电子科技大学研究生试卷

（考试时间：____至_____，共__2_小时）

课程名称 __图论及其应用__ 教师_______ 学时 _60_ 学分____

教学方式 __讲授__ 考核日期_2017__年_6__月__11__日 成绩______

考核方式：__________（学生填写）

一．填空题(每空 5 分，共 25 分)

1. 图 1 中顶点a到顶点b的距离$d(a,b)=$ ___11____ 。

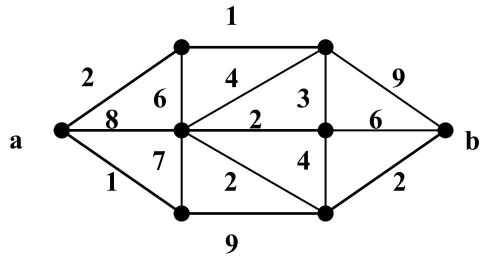


图 1

2. 已知图 G 的邻接矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 G 中长度为 2 的途径总条数为 ___30____ 。

3. 图 2 中最小生成树T的权值$W(T)=$ __34__ 。

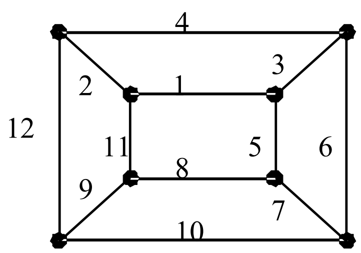


图 2

学院________ 姓名________ 学号________

密……封……线……以……内……答……题……无……效

4. 图 3 的最优欧拉环游的权值为___38____。

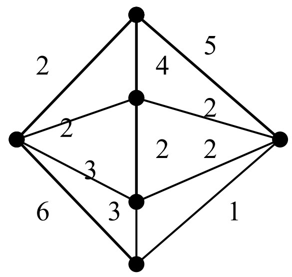


图 3

5. 树叶带权分别为 1,2,4,5,6,8 的最优二元树权值为 $W(T)=$___62____。

二. 单项选择(每题 3 分，共 15 分)

1. 关于图的度序列，下列说法正确的是(C)

(A) 对任意一个非负整数序列来说，它都是某图的度序列；

(B) 如果非负整数序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数，则它一定是图序列；

(C) 若图 G 度弱于图 H，则图 G 的边数小于等于图 H 的边数；

(D) 如果图 G 的顶点总度数大于或等于图 H 的顶点总度数，则图 G 度优于图 H。

2. 关于图的割点与割边，下列说法正确的是（ D ）

(A) 有割边的图一定有割点；

(B) 有割点的图一定有割边；

(C) 有割边的简单图一定有割点；

(D) 割边不在图的任一圈中。

3.设$k(G)$，$\lambda(G)$，$\delta(G)$分别表示图 G 的点连通度，边连通度和最小度。下面说法错误的是(D)

(A) 存在图 G，使得$k(G)=\delta(G)=\lambda(G)$；

(B) 存在图 G，使得$k(G)<\lambda(G)<\delta(G)$；

(C) 设 G 是 n 阶简单图，若$\delta(G)\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，则 G 连通，且$\lambda(G)=\delta(G)$；

(D) 图 G 是k连通的，则 G 的连通度为k。

4.关于哈密尔顿图，下列命题错误的是(B,C)

(A) 彼得森图是非哈密尔顿图；

(B) 若图 G 的闭包是哈密尔顿图，则其闭包一定是完全图；

(C) 若图 G 的闭包是完全图，则图 G 是哈密尔顿图；

(D) 设 G 是三阶以上简单图，若 G 中任意两个不邻接点u与v，满足$d(u)+d(v)\ge n$，则 G 是哈密尔顿图。

5.下列说法错误的是(　A　)

(A) 有完美匹配的三正则图一定没有割边；

(B) 没有割边的三正则图一定存在完美匹配；

(C) 任意一个具有哈密尔顿圈的三正则图可以 1 因子分解；

(D) 完全图K_{2n+1}是n个哈密尔顿圈的和。

三、(10 分) 设无向图 G 有 10 条边，3 度与 4 度顶点各 2 个，其余顶点度数均小于 3，问 G 中至少有几个顶点？在最少顶点数的情况下，写出 G 的度序列，该度序列是一个图序列吗？。

解：要使得 G 中顶点数最少，度数小于 3 的顶点度数必须取 2.

