第六章

1. 设随机过程 $X(t)=\sin \xi t, -\infty<t<+\infty$, 其中 $\xi \sim U(0,2\pi)$, 试证:

(1) $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是平稳随机序列;

(2) $\{X(t), t\geq 0\}$ 不是平稳随机过程.

习题一　　第六章

$$x(n)=\sin \xi n \quad n=1,2\ldots\ldots$$

$$m_X(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin \xi n d\xi=0$$

$$R_X(n,m)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin \xi n\sin \xi m d\xi$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos \xi(m-n)-\cos \xi(m+n)\right]d\xi$$

当 $m=n$ 时 $\quad R_X(n,m)=\frac{1}{2}$

当 $m\neq n$ 时为 0

$$R(n-m)=R(t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & m-n=0\\ 0 & m-n\neq 0\end{cases} \qquad E\left[X^2(n)\right]=\frac{1}{2}<+\infty$$

故 $\{X(n)\}$ 是宽平稳过程

$$X(t)=\sin \xi t$$

$$m_X(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin \xi t\, d\xi=\frac{1-\cos 2\pi t}{2\pi t}$$

$$R_X(t,t+\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin \xi t\sin \xi(t+\tau)d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin 2\pi t}{t}-\frac{\sin(4\pi t+2\pi t)}{(2t+T)}\right)$$ 与 t 有关

$\{X(t), t\geq o\}$ 不是平稳随机过程

2. 设随机过程 $X(t)=\xi\cos(\beta t+\eta), -\infty<t<+\infty$, 其中 $\xi\sim N(0,1)$, $\eta\sim U(0,2\pi)$, ξ 与 η 相互独立, β 为正常数. 试证: 随机过程 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 为平稳过程, 且具有关于均值的均方遍历性.

习题二

2. 设随机过程 $X(t)=\xi\cos(\beta t+\eta)$，$-\infty<t<+\infty$，其中 $\xi\sim N(0,1)$，$\eta\sim U(0,2\pi)$，ξ 与 η 相互独立，β 为正常数. 试证：随机过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 为平稳过程，且具有关于均值的均方遍历性.

$$m_X(t)=E(\xi)E[\cos(\beta t+\eta)]=0$$

见p. 64例6.

$$R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=\frac{1}{2}E(\xi^2)\cos\beta\tau=\frac{1}{2}\cos\beta\tau=R(t)$$

$$E(X^2)=R(0)=\frac{1}{2}<+\infty$$

$X(t)$为平稳过程

均值的均方遍历性

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\tfrac{1}{2}\cos\beta\tau\, d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{(1-\cos 2T\beta)}{2T\beta^2}\to 0$$

具有均值得均方遍历性

习题三

3. 设 $X(t)=\xi\cos(\beta t+\eta)$，$-\infty<t<+\infty$，其中 $\xi\sim U(-3,3)$，$\eta\sim U(0,2\pi)$，ξ 与 η 相互独立，β 为正常数. 试证：随机过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 为平稳过程，且具有关于均值的均方遍历性.

$$m_X(t)=E(\xi)E[\cos(\beta\tau+\eta)]=0$$

$$R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=E(\xi^2)E[\cos(\beta\tau+\eta)\cos(\beta t+\beta\tau+\eta)]$$

$$=\frac{1}{2}E(\xi^2)E[\cos\beta\tau+\cos R\beta t+2\eta+\beta\tau]=\frac{1}{2}E(\xi^2)\cos\beta\tau$$

ξ服从均匀分布

$$E(\xi)=0\qquad D(\xi)=3\qquad E(\xi^2)=3$$

$$R(\tau)=\frac{3}{2}\cos\beta\tau\qquad E(X^2)=R(0)=\sigma^2<+\infty$$

$X(t)$为平稳过程

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\frac{3}{2}\cos\beta\tau d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{3/2}{T}\frac{(1-\cos 2T\beta)}{2T\beta^2}\to 0$$

$\therefore$ 均方遍历性

习题四

4. 设 $X(t)=\xi\cos\beta t+\eta\sin\beta t$，其中 ξ 和 η 互不相关，都服从 $N(0,\sigma^2)$，证明：随机过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 为严平稳正态过程，并写出 n 维概率密度和特征函数(矩阵形式).

