Matrices

I. Notion de matrice

1. Introduction

Intro

Les matrices sont des **tableaux rectangulaires** (ou carrés) constitués de nombres et sont des outils qu'on utilise fréquemment lorsqu'on veut représenter une situation comportant plusieurs « entrées » et plusieurs « sorties » (*input-output*).

2. Définitions

Définitions

- Si n et p sont deux entiers naturels non nuls, on appelle **matrice réelle** de **dimensions** $n \times p$ tout tableau M de nombres réels possédant n lignes et p colonnes.
- Dans une matrice M, il y a donc $n \times p$ nombres, qu'on appelle les **coefficients** (éléments ou termes) de M.
- Lorsque $p = n$ (autant de colonnes que de lignes), on parle de matrice carrée.
  Pour une matrice M carrée d'ordre n les coefficients qui sont « visuellement » situés sur la diagonale descendant d'en haut à gauche jusqu'en bas à droite sont naturellement appelés coefficients diagonaux de M.
- La dimension de la matrice M est désignée par $n \times p$.
- Le terme de M situé à la $i$ème ligne ($1 \leqslant i \leqslant n$) et à la $j$ème colonne ($1 \leqslant j \leqslant p$) est noté a_{ij}.

Exemple

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 10 & 12 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. La matrice A de dimension 2×4. Et : $a_{21} = 1$ $a_{22} = 7$ $a_{14} = 2$.

Propriété - Matrices particulières

Si $n = 1$: la matrice M est une **matrice ligne** $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_p \end{pmatrix}$.

Si $p = 1$: la matrice M est une **matrice colonne** $M = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$.

I.3. Matrice nulle, matrice identité

Définitions

Une matrice nulle est une matrice ne contenant que des « 0 ». On la note O.

La matrice carrée I_n d'ordre n est une **matrice identité** (ou **matrice unité**) si les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 et les autres coefficients sont tous égaux à 0.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la matrice identité d'ordre 3.}$$

II. Calcul matriciel

1. Égalité de deux matrices

Propriété

Deux matrices sont égales si elles ont :
- les mêmes dimensions ;
- les mêmes coefficients.

Exemple

Par exemple, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas égales (coefficients de la première ligne...).

II.2. Addition de deux matrices

Définition

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même dimension $n \times p$.

La matrice somme des matrices A et B est la matrice notée $A + B = (c_{ij})$ à n lignes et p colonnes telle que :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Remarque

Ajouter deux matrices de même dimension $n \times p$ revient à faire $n \times p$ additions de réels. Les propriétés de l'addition des matrices sont donc les mêmes que les propriétés bien connues de l'addition des réels.

Propriétés

Quelles que soient les matrices A, B, C à n lignes et à p colonnes :
- $A + B = B + A$. (commutativité)
- $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$. (associativité)
- $A + O = O + A = A$. (la matrice nulle de dimension $n \times p$ est élément neutre pour l'addition)
- Il existe une matrice notée $-A$ telle que $A + (-A) = (-A) + A = O$; la matrice $-A$ est la matrice opposée à A. La matrice $-A$ est la matrice dont les termes sont les opposés des termes de la matrice A.
- L'existence, pour toute matrice A, d'une matrice opposée, permet de définir une soustraction de matrices (de même dimension) : $A - B = A + (-B)$.

Exercice

On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$. A et B sont de même dimensions :

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & -8 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } A - B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.3. Multiplication par un réel

Définition

Si A est une matrice de dimensions $n \times p$ et si k est un nombre réel, on définit la matrice kA comme la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient de A par le réel k.

$$kA = \left(k \times a_{ij}\right).$$

Exercice

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ alors $3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ et $-5A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$.

Propriétés

Quelles que soient les matrices A et B et les réels k et k' :

- $k(A+B) = kA + kB$
- $(k+k')A = kA + k'A$
- $k(k'A) = (kk')A$

III. Produit de deux matrices

1. Introduction

Méthode

Pour multiplier deux matrices, on dit qu'on effectue le produit « **ligne par colonne** ».
Le produit de matrices A× B n'est été possible que parce que le nombre de **colonnes** de la matrice A est égal au nombre de **lignes** de la matrice B (« on pose en triangle »).

2. Définition, propriétés

Définition

Soient $A = \left(a_{ij}\right)$ une matrice $n \times p$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ une matrice $p \times r$.
Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice notée $AB = \left(c_{ij}\right)$ de dimension $n \times r$ et définie par :

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ip}b_{pk}.$$

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, alors $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$ car $\begin{cases} 1 \times (-2) + 2 \times 2 = 2 \\ 1 \times (-3) + 2 \times 5 = 7 \\ 0 \times (-2) + 3 \times 2 = 6 \\ 0 \times (-3) + 3 \times 5 = 15 \end{cases}$; et $B \times A = \begin{pmatrix} -2 & -13 \\ 2 & 19 \end{pmatrix}$.

