第三章几种重要的随机过程

习题一

1. 设 $X(t)=A+B\cos t$, $-\infty<t<+\infty$, 其中 A 和 B 为相互独立均服从 $N(0,1)$ 的随机变量.

(1) 证明 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 为正态过程;

(2) 求其一维、二维概率密度和一维、二维特征函数.

$$E[X(t)]=E(A)+E(B)\cos t=0$$

$$E[X(t)]=1+\cos^2 t$$

$$E[X^2(t)]=E(A^2)+E(B^2)\cos^2 t=1+\cos^2 t$$

二维分布利用 $C(t,s)$ 矩阵 C 表示求 ρ 用 ρ 表示特征函数

$$D(t)=1+\cos^2 t \qquad D(s)=1+\cos^2 s$$

$$R(s,t)=E[X(s)X(t)]=E(A^2+B^2\cos t\cos s)=1+\cos t\cos s$$

$$=C(s,t)$$

二阶协方差距 $C=\begin{pmatrix} D(s) & C(s,t) \\ C(t,s) & D(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\cos^2 s & 1+\cos t\cos s \\ 1+\cos t\cos s & 1+\cos^2 t \end{pmatrix}$

$$\rho=\frac{C(s,t)}{\sqrt{D(s)D(t)}}=\frac{1+\cos t\cos s}{\sqrt{(1+\cos^2 s)(1+\cos^2 t)}}$$

一维概率密度函数 $f(t,x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda D(t)}}\exp\left\{-\dfrac{[X-m(t)]^2}{2D(t)}\right\}$ $\quad t\in T,\ x\in R$

一维特征函数 $\varphi(t,u)=\exp\{im(t)u-\frac{1}{2}D(t)u^2\}$ $\quad t\in T,\ x\in R$

二维概率函数

$$f(s,t,x,y)=\frac{1}{2\lambda\sqrt{D(t)D(s)}\sqrt{1-\rho^2}}ex\rho\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(X-m(s))^2}{D(s)}-\frac{2\rho(X-m(s))(X-m(t))}{\sqrt{D(s)D(t)}}+\frac{(y-m(t))^2}{D(t)}\right]\right\}$$

二维特征函数

$$\varphi(s,t;u,v)=\exp\{i[um(s)+vm(t)]-\tfrac{1}{2}[u^2D(s)+2uvc(s,t)+v^2D(t)]\}$$

二维特征函数的向量形 式

$$\varphi(u)=ex\rho\{i\mu^T u-\tfrac{1}{2}u^T cu\} \qquad u=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\mu=\begin{pmatrix} m(s) \\ m(t) \end{pmatrix} \qquad \mu^T=(m(s),m(t))$$

二维概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{2\pi|c|^{1/2}}\exp\{-\tfrac{1}{2}(x-\mu)^T c^{-1}(x-\mu)\}$$

n维概率密度函数 $f(x)=f(t_1,t_2\ldots t_n,x_1,x_2\ldots x_n)$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|c|^{1/2}}\exp\{-\tfrac{1}{2}(x-\mu)^T c^{-1}(x-\mu)\}$$

n维特征函数

$$\varphi(u)=\varphi(t_1,t_2\ldots t_n;x_1,x_2\ldots x_n)=\exp\{i\mu^T u-\tfrac{1}{2}u^T cu\}$$

$$\mu=\begin{pmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ m(t_n) \end{pmatrix} \quad c=\left\{\begin{matrix} c(t_1,t_1),c(t_1,t_2)\ldots c(t_1,t_n) \\ c(t_2,t_2),\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot \\ \cdot \\ c(t_n,t_1)\ldots\ldots\ldots c(t_n,t_n) \end{matrix}\right\} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}$$

习题五

5. 设随机变量 $\xi \sim N(0,1)$，$\{W(t),t\geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，ξ 与 $W(t)$ 相互独立，设

$$X(t)=\xi t+W(t),\ t\geq 0.$$

(1) 求随机过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 的均值函数 $m_X(t)$，方差函数 $D_X(t)$，自相关函数 $R_X(s,t)$；$(s<t)$

(2) 求其一维、二维概率密度和特征函数.

