习题一

1. 设 $X(n), n=1,2,\cdots$，是相互独立同分布随机变量序列，令

$$Y(n)=\sum_{k=1}^{n}X(k), n=1,2,\cdots$$

试证明下述情形，$\{Y(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是齐次马氏链.

(1) $X(n)$ 是伯努利随机变量序列，其中 $P\{X(n)=0\}=q, P\{X(n)=1\}=p, (0<p<1, p+q=1), n=1,2,\cdots$

(2) $X(n)\sim N(\mu,\sigma^2), n=1,2,\cdots$

$Y(n)$为平稳独立增量　　$\therefore Y(n)$为马氏链

$$Y(n)=\sum_{k=1}^{n}X(k)\quad n=1,2\ldots\ldots$$

$$p_{ij}(n,k)=p\{Y(n+k)=j|Y(n)-Y(0)=i\}$$

$$=p\{Y(n+k)-Y(n)=j-i\}$$

$$=p\left\{\sum_{m=n+1}^{n+k}X(m)=j-i\right\}=p_{ij}(k)\quad \therefore p_{ij}(n,k)\text{为齐次马氏链}$$

注：齐次马氏链地定义　$p_{ij}(m,k)=p\{X(m+k)=j|X(m)=i\}=p_{ij}(k)$

习题二

2. 设 $X(n), n=1,2,\cdots$，是相互独立随机变量序列，令

$$Y(n)=[X(1)+X(2)+\cdots+X(n)]^2, n=1,2,\cdots$$

证明：$\{Y(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是马氏链.

令 $Z(n)=X(1)+X(2)\ldots\ldots+X(n)\quad \therefore Y(n)=(Z(n))^2$

$Z(n)$为独立增量过程　$\Rightarrow$　$Z(n)$为马氏链

$$\mathrm{P}\{Y(n)=j|Y(1)=j_1,Y(2)=j_2\ldots\ldots Y(n-1)=j_{n-1}\}$$

$$=\mathrm{P}\{Z^2(n)=j|Z^2(1)=j_1,Z^2(2)=j_2,\ldots,Z^2(n-1)=j_{n-1}\}$$

$$=\mathrm{P}\{Z(n)=\pm\sqrt{j}|Z(1)=\pm\sqrt{j_1},Z(2)=\pm\sqrt{j_2},\ldots,Z(n-1)=\pm\sqrt{j_{n-1}}\}$$

$$\overset{Z_n\text{为马氏链}}{=}P\{Z(n)=\pm\sqrt{j}|Z(n-1)=\pm\sqrt{j_{n-1}}\}$$

$$=P\{Z(n)=\sqrt{j_1}|Z(n-1)=\sqrt{j_{n-1}}\}$$

$$=P\{Y(n)=j|Y(n-1)=j_{n-1}\}\quad Y(n)\text{为马氏链}$$

习题三

3. 设 $X(n), n=1,2,\cdots$，是相互独立取非负整数值的随机变量序列

$$Y(n)=\sum_{k=1}^{n}X(k), n=1,2,\cdots$$

$X(k)$	1	2	$\cdots$	k
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

证明：$\{Y(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 为马氏链并写出转移矩阵.

$Y(n)$为独立增量过程　　$\therefore Y(n)$为马氏链　　$Y(0)=0$

$$\mathrm{P}_{ij}(m,k)=P\{Y(m+k)=j|Y(m)=i\}$$

$$=P\{Y(m+k)-Y(m)=j-i|Y(m)-Y(0)=i\}$$

$$=P\left\{\sum_{i=m+1}^{m+k}X(i)=j-i\right\}$$

$$\overset{k=1\text{时}}{=}P\{X(m+1)=j-i\}\Rightarrow p_{ij}=\begin{cases}p_k, & 1\le j-i\le k\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

习题四

4. 设 $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是马氏链，证明

$$P\{X(1)=x_1|X(2)=x_2,X(3)=x_3,\cdots,X(n)=x_n\}$$
$$=P\{X(1)=x_1|X(2)=x_2\}$$

即马氏链的逆序也构成一个马氏链.

