Nom : [illegible] Prénom : [illegible]

Question de cours

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, e_1, ..., e_n et u des vecteurs de E. Que signifie précisément « u est une combinaison linéaire de e_1, ..., e_n » ?

u est une combinaison linéaire de $e_1, \dots e_n$:

$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$

2

Question de cours

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sev de E. Donner la définition de « F et G sont supplémentaires dans E » puis donner un exemple d'une telle situation (sans le démontrer).

$F \oplus G = E \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ E = F + G \end{cases}$

1

Ex : Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x = 0\}$ et

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x = y\}$

Alors $F \oplus G = \mathbb{R}^2$

1

Exercice 1

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \geqslant -1\}$. E est-il un $\mathbb{R}$-ev ? Justifiez votre réponse.

E est un $\mathbb{R}$-ev si $0_E \in E$ et $\forall (u, v) \in E^2$

et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u + v \in E$.

? Je ne connais pas ce symbole !

$0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \Leftrightarrow 0 + 0 = 0$ et $0 \geqslant 1$. Alors $0_{\mathbb{R}} \in E$.

Mais par exemple, pour $u \in E$, $u = (3, 2)$ et $\lambda = -1$;

$\lambda u = (-3, -2) \Leftrightarrow (-3) + (-2) = -5$

Or $-5 < -1$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in E^2$ tq :

$\lambda u + v \notin E$

1,5

E n'est pas un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 2

Soient $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $A=\{x\longmapsto e^{x}; x\longmapsto e^{2x}\}$ et $B=\{x\longmapsto e^{x}; x\longmapsto e^{x+1}\}$. A et B sont-elles libres ? Justifiez votre réponse.

A est libre si $\forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$: Symbole

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda_1 e^{x}+\lambda_2 e^{2x}=0 \iff \lambda_1=\lambda_2=0$

Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ $\lambda_1 e^{x}+\lambda_2 e^{2x}=0$

Pour $x=0$, $\lambda_1+\lambda_2=0 \iff \lambda_1=-\lambda_2$

Pour $x=1$, $\lambda_1 e+\lambda_2 e^2=0 \iff \lambda_2 e^2-\lambda_2 e=0 \iff \lambda_1=\lambda_2$

$\Rightarrow$ A est donc une famille libre ? $\Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$

B est libre si $\forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$: ?

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda_1 e^{x}+\lambda_2 e^{x+1}=0 \iff \lambda_1=\lambda_2=0$

Or $\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tq $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=-e^{-1}$ tq

$\forall x\in\mathbb{R}$ $e^{x}+\lambda_2 e^{x+1}=e^{x}-e^{-1}e^{x+1}=e^{x}-e^{x}=0$

B n'est donc pas une famille libre.

2

Exercice 3

Soit $E=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que } x=y\right\}$. Écrire E sous forme de sev engendré en utilisant la notation Vect.

$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tq } x=y\}$

$=\{(x,x,z)\in\mathbb{R}^3\}$

$=\{(x,x,0)+(0,0,z)\in\mathbb{R}^3\}$

$=\{x(1,1,0)+z(0,0,1), (x,z)\in\mathbb{R}^2\}$

$=\mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$

1,5