Système de preuve :
- Hilbertian $\not S$
- Deduct° naturelle
- Calcul sequentiel
- Deduct° naturelle en calcul sequentiel

Les axiomes sont des formules considérées vraies a priori
ex : $\forall x \cdot x + 0 = x$

Schéma d'axiome : meta variables ex : $X + Y = Y + X$
utilisés qd on ne veut pas de quantificateurs.

$$\frac{H_1 \quad H_2 \quad \dots \quad H_n}{C}\text{Rule name} \qquad \frac{}{A}\text{axiome name.}$$

$$\frac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}\text{modus ponens}$$

Une déduct° est un arbre dont la racine A est la conclusion et dont les feuilles Γ sont des hypothèses.
Une preuve est une déduct° sans hypothèse.

$$\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{matrix}$$

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow \mathcal{I} \text{ (intro)} \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ A \Rightarrow B\end{matrix}}{B}\text{modus ponens} \Rightarrow \mathcal{E} \text{ (éliminat°)}$$

et :
$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ B\end{matrix}}{A \wedge B} \wedge \mathcal{I} \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{A} \wedge l \mathcal{E} \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{B} \wedge r \mathcal{E}$$

Règles de quantificat° universelles :

Absurde : $\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \bot\end{matrix}}{A} \bot \mathcal{E}$

Disjonct° : $\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{A \vee B} \vee l \mathcal{I}$

Quantificat° existentielle :

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ A[t/x]\end{matrix}}{\exists x \cdot A} \exists \mathcal{I} \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ \exists x \cdot A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A[y/x]] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{B}$$

Go lire les bouquins de Girard (et Fuck Theory)

Négat° : $\dfrac{\dfrac{[A]}{\vdots}\;\bot}{\neg A}\,\neg\mathcal{I}$ $\qquad$ $\dfrac{\overset{\vdots}{A} \quad \overset{\vdots}{\neg A}}{\bot}\,\neg\mathcal{E}$

→ **Involut° de la négat° :** $\dfrac{}{A \vee \neg A}\,XM$ $\qquad$ $\dfrac{\overset{\vdots}{\neg\neg A}}{A}\,\neg\neg$ $\qquad$ $\dfrac{\overset{[\neg A]}{\overset{\vdots}{B}} \quad \overset{[\neg A]}{\overset{\vdots}{\neg B}}}{A}$ contradict°

Coupure : introduct° d'un connecteur suivie de son éliminat° $\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{A} \quad \overset{\vdots}{B}}{A \wedge B}\,\wedge\mathcal{I}}{A}\,\wedge_1\mathcal{E}$
→ inutile !
On cherche à éliminer les coupures pour avoir les preuves les + simples possibles.

Normalisat° : élimination des coupures $\quad \dfrac{\overset{\vdots}{A} \quad \dfrac{\overset{[A]}{\overset{\vdots}{B}}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow\mathcal{I}}{\underset{\vdots}{B}}\Rightarrow\mathcal{E} \;\rightsquigarrow\; \begin{matrix}\vdots\\ A\\ \vdots\\ B\\ \vdots\end{matrix}$

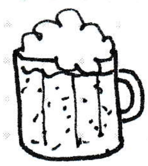
Quantificat° universelle : normalisat° :

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{A}}{\forall x \cdot A}\,\forall\mathcal{I}}{\underset{\vdots}{A[t/x]}}\,\forall\mathcal{E} \;\rightsquigarrow\; \begin{matrix}\vdots\\ A[t/x]\\ \vdots\end{matrix}$$

Disjonct° : normalisat° : $\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{A}}{} \qquad C \quad C}{C}\,\vee\mathcal{E} \;\rightsquigarrow\; \begin{matrix}\vdots\\ A\\ \vdots\\ C\\ \vdots\end{matrix}$

3 logiciens dans un bar...
Barman : " vous voulez tous un verre ? "

Le premier : " Peut-être "
Le deuxième : " Peut-être "
Le troisième : " Oui "



Quelques règles d'éliminat° sont quand même out of the blue...
Et la négat° c'est vraiment bizarre.

CALCUL DE SEQUENT

inventé par Gerhard Karl Erich Gentzen. (êu s'il était nazi)

Sequent : expression $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ, Δ sont des séquences finies de formules.

Variantes : **Ensembles** Γ, Δ finis
→ simplifie
→ évite certains pb.

