① Fourier 变换存在的条件

1). $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 绝对可积

2) $f(x)$ 在任意有界区间分段光滑

② Fourier 变换

Fourier 正变换：$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$

逆变换：$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{j\omega x}d\omega$

Fourier 余弦变换：$\hat{f}_c(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$

逆变换：$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega$

Fourier 正弦变换：$\hat{f}_s(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

逆变换：$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_s(\omega)\sin\omega x\,d\omega$

③ Laplace 变换

Laplace 正变换：$\tilde{f}(s)=\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx$

逆变换：$f(x)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \tilde{f}(s)e^{sx}ds$

④ 卷积 $f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-\xi)f_2(\xi)d\xi$.

⑤ Fourier 变换性质.

1) $f_1(x)*f_2(x)\longleftrightarrow F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

2). $f_1(x)\cdot f_2(x)\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

3). $f^{(k)}(x)\longleftrightarrow (j\omega)^k F(\omega)$

4) $(-jx)^k f(x)\longleftrightarrow F^{(k)}(\omega)$

5) $f(x-x_0)\longleftrightarrow e^{-j\omega x_0}F(\omega)$

6). $e^{j\omega_0 x}f(x)\longleftrightarrow F(\omega-\omega_0)$

7) $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\longleftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(\omega)$

8) $f(at)\longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$

9). 若 $f(x)\leftrightarrow F(\omega)$. 则 $F(x)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

10) $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega$

⑥ Laplace 变换性质.

1) $f(x-\tau) \longleftrightarrow e^{-s\tau}F(s)$

2) $e^{\tau x}f(x) \longleftrightarrow F(s-\tau)$

3) $f(ax) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{s}{a})$

4) $f^{(n)}(x) \longleftrightarrow s^n F(s)$

5) $\int_0^x f(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}F(s)$

6) $(-x)^n f(x) \longleftrightarrow F^{(n)}(s)$

7) $\frac{1}{x}f(x) \longleftrightarrow \int_s^{+\infty} F(s)ds$

8) $f_1(x)*f_2(x) \longleftrightarrow F_1(s)\cdot F_2(s)$

⑦. 常用 Laplace 变换对.

1) $\delta(t) \longleftrightarrow 1$　　2) $1 \longleftrightarrow \frac{1}{s}$

3). $e^{-at} \longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$　　4) $t^n \longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$

5) $\sin\omega_0 t \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$　　6). $\cos\omega_0 t \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$

习题: P116. 4. 解: $f(x)=e^{-ax}$

$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax}e^{-j\omega x}dx$

$= \frac{1}{j\omega+a}$

$\hat{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax}e^{-sx}dx$

$= \frac{1}{s+a}$

①. $\hat{f}(\omega)$

1). $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$　　$\hat{f_c}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\, f(x)dx \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}$.

$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{j\omega x}dx$　　$\hat{f_s}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\, dx \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}$.

2). 时间频反. 时微频 $X(j\omega)$, 频微时 $X(-jt)$

3) $\cos\omega_0 t \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

$\sin\omega_0 t \longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{\omega^2+a^2}$

②, $\tilde{f}(s)$

1). $\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx$

2) 时间频反，时微频$X(s)$. 频微时$X(-t)$

3) $e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$

$\cos\omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$

$\sin\omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$