设度数为 2 的顶点个数为 x，由握手定理：

$3\times2+4\times2+2x=20$，解得：$x=3$

所以，G 中至少顶点个数为 7.

G 的度序列 $\pi=(4,4,3,3,2,2,2)$

由于 $\pi_1=(3,2,2,2,2,1)$，$\pi_2=(2,1,1,1,1)$

所以，度序列为图序列。

四、（6 分）求完全图 K_n 的邻接谱。

解：完全图 K_n 的邻接矩阵为

$$A(K_n)=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\&\cdots&\cdots&\cdots&\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{pmatrix}\lambda&-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda&-1&-1&-1\\&\cdots&\cdots&\cdots&\\-1&-1&-1&\lambda&-1\\-1&-1&-1&-1&\lambda\end{pmatrix}=\left(\lambda-n+1\right)\left(\lambda+1\right)^{n-1}$$

所以：$SpecA(K_n)=\begin{pmatrix}-1&n-1\\n-1&1\end{pmatrix}$

五，（6 分）求证：一棵非平凡树至少有两片树叶。

证明 设 P=$v_1v_2\ldots v_k$是非平凡树 T 中一条最长路，则 v_1与 v_k在 T 中的邻接点只能有一个，否则，要么推出 P 不是最长路，要么推出 T 中存在圈，这都是矛盾！即说明 v_1与 v_2是树叶。

六，（6 分）求证对于$1 \le m \le \frac{n}{2}$的图$C_{m,n} = K_m \vee (\bar{K}_m + K_{n-2m})$是非哈密尔顿图。

证明：取 S=V(k_m),则ω(G-S)=m+1>|S|=m,所以，由 H 图的性质知，G 是非 H 图。

七.(6 分)求证：设l是赋权完全偶图 G 的可行顶点标号，如果其相等子图G_l存在完美匹配M^*，则M^*是 G 的最优匹配。

证明：设 M*是 G_1的完美匹配，则： $w(M^*) = \sum_{e \in M^*} w(e) = \sum_{v \in V(G)} l(v)$

又设 M 是 G 的任一完美匹配，则： $w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \le \sum_{v \in V(G)} l(v)$

所以，w (M*)≥w (M)。即 M*是 G 的最优匹配。

八.(6 分）设简单可平面图G有 10 个 4 度顶点和 8 个 5 度顶点，其余顶点度数均为 7。求 7 度顶点的最大可能数量。

解：设 7 度顶点有x个。

一方面，由握手定理：$4 \times 10 + 5 \times 8 + 7x = 2m$

即$m = 40 + \frac{7}{2}x$

另一方面：由于图 G 是可平面简单图，因此：$m \le 3n - 6$

于是得到：$m \le 3(10 + 8 + x) - 6 = 48 + 3x$

即得到：$m = 40 + \frac{7}{2}x \le 48 + 3x$

解得$x \le 16$

即 7 度顶点的最大可能数量为 16.

九．(10 分)求下图 G 的色多项式 $P_k(G)$. 并求出点色数。

解： 图 G 的补图是图 4.