Propriétés

Quelles que soient les matrices A, B et C et le réel k :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (associativité)
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$
- $A \times (kB) = (kA) \times B = k(A \times B)$
- Dans le cas des matrices carrées d'ordre n, la matrice identité I_n est telle que $A \times I_n = I_n \times A = A$

Remarques

Le produit de deux matrices :

- n'est pas toujours possible (les dimensions doivent être compatibles)
- n'est pas commutatif
- peut être égal à une matrice nulle sans pour autant que l'une des matrices ne soit une matrice nulle.

IL N'EXISTE PAS DE DIVISION ENTRE MATRICES

IV. Matrice inverse

1. Définition

Définition

Si M est une matrice carrée d'ordre n, on dit que M est **inversible** s'il existe une matrice carrée d'ordre n notée M^{-1} vérifiant : $MM^{-1} = M^{-1}M = I_n$ (I_n désigne la matrice identité d'ordre n)

Cette matrice M^{-1}, si elle existe, est unique et est appelée matrice inverse de la matrice M.

Remarque

Il existe des matrices non inversibles.

Exemples

La calculatrice permet de déterminer l'inverse (quand elle existe) d'une matrice carrée:

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, alors A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ 1/4 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$;
- Si $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, alors B n'est pas inversible (on parle de matrice singulière).

2. Résolution de systèmes linéaires

Exemple

$$(S) : \begin{cases} x - \ \ 2y + 2z = 1 \\ 2x + 12y + \ \ z = 5 \\ 3x - 12y + 8z = 1 \end{cases}$$

est un système **linéaire** de **trois** équations à **trois** inconnues (x,y,z).

Le triplet $(3\,;0\,;-1)$ est une **solution** du système : en effet, lorsque l'on remplace x par 3, y par 0 et z par -1, les trois égalités sont **vraies**.

Définition

Soit (S) un système linéaire de trois équations à trois inconnues. Il est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + kz = p \end{cases}$$

Où a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, p sont des nombres réels et x, y, z sont les inconnues.

Résoudre ce système consiste à trouver tous les triplets de réels (x, y, z) qui vérifient les trois équations.

Remarque

D'une manière générale, résoudre dans $\mathbb{R}$ un système linéaire de n équations à n inconnues consiste à déterminer l'ensemble des n-uplets de réels qui vérifient en même temps les n équations.

Méthode

Le passage par les matrices permet :
- transformer matriciellement le système sous le forme $AX = B$;
- utiliser (si elle existe) l'inverse de A pour en déduire $X = A^{-1}B$.

Démonstration souvent demandée dans les exos Type BTS

Si A est inversible, on a

$$AX = Y \Leftrightarrow A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times Y \Leftrightarrow I \times X = A^{-1} \times Y \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Exemple

On souhaite résoudre le système donné dans l'exemple introductif.
En utilisant le produit matriciel, on remarque que ce système peut s'écrire sous la forme $AX = Y$
où A, X, Y sont les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 3 & -12 & 8 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La calculatrice donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} 54/7 & -4/7 & -13/7 \\ -13/14 & 1/7 & 3/14 \\ -30/7 & 3/7 & 8/7 \end{pmatrix}$.

On obtient $X = A^{-1}Y$, soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54/7 & -4/7 & -13/7 \\ -13/14 & 1/7 & 3/14 \\ -30/7 & 3/7 & 8/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Et ainsi $\mathcal{S} = \{(3\,;0\,;-1)\}$.

Matrices - Exercices

Exercice 1

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

On note $a_{i,j}$ (resp. $b_{i,j}$, $c_{i,j}$) le terme général de la matrice A (resp. B, C).

a. Quelles sont les tailles des trois matrices ?

b. Donner les valeurs de $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $b_{3,1}$, $b_{1,3}$, $c_{2,1}$, et $c_{1,2}$.

c. Remplacer les points des relations ci-dessous par les indices convenables (trouver **les** bonnes réponses) :

$$b_{.,.} = 1,\ a_{1,.} = 1,\ c_{1,.} + c_{.,1} = 4.$$

2. Écrire la matrice à 2 lignes et 3 colonnes définie par la formule : $a_{i,j} = i^2 + j^2$.

Exercice 2

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer : $A + B$, $2A - 3B$, $3A - 2B$.

2. Soient les matrices $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice $M = 2U - 3V + W$.

Exercice 3

1. Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer MB, BM, Mu, uM et uv.

2. Calculer les produits matriciels suivants :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ne pas oublier de vérifier les calculs avec une calculatrice.

3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'inverse (si elle existe) des matrices suivantes :

a. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2{,}5 & 2 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

4. Soient les matrices $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer UV, VU, U^2, V^2 et enfin $U^2 + 2UV + V^2$.

b. Calculer $W = U + V$, puis W^2.

Exercice 4

Une entreprise de confection de vêtements fabrique des jupes, des robes et des pantalons.

