Exercices de révision matrices

A. Multiplication

Correction 1

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -2 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Correction 2

1. a. La matrice A admet pour expression :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b. La matrice B admet pour expression :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. On a le produit matriciel :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

3. a. En utilisant les valeurs obtenues dans le produit matriciel de la question 2., on obtient :

- Pour le fournisseur "*PasTropCher*", un montant de : $19{\times}1000 + 11{\times}1000 = 30\,000$ €.
- Pour le fournisseur "*BonPrix*", un montant de : $15{\times}1000 + 11{\times}1000 = 26\,000$ €.

Ainsi, il est préférable de choisir le fournisseur "*BonPrix*".

b. Le montant de la facture avec le fournisseur "*BonPrix*" s'élève à $26\,000$ €.

B. Multiplication et résolutions de systèmes d'équations linéaires

Correction 3

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3{\cdot}a+b+4{\cdot}c \\ 2{\cdot}a-b \\ a-b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3a + b + 4c = 5 \\ 2a - b = 0 \\ a - b + c = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} 6a + 2b + 8c = 10 \\ 6a - 3b = 0 \\ 6a - 6b + 6c = -6 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 6a + 2b + 8c = 10 \\ 5b + 8c = 10 \\ 8b + 2c = 16 \end{cases} \implies \begin{cases} 6a + 2b + 8c = 10 \\ 40b + 64c = 80 \\ 40b + 10c = 80 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 6a + 2b + 8c = 10 \\ 40b + 64c = 80 \\ 54c = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $c{=}0$.

De la seconde ligne, on a :

$$\begin{aligned} 40b + 64c &= 80 \\ 40b + 0 &= 80 \\ 40b &= 80 \\ b &= \frac{80}{40} \\ b &= 2 \end{aligned}$$

De la première ligne, on obtient :

$$\begin{aligned} 6a + 2b + 8c &= 10 \\ 6a + 2{\times}2 + 8{\times}0 &= 10 \\ 6a + 4 + 0 &= 10 \\ 6a &= 10 - 4 \\ 6a &= 6 \\ a &= \frac{6}{6} \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, ces réels ont pour valeurs :
$a = 1 \quad ; \quad b = 2 \quad ; \quad c = 0$

Correction 4

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} -a+3b+c \\ a+2c \\ -a+6b+4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a + 3b + c = 5 \\ a + 2c = 7 \\ -a + 6b + 4c = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} -a + 3b + c = 5 \\ -a - 2c = -7 \\ -a + 6b + 4c = 6 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} -a + 3b + c = 5 \\ 3b + 3c = 12 \\ -3b - 3c = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} -a + 3b + c = 5 \\ 3b + 3c = 12 \\ 0c = 11 \end{cases}$$

La dernière équation montre qu'aucune valeur de c ne peut vérifier ce système. On en déduit : $\mathcal{S} = \varnothing$

C. Puissances n-ième de matrices et raisonnement par récurrence

Correction 5

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel par la relation :

$$\mathcal{P}_n : \text{“} A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 1 \end{pmatrix} \text{”}$$

Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**

  Pour $n=0$, on a :
  $$\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 2^0-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  On vient d'établir que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie à un rang n quelconque ; c'est à dire qu'on a pour hypothèse de récurrence :
  $$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$$
  Effectuons les calculs suivants :
  $$A^{n+1} = A\cdot A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$$
  $$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^n+2^n-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2\times 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$$
  $$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1}-1 & 1 \end{pmatrix}$$
  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ a été initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

D. Matrice inverse et expressions algébriques

Correction 6

1. a. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$
On en déduit la valeur suivante :
$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

   b. D'après la question précédente, on remarque les égalités suivantes :
$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
$$A^2 + A = 6\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^2 + A = 6\cdot I_3$$
$$\frac{1}{6}\cdot\left(A^2 + A\right) = I_3$$
$$\frac{1}{6}\cdot A^2 + \frac{1}{6}\cdot A = I_3$$
$$A\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot A + \frac{1}{6}\cdot I_3\right) = I_3$$
De cette égalité, on en déduit que la matrice A et la matrice $\frac{1}{6}\cdot A+\frac{1}{6}\cdot I_3$ sont des matrices inverses l'une de l'autre.

