1 Famille orthogonale/orthonormée

Définition 1

Soient $(E, <, >)$ préhilbertien réel et $X = \{x_1, ..., x_n\} \subset E$

On dit que X est une famille *orthogonale* de E si pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$,

$$i \neq j \Longrightarrow < x_i, x_j > = 0$$

On dit que X est une famille *orthonormée* si pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$,

$$< x_i, x_j > = \delta_{ij}$$

où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Proposition 1

Soient $(E, <, >)$ euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. Alors pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$$

Proposition 2

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel est libre.

1.1 Théorème de Gram-Schmidt

Théorème 1 (Gram-Schmidt)

Soient $(E, <, >)$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Alors il existe une base orthogonale $\mathscr{O} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de E telle que $\forall k \in \{1, ..., n\},\ \varepsilon_k \in \text{Vect}(e_1, ..., e_k)$.