APIN

* Approximation :

f continue sur $[a, b]$:

$$f(x) \simeq P_m(X)$$

* Programme :

approximation uniforme
Methode des moindres carrés
Interpolation : Lagrange / Newton
Intégration numerique

* approximation : trouver le polynome avec un delta par rapport a f le + petit ou l'erreur est : $\mathcal{E}(x) = \max \left| f(x) - P_m(x) \right|$

* Méthode moindres carrés : Solution unique
  * $(E, <.>)$: Espace vectoriel E prehilbertien avec le produit scalaire.
  * $\|f\| = \sqrt{<f, f>}$ (norme)

* Interpollation :

* Méthode des rectangles
* " des trapèzes
* " Simpson
* " Newton cotes

* Rappels des Polynomes orthogonaux

* Ex 1 : Polynome de Tchibyshev (PdT)

Les PdT sont definis par :

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0 = 1 \ , \ T_1(x) = X \end{cases}$$

1) montrer que $T_n(X) = \cos(n\theta)$

$$\theta = \arccos(X) \qquad |X| \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

2) Determiner le coefficient dominant de $T_n(X)$

3) Resoudre $T_n(X) = 0 \qquad |X| \leq 1$

4) Montrer que $\langle T_n, T_m \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n(X)\,T_m(X)}{\sqrt{1-x^2}}\,dX = 0 \ \forall n \neq m$

avec $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, fct° poids de

5) Montrer que :

$$T_n(X) = \frac{1}{2}\left(\left(X + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(X - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$$

⊡ 1) $T_2(X) = 2x\,T_1(X) - T_0(X) = 2x^2 - 1$

$T_3(X) = 2x(2x^2-1) - T_1(X) = 4x^3 - 3X$

- Montrons par recurrence que $T_n(X) = \cos(n\theta)$

$T_0(X) = 1 = \cos(0) \rightarrow \boxed{\text{O.K.}}$

$T_1(X) = X = \cos(\theta) \rightarrow \boxed{\text{O.K.}}$

• Hyp. Supposons que $T_k(X) = \cos(k\theta)$ pour $0 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} T_{n+1}(X) &= 2x\,T_n(X) - T_{n-1}(X) \\ &= 2x\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= 2\cos(n\theta)\cos(\theta) - \left(\cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin(\theta)\right) \\ &= \cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) \rightarrow \boxed{\text{OK.}} \end{aligned}$$

$\boxed{\cdot}$ 2) $n = 1 \quad T_1 = X \quad u_1 = 1$

$n = 2 \quad T_2 = 2X^2 - 1 \quad u_2 = 2$

$n = 3 \quad T_3 = 4X^3 - 3X \quad u_3 =$

- Par reccurence sur n :

Supposons que le coeff dominant de $T_k(x)$ est $a_k = 2^{k-1}$ $(1 \leq k \leq n)$:

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

En identifiant les coefficients dominants

$$\Rightarrow a_{n+1} = 2a_n = 2\,2^{n-1} = 2^n$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 2^n = 2^{n+1-1} \rightarrow \boxed{\text{o.k.}}$$

$\boxed{\cdot}$ 3) $T_n(X) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0$

$$\iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\iff \theta_k = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow X_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\boxed{X_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

$\boxed{\cdot}$ 4)

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-\pi}^{0} \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)}{|\sin(\theta)|}(-\sin(\theta)d\theta)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)}{|\sin(\theta)|}\sin(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0 \quad \forall n \neq m$$

5) $T_{m+1} - 2x\, T_m + T_{n-1} = 0$

* Equation recurrente linéaire d'ordre 2 *

Equation caractéristique :

$$r^2 - 2xr + 1 = 0$$

$$\Delta = 4x^2 - 4 = 4(x^2-1)$$

$$r_1 = \frac{2x + 2\sqrt{x^2-1}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$$

$$r_2 = x - \sqrt{x^2-1}$$

$\boxed{\text{La solution globale}}$: $T_{m_g} = \alpha r_1^m + \beta r_2^m$

$m = 0 \Rightarrow T_0 = \alpha + \beta = 1$

$m = 1 \Rightarrow \alpha(x + \sqrt{x^2-1}) + \beta(x - \sqrt{x^2-1}) = T_1$

$$\Rightarrow T_1 = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{1} x + (\alpha - \beta)\sqrt{x^2-1} = x$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\alpha = \beta = 1/2$$

$$T_m(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^m + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^m\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^m + \left(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\right)^m\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{im\theta} + e^{-im\theta}\right) = \frac{2\cos(m\theta)}{2} = \cos(m\theta)$$

Ex 2 (Polynome de Legendre)

Les polynomes sont defini par :
$$\begin{cases} P_m(x) = \dfrac{1}{2^m m!}\dfrac{d^m}{dx^m}\left((x^2-1)^m\right) \\ P_0(x) = 1 \end{cases}$$

et la relation de recurrence :

$$P_m(x) = \frac{(2m-1)}{m} \times P_{m-1}(x) - \frac{(m-1)}{m} P_{m-2}(x)$$

1) montrer que $\int_{-1}^{1} x^k P_m(x)\,dx = 0 \quad \forall k = 0, 1, \cdots, m-1$

2) En deduire l'orthonogonalisation des polynômes de Legendre

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_m(x)\,dx = 0 \quad \forall m \neq m \quad \left(\begin{array}{l} w(x) = 1 \text{ fonct}^\circ \text{ poids} \\ \text{de Legendre} \end{array}\right)$$

