

Question 4A

Puisque nous nous intéressons seulement aux bilans de productions/consommations et du niveau du bassin sur des périodes de $T[h]$, nous pouvons exprimer toutes nos variables en fonction de cette période. Voici deux tableaux reprenant les notations principales utilisées dans cette seconde partie ¹ :

Nom	Signification
c_i	Capacité éolienne installée sur le $i^{\text{ème}}$ site
t_j	Puissance à envoyer en turbinage choisie durant la $j^{\text{ème}}$ période
p_j	Puissance de pompage choisie durant la $j^{\text{ème}}$ période

Table 1: Table des notations des variables de décisions utilisées pour le modèle de la question 4.

Nom	Signification
n	Nombre de sites éoliens
m	Nombre de périodes de $T[h]$ dans une année
$e_i(j)$	Rendement éolien du $i^{\text{ème}}$ site durant la $j^{\text{ème}}$ période
a_j	Apport fluvial durant la $j^{\text{ème}}$ période
cons_j	Consommation énergétique durant la $j^{\text{ème}}$ période
t_{\max}	Capacité maximale d'énergie générée par le turbinage (Sur une période de T heures)
p_{\max}	Capacité maximale de pompage (Sur une période de T heures)
stock_{\max}	Capacité de stockage maximale
η	Rendement de turbinage
costs	Vecteur donnant les valeurs du coût d'installation d'un site éolien (onshore/offshore) $\text{costs}_i =$ Coût d'installation d'un site onshore si le site d'index i est onshore, et inversement.

Table 2: Table des notations des constantes utilisées pour le modèle.

Le modèle peut alors s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} & \min_{c_i, t_j, p_j} \quad \text{costs}^T \mathbf{c} \\ \text{tel que} \quad & \sum_{i=0}^{n-1} c_i e_i(j) + \eta \cdot t_j - p_j \geq \text{cons}_j \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$0 \leq \frac{\text{stock}_{\max}}{2} + \sum_{j=0}^k p_j - t_j + a_j \leq \text{stock}_{\max} \quad \forall k \in \{0, \dots, m-2\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} p_j - t_j + a_j = 0 \quad (3)$$

$$0 \leq c_i \leq c_i^{\max} \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \quad (4)$$

$$0 \leq \eta \cdot t_j \leq t_{\max} \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (5)$$

$$0 \leq p_j \leq p_{\max} \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (6)$$

¹Toutes autres notations utilisées dans la suite seront définies lorsque celles-ci seront introduites

La fonction objectif représente le coût total d'installation des éoliennes (en tenant compte des différences entre les installations *offshore* et *onshore*).

La contrainte (2) fait le bilan lié aux variations des opérations de turbinage/pompage décidées et de l'apport fluvial naturel depuis le temps $t = 0$ jusqu'en tout temps $t = k$ afin de calculer l'augmentation/la diminution du niveau de l'eau dans le bassin.

La formalisation peut s'obtenir en sachant que le niveau initial de notre bassin est à $0.5 \times \text{stock}_{\max}$, puis que le niveau du bassin au prochain temps est le niveau du bassin passé plus les fluctuations à la période j , pompage - turbinage + apport fluvial, qui est donné plus formellement par $\text{bassin}_{j+1} = \text{bassin}_j + p_j - t_j + a_j$, donc en développant cette relation de récurrence, nous obtenons bien le niveau de notre bassin pour toute période $j \in \{0, \dots, m-1\}$ en fonction de nos variables, et en sachant que le niveau du bassin doit revenir à son niveau initial, à la fin de la période considérée, il y a une contrainte "en moins" pour (2) qui apparaît dans (3). La contrainte (3) indique que le niveau final du bassin doit revenir au même niveau qu'initialement. Autrement dit, les opérations de turbinage/pompage et l'apport fluvial doivent se sommer à 0 à la fin de la dernière période.

Les contraintes (4), (5) et (6) indiquent respectivement les bornes sur les capacités éoliennes maximales installables sur chaque site, les capacités maximales de turbinages et les capacités maximales de pompages pour des périodes de $T[h]$, regroupées au niveau européen, bien entendu. Nous avons cependant supposé pour la (5) contrainte, liée au turbinage, que la valeur t_j est ce que nous extrayons du bassin, puis la capacité t_{\max} restreint alors l'énergie en sorte de la turbine ($\eta \cdot t_j$), qui sert à la production électrique dans la condition (1).

Question 4B

Suite à l'implémentation de notre problème d'optimisation sur le notebook Jupyter, nous obtenons un coût moyen qui est d'environ **58.282€/MWh**.² Nous avons implémenté ce problème avec la bibliothèque CVXPY qui a été recommandée, cependant il y a plusieurs solveurs disponibles et ils donnent pour ceux qui ont été testés, des résultats différents (pour le choix des valeurs de décision) mais qui arrivent presque à la même valeur de fonction objectif, la différence étant sûrement due aux erreurs de calcul numérique. Pour cette résolution, nous avons utilisé "SCIPY" (la liste des solveurs étant disponible ici : <https://www.cvxpy.org/tutorial/solvers/index.html>), c'est le solveur avec lequel nous avons eu le plus de performance, en terme de rapidité de calcul, et il semblait plus cohérent et consistant que les autres sur les résultats, donc nous en avons fait le choix.

