11h55

Contrôle 2

18/20
TB

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : GARREAU **Prénom :** Juliette **Classe :** C1

Entourer votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Goron / Mme Trémoulet

Consignes :

– ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***

– aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (3 points)

1. Calculer $I = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t(\ln(t))^3}$.

   N.B. : on pourra effectuer le changement de variable $u = \ln(t)$.

$u = \ln(t) \iff t = e^u$

Pour les bornes e et $e^2 \to \ln(e)$ et $\ln(e^2) \to 1$ et 2.

$dt \Rightarrow de^u du = e^u du$

$\int_1^2 \frac{e^u}{e^u(u^3)} du = \int_1^2 u^{-3} du = \left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_1^2$

$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

1,5

2. Calculer $J = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

   N.B. : on pourra effectuer le changement de variable $u = x + 1$.

$u = x + 1 \iff x = u - 1$

Soit $dx \to d(u-1)du = du$.

Par les bornes : $\begin{cases} 0 \to 0+1 = 1 \\ -1 \to -1+1 = 0 \end{cases}$

Et $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 = u^2+1$

Soit $\int_0^1 \frac{1}{u^2+1} du = [\text{Arctan}(u)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

1,5

Exercice 2 (3 points)

Considérons les trois intégrales I, J et K suivantes : $I = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$, $J = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\mathrm{d}x$ et $K = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $I = J - K$.

$$J-K = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} - \frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{(x+1)e^x - e^x}{(1+x)^2}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{xe^x + e^x - e^x}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = I$$

1

2. Calculer I en intégrant par parties K.

$$K = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx \rightarrow \begin{cases} u = e^x \\ v' = \frac{1}{(x+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$$
$$= \left[-\frac{e^x}{x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{e^x}{x+1}\,dx = -\frac{e}{2} + 1 + J$$
$$I = J - \left(1 - \frac{e}{2} + J\right) = \frac{e}{2} - 1$$

2

Exercice 3 (3 points)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{6+u_n}{2+u_n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$$

1. Montrer que (v_n) est géométrique en donnant sa raison q et v_0.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{6+u_n}{2+u_n} - 2}{\frac{6+u_n}{2+u_n} + 3} = \frac{6+u_n - 2(2+u_n)}{6+u_n + 3(2+u_n)}$$
$$= \frac{6+u_n - 4 - 2u_n}{6+u_n+6+3u_n} = \frac{2-u_n}{12+4u_n} = \frac{-(u_n-2)}{4(u_n+3)}$$
$$= -\frac{1}{4} \times v_n$$

v_n est géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et ~~d~~ $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = \frac{1}{6}$

1

2. Exprimer v_n en fonction de n et déterminer la limite de v_n.

$V_n = V_0 \times q^n = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

$-\frac{1}{4} \in]-1, 1[$ donc $\left(-\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $V_n = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

1

3. Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de u_n.

$V_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3} \to V_n(u_n+3) = u_n - 2 \to u_n = \frac{-3V_n - 2}{V_n - 1}$

$u_n = \frac{-3 \times \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n - 2}{\frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1} = \frac{-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n - 2}{\frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1}$

1

Or $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ soit $u_n = \frac{-3V_n - 2}{V_n - 1} \to \frac{-2}{-1} = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Exercice 4 (3 points)

Soient $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ deux suites définies par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

$u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{n^2(n+1)^2} \geqslant 0$

1

Donc (u_n) est une suite strictement croissante.

$V_{n+1} - V_n = u_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^2} - u_n - \frac{1}{3n^2}$

2

$= \frac{3 + n^2 - (n+1)^2}{3n^2(n+1)^2} = \frac{2 - 2n}{3n^2(n+1)^2} \leqslant 0$ pour $n \geqslant 2$

Donc (V_n) est strictement décroissante pour $n \geqslant 2$.

$V_n - u_n = u_n + \frac{1}{3n^2} - u_n = \frac{1}{3n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(u_n) est croissante, (V_n) décroissante et $V_n - U_n$ tend vers 0 : les suites (u_n) et (V_n) sont adjacentes.

Exercice 5 (3 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$.

$$\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{\ln\left(\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\right)} = e^{n\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{a}{n} + \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$
$$= e^{-a - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{-a} \times \left(1 - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e^{-a} - \frac{a^2}{2n} e^{-a} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$e^{-a} - \frac{a^2}{2n}e^{-a} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-a}$$
Soit $\lim_{n \to +\infty} \left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$

1

2. Déterminer un développement limité au voisinage de $+\infty$ de $\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$ à l'ordre 2.

$$\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)} = e^{\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(-\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$
$$= e^{-\frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 - \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2

Exercice 6 (3 points)

Soit (u_n) la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$.

1. Étudier la monotonie de (u_n).

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1) \times (2(n+1)-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n) \times (2(n+1))} - \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}$$
$$= \frac{2n+1}{2n+2} \times u_n - u_n = \left(\frac{2n+1}{2n+2} - 1\right) u_n$$

Or $u_n > 0$ et $0 < \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ Soit $\frac{2n+1}{2n+2} - 1 < 0$.

Alors $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est décroissante

1

2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

La suite (u_n) est minorée par 0. Or (u_n) est décroissante. Donc (u_n) converge.
$(u_n) > 0$ car $1 \times 3 \times \dots \times (2n-1) > 0$ et $2 \times 4 \times \dots \times 2n > 0$.

1

3. Déterminer a tel que $u_n = \dfrac{(2n)!}{a\,(n!)^2}$ où a dépend de n.

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} = \frac{(2n)!}{a\,(n!)^2}$$

$$a = \frac{(2 \times 4 \times \dots \times 2n)(2n)!}{(1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)) \times (n!)^2} = \frac{(2 \times 4 \times \dots \times 2n)^2}{(n!)^2} = \frac{(2 \times 1 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2n)^2}{(n!)^2}$$

$$= \frac{(2^n \times (n!))^2}{(n!)^2} = (2^n)^2$$

1

Exercice 7 (2 points)

Soit (u_n) une suite réelle telle que (u_{2n}) et (u_{3n}) convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que $\ell = \ell'$.

(u_{2n}) est une suite extraite de (u_n) car il existe $\varphi(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)}) = (u_{2n}) \to \varphi(n) = 2n$.

(u_{3n}) est aussi une suite extraite de (u_n) car il existe $\varphi(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)}) = (u_{3n})$ et $\varphi(n) = 3n$.

Or $(u_{2n}) \to \ell$ et $(u_{3n}) \to \ell'$, les suites extraites convergent vers la limite de la suite dont elles sont extraites, soit $\ell' = \ell$.

0