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X(t_i)=\xi\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t_i+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i W(t_i)$$ 两项正态且相互独立

$X(t)$ 为正态分布

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[\xi t+W(t)]=E(t)E(\xi)+E[W(t)]=0$$

$$E[W(t)W(s)]=\min(s,t)\sigma^2=s\sigma^2\quad (t>s)$$

$$E[X^2(t)]=E[\xi^2t^2+W(t)W(s)+W(t)\xi s+W(s)\xi t]=ts+s\sigma^2$$

$$D(t)=t^2+t^2\sigma^2\qquad D(s)=s^2+s^2\sigma^2$$

$$C(s,t)=C(t,s)=R(t,s)=ts+s\sigma^2$$

$$C=\begin{pmatrix} s^2+\sigma^2 s & ts+s\sigma^2 \\ ts+s\sigma^2 & t^2+\sigma^2 t\end{pmatrix}\qquad \rho=\frac{ts+s\sigma^2}{\sqrt{(s^2+\sigma^2 s)(t^2+\sigma^2 t)}}$$

习题八

8. 设 $\{W(t),t\geq 0\}$ 是参数 $\sigma^2=4$ 的维纳过程，令

$$X=W(3)-W(1),\ Y=W(4)-W(2).$$

求：$D(X+Y)$ 和 $\mathrm{cov}(X,Y)$.

$$D(X+Y)=D(W(4)+W(3)-W(2)-W(1))$$

$$=D(W(4)-W(3)+2W(3)-2W(2)+W(2)-W(1))$$

$$D(W(4)-W(3))+4D(W(3)-W(2))+D(W(2)-W(1))=6\sigma^2=24$$

1.$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)$

$$D(X)=D(Y)=2\sigma^2=8\qquad \mathrm{cov}(X,Y)=4$$

2.$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$=E(W(4)W(3)-W(4)W(1)+W(1)W(2)-W(2)W(3))$$

$$=3\sigma^2-\sigma^2+\sigma^2-2\sigma^2=\sigma^2=4$$

习题九

9. 设 $\{W(t),t\geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，令

$$X(t)=W(t+a)-W(a)，常数\ a>0.$$

求随机过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 的协方差函数 $C_X(s,t)$.

$$X(t)=W(t+a)-W(a)\sim N(0,\sigma^2 t)$$

$$m_X(t)=m_X(s)=0$$

$$R(s,t)=C(s,t)=E[X(t)X(s)]$$

$$=E(W(t+a)W(s+a)+W^2(a)-W(t+a)W(a)-W(s+a)W(a))$$

$$=(\min(s,t)+a)\sigma^2+a\sigma^2-2a\sigma^2=\sigma^2\min(t,s)$$

习题十

10. 设$\{W(t), t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，令

$$X(t)=W(t+a)-W(t),\ \text{常数}\ a>0.$$

求随机过程$\{X(t), t\geq 0\}$的协方差函数$C_X(s,t)$。

$$X(t)=W(t+a)-W(t)\sim N(0,\sigma^2 a)$$

$$m_X(t)=m_X(s)=0$$

$$R(s,t)=C(s,t)=E[X(t)X(s)]$$

$$=E(W(t+a)W(s+a)+W(t)W(s)-W(s)W(t+a)-W(t)W(s+a))$$

$$\text{令}\ s<t=\sigma^2(s+a)-\sigma^2\min(s+a,t)-\sigma^2 s+\sigma^2 s$$

$$=\sigma^2\max(0,s+a-t)$$

习题十三

13. 已知$\{N(t), t\geq 0\}$是平均率为$\lambda=2$的泊松过程，分别求：

(1) $E[N(2)N(3)]$；

(2) $P\{N(2)=1, N(3)=2\}$；

(3) $P\{N(3)=2 \mid N(2)=1\}$。

$$E[N(2)N(3)]=E[N(2)(N(3)-N(2))+N^2(2)]$$

$$=E[N(2)]E[N(3)-N(2)]+E[N^2(2)]$$

$$E[N^2(2)]=D[N(2)]+E[N(2)]^2=2\lambda+(2\lambda)^2=2\lambda+4\lambda^2$$

$$E[N(2)]E[N(3)-N(2)]=2\lambda\lambda=2\lambda^2 \quad \because \lambda=2$$

$$E[N(2)N(3)]=2\lambda+6\lambda^2=28$$

$$P\{N(s)=j, N(t)=k\}\underset{t>s}{=}P\{N(s)=j, N(t)-N(s)=k-j\}$$

$$=P\{N(s)=j\}P\{N(t)-N(s)=k-j\}$$

$$=\frac{(\lambda s)^j}{j!}e^{-\lambda s}\frac{[\lambda(t-s)]^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\lambda(t-s)}=\frac{\lambda^k s^j (t-s)^{k-j}}{j!(k-j)!}e^{-\lambda t}$$

