电子科技大学2008级微积分(下)期末考试试题

一、单项选择题(每题3分,合计15分)

1. 若 $f(x,y)$ 在点(0,0)的两个偏导数存在,则 $f(x,y)$ 在点(0,0)(　　).

(A) 连续且可微;　(B) 连续但不一定可微;

(C) 可微但不一定连续;　(D) 不一定可微也不一定连续.

2. 设 $\ln(x^2+y^2+z^2)$,则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=$(　　).

(A) $\dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}$;　(B) $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$;

(C) $\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$;　(D) $\dfrac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

3. 设有空间区域 $V: x^2+y^2+z^2\leqslant 1(z\geqslant 0)$,则以下结果错误的是(　　).

(A) $\iiint_V x\,\mathrm{d}V=0$;　(B) $\iiint_V y\,\mathrm{d}V=0$;

(C) $\iiint_V z\,\mathrm{d}V=0$;　(D) $\iiint_V xy\,\mathrm{d}V=0$.

4. 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2=R^2(R>0)$ 上的 $0\leqslant z\leqslant 1$ 部分,则 $\iint_\Sigma \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}S=$(　　).

(A) 0;　(B) $2\pi R\mathrm{e}^R\sin R^2$;

(C) $4\pi R$;　(D) $\pi R\mathrm{e}^R\sin R^2$.

5. 设二阶线性非齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个特解 $y_1=x, y_2=\mathrm{e}^x, y_3=\mathrm{e}^{2x}$,则其通解为(　　).

(A) $x+C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{d}^{2x}$;　(B) $C_1x+C_2\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{2x}$;

(C) $x+C_1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x})+C_2(x-\mathrm{e}^x)$;　(D) $C_1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x})+C_2(\mathrm{e}^{2x}-x)$.

二、填空题(每题3分,合计15分)

1. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,$z=f(y,xy)$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______.

2. 四阶微分方程 $y^{(4)}-y=0$ 的通解 $y=$ ______.

3. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y=$ ______.

4. 设曲线 L 为 $x^2+y^2=R^2$,则曲线积分 $\oint_L(x^2+y^2+2x)\mathrm{d}s=$ ______.

5. 周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\leqslant 0\\ 0, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 的和函数 $S(x)=$ ______.

三、(9分) 求函数 $f(x,y)=x^2(1+y^2)+\mathrm{e}^y-y$ 的极值.

四、(9分) 求曲面 $z=x^2+y^2$ 的一个切平面,使此切平面与直线 $\begin{cases}x+2z=1\\ y+2z=2\end{cases}$ 垂直.

五、(10分) 求微分方程 $y''-y'=2x\mathrm{e}^x$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=0$ 的特解.

六、(9分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$ 的收敛域(含端点)及和函数,并由此计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n+1}}$ 的和.

七、(9分) 计算 $\iint_S(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 为半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

八、(10分) 设 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2=z$ 所围成的立体,求 Ω 的体积 V 与表面积 S.

九、(7分) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$,证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 条件收敛.

十、(7分) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数,

$$\vec{F}=v(x,y)\vec{i}+u(x,y)\vec{j},\quad \vec{G}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{j},$$

且在 D 的边界曲线 L(正向)上有 $u(x,y)\equiv 1, v(x,y)\equiv y$,证明:$\iint_D\vec{F}\cdot\vec{G}\mathrm{d}\sigma=-\pi$.

(限于篇幅,此处略去相关参考答案,有兴趣的读者可往本刊网站进行查找.网址:http://www.nwpu.edu.cn/gdsxyj)