$L_i(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n+1})$

$L_i(x_i) = 1$

$\Rightarrow C = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(x_i - x_j)} \Rightarrow \boxed{L_i(x) = \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \dfrac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}}$

$L_i(x)$ appelée **base de Lagrange**.

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} f(x_i)}$$ polynome de Lagrange.

$P_n(x_k) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \underbrace{L_i(x_k)}_{\delta_{ik}} f(x_i) = f(x_k)$ $\rightarrow$ $P_n$ interpole $f$ au pt $x_k$ ($k=1-n$

$\forall k$ $\quad \delta_{ik}$ : $i\neq k$ : $0$ ; $i=k$ : $1$

$\Downarrow$

**polynôme d'interpolat° de Lagrange**

Ex : Polynôme d'interpollat° $P_3(x)$ de $f$

| $x_i$ | $0$ ($x_1$) | $1$ ($x_2$) | $3$ ($x_3$) | $4$ ($x_4$) |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $1$ | $3$ | $2$ | $5$ |

$P_3(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} f(0) + \dfrac{x(x-3)(x-4)}{1(-2)(-3)} f(1) + \dfrac{x(x-1)(x-4)}{3(2)(-1)} f(3)$
$+ \dfrac{x(x-1)(x-3)}{4(3)(1)} f(4) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{17}{6}x^2 + \dfrac{13}{3}x + 1$

**Erreur d'interpollat°** : $\mathcal{E}(x) = f(x) - P_n(x)$

**THM** : Si $f$ est de $\mathcal{C}^{n+1}[a,b]$ (classe $(n+1)$)
alors $\exists\, y_x \in ]a,b[$ tq $\boxed{\mathcal{E}(x) = \prod\limits_{i=1}^{n+1}(x-x_i) \dfrac{f^{(n+1)}(y_x)}{(n+1)!}}$

Posons $M_{n+1} = \underset{a\leq x\leq b}{\mathrm{Max}} |f^{(n+1)}(x)| \Rightarrow |\mathcal{E}(x)| \leq \left|\prod\limits_{i=1}^{n+1}(x-x_i)\right| \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$

Si les $x_i$ sont les racines du polynôme de Tchebyshev $T_{n+1}(x)$
$T_{n+1}(x) = 2^n \prod\limits_{i=1}^{n+1}(x-x_i) \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{n+1}(x-x_i) = \dfrac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$ $\quad |T_n(x)| \leq 1$ sur $[-1;1]$

$$\Rightarrow \boxed{|\mathcal{E}(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}}$$

Ex : (Lagrange) Soit $f(x)$ une fct continue donnée par pts :
$f(\underset{x_1}{-2}) = 25$, $f(\underset{x_2}{-1}) = 3$, $f(\underset{x_3}{0}) = 1$, $f(\underset{x_4}{1}) = 7$. Interpoler $f(3)$ par Lagrange

$P_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} L_i(x) f(x_i)$ $\qquad L_i(x) = \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \dfrac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$ base de Lagrange

$f(3) \simeq P_3(3)$ $\quad L_1(3) = \prod\limits_{j=2}^{4} \dfrac{(3-x_j)}{(-2-x_j)} = \dfrac{4\times\cancel{3}\times\cancel{2}}{-1\times\cancel{-2}\times\cancel{-3}} = -4$ $\quad L_2(3) = 15$ $\quad L_3(3) = -20$ $\quad L_4(3) =$

$f(3) \simeq P_3(3) = -4f(-2) + 15f(-1) - 20f(0) + 10f(1) = -4\times 25 + 15\times 3 - 20 + 10\times 7 = -5$

Ex : (Lagrange) $f(0) = -5$ $\quad f(1) = 17$ $\quad f(3) = 115$ $\quad f(4) = 143$ $\quad$ Interpoler $f(2)$
$f(2) \simeq P_3(2) = 65$