2. La matrice inverse de la matrice A est définie par :
$$\frac{1}{6}\cdot A + \frac{1}{6}\cdot I_3 = \frac{1}{6}\cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Correction 7

1. a. On a les deux matrices suivantes :
   - $A^2 = A\cdot A$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -3 \\ -6 & 7 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$
   - $3\times A = 3\times \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -6 & 3 & 3 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

   On en déduit la matrice de l'expression :
$$A^2-3\times A = \begin{pmatrix} 7 & \text{-}6 & \text{-}3 \\ \text{-}6 & 7 & 3 \\ \text{-}6 & 6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & \text{-}6 & \text{-}3 \\ \text{-}6 & 3 & 3 \\ \text{-}6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   b. D'après la question précédente, on obtient les égalités suivantes :

$$A^2-3\times A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\big(A-3\times I_3\big)=4\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\big(A-3\times I_3\big)=4\times I_3$$

$$\frac{1}{4}\times A\cdot\big(A-3\times I_3\big)=I_3$$

$$A\cdot\Big(\frac{1}{4}\times A-\frac{3}{4}\times I_3\Big)=I_3$$

Ainsi, la matrice inverse de la matrice A est la matrice : $A^{-1}=\frac{1}{4}\times A-\frac{3}{4}\times I_3$

2. On en déduit la matrice inverse de la matrice A :

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\times A-\frac{3}{4}\times I_3=\frac{1}{4}\times\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-2&1&1\\-2&2&0\end{pmatrix}-\frac{3}{4}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&0&0\\0&\frac{3}{4}&0\\0&0&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

Correction 8

1. $M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}6&2&3\\4&4&1\\10&4&7\end{pmatrix}$$

2. On a :

$M^2+8\cdot M+6\cdot I_2$

$$=\begin{pmatrix}6&2&3\\4&4&1\\10&4&7\end{pmatrix}+8\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&2&3\\4&4&1\\10&4&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8&8&8\\8&-8&8\\32&16&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}20&10&11\\12&2&9\\42&20&21\end{pmatrix}=M^3$$

3. De l'égalité précédente :

$$M^3=M^2+8\cdot M+6\cdot I_3$$

$$M^3-M^2-8\cdot M=6\cdot I_3$$

$$M\cdot M^2-M\cdot M-8\cdot M\cdot I_3=6\cdot I_3$$

$$M\cdot\big(M^2-M-8\cdot I_3\big)=6\cdot I_3$$

$$\frac{1}{6}\cdot M\cdot\big(M^2-M-8\cdot I_3\big)=I_3$$

$$M\cdot\Big[\frac{1}{6}\cdot\big(M^2-M-8\cdot I_3\big)\Big]=I_3$$

On en déduit le facteur $\frac{1}{6}\cdot\big(M^2-M-8\cdot I_3\big)$ est l'inverse de la matrice M.

4. On a :

$$M^2-M-8\cdot I_3=\begin{pmatrix}6&2&3\\4&4&1\\10&4&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{pmatrix}-8\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&1&2\\3&5&0\\6&2&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&2\\3&-3&0\\6&2&-2\end{pmatrix}$$

On en déduit la matrice inverse de la matrice M :

$$M^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\big(M^2-M-8\cdot I_3\big)=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-3&1&2\\3&-3&0\\6&2&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

E. Système d'équations linéaires sans calculatrice

Correction 9

1. a. On a le produit :

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+z\\x+2z\\x+3y\end{pmatrix}$$

b. Avec le résultat précédent, l'égalité :

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\7\\7\end{pmatrix}$$

se transforme en :

$$\begin{pmatrix}x+2y+z\\x+2z\\x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\7\\7\end{pmatrix}$$

Ainsi, les valeurs de x, y et z vérifiant l'égalité de cette question sont en fait les solutions du système $(\mathcal{S})$.

