

$$\begin{aligned}
&P(x \leqslant x) \\
&= P(\ln y \leq x) \\
&= P(y \leqslant e^x) \\
&= \int_0^{e^x} e^{-y} dy \\
&= F_y(e^x) \\
&f_y(e^x) \times e^x = e^{-e^x} \times e^x \\
&f_X(x) \begin{cases} e^{-e^x}(e^x) & \text{for all } x \in \mathbb{R} \end{cases}
\end{aligned}$$