \langle I_2 \rangle, \langle \times_{mat} \rangle, \langle =_{\Pi_2(\mathbb{R})} \rangle \rangle$
on a $\mathcal{G}_2 \models \mathcal{T}_G$ mais $\mathcal{G}_2 \models \neg A_{com}$
d'où $\mathcal{T}_G$ incomplète : A_{com} indécidable

voc	
{séquent	$\models$
	$\}$
$\mathcal{T} \vdash \dots$	$\mathcal{T} \vdash \dots$
syntax^q	sémant^q

Ex : Posons $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N} ; \langle 0_{\mathbb{N}} \rangle ; \langle n \mapsto n+1 ; +_{\mathbb{N}} ; \times_{\mathbb{N}} \rangle ; \langle =_{\mathbb{N}} \rangle \rangle$
on a $\mathcal{N} \models \mathcal{T}_{peano}$
Observons (thm incomplétude de Gödel)
il existe coh($\mathcal{T}_{peano}$) une formule de $\mathcal{L}_{peano}$
"qui dit Peano cohérente"

telle que si $\mathcal{T}_{peano}$ cohérente alors coh($\mathcal{T}_{peano}$) est indécidable ds $\mathcal{T}_{pe}$
En particulier, si $\mathcal{T}_{peano}$ cohérente, il n'existe pas de formule $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{L}_p)$ vérifiant φ décrit "$\mathcal{N} \models \mathcal{T}_{peano}$" et $\mathcal{T}_{peano} \vdash \varphi$
Retenir : $\mathcal{T}_{peano} \nvdash$ coh ($\mathcal{T}_{peano}$) si ZF cohérente.

ZF Zermelo Fraenkel ($\simeq$ 1905)

$\mathcal{L}_{ZF} = \{ \in ; \equiv \}$, théorie ZF égalitaire (voir Ax de l'égalité)
symb rel arité 2
et munie de $A_0 = \exists x \quad x \equiv x$

utilité ? $\longrightarrow$ coh (ZF) compl il y a un modèle $\mathcal{U}$ dom($\mathcal{U}$) $\neq \emptyset$
dc il y a qqn ici sans axiome
$\longrightarrow$ $\neg$ coh (ZF) pas de modèle $\rightarrow$ pas de domaine $\rightarrow$ pas d'individu
$\Rightarrow$ personne ~~n'a~~ si demandé.

Axiome d'extensionnalité : $\forall a \ \forall b \quad a \equiv b \Leftrightarrow [\forall x \ (x \in a \Leftrightarrow x \in b)]$

Sucre : $a \subset b$ désigne $\forall x \quad x \in a \Rightarrow x \in b$
on a $\forall a \ \forall b \quad a \equiv b \Leftrightarrow (a \subset b \wedge b \subset a)$ thm de ZF avec $\mathcal{L}$ enrichi.

Axiome de la paire $\forall a \ \forall b \ \exists p \ (\forall x \ (x \in p \Leftrightarrow (x \equiv a \vee x \equiv b)))$

Sucre : on écrira $\{a ; b\}$ l'objet p dont on prouve l'unicité par extensionnalité, on réécrit $\{a\} = \{a, a\}$

Axiomes des parties $\forall x \ \exists p \ \forall \alpha \ (\alpha \in p \Leftrightarrow \alpha \subset x)$

sucre : p sera noté $\mathcal{P}(x)$ dont on peut montrer qu'il est unique.

Couple sucré : $(a ; b) = \{a , \{a ; b\}\}$ 2 usages successifs de Ax Paire
NB : $(b ; a) = \{b ; \{b ; a\}\} = \{b ; \{a ; b\}\}$

Schéma d'axiome de compréhension :
Soit φ formule de $\mathcal{L}_{ZF}$ à une var libre
on construit C_φ : $\forall a \ \exists e \ \forall x \ (x \in e \Leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x)))$

Sucre : C_φ permet de construire $e = \{x \in a \mid \varphi(x) \text{ vérifié}\}$

Ex : Soit a fixé $\emptyset_a := \{x \in a \mid \neg x \equiv x\}$
$ZF \vdash \forall a \ \forall b \ \forall x \quad (x \in \emptyset_a \Leftrightarrow x \in \emptyset_b)$
d'où l'unicité du vide qui sera noté $\emptyset$

Paradoxe de l'univers :
A-t-on $\mathcal{U}$ tq $\forall x \quad x \in \mathcal{U}$ ds ZF ?