$$P\{X(1)=x_1|X(2)=x_2,\ldots,X(n)=x_n\}\quad P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$=\frac{P\{X(1)=x_1,X(2)=x_2,\ldots,X(n)=x_n\}}{P\{X(2)=x_1,X(3)=x_1\ldots X(n)=x_n\}}$$

$$=\frac{P\{X(1)=x_1,X(2)=x_2,\ldots,X(n-1)=x_{n-1}\}P\{X(n)=x_n|X(1)=x_1,X(2)=x_2,\ldots,X(n-1)=x_{n-1}\}}{P\{X(2)=x_2,X(3)=x_3,\ldots,X(n-1)=x_{n-1}\}P\{X(n)=x_n|X(2)=x_2,X(3)=x_3,\ldots,X(n-1)=x_{n-1}\}}$$

由于正序为马尔可夫鏈后两项相等

$$=\frac{P\{X(1)=x_1|X(2)=x_2,\ldots,X(n-1)=x_{n-1}\}}{P\{X(2)=x_2,X(3)=x_3,\ldots,X(n-1)=x_{n-1}\}}\quad \text{同理}$$

$$\text{原式}=\frac{\mathrm{P}\{X(1)=x_1,X(2)=x_2\}}{\mathrm{P}\{X(2)=x_2\}}=P\{X(1)=x_1|X(2)=x_2\}$$

马氏链的逆序也是马氏链

习题五

5. 如果马氏链的转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

证明：此马氏链不是遍历的马氏链，但具有平稳分布.

证明遍历性只需验证 P^2矩阵中是否为非零元素

$$P^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P^n \text{不存在！}$$

$\therefore$ 马氏链不是遍历的

$$\text{由式子}(\pi_0,\pi_1)P=(\pi_0,\pi_1)\text{得}\begin{cases}\pi_0=\pi_1\\ \pi_0+\pi_1=1\end{cases}\Rightarrow \pi_0=\pi_1=1/2$$

故具有平稳分布

习题六

6. 若明日是否降雨仅与今日是否有雨有关，而与已往的天气无关，并设今日有雨而明日有雨的概率为 0.6；今日无雨明日有雨的概率为 0.3. 设 $X(0)$表示今日的天气状态，$X(n)$表示第 n 日的天气状态. “$X(n)=1$”表示第 n 日有雨；“$X(n)=2$”表示第 n 日无雨. $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$是一个齐次马氏链.

(1) 写出状态转移概率矩阵；

(2) 求今日有雨而后日（第 2 日）仍有雨的概率；

(3) 求今日有雨而大后日（第 3 日）无雨的概率.

	有雨 1	无雨 2 （明天 ）
有雨 1	0.6	0.4
无雨 2	0.3	0.7
今天		

今日有雨后日仍有雨的 概率

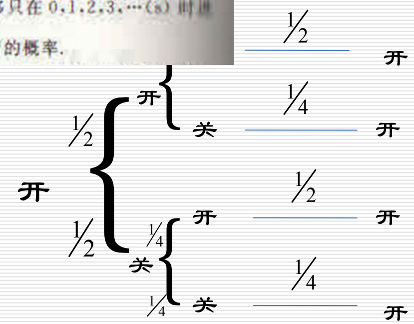
P = 0.6 × 0.6 + 0.4 × 0.3 = 0.48

今日有雨大后日无雨 P = 0.48 × 0.4 + 0.52 × 0.7 = 0.556

习题七

7. 一个开关有两种状态：开或关，设它现在开着时，经过单位时间(s)后，它仍然开着的概率为$\frac{1}{2}$，关上的概率为$\frac{1}{2}$；当它现在关着时，经过单位时间(s)后它仍然关着的概率为$\frac{3}{4}$，它打开的概率为$\frac{1}{4}$. 假设开关的状态转移只在 0,1,2,3,⋯(s) 时进行. 设 $t=0$ 时，开关开着. 求 $t=3$ 时，开关关着和开关开着的概率.

