习题四：

1. (1)画一个有Euler闭迹和Hamilton圈的图；
2. 画一个有Euler闭迹但没有Hamilton圈的图；
3. 画一个有Hamilton圈但没有Euler闭迹的图；
4. 画一个即没有Hamilton圈也没有Euler闭迹的图;

解：找到的图如下：

(1)一个有Euler闭迹和Hamilton圈的图；

(2)—个有Euler闭迹但没有Hamilton圈的图;

⑶一个有Hamilton圈但没有Euler闭迹的图;

(4)一个即没有Hamilton圈也没有Euler闭迹的图.

1. 设n阶无向简单图G有m条边，证明：若2 ) \* ',则G是血加此"图。 证明：G是H图。

若不然，因为G是无向简单图，则n芝3,由定理％若g是n芝3的非单图，则g

、一 ..*.C …*

度弱丁某个阵".于是有：

- - 1 2

E(G)| E(Cm,n) - m (n 2m)(n m 1) m(m 1)

1

1 -(m 1)(m

2) (m 1)(n 2m 1)

1.

这与条件矛盾！所以G是H图

若G有个奇点，则存在k条边不重的迹Q1・Q矿心，使得

8.证明

E(G) = E(Q】)U E(Q J U E(Q3) U …U E(Qk) 证明：不失一般性，只就 G是连通图进行证明。设 G=(n, m)是连通图。令 虬 V2,…,v,Vk+1,…,v是G的所有奇度点。在Vi与vi+k问连新边ei得图G\* (1三隹k). 则G\*是欧拉图，因此，由Fleury算法得欧拉环游C在C中删去ei (1m M k).得 k条边不重的迹Qi (1 MiMk):

E(G) E(Q1^E(Q2^^E(Qk)

1. 证明：若：

(1) G不是二连通图，或者

(2) G是具有二分类|(X,Y)的偶图，这里|X” |Y|

则G是非Hamilton图。

证明：(1) G|不是二连通图，则G不连通或者存在割点v,俨任-v) >2 ,由丁课本 上的相关定理：若G是Hamilton图，则对丁\**勇)*的任意非空顶点集S,有： w(G- S) < |S|,则该定理的逆否命题也成立，所以可以得出：若不是二连通图， 则G是非Hamilton图

(2)因为是具有二分类(XI)的偶图，乂因为|X|*丰*1丫1,在这里假设|X| < |Y|,则有 w(G-X) = |Y|>|X|，也就是说：对北(G)|的非空顶点集S,有：w(G-S)>||S|成 立，则可以得出则G是非Hamilton图。

1. 证明：若有Hamilton路，则对丁 V的每个真子集S,有w(G - S) ' |S | +】.

证明：G是H图，设C是G的H圈。则对V(G)的任意非空子集S,容易知道：

(C S) S

所以，有：(G S) (C S) |S，则必然有：W(G-S)W |S| + 1.

1. 设G是度序歹U为(di,d2, •••,©的非平凡单图，且 diM d2M・・・M dn。证明：若 G 不存在小丁(n+1)/2的正整数m,使得：dm<m且dn-m+i<n-m,则G有H路。

证明：在G之外加上一个新点v,把它和G的其余各点连接得图Gi

G1

Gi的度序列为：(di+1,d2+1，…,n+1, n),由条件：不存在小丁 (n+1)/2的正整数 m,使得dm+1M mH dn-m+i+1<n-m+1=(n+1)-ni 丁是由度序歹0判定定理知：Gi是H 图，得G有H路。

15.写出下列问题的一个好算法：

1. 构作一个图的闭包；
2. 若某图的闭包是完全图，求该图的 H圈。

解：(1)构作一个图的闭包：

根据图的闭包定义，构作一个图的闭包，可以通过不断在度和大丁等丁 n的非邻 接顶点对问添边得到。据此设计算法如下：

图的闭包算法：

G

1. 令 0=G ,k=0;
2. 在Gk中求顶点％与V。,使得：

dGk(&) dGk(Vo) max dGk(u) dGk (v) uv E(Gk)

1. 如果 dGk(uo) dGk (vo) n 则转4);否则，停止，

此时得到G的闭包；

1. 令Gn = Gk+ 咿七 k = k + l|,转 2).

复杂性分析：在第k次循环里，找到点u0与v0,要做如下运算：(a)找出所 有不邻接点对----需要n(n-1)/2次比较运算；(b)计算不邻接点对度和----需要做 n(n-1)/2-m(G炊加法运算;(c ),选出度和最大的不邻接点对----需要n(n-1)/2-m(G炊

比较运算。所以，总运算量为：

1. 1 \_ \_ 2

-n(n 1) 2 - n(n 1) m(G) O(n2)

1. 2

所以，上面的闭包算法是好算法。

(2)若某图的闭包是完全图，求该图的 H圈。

方法：采用边交换技术把闭包中的一个 H圈逐步转化为G的一个H圈。 该方法是基丁如下一个事实：

在闭包算法中，Gk + 1 = °k+呻七叫与昵在兑中不邻接，且度和大丁等丁

n.

