$$x = \ln Y$$

$$FX(x) = P(x \le x) = P(\ln Y \le x)$$

$$= P(0 < Y \le e^x)$$

$$= \int_0^{e^x} e^{-y} dy$$

$$= [-e^{-y}]_0^{e^x}$$

$$= -e^{-e^x} - (-e^{-0})$$

$$= -e^{-e^x} - (-1)$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, x - 1 - e^{-e^x} \\ 1 - e^x, e^x, x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} (1 - e^{-e^x})$$

$$= \frac{d}{dx} (1) - \frac{d}{dx} (e^{-e^x})$$

$$= \frac{d}{dx} (-e^x)^x \cdot -e^{-e^x}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} e^x \cdot e^{-e^x}, & x \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{otherwbe} \end{cases}$$