1 Définitions

1.1 Forme bilinéaire

Définition 1

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que φ est une *forme bilinéaire* si

- $\forall x \in E,\ y \longmapsto \varphi(x,y)$ est linéaire
- $\forall y \in E,\ x \longmapsto \varphi(x,y)$ est linéaire

Proposition 1

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire. Alors

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = {}^tXMY$$

où $M = \big(\varphi(e_i, e_j)\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, X et Y sont les coordonnées respectives de x et y dans $\mathscr{B}$.

M s'appelle la matrice de la forme bilinéaire φ relativement à $\mathscr{B}$.

1.2 Forme bilinéaire symétrique

Définition 2

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire. On dit que φ est *symétrique* si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

Proposition 2

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$. Alors

$$\varphi \text{ symétrique} \Longleftrightarrow M \text{ symétrique}$$

1.3 Produit scalaire

Définition 3

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que φ est un *produit scalaire* si φ est bilinéaire, symétrique, positive et définie i.e. si φ est bilinéaire symétrique et

$$\begin{cases} \varphi \text{ est positive : } \ \forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0 \\ \varphi \text{ est définie : } \ \forall x \in E,\ \big(\varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0\big) \end{cases}$$

On appelle *espace préhilbertien réel* tout $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.

On appelle *espace euclidien* tout $\mathbb{R}$-ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.