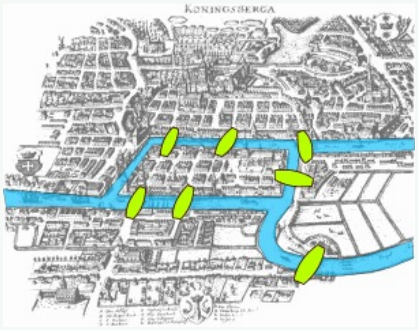
Graphes

I. Exemples

Exemple

On peut commencer par le problème des « sept ponts de Königsberg » (exemple historique lié à Euler) :



La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessus. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.

Exemple

Dans une ville, on considère 4 carrefours A, B, C, D reliés par des rues à sens unique ou à double sens. On a les renseignement suivants :

- une rue à sens unique va de A à B;
- une rue à sens unique va de A à C;
- une rue à sens unique va de C à D;
- une rue à sens unique va de D à D sans passer par A, B ou C;
- une rue en double sens relie A et D;
- une rue en double sens relie B et C.

On peut représenter cette situation par :

- un graphique;
- un tableau des successeurs;
- un tableau de prédécesseurs;
- un tableau à double entrée;
- une matrice d'adjacence.

II. Définitions, vocabulaire

1. Graphe

Définitions

Un **graphe** est un ensemble de points appelé sommets et de liaisons appelées arcs. (Dans notre étude, ces arcs seront simples et orientés. Ils pourront être pondérés)

Une **boucle** est un arc dont les extrémités sont confondues

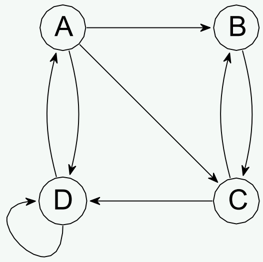
Un **chemin** est une suite d'arcs tels que chaque fin d'arc est le début de l'arc suivant (s'il y en a un).

Un **circuit** est un chemin dont le premier et le dernier sommet sont identiques.

Un **chemin hamiltonien** est un chemin qui passe une fois et une seule par chacun des sommets du graphe.

Exemple

L'exemple introductif peut-être représenté par le graphe G :



II.2. Matrice d'adjacence

Définition

Soit $\mathcal{G}$ un graphe dont les sommets sont $A_1, A_2, \ldots, A_n$

La matrice d'adjacence du graphe $\mathcal{G}$ est la matrice carrée d'ordre n, notée $M = (a_{ij})$ telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } A_i - A_j \text{ est un arc du graphe} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple

La matrice M du graphe de l'exemple introductif est :

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarques

Pour interpréter plus facilement les matrices, il est commode de « border » la matrice avec les sommets.

Il faut pas oublier le « sens de lecture » de la matrice d'adjacence :

- les arcs existants vont des lignes vers les colonnes;
- une ligne donne les successeurs;
- une colonne donne les prédécesseurs;
- la diagonale donne les boucles.

III. Applications

1. Longueur d'un chemin

Définition

La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arcs qui le constituent.
Un chemin de n sommets est de longueur $n-1$.

Propriété

Si M est la matrice d'adjacence d'un graphe simple orienté de sommets $A_1, A_2, \dots, A_n$, le nombre de chemins de longueur p d'un sommet A_i à un sommet A_j est le nombre situé ligne i et colonne j dans la matrice M^p.

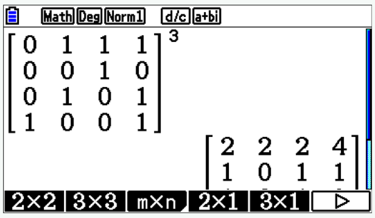
Exemple

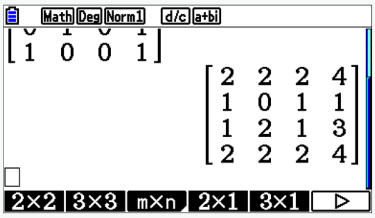
Pour le graphe donné en exemple introductif, on a, par exemple,

$$M^3 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

De ce fait, on peut affirmer qu'il y a 2 chemins de longueur 3 allant de C à B :

- C – B – C – B ;
- C – D – A – B.





Définition

On note $M^{[n]}$ la n-ième puissance booléenne de la matrice M.
Elle se calcule comme M^n en utilisant l'addition et la multiplication booléenne.

Propriété

Il existe au-moins un chemin de longueur p du sommet A_i au sommet A_j ssi le coefficient $(i\,j)$ de la matrice $M^{[p]}$ est égale à 1.