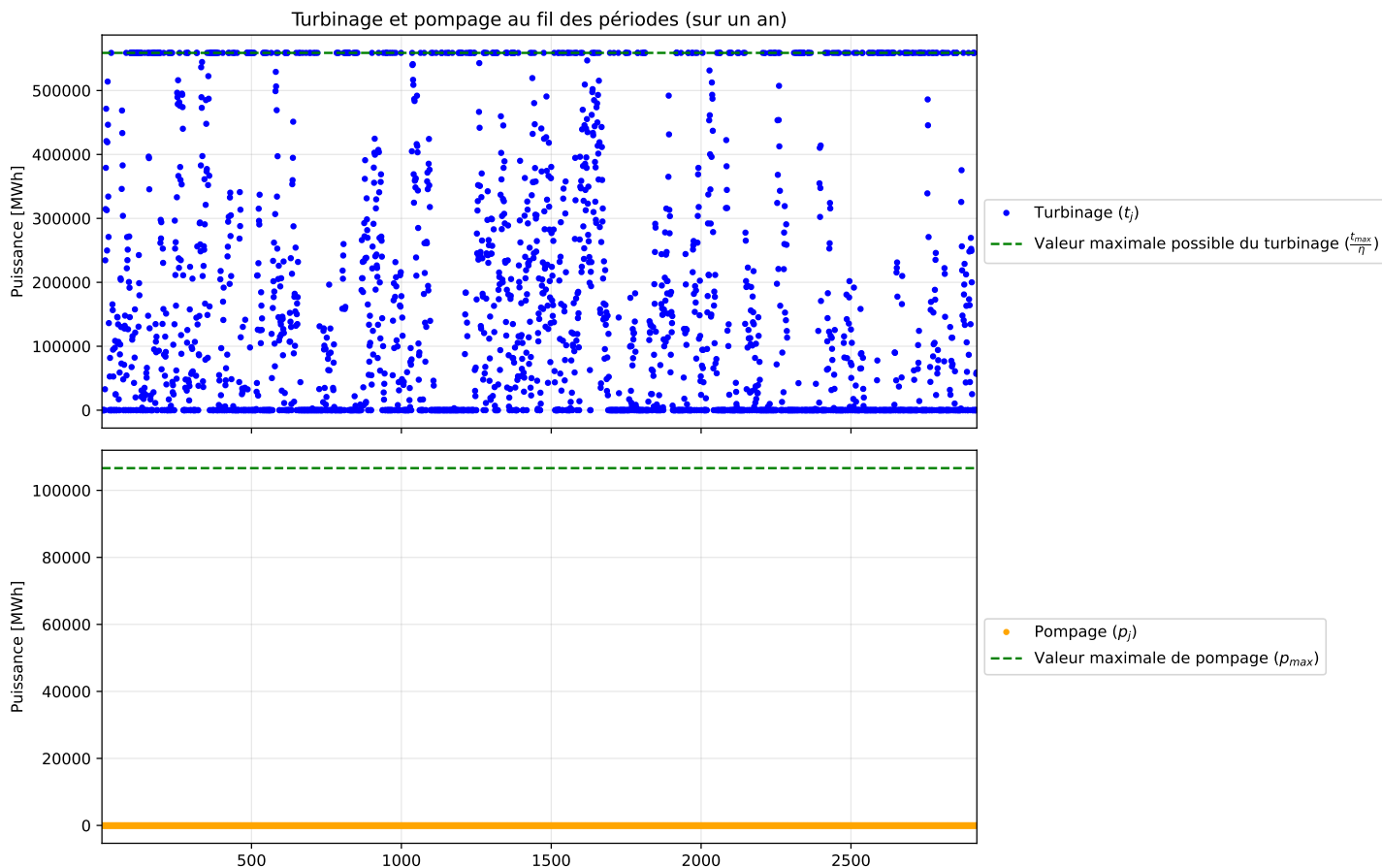


Figure 1: Représentation graphique du turbinage et du pompage influençant le niveau du bassin (2) pour le modèle de la question 4 par période de $T = 3$ heures sur un an.

²C'est une valeur qui semble cohérente, surtout pour un modèle comme ici, assez libre et qui ne prétend pas refléter les réalités, le prix moyen de l'énergie par MWh en Europe actuellement est aux alentours de quelques centaines d'euros, d'après la Commission européenne : https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Electricity_price_statistics, consulté le 8 mai 2024 à 01h08.

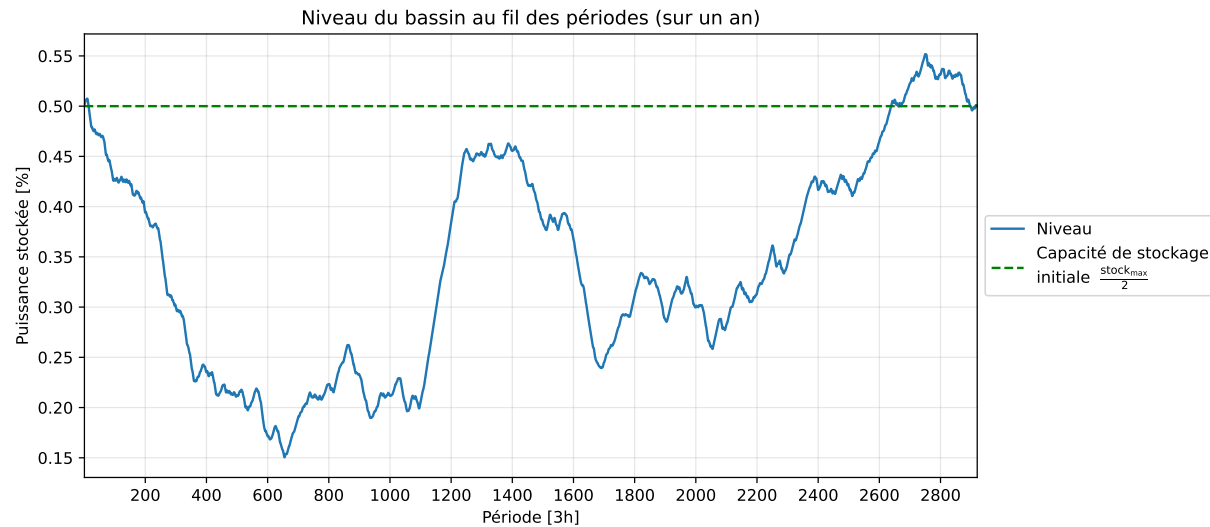


Figure 2: Représentation graphique du niveau du bassin (2) pour le modèle de la question 4 par période de $T = 3$ heures sur un an.