2. a. On a le produit :

$$\begin{pmatrix}-6&3&4\\2&-1&-1\\3&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b. Considérons l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c. Ainsi, le système $(\mathcal{S})$ admet un seul couple solution : $(1\,;2\,;3)$

Correction 10

1. a. On a le calcul matriciel suivant :

$$6{\cdot}A - A^2 = 6{\cdot}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

b. De la question précédente, on a obtenu :

$$6{\cdot}A - A^2 = 5{\cdot}I$$

$$\frac{6}{5}{\cdot}A - \frac{1}{5}{\cdot}A^2 = I$$

$$\Big(\frac{6}{5}{\cdot}I\Big){\cdot}A - \Big(\frac{1}{5}{\cdot}A\Big){\cdot}A = I$$

$$\Big(\frac{6}{5}{\cdot}I - \frac{1}{5}{\cdot}A\Big){\cdot}A = I$$

Cette égalité montre que la matrice $\frac{6}{5}{\cdot}I - \frac{1}{5}{\cdot}A$ est l'inverse de la matrice A.

c. On a le calcul matriciel :

$$A^{-1} = \frac{6}{5}{\cdot}I - \frac{1}{5}{\cdot}A = \frac{6}{5}{\cdot}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}{\cdot}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2. Le système se traduit par :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A{\cdot}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}{\cdot}A{\cdot}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}{\cdot}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$I{\cdot}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}{\cdot}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{16}{5} \end{pmatrix}$$

F. Système d'équations linéaires avec calculatrice

Correction 11

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Considérons l'équation matricielle :

$$A \cdot X = Y$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x - 3y - 2z \\ 3x + y + z \\ -2x + 3y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  On remarque que cette équation matricielle définit les mêmes équations linéaires que pour le système (S). On en déduit qu'ils ont même ensemble des solutions.

- L'usage d'un logiciel de calcul formel permet d'obtenir :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 9 \\ -11 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

- Le système d'équations proposé permet d'écrire :

$$A{\cdot}X = Y$$
$$A^{-1}{\cdot}\big(A{\cdot}X\big) = A^{-1}{\cdot}Y$$
$$\big(A^{-1}{\cdot}A\big){\cdot}X = A^{-1}{\cdot}Y$$
$$I_3{\cdot}X = A^{-1}{\cdot}Y$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 9 \\ -11 & 3 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ce système admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \Big\{\big(-1\,;-5\,;6\big)\Big\}$

Correction 12

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Considérons l'équation matricielle :
$$A \cdot X = Y$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ -3x + 2y - 3z \\ x - y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
On remarque que cette équation matricielle définit les mêmes équations linéaires que pour le système (S). Ils partagent donc le même ensemble de solutions.

- L'utilisation d'un logiciel de calcul formel permet d'obtenir :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Le système d'équations proposé permet d'écrire :
$$A{\cdot}X = Y$$
$$A^{-1}{\cdot}\big(A{\cdot}X\big) = A^{-1}{\cdot}Y$$
$$\big(A^{-1}{\cdot}A\big){\cdot}X = A^{-1}{\cdot}Y$$
$$I_3{\cdot}X = A^{-1}{\cdot}Y$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$
Le système d'équations $(\mathcal{S})$ a pour ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \Big\{\big(-7\,;0\,;6\big)\Big\}$

G. Système d'équations linéaires et modélisation

Correction 13

Du tableau de valeurs, on en déduit les images suivantes par la fonction C :

$C(1) = 11 \quad ; \quad C(3) = 27{,}4 \quad ; \quad C(5) = 83$

Etudions cas par cas, les conditions que ces relations imposent aux réels a, b et c :