Single sided : on peut forcer les sequents à ê $\vdash \Gamma$
→
→ intuitionisme :c

$\Gamma \vdash \Delta$ ⇒ si ttes les formules de Γ sont vraies alors au - 1 des formules de Δ est vraie

- $\Gamma \vdash A$ = A vraie selon hyp Γ
- $\vdash A$ = A vraie
- $\Gamma \vdash$ = contradict° ds Γ
- $A \vdash$ = $\neg A$
- $\vdash$ = contradict°

LK - Calcul des séquents classique. (Logistischer Klassischer Kalkül)

→ Pls variat° possibles
→ Pls ensembles de règles d'inférences
→ On va suivre Girard, 2011 ici.

$$\frac{}{A \vdash A}\ Id \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ Cut$$

Gentzen's Hauptsatz : règle de coupure redondante
→ si on peut prouver avec alors on peut prouver sans

Groupe structurel :

- $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \tau(\Delta)}\ \vdash X$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ X\vdash$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ \vdash W$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ W\vdash$ (affaiblissement)
- $\dfrac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ \vdash C$
- $\dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ C\vdash$

Négat° : $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \vdash\neg \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\vdash$

Conjonct° : $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \vdash\wedge \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \ell\wedge\vdash \qquad \dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ r\wedge\vdash$

additive &

⇕

$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma' \vdash B, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'}\ \vdash\wedge \qquad \dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge\vdash$

multiplicative $\otimes$

Disjonct° :

additive $\oplus$

⇕

multiplicative ⅋

Implicat° : $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'}\ \Rightarrow\vdash \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ \vdash\Rightarrow$ (modus ponens)

ex : $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \wedge B \vdash A}\ \ell\wedge\vdash \quad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}}{A \wedge B \vdash B}\ r\wedge\vdash}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\ \vdash\wedge$$ (Preuve de $A \wedge B \vdash A \wedge B$)

ex : $\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \wedge B \vdash A}\ l\wedge\vdash}{A \wedge B \vdash A \vee B}\ \vdash r\vee$ ⟵ (Preuve de $A \wedge B \vdash A \vee B$)

(Preuve de $A \vee B \vdash A \vee B$) ⟶ $\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash A \vee B}\vdash l\vee \qquad \dfrac{B \vdash B}{B \vdash A \vee B}\vdash r\vee}{A \vee B \vdash A \vee B}$

Preuve de l'équivalence des 2 règles du $\wedge$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma, \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta}\ \vdash\wedge\times}{\Gamma, \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \vdash C}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ C\vdash$$

Rq : $\dfrac{\sim\sim\sim}{\sim\sim\sim}\ x$ ⇒ on applique x plusieurs fois.

Quantificateurs :

- $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x \cdot A, \Delta}\ \vdash\forall$ • $\dfrac{\Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \cdot A \vdash \Delta}\ \forall\vdash$
- $\dfrac{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x \cdot A, \Delta}\ \vdash\exists$ • $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \cdot A \vdash \Delta}\ \exists\vdash$

Ds $\vdash\forall$ et $\exists\vdash$, $x \notin FV(\Gamma, \Delta)$

Single sided : ➜ on peut déf la négat° comme notat° et non pas règles d'inf

$\neg(\neg p) := p \qquad \neg(A \wedge B) := \neg A \vee \neg B \qquad \neg(A \vee B) := \neg A \wedge \neg B$

$\neg(\forall x . A) := \exists x . \neg A \qquad \neg(\exists x . A) := \forall x . \neg A$

➜ on définit les séquents comme $\vdash \Gamma$

➜ $\Gamma \vdash \Delta \rightsquigarrow \vdash \neg\Gamma, \Delta$

Ensemble de règles :

- $\dfrac{}{\vdash \neg A, A}\ Id$ • $\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \neg A, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}\ Cut$
- $\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \sigma(\Gamma)}\ X$ • $\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash A, \Gamma}\ W$ • $\dfrac{\vdash A, A, \Gamma}{\vdash A, \Gamma}\ C$ • $\dfrac{\vdash A, \Delta}{\vdash \forall x \cdot A, \Delta}\ \forall$ • $\dfrac{\vdash A[t/x], \Delta}{\vdash \exists x \cdot A, \Delta}\ \exists$
- $\dfrac{\vdash A, \Delta}{\vdash A \vee B, \Delta}\ l\vee$ • $\dfrac{\vdash B, \Delta}{\vdash A \vee B, \Delta}\ r\vee$ • $\dfrac{\vdash A, \Delta \qquad \vdash B, \Delta}{\vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge$

Que peut-on dire de la dernière règle d'une preuve ?

- Si c'est un cut → RIEN.
- Sinon les prémices (ce qu'il y a au dessus) sont des sous formules !
  → montre la décidabilité automatique des formules.

Éliminat° de coupure : logique AF. But Beware of the duplicat° !

Degré d'une formule : hauteur de l'arbre de syntaxe.

D° d'une coupure : d° de la formule qui enlève la coupure

→ on peut enlever la coupure si $d°_{new} < d°_{old}$

Éliminat° de coupure → exponentielle

h d° formule $\quad d$ d° coupure max $\qquad \mathcal{H}(0, h) = h \quad \mathcal{H}(d+1, h) = 4^{\mathcal{H}(d,h)}$