## Difference divisée

| ordre | Notation | Definit° |
| --- | --- | --- |
| 0 | $f[x_i]$ | $f(x_i)$ |
| 1 | $f[x_i, x_j]$ | $\dfrac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$ $\quad i \neq j$ |
| 2 | $f[x_i, x_j, x_k]$ | $\dfrac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$ $\quad i \neq j \neq k$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| n | $f[x_1, \dots, x_{n+1}]$ | $\dfrac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_2, \dots, x_{n+1}]}{x_1 - x_{n+1}}$ |

$$f(x, x_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \Rightarrow f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f[x, x_1]$$

$$f[x, x_1, x_2] = \frac{f[x, x_1] - f[x_1, x_2]}{x - x_2} \Rightarrow f[x, x_1] = f[x_1, x_2] + (x - x_2) f[x, x_1, x_2]$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_1) + (x - x_1) f[x_1, x_2]}_{P_1(x) \text{ polynome de } d^\circ \leq 1} + (x - x_1)(x - x_2) f[x, x_1, x_2]$$

$$\boxed{P_1(x) = f(x_1) + (x - x_1) f[x_1, x_2]}$$

$$\begin{cases} P_1(x_1) = f(x_1) \\ P_1(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_1(x_2) = \cancel{f(x_1)} - \cancel{f(x_1)} + f(x_2) = f(x_2)$$

$\rightarrow$ $P_1$ interpole $f(x)$ au points $x_1$ $x_2$

En réitérant le procédé on obtient :

$$f(x) = \underbrace{f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + \dots + (x - x_1) \dots (x - x_n) f(x_1, \dots, x_{n+1})}_{P_n(x)} + \underbrace{\prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) f[x \dots x_{n+1}]}_{E(x)}$$

$P_n(x)$ interpole $f(x)$ aux pts $x_i$ $(i = 1 — n+1)$

$E(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) f[x, x_1, \dots, x_{n+1}]$ erreur de Newton.

### Polynôme de Newton

$$\boxed{P_n(x) = f(x_1) + \sum_{k=2}^{n+1} \prod_{j=1}^{k-1} (x - x_j) f[x_1, \dots, x_k]}$$

### Algo de Newton :

$$P_0(x) = f(x_1)$$

$$\left[\begin{array}{l} P_{n+1}(x) = P_m(x) + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{m+1}) f[x_1, \dots, x_{m+2}] \\ m = 0, 1, \dots, n-1 \end{array}\right.$$

| $x_i$ \ m | 0 | 1 | 2 | … | n |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $f[x_1, x_2]$ | | | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | | $f[x_1, x_2, x_3]$ | … | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $f[x_1, \dots, x_{n+1}]$ |
| $x_m$ | $f(x_m)$ | $\vdots$ | | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $f(x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$ | … | |
| $x_{n+1}$ | $f(x_{n+1})$ | $f[x_n, x_{n+1}]$ | | | |

<u>Ex</u> (Newton) $f$ continue $f(-1)=-1$ $f(-2)=-3$ $f(1)=3$ $f(2)=17$

1) Tableau de diff div.
2) Polynome de Newton

1)

| $x_i$ \ $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $-1$ | $2$ | $0$ | $1$ |
| $-2$ | $-3$ | $2$ | $3$ | |
| $1$ | $3$ | $14$ | | |
| $2$ | $17$ | | | |

$f[-1,-2] = \frac{-3-(-1)}{-2-(-1)} = 2$

2) $P_3(x) = -1 + (x+1)\times 2 + (x+1)(x+2)\times 0 + (x+1)(x+2)(x-1)\times 1$

$P_3(x) = -1 + 2(x+1) + (x+1)(x+2)(x-1)$

$P_3(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

<u>Ex</u> (Newton) $f$ continue $f(-2)=25$ $f(-1)=3$ $f(0)=1$ $f(1)=7$

1) Tableau de diff div
2) Polynome de Newton

1)

| $x_i$ \ $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | $25$ | $-22$ | $10$ | $-2$ |
| $-1$ | $3$ | $-2$ | $4$ | |
| $0$ | $1$ | $6$ | | |
| $1$ | $7$ | | | |

