

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа

Часть 1

Вариант 82

Студент
Ахроров Кароматуллохон Фирдавсович
Р3110

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2024г

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $3 \leq |x_2x_10 - x_3x_4x_5| \leq 6$ и неопределенное значение при $|x_2x_10 - x_3x_4x_5| = 2$.

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_2x_10	$x_3x_4x_5$	x_2x_10	$x_3x_4x_5$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0	2	0	2	d
3	0	0	0	1	1	0	3	0	3	1
4	0	0	1	0	0	0	4	0	4	1
5	0	0	1	0	1	0	5	0	5	1
6	0	0	1	1	0	0	6	0	6	1
7	0	0	1	1	1	0	7	0	7	0
8	0	1	0	0	0	4	0	4	0	1
9	0	1	0	0	1	4	1	4	1	1
10	0	1	0	1	0	4	2	4	2	d
11	0	1	0	1	1	4	3	4	3	0
12	0	1	1	0	0	4	4	4	4	0
13	0	1	1	0	1	4	5	4	5	0
14	0	1	1	1	0	4	6	4	6	d
15	0	1	1	1	1	4	7	4	7	1
16	1	0	0	0	0	2	0	2	0	d
17	1	0	0	0	1	2	1	2	1	0
18	1	0	0	1	0	2	2	2	2	0
19	1	0	0	1	1	2	3	2	3	0
20	1	0	1	0	0	2	4	2	4	d
21	1	0	1	0	1	2	5	2	5	1
22	1	0	1	1	0	2	6	2	6	1
23	1	0	1	1	1	2	7	2	7	1
24	1	1	0	0	0	6	0	6	0	1
25	1	1	0	0	1	6	1	6	1	1
26	1	1	0	1	0	6	2	6	2	1
27	1	1	0	1	1	6	3	6	3	1
28	1	1	1	0	0	6	4	6	4	d
29	1	1	1	0	1	6	5	6	5	0
30	1	1	1	1	0	6	6	6	6	0
31	1	1	1	1	1	6	7	6	7	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 x_5$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$			$Z(f)$
m_4	00100	✓	m_2-m_3	0001X		$m_2-m_6-m_{10}-m_{14}$	0XX10		0001X
m_8	01000	✓	m_4-m_5	0010X	✓	$m_{16}-m_{20}-m_{24}-m_{28}$	1XX00		0111X
m_2	00010	✓	m_4-m_6	001X0	✓	$m_4-m_5-m_{20}-m_{21}$	X010X		0XX10
m_{16}	10000	✓	m_2-m_6	00X10	✓	$m_4-m_6-m_{20}-m_{22}$	X01X0		1XX00
m_3	00011	✓	m_8-m_9	0100X	✓	$m_8-m_9-m_{24}-m_{25}$	X100X		X010X
m_5	00101	✓	m_8-m_{10}	010X0	✓	$m_8-m_{10}-m_{24}-m_{26}$	X10X0		X01X0
m_6	00110	✓	m_2-m_{10}	0X010	✓	$m_{20}-m_{21}-m_{22}-m_{23}$	101XX		X100X
m_9	01001	✓	$m_{16}-m_{20}$	10X00	✓	$m_{24}-m_{25}-m_{26}-m_{27}$	110XX		X10X0
m_{24}	11000	✓	$m_{16}-m_{24}$	1X000	✓				101XX
m_{10}	01010	✓	m_4-m_{20}	X0100	✓				110XX
m_{20}	10100	✓	m_8-m_{24}	X1000	✓				
m_{21}	10101	✓	$m_{10}-m_{14}$	01X10	✓				
m_{22}	10110	✓	m_6-m_{14}	0X110	✓				
m_{25}	11001	✓	$m_{20}-m_{21}$	1010X	✓				
m_{26}	11010	✓	$m_{20}-m_{22}$	101X0	✓				
m_{14}	01110	✓	$m_{24}-m_{25}$	1100X	✓				
m_{28}	11100	✓	$m_{24}-m_{26}$	110X0	✓				
m_{15}	01111	✓	$m_{24}-m_{28}$	11X00	✓				
m_{23}	10111	✓	$m_{20}-m_{28}$	1X100	✓				
m_{27}	11011	✓	m_5-m_{21}	X0101	✓				
			m_6-m_{22}	X0110	✓				
			m_9-m_{25}	X1001	✓				
			$m_{10}-m_{26}$	X1010	✓				
			$m_{14}-m_{15}$	0111X					
			$m_{22}-m_{23}$	1011X	✓				
			$m_{21}-m_{23}$	101X1	✓				
			$m_{26}-m_{27}$	1101X	✓				
			$m_{25}-m_{27}$	110X1	✓				

