

三、（25 分）已知下面线性规划的最优解 $\mathbf{X}^* = (4, 2)^T$,

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 \\ & s.t. \\ & \mathbf{x}_1 \leq 4 \\ & \mathbf{x}_2 \leq 3 \\ & \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 \leq \alpha \\ & \mathbf{x}_i \geq 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

- 1、用图解法说明 $\alpha = 8$;
- 2、写出 \mathbf{X}^* 处的下降可行方向;
- 3、写出其对偶线性规划;
- 4、求其对偶规划的最优解.

四、（15 分）根据最优性理论（条件），求下面问题的最优解：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ & 2x_1 + x_2 - 5 \geq 0. \end{aligned}$$

五、（15 分）用 **FR** 共轭梯度法求解 $\min \mathbf{x}_1^2 + 2\mathbf{x}_2^2$ ，从 $\mathbf{X}^0 = (5, 5)^T$ 出发进行第一次迭代后得到 $\mathbf{X}^1 = (20/9, -5/9)^T$ ，

- 1、请写出后续迭代过程;
- 2、说明 \mathbf{X}^1 处的搜索方向 \mathbf{P}^1 与牛顿方向 \mathbf{P}_N^1 共线。

六、（15 分）考虑下面约束优化问题，这里 $\mathbf{X}^0 = (2, 2)^T$ ，

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{f}(\mathbf{X}) = (\mathbf{x}_1 - 3)^2 + (\mathbf{x}_2 - 1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & 6 - \mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 \geq 0 \\ & 2 - \mathbf{x}_1 \geq 0 \end{aligned}$$

- 1、若用外部惩罚函数法求解此问题，请写出惩罚函数 $P(\mathbf{X}^m, m)$ ，不必求解；
- 2、用 *Rosen* 梯度投影法求解此问题。

