Question 4A

Puisque nous nous intéressons seulement aux bilans de productions/consommations et du niveau du bassin sur des périodes de T[h], nous pouvons exprimer toutes nos variables en fonction de cette période.
Voici deux tableaux reprenant les notations principales utilisées dans cette seconde partie [1] :

Nom	Signification
c_i	Capacité éolienne installée sur le i$^{\text{ème}}$ site
t_j	Puissance de turbinage choisie durant la j$^{\text{ème}}$ période
p_j	Puissance de pompage choisie durant la j$^{\text{ème}}$ période

Table 1: Table des notations des variables de décisions utilisées pour le modèle de la question 4.

Nom	Signification
n	Nombre de sites éoliens
m	Nombre de périodes de T[h] dans une année
$e_i(j)$	Rendement éolien du i$^{\text{ème}}$ site durant la j$^{\text{ème}}$ période
a_j	Apport fluvial durant la j$^{\text{ème}}$ période
cons_j	Consommation énergétique durant la j$^{\text{ème}}$ période
t_{max}	Capacité maximale de turbinage
p_{max}	Capacité maximale de pompage
$\text{stock}_{\text{max}}$	Capacité de stockage maximale
η	Rendement de turbinage
costs	Vecteur donnant les valeurs du coût d'installation d'un site éolien (onshore/offshore) costs_i = Coût d'installation d'un site onshore si le site d'index i est onshore, et inversement.

Table 2: Table des notations des constantes utilisées pour le modèle.

Le modèle peut alors s'écrire ainsi :

$$\min_{c_i, t_j, p_j} \quad \text{costs}^{\mathsf{T}} \mathbf{c}$$

$$\text{tel que} \quad \sum_{i=0}^{n-1} c_i e_i(j) + \eta \cdot t_j - p_j \geq \text{cons}_j \quad \forall j \in \{0, \ldots, m-1\} \tag{1}$$

$$0 \leq \frac{\text{stock}_{\text{max}}}{2} + \sum_{j=0}^{k} p_j - t_j + a_j \leq \text{stock}_{\text{max}} \quad \forall k \in \{0, \ldots, m-2\} \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} p_j - t_j + a_j = 0 \tag{3}$$

$$0 \leq c_i \leq c_i^{\text{max}} \quad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\} \tag{4}$$

$$0 \leq t_j \leq T \cdot t_{\text{max}} \quad \forall j \in \{0, \ldots, m-1\} \tag{5}$$

$$0 \leq p_j \leq T \cdot p_{\text{max}} \quad \forall j \in \{0, \ldots, m-1\} \tag{6}$$

[1] Toutes autres notations utilisées dans la suite seront définies lorsque celles-ci seront introduites

La fonction objectif représente le coût d'installation des éoliennes (en tenant compte des différences entre les installations *offshore* et *onshore*). Cela revient au même que de minimiser le prix moyen de l'énergie consomée car il suffit de diviser le coût total de l'installation par la demande totale en énergie qui est une constante.
La contrainte (1) indique qu'il faut satisfaire la demande en énergie en fin de chaque période de T[h] en tenant compte de la production éolienne ainsi que des opérations de turbinage/pompage.
La contrainte (2) fait le bilan lié aux variations des opérations de turbinage/pompage décidées et de l'apport fluvial naturel depuis le temps $t = 0$ jusqu'en tout temps $t = k$ afin de calculer l'augmentation/la diminution du niveau de l'eau dans le bassin.
La formalisation peut s'obtenir en sachant que le niveau initial de notre bassin est à $0.5 \times \text{stock}_{\text{max}}$, puis que le niveau du bassin au prochain temps est le niveau du bassin passé plus les fluctuations à la période j, pompage - turbinage + apport fluvial, qui est donné plus formellement par $\text{bassin}_{j+1} = \text{bassin}_j + p_j - t_j + a_j$, donc en développant cette relation de récurrence, nous obtenons bien le niveau de notre bassin pour toute période $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ en fonction de nos variables, et en sachant que le niveau du bassin doit revenir à son niveau initial, à la fin de la période considérée, il y a une contrainte "en moins" pour (2) qui apparaît dans (3).
La contrainte (3) indique que le niveau final du bassin doit revenir au même niveau qu'initialement. Autrement dit, les opérations de turbinage/pompage et l'apport fluvial doivent se sommer à 0 à la fin de la dernière période.
Les contraintes (4), (5) et (6) indiquent respectivement les bornes sur les capacités éoliennes maximales installables sur chaque site, les capacités maximales de turbinages et les capacités maximales de pompages pour des périodes de T[h], regroupées au niveau européen, bien entendu.

Question 4B

Suite à l'implémentation de notre problème d'optimisation sur le notebook Jupyter, nous obtenons un coût minimum moyen (car nous avons simplement divisé par le nombre de périodes ($8960/3 = 2920$ périodes de 3 heures)) par période qui est d'environ $67.947.438,96$€, nous pouvons obtenir le coût total sur un an qui est donné par $67.947.438,96 * 2.920$€$=$ $198.406.521.770,2$€, nous avons alors finalement en divisant par la demande totale, un coût de $76,6$€/MWh [2].