	开1	关2
开1	$1/2$	$1/2$
关2	$1/4$	$3/4$



$$t=3 \quad P_{开}=1/2\times1/2\times1/2+1/2\times1/2\times1/4+1/2\times1/4\times1/2+1/2\times3/4\times1/4=13/32$$

$$P_{关}=1-P_{开}=19/32$$

习题八

8. 四个人（标号为 1,2,3,4）把一个球相互之间传递. 每次有球的人等可能地把球传给其他三个人之一. 以 $X(0)$表示最初有球的人，$X(n)$表示传递 n 次后恰好有球的人. $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$是一个齐次马氏链.

(1) 写出状态转移矩阵；

(2) 计算 2 步和 3 步转移矩阵；

(3) 求经过 3 次传球后有球的人恰好是第 1 次传球后有球的人的概率；

(4) 求经过 3 次传球后恰好是开始拿球的人的概率.

	1	2	3	4
1	0	$1/3$	$1/3$	$1/3$
2	$1/3$	0	$1/3$	$1/3$
3	$1/3$	$1/3$	0	$1/3$
4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	0

$$P^2=\begin{vmatrix}1/3 & 2/9 & 2/9 & 2/9\\ 2/9 & 1/3 & 2/9 & 2/9\\ 2/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9\\ 2/9 & 2/9 & 2/9 & 1/3\end{vmatrix} \qquad P^3=\begin{vmatrix}2/9 & 7/27 & 7/27 & 7/27\\ 7/27 & 2/9 & 7/27 & 7/27\\ 7/27 & 7/27 & 2/9 & 7/27\\ 7/27 & 7/27 & 7/27 & 2/9\end{vmatrix}$$

经3次传球有球的人恰好是 第一次传球后有球的人 的概率

$$P_{22}(2)=1/3$$

经3次传球后恰好是开始拿 球人的概率 $P_{11}(3)=2/9$

习题九

9. 甲、乙两人进行比赛，设每局比赛甲胜的概率为 p，乙胜的概率为 q，和局的概率为 r，$p+q+r=1$，设每局比赛后胜者记"1"分，负者记"−1"分，和局记"0"分，当两人中有一个获得 2 分时，结束比赛。以 $X(n)$ 表示比赛至第 n 局时，甲获得的分数。$\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个齐次马氏链。

(1) 写出此马氏链的状态空间；

(2) 写出状态转移矩阵；

(3) 计算 2 步转移矩阵；

(4) 问在甲获得 1 分的情况下，再赛 2 局就结束比赛的概率为多少？

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
\mathbf{-2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{-1} & q & r & p & 0 & 0 \\
\mathbf{0} & 0 & q & r & p & 0 \\
1 & 0 & 0 & q & r & p \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$
P^2 = \left|\begin{matrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q+rq & r^2+qp & 2rp & p^2 & 0 \\
q^2 & 2qr & r^2+pq & 2rp & p^2 \\
0 & q^2 & 2qr & r^2+qp & p+rp \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{matrix}\right|
$$

由于考虑现实情况 $P \neq P_{12}(2) = p + rp$

习题十

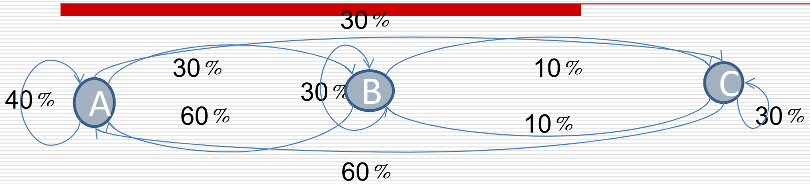
10. A、B、C 三家公司决定在某一时间推销一种新产品。当时它们各拥有 $\frac{1}{3}$ 的市场，然而一年后，情况发生了如下的变化：