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы															
		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
		1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
		3	4	5	6	8	9	15	21	22	23	24	25	26	27		
	0001X	X															
	0111X							X									
A	0XX10				X												
	1XX00											X					
	X010X		X	X					X								
B	X01X0		X		X					X							
	X100X					X	X					X	X				
	X10X0					X						X		X			
	101XX								X	X	X						
	110XX											X	X	X	X		

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0001X \\ X010X \\ X100X \\ 0111X \\ 101XX \\ 110XX \end{array} \right\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

		0-кубы
		0
		0
		1
		1
Простые импликанты		0
		6
A	0XX10	X
B	X01X0	X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = A \vee B$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{l} T \\ A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0001X \\ X010X \\ X100X \\ 0111X \\ 101XX \\ 110XX \\ 0XX10 \end{array} \right\} \quad C_2 = \left\{ \begin{array}{l} T \\ B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0001X \\ X010X \\ X100X \\ 0111X \\ 101XX \\ 110XX \\ X01X0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} S_1^a = 23 \\ S_1^b = 30 \end{array} \quad \begin{array}{l} S_2^a = 23 \\ S_2^b = 30 \end{array}$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 0001X \\ X010X \\ X100X \\ 0111X \\ 101XX \\ 110XX \\ 0XX10 \end{array} \right\}$$

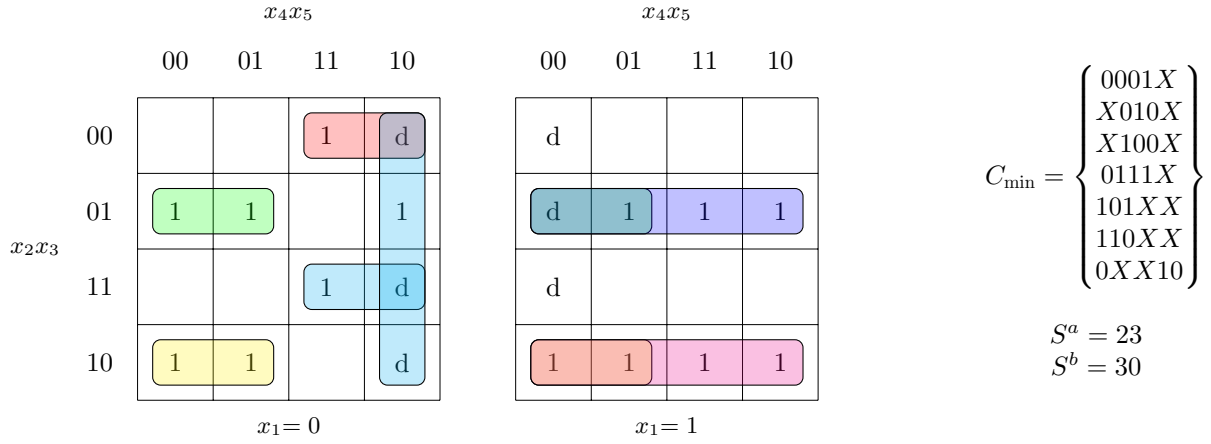
$$\begin{array}{l} S^a = 23 \\ S^b = 30 \end{array}$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_4 \overline{x_5}$$