2) $P_3(x) = 25 + (x+2)(-22) + (x+2)(x+1)\times 10 + (x+2)(x+1)(x)\times(-2)$

$P_3(x) = 2x^3 + 4x^2 + 4x + 1$

<u>Ex</u> (Erreur d'interpolat°)

On suppose $f$ une fct de classe $C^{n+1}$ sur $[a,b]$

Soit $P_n(x)$ le polynôme d'interpolat° def aux pts $x_i \in [a,b]$ ($i = 1$ — $n+1$)

$\mathcal{E}(x) = f(x) - P_n(x)$

Mq $\exists\, y_x \in [a,b] \mid \mathcal{E}(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x-x_i)\,\frac{f^{(n+1)}(y_x)}{(n+1)!}$

**THM de Rolle :**

$f$ continue sur $[a,b]$

$f$ dérivable sur $]a,b[$ $\mid f(a) = f(b)$

alors $\exists\, c \in\, ]a,b[\ \mid f'(c) = 0$

$P_n(x_i) = f(x_i)$ $\forall i = 1$ — $n+1$

$\mathcal{E}(x) = f(x) - P_n(x)$

$\mathcal{E}(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) = 0$

$f(x) - P_n(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x-x_i)\,A_x$ avec $A_x$ inconnue

$x$ un pt qcq de $[a,b]$ fixé $x \neq x_i$

Soit $\varphi(y) = f(y) - P_n(y) - \prod_{i=1}^{n+1}(y-x_i)\,A_x$ et $\varphi$ est de $C^{n+1}$

$\begin{cases} \varphi(x_i) = 0 & \forall i = 1 — n+1 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi$ admet $(n+2)$ racines

Rolle $\Rightarrow \varphi'$ admet au $-$ $n+1$ racines

Rolle $\Rightarrow \varphi^{(n+1)}$ admet au $-$ $1$ racine $y_x$

$\varphi^{(n+1)}(y_x) = 0 \qquad \varphi^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - 0$

$\varphi^{(n+1)}(y_x) = 0 \Rightarrow A_x = \frac{f^{(n+1)}(y_x)}{(n+1)!}$

$\mathcal{E}(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(y_x)}{(n+1)!}$

Rq : $I = [-1, 1]$ & $x_i$ sont les racines du polynôme de Tchebyscher $T_{n+1}(x)$

$|\mathcal{E}(x)| \leq \left|\prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)\right| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \qquad M_{n+1} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)|$

$T_{n+1}(x) = 2^n \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i) \Rightarrow |\mathcal{E}(x)| \leq \frac{|T_{n+1}(x)|}{2^n} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$

$$\boxed{|\mathcal{E}(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}}$$

## Dérivat° numérique.

1) On approche $f(x)$ par $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$
$f(x) \simeq P_n(x)$

2) On veut approximer la dérivée $f^{(k)}(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$

$f^{(k)}(x) \simeq P_n^{(k)}(x) \sum_{j=k}^{n} j(j-1)\dots(j-k+1) a_j x^{j-k}$

soit à calculer $f^{(k)}(\cancel{x}=t)$ $t$ fixé.

## Division synthétique

On divise $P_n(x)$ par $x-t$ : $P_n(x) = (x-t)\, G_{n-1}(x) + R_n$

$G_{n-1}(x) = b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{j-1} = t b_j + a_j & j = n-1, \dots, 1 \\ R_n = t b_0 + a_n = P_n(t) \end{cases}$$

Ex : $P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 6 \qquad t = 2$

| $j$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_4$ | 2 | -5 | 1 | -7 | 6 | |
| $Q_3$ | | 2 | -1 | -1 | -9 | $-12 = R_0$ |