Cantor (avant ZF) $E \underset{\text{inj}}{\overset{\text{surj}}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(E)$ Mais

$\mathcal{U}$ $\qquad$ $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ $\qquad$ $\mathcal{U} \ni \mathcal{P}(\mathcal{U})$ par def
$\mathcal{U}$ vérifie $\forall x \quad x \in \mathcal{U}$

$\forall x \quad x \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \Rightarrow x \in \mathcal{U}$ inject° de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ dans $\mathcal{U}$ $\rightarrow$ ABSURDE

2 classes : • rachidiens $\quad x$ tq $\neg x \in x$ $\quad ZF \vdash R(x) \Leftrightarrow \neg x \in x$
• non rachidien $\quad x$ tq $x \in x$

Supposons $R :=$ ensemble des rachidien
$\cancel{\times}\ R \in R$? $\quad ZF \vdash R \in R \Leftrightarrow \neg R(R)$
$ZF \vdash R \in R \Leftrightarrow \neg R \in R$ par def
$\times\ R \notin R$? $\quad ZF \vdash \neg R \in R \Leftrightarrow \neg\neg R \in R \Leftrightarrow R \subset R$
Donc R n'est pas un objet des modèles de ZF

Rappel : si f désigne un symbole de fct on peut construire R_f vérifiant si f admet k arg R est d'arité $k+1$
on munit de l'axiome
$\forall x_1, \forall x_2 \ldots, \forall x_k\ \forall y\ f x_1 \ldots x_k \equiv y \Leftrightarrow R_f x_1 \ldots x_k\, y$
et R_f sera dit fonctionnel lorsque
$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k\ \forall y_1 \forall y_2\ R_f\, x_1 \ldots x_k\, y_1 \wedge R_f\, x_1 \ldots x_k\, y_2 \Rightarrow y_1 \equiv y_2$

Le schéma axiome de remplacement permet de construire $\{f(x) ; x \in A\}$ pour une formule φ vérifiant les axiomes des rel. fct^{NL}
$[\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k\ \forall y_1 \forall y_2\ \ \varphi(x_1 \ldots x_k\, y_1) \wedge \varphi(x_1 \ldots x_k\, y_2) \Rightarrow y_1 \equiv y_2]$

$\Rightarrow \forall A\ \exists B\ (\forall z\ \ z \in B \Leftrightarrow [\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k\ (x_1 \in A \wedge \ldots \wedge x_k \in A) \wedge \varphi(x_1, \ldots x_k z)])$

NB : Ce schéma d'axiome construit (sucre) $\{\varphi_*(x_1 \ldots x_k) ; x_1 \in A \ldots x_k \in A\}$
où φ_* désigne la "fct" associée à φ si fct^{NL}.

$\Rightarrow$ Axiome de la réunion : $\forall A\ \exists Z\ \ \forall x\ (x \in Z \Leftrightarrow \exists a\ (a \in A \wedge x \in a))$

sucre : $Z = \bigcup_{a \in A} a$ $\quad$ + Ax paire $A = \{a, b\} \rightarrow Z = \bigcup_{* \in A} * = a \cup b$

Corollaire : $a \cap b = \{x \in a \cup b \,/\, x \in a \wedge x \in b\}$

Problème de l'infini : Axiome de l'infini (ZF) $\quad$ NB : ZF^- c'est ZF sans cet axiome

Rappel : inject° : $\forall a\ \forall b\ f(a) \equiv f(b) \Rightarrow a \equiv b$

Idée n°1 : $\quad \exists \omega\ \exists p$ "p partie de ω" $\exists f$: fct $\cancel{\text{defini}}$ $f(p) = \omega$
$p \in \mathcal{P}(\omega)$ $\quad$ sch. axiome

