Теоретические основы булевой алгебры

Булева алгебра – раздел математической логики, в которой все переменные принимают только два значения 0 или 1, а функция, построенная на их основе, также принимает значения 0 (ложь) или 1 (истина) и называется **булевой функцией**. Название этого раздела математической логики получило по имени ее основоположника Джорджа Буля (1815-1864гг.). Основные операции, которые можно выполнять над булевыми переменными, представлены ниже: отрицание, логическое сложение (дизъюнкция) и логическое умножение (конъюнкция).

a	0	1
$\neg a$	1	0

Отрицание ($\neg$)

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Дизъюнкция ($\vee$)

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Конъюнкция ($\wedge$)

Приоритеты операций в выражениях следующие: вначале выполняются слева направо одноместные операции отрицания, затем – двуместные операции умножения, а затем – сложения. Порядок выполнения операций можно изменить с помощью скобок.

Основные аксиомы (законы) булевой алгебры (здесь a, b, c - булевы переменные):

1. Коммутативность: $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$.
2. Ассоциативность: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge \mathrm{c}) = (a \wedge b) \wedge \mathrm{c}$.
3. Дистрибутивность: $a \wedge (b \vee \mathrm{c}) = (a \wedge b) \vee (a \wedge \mathrm{c})$, $a \vee (b \wedge \mathrm{c}) = (a \vee b) \wedge (\mathrm{a} \vee \mathrm{c})$.
4. Тождества: $a \vee 0 = a$, $a \wedge 1 = a$.
5. Дополнения: $a \vee \neg a = 1$, $a \wedge \neg a = 0$.

Для произвольных булевых переменных a, b **верны следующие соотношения**:

1. Законы идемпотентности: $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$.
2. Свойства констант: $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 0 = 0$.
3. Законы поглощения: $a \vee (a \wedge \mathrm{b}) = a$, $a \wedge (a \vee \mathrm{b}) = a$.
4. Закон двойного отрицания (закон инволюции): $\neg(\neg a) = a$.
5. Законы де Моргана: $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$, $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.

Всякую булеву функцию от n переменных можно задать таблицей из 2^n строк, в каждой строке которой записываются различные значения переменных.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется булева функция, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций (логической суммой, в которой каждое слагаемое представляет собой умножение булевых переменных и (или) их отрицаний). Аналогично **конъюнктивная нормальная форма** (КНФ) – это конъюнкция элементарных дизъюнкций (логическое произведение, в котором каждый множитель является суммой булевых переменных и (или) их отрицаний. **Совершенная ДНФ** (СДНФ) – это формула булевой функции, в которой все дизъюнктивные члены попарно различны.

Пример 1. Построить таблицу истинности для следующей булевой функции $f(a,b,c) = a \wedge b \wedge c \vee a \wedge \neg b \wedge \neg c \vee \neg a \wedge b \wedge c \vee \neg a \wedge \neg b \wedge c$

Решение.

Т.к. задана функция от трех переменных, то количество строк в таблице равно $2^3 = 8$.
Функция записана в ДНФ, в которой имеется сумма 4-х элементарных коньюнкций.

№	a	b	c	$a \wedge b \wedge c$	$a \wedge \neg b \wedge \neg c$	$\neg a \wedge b \wedge c$	$\neg a \wedge \neg b \wedge c$	$f(a,b,c)$
1	**1**	**1**	**1**	1	0	0	0	**1**
2	**1**	**1**	**0**	0	0	0	0	**0**
3	**1**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**
4	**1**	**0**	**0**	0	1	0	0	**1**
5	**0**	**1**	**1**	0	0	1	0	**1**
6	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**0**
7	**0**	**0**	**1**	0	0	0	1	**1**
8	**0**	**0**	**0**	0	0	0	0	**0**

Пример 2. Привести в СДНФ следующую булеву функцию
$f(a,b,c,d,e) = (a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d) \wedge (c \vee d) \wedge (c \vee e)$

Решение.

1). Воспользуемся законом дистрибутивности $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c)$ и приведем формулу к следующему виду: $f(a,b,c,d,e) = (c \vee a \wedge b \wedge d \wedge e) \wedge (d \vee a \wedge b)$.

2). Раскроем скобки: $f(a,b,c,d,e) = c \wedge d \vee a \wedge b \wedge c \vee a \wedge b \wedge d \wedge e \vee a \wedge b \wedge d \wedge e$.

3). Сократим последний член: $f(a,b,c,d,e) = c \wedge d \vee a \wedge b \wedge c \vee a \wedge b \wedge d \wedge e$.

Ответ: $f(a,b,c,d,e) = c \wedge d \vee a \wedge b \wedge c \vee a \wedge b \wedge d \wedge e$

Запишем ответ в форме электронного стенда: $c * d + a * b * c + a * b * d * e$