(1) A 保住 40% 的顾客，而失去 30% 给 B，失去 30% 给 C；

(2) B 保住 30% 的顾客，而失去 60% 给 A，失去 10% 给 C；

(3) C 保住 30% 的顾客，而失去 60% 给 A，失去 10% 给 B。

如果这种趋势继续下去，试问第 2 年底各公司拥有多少份额的市场？（从长远来看，情况又如何？）



$$P_1(A) = \tfrac{1}{3}\times 40\% + \tfrac{1}{3}\times 60\% + \tfrac{1}{3}\times 60\% = \tfrac{16}{30}$$

$$P_1(B) = \tfrac{1}{3}\times 30\% + \tfrac{1}{3}\times 30\% + \tfrac{1}{3}\times 10\% = \tfrac{7}{30}$$

$$P_1(C) = \tfrac{1}{3}\times 30\% + \tfrac{1}{3}\times 30\% + \tfrac{1}{3}\times 10\% = \tfrac{7}{30}$$

$$P_2(A) = \tfrac{16}{30}\times 40\% + \tfrac{7}{30}\times 60\% + \tfrac{7}{30}\times 60\% = \tfrac{37}{75}$$

$$P_2(B) = \tfrac{7}{30}\times 40\% + \tfrac{16}{30}\times 60\% + \tfrac{7}{30}\times 60\% = \tfrac{19}{75}$$

$$P_2(C) = \tfrac{7}{30}\times 40\% + \tfrac{16}{30}\times 60\% + \tfrac{7}{30}\times 60\% = \tfrac{19}{75}$$

$$P(A) = 40\% P(A) + 60\% P(B) + 60\% P(C)$$

$$P(B) = 30\% P(A) + 30\% P(B) + 10\% P(C)$$

$$P(C) = 30\% P(A) + 10\% P(B) + 30\% P(C)$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$P(A) = \tfrac{1}{2} \quad P(B) = P(C) = \tfrac{1}{4} \qquad \lambda(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4})$$

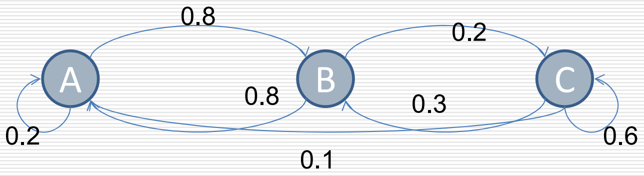
习题十一

11. 为适应日益扩大的旅游事业的需要，某城市的 A、B、C 三个照相馆组成一个营业部，联合经营出租相机的业务。旅游者可由 A、B、C 三处任何一处租出相机，用完后还到 A、B、C 三处的任何一处即可。估计转移概率如表 4.2 所示。

表 4.2

		还相机处		
		A	B	C
租相机处	A	0.2	0.8	0
	B	0.8	0	0.2
	C	0.1	0.3	0.6

今欲选择 A、B、C 之一附设租机维修点，问该点设在何处为好？



$$P(A)=0.2P(A)+0.8P(B)+0.1P(C)$$
$$P(B)=0.8P(A)+0.3P(C)$$
$$P(C)=0.2P(B)+0.6P(C)$$
$$P(A)+P(B)+P(C)=1$$

$\lambda\left(\frac{17}{41},\frac{16}{41},\frac{8}{41}\right)$放在 A处好

习题十二

12. 从整数 1 到 6 中随机地选取一个数 $X(1)$，对 $n>1$，$X(n)$表示从整数 1，2，…，$X(n-1)$中随机选出的数. $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$是一个齐次马氏链. 写出状态空间和状态转移矩阵.

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	½	½	0	0	0	0
3	⅓	⅓	⅓	0	0	0
4	¼	¼	¼	¼	0	0
5	⅕	⅕	⅕	⅕	⅕	0
6	⅙	⅙	⅙	⅙	⅙	⅙

习题十三

13. 独立地接连掷一枚均匀硬币. $X(n)$表示前 n 次掷出的正面次数. $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$是一个齐次马氏链. 试写出其状态空间和状态转移矩阵.

	1	2	3	4	5	6	7	∞
1	½	½	0	0	0	0	0	
2	0	½	½	0	0	0	0.......	
3	0	0	½	½	0	0	0......	
4	0	0	0	½	½	0	0......	
5	0	0	0	0	½	½	0.....	
.	0	0	0	0	0	.	. 0.....	
.	0	0	0	0	0	0	. .	0.....
∞							½	½

$X(n)$为独立增量过程 $\Rightarrow$ 马氏链

习题十四

14. 独立地接连掷一颗均匀骰子. $X(n)$表示前 n 次掷骰子所出现的最大点数. $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$是齐次马氏链. 写出状态空间和状态转移矩阵.