Le graphique indique bien que nous remontons au niveau initial à la fin de l'année.

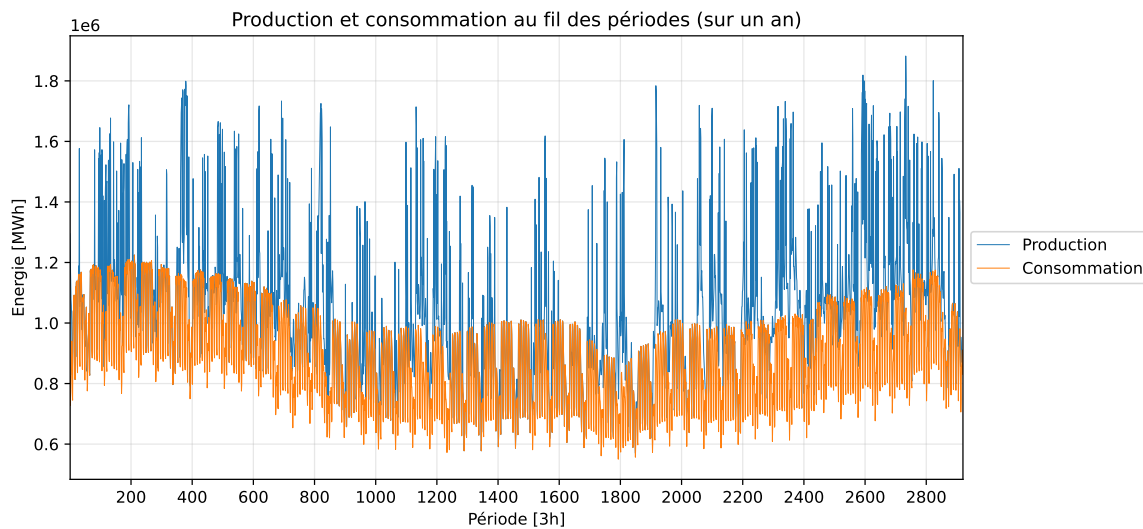


Figure 3: Représentation graphique de la production et de la consommation (en MWh) (1) pour le modèle de la question 4 par période de $T = 3$ heures sur un an.

Nous pouvons voir quelques écarts significatifs entre la production et la consommation, c'est-à-dire qu'à certains moments, nous "gaspillons" de l'énergie car nous produisons trop (où nous avons bien retiré à la production l'énergie stockée dans le bassin, donc il s'agit d'une perte sèche).

Question 4C

Pour traiter cette question, il faut s'intéresser au problème dual, une formulation pratique est la forme standard, qui nous permet d'exploiter les aspects théoriques de la méthode du simplexe afin de voir l'influence d'une quantité sur le coût total. En réajustant le modèle dans la bonne formulation, nous avons alors

$$\begin{aligned} & \min_{c_i, t_j, p_j} \text{costs}^\top \mathbf{c} \\ \text{tel que } & \sum_{i=0}^{n-1} c_i e_i(j) + \eta \cdot t_j - p_j \geq \text{cons}_j \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sum_{j=0}^k p_j - t_j + a_j \geq -\frac{\text{stock}_{\max}}{2} \quad \forall k \in \{0, \dots, m-2\} \quad (8)$$

$$-\sum_{j=0}^k p_j - t_j + a_j \geq -\frac{\text{stock}_{\max}}{2} \quad \forall k \in \{0, \dots, m-2\} \quad (9)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} p_j - t_j + a_j = 0 \quad (10)$$

$$-c_i \geq -c_i^{\max} \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \quad (11)$$

$$-\eta \cdot t_j \geq -t_{\max} \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (12)$$

$$-p_j \geq -p_{\max} \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (13)$$

$$c_i \geq 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \quad (14)$$

$$t_j \geq 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (15)$$

$$p_j \geq 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (16)$$

Sous cette forme, nous pouvons reconnaître une formulation de type $Ax \geq b, x \geq 0$ (sauf pour l'égalité, mais ça peut facilement se lire comme deux inégalités, et vu que $\eta > 0$, $\eta \cdot t_j \geq 0 \iff t_j \geq 0$). Dès lors, en introduisant des variables d'écarts pour chaque inégalité ($-s_i$ et telles que $s_i \geq 0$ pour toute inégalité), nous pouvons facilement avoir une formulation de type $Ax = b, x \geq 0$, qui nous convient parfaitement pour le simplexe, surtout sachant que les variables d'écarts ne vont pas intervenir dans la fonction objectif donc leur valeur n'importera pas pour la question. Bien que ça ne soit pas la formulation la plus rigoureuse, il vaut mieux procéder ainsi afin d'éviter des notations trop lourdes, nous arrivons facilement à identifier dans la méthode du simplexe, puisque nous avons une solution optimale bien finie, qu'il existe deux sous-matrices B et N de notre matrice A reprenant les éléments à gauche de notre formulation, que nous avons un vecteur b qui reprend les éléments $(\text{cons}_0, \dots, \text{cons}_{m-1}, -\frac{\text{stock}_{\max}}{2}, \dots, -\frac{\text{stock}_{\max}}{2}, -\frac{\text{stock}_{\max}}{2}, \dots, -\frac{\text{stock}_{\max}}{2}, 0, -c_0^{\max}, \dots, -c_{n-1}^{\max}, -t_{\max}, \dots, -t_{\max}, -p_{\max}, \dots, -p_{\max})$.