Von Neuman. Idée 2 :
$$\left.\begin{array}{l} \emptyset : \text{ordinal} \\ \alpha \text{ ordinal} \Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \text{ ordinal} \\ \alpha \text{ ordinal} \Rightarrow \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta \text{ ordinal} \end{array}\right\} \text{Ord}$$

$\exists \omega\ \ \emptyset \in \omega \wedge \forall \alpha\ \ \alpha : \text{ord}\ \ \alpha \in \omega \Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \omega$

$\boxed{ZF \vdash coh(\text{Péano})}$ $\qquad$ Mais $coh(ZF)$?

THM : ZF est incomplète

et de plus : qq soient les axiomes / sch. d'axiomes donnés en nb fini $\sigma_1 \ldots \sigma_n$
ou • $ZF \cup \{\sigma_1 \ldots \sigma_n\}$ est incohérente
• $ZF \cup \{\sigma_1 \ldots \sigma_n\}$ est encore incomplète

Pb de comptage : Fini VS Infini

Axiomatisable : Soit Σ ensemble d'énoncé (conceptuel/non forcemt enum) on dit que Σ est axiomatisable s'il existe un lgg $\mathcal{L}$ et une theorie $\mathcal{T}$ de lgg $\mathcal{L}$ tq :
- si $\sigma : \Sigma$ alors $\mathcal{T} \vdash \sigma$
- sinon $\mathcal{T} \nvdash \sigma$

Def : [Méta opérateur]
pour $\mathcal{T}$ théorie on def $\overline{\mathcal{T}}$ la cloture déductive : ts les thm de $\mathcal{T}$
$Mod(\mathcal{T})$ la classe des $\mathcal{M}$ tq $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$

NB : complétude dit $coh(\mathcal{T}) \Leftrightarrow Mod(\mathcal{T}) \neq \emptyset$

Pour $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-realisat° on écrit $Th(\mathcal{A})$: ttes les theories $\mathcal{T}$ de lgg $\mathcal{L}$ tq $\mathcal{A} \models \mathcal{T}$

NB : $Th(\mathcal{A}) \supset \{\{\top\}\}$ donc non vide

- $\overline{(\,)}$ syntaxe $\to$ syntaxe
- Mod syntaxe $\to$ sémantique
- Th sémantique $\to$ syntaxe

Applicat° : axiomatisat° de fini / infini

- définissons $\varphi_k : \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \bigwedge_{i \neq j} \neg x_i \equiv x_j$ ($k^2 - k$ formules conjoint)
- On introduit φ_k ds un lgg égalitaire ac axiomes de l'égalité $\equiv$
- Posons $\psi_k : \exists x_1 \dots \exists x_k \bigwedge_{i \neq j} \neg x_i \equiv x_j$ (n'est pas $\neg \varphi_k$)

"il y a au moins k élémt distincts à dénombrer"
- Enfin $E_k : \exists x_1 \dots \exists x_k \forall y \bigwedge_{i \neq j} \neg x_i \equiv x_j \wedge (\bigvee_{i=1}^{k} y \equiv x_i)$

$\to$ On peut def ainsi $\underset{k=1}{\exists !} \dots \underset{(k \text{ fixé})}{\exists ! k}$

- Axiomatiser l'infini revient à écrire $\mathcal{T}$ tq $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$ ssi $|\mathcal{M}| = M$ est "infini" et $\mathcal{M}$ realisat° [$\mathcal{M}$ n'est pas un modèle si M fini]
- Fixons $\mathcal{T}_\infty$ d'axiomes ψ_k (tous)
- Montrons $\mathcal{T}_\infty$ cohérente par capacité : sélectionnons $\mathcal{T}_\omega$ fini, ss theorie qqconque de $\mathcal{T}_\infty$
- Soient alors $\psi_{k_1} \dots \psi_{k_p}$ ses axiomes. Notons $N = max(k_1, \dots k_p)$
- On a $\mathcal{M} \models \psi_N$ entraine $\mathcal{M} \models \psi_{k_j}$ pr $\forall$ $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-réalisat° et $\forall$ j de 1 à p
$\mathcal{M}$ sera dc un modèle de $\mathcal{T}_\omega$
- Posons Ord_N les N 1° ordinaux
avec $\mathcal{M} = \langle ord_N, \langle =_M \rangle \rangle$ on a le résultat
- Nous montrons ainsi l'existence d'un modèle infini.
$\Rightarrow$ L'infini est axiomatisé.

