43. +++ **Résoudre un système linéaire à l'aide d'une inversion de matrice**

On se propose de résoudre le système S, d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ 2x+3y+z=2 \\ 3x+y+2z=-3. \end{cases}$$

1. On considère les matrices :

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Déduire du système S une relation entre les matrices M, X et A.

2. On désigne par M^{-1} la matrice inverse de M. Exprimer la matrice X en fonction de M^{-1} et A.

3. Un logiciel de calcul formel donne :

$$M^{-1}=-\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

En déduire la solution du système S.

44. +++

Soit les matrices :

$$M=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

où x, y, z, a, b et c sont des nombres réels.

On considère le système d'équations

$$S:\begin{cases} -x-3y \quad = a \\ x-y \quad\quad = b \\ x+3y+2z = c. \end{cases}$$

1. Vérifier que résoudre le système S à trois inconnues réelles x, y et z équivaut à résoudre l'équation E : $MX=Y$ où l'inconnue est la matrice X.

2. **a)** Calculer M^2 et M^3.

b) Exprimer M^3 en fonction de I.

3. **a)** Montrer que : $MX=Y$ équivaut à $X=\frac{1}{8}M^2Y$.

b) En déduire la résolution du système S.

c) Donner les solutions de S lorsque :

$a=3, \quad b=-5 \quad \text{et} \quad c=4.$