Matrices - Exercices

Exercice 1

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

On note $a_{i,j}$ (resp. $b_{i,j}$, $c_{i,j}$) le terme général de la matrice A (resp. B, C).

a. Quelles sont les tailles des trois matrices ?

b. Donner les valeurs de $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $b_{3,1}$, $b_{1,3}$, $c_{2,1}$, et $c_{1,2}$.

c. Remplacer les points des relations ci-dessous par les indices convenables (trouver **les** bonnes réponses) :

$$b_{.,.} = 1,\ a_{1,.} = 1,\ c_{1,.} + c_{.,1} = 4.$$

2. Écrire la matrice à 2 lignes et 3 colonnes définie par la formule : $a_{i,j} = i^2 + j^2$.

Exercice 2

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer : $A + B$, $2A - 3B$, $3A - 2B$.

2. Soient les matrices $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice $M = 2U - 3V + W$.

Exercice 3

1. Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer MB, BM, Mu, uM et uv.

2. Calculer les produits matriciels suivants :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ne pas oublier de vérifier les calculs avec une calculatrice.

3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'inverse (si elle existe) des matrices suivantes :

a. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2{,}5 & 2 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

4. Soient les matrices $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer UV, VU, U^2, V^2 et enfin $U^2 + 2UV + V^2$.

b. Calculer $W = U + V$, puis W^2.

Exercice 4

Une entreprise de confection de vêtements fabrique des jupes, des robes et des pantalons.

- Pour fabriquer une jupe, il faut 0,75 m de tissu, 4 boutons et une fermeture Éclair.
- Pour fabriquer une robe, il faut 1,5 m de tissu, 6 boutons et une fermeture Éclair.
- Pour fabriquer un pantalon, il faut 1,25 m de tissu, 2 boutons et une fermeture Éclair.

On appelle x, y et z les quantités respectives de jupes, de robes et de pantalons confectionnés, et a, b et c les quantités de tissu (en mètres), de boutons et de fermeture Éclair utilisées pour la fabrication.

Enfin on considère les matrices : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,75 & 1,5 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1. **a.** Vérifier que $\mathrm{B} = \mathrm{MA}$.

b. Déterminer a, b et c pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.

2. On considère la matrice $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $\mathrm{M}'\mathrm{M}$.

b. Écrire la matrice A en fonction de B et de M'.

c. En déduire x, y et z quand on utilise 735 m de tissu, 2 400 boutons et 620 fermetures Éclair.

Exercice 5

Des amis se retrouvent dans un bar. Jean et Claude se partagent l'addition : pour un café et trois chocolats, Jean paie 12,50 € et pour deux cafés et quatre chocolats, Claude paie 18 €. En utilisant le calcul matriciel, ou une méthode déjà connue, déterminer le prix de chacune des deux boissons.

Exercice 6

Résoudre les systèmes suivants en utilisant le calcul matriciel :

1. $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 3x + 2y - z = 6 \\ -x - y + 2z = -5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 3y + z = -7 \\ 2x + y - z = -6 \\ -3x - y + z = 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ x - 2y + 4z = -3 \end{cases}$

Exercice 7

Pour une fabrication, une entreprise utilisera x pièces de type X, y pièces de type Y et z pièces de type Z. La masse et le coût de chacune de ces pièces sont donnés dans le tableau suivant :

Masse en grammes	2,5	2	1
Coût en euro	1	1,5	0,5

L'entreprise effectue une étude en vue d'optimiser cette fabrication. Pour cela, elle doit considérer le nombre total N de pièces employées, leur masse totale M en gramme et leur coût total C en euro.

1. Exprimer N, M et C en fonction de x, y et z.

2. On se propose de résoudre le système (S) d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} x + y + z = \mathrm{N} \\ 2,5x + 2y + z = \mathrm{M} \\ x + 1,5y + 0,5z = \mathrm{C} \end{cases}.$$

a. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2{,}5 & 2 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} N \\ M \\ C \end{pmatrix} = B$$

Traduire le système (S) par une égalité matricielle.

b. On désigne par A^{-1} la matrice inverse de la matrice A. Calculer A^{-1} à la calculatrice ou avec un logiciel.

c. Démontrer que $X = A^{-1}B$.

d. En déduire la solution du système (S).

3. L'étude a montré que la fabrication est optimale lorsque sont employées au total 140 pièces, d'une masse totale de 275 g et d'un coût total de 135 euros. Dans ces conditions, calculer le nombre de pièces de chacun des types X, Y, Z qui seront utilisées pour cette fabrication.

Exercice 8

Une agence de voyages propose un circuit touristique pour visiter trois villes A, B, C. Le client peut choisir la durée de son séjour dans chacune des trois villes.
L'agence propose des tarifs qui diffèrent selon la période. Il existe trois périodes touristiques :

- une période haute (tarifs élevés) ;
- une période moyenne ;
- une période basse.

Les prix journaliers, en centaines d'euros par personne, dans les différents lieux, sont donnés dans le tableau suivant :

	Ville A	Ville B	Ville C
Période haute	2,5	3,5	1,5
Période moyenne	2	2	1,5
Période basse	1	1	1

On appelle P la matrice $\begin{pmatrix} 2{,}5 & 3{,}5 & 1{,}5 \\ 2 & 2 & 1{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui représente les prix journaliers par ville et par période.

1. Monsieur M choisit un circuit de 14 jours qui comprend 6 jours dans la ville A, 5 jours dans la ville B et 3 jours dans la ville C. On associe à ce choix la matrice $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit matriciel $P \times M$. Que représentent les termes de la matrice obtenue ?

b. Monsieur M dispose d'un budget de 2 600 euros. À quelle période pourra-t-il voyager ?

2. On donne les matrices $Q = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4{,}5 \\ 1 & -2 & 1{,}5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et la matrice unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit matriciel $Q \times P$.

b. Montrer que, pour toutes les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $P \times X = Y \Leftrightarrow X = Q \times Y$.

3. Dans une publicité, l'agence de voyages affirme qu'un circuit complet de 14 jours est possible au prix de 2 600 euros en période haute, 2 250 euros en période moyenne et 1 400 euros en période basse. Comment se compose ce voyage ?