On peut poursuivre le processus $Q_2, Q_1, Q_0$

| $j$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | Restes |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_4$ | 2 | -5 | 1 | -7 | 6 | |
| $Q_3$ | | 2 | -1 | -1 | -9 | $-12 = R_4$ |
| $Q_2$ | | | 2 | 3 | 5 | $1 = R_3$ |
| $Q_1$ | | | | 2 | 7 | $19 = R_2$ |
| $Q_0$ | | | | | 2 | $11 = R_1$ |
| | | | | | | $R_0 = a_n = a_4 = 2$ |

$P_4(x) = (x-2)\, Q_3(x) - 12 \qquad Q_3(x) = (x-2)\, Q_2(x) + 1$

$Q_2(x) = (x-2)\, Q_1(x) + 19 \qquad Q_1(x) = (x-2)\, Q_0 + 11$

$Q_0 = 2$

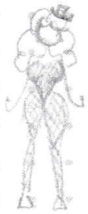
$P_4(x) = 12 + 1(x-2) + 19(x-2)^2 + 11(x-2)^3 + 2(x-2)^4$

$f'(2) \simeq P_4'(2) = R_3 \quad f''(2) \simeq P_4''(2) = 38 = 2!R_2$
$f'''(2) \simeq P_4'''(2) = 66 = 3!R_1 \quad f^{(4)}(2) \simeq P_4^{(4)}(2) = 48 = 4!R_0$

$P_4'(x) = R_3 + 38(x-2) + 33(x-2)^2 + 8(x-2)^3$
$P_4''(x) = 38 + 66(x-2) + 24(x-2)^2$

## Cas général :

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} R_k (x-t)^{n-k}}$$
$$\boxed{P_n^{(k)}(t) = k!\, R_{n-k}}$$



Ex (Division synthetique)
$f(x)$ continue | $f(-3) = -34$ $f(-1) = -8$ $f(2) = 1$ $f(3) = 20$
1) Tab. dif div.
2) Polynôme d'interpolat° de Newton
3) Approximer $f(5)$, $f'(5)$, $f''(5)$, $f'''(5)$

1)

| $x_i$ \ m | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| -3 | -34 | 13 | -2 | 1 |
| -1 | -8 | 3 | 4 | |
| 2 | 1 | 19 | | |
| 3 | 20 | | | |

2) $P_3(x) = -34 + (x+3)\times 13 + (x+3)(x+1)\times(-2) + (x+3)(x+1)(x-2)\times 1 = x^3 - 7$

3)

| j | 3 | 2 | 1 | 0 | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_3$ | 1 | 0 | 0 | -7 | |
| $Q_2$ | | 1 | 5 | 25 | 118 $R_3$ |
| $Q_1$ | | | 1 | 10 | 75 $R_2$ |
| $Q_0$ | | | | 1 | 15 $R_1$ |

$t = 5$

$P_3(x) = R_3 + R_2(x-5) + R_1(x-5)^2 + R_0(x-5)^3$
→ décomposit° en puissance de $(x-5)$

↳ $25 \times 5 - 7$

et $R_0 = Q_3 = 1 = Q_0$ ← val préc × t + val diag ↑ (pr toutes les cases sauf diagonale)

$P_3(x) = 118 + 75(x-5) + 15(x-5)^2 + 1(x-5)^3$
$f(5) \simeq P_3(5) = 118$
$f'(5) \simeq 1!R_2 = 75$
$f''(5) \simeq 2!R_1 = 30$
$f'''(5) \simeq 3!R_0 = 6$

## Intégration numérique

On se propose d'étudier quelques méthodes numériques permettant d'approcher $\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx$ ($w$ : poids $> 0$)

De telles méthodes s'imposent lorsque la primitive de $f(x)$ est inconnue ou lorsque $f(x)$ est donnée par pts $f(x_i)$ ($i = 0$ —— $n$)

$\rightarrow \int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) + E$ (E : erreur d'intégrat°)

$\rightarrow \int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$

Formule d'intégrat° numérique $\omega_i \in \mathbb{R}$ à determiner.