Nous avons aussi le vecteur des coûts, qui peut se décomposer en coûts concernant les éléments de la base, et les éléments nuls, bien évidemment, ça ne change rien de réorganiser le tout au niveau des variables, $\text{costs}^\top = (\text{costs}_B^\top, \text{costs}_N^\top)$. Selon la théorie, notre coût optimal est donné par $\text{costs}_B^\top B^{-1}b$.

Stockage

Si nous augmentons d'une unité notre stockage, nous avons donc que $\text{stock}_{\max} \leftarrow \text{stock}_{\max} + 1$ (réaffectation), donc dans notre modèle, notre vecteur b est modifié, et devient b plus un vecteur comprenant $-\frac{1}{2}$ pour les contraintes (8) et (9) et 0 sinon. Notons $\mathbf{1}_{\text{stock}}$ le vecteur ayant pour composante 1 si la contrainte associée est dans (8) ou (9), et ayant une composante nulle sinon. Rajouter une unité de stockage revient à dire que $b \leftarrow b - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\text{stock}}$, dès lors notre coût optimal devient $\text{costs}_B^\top B^{-1} (b - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\text{stock}}) = \text{costs}_B^\top B^{-1} b - \frac{1}{2} \text{costs}_B^\top B^{-1} \mathbf{1}_{\text{stock}}$ où le premier terme est connu puisque c'est la valeur de notre coût total, et la seconde partie peut être calculée, car $\text{costs}_B^\top B^{-1}$ correspond à la transposée du vecteur de solution optimale du problème dual, qui peut facilement être obtenu par CVXPY. Sur le notebook Jupyter, nous calculons que cela ne change pas le coût optimal, donc l'augmentation de notre capacité de stockage d'une unité ne rapporte pas d'argent.

Pompage

Procédons de la même manière que pour le stockage, nous voulons augmenter la capacité de pompage d'une unité, pour cela, étant donné que notre modèle se base sur des périodes de 3 heures, nous devons multiplier par 3 notre augmentation, donc cela nous donne $p_{\max} \leftarrow p_{\max} + 3$, et pour le vecteur b , il faut regarder aux contraintes (13), en définissant de la même manière $\mathbf{1}_p$, qui est composé de 1 si la contrainte associée à la composante est dans (13) et 0 sinon. Notre coût optimal nous sera donné par $\text{costs}_B^T B^{-1} (b - 3 \cdot \mathbf{1}_p) = \text{costs}_B^T B^{-1} b - 3 \cdot \text{costs}_B^T B^{-1} \mathbf{1}_p$. Après l'implémentation sur Python, nous avons aussi que le coût optimal reste le même, donc l'augmentation de notre capacité de pompage d'une unité ne rapporte pas d'argent

Turbinage

Nous pouvons aussi faire les choses de la même façon, il faut réassigner notre valeur de turbinage en lui ajoutant 3 car nous travaillons sur des périodes de 3 heures, donc $t_{\max} \leftarrow t_{\max} + 3$, ensuite nous devons définir le vecteur $\mathbf{1}_t$ qui comme avant a pour valeur 1 si sa contrainte associée est dans (12), 0 sinon. Notre coût optimal nous sera donné par $\text{costs}_B^T B^{-1} (b - 3 \cdot \mathbf{1}_t) = \text{costs}_B^T B^{-1} b - 3 \cdot \text{costs}_B^T B^{-1} \mathbf{1}_t$. D'après notre code, nous trouvons une diminution de notre coût de **1.583.760,79€**, ce qui est sûrement dû au fait que notre capacité de turbinage supplémentaire nous permet de mieux exploiter l'afflux naturel d'eau et de gaspiller moins d'énergie en surproduisant au-dessus de la demande.

Tout notre raisonnement reste valide par rapport aux contraintes car nous considérons que pour des petites variations, notre solution reste admissible.

Question 5

Nous devons à présent choisir, pour chaque site d'éoliennes, si nous installons 0%, 50% ou 100% de la capacité maximale installable sur ce site. Pour ce faire, nous redéfinissons les variables c_i de la question 4 :

Nom	Signification
$c_i \in \{0, 1, 2\}$	Proportion de la capacité maximale c_i^{\max} installée sur le $i^{\text{ème}}$ site
t_j	Puissance à envoyer en turbinage choisie durant la $j^{\text{ème}}$ période
p_j	Puissance de pompage choisie durant la $j^{\text{ème}}$ période

Table 3: Table des nouvelles notations des variables de décisions utilisées pour le modèle de la question 5.

La puissance installée sur le $i^{\text{ème}}$ site équivaut alors à $0.5 \cdot c_i c_i^{\max}$. Le modèle devient alors :

$$\min_{c_i \in \mathbb{Z}, t_j, p_j} \text{costs}^\top \begin{pmatrix} 0.5 \cdot c_0 c_0^{\max} \\ \vdots \\ 0.5 \cdot c_{n-1} c_{n-1}^{\max} \end{pmatrix}$$

$$\text{tel que } \sum_{i=0}^{n-1} 0.5 \cdot c_i c_i^{\max} e_i(j) + \eta \cdot t_j - p_j \geq \text{cons}_j \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (17)$$

$$0 \leq \frac{\text{stock}_{\max}}{2} + \sum_{j=0}^k p_j - t_j + a_j \leq \text{stock}_{\max} \quad \forall k \in \{0, \dots, m-2\} \quad (18)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} p_j - t_j + a_j = 0 \quad (19)$$

$$0 \leq c_i \leq 2 \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \quad (20)$$

$$0 \leq \eta \cdot t_j \leq t_{\max} \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (21)$$

$$0 \leq p_j \leq p_{\max} \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (22)$$

Ici, nous avons gardé les mêmes contraintes sauf pour celles concernant les c_i , la (20) nous dit bien que les c_i sont entre 0 et 2, et vu qu'ils sont entiers, nous avons bien nos valeurs attendues, ensuite la (17) nous donne la même contrainte par rapport au fait que la consommation doit être satisfaite, sauf qu'il faut ajuster les c_i pour qu'ils nous donnent 0, 50% et 100% de la capacité maximale. Il y a également eu un léger changement dans la fonction objectif.