	1	2	3	4	5	6
1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
2	0	2/6	1/6	1/6	1/6	1/6
3	0	0	3/6	1/6	1/6	1/6
4	0	0	0	4/6	1/6	1/6
5	0	0	0	0	5/6	1/6
6	0	0	0	0	0	1

$X_n=\max\{X_{n-1},\xi_n\}$, $\xi_n=$第n次出现的点数

习题十五

15. 将 2 个红球和 2 个白球随机地放到甲、乙两个盒子中去，使得每个盒子各有 2 个球. 每次从两个盒子中各取一个球，并进行交换后放回. 以 $X(0)$表示开始时甲盒的红球数. $X(n)n\geq 1$ 表示经 n 次交换后甲盒中的红球数. $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$是一个齐次马氏链. 写出状态空间和状态转移矩阵.

	0	1	2
0	0	1	0
1	$1/4$	$1/2$	$1/4$
2	0	1	0

习题十六

次马氏链. 写出状态空间和状态转移矩阵.

16. 把一只白鼠放在一个如图 4.20 所示的迷宫中. 白鼠随机地在九个格子中移动. 就是说，若某个格子有 k 个出口，它选择每一出口离开这个格子的概率是$\frac{1}{k}$. 每隔一定时间白鼠更换一次它所在的格子. 以 $X(0)$表示开始白鼠所在格子的编号. $X(n)$表示第 n 次更换白鼠所在格子的编号. $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$是一个齐次马氏链. 试写出其状态空间和状态转移矩阵.

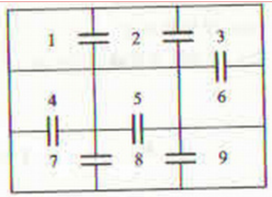


图 4.20

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$1/2$	0	$1/2$	0	0	0	0	0	0
3	0	$1/2$	0	0	0	$1/2$	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	$1/2$	0	0	0	$1/2$	0
8	0	0	0	0	$1/3$	0	$1/3$	0	$1/3$
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0

习题十七

17. 赌徒甲有 a 元，赌徒乙有 b 元，两人进行赌博. 每赌一局输者给胜者 1 元，没有和局，直赌到两人中有一个输光为止. 设在每一局中甲胜的概率为$\frac{1}{2}$，$X(n)$表示第 n 局时甲的赌金. $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$为齐次马氏链.

(1) 写出状态空间和状态转移矩阵；

(2) 求出甲输光的概率.

	0	1	2	3	.	.	$a+b$
0	1	0	0	0	0	0	0
1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	0	0
2	0	$1/2$	0	$1/2$	0	0	0
3	0	0	$1/2$	0	$1/2$	0	0
.	0	0	0	$1/2$	0	$1/2$	0
.	0	0	0	0	$1/2$	0	$1/2$
$a+b$	0	0	0	0	0	0	1

令 p_a 为从状态 a 到 0 的概率

$$p_a = \tfrac{1}{2} p_{a-1} + \tfrac{1}{2} p_{a+1}$$

$$p(a+b) - p(a+b-1) = p(a+b-1) - p(a+b-2)$$

$$p(a+b-1) - p(a+b-2) = p(a+b-2) - p(a+b-3)$$

.

$$p(a) - p(a-1) = p(a-1) - p(a-2)$$

.

$$p(1) - p(0) = p(1) - p(0)$$

$$p(a+b) - p(0) = (a+b)(p(1) - p(0))$$

$$p(a+b) = 0$$

$$p(0) = 1$$

$$\therefore\ p(1) = \frac{a+b-1}{a+b}$$

$$p(a) - p(0) = a(p(1) - p(0))$$

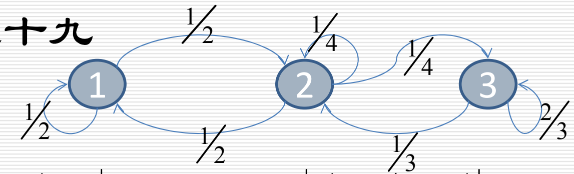
$$p(a) = \frac{b}{a+b}$$

19. 设齐次马氏链$\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间$E=\{1,2,3\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(1) 讨论其遍历性；(2) 求平稳分布；(3) 计算下列概率. i) $P\{X(4)=3|X(1)=1, X(2)=1\}$；ii) $P\{X(2)=1, X(3)=2|X(1)=1\}$.

