Exercices de révision matrices

A. Multiplication

Exercice 1

Effectuer les produits suivants de matrices :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Une entreprise nécessite chaque année des fournitures de bureau pour faire fonctionner ses départements "*administratifs*" et "*productions*". Le tableau ci-dessous recense ses besoins pour une année en milliers d'unités :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Administration (D_1)	3	4	1
Production (D_2)	1	2	3

Un appel d'offres est lancé auquel répondent deux entreprises. Le tableau ci-dessous représente le prix unitaire en euros de chacun des fournitures nécessaire à cette entreprise :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Fournisseur PasTropCher (F_1)	2	3	1
Fournisseur BonPrix (F_2)	3	1	2

1. a. Ecrire la matrice $A=(a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} est la quantité du matériel M_j nécessaire au département D_i.

   b. Ecrire la matrice $B=(b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} est le prix proposé par le fournisseur F_j pour le matériel M_i.

2. Effectuer le produit matriciel suivant : $A \cdot B$.

3. a. Afin de réaliser des économies, quel fournisseur l'entreprise doit choisir.

   b. Pour ce fournisseur, donner le montant de l'achat des fournitures de bureau.

B. Multiplication et résolutions de systèmes d'équations linéaires

Exercice 3

Soit a, b et c sont trois nombres réels réalisant l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des réels a, b c

Exercice 4*

Soit a, b et c sont trois nombres réels solutions de l'équation :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des triplets $(a\,;b\,;c)$ solutions de cette équation.

C. Puissances n-ième de matrices et raisonnement par récurrence

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Etablir, que pour tout entier naturel n : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$

D. Matrice inverse et expressions algébriques

Exercice 6

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a. Déterminer la matrice A^2+A.

   b. Exprimer la matrice inverse de A en fonction A et de I_3.

2. En déduire la matrice inverse de la matrice A.

Exercice 7

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a. Déterminer la matrice $A^2-3\times A$.

   b. Exprimer la matrice inverse de A en fonction de A et de I_3.

2. En déduire la matrice inverse de la matrice A.

Exercice 8*

On donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice M^2.

On donne : $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

2. Vérifier que : $M^3 = M^2 + 8\cdot M + 6\cdot I_3$

3. En déduire que M est inversible et que :
$$M^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\left(M^2 - M - 8\cdot I_3\right)$$

4. En déduire la matrice inverse de la matrice M.

E. Système d'équations linéaires sans calculatrice

Exercice 9

On souhaite résoudre le système suivant :
$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x + 2z = 7 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

1. a. Effectuer le produit matriciel suivant :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   b. Que peut-on dire des solutions de l'équation matricielle suivante :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. a. Effectuer le produit matriciel suivant :
$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   b. En utilisant la question précédente, simplifier l'équation suivante :
$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

   c. Donner le triplet $(x\,;y\,;z)$ solution du système $(\mathcal{S})$ d'équations.

Exercice 10*

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

1. a. Calculer la matrice $6\cdot A - A^2$.

   b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme :
   $A^{-1} = \alpha\cdot I + \beta\cdot A$,
   où α et β sont deux réels que l'on déterminera.

   c. Etablir que la matrice A^{-1} admet pour expression :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2. Proposer une résolution du système :
$$\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

F. Système d'équations linéaires avec calculatrice

Exercice 11

Résoudre le système d'équations ci-dessous en utilisant un logiciel de calcul formel et les matrices :
$$(S) : \begin{cases} 3x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \\ -2x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

Exercice 12

Résoudre le système d'équations ci-dessous en utilisant un logiciel de calcul formel et les matrices :
$$(S) : \begin{cases} 2x - 3y + z = -8 \\ -3x + 2y - 3z = 3 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

G. Système d'équations linéaires et modélisation

Exercice 13

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$ par :
$$C(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + 10 \qquad \text{où } \left\{ \text{a, b et c sont des nombres réels.} \right.$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

Justifier que le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution du système $(\mathcal{S})$.
$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17{,}4 \\ 125a + 25b + 5c = 73 \end{cases}$$

Exercice 14*

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

le coût total de production est modélise par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0\,;10\right]$ par :

$C(x)=a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2+c{\cdot}x+10$

où a, b, c des nombres réels.

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution du système (S) :

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 27a+9b+3c=17{,}4 \\ 125a+25b+5c=73 \end{cases}$$

On pose : $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1. a. Ecrire ce système sous la forme $M{\cdot}X{=}Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

   b. On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet $(a\,;b\,;c)$ solution du système (S).

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites?

*Exercice 15**

On considère la fonction f définie par le polynôme du troisième degré :

$f(x)=a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2+c{\cdot}x+2$ où a, b, $c\in\mathbb{R}$

La fonction f admet les images suivantes :

$f(-1)=-8$; $f(1)=8$; $f(2)=28$

1. Ecrire un système $(\mathcal{S})$ de trois équations et de trois inconnues dont le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution.

2. On note X la matrice colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   a. Exprimer deux matrices A et Y tel que l'équation $(\mathcal{E})$ matrice ci-dessous admet le même triplet solution du système $(\mathcal{S})$ d'équations :

   $(\mathcal{E})$: $A\cdot X=Y$.

   b. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée du triplet solution de $(\mathcal{S})$ au centième près.