$$P\{N(2)=1, N(3)=2\}=P\{N(2)=1, N(3)-N(2)=1\}=\begin{matrix} s=2 & t=3 \\ k=2 & j=1 \end{matrix}$$

$$=2^2\times 2^1\times 1^1\times e^{-2\times 3}=8e^{-6}$$

$$P\{N(3)=2 \mid N(2)=1\}=\frac{P\{N(3)=2, N(2)=1\}}{P\{N(2)=1\}}=\frac{P\{N(3)-N(2)=1, N(2)=1\}}{P\{N(2)=1\}}$$

$$=2e^{-2} \quad t=3 \quad s=2 \quad k-j=1$$

证明：

令$s<t<u$

$$N(t)-N(s)=[N_1(t)-N_1(s)]+[N_2(t)-N_2(s)]$$

$$N(u)-N(t)=[N_1(u)-N_1(t)]+[N_2(u)-N_2(t)]$$

相互独立。而且

$$P(N(t)=k)=\sum_{j=0}^{k}P(N_1(t)=j, N_2(t)=k-j)=\sum_{j=0}^{k}P(N_1(t)=j)P(N_2(t)=k-j)$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{(\lambda_1 t)^j}{j!}e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_2 t)^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\lambda_2 t} \qquad =\frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\binom{k}{j}(\lambda_1 t)^j(\lambda_2 t)^{k-j}$$

$$=\frac{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

$\Rightarrow$ 参数为$\lambda_1+\lambda_2$的Poisson分布。

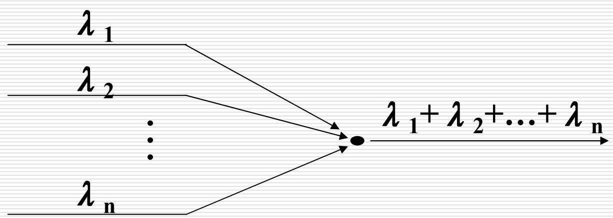
Poisson过程的性质

(i) 合流

令$\{N_1(t);\ t>0\}$, $\{N_2(t);\ t>0\}$分别是具有参数λ_1和λ_2的独立Poisson过程，定义

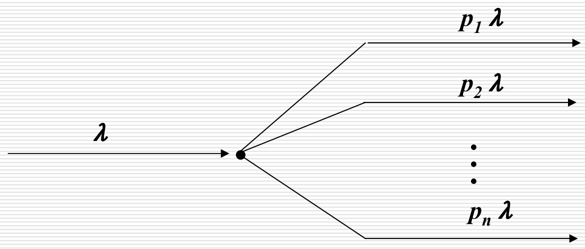
$$N(t):=N_1(t)+N_2(t)$$

则$\{N(t);\ t>0\}$是参数为$\lambda_1+\lambda_2$的Poisson过程。

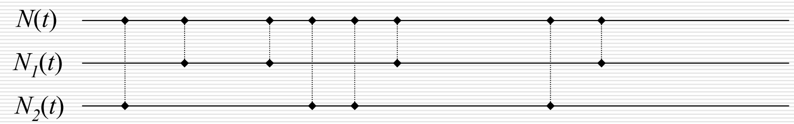


(ii) 分解

对于参数为λ的Poisson过程，假设发生的每一个事件独立的以概率做了记录，未做记录的概率为$1\text{-}p$。令$N_1(t)$是到t为止做了记录的事件数，而$N_2(t)$是未做记录的事件数，则$\{N_1(t);\ t>0\}$和$\{N_2(t);\ t>0\}$分别是具有参数pλ 和(1-p)λ 的独立Poisson过程。