- $$C(1) = 11$$
$$a{\times}1^3 + b{\times}1^2 + c{\times}1 + 10 = 11$$
$$a{\times}1 + b{\times}1 + c = 11 - 10$$
$$a + b + c = 1$$
- $$C(3) = 27{,}4$$
$$a{\times}3^3 + b{\times}3^2 + c{\times}3 + 10 = 27{,}4$$
$$27{\cdot}a + 9{\cdot}b + 3{\cdot}c = 27{,}4 - 10$$
$$27{\cdot}a + 9{\cdot}b + 3{\cdot}c = 17{,}4$$
- $$C(5) = 83$$
$$a{\times}5^3 + b{\times}5^2 + c{\times}5 + 10 = 83$$
$$125{\cdot}a + 25{\cdot}b + 5{\cdot}c = 83 - 10$$
$$125{\cdot}a + 25{\cdot}b + 5{\cdot}c = 73$$

Ainsi, le triplet $(a\,;b\,;c)$ vérifie le système :
$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17{,}4 \\ 125a + 25b + 5c = 73 \end{cases}$$

Correction 14

1. a. On a le produit matriciel :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 25 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ 27a + 9b + 3c \\ 125a + 25b + 5c \end{pmatrix}$$
Ainsi, on écrit ce système sous la forme $M{\cdot}X{=}Y$ en posant :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 25 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 17{,}4 \\ 73 \end{pmatrix}$$

b. En admettant que la matrice M est inversible, on a alors les égalités :
$$M{\cdot}X = Y$$
$$X = M^{-1}{\cdot}Y$$
A l'aide de la calculatrice :
$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{40} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ \frac{15}{8} & -\frac{5}{12} & \frac{3}{40} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 17{,}4 \\ 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

2. De la question 1. b., on en déduit l'expression de la fonction C du coût total :
$C(x) = 0{,}5{\cdot}x^3 + 0{,}4{\cdot}x^2 + 0{,}1{\cdot}x + 10$

Ainsi, pour la production de 8 milliers de recharge, le coût total de production en centaines d'euros sera de :
$C(8) = 0{,}5{\times}8^3 + 0{,}4{\times}8^2 + 0{,}1{\times}8 + 10$
$\quad = 256 + 25{,}6 + 0{,}8 + 10 = 292{,}4$

C'est à dire de : 29 340 €.

Correction 15

1. Les trois conditions vérifiées par la fonction f permettent d'obtenir des conditions sur les réels a, b et c :

- $$\begin{aligned} f(-1) &= -8 \\ a{\cdot}(-1)^3 + b{\cdot}(-1)^2 + c{\cdot}(-1) + 2 &= -8 \\ -a + b - c + 2 &= -8 \\ -a + b - c &= -8 - 2 \\ -a + b - c &= -10 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f(1) &= 8 \\ a{\cdot}1^3 + b{\cdot}1^1 + c{\cdot}1 + 2 &= 8 \\ a + b + c &= 8 - 2 \\ a + b + c &= 6 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f(2) &= 28 \\ a{\cdot}2^3 + b{\cdot}2^2 + c{\cdot}2 + 2 &= 28 \\ 8{\cdot}a + 4{\cdot}b + 2{\cdot}c &= 26 \end{aligned}$$

Ainsi, les réels a, b et c doivent être une solution du système d'équation :

$$\begin{cases} -a + b - c = -10 \\ a + b + c = 6 \\ 8a + 4b + 2c = 26 \end{cases}$$

2. a. Considérons les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Etudions l'équation matricielle $(\mathcal{E})$, on a :

$$A \cdot X = Y$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a + b - c \\ a + b + c \\ 8a + 4b + 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 26 \end{pmatrix}$$

On en déduit que l'équation matricielle $(\mathcal{E})$ est équivalente au système d'équations $(\mathcal{S})$.

b. De l'équation matricielle $(\mathcal{E})$, on a :

$$\begin{aligned} A \cdot X &= Y \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot Y \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot Y \\ X &= A^{-1} \cdot Y \end{aligned}$$

A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le triplet solution du système $(\mathcal{S})$:
$(3\,;\,-2\,;5)$