如果在Gk+1中有H圈4+1如下：

Ck 1 (U0,V0,V1,..., Vn 2,U0)

Ck+1

我们有如下断言:

在 Ck 1上，v,vi 1,使得 u0vi,vovi 1 e (Gk)

Ck+l

若不然，设

—'那么在Gk中，至少有r个顶点与v0不邻接，则

=(n-1)-r < n-r,

这样与U0, v0在Gk中度和大丁等丁 n矛盾! 上面结论表明：可以从Ck+1中去掉"u%而得到新的H圈，实现H圈的边交换。由 此，我们设计算法如下：

1. 在闭包构造中，将加入的边依加入次序记为ei (1 Mi M N),这里，

N=n(n-1)/2-m(G)在Gn中任意取出一个 H圈CN,令k=N;

1. 若 ek 不在 Ck 中,令 Gk-1=Gk-ek, Ck-1=Ck;否则转 3);
2. 设ek=u0V0 € Ck,令Gk-1=Gk-ek；求Ck中两个相邻点u与v使得u0,v0,u,v依序

排歹0么 Ck上，且有：uuo,vvo € E(Gk-1),令：

Ck 1 Ck uovo , uv uu°,vv0

1. 若 k=1,转 5);否则，令 k=k-1,转 2);
2. 停止。Co为G的H圈。

复杂彳生分析：

一共进行N次循环，每次循环运算量主要在3),找满足要求的邻接顶点u与v, 至多n-3次判断。所以总运算量：N(n-3)属丁好算法。

习题五：

1. (1)证明：每个k方体都有完美匹配(k大丁等丁 2)

⑵ 求K2n和Kn,n中不同的完美匹配的个数。

证明一：证明每个k方体都是k正则偶图。

事实上，由k方体的构造：k方体有2k个顶点，每个顶点可以用长度为k的二进 制码来表示，两个顶点连线当且仅当代表两个顶点的二进制码只有一位坐标不 同。如果我们划分k方体的2k个顶点，把坐标之和为偶数的顶点归入 X,否则归 入Y。显然，X中顶点互不邻接，Y中顶点也如此。所以k方体是偶图。乂不难 知道k方体的每个顶点度数为k,所以k方体是k正则偶图。

由推论：k方体存在完美匹配。

证明二：直接在k方体中找出完美匹配。

设k方体顶点二进制*码为*(X1 ,X2,…以,我们取(X1 ,X2, ••• kX1,0)，和(X1 ,X2, ••• kX1,1) 之间的全体边所成之集为 M.显然，M中的边均不相邻接，所以作成 k方体的匹 配，乂容易知道：|M|=2 k-1.所以M是完美匹配。

⑵我们用归纳法求K2n和Kn,n中不同的完美匹配的个数。

K2n的任意一个顶点有2n-1种不同的方法被匹配。所以K2n的不同完美匹配个数 等丁 (2n-1)险n-2,如此推下去，可以归纳出K2n的不同完美匹配个数为：(2n-1)!! 同样的推导方法可归纳出K n, n的不同完美匹配个数为：n!

1. 证明树至多存在一个完美匹配。

证明：若不然，设M1与M2是树T的两个不同的完美匹配，那么 M1则2当，容 易知道：T[M1ZM2]每个非空部分顶点度数为2,即它存在圈，丁是推出T中有圈， 矛盾。

7.将％表示为四个生成圈之和

证明：K4n+1= K 2(2n)+1 ,所以，可以分解为 2n个边不重的 2因子之和。而

K9= K2 X4+ 1|。

所以、可以表示为四个边不重的2因子之和，对丁每个分解出的因子的路径为：

Pi = ViV^lV4 + lVi- 2Vi + 少-U1 + J

,

则、的四条路径为：

Pl = VlV8V2V7V3VOV4V5

,

P2 = V2VlV3VflV4V7V5V6,

P3 = V3V2V4VlV5VUVbV7

,

P4=V4V3V5V2V6V1V7V^

,

则生成圈儿是七Ml与P］的两个端点连线生成的。所以可以将 孔表示为四个生成 圈之和。

10.证明：若n为偶数，且a (G)»n/2+1，则n阶图G有3因子。

证明：因a (G)» n/2+1，由狄拉克定理：n阶图G有H圈C 乂因n为偶数，所以C 为偶圈。丁是由C可得到G的两个1因子。设其中一个为F1 o

考虑 G1=G-F1。贝U §(Gi) > n/2 丁是 G1 中有 H 圈 G.

作H=G U F1。显然H是G的一个3因子。

19.证明：对n> 1,K+1有一个4因子分解。

证明：K4n+1= K2(2n)+1 ,所以，可以分解为2n个边不重的2因子之和。而任意2个 2因子可以并成一个4因子。所以，共可以并成n个4因子。即K4n+1可以分解为 n个4因子的和。所以：对n> 1,临+1有一个4因子分解