Ex 1 $\quad Y = X^2$

1) $\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = 0 \quad j \neq i^2$

$\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=i^2)) = \mathbb{P}(X=i) \quad j = i^2$

2) Loi de Y $\quad \mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(Y=1) = 1/2$

$\mathbb{P}(Y=4) = 1/3$

3) $\mathbb{P}((X=0)\cap(Y=1)) = 0 \neq \mathbb{P}(X=0)\cdot\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{12}$

X, Y non indépendantes

Si X et Y indépendantes $\Longrightarrow E(X.Y) = E(X)E(Y)$

4) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$X \backslash Y$	0	1	4	Loi de X
-2	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{-2}$ 0	$\boxed{-8}$ 1/6	1/6
-1	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{-1}$ 1/4	$\boxed{-4}$ 0	1/4
0	$\boxed{0}$ 1/6	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{0}$ 0	1/6
1	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{1}$ 1/4	$\boxed{4}$ 0	1/4
2	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{8}$ 1/6	1/6
Loi Y	1/6	1/2	1/3	1

$$E(X.Y) = \sum_{i,j} x_i y_j P_{ij}$$

$$E(X.Y) = -\frac{8}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{8}{6} = 0$$

$$E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = -\frac{2}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{6} = 0$$

Ex2 $a \in \mathbb{R}_+^*$ X, Y 2 v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$P\big((X=k)\cap(Y=j)\big) = \frac{a}{2^{k+1}(j!)} \quad \forall (k,j)\in\mathbb{N}^2$$

1) Déterminer a

2) Lois marginales

3) Indépendance ?

4) $\mathrm{Cov}(X,Y)$

1) On a $\sum_{k,j} P_{kj} = 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{k+1}\, j!} = 1$$

$$\iff a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} 1/j! = 1$$

$$\iff a\, e\, \frac{1}{2} \sum_{0}^{+\infty} 1/2^{k} = 1 \iff \frac{ae}{2}\, 2 = 1 \quad \boxed{a = e^{-1}}$$

Rappel

$$e^{x} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{j}}{j!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{0}^{+\infty} a^{k} = \frac{1}{1-a} \quad |a| < 1$$

2) Lois marginales

Loi de X : $\mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X=k)\cap(Y=j)\right)$

$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{2^{k+1}\, j!} = \frac{e^{-1}}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}$

$\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-1}}{2^{k+1}}\, e = \frac{1}{2^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Loi de Y : $\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=k)\cap(Y=j))$

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{j!\,2^{k+1}}$$

$$= \frac{e^{-1}}{j!}\,\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} 1/2^k = \frac{e^{-1}}{j!}\,1/2\left(\frac{1}{1-1/2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{e^{-1}}{j!}} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

3) Indépendance

$$\mathbb{P}(X=k)\cdot\mathbb{P}(Y=j)=\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\frac{e^{-1}}{j!}=\mathbb{P}((X=k)\cap(Y=j))$$

$\forall (k,j)\in\mathbb{N}^2$

Donc X et Y sont indépendants

4) indépendance $\Rightarrow E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$

$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0$

Ex3 On considère n boîtes numérotées de 1 à n.
La boîte n° k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une boîte au hasard, puis une boule dans cette boîte.

1) Donner la loi conjointe de X, Y

X : numéro de la boîte, Y : numéro de la boule

2) Calculer $P(X = Y)$

3) Déterminer la loi de Y et calculer $E(Y)$.

---

1) $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$

$$P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = P\left(Y=j \,/\, X=i\right) P(X=i)$$

<u>1er cas</u> si $j > i$ $\quad P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = 0$

<u>2e cas</u> $j \leq i$ $\quad P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \boxed{\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{n}}$

2) $$(X=Y) = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\left((X=i)\cap(Y=i)\right)}_{\text{événements incompatibles}}$$

$$P(X=Y) = \sum_{i=1}^{n} P\left((X=i)\cap(Y=i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot n} = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1/i}$$

3) <u>Loi de Y</u>

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))$$

$\forall j \in Y(\Omega)$

$$= \sum_{i\geq j}^{n} \frac{1}{i.n} = \frac{1}{n}\sum_{i\geq j}^{n}\frac{1}{i}$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} j\,\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j$$

$$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\,\frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(i+1)$$

$$E(Y) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2} + 1\right)$$

$$= \boxed{\frac{n+3}{4}}$$

Ex4 Une urne contient une boule blanche et une boule noire, on y prélève une boule chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée. On note sa couleur et on la remet ds l'urne avec c boules de la même couleur. On répète cette expérience n fois ($n \geq 2$)

Soit $X_i = \begin{cases} 1 \text{ si on obtient une boule blanche au } i\text{ème tirage} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i \qquad 2 \leq p \leq n$$

1) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2)

En déduire la loi de X_2

2) Déterminer la loi de Z_2

3) Déterminer $Z_p(\Omega)$ et calculer

$$P\left(X_{p+1} = 1 / Z_p = k\right)$$

4) Montrer que $P(X_{p+1}=1) = \dfrac{1 + c\,E(Z_p)}{2 + pc}$

5) Montrer que $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $P(X_p = 1) = P(X_p = 0) = 1/2$

Ex2 $a \in \mathbb{R}_+^*$ X, Y 2 v.a à valeurs ds $\mathbb{N}$

$$P((X=k)\cap(Y=j)) = \frac{a}{2^{k+1}(j!)} \quad \forall (k,j) \in \mathbb{N}^2$$

1) Déterminer a

2) Les lois marginales de X et Y

3) indépendance ?

4) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$

1) $\sum_{k,j} \mathbb{P}((X=k)\cap(Y=j)) = 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{k+1}\,j!} = 1$$

$$a\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}\,j!} = 1 \iff a\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=0}^{+\infty} 1/j! = 1$$

Rappel

$$e^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x = 1 \Rightarrow \boxed{e = \sum_{j=0}^{+\infty} 1/j!}$$

$$a \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{h+1}} \sum_{0}^{+\infty} 1/j! = 1 \Rightarrow a e \sum_{h=0}^{+\infty} 1/2^{h+1} = 1$$

Série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \text{ si } |a|<1$$

$$a\, e\, \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

$$a\, \frac{e}{2} \left(\frac{1}{1-1/2} \right) = 1 \Rightarrow a\, e = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = e^{-1}}$$

2) Legge marginale di X

$$P(X=h) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X=h) \cap (Y=j))$$

$$P(X=h) = \frac{e^{-1}}{2^{h+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} 1/j! = \frac{e^{-1} \cdot e}{2^{h+1}} = \frac{1}{2^{h+1}}$$

$\forall h \in \mathbb{N}$

Loi marginale de Y

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big((X=k)\cap(Y=j)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y=j) = \frac{e^{-1}}{j!}\sum_{k=0}^{+\infty} 1/2^{k+1} = \frac{e^{-1}}{j!\,2}\left(\frac{1}{1-1/2}\right)$$

$$= \boxed{e^{-1}/j!}$$

3) Indépendance

$$\mathbb{P}(X=k)\cdot\mathbb{P}(Y=j) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}\big((X=k)\cap(Y=j)\big)$$

$$\frac{1}{2^{k+1}}\,\frac{e^{-1}}{j!} = \frac{e^{-1}}{2^{k+1}(j!)} \quad \text{O.K}$$

X, Y indépendantes $\Rightarrow E(X.Y) = E(X)E(Y)$

4) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X.Y) - E(X)E(Y) = 0$

<u>Ex3</u> On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte n°k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une boîte au hasard puis une boule ds cette boîte.

X v.a : numéro de la boîte

Y v.a : ______ la boule

1) Déterminer la loi du couple (X,Y)

2) Calculer $P(X=Y)$

3) Donner la loi de Y et $E(Y)$

1) $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$

$\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \mathbb{P}\left(Y=j / X=i\right)\mathbb{P}(X=i)$

$\forall\ (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$

<u>1er cas</u> $j > i$ $\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \boxed{0}$

<u>2e cas</u> $j \leq i$ $\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \boxed{\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{n}}$

2) $$(X=Y)=\bigcup_{i=1}^{n}\underbrace{\big((X=i)\cap(Y=i)\big)}_{\text{événements incompatibles}}$$

$$P(X=Y)=\sum_{i=1}^{n}P\big((X=i)\cap(Y=i)\big)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{in}=\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}$$

3) <u>Loi de Y</u>

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{n} P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \sum_{i\geqslant j}^{n} \frac{1}{ni} = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i\geqslant j}^{n}\frac{1}{i}}$$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\,P(Y=j) =$$

$$E[Y] = \sum_{j=1}^{n} j \, \mathbb{1}(Y=j)$$

$$E[Y] = \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i \geq j}^{n} \frac{1}{in} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i \geq j}^{n} \frac{1}{i}$$

$$E[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \left(\sum_{j=1}^{i} j \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \frac{i(i+1)}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i+1)}{2}$$

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i+1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right)$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{n+3}{4}}$$

Ex4 Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On y prélève une boule chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avec c boules de la même couleur. On répète cette expérience n fois. $(n \geq 2)$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i\text{ème tirage} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$1 \leq i \leq n$

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i \qquad 2 \leq p \leq n$$

1) La loi du couple (X_1, X_2) et en déduire la loi de X_2

2) Déterminer la loi de Z_2

3) Déterminer $Z_p(\Omega)$ et calculer $P(X_{p+1} = 1 / Z_p = k)$

4) Montrer que $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$

1) <u>Loi de X_1</u>

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 0) = 1/2$$

$X_1 \hookrightarrow B(1/2)$ Bernoulli

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = P\left(X_2 = j / X_1 = i\right) P(X_1 = i)$$

<u>1er cas</u> $i \neq j$ $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \left(\frac{1}{c+2}\right) 1/2$

2e (c) $i = j$

$$P\left((X_1 = i) \cap (X_2 = i)\right) = P\left(X_2 = i / X_1 = i\right) P(X_1 = i)$$

$X_1 \backslash X_2$	0	1	Loi X_1
0	$\frac{1+c}{2(2+c)}$	$\frac{1}{2(c+2)}$	$1/2$
1	$\frac{1}{2(2+c)}$	$\frac{1+c}{2(2+c)}$	$1/2$
Loi X_2	$1/2$	$1/2$	1

$$= \left(\frac{1+c}{2+c}\right) 1/2$$

$X_2 \nearrow B(1/2)$

suit

2) $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$ $\quad 2 \leq p \leq n$

Z_p : nbre de boules blanches obtenues lors des p premiers tirages

$Z_2 = X_1 + X_2$

$Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ $\quad P(Z_2 = 0) = P\left((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)\right) = \boxed{\dfrac{1+c}{2(c+2)}}$

$$\mathbb{P}(Z_2=1)=\mathbb{P}((X_1=0)\cap(X_2=1))+\mathbb{P}((X_1=1)\cap(X_2=0))$$

$$=\frac{1}{2+c}$$

$$\mathbb{P}(Z_2=2)=\mathbb{P}((X_1=1)\cap(X_2=1))$$

$$=\frac{1+c}{2(2+c)}$$

3) $Z_p(\Omega)=[\![0,p]\!]$

5) Montrer que

$$P(X_p = 1) = P(X_p = 0) = 1/2$$

$\forall p \in [\![1, 4]\!]$

(Utiliser la récurrence)