证明：



令s<t<u，因为$N_1(t)$-$N_1(s)$ 与$N_1(u)$-$N_1(s)$分别是N(t)-N(s)与N(u)-N(s)的子集合，由N(t)-N(s) 与N(u)-N(s)的独立性可知$N_1(t)$-$N_1(s)$ 与$N_1(u)$-$N_1(s)$相互独立。

$$
\begin{aligned}
&P(N_1(t)=j, N_2(t)=k) \\
&= P(N_1(t)=j, N_2(t)=k \mid N(t)=k+j)P(N(t)=k+j) \\
&= \binom{k+j}{j} p^j (1-p)^k \frac{(\lambda t)^{j+k}}{(k+j)!} \\
&= \frac{(p\lambda t)^j}{j!} e^{-p\lambda t} \frac{[(1-p)\lambda t]^k}{k!} e^{-(1-p)\lambda t} \\
&= P(N_1(t)=j)P(N_2(t)=k), \quad j,k=0,1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $N_1(t)$与$N_2(t)$相互独立，而且都服从Poisson分布。

Uniformity

Suppose we are told that exactly one event has occurred during a time interval $(0,t]$ in a Poisson process. Then the time T at which that event occurred is uniformly distributed over the interval $[0,t]$.

Proof.

$$
\begin{aligned}
P\{T \le x \mid N(t)=1\} &= \frac{P\{T \le x, N(t)=1\}}{P\{N(t)=1\}} \\
&= \frac{P\{N(x)-N(0)=1, N(t)-N(x)=0\}}{P\{N(t)=1\}} \\
&= \frac{P\{N(x)-N(0)=1\}P\{N(t)-N(x)=0\}}{P\{N(t)=1\}} \\
&= \frac{\lambda x e^{-\lambda x}\cdot e^{-\lambda(t-x)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{x}{t} \qquad 0 \le x \le t \qquad q.\ e.\ d.
\end{aligned}
$$

The density is given by

$$P\{x < T \le x+\Delta x \mid N(t)=1\} = \frac{1}{t}\Delta x \qquad 0 \le x \le t.$$

We can also show that for $s<t$

$$P\{N(s)=k \mid N(t)=n\} = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k} \qquad 0 \le k \le n,$$

which is the binomial distribution.

Random Sum

Let $\{X_i; i=1,2,\ldots\}$ be a set of mutually independent, identically distributed random variables. We consider the sum of a random number of X_i's:

$$Z_N := X_1 + X_2 + \cdots + X_N,$$

where N is a positive-integer random variable that is independent of $\{X_i; i=1,2,\ldots\}$. This is called the *random sum* of random variables. Below we derive the mean and variance of Z_N, the covariance of N and Z_N, and the distribution of Z_N.

习题十四

14. 设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，分别求：

(1) $E[N(s)N(t+s)]$；

(2) $0<s<t$时，$P\{N(s)=k\mid N(t)=n\}$；

(3) $P\{N(t+s)=j\mid N(s)=i\}$.

$$E[N(s)N(t+s)]=E[N(s)(N(t+s)-N(s))+N^2(s)]$$
$$=E[N(s)]E[N(t+s)-N(s)]+E[N^2(s)]$$
$$=\lambda t\lambda s+\lambda s+(\lambda s)^2=\lambda^2 ts+\lambda s+\lambda^2 s^2 \qquad 0<s<t$$

$$P\{N(s)=k\mid N(t)=n\}=\frac{P\{N(s)=k,N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}}$$
$$=\frac{P\{N(s)=k,N(t)-N(s)=n-k\}}{P\{N(t)=n\}}$$
$$=\frac{\frac{(\lambda s)^2}{k!}e^{-\lambda s}\frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}}=C_n^k\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

$$P\{N(t+s)=j\mid N(s)=i\}=\frac{P\{N(t+s)=j,N(s)=i\}}{P\{N(s)=i\}}$$
$$\frac{P\{N(t+s)-N(s)=j-i,N(s)=i\}}{P\{N(s)=i\}}=\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t} \qquad j\geq i$$

✌定理：复合Poisson过程的数字特征.