Pour la résolution de ce modèle, nous avons dû réduire la durée étudiée, en effet, nous avons tout d'abord testé avec 2920 périodes (au complet), avec le solver par défaut de CVXPY, nous avons dépassé les 180 minutes d'exécution et avons alors arrêté, ensuite nous avons testé avec le solver SCIPY et avons arrêté au-dessus de 120 minutes, nous avons en premier lieu ensuite réduit le nombre de périodes à 1500, nous avons excédé les 65 minutes avec encore le solver SCIPY. Enfin, nous avons défini le nombre de périodes à **1000**, et nous arrivons à **46 minutes et 10.5 secondes** de calcul, donc nous avons conclu que notre choix de durée était raisonnable. Lorsque nous résolvons notre modèle avec SCIPY pour 1000 périodes, nous obtenons un coût total de "125.935.889.457,89 €", mais il reste à déterminer quelle est la bonne unité, en sachant que nos c_i^{\max} sont en MW, si nos coûts d'installations peuvent être amortis sur une sous-période, chose très improbable, nous aurions alors des $\frac{\text{€}}{\text{MW} \cdot 1000p}$ (en notant 1000 p le fait que nous avons 1000 périodes et en sachant qu'un an = 2920 p) ce qui nous ferait un coût moyen, en divisant par la consommation sur ces 1000 périodes de $131.15 \frac{\text{€}}{\text{MW}h}$, mais ça ne semble pas être la bonne piste, gardons l'idée de l'amortissement par an, nous avons alors un coût total de $125.935.889.457,89 \frac{\text{€}}{\text{an}}$, si nous divisons par la consommation nous avons alors un coût moyen de $131.15 \frac{\text{€}}{\text{an}} * \frac{1000p}{\text{MW}}$, et si nous souhaitons des $\frac{\text{€}}{\text{MW}h}$, il suffit de multiplier par $\text{an}/1000p = \frac{2920}{1000}$ ce qui nous donne approximativement **382.96 $\frac{\text{€}}{\text{MW}h}$** . Ce coût moyen est bien plus élevé que pour le modèle de la question 4, le temps de calcul a été aussi lourdement impacté, l'optimisation par

la présence des nombres entiers est bien plus complexe, et dans ce cas-ci nous amène un moins bon coût, cela s'explique par le fait qu'il y a peu de marge sur l'ajustement des sites éoliens, et que le maximum que le solver peut faire c'est d'osciller entre 3 valeurs tout en utilisant les capacités du bassin le mieux possible.

