考试科目：3032　最优化设计方法参考答案

一、选择题 （每小题 2 分，共 20 分）

1. B　2. B　3. D　4. A　5. D　6. C　7. C　8. B　9. C　10. D

二、填空题 （每空 1 分，共 10 分）

1. 目标函数值的等值线越密表示 <u>目标函数值变化越快</u>。

2. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ 在点 $\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}x_{10}\\x_{20}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 处的二阶泰勒展为 $\underline{2+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\Delta X+\frac{1}{2}\Delta X^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2&0\\2&0\end{bmatrix}\Delta X}$。

3. 函数 $F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+x_1x_2-3x_1-3x_2+10$ 表示成 $F(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{B}^T\mathbf{x}+C$ 的形式 $\underline{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+10}$。

4. 与负梯度成锐角的方向为函数值 <u>上升</u> 的方向，与梯度成直角的方向为函数值 <u>不发生变化</u> 的方向。

5. 无约束优化中把 <u>初始点</u>、<u>搜索方向</u>、<u>迭代步长</u> 称为优化算法的三要素。

6. 求解无约束最优化问题：$\min f(x), x\in R^n$，设 x^k 是不满足最优性条件的第 k 步迭代点，则：用 Newton 法求解时，搜索方向 $d^k=\underline{-\nabla f(x_k)}$；用共轭梯度法求解时，搜索方向为 $\underline{-[\nabla^2 f(\mathrm{x}^k)]^{-1}\nabla f(\mathrm{x}^k)}$。

三、简答题 （共 20 分，每小题 5 分）

1. 迭代法的基本思想是什么？常用的终止准则有哪些？

解：（1）在设计空间给出初始迭代点；从初始迭代点出发，按照确定的搜索方向和迭代步长，求得第一个改进设计点 ，它应该使目标函数值减小；再以第一个改进设计点为新的初始点，重复上述步骤，反复迭代，得到一个不断改进的点列及一相应的递减函数值数列。

（2）常用的终止准则有

用相邻两点的矢量差的模作为终止迭代规则。$\left|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right|<\varepsilon$

用两次迭代的目标函数值之差作为终止迭代规则。

$$\left|F^{(k+1)}-F^{(k)}\right|<\varepsilon \text{或} \frac{\left|F^{(k+1)}-F^{(k)}\right|}{\left|F^{(k)}\right|}<\varepsilon$$

用梯度的模作为终止迭代规则。$\left|\nabla F^{(k+1)}\right|<\varepsilon$

2. 考虑下列约束优化问题，请用内点惩罚函数法及外点惩罚函数法建立优化模型。

$$\begin{aligned} &\min f(x)=x_1^2+4x_2^2 \\ &s.t.\quad 3x_1+4x_2\geq 13 \end{aligned}$$

解:1）内点惩罚函数法：

$$\varphi\left(x,r^{(k)}\right)=x_1^2+4x_2^2-r^{(k)}\left(\frac{1}{-3x_1-4x_2+13}\right)$$ 两种形式均可。

$$\varphi\left(x,r^{(k)}\right)=x_1^2+4x_2^2-r^{(k)}\ln(3x_1+4x_2-13)$$

2）外点惩罚函数法：

$$\varphi\left(x,r^{(k)}\right)=\begin{cases} x_1^2+4x_2^2 & \text{当} -3x_1-4x_2+13\leq 0 \\ x_1^2+4x_2^2-r^{(k)}(-3x_1-4x_2+13)^2 & \text{当} -3x_1-4x_2+13\geq 0 \end{cases}$$

3. 求函数 $F(X)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$ 的海赛矩阵，并判别其是否正定。

．解： $\frac{\partial F}{\partial x_1}=2(x_1-x_2)-2(x_3-x_1)$　　$\frac{\partial F}{\partial x_2}=2(x_2-x_3)-2(x_1-x_2)$

$\frac{\partial F}{\partial x_3}=2(x_3-x_1)-2(x_2-x_3)$　　$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}=4,\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}=4,\frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}=4$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}=-2,\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_3}=-2,\frac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_3}=-2$$

海赛矩阵为：$H(X)=\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

∵|4|=4>0

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

所以该海赛矩阵正定

4. 可行方向满足的条件是什么？其搜索策略主要包括哪几种？

答：方向的可行条件是指沿着该方向做微小移动后，所得到的新点是可行点。

$$\left[\nabla g\left(X^{(k)}\right)\right]^T S^{(k)} \le 0$$

方向的下降条件是指沿该方向做微小移动后，所得到的新点目标函数值是下降的。

$$\left[\nabla f\left(X^{(k)}\right)\right]^T S^{(k)} < 0$$

四、计算题 （共 50 分）

1. 用黄金分割法缩小目标函数 F(X)＝x^2-10x+36 的搜索区间，设初始区间为[a, b]=[-10, 10]， 作一次迭代运算即可。(15 分)

解：①第一次运算

在区间[a,b]内插入两点 a1,a2(a1<a2)，并计算 F(a1)、F(a2)

a1=b-0.618×(b-a)＝10－0.618×(10-(-10))=-2.36

a2=a+0.618×(b-a)＝(-10)+0.618×(10-(-10))=2.36

F(a1)= $(-2.36)^2$-10×(-2.36)+36＝65.1696

F(a2)＝$(2.36)^2$-10×(2.36)+36＝17.9696

因　F(a1)>F(a2)

所以，可将区间[a,b]缩小为[a1,b]=[-2.36,10]