3) Montrer que le coeff dominant de $P_m(x)$ est $a_m = \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2}$

4) Calculer $\| P_m \|$

1 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m}((x^2-1)^m)\,dx = \frac{1}{2^m m!} \int_{-1}^{1} x^k \frac{d^m}{dx^m}((x^2-1)^m)\,dx$

1^{ere} Integration par partie :

$$V = x^k \qquad V' = k x^{k-1}$$

$$U = \frac{d^m}{dx^m}((x^2-1)^m) \qquad U' = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}((x^2-1)^m)$$

$$I_k = \left[x^k \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}((x^2-1)^m) \right]_{-1}^{1} - k \int_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}((x^2-1)^m)\,dx$$

Rappel : $f(x) = (x-1)^m \qquad f(1) = 0$

$$\frac{d^k f(1)}{dx^k} = f^{(k)}(1) = 0 \quad \text{si } k < m$$

$$I_k = -k \int_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}((x^2-1)^m)\,dx$$

2^e Integration par partie :

$$I_k = -k \left(\left[x^{k-1} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}((x^2-1)^m) \right]_{-1}^{1} - (k-1) \int_{-1}^{1} x^{k-2} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}((x^2-1)^m)\,dx \right)$$

$$= k(k-1) \int_{-1}^{1} x^{k-2} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}((x^2-1)^m)\,dx$$

* de proche en proche, si on intègre p fois par partie ($p \leq k$) :

$$I_k = (-1)^p k(k-1)\cdots(k-p+1) \int_{-1}^{1} x^{k-p} \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}}((x^2-1)^m)\,dx$$

* Si $p = k$:

$$I_k = (-1)^k k! \int_{-1}^{1} \frac{d^{m-k-1}}{dx^{m-k-1}}((x^2-1)^m)\,dx$$

$$= (-1)^k k! \left[\frac{d^{m-k-1}}{dx^{m-k-1}}((x^2-1)^m) \right]_{-1}^{1} = 0$$

* Le monôme x^k est orthogonal à $P_m(x)$ relativement à $\omega(x) = 1$

☐ 2 $<P_n, P_m> = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0 \quad \forall n \neq m$

* Supposons que $n < m$ (par exemple) : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$<P_n, P_m> = \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n} a_k X^k P_m(x)\, dx =$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} P_m(x)\, dx = 0$$

☐ 3 $P_n(X) = \frac{(2n-1)}{n} X P_{n-1}(X) - \frac{(n-1)}{n} P_{n-2}(X)$

* Soit a_n le coeff dominant de $P_n(X)$, par identification du coeff de X^n :

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{2n-1}{n}\right) a_{n-1} \\ a_{n-1} &= \left(\frac{2n-3}{n-1}\right) a_{n-2} \\ a_{n-2} &= \left(\frac{2n-5}{n-2}\right) a_{n-3} \\ a_2 &= \frac{3}{2} a_1 \end{aligned}\right\} a_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 a_1}{n!}$$

$P_1(X) = \frac{1}{2} \frac{d}{dX}(X^2 - 1) = X \Rightarrow a_1 = 1$

donc $a_n = \frac{(2n)!}{n! \times 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

☐ 4 $\| P_n \| = \sqrt{<P_n, P_n>}$
$= \sqrt{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx}$

* $\| P_n \|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = a_n \int_{-1}^{1} X^n P_n^{-1}(x)\, dx + \int_{-1}^{1} q_{n-1}(x) P_n(x)\, dx$

$$= a_n \int_{-1}^{1} X^n P_n(x)\, dx = a_n \int_{-1}^{1} X^n \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n}((X^2-1)^n)\, dx$$

$$= \frac{a_n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} X^n \frac{d^n}{dX^n}((X^2-1)^n)\, dx$$

* Posons $J_m = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^m dx$

Integration par partie

$V = (x^2-1)^m$

$U' = 1$

$$J_m = \left[x(x^2-1)^m\right]_{-1}^{1} - 2m\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{m-1}x^2 dx$$

$$= -2m\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{m-1}x^2 dx$$

$$= -2m\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{m-1}(x^2-1+1)\,dx$$

$$= -2m\int_{-1}^{1}(J_m + J_{m-1})$$

$$\Leftrightarrow \quad (2m+1)J_m = -2m\, J_{m-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad J_m = \frac{-2m}{2m+1} J_{m-1}$$

$$\Rightarrow \quad J_m = \frac{(-1)^m 2^m m!\, 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3}$$

$$= \frac{(-1)^m m!\, 2^{m+1} 2^m m!}{(2m+1)!}$$

$$= \frac{(-1)^m 2^{2m+1}(m!)^2}{(2m+1)!}$$

* $I_m = (-1)^m m!\, J_m$

$$= \frac{(m!)^3 2^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\Rightarrow \|P_m\|^2 = \frac{2}{2m+1} \Rightarrow \boxed{\|P_m\| = \sqrt{\frac{2}{2m+1}}}$$

Approximation dans un espace metrique

* Soit E un ev metrique : $\exists$ une distance d :

$$d : E \times E \longmapsto \mathbb{R}$$
$$(f, \varphi) \longmapsto d(f,\varphi) \text{ verifiant :}$$

* $d(f,\varphi) = 0 \Leftrightarrow f, \varphi$
* $d(f,\varphi) = d(\varphi, f)\ \forall (f,\varphi) \in E^2$
* $d(f,\varphi) \leq d(f,\psi) + d(\psi,\varphi)$