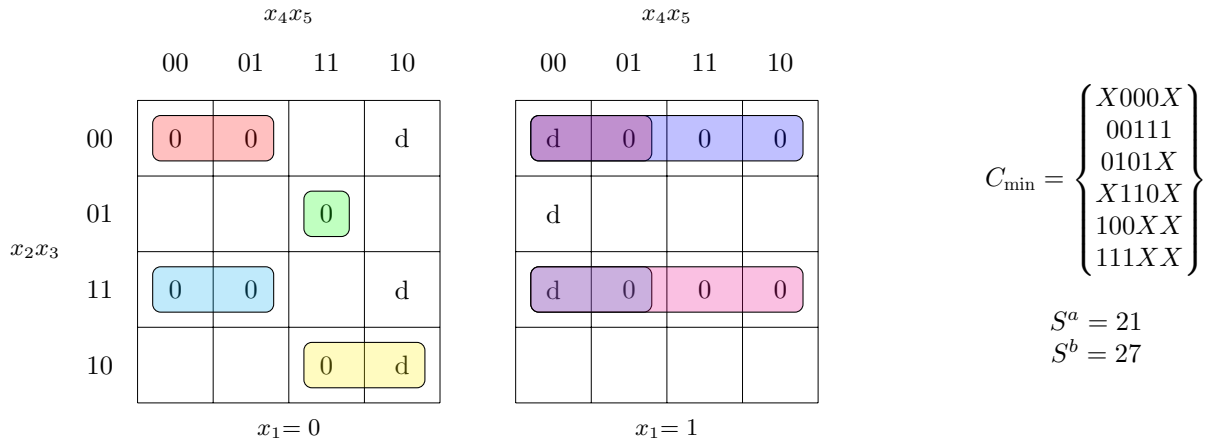
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_4 \overline{x_5}$$

Определение МКНФ



$$f = (x_2 \vee x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_4 \overline{x_5} \quad S_Q = 30 \quad \tau = 2$$

$$f = x_2 \overline{x_3} (x_1 \vee \overline{x_4}) \vee \overline{x_1} x_4 (\overline{x_5} \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_2 x_3) \vee \overline{x_2} x_3 (x_1 \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 23 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = \overline{x_1} x_4$$

$$\overline{\varphi} = x_1 \vee \overline{x_4}$$

$$f = x_2 \overline{x_3} \overline{\varphi} \vee \varphi (\overline{x_5} \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_2 x_3) \vee \overline{x_2} x_3 \overline{\varphi} \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_2 \vee x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \\ (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \quad S_Q = 27 \quad \tau = 2$$

$$f = (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_1} x_4) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_4) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 23 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = \overline{x_1} x_4$$

$$\overline{\varphi} = x_1 \vee \overline{x_4}$$

$$f = (x_2 \vee x_3 \vee \varphi) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \varphi) (\overline{\varphi} \vee \overline{x_2} \vee x_3) (\overline{\varphi} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 20 \quad \tau = 4$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_2 \overline{x_3} \overline{\varphi} \vee \varphi (\overline{x_5} \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_2 x_3) \vee \overline{x_2} x_3 \overline{\varphi} \quad (S_Q = 21, \tau = 4)$$