习题十九



$$P=\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{vmatrix} \qquad P^2=\begin{vmatrix} 1/2 & 3/8 & 1/8 \\ 3/8 & 19/48 & 11/48 \\ 1/6 & 11/36 & 19/36 \end{vmatrix} \qquad P^2_{ij} \neq 0 \text{遍历性}$$

$$P(1)=\tfrac{1}{2}P(1)+\tfrac{1}{2}P(2)$$
$$P(2)=\tfrac{1}{2}P(1)+\tfrac{1}{4}P(2)+\tfrac{1}{3}P(3)$$
$$P(3)=\tfrac{1}{4}P(2)+\tfrac{2}{3}P(3)$$
$$P(1)+P(2)+P(3)=1$$
$$P(1)=P(2)=\tfrac{4}{11} \quad P(3)=\tfrac{3}{11}$$
$$\pi=\left(\tfrac{4}{11},\tfrac{4}{11},\tfrac{3}{11}\right)$$
$$P\{X(4)=3|X(1)=1,X(2)=1\}=P\{X(4)=3|X(2)=1\}=P_{13}(2)=\tfrac{1}{8}$$
$$P\{X(2)=1,X(3)=2|X(1)=1\}=P\{X(2)=1|X(1)=1\}P\{X(3)=2|X(2)=1\}$$
$$=P_{11}(1)P_{12}(1)=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4}$$

习题二十

20. 已知齐次马氏链$\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间$E=\{1,2,3\}$，状态转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

(1) 计算 2 步转移矩阵；

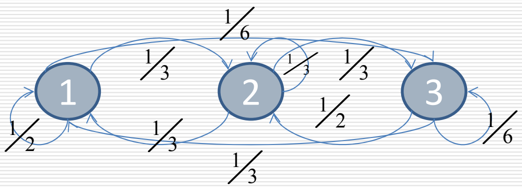
(2) 已知初始分布如右表所示；求 $X(2)$的分布律；

$X(0)$	1	2	3
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

(3) 求平稳分布.

$$\text{二步转移矩阵} \quad P^2=\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} 15/36 & 13/36 & 8/36 \\ 14/36 & 14/36 & 8/36 \\ 14/36 & 13/36 & 9/36 \end{vmatrix}$$

$$X(2)=X(0)P^2=\left(\tfrac{2}{5},\tfrac{2}{5},\tfrac{1}{5}\right)P^2=\tfrac{1}{180}(72,67,41)$$



$$P(1)=\tfrac{1}{2}P(1)+\tfrac{1}{3}P(2)+\tfrac{1}{3}P(3)$$
$$P(2)=\tfrac{1}{3}P(1)+\tfrac{1}{3}P(2)+\tfrac{1}{2}P(3)$$
$$P(3)=\tfrac{1}{6}P(1)+\tfrac{1}{3}P(2)+\tfrac{1}{6}P(3)$$
$$P(1)+P(2)+P(3)=1$$
$$P(1)=\tfrac{2}{5} \quad P(2)=\tfrac{13}{35} \quad P(3)=\tfrac{8}{35}$$
$$\pi=\tfrac{1}{35}(14,13,8)$$

习题二十一

21. 设齐次马氏链{$X(n)$, $n=0,1,2,\cdots$}的状态空间 $E=\{1,2,3\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