$$m_X(t)=E(\xi)E[\cos\beta t]+E(\eta)E[\sin\beta t]=0$$

$$R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$=E[(\xi\cos\beta t+\eta\sin\beta t)(\xi\cos\beta(t+\tau)+\eta\sin\beta(t+\tau))]$$

$$=E[\xi^2]E[\cos\beta t\cos\beta(t+\tau)]+E[\eta^2]E[\sin\beta t\sin\beta(t+\tau)]$$

$$=\sigma^2\cos\beta\tau=R(\tau)$$

正态性的证明见p. 76例1

$$E(X^2)=R(0)=\frac{1}{2}<+\infty$$

$X(t)$为平稳过程 (宽平稳正态过程)

$\Rightarrow$ 严平稳过程

均值的均方遍历性

习题五

5. 设 $X(t)=\xi\cos(\omega_0 t+\eta)$，$-\infty<t<+\infty$ 其中 ω_0 为正常数，ξ 和 η 相互独立，$\eta\sim U(0,2\pi)$，ξ 服从瑞利分布，其概率密度

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

$$m_x(t)=E[X(t)]=E(\xi)E[\cos(\omega_0 t+\eta)]=0$$

$$R_x(t,t+\tau)=E(\xi^2)E[\cos(\omega_0 t+\eta)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\eta)]$$

$$=\frac{1}{2}E(\xi^2)E[\cos\omega_0\tau+\cos(2\omega_0 t+2\eta+\omega_0\tau)]$$

$$=\frac{1}{2}E[\xi^2]\cos\omega_0\tau\sim R(\tau)$$

瑞利分布 $\quad E(X)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \qquad D(X)=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$

$$E(\xi^2)=D(X)+[E(X)]^2=2\sigma^2$$

$$E(X^2)=R(0)=\sigma^2<+\infty$$

随机过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$为平稳过程

习题六

6. 设 $X(t)=a\cos(\xi t+\eta), -\infty<t<+\infty$，其中 a 为常数，ξ 与 η 相互独立，$\eta\sim U(0,2\pi)$，ξ 服从柯西分布，其概率密度

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty<t<+\infty$$

试证，随机过程 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 为平稳过程.

$$m_x(t)=aE[\cos(\xi t+\eta)]=0$$

$$R(t,t+\tau)=a^2E[\cos(\xi t+\eta)\cos(\xi t+\xi\tau+\eta)]=\frac{a^2}{2}E[\cos\xi\tau]$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\tau\frac{1}{\lambda(1+x^2)}dx=R(\tau)=\frac{a^2}{2}e^{-|\tau|}$$

$$E[X^2(t)]=R(0)=\frac{a^2}{2}<+\infty$$

随机过程 $\{X(t,-\infty<t<+\infty)\}$ 为平稳过程

习题七

7. 设 $X(t)=g(t+\xi), -\infty<t<+\infty$，其中 $g(\cdot)$ 是周期为 T 的函数，$\xi\sim U(0,T)$，称 $g(t+\xi)$ 为随机相位周期过程，试证：随机相位周期过程为平稳过程.

$$m_x(t)=\frac{1}{T}\int_0^t g(t+\xi)d\xi$$

令 $x=t+\xi$　　$m_x(t)=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}g(x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx=C$

$R(t,t+\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T g(t+\xi)g(t+\xi+\tau)dt$　　令 $x=t+\xi$

$$=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}g(x)g(x+\tau)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)g(x+\tau)dx=R(\tau)$$

$$E[X^2(t)]=\frac{1}{T}\int_0^T g^2(x)dx<+\infty$$

随机相位周期过程为平　稳过程

习题八

8. 证明随机过程 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$

$$X(t)=\xi\cos\omega_0 t+\eta\sin\omega_0 t, -\infty<t<+\infty$$

是平稳过程的充要条件是 ξ 与 η 是互不相关的随机变量，且 $E(\xi)=E(\eta)=0, D(\xi)=D(\eta)=a^2$.