$$\varphi = \overline{x_1} x_4$$

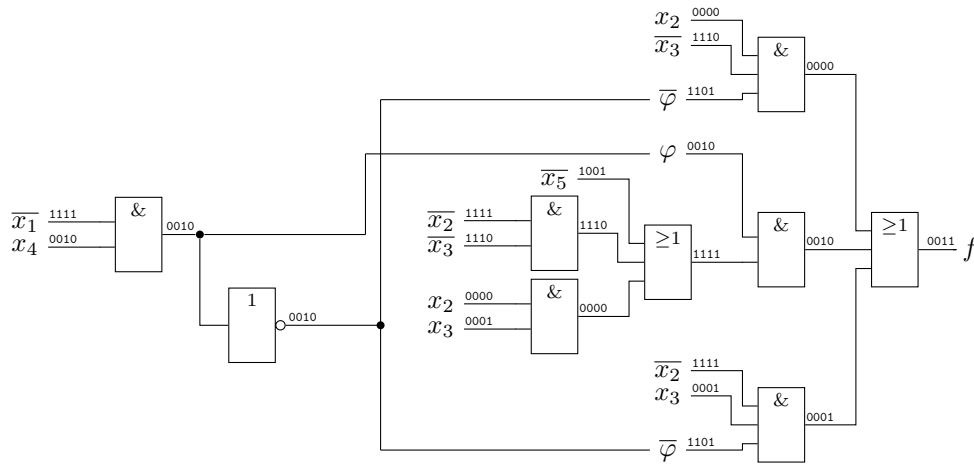
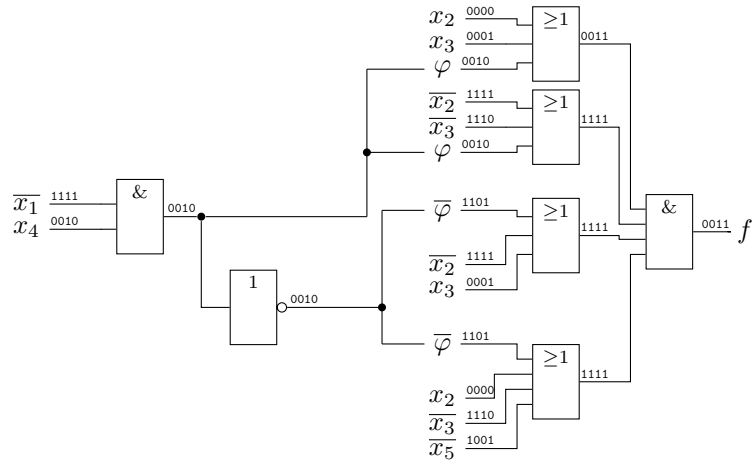


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_2 \vee x_3 \vee \varphi) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \varphi) (\overline{\varphi} \vee \overline{x_2} \vee x_3) (\overline{\varphi} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) \quad (S_Q = 20, \tau = 4)$$

$$\varphi = \overline{x_1} x_4$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x_2 x_3 \overline{\varphi} \varphi x_5 \overline{x_2 x_3} \overline{x_2 x_3} \overline{x_2 x_3} \overline{\varphi}}}}}} \quad (S_Q = 28, \tau = 8)$$

$$\varphi = \overline{x_1} x_4$$

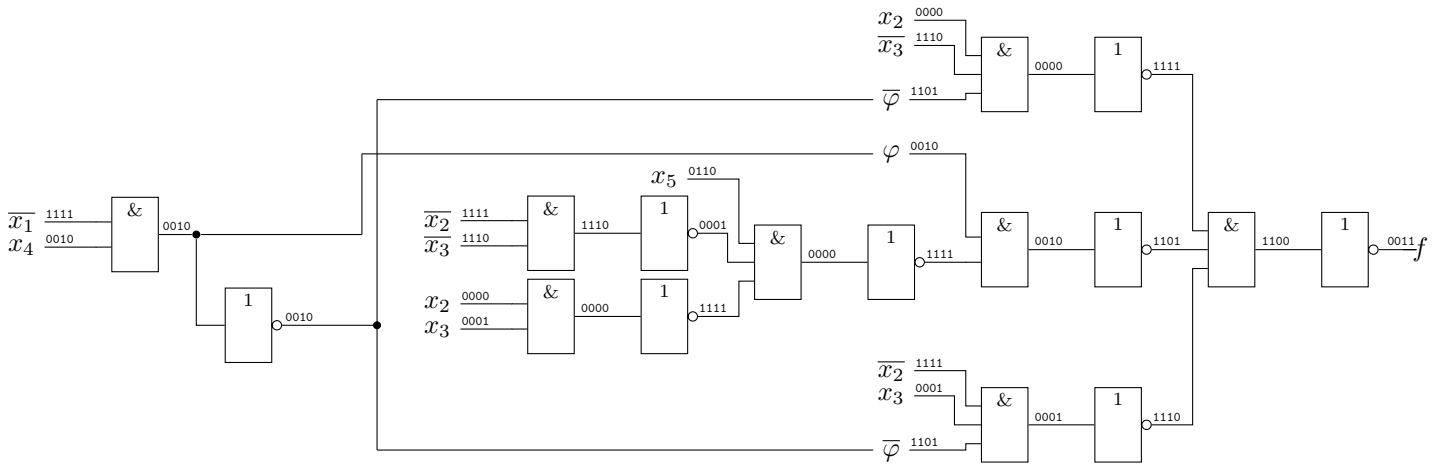
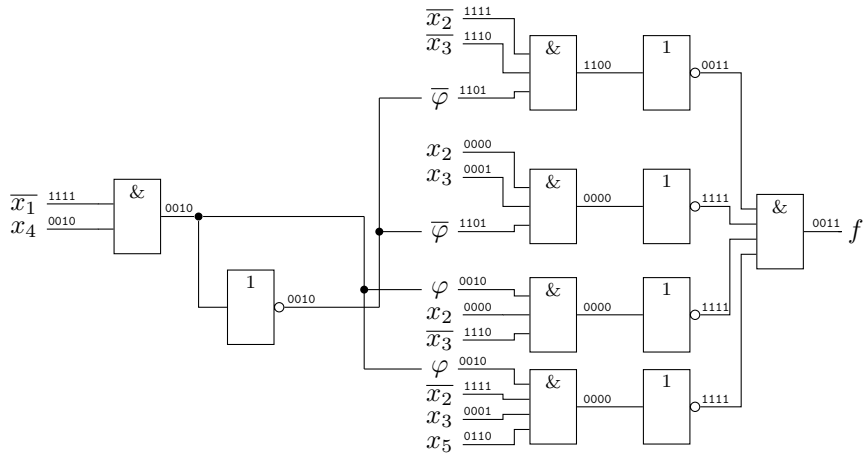