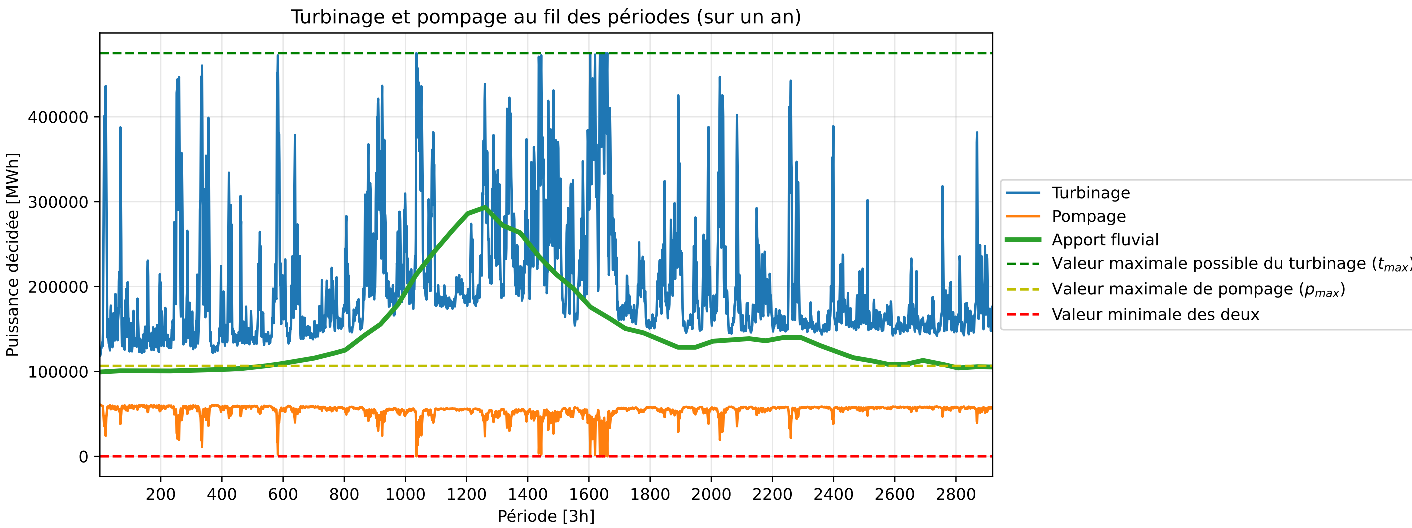

Figure 1: Test

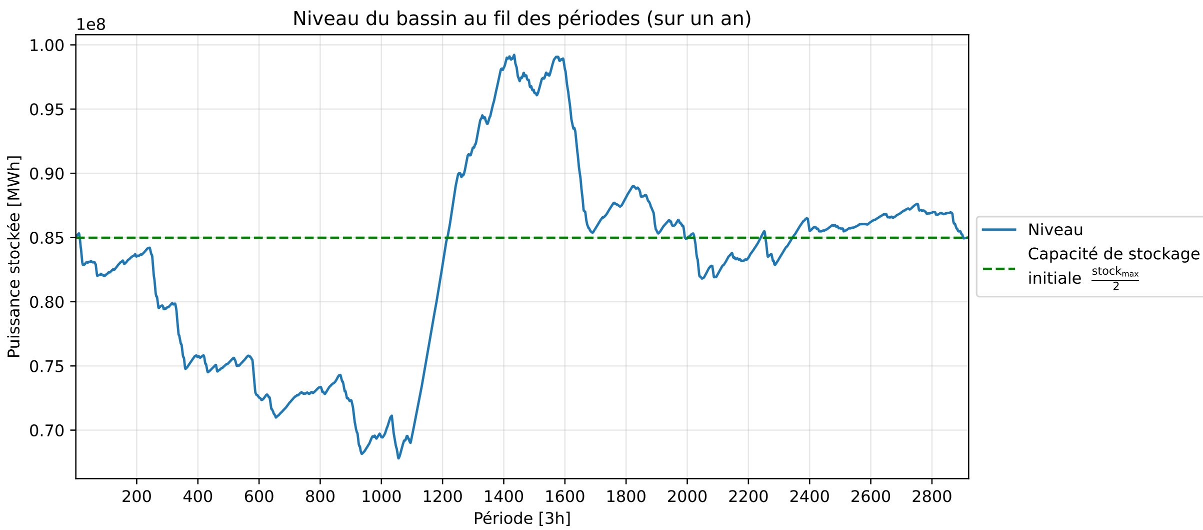

Figure 2: Test

[2] C'est une valeur qui semble cohérente, surtout pour un modèle comme ici, assez libre et qui ne prétend pas refléter les réalités, le prix moyen de l'énergie par MWh en Europe actuellement est aux alentours de quelques centaines d'euros, d'après la Commission européenne : `https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Electricity_price_statistics`, consulté le 8 mai 2024 à 01h08.