- Pour fabriquer une jupe, il faut 0,75 m de tissu, 4 boutons et une fermeture Éclair.
- Pour fabriquer une robe, il faut 1,5 m de tissu, 6 boutons et une fermeture Éclair.
- Pour fabriquer un pantalon, il faut 1,25 m de tissu, 2 boutons et une fermeture Éclair.

On appelle x, y et z les quantités respectives de jupes, de robes et de pantalons confectionnés, et a, b et c les quantités de tissu (en mètres), de boutons et de fermeture Éclair utilisées pour la fabrication.

Enfin on considère les matrices : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 1{,}5 & 1{,}25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1. **a.** Vérifier que $\mathrm{B} = \mathrm{MA}$.

b. Déterminer a, b et c pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.

2. On considère la matrice $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} -1{,}6 & 0{,}1 & 1{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & -1{,}4 \\ 0{,}8 & -0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $\mathrm{M}'\mathrm{M}$.

b. Écrire la matrice A en fonction de B et de M'.

c. En déduire x, y et z quand on utilise 735 m de tissu, 2 400 boutons et 620 fermetures Éclair.

Exercice 5

Des amis se retrouvent dans un bar. Jean et Claude se partagent l'addition : pour un café et trois chocolats, Jean paie 12,50 € et pour deux cafés et quatre chocolats, Claude paie 18 €. En utilisant le calcul matriciel, ou une méthode déjà connue, déterminer le prix de chacune des deux boissons.

Exercice 6

Résoudre les systèmes suivants en utilisant le calcul matriciel :

1. $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 3x + 2y - z = 6 \\ -x - y + 2z = -5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 3y + z = -7 \\ 2x + y - z = -6 \\ -3x - y + z = 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ x - 2y + 4z = -3 \end{cases}$

Exercice 7

Pour une fabrication, une entreprise utilisera x pièces de type X, y pièces de type Y et z pièces de type Z. La masse et le coût de chacune de ces pièces sont donnés dans le tableau suivant :

Masse en grammes	2,5	2	1
Coût en euro	1	1,5	0,5

L'entreprise effectue une étude en vue d'optimiser cette fabrication. Pour cela, elle doit considérer le nombre total N de pièces employées, leur masse totale M en gramme et leur coût total C en euro.

1. Exprimer N, M et C en fonction de x, y et z.

2. On se propose de résoudre le système (S) d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} x + y + z = \mathrm{N} \\ 2{,}5x + 2y + z = \mathrm{M} \\ x + 1{,}5y + 0{,}5z = \mathrm{C} \end{cases}.$$

a. On considère les matrices :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2{,}5 & 2 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mathrm{N} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix}.$$

Traduire le système (S) par une égalité matricielle.

b. On désigne par A^{-1} la matrice inverse de la matrice A. Calculer A^{-1} à la calculatrice ou avec un logiciel.

c. Démontrer que $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$.

d. En déduire la solution du système (S).

3. L'étude a montré que la fabrication est optimale lorsque sont employées au total 140 pièces, d'une masse totale de 275 g et d'un coût total de 135 euros. Dans ces conditions, calculer le nombre de pièces de chacun des types X, Y, Z qui seront utilisées pour cette fabrication.

Exercice 8

Une agence de voyages propose un circuit touristique pour visiter trois villes A, B, C. Le client peut choisir la durée de son séjour dans chacune des trois villes.
L'agence propose des tarifs qui diffèrent selon la période. Il existe trois périodes touristiques :

- une période haute (tarifs élevés) ;
- une période moyenne ;
- une période basse.

Les prix journaliers, en centaines d'euros par personne, dans les différents lieux, sont donnés dans le tableau suivant :

	Ville A	Ville B	Ville C
Période haute	2,5	3,5	1,5
Période moyenne	2	2	1,5
Période basse	1	1	1

On appelle P la matrice $\begin{pmatrix} 2{,}5 & 3{,}5 & 1{,}5 \\ 2 & 2 & 1{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui représente les prix journaliers par ville et par période.

1. Monsieur M choisit un circuit de 14 jours qui comprend 6 jours dans la ville A, 5 jours dans la ville B et 3 jours dans la ville C. On associe à ce choix la matrice $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit matriciel $\mathrm{P} \times \mathrm{M}$. Que représentent les termes de la matrice obtenue ?

b. Monsieur M dispose d'un budget de 2 600 euros. À quelle période pourra-t-il voyager ?

2. On donne les matrices $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4{,}5 \\ 1 & -2 & 1{,}5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et la matrice unité $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit matriciel $\mathrm{Q} \times \mathrm{P}$.

b. Montrer que, pour toutes les matrices colonnes $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\mathrm{P} \times \mathrm{X} = \mathrm{Y} \Leftrightarrow \mathrm{X} = \mathrm{Q} \times \mathrm{Y}$.

3. Dans une publicité, l'agence de voyages affirme qu'un circuit complet de 14 jours est possible au prix de 2 600 euros en période haute, 2 250 euros en période moyenne et 1 400 euros en période basse. Comment se compose ce voyage ?