III.2. Fermeture transitive

Définition

La fermeture transitive du graphe $\mathcal{G}$ est le graphe $\widehat{\mathcal{G}}$ constitué des sommets et des arcs de $\mathcal{G}$ auxquels on ajoute, si nécessaire, les arcs (A; B) pour lesquels il existe un chemin (de longueur quelconque) allant du sommet A au sommet B.

Théorème

La matrice $\widehat{M}$ de la fermeture transitive d'un graphe $\mathcal{G}$ à n sommets est donnée par :

$$\widehat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus \dots \oplus M^{[n]}$$

avec $\oplus$ l'addition booléenne
On dit que $\widehat{M}$ est la matrice d'accessibilité du graphe $\mathcal{G}$

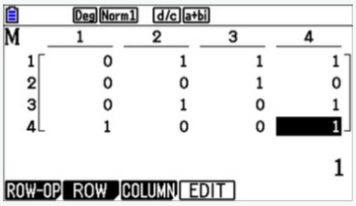
Exemple

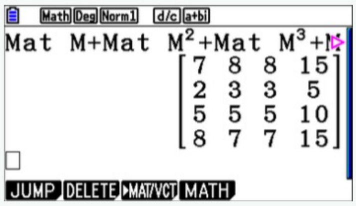
Pour le graphe donné en exemple introductif, on a

$$\mathrm{M}+\mathrm{M}^2+\mathrm{M}^3+\mathrm{M}^4 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \\ \mathsf{C} \\ \mathsf{D} \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 & 15 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 10 \\ 8 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix} \end{array}.$$

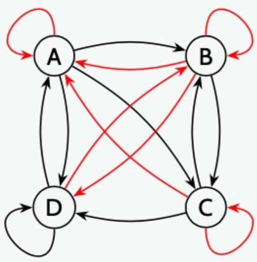
De ce fait, on obtient $\widehat{\mathrm{M}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \\ \mathsf{C} \\ \mathsf{D} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$

Concrètement, de chacun des sommets, on peut aller à tous les autres.





Pour construire le graphe $\widehat{\mathcal{G}}$, on complète le graphe $\mathcal{G}$ avec les nouvelles arêtes venant des 1 de $\widehat{\mathrm{M}}$:



III.3. Circuits

Théorèmes

Si chaque sommet du graphe possède au-moins un prédécesseur, alors le graphe contient un circuit.
Donc, si chaque colonne de la mat. d'adj. contient au-moins une fois « 1 », alors il y a un circuit dans le graphe.

De même, si chaque sommet possède au-moins un successeur, alors le graphe contient un circuit.
Donc, si chaque ligne de la mat. d'adj. contient au-moins une fois « 1 », alors il y a un circuit dans le graphe.

Théorème

Le graphe $\mathcal{G}$ est sans circuit si et seulement si sa fermeture transitive $\widehat{\mathcal{G}}$ n'a pas de boucle, c'est-à-dire si et seulement si la diagonale de $\widehat{\mathrm{M}}$ ne contient que des 0.

IV. Compléments

1. Niveau d'un sommet

Définition - Méthode

Dans un graphe sans circuit, le **niveau** d'un sommet est la longueur du chemin le plus long d'extrémité ce sommet.

On peut représenter un graphe ordonné par niveaux, avec comme effet de n'avoir aucun arc entre deux sommets d'un même niveau (autrement dit aucun arc « vertical »)!

Pour déterminer le niveau des sommets d'un graphe sans circuit :

- N_0 est constitué des sommets sans prédécesseur ;
- on « barre » les sommets de N_0 ;
- N_1 est constitué des (nouveaux) sommets sans prédécesseur ;
- on « barre » les sommets de N_1 ;
- N_2 est constitué des (nouveaux) sommets sans prédécesseur ;
- etc

On peut ensuite représenter le graphe, de manière « horizontale », de sorte que les arcs iront **toujours** de la gauche vers la droite :

N_0 N_1 N_2 etc

IV.2. Graphes valués

Définition

Un graphe **valué** (ou **pondéré**) est un graphe pour lequel on a affecté une valeur à chacun des arcs.

Propriété

La **valeur** d'un chemin est égale à la somme des valeurs des arcs de ce chemin

Définition - Propriété

Un chemin **optimal** est un chemin de valeur (ou poids) minimale ou maximale d'une sommet à l'autre.
On peut utiliser l'algorithme de **Dijkstra** ou le **marquage de Ford** pour déterminer une plus courte chaîne entre deux sommets.

IV.3. Arborescence

Définition

Une arborescence est un graphe qui possède un sommet et un seul nommé **racine** tel que tout sommet peut être atteint par un chemin et un seul issu de cette racine.

On peut utiliser une arborescence pour : des arbres généalogiques, des arbres de probas, hierarchiques, etc