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_2} \overline{x_3} \overline{\varphi} x_2 x_3 \overline{\varphi} \varphi x_2 \overline{x_3} \overline{\varphi} x_2 x_3 x_5} \quad (S_Q = 24, \tau = 5)$$

$$\varphi = \overline{x_1} x_4$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1} x_4 x_2 \overline{x_3} \overline{x_2} x_3 \overline{x_1} x_4 x_5 \overline{x_2} x_3 x_2 x_3}} \quad (S_Q = 28, \tau = 8)$$

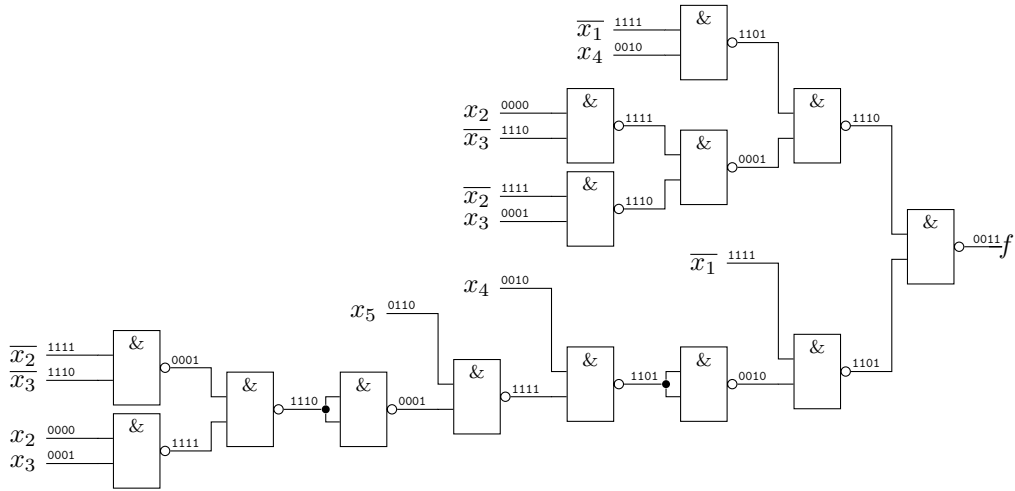


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{x_1} x_4} \overline{\overline{x_2} x_3} \overline{\overline{x_2} x_3} \overline{\overline{x_1} x_4} \overline{\overline{x_2} x_3} \overline{\overline{x_2} x_3} x_5 \quad (S_Q = 30, \tau = 9)$$