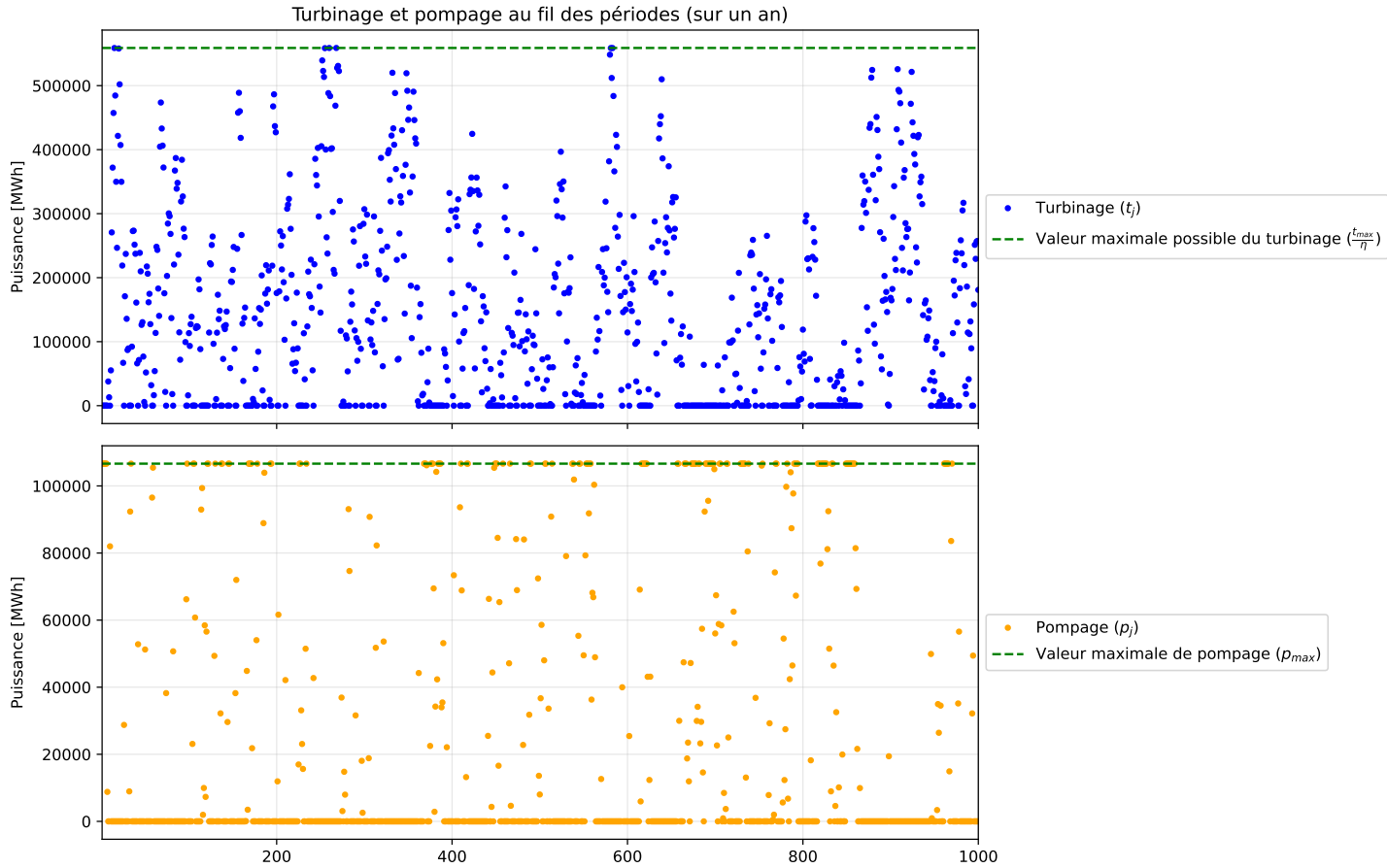


Figure 4: Représentation graphique du turbinage et du pompage influençant le niveau du bassin (18) pour le modèle de la question 4 par période de $T = 3$ heures sur 1000 périodes.

Dans ce graphique, nous pouvons voir que le turbinage est un peu plus varié qu'à la question 4, moins de valeurs extrêmes (au maximum/minimum), et cette fois-ci, le pompage est exploité contrairement à la question 4 où il est nul sur toute la période étudiée.

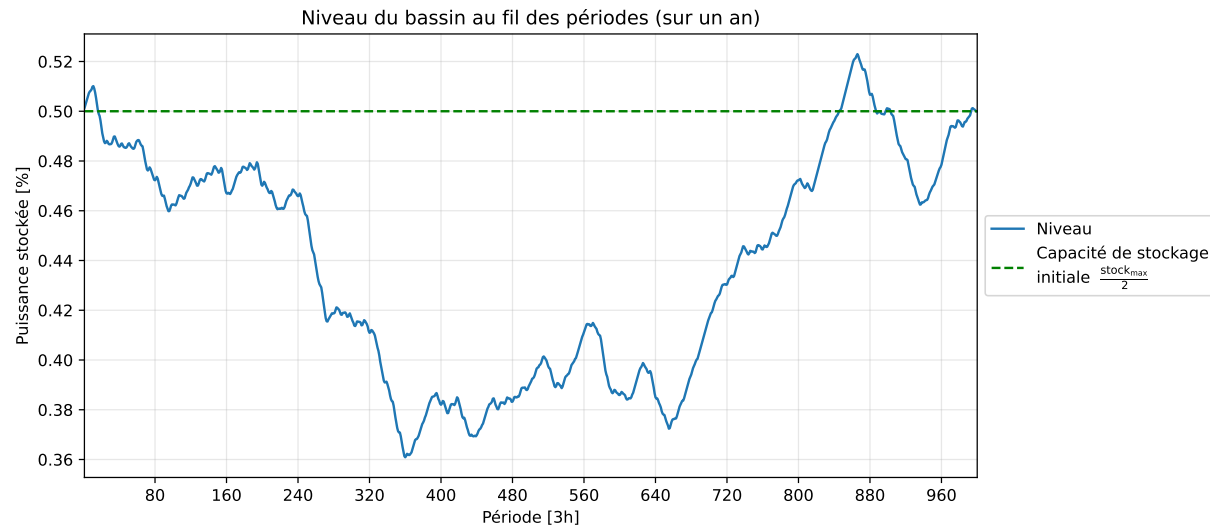


Figure 5: Représentation graphique du niveau du bassin (18) pour le modèle de la question 5 par période de $T = 3$ heures sur 1000 périodes.

Le graphique indique bien que nous remontons au niveau initial à la fin de la période.

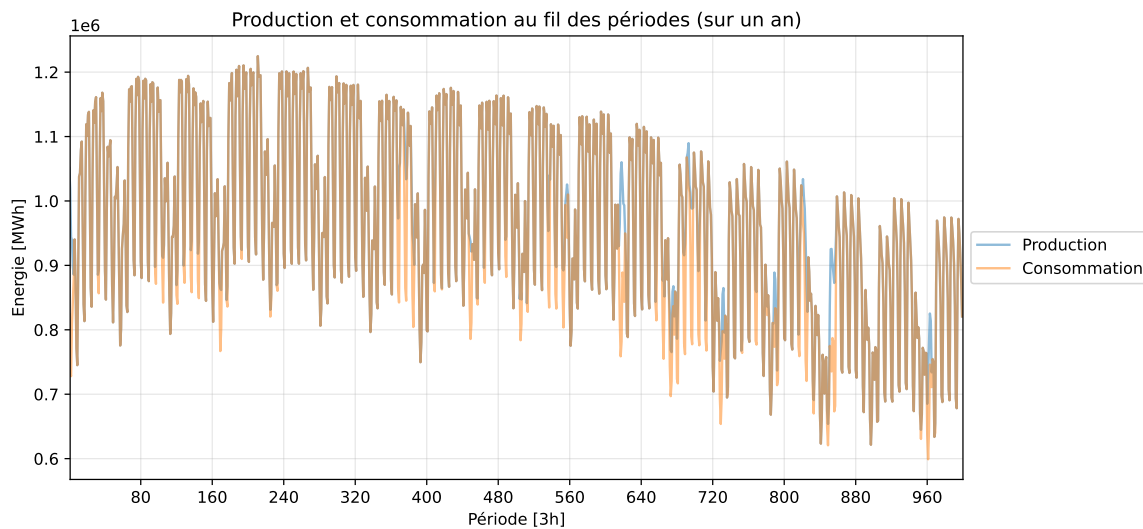


Figure 6: Représentation graphique de la production et de la consommation (en MWh) (17) pour le modèle de la question 5 par période de $T = 3$ heures sur 1000 périodes.