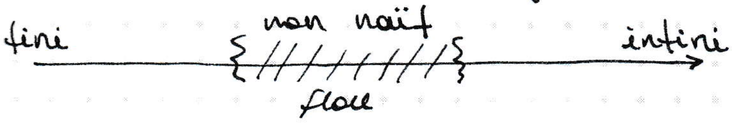
Axiomatisons, si possible, le fini

THM : Soit $\mathcal{T}$ une théorie admettant $(\mathcal{M}_n)$ modèles en cardinalités finies n bornée. Alors $\mathcal{T}$ admet un modèle infini.

Démo : Eliminons les modèles de ces cardinaux.
Rangeons les par ordre croissant. $\#M_1 < \#M_2 < \#M_3 < \dots \#M_n < \dots$
Notons μ_1 μ_2 μ_3 … μ_n ces cards
Considérons les axiomes φ_k pr ts les k possibles
Notons $\mathcal{T}_\Omega$ la théorie $\mathcal{T}$ adjointe de ces φ_k
Mq $\mathcal{T}_\Omega$ est cohérente par compacité.
Soit $\mathcal{T}_\omega$ ss théorie finie de $\mathcal{T}_\Omega$ et notons N l'indice max des φ_k
[si aucune n'apparait, $\mathcal{T}_\omega \subset \mathcal{T}$ est cohérente puisque $\mathcal{T}$ admet $\mathcal{M}$ pr modèle]
$\mathcal{T}_\omega$ est donc formée de $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ et $\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_p}$ avec $\max k_i = N$
Nous avons $\mathcal{M}_N \models \varphi_N$ et ainsi $\mathcal{M}_N$ est modèle de $\mathcal{T}_\omega$ qui est de coh
$\mathcal{T}_\Omega$ est donc cohérente. Elle admet donc un modèle … qui est infini.
$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\Omega$ donc $\mathcal{T}$ l'admet cô modèle.

Corollaire : La finitude n'est pas axiomatisable

Démo : si c'était le cas, soit $\mathcal{T}$ une telle théorie, ses modèles seraient ts les modèles finis, donc en cardinalité non bornée de $\mathcal{T}$ aurait un modèle infini. Méta-absurde.

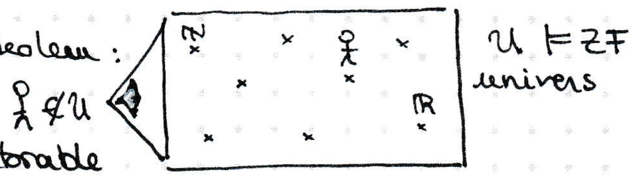


Thm Lowenheim Skolem

Soit $\mathcal{T}$ cohérente de lgg $\mathcal{L}$ admettant un modèle infini $\mathcal{M}$
Alors $\mathcal{T}$ admet des modèles non isomorphes 2 à 2 de cardinalité $\geq$ celle de $\mathcal{L}$.

3 conséquences :

- $Th(\mathbb{R})$ où $\mathbb{R} = \langle \mathbb{R} ; \langle 0, 1, \pi, e, \sqrt{2} \dots \rangle, \langle \exp, \ln \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}, \sqrt{\cdot}_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{N}}, \dots \rangle, \langle \leq, \geq, <, >, =, \dots \rangle \rangle$
LwSk↓ admet un modèle dénombrable.
- LwSk↑ Il existe $\mathfrak{N} \in Mod(\text{Péano})$ avec $|\mathfrak{N}| = \mathbb{R}$
- Paradoxe de Skolem :



il existe $\mathcal{U}$ dénombrable