习题三.

1. 设输出概率为 q_0, q_1，有

$$(q_0\ q_1) = (p_0\ p_1)P = \left(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{5}{12}\ \frac{7}{12}\right)$$

(1) $I(x=0;y=1) = \log\dfrac{P(y=1\mid x=0)}{P(y=1)} = \log_2\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = -1.22\ \text{bit}$

$$I(x=1;Y) = \sum_j P_{1j}\log\frac{P_{1j}}{q_j}$$

$$= \frac{1}{4}\log_2\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} + \frac{3}{4}\log_2\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{12}} = 0.088\ \text{bit}$$

$$I(x=0;Y) = \sum_j P_{0j}\log\frac{P_{0j}}{q_j}$$

$$= \frac{3}{4}\log_2\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{12}} + \frac{1}{4}\log_2\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = 0.33\ \text{bit}$$

$$I(X;Y) = \sum p(x)I(x;Y) = \frac{1}{3}I(x=0;Y) + \frac{2}{3}I(x=1;Y)$$

$$= 0.169\ \text{比特/信号}$$

2. (1) $P(b_1) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

$P(b_2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{12}$

$P(b_3) = \frac{1}{8}$　　$P(b_4) = \frac{1}{8}$

$$I(a_1;Y)=\sum_y p(b_k|a_1)\log\frac{p(b_k|a_1)}{p(b_k)}$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\log_2\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{8}\log_2 1=0.108\ \text{bit}$$

$$I(a_2;Y)=\sum_y p(b_k|a_2)\log\frac{p(b_k|a_2)}{p(b_k)}$$

$$=\frac{1}{4}\log_2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\log_2\frac{6}{5}=0.028\ \text{bit}$$

$$I(X;Y)=\sum_x p(x)I(x;Y)=\frac{1}{3}\times0.108+\frac{2}{3}\times0.028$$

$$=0.055\ \text{比特/符号}$$

(2) 该信道为准对称信道，达到信道时，信道的输入分布应为等概分布，即

$$p(a_1)=1/2\ ;\quad p(a_2)=1/2.$$

对应的输出概率为

$$p(b_1)=3/8,\quad p(b_2)=3/8,\quad p(b_3)=1/8,\quad p(b_4)=1/8$$

信道容量为

$$C=H(3/8,3/8,1/8,1/8)-H(1/2,1/4,1/8,1/8)$$

$$=-2\times\frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8}-2\times\frac{1}{8}\times\log_2\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}$$
$$+2\times\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}=0.061\ \text{比特/符号}.$$

习题四.

(1)

失真矩阵 $(d_{ij})=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$;

$D_{min}=\sum_i p_i \min_j d_{ij}=0$, $D_{max}=\min_j \sum_i p_i d_{ij}=3/4$

由对称性，信道转移概率矩阵为

$$(p_{ij})=\begin{pmatrix}a&(1-a)/3&(1-a)/3&(1-a)/3\\(1-a)/3&a&(1-a)/3&(1-a)/3\\(1-a)/3&(1-a)/3&a&(1-a)/3\\(1-a)/3&(1-a)/3&(1-a)/3&a\end{pmatrix}$$

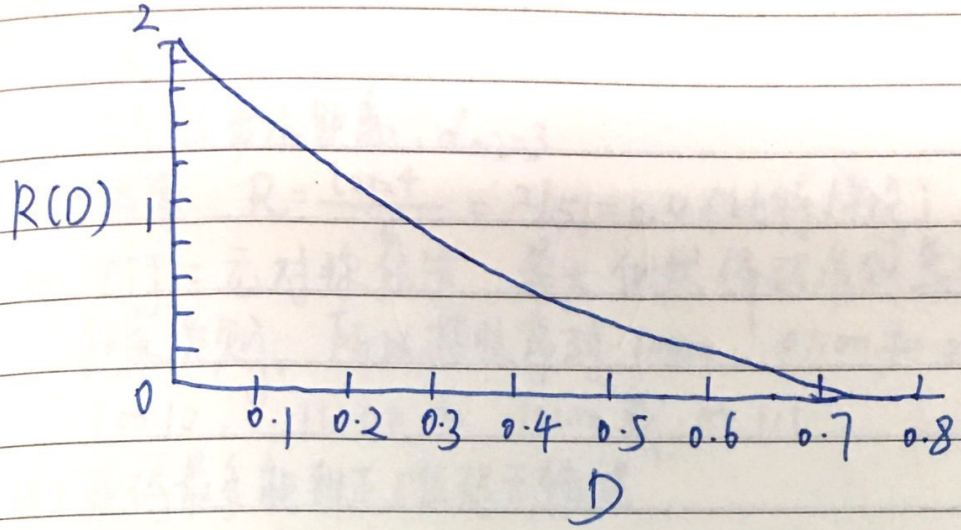
由 $p_i=1/4$, $(i=1,2,3,4)$

得: $D=\sum_i\sum_j p_i p_{ij} d_{ij}=1-a$, $\Rightarrow a=1-D$;

又 $q_j=\sum_i p_i p_{ij}=1/4$

$\therefore R(D)=H(Y)-H(1-D, D/3, D/3, D/3)=\log 4-D\log 3-H(D)$,

$0\le D\le 3/4$



2. $D_{min}=\sum_i p_i \min_j d_{ij}=0$

$D_{max}=\min_j \sum_i p_i d_{ij}=1$.

根据对称性，设信道转移概率矩阵为 $(p_{ij})=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$，

$D=\sum_i \sum_j p_i p_{ij} d_{ij}=2(1-a) \Rightarrow a=1-D/2$，

$q_j=\sum_i p_i p_{ij}=1/2 \Rightarrow R(D)=H(1/2)-H(D/2)$

$=\log 2-H(D/2)$，$0\le D\le 1$.

习题五

1. (1) 码的最小距离：$d_{min}=3$

(2) 码率：$R=\frac{\log_2 4}{5}=2/5=0.4$（比特/符号）

(3) 对于二元对称信道，最大似然译码准则等价于最小汉明距离准则。所以接收序列 10000，01100 和 00100 应分别译成：10010，11100 和 11100 或 00111.

(4) 此码最多能纠正1位码元错误.

2.

$$H=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

当 $v=0001011$ 的时候，$S=100$，可知 $e=1000000$.

所以 $C=e+v=1001011$

习题四（补充）

1. 将该准对称信道容量及其最佳输入概率分布的子矩阵.

$$\begin{pmatrix}0.5&0.3\\0.3&0.5\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}0.2&0\\0&0.2\end{pmatrix}$$

且 $n=2$，$r=2$；且有 $N_1=0.8$，$N_2=0.2$，$M_1=0.8$，$M_2=0.2$.

该信道的信道容量：

$$C=\log r-H(\text{P的矢量})-\sum_{k=1}^{2}N_k\log Y_k$$

$$=\log 2-H(0.5,0.3,0.2)-0.8\log 0.8-0.2\log 0.2$$

$$=1-1.02-0.46-0.72$$

$$=0.24\ \text{bit/符号}$$