Nous constatons que la production est beaucoup plus proche de la consommation par rapport à la question précédente.

Question 6

Pour ce dernier modèle, nous avons également la possibilité d'installer des centrales à gaz, qui peuvent être utilisées pour produire de l'électricité en cas de besoin. La puissance totale à installer fait partie des variables de décision, ainsi que l'énergie produite par ces centrales en chaque période de $T[h]$.

Nous avons donc les nouvelles variables suivantes :

Nom	Signification
c_i	Capacité éolienne installée sur le $i^{\text{ème}}$ site
t_j	Puissance à envoyer en turbinage choisie durant la $j^{\text{ème}}$ période
p_j	Puissance de pompage choisie durant la $j^{\text{ème}}$ période
g_{tot}	Puissance totale à installer pour les centrales à gaz
g_j	Énergie produite par les centrales à gaz durant la $j^{\text{ème}}$ période

Table 4: Table des notations des variables de décisions utilisées pour le modèle de la question 6.

Nous devons alors prendre en compte, en plus du coût d'installation des éoliennes, le coût d'installation des centrales à gaz ainsi que leur coût de fonctionnement. Le modèle devient alors :

$$\begin{aligned} \min_{c_i, t_j, p_j} \quad & \text{costs}^\top \mathbf{c} + \text{gas_prod_cost} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} g_j + \text{gas_install_cost} \cdot g_{\text{tot}} \\ \text{tel que} \quad & \sum_{i=0}^{n-1} c_i e_i(j) + g_j + \eta \cdot t_j - p_j \geq \text{cons}_j \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$0 \leq \frac{\text{stock}_{\max}}{2} + \sum_{j=0}^k p_j - t_j + a_j \leq \text{stock}_{\max} \quad \forall k \in \{0, \dots, m-2\} \quad (24)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} p_j - t_j + a_j = 0 \quad (25)$$

$$0 \leq c_i \leq c_i^{\max} \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \quad (26)$$

$$0 \leq \eta \cdot t_j \leq t_{\max} \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (27)$$

$$0 \leq p_j \leq p_{\max} \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (28)$$

$$0 \leq g_j \leq g_{\text{tot}} \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (29)$$

où gas_prod_cost est le coût de production d'énergie par les centrales à gaz et gas_install_cost est le coût d'installation des centrales à gaz.

La fonction objectif tient maintenant compte du coût d'installation et de production des centrales à gaz. La contrainte (23) est modifiée pour prendre en compte la production d'énergie par les centrales à gaz dans le bilan total de production. Enfin, une dernière contrainte (29) est ajoutée pour limiter la production d'énergie par les centrales à gaz à la puissance totale installée. Après la résolution numérique, nous obtenons une valeur moyenne de **48.15 €/MWh**, ce qui est mieux que les résultats de la question 4 (**58.282 €/MWh**) et 5 (**382.96 €/MWh**).