设$\{X(t),t\geq 0\}$为复合Poisson过程，$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n$，其中$\{N(t),t\geq 0\}$为强度是λ的Poisson过程，$Y,Y(n),n\in\mathbb{N}$相互独立同分布，其特征函数为$\varphi_Y(u)$，则有，

(1) 特征函数

$$\varphi_X(t,u)=e^{\lambda t[\varphi_Y(u)-1]},$$

(2) 均值函数

$$m(t):=\mathrm{E}[X(t)]=\mathrm{E}[N(t)]\mathrm{E}[Y(t)]=\lambda t\mathrm{E}[Y],$$

(3) 方差函数

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_X(t):=\mathrm{D}[X(t)] &= \mathrm{E}[X^2(t)]-\mathrm{E}^2[X(t)]\\ &= \lambda t\mathrm{E}[Y^2]=\mathrm{E}[N(t)]\mathrm{E}[Y^2],\end{aligned}$$

★证明：……

Expected Value

The expected value of Z_N is given by

$$E[Z_N]=E[N]E[X].$$

Proof. Conditioning on the fixed value $N=n$, we have

$$E[Z_N\mid N=n]=E[Z_n]=E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]=\sum_{i=1}^n E[X_i]=nE[X]$$

Then, using the theorem of total expectation, we get

$$E[Z_N]=\sum_{n=1}^\infty E[Z_N\mid N=n]P\{N=n\}=\sum_{n=1}^\infty nE[X]P\{N=n\}$$
$$=E[X]\sum_{n=1}^\infty nP\{N=n\}=E[X]E[N] \qquad q.e.d.$$

Variance

The variance of Z_N is given by

$$\mathrm{Var}[Z_N]=E[N]\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[N](E[X])^2.$$

$\mathrm{Var}(X):=\mathrm{D}(X)$

We show two proofs.

First Proof. Conditioning on the fixed value $N=n$, we have

$$\mathrm{Var}[Z_N\mid N=n]=\mathrm{Var}[Z_n]=\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]=\sum_{i=1}^n\mathrm{Var}[X_i]=n\mathrm{Var}[X].$$

Then we get

$$E[Z_N^2\mid N=n]=\mathrm{Var}[Z_N\mid N=n]+(E[Z\mid N=n])^2=n\mathrm{Var}[X]+n^2(E[X])^2.$$

Using the theorem of total moments, we get

$$\begin{aligned}E[Z_N^2]&=\sum_{n=1}^\infty E[Z_N^2\mid N=n]P\{N=n\}\\ &=\sum_{n=1}^\infty\left\{n\mathrm{Var}[X]+n^2(E[X])^2\right\}P\{N=n\}\\ &=E[N]\mathrm{Var}[X]+E[N^2](E[X])^2.\end{aligned}$$

Finally we have

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[Z_N]&=E[Z_N^2]-(E[Z_N])^2\\ &=E[N]\mathrm{Var}[X]+E[N^2](E[X])^2-(E[N]E[X])^2\\ &=E[N]\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[N](E[X])^2 \qquad q.e.d.\end{aligned}$$

We then have the *conditional variance formula*:

$$\mathrm{Var}[X] = E[\mathrm{Var}[X \mid Y]] + \mathrm{Var}[E[X \mid Y]].$$

Proof. Taking the expectation of

$$\mathrm{Var}[X \mid Y] = E[X^2 \mid Y] - (E[X \mid Y])^2,$$

we have

$$E[\mathrm{Var}[X \mid Y]] = E[E[X^2 \mid Y]] - E[(E[X \mid Y])^2] = E[X^2] - E[(E[X \mid Y])^2].$$

Also, from $E[E[X \mid Y]] = E[X]$, we have

$$\mathrm{Var}[E[X \mid Y]] = E[(E[X \mid Y])^2] - (E[X])^2.$$

By adding these equations, we get the above formula. *q. e. d.*

Second Proof. Using the conditional variance formula

$$\begin{aligned} E[Z_N^2] &= E[\mathrm{Var}[Z_N \mid N]] + \mathrm{Var}[E[Z_N \mid N]] \\ &= E[N\mathrm{Var}[X]] + \mathrm{Var}[NE[X]] \\ &= E[N]\mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[N](E[X])^2. \end{aligned}$$

习题十五

15. 设$\{N_1(t), t\geqslant 0\}$是参数为λ_1的泊松过程，$\{N_2(t), t\geqslant 0\}$是参数为λ_2的泊松过程，二者相互独立，设

$$X(t)=N_1(t)+N_2(t), Y(t)=N_1(t)-N_2(t)$$

(1) 证明$\{X(t), t\geqslant 0\}$是参数为$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程；

(2) 证明$\{Y(t), t\geqslant 0\}$不是泊松过程.