2. 用单纯形法法求解下列线性规划问题的最优解。完成一次进基出基变换即可。(15 分) 。

$$\begin{aligned}
&\min f(x)=4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5+5x_6\\
&s.t.\quad x_1+x_2+2x_3+4x_4+x_5 \qquad =4\\
&\qquad\quad x_1+2x_2+3x_3+x_4 \qquad +x_6=5\\
&\qquad\quad x_j\ge 0,\ldots j=1,2,\ldots,6
\end{aligned}$$

解：1）初始基本可行解

取 x5, x6 为基本变量, 则有: $X^{(0)}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4\ \ 5]^{\mathrm{T}}$， $f^{(0)}=3\times4+5\times5=37$

2）选取进基变量

计算检验数的值：
$$\begin{aligned}
r_1&=4-3\times1-5\times1=-4\\
r_2&=2-3\times1-5\times2=-11\\
r_3&=1-3\times2-5\times3=-20\\
r_4&=2-3\times4-5\times1=-15
\end{aligned}$$
，r3 最小, x3 应为进基变量

3）确定离基变量

因为： $\dfrac{4}{2}>\dfrac{5}{3}$，x6 应为离基变量

4）变换：

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{3}x_1-\dfrac{1}{3}x_2 \qquad +\dfrac{10}{3}x_4+x_5-\dfrac{2}{3}x_6=\dfrac{2}{3}\\
\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{2}{3}x_2+x_3+\dfrac{1}{3}x_4 \qquad +\dfrac{1}{3}x_6=\dfrac{5}{3}
\end{cases}$$

求的：
$$\begin{aligned}
&X^{(1)}=[0\ \ 0\ \ 5/3\ \ 0\ \ 2/3\ \ 0]^{\mathrm{T}}\\
&F^{(1)}=\frac{5}{3}+3\times\frac{2}{3}=\frac{11}{3}
\end{aligned}$$

3．已知目标函数 $\min F(X)=\left(x_1-2\right)^2+x_2^2$ 受约束于

$$g_1\left(X\right)=x_1^2+x_2-1\le 0$$

$$g_2\left(X\right)=-x_2\le 0$$

$$g_3\left(X\right)=-x_1\le 0$$

用库恩一塔克条件判断 $\boldsymbol{X^*=(1,0)^T}$ 是否为极小点。（10 分）

解：把设计点 X^* 带入到各个约束中，得到：

$$\boldsymbol{g_1\left(X\right)_{\substack{x_1=1\\x_2=0}}=1^2+0-1=0}\ ;$$

$$\boldsymbol{g_2(X)}\bigg|_{\substack{x_1=1\\x_2=0}} = \mathbf{0};$$

$$\boldsymbol{g_3(X)}\bigg|_{\substack{x_1=1\\x_2=0}} = \mathbf{-1}$$

通过计算对于给出的设计点，起作用的约束为 g_1, g_2

计算目标函数和起作用约束函数在 X*点的梯度

$$\nabla F(X^*) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2(x_1-2) \\ 2x_2 \end{Bmatrix}_{\substack{x_1=1\\x_2=0}} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla g_1(X^*) = \begin{Bmatrix} 2x_1 \\ 1 \end{Bmatrix}_{\substack{x_1=1\\x_2=0}} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla g_2(X^*) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

代入 $$\boldsymbol{-\nabla F(X^*) = \lambda_1 \nabla g_1(X^*) + \lambda_2 \nabla g_2(X^*)}$$

则 $$\boldsymbol{-\begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \lambda_1 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \lambda_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

解得 $\lambda_1=1$、$\lambda_2=1$，即 λ_1、λ_2 满足非负要求，故 $X^*=\{1,0\}^T$ 点满足库恩－塔克条件，该点是极小值。

4. 应用共轭梯度方法求解无约束优化问题 $\min\ f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_1x_2$ ，初始点为 $x_0 = [1 \quad 1]^T$，误差范围是 $\varepsilon = 0.001$。（10 分）

解： 1）第一次沿负梯度方向搜寻

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 4 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}^0} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 + \alpha_0 \boldsymbol{d}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_0 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4\alpha_0 \\ 1-2\alpha_0 \end{bmatrix}$$

一维搜索最佳步长应满足

$$f(\boldsymbol{x}^1)=\min_{\alpha} f(\boldsymbol{x}^0+\alpha\boldsymbol{d}^0)=\min_{\alpha}(40\alpha^2-20\alpha-3)$$

$$\alpha_0=0.25$$

$$\boldsymbol{x}^1=\begin{bmatrix}2\\0.5\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^1)=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

2）第二次迭代：

$$\beta_0=\frac{\left\|\nabla f(\boldsymbol{x}^1)\right\|^2}{\left\|\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\right\|^2}=\frac{5}{20}=0.25$$

$$\boldsymbol{d}^1=-\nabla f(\boldsymbol{x}^1)+\beta_0\boldsymbol{d}^0=\begin{bmatrix}2\\1.5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{x}^1+\alpha\boldsymbol{d}^1=\begin{bmatrix}2\\0.5\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}2\\1.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+2\alpha\\0.5+1.5\alpha\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}f(x)=(2+2\alpha)^2+2(0.5+1.5\alpha)^2-\\2(2+2\alpha)(0.5+1.5\alpha)-4(2+2\alpha)=\phi(\alpha)\end{aligned}$$

$$\alpha=1$$

$$\boldsymbol{x}^2=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{x}^2)=-8,\quad \nabla f(\boldsymbol{x}^2)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left\|\nabla f(\boldsymbol{x}^2)\right\|=0<\varepsilon$$