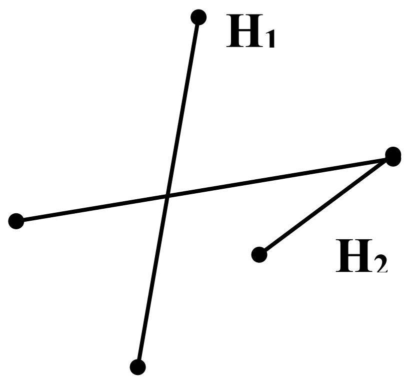


图4

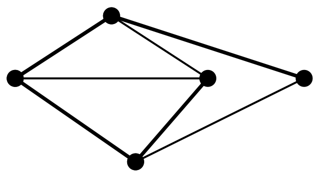


图 G

对于 H_1： $r_1=1$， $r_2=1$，所以， $h(H_1,x)=x+x^2$

对于 H_2： $r_1=0, r_2=2, r_3=1$。所以， $h(H_2,x)=2x^2+x^3$

因此： $h(\overline{G},x)=\left(x+x^2\right)\left(2x^2+x^3\right)=2x^3+3x^4+x^5$

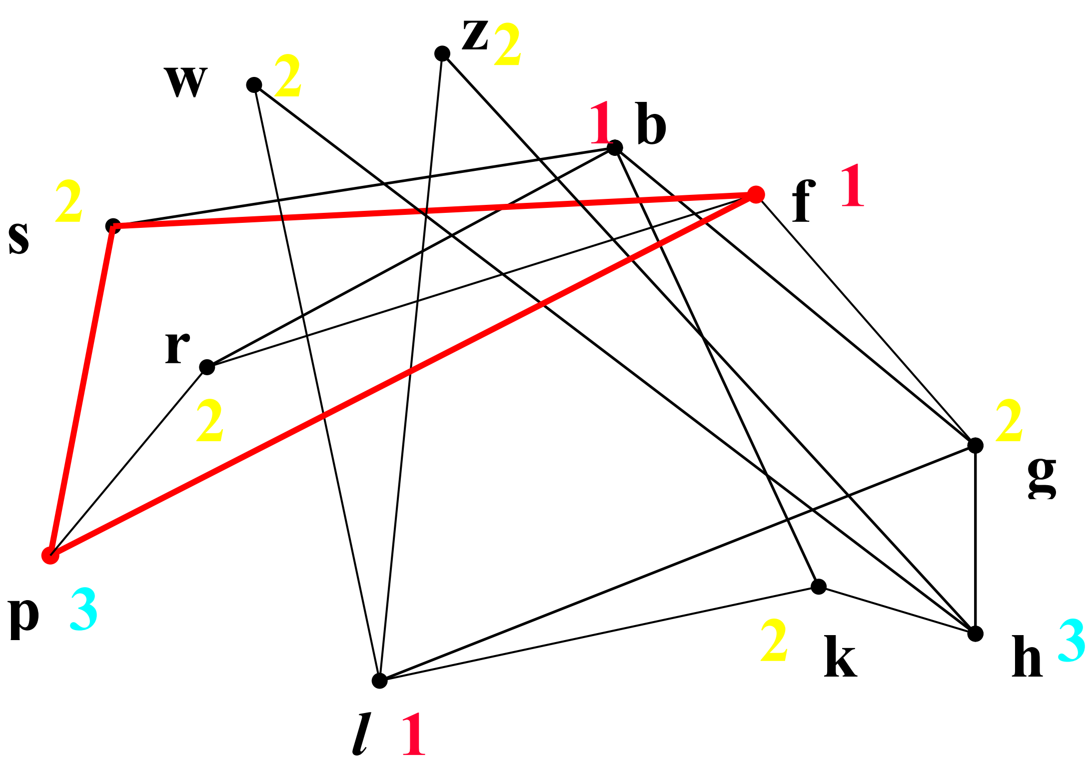
所以： $p_k(G)=2[k]_3+3[k]_4+[k]_5$

由于 $p_2(G)=0, p_3(G)=6$，所以， $\chi(G)=3$。

十.(10 分) 一家公司计划建造一个动物园,他们打算饲养下面这些动物:狒狒(b)、狐狸(f)、山羊(g)、土狼(h)、非洲大羚羊(k)、狮子(l)、豪猪(p)、兔子(r)、鼩鼱(s)、羚羊(w)和斑马(z)。根据经验,动物的饮食习惯为:狒狒喜欢吃山羊、非洲大羚羊、兔子和鼩鼱;狐狸喜欢吃山羊、豪猪、**兔子和鼩鼱**;土狼喜欢吃山羊、非洲大羚羊、羚羊和斑马;狮子喜欢吃山羊、非洲大羚羊、羚羊和斑马;豪猪喜欢吃鼩鼱和兔子;而其余的则喜欢吃虫子、蚯蚓、草或其它植物。公司将饲养这些动物,希望它们能自由活动但不能相互捕食。求这些动物的一个分组,使得需要的围栏数最少。(要求用图论方法求解)

解:每个动物作为顶点,如果动物 x 要吃 y,则该两点连线。

问题转化为:(1)在模型图中求出其点色数 $\chi(G)$;(2)用 $\chi(G)$ 种颜色对图 G 进行正常顶点作色。则色组即为动物分组。



由于在模型图中存在三角形 fsp,所以 $\chi(G) \geq 3$,另一方面,用三种颜色可实现对图 G 的正常点作色,得到 $\chi(G) \leq 3$。所以,点色数 $\chi(G) = 3$。

给出的围栏分组为:$\{b, f, l\}$;$\{g, k, r, s, w, z\}$;$\{h, p\}$。