$f(x) = P_n(x) + \varepsilon(x)$

polynôme d'interpolat° Lagrange

↳ erreur d'interpolat°

$\rightarrow \int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\,\omega(x)\,dx + \int_a^b \varepsilon(x)\,\omega(x)\,dx$

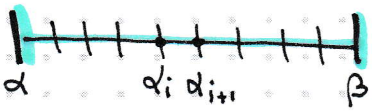
$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$

$\rightarrow \int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)\,\omega(x)\,dx + \int_a^b \varepsilon(x)\,\omega(x)\,dx$

$= \sum_{i=0}^{n} \left( \int_a^b L_i(x)\,\omega(x)\,dx \right) f(x_i) + \int_a^b \varepsilon(x)\,\omega(x)\,dx$

$$\begin{cases} \int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) + E \\ E = \int_a^b \varepsilon(x)\,\omega(x)\,dx \end{cases} ; \quad \boxed{\omega_i = \int_a^b L_i(x)\,\omega(x)\,dx \quad \forall i}$$

$[\alpha, \beta] = \bigcup_{i=0}^{k-1} [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$




$\alpha = \alpha_0 \quad \beta = \alpha_k \quad (\alpha_i)$ subdivision

Ex : sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ on interpole $f(x)$ par polynôme constant $P_0(x)$

Soit $t_i \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ $P_0(x) = f(t_i)$ $\forall x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$

$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} P_0(x)\,dx = f(t_i) \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} dx = \boxed{f(t_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}$

Somme de Riemann

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} f(t_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}$$

Formule des rectangles à gauche :

si $t_i = \alpha_i$ $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} f(\alpha_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$

Formule des rectangles à droite :

si $t_i = \alpha_{i+1}$ $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} f(\alpha_{i+1})(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$

Ex : sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ on interpole $f(x)$ par $P_1(x)$ (d° 1)

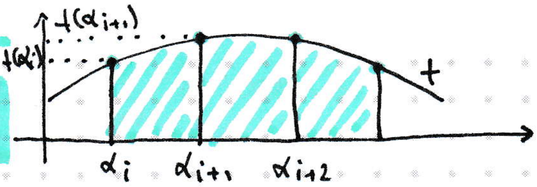
$P_1(x) = \sum_{i=0}^{1} L_i(x) f(x_i)$ $\quad x_0 = \alpha_i \quad x_1 = \alpha_{i+1}$

$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{x - \alpha_{i+1}}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} f(\alpha_i) + \frac{x - \alpha_i}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} f(\alpha_{i+1})\,dx \simeq \frac{f(\alpha_i)}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \left[ \frac{(x - \alpha_{i+1})^2}{2} \right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} + \frac{f(\alpha_{i+1})}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \left[ \frac{(x - \alpha_i)^2}{2} \right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}}$

$\simeq \frac{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}{2} \left( f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1}) \right)$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\alpha_{i+1}-\alpha_i)}{2}\left(f(\alpha_i)+f(\alpha_{i+1})\right)}$$

Formule des trapèzes




Rq: Si on interpole $f(x)$ par $P_2(x)$, on retrouve la méthode de Simpson

Etude de l'erreur

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\omega(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{k} w_i f(x_i)$$

Def : Nous dirons que la méthode est d'ordre N si elle est exacte pour tout polynome de $d° \leq N$

$$E(f) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\omega(x)\,dx - \sum w_i f(x_i) \qquad E(f) = 0 \text{ si } f \in \mathbb{P}_N \ (d° \leq N)$$

Soit $u_+ = \max(u, 0)$

Def : On appelle noyau de Péano $K_N(t) = E(x \longmapsto (x-t)^N_+)$ $\forall t$ fixé.