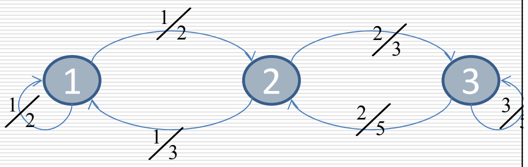
$$P=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{vmatrix}\qquad P^2=\begin{vmatrix}\frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{13}{30} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{15} & \frac{6}{25} & \frac{47}{75}\end{vmatrix}\qquad P_{ij}^2 \neq 0 \text{遍历性}$$

$$P(1)=\tfrac{1}{2}P(1)+\tfrac{1}{3}P(2)\qquad P(2)=\tfrac{1}{2}P(1)+\tfrac{2}{5}P(3)$$

$$P(3)=\tfrac{2}{3}P(2)+\tfrac{3}{5}P(3)\qquad P(1)+P(2)+P(3)=1$$

$$P(1)=\tfrac{1}{5},\ P(2)=\tfrac{3}{10},\ P(3)=\tfrac{1}{2}\qquad \pi=\tfrac{1}{10}(2,3,5)$$

$X(1)$	1	2	3
P	1/2	1/3	1/6



$$X(2)=X(1)P=\left(\tfrac{13}{36},\tfrac{19}{60},\tfrac{29}{90}\right)$$

$$P\{X(4)=3|X(1)=1,X(2)=2\}=P\{X(4)=3|X(2)=2,\ \}$$

$$=P_{23}(2)=\tfrac{2}{3}\times\tfrac{3}{5}=\tfrac{2}{5}$$

$$\{X(1)=1,X(2)=2,X(3)=3\}=\{P(X(1)=1)=\Sigma P_iP_{ii}(1)\}P_{12}(1)P_{23}(1)$$

$$=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\times\tfrac{2}{3}=\tfrac{1}{6}$$

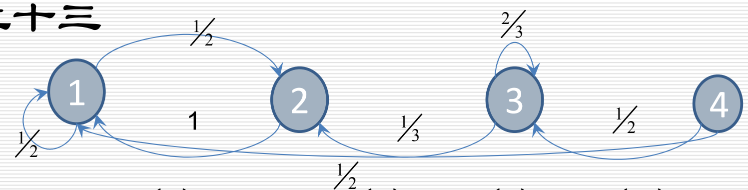
习题二十三

23. 设齐次马氏链{$X(n)$, $n=0,1,2,\cdots$}的状态空间 $E=\{1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

(1) 画出状态转移图； (2) 讨论各状态性质； (3) 分解状态空间。

习题二十三



$$f_{11}(1)=\tfrac{1}{2}\qquad f_{11}(2)=\tfrac{1}{2}\qquad f_{11}(3)=f_{11}(4)=f_{11}(\infty)=0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}f_{11}(i)=1\qquad \mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}(n)<+\infty\qquad \text{正常返}$$

$$f_{22}(1)=0\qquad f_{22}(2)=\tfrac{1}{2}\qquad f_{22}(3)=\tfrac{1}{4}\qquad f_{22}(n)=(\tfrac{1}{2})^{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}f_{22}(i)=\frac{\tfrac{1}{2}}{1-\tfrac{1}{2}}=1\qquad \mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}(n)<+\infty\qquad \text{正常返}$$

$$f_{33}(1)=\tfrac{2}{3}\qquad f_{33}(2)=f_{33}(3)=f_{33}(\infty)=0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}f_{33}(i)=\tfrac{2}{3}<1\qquad \text{非常返}$$

$$f_{44}(1)=f_{44}(2)\ldots.=f_{44}(\infty)=0\qquad \sum_{i=1}^{\infty}f_{44}(i)=0<1\ \ \text{非常返}$$

$$C=\{1,2\}\qquad N=\{3,4\}\qquad E=N+C$$

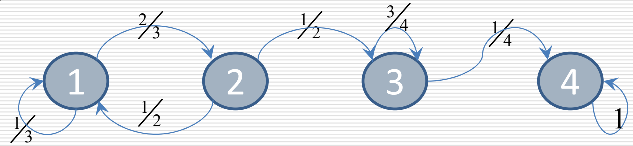
习题二十四

24. 齐次马氏链{$X(n)$, $n=0,1,2,\cdots$}，状态空间为 $E=\{1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 画出状态转移图；　(2) 讨论各状态性质；　(3) 分解状态空间.