$X(t)=N_1(t)+N_2(t)$ 由于泊松分布具有可加性

$X(t)$为泊松过程$\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

按定义证明$P\{Y(t)=-1\}=P\{N_1(t)-N_2(t)=-1\}$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} P\{N_1(t)=i, N_2(t)=1+i\} \geq P\{N_1(t)=0, N_2(t)=1\}$$

$$=e^{-\lambda_1 t}\lambda_1 t e^{-\lambda_2 t}>0$$

$\therefore \{Y(t), t\geq 0\}$不是泊松过程

习题十六

16. 设$\{N_1(t), t\geqslant 0\}$是参数为λ_1的泊松过程，$\{N_2(t), t\geqslant 0\}$是参数为λ_2的泊松过程，二者相互独立，对$0\leqslant k\leqslant n$，证明下列成立.

①$P\{N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n\}=C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$

②$E[N_1(t) \mid N_1(t)+N_2(t)=n]=\frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

$$Y(t)=N_1(t)+N_2(t)\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$P\{N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n\}=\frac{P\{N_1(t)=k, N_2(t)=n-k\}}{P\{N_1(t)+N_2(t)=n\}}$$

$$P\{N_1(t)=k, N_2(t)=n-k\}=P\{N_1(t)=k\}P\{N_2(t)=n-k\}$$

$$=\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2 t}$$

$$P\{N_1(t)+N_2(t)=n\}=P\{Y(t)=n\}=\frac{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$P\{N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n\}=C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} \qquad C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

由于$P\{N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n\}$服从二项分布

$\therefore E\{N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n\}$为二项分布的期望为 $\left(\frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

习题十七

17. 设某种货物的销售是$\{N(t), t\geqslant 0\}$是日平均率为4个的泊松过程，若现有存货4个，求这些存货维持不了一天的概率.

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda k)^k}{k!}e^{-\lambda t} \qquad \lambda=4, t=1$$

$$P\{N(1)-N(0)>4\}=1-P\{N(1)\leq 4\}$$

$$=1-\sum_{k=0}^{4}\frac{4^k}{k!}e^{-4}=1-\frac{103}{3}e^{-4}$$

习题十八

18. 设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程,求:

(1) 二维概率分布;

(2) n维概率分布.

$$P\{N(s)=j,N(t)=k\}\begin{matrix}s<t\\ j<k\end{matrix}$$

$$P\{N(s)=j,N(t)-N(s)=k-j\}$$

$$=\frac{(\lambda s)^j}{j!}e^{-\lambda s}\frac{[\lambda(t-s)]^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\lambda(t-s)}$$

二维分布 $\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda t}(t-s)^{k-j}s^j}{j!(k-j)!}$

n维分布 $P\{N(t_1)=k_1,N(t_2)=k_2....N(t_n)=k_n\}\begin{matrix}t_1<t_2....<t_n\\ k_1<k_2....<k_n\end{matrix}$

$$=P\left\{\begin{matrix}N(t_1)=k_1,N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1,N(t_3)-N(t_1)=k_3-k_1,\\ ...,N(t_n)-N(t_{n-1})=k_n-k_{n-1}\end{matrix}\right\}$$

$$=P\{N(t_1)=k_1\}P\{N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1\}...P\{N(t_n)-N(t_{n-1})=k_n-k_{n-1}\}$$

$$=\frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_2-\lambda t_1)^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}e^{-\lambda_1(t_2-t_1)}....\frac{(\lambda t_n-\lambda t_{n-1})^{k_n-k_{n-1}}}{(k_n-k_{n-1})!}e^{-\lambda\,(t_n-t_{n-1})}$$

习题十九

19. 设$N(t)$表示某发射源在$[0,t)$内发射的粒子数,$\{N(t),t\geq 0\}$是平均率为λ的泊松过程. 若每一个发射的粒子都以概率p的可能被记录,且一粒子的记录不仅独立于其他粒子的记录,也独立于$N(t)$. 若以$M(t)$表示在$[0,t)$内被记录的粒子数,证明$\{M(t),t\geq 0\}$是一平均率为λp的泊松过程.