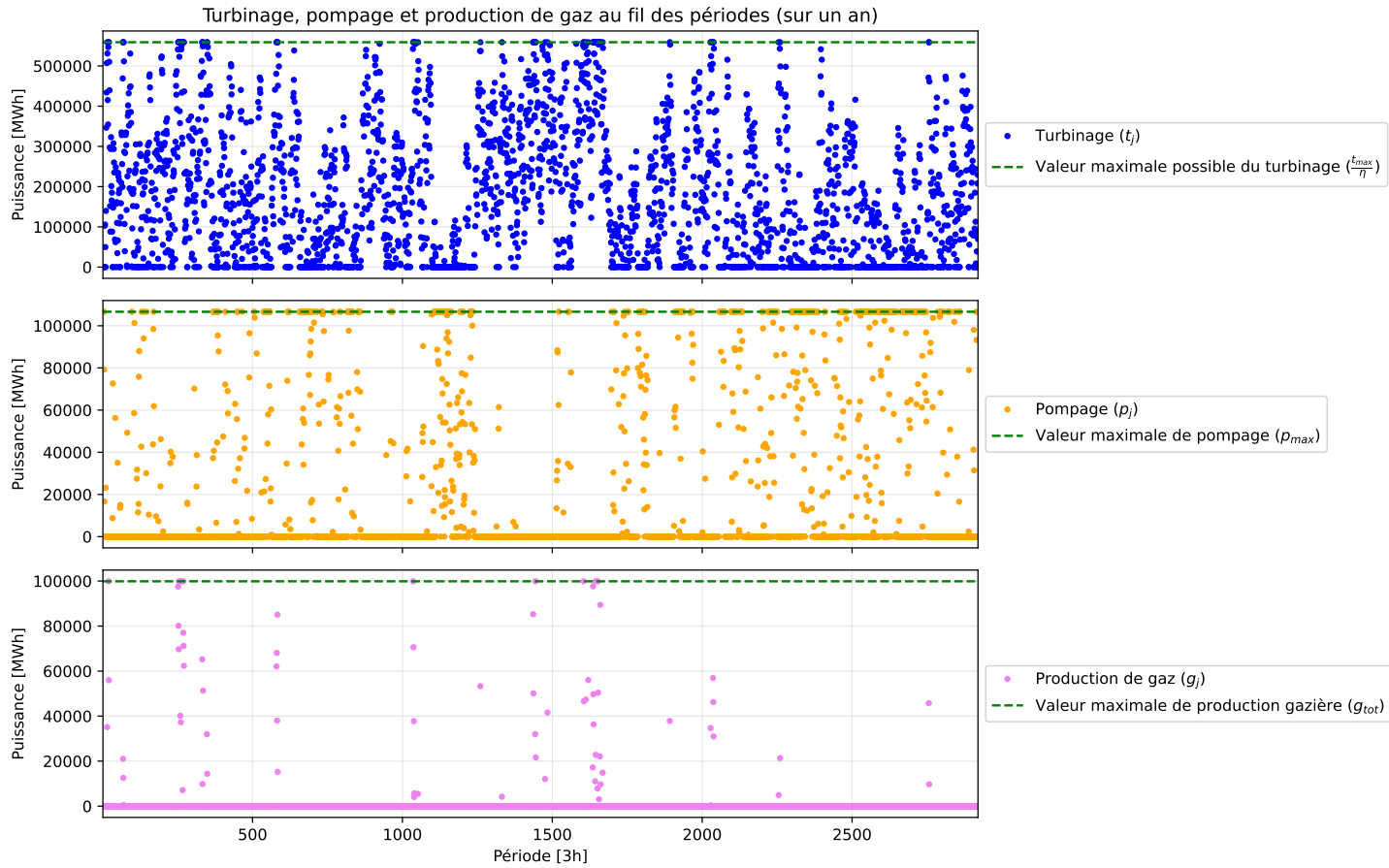


Figure 7: Représentation graphique du turbinage et du pompage influençant le niveau du bassin (24) ainsi que de la production de gaz pour le modèle de la question 6 par période de $T = 3$ heures sur un an.

(17)

Le pompage est cette fois plus utilisé que dans la question 4.

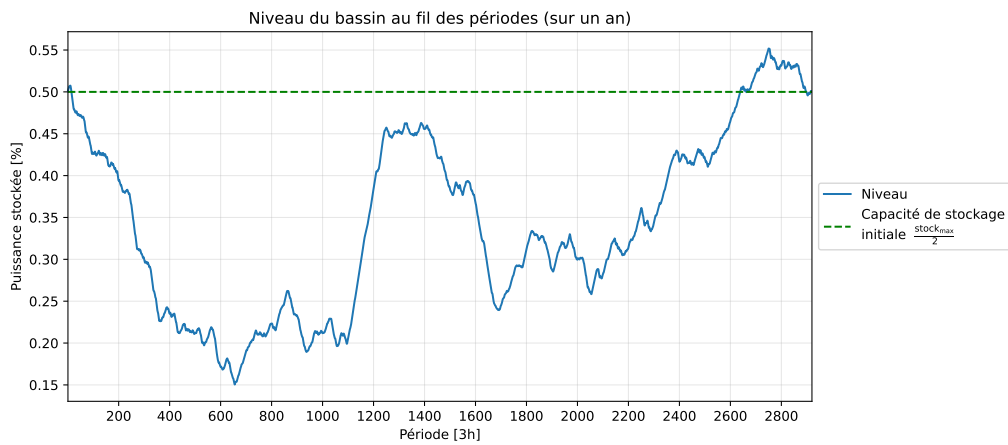


Figure 8: Représentation graphique du niveau du bassin (24) pour le modèle de la question 6 par période de $T = 3$ heures sur 1000 périodes.

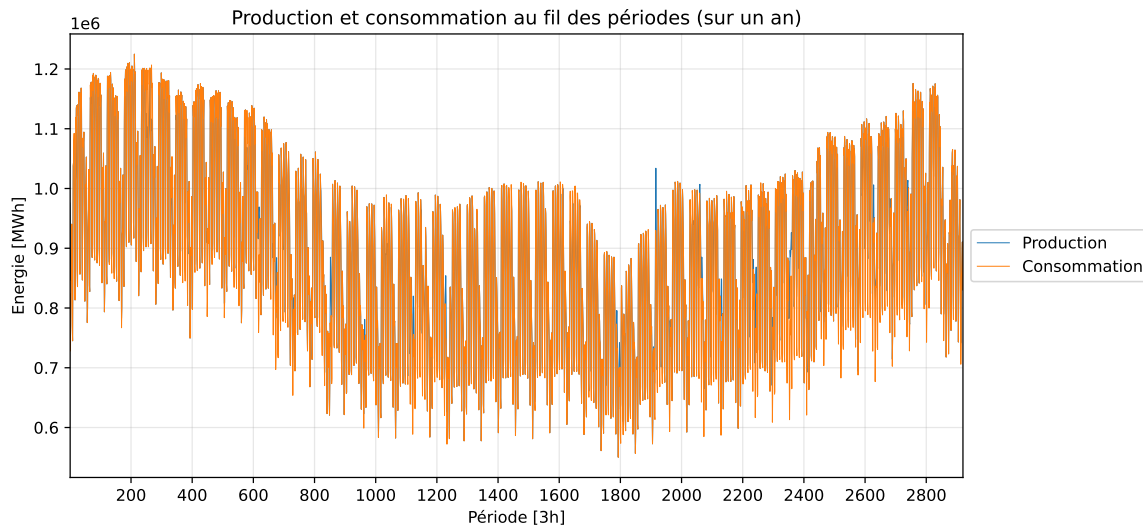


Figure 9: Représentation graphique de la production et de la consommation (en MWh) (23) pour le modèle de la question 6 par période de $T = 3$ heures sur un an.

Bien que délicat à bien illustrer, nous pouvons voir que les valeurs de production et de consommation sont assez proches.