THM de Peano : On suppose que la méthode d'intégrat° est d'ordre $\geq N$ et $f \in \mathcal{C}^{N+1}[a,b]$

alors $\boxed{E(f) = \frac{1}{N!}\int_a^b K_N(t)\, f^{(N+1)}(t)\,dt}$

Corollaire de Péano : Si de plus, le noyau $K_N(t)$ garde un signe cst sur $[a,b]$

alors $\exists\, y \in [a,b]$ tq $\boxed{E(f) = \frac{f^{(N+1)}(y)}{(N+1)!} E(x \longrightarrow x^{N+1})}$

Ex : On considère la méthode d'intégrat° $\int_0^h f(x)\,dx \simeq h f(h/2)$

1) Ordre N ?
2) Noyau de Peano
3) Expr de l'erreur et sa majorat°

1) $f(x) = 1$ $\left\{\begin{array}{l} \int_0^h dx = h \\ h f(h/2) = h \end{array}\right.$ ok $\qquad f(x) = x$ $\left\{\begin{array}{l} \int_0^h x\,dx = \left[x^2/2\right]_0^h = h^2/2 \\ h f(h/2) = h \times h/2 = h^2/2 \end{array}\right.$ ok

$f(x) = x^2$ $\left\{\begin{array}{l} \int_0^h x^2\,dx = \left[x^3/3\right]_0^h = h^3/3 \\ h f(h/2) = h \times h^2/2 = h^3/4 \end{array}\right.$ NON $\qquad E(x \longrightarrow x^2) = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4} = \frac{h^3}{12} \neq 0$

N = 1 l'ordre

2) ici N = 1. $K_1(t) = E(x \longmapsto (x-t)_+) = \int_0^h (x-t)_+\,dx - h\left(\frac{h}{2}-t\right)_+$

$u_+ = \mathrm{Max}(u,0) = \left\{\begin{array}{ll} u & \text{si } u \geq 0 \\ 0 & \text{si } u < 0 \end{array}\right.$

$(x-t)_+ = \left\{\begin{array}{ll} x-t & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t \end{array}\right.$ $\qquad \int_0^h (x-t)_+\,dx = \int_t^h (x-t)\,dx \ \Big| \ \left(\frac{h}{2}-t\right)_+ = \left\{\begin{array}{ll} h/2 - t & \text{si } 0 < t \\ 0 & \text{si } h/2 < t \end{array}\right.$

si $0 \leq t \leq h/2$ $\quad K_1(t) = \int_t^h (x-t)\,dx - h\left(\frac{h}{2} - t\right) = \left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]_t^h - h\left(\frac{h}{2} - t\right)$

$$= \frac{(h-t)^2}{2} - \frac{h^2}{2} + ht = \cancel{\frac{h^2}{2}} - \cancel{ht} + \frac{t^2}{2} - \cancel{\frac{h^2}{2}} + \cancel{ht} = \frac{t^2}{2} \geq 0$$

si $h/2 < t \leq h$ $\quad K_1(t) = \int_t^h (x-t)\,dx = \frac{(h-t)^2}{2} \geq 0$

3) Noyau $K_1(t)$ garde un signe cst ($K_1(t) \geq 0$), on peut appliquer le corollaire de Péano

$$\exists y \in [0,h] \mid E(f) = \frac{f''(y)}{2!} E(x \longrightarrow x^2) = \frac{f''(y)}{2!} \frac{h^3}{12} = f''(y) \frac{h^3}{24}$$

$|E(f)| \leq c \frac{h^3}{24} \quad \forall f \in \mathcal{C}^2[0,h]$, $c$ max$|f''(x)|$

Ex : $\int_0^h f(x)\,dx \simeq h\left(\frac{f(0) + f(h)}{2}\right)$ (Trapèze)

1) ordre 2) Noyau de Péano 3) Majorat° erreur

1) $f(x) = 1$ $\begin{cases} \int_0^h dx = h \\ h \frac{f(0)+f(h)}{2} = \frac{2h}{2} = h \end{cases}$ ok $\quad f(x) = x$ $\begin{cases} \int_0^x x\,dx = h^2/2 \\ h \frac{f(0)+f(h)}{2} = h \frac{h}{2} = h^2/2 \end{cases}$ ok

$f(x) = x^2$ $\begin{cases} \int_0^h x^2\,dx = h^3/3 \\ h \frac{f(0)+f(h)}{2} = h^3/2 \end{cases}$ $\neq$ Non $\quad E(x \mapsto x^2) = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} = \frac{h^3}{6} \neq 0$