充分性明显！（按照前　　　述证明便可）

必要性

$E[X(t)]=E(\xi)\cos\omega_0 t+E(\eta)\sin\omega_0 t=0$

$\Rightarrow$ 对于任意的 t　$E(\xi)=E(\eta)=0$ 都成立

$R(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$

$$=E\begin{bmatrix}\xi^2\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)+\eta^2\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)\\+\xi\eta\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)+\xi\eta\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)\end{bmatrix}$$

$\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)=\frac{1}{2}[\cos\omega_0\tau-\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau)]$

$\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)=\frac{1}{2}[\cos\omega_0\tau+\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau)]$

$R(t,t+\tau)=R(\tau)$　对于任意的　t 都成立

则 $E(\xi^2)=E(\eta^2)=\sigma^2$　　$E(\xi\eta)=0$

综上所述　，ξ 与 η 互不相关的随机变量

且 $E(\xi)=E(\eta)=0$　　$D(\xi)=D(\eta)=\sigma^2$

习题九

9. 设 ω_0 为常数，ξ 为随机变量，其特征函数为 $\varphi(u)$，令

$$X(t)=\cos(\omega_0 t+\xi), -\infty<t<+\infty$$

试证：当且仅当 $\varphi(1)=\varphi(2)=0$ 时 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 为平稳过程.

$$\varphi(u)=E\left[e^{iu\xi}\right]=E(\cos u\xi+i\sin u\xi)$$

$$\varphi(1)=E[\cos\xi+i\sin\xi]=0\Rightarrow\cos\xi=\sin\xi=0$$

$$\varphi(2)=E[\cos 2\xi+i\sin 2\xi]=0\Rightarrow\cos 2\xi=\sin 2\xi=0$$

$$m_X(t)=E[\cos(\omega_0 t+\xi)]=E[\cos\omega_0 t\cos\xi-\sin\omega_0 t\sin\xi]=0$$

$$R(t,t+\tau)=E[\cos(\omega_0 t+\xi)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\xi)]$$

$$=\frac{1}{2}E[\cos\omega_0\tau+\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\xi)]=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau$$

$$=R(\tau)$$

$$E[X^2(t)]=R(0)=\frac{1}{2}<+\infty$$

当且仅当 $\varphi(1)=\varphi(2)=0$ 时 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 为平稳过程

习题十

10. 设二阶矩过程 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 有均值函数 $m_X(t)=\alpha+\beta t$，协方差函数 $C(s,t)=e^{-\lambda|t-s|}$，令

$$Y(t)=X(t+1)-X(t).$$

试证：随机过程 $\{Y(t), -\infty<t<+\infty\}$ 为平稳过程。

$$m_X(t)=\alpha+\beta t \qquad m_X(t+1)=\alpha+\beta+\beta t$$

$$m_Y(t)=E[Y(t)]=E[X(t+1)-X(t)]=\beta$$

$$m_Y(s)=\beta$$

$$R(t,t+\tau)=E[Y(t)Y(t+\tau)]=E[X(t+1)-X(t)]E[X(t+\tau+1)-X(t+\tau)]$$

$$=E[X(t+1)X(t+\tau+1)+X(t)X(t+\tau)-X(t)X(t+\tau+1)-X(t+1)X(t+\tau)]$$

$$C(s,t)=R(s,t)-m_X(t)m_X(s)$$

$$R(\tau)=e^{-\lambda|\tau|}+e^{-\lambda|\tau|}-e^{-\lambda|\tau+1|}-e^{-\lambda|\tau-1|}$$

$$E(Y^2)=R(0)=2-2e^{-\lambda}<+\infty$$

$Y(t)$为平稳过程

习题三十九

39. 设 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 是零均值，相关函数为 $R_X(\tau)$ 的正态平稳过程。证明 $\{X^2(t), -\infty<t<+\infty\}$ 为平稳过程。

$$m_X(t)=0$$

$$E[X^2(t)]=R_X(0)=C$$

$$R(t,t+\tau)=E[X^2(t)X^2(t+\tau)]$$

见 P_{45} － 例 14

$$R(t,t+\tau)=R^2(0)+2R^2(\tau)=R_Y(\tau)$$

$$E(Y^2)=R_Y(0)=3R^2(0)<+\infty$$

$\therefore \{X^2(t), -\infty<t<+\infty\}$为平稳过程