$$令X_i=\begin{cases}1 & 第X_i粒子被记入\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$M(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\sim P(\lambda p)的泊松过程$$

注$N(t)$个$(0-1)$分布相加即为泊松分布 $P(\lambda)$

由于以概率为P记录为$P(\lambda p)$

$$P\{M(t)-M(s)=k\}=\sum_{n=k}^{\infty}P\{N(t)-N(s)=n\}$$
$$\times P\{M(t)-M(s)=k|N(t)-N(s)=n\}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\left[\frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)}C_n^k p^k q^{n-k}\right]=e^{-\lambda p(t-s)}\frac{[\lambda p(t-s)]^k}{k!}$$

习题二十

20. 每个到达盖格(Geiger)计算器的脉冲仅以$\frac{1}{3}$的概率被记录. 假定脉冲以每分钟平均率为6的泊松过程来到记数器. 设Z是半分钟内被记录下来的脉冲数目,求:$E(Z)$,$D(Z)$和$P(Z\geq 2)$.

$$Z(t)\sim P\left(\frac{6}{2},t\right)被记录的相当于平均率为2的泊松过程$$

$$E[Z(t)]=2t=60\qquad D[Z(t)]=2t=60\qquad \lambda t=60$$

$$Z(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$$P\{Z\geq 2\}=1-P\{Z=0\}-P\{Z=1\}$$

$$=1-e^{-60}-60e^{-60}=1-61e^{-60}$$

习题二十二

22. 假设在$[0,t)$内男女顾客到达某商场的人数分别独立地服从每分钟1人与每分钟2人的泊松过程. 求:

(1) $[0,t)$到达商场总人数的分布;

(2) 已知到时刻t时已有60人到达商场的条件下,问其中40人是女性顾客的概率? 以及平均将有多少是女性顾客?

$$X(t)\sim P(1)\qquad Y(t)\sim P(2)\qquad X(t)+Y(t)\sim P(3)$$

$$P\{Y(t)=40|X(t)+Y(t)=60\}=\frac{P\{Y(t)=40\}P\{X(t)=20\}}{P\{X(t)+Y(t)=60\}}$$

$$=C_{60}^{20}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{40}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{20}$$

$$E[Y(t)|X(t)+Y(t)=60]=60\times\tfrac{2}{3}=40(16题结论)$$

习题二十三

23. 假设$[0,t)$内顾客到达商场的人数$\{N(t),t\geq 0\}$是平均率为λ的泊松过程，且每一个到达商场的顾客是男性还是女性的概率分别为p和q.（$p+q=1$）设$N_1(t)$和$N_2(t)$分别为$[0,t)$内到达商场的男女顾客数. 求$N_1(t)$和$N_2(t)$的分布. 并证明它们相互独立.

$$N_1(t)=\sum_{i=1}^{M(t)}Y_i \qquad Y_i=\begin{cases}0 & \text{其他}\\ 1 & \text{第 } i \text{ 个顾客为男性}\end{cases}$$

$$Y_i\sim B(1,p)$$

$$N_2(t)=\sum_{i=1}^{M(t)}X_i \qquad X_i=\begin{cases}0 & \text{其他}\\ 1 & \text{第 } i \text{ 个顾客为女性} \quad q\end{cases}$$

$$X_i\sim B(1,q)$$

$$N_1(t)\sim P(p\lambda) \qquad N_2(t)\sim P(q\lambda)$$

$$P\{N_1(t)=i,N_2(t)=j\}=P\{N_1(t)=i,N_2(t)+N_1(t)=i+j\}$$

$$=P\{N_1(t)+N_2(t)=j+i\}P\{N_1(t)=i|N_1(t)+N_2(t)=j+i\}$$

$$=\frac{(\lambda t)^{i+j}}{(i+j)!}e^{-\lambda t}C_{j+i}^{i}p^iq^j=\frac{(\lambda+p)^i}{(i+j)!}e^{-\lambda pt}e^{-\lambda qt}(\lambda+p)^j\frac{(i+j)!}{i!\,j!}$$

$$=\frac{(\lambda+p)^i}{i!}e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda+q)^j}{j!}e^{-\lambda tq}=P\{N_1(t)=i\}P\{N_2(t)=j\}\text{相互独立}$$