

Exercice écrit de **Recherche opérationnelle stochastique**

Durée : 1h30.

**Tous** les documents sont **interdits**.

Les calculatrices **non programmables** sont autorisées.

\*\*\*\*\*

Une pharmacie reçoit en moyenne **45 clients par heure**. On suppose que le temps mis pour servir un client est en moyenne de **4 minutes**. Le personnel peut servir quatre clients à la fois (fonctionnement en parallèle de **4 guichets**) et les clients sont pris en charge dans l'ordre de leur arrivée. La capacité maximale d'accueil de la pharmacie est de **8 personnes**.

On admet que les arrivées des clients suivent une loi de Poisson de taux  $\lambda$  et que le temps de service pour chaque guichet suit une loi exponentielle de taux  $\mu$ .

1) Associer à ce problème un processus dont le principe a été étudié en cours. Donner le graphe complet, puis le graphe simplifié de ce processus.

2) La condition pour qu'un régime permanent s'installe est-elle vérifiée ? Justifier soigneusement votre réponse.

3) Calculer la probabilité  $\pi_0$  pour que la pharmacie soit vide (4 guichets libres).

Calculer la probabilité  $\pi_n$  d'avoir  $n$  clients dans la pharmacie en régime permanent ( $1 \leq n \leq 8$ ).

On présentera d'abord un calcul littéral, en fonction de  $\lambda$  et de  $\mu$ , puis on fera l'application numérique, compte tenu des données de l'énoncé.

4) Quel est le nombre moyen de clients se trouvant dans la pharmacie en régime permanent ?

5) Quel est le nombre moyen de clients potentiels qui, au cours d'une période de 10 heures, arrivent à la pharmacie et renoncent à se faire servir, en constatant que tous les guichets sont occupés ?

6) Suite à une demande insistante des clients, le propriétaire de la pharmacie décide d'ouvrir un **cinquième guichet**, qui fonctionne en parallèle avec les quatre premiers.

La capacité maximale d'accueil de la pharmacie est toutefois inchangée.

Reprendre la modélisation du processus et calculer à nouveau le nombre moyen de clients potentiels qui, au cours d'une période de 10 heures, arrivent à la pharmacie et renoncent à se faire servir, en constatant que tous les guichets sont occupés.

Comparer avec le résultat de la question précédente.

\*\*\*\*\*