~年第 1 学期期中考试 A 卷

闭卷 ~年 11 月 10 日，答案写在答题卡上，不使用计算器

一、简答题（每小题 10 分，共 50 分）

1. 请举例说明概率为 0 的事件不一定是不可能事件，概率为 1 的事件不一定是必然事件。
   答：【思路~选一连续型随机变量 X，$P\{X=x_0\}=0$但$\{X=x_0\}$并非不可能事件，$P\{\Omega-\{x_0\}\}=1$但$\Omega-\{x_0\}$并非必然事件 】

2. 已知$f_1(x)$和$f_2(x)$是任意两个概率密度函数，要想$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$也是概率密度函数，常数k_1,k_2应满足什么条件?
   答：$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$要成为概率密度，需要满足两个条件
   (1) $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)\geq 0$
   (2) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\big(k_1f_1(x)+k_2f_2(x)\big)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}k_1f_1(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}k_2f_2(x)dx$

$$\Longrightarrow k_1+k_2=1$$

3. 已知随机变量(X,Y)的边缘分布律分别如下

X	0	1
p_k	p	$1-p$

Y	0	1
p_k	q	$1-q$

且事件$\{X=0\}$与$\{Y=0\}$相互独立，可否推出X与Y相互独立？说明你的结论和理由。
答：由题意可知道$p_{00}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=pq$
$p_{01}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}-P\{X=0,Y=0\}=p-pq=p(1-q)$
类似根据边缘分布律与联合分布律之间关系，计算得

X \ Y	0	1	$p_{i.}$
0	pq	$p(1-q)$	p
1	$q(1-p)$	$(1-p)(1-q)$	$1-p$
$p_{.j}$	q	$1-q$	1

$\forall i,j\quad p_{ij}=p_{i.}\cdot p_{.j}$，所以 X,Y 相互独立

4. 如果随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且严格单调增加，而随机变量$X\sim U(0,1)$，令$Z=F^{-1}(X)$，那么Z与Y同分布，请说明理由。
   证明：$\because X\sim U(0,1)$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\leq x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$$

$$F_Z(y)=P\{Z\leq y\}=P\{F^{-1}(X)\leq y\}=P\{X\leq F(y)\}=F_X\big(F(y)\big)=F(y)$$

5. 一个病人可能得了甲、乙、丙三种病之中的一种，已知得这三种病的概率依次为a_1,a_2,a_3（满足$a_1+a_2+a_3=1$），为确定诊断，现在决定再做一种检验确认一下。1 次检验中，这种检验对疾病甲给出肯定结果的概率为b_1，对于疾病乙，则概率是b_2，对于疾病丙，则概率是b_3，一共进行了n次检验，有m次的结果是肯定的，根据该检验结果推断得疾病甲的概率。

答：设事件A_i={病人得第 i 种病}，i=甲，乙，丙， D={n 次检验结果中 m 次肯定}

$$P(A_i)=a_i, P(D|A_i)=C_n^m b_i^m (1-b_i)^{n-m}$$

$$P(A_1)=\frac{P(A_1)P(D|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(D|A_i)}=\frac{a_1 b_1^m (1-b_1)^{n-m}}{\sum_{i=1}^{3}a_i b_i^m (1-b_i)^{n-m}}$$

二、计算题（共 10 分）

已知一个盒子中有 4 个红球 6 个白球，现做一随机试验：先从盒子中任取一球，观察其颜色后，放回盒子，同时再放入盒子 5 个同颜色的球，如果再次从盒中任取一球，问：取到的球是红球的概率多大？

解：设A_k ={第 k 次取到红球}，k=1,2,…

$$P(A_1)=\frac{4}{10},\qquad P(A_2|A_1)=\frac{9}{15},\qquad P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{4}{15}$$

根据全概率公式可得

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{4}{10}\times\frac{9}{15}+\left(1-\frac{4}{10}\right)\times\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$$

即第二次取得红球的概率为 2/5.

三、计算题（共 10 分）

已知$X\sim U(0,2)$，且

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求$P\{X+Y>2\}$

【原题中$0<y<x<2$应为$0<y<x$，条件分布中不应考虑 x 范围】

解：$\because X\sim U(0,2)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & 0<y<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$\therefore P\{X+Y>2\}=\iint_{\{x+y>2\}}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_1^2\int_{2-x}^{x}\frac{1}{2x}dydx=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=1-\ln 2$$

四、计算题（共 10 分）

已知S_0服从 0-1 分布，其分布律为$P\{S_0=0\}=P\{S_0=1\}=0.5$, $N\sim N(0,1), S=S_0+N$，若S_0与 N 相互独立，求$P\{0.25<S<0.75\}$。（结果用$\Phi(x)$表示即可，尽可能简化）

【可用全概率公式计算，也可用独立性展开】

解：$P\{0.25<S<0.75\}=P\{0.25<S_0+N<0.75\}$

$$=P\{0.25<S_0+N<0.75, S_0=0\}+P\{0.25<S_0+N<0.75, S_0=1\}$$

$$=P\{S_0=0\}P\{0.25<N<0.75\}+P\{S_0=1\}P\{0.25<N+1<0.75\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi(0.75) - \Phi(0.25)\right) + \frac{1}{2}\left(\Phi(-0.25) - \Phi(-0.75)\right)$$
$$= \Phi(0.75) - \Phi(0.25)$$

五、计算题（共 10 分）

已知某种炮弹在XOY平面内的落点(X,Y)服从二维正态分布（单位：m），其联合概率密度为：

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, (x,y) \in R^2$$

假如炮弹的杀伤半径为 2m，如果在坐标原点处放置一个点坐标，问发射一发炮弹后，对该目标造成杀伤的概率?

解：造成杀伤力 $\Leftrightarrow$ 炮弹落在以原点为圆心，半径为 2 的圆内，其概率为

$$P\{X^2+Y^2\} = \iint\limits_{\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}} f(x,y)dxdy \quad = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dydx$$

$$\underline{\underline{\frac{x = r\cos\theta}{y = r\sin\theta}}} \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{1}{2\pi} r\, e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\theta = \int_0^2 r\, e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 1 - e^{-2}$$

六、计算题（共 10 分）

已知$X \sim U(-2,1), Y = X^2$，求Y的概率密度。

解：先求分布函数$F_Y(y) = P\{Y \le y\}$，再求导数

【由于$X \sim U(-2,1), Y = X^2 \Rightarrow Y \in [0,4]$ 】

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \dfrac{x+2}{3}, & -2 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

1) 当$y < 0$时，$F_Y(y) = 0$
2) 当$y \ge 4$时，$F_Y(y) = 1$
3) 当$0 \le y < 1$时，

$$F_Y(y) = P\{X^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = \frac{\sqrt{y}+2}{3} - \frac{-\sqrt{y}+2}{3} = \frac{2\sqrt{y}}{3}$$

4) 当$1 \le y < 4$时，

$$F_Y(y) = P\{X^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le X \le 1\} = \frac{1+2}{3} - \frac{-\sqrt{y}+2}{3} = \frac{1+\sqrt{y}}{3}$$

所以

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \dfrac{2\sqrt{y}}{3}, & 0 \le y < 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{y}}{3}, & 1 \le y < 4 \\ 1, & y \ge 4 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{y}}, & 0 \le y < 1 \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & 1 \le y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$