Donc $N = 1$

2) $K_1(t) = E(x \longmapsto (x-t)_+) = \int_0^h (x-t)_+\,dx - \frac{h}{2}\left(\cancel{(-t)_+} + (h-t)_+\right)$

$K_1(t) = \int_t^h (x-t)\,dx - h/2\,(h-t) = \left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]_t^h - h/2\,(h-t) = \frac{(h-t)^2}{2} - ht + \frac{t^2}{2} - \frac{h^2}{2} + ht/2$

$K_1(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{ht}{2} = \frac{t}{2}(t-h) \leq 0 \quad \forall t \in [0,h]$

3) En appliquant le corollaire $\exists y \in [0,h]$ tq $E(f) = \frac{f''(y)}{2!} E(x \longrightarrow x^2)$

$E(f) = -f''(y)\frac{h^3}{12} \qquad |E(f)| \leq c \frac{h^3}{12} \qquad c = \max|f''(x)|$ $\forall f \in \mathcal{C}^2$

Ex : $\int_0^1 f(x)\,dx \simeq 1/4\,(f(0) + 3f(2/3))$

1) ordre 2) noyau de Péano 3) Majorat° erreur

1) $f(x) = 1$ $\begin{cases} \int_0^1 dx = 1 \\ \frac{1}{4}(f(0) + 3f(2/3)) = \frac{1+3}{4} = 1 \end{cases}$ ok $\quad f(x) = x$ $\begin{cases} \int_0^1 x\,dx = 1/2 \\ \frac{1}{4}(f(0) + 3f(2/3)) = \frac{3}{4}\frac{2}{3} = 1/2 \end{cases}$ ok

$f(x) = x^2$ $\begin{cases} \int_0^1 x^2\,dx = 1/3 \\ \frac{1}{4}(f(0) + 3f(2/3)) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = 1/3 \end{cases}$ ok $\quad f(x) = x^3$ $\begin{cases} \int_0^1 x^3\,dx = 1/4 \\ \frac{1}{4}(f(0) + 3f(2/3)) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{27} = \frac{2}{9} \end{cases}$ $\neq$ Non

$E(x \longrightarrow x^3) = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36} \neq 0 \quad \Rightarrow N = 2$

2) $K_2(t) = E\left(x \longrightarrow (x-t)_+^2\right) = \int_0^1 (x-t)_+^2 \, dx - \frac{1}{4}\left((-t)_+^2 + 3\left(\frac{2}{3} - t\right)_+^2\right)$

$= \int_t^1 (x-t)^2 \, dx - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} - t\right)_+^2$

si $0 \leq t \leq 2/3$ $K_2(t) = \left[\frac{(x-t)^3}{3}\right]_t^1 - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} - t\right)^2 = \frac{(1-t)^3}{3} - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} - t\right)^2$

$= \frac{1}{3} - t + t^2 - \frac{t^3}{3} - \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9} - \frac{4}{3}t + t^2\right) = \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{t} + t^2 - \frac{t^3}{3} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{t} - \frac{3}{4}t^2$

$= \frac{1}{4}t^2 - \frac{t^3}{3} = t^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}t\right) = \frac{t^2}{12}(3 - 4t)$

$\Rightarrow K_2(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 2/3]$ $\quad t \leq 2/3 < 3/4$

si $2/3 < t \leq 1$ $K_2(t) = \int_t^1 (x-t)^2 \, dx = \frac{(1-t)^3}{3} \geq 0$

3) $K_2(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1]$ Corollaire $\exists y \in [0,1] \mid E(f) = \frac{f^{(3)}(y)}{3!} E(x \to x^3) = \frac{f^{(3)}(y)}{216}$

$|E(f)| \leq \frac{c}{216}$ où $c = \max |f^{(3)}(x)|$ $0 \leq x \leq 1$

$\forall f \in C^3[0,1]$