习题二十四



4为吸收态

$f_{11}(1)=\frac{1}{3}$　　$f_{11}(2)=\frac{1}{3}$　　$f_{11}(3)=f_{11}(\infty)=0$

$\sum_{i=1}^{\infty} f_{11}(i)=\frac{2}{3}<1$　非常返

$f_{22}(1)=0$　　$f_{22}(2)=(\frac{1}{3})$　　$f_{22}(3)=(\frac{1}{3})^2$ .... $f_{22}(n)=(\frac{1}{3})^{n-1}$

$\sum_{i=1}^{\infty} f_{22}(i)=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}<1$　非常返

$f_{33}(1)=\frac{3}{4}$　　$f_{33}(2)=f_{33}(\infty)=0$

$\sum_{i=1}^{\infty} f_{33}(i)=\frac{3}{4}<1$　非常返

$N=\{1,2,3\}$　　$C=\{4\}$

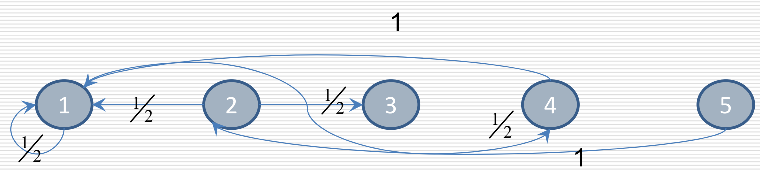
习题二十五

25. 设齐次马氏链{$X(n)$, $n=0,1,2,\cdots$}的状态空间 $E=\{1,2,3,4$

矩阵

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 画出状态转移图；　(2) 讨论各状态性质；　(3) 分解状态空间.



1,4为互通状态　　3位吸收态

$f_{11}(1)=\frac{1}{2}$　$f_{11}(2)=\frac{1}{2}$　$f_{11}(3)=f_{11}(4)=\ldots\ldots f_{11}(\infty)=0$

$\sum_{i=1}^{\infty} f_{11}(i)=1$　　$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{11}(n)<+\infty$　正常返

$f_{22}(1)=f_{22}(2)=f_{22}(\infty)=0<1$　$\sum_{i=1}^{\infty} f_{22}(i)=0<1$　非常返

$f_{44}(1)=0$　$f_{44}(2)=\frac{1}{2}$　$f_{44}(3)=(\frac{1}{2})^2$　$f_{44}(n)=(\frac{1}{2})^{n-1}$

$\sum_{i=1}^{\infty} f_{44}(i)=1$　　$\mu_4=\sum_{n-1}^{\infty} f_{44}(n)<+\infty$　正常返

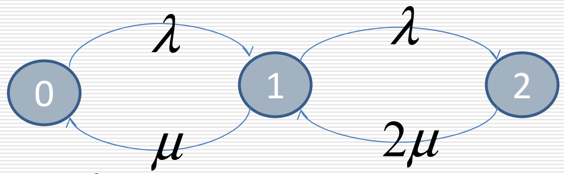
习题二十八

28. 某电话总机有 2 条中继线. 设电话呼叫按平均率为 λ 的泊松过程到达，平均每分钟有 2 次呼叫. 通话时间服从参数为 μ 的指数分布，每次平均通话 3 分钟，呼叫和通话相互独立. 若顾客发觉线路占满就不等待而离去. 设 $X(t)$ 表示时刻 t 时通话线路数 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是一个生灭过程.

(1) 画出状态转移速度图；

(2) 写出状态转移速度矩阵；

(3) 求平稳分布.



$\mu = 1/3 \qquad \lambda = 2$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & -\lambda & \lambda & 0 \\
1 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\
2 & 0 & 2\mu & -2\mu
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
\lambda_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{N} \dfrac{\lambda_0 \sigma_1 \cdots\cdots \sigma_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots\cdots \mu j}\right)^{-1} \\
\lambda_1 = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots\cdots \sigma_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots\cdots \mu \mathrm{k}} \pi_0
\end{cases}
$$

$\pi_0 = \left(1 + 2 \times 3 + 4 \times \frac{9}{2}\right)^{-1} = 1/25$

$\pi_1 = 2 \times 3 \times \frac{1}{25} = 6/25$

$\pi_2 = 2 \times 3 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{25} = 18/25$