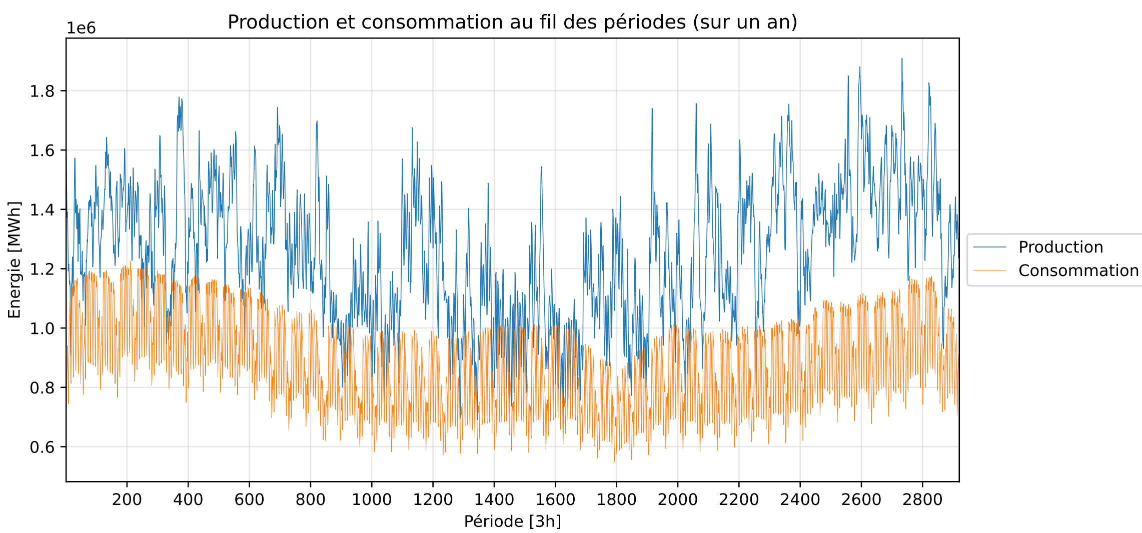

Figure 3: Test

Question 4C

Question 5

Pour résoudre ce problème, il faut introduire de nouvelles variables indiquant si nous avons installé 100%, 50% ou 0% de la capacité maximale, sur un site donné, nous pouvons voir ça comme l'initialisation de 3 variables booléennes, chacune indiquant si la proportion de sa capacité maximale a été installée, typiquement nous pouvons avoir un ensemble de variables $a, b, c \in \{0, 1\}$ tel que $a + b + c = 1$, c'est-à -dire que nous ne pourrions avoir que les configurations $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ pour une capacité choisie de (100%), (0,1,0) pour (50%) et (0,0,1) pour (0%), qui vérifient notre condition. En introduisant les 3 variables binaires pour chaque site, nous avons alors les variables suivantes.

Nom	Signification
c_{ij}	Capacité éolienne installée (soit j = 0 alors 100%, soit j = 1 alors 50% ou soit j = 2 alors 0%) sur le i$^{\text{ème}}$ site
t_j	Puissance de turbinage choisie durant la j$^{\text{ème}}$ période
p_j	Puissance de pompage choisie durant la j$^{\text{ème}}$ période

Table 3: Table des notations des variables de décisions utilisées pour le modèle de la question 5.

Pour faire le rapprochement avec le modèle de notre question 4, vu que notre variable c_i de cette question parcourait les valeurs de 0 à c_i^{max}, nous pouvons logiquement remplacer la variable c_i de ce modèle par $1c_i^{max}c_{i0} + \frac{c_i^{max}}{2}c_{i1} + 0c_i^{max}c_{i2}$, qui vaudrait bien une de nos trois valeurs sélectionnées car il n'y aura qu'une variable non nulle.
Le modèle peut alors s'écrire ainsi :

$$\min_{c_{ij}, t_j, p_j} \quad \text{costs}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} c_0^{max}c_{00} + \frac{c_0^{max}}{2}c_{01} \\ \vdots \\ c_{(n-1)}^{max}c_{(n-1)0} + \frac{c_{(n-1)}^{max}}{2}c_{(n-1)1} \end{pmatrix}$$

$$\text{tel que} \quad \sum_{i=0}^{n-1}(c_i^{max}c_{i0} + \frac{c_i^{max}}{2}c_{i1})e_i(j) + \eta \cdot t_j - p_j \geq \text{cons}_j \quad \forall j \in \{0, \ldots, m-1\} \tag{7}$$

$$0 \leq \frac{\text{stock}_{\text{max}}}{2} + \sum_{j=0}^{k} p_j - t_j + a_j \leq \text{stock}_{\text{max}} \quad \forall k \in \{0, \ldots, m-2\} \tag{8}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} p_j - t_j + a_j = 0 \tag{9}$$

$$c_{i0} + c_{i1} + c_{i2} = 1 \quad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\} \tag{10}$$

$$0 \leq t_j \leq T \cdot t_{\text{max}} \quad \forall j \in \{0, \ldots, m-1\} \tag{11}$$

$$0 \leq p_j \leq T \cdot p_{\text{max}} \quad \forall j \in \{0, \ldots, m-1\} \tag{12}$$