Homework 1

2411374 朱灏轩

Question 1

理想的 P-N 结电流方程为：

$$I = I_c(e^{\frac{qV}{k_0T}} - 1.0)$$

其中，I 为电流，V 为偏压，T 为温度，I_c 为反向饱和电流，q 为电子电荷，k_0 为玻尔兹曼常数。

在存在内在电阻的情况下，P-N 结的电流方程变为：

$$I = I_c(e^{\frac{q(V-I\times R)}{k_0T}} - 1.0)$$

其中 R 为 P-N 结的内在电阻。

采用牛顿法解含内阻的 P-N 结电流方程

$$I = I_c(e^{\frac{q(V-I\times R)}{k_0T}} - 1.0)$$

$$\text{其中，}\begin{aligned} Ic &= 10^{-11}\ \ \mathrm{A} \\ R &= 10\ \ \Omega \\ T &= 300\ \ \mathrm{K} \end{aligned}$$

在 $V = [-1, 1]$ V的区间内每间隔 0.01 V求解对应的电流值，要求相对精度达到 0.001。用对数尺度画出求得的 $I - V$ 数据，并在适当的区间上与理想电流方程作比较。

Solution

首先根据题设信息在程序中设定相关变量

```
% 参数设置
I_c = 1e-11; % 理想电流
R = 10; % 内阻
T = 300; % 温度
k_0 = physconst("Boltzmann"); % 玻尔兹曼常数
q = 1.602176634e-19; % 电子带电量
Vmin = -1;
Vmax = 1;
V = Vmin:0.01:Vmax;
I = zeros(size(V)); % 创建电流数组
delta = 0.001; % 定义相对精度
i_init = 0; % 定义电流初始值
```

遍历电压数组，根据牛顿法解出含内阻情况下的电流变化情况

```
% 在含内阻情况下求解方程
syms x; % 定义未知数 x
index = 1;
for v = Vmin:0.01:Vmax
```

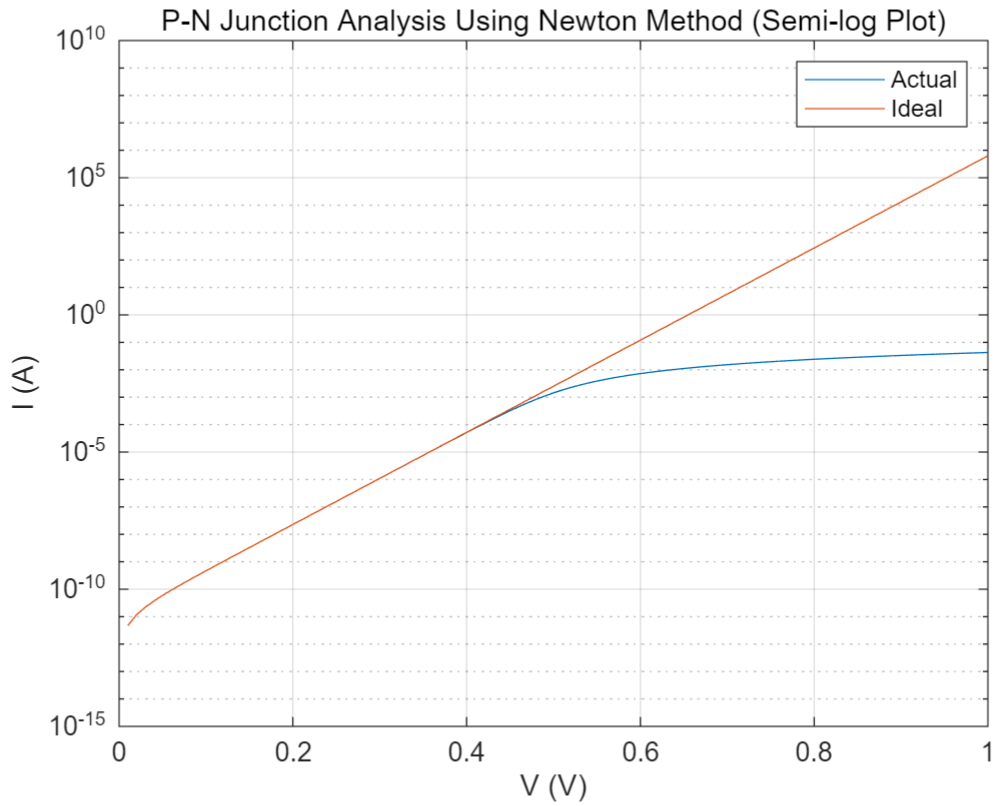
```
    f(x) = I_c * (exp(q*(v - x*R)/(k_0*T)) - 1.0) - x; % 定义待求解方程
    df = diff(f, x); % 求函数对未知数 x 的导数
    i_curr = i_init; % 设定电流初始值
    while true
        i_next = i_curr - double(f(i_curr))/double(df(i_curr)); % 计算下一个迭代值
        if abs((i_next - i_curr)/i_next) < delta % 设定迭代终止条件
            break;
        elseif i_next == 0 % 若 i_next 为 0 则停止迭代
            break;
        end
        i_curr = i_next;
    end
    I(index) = i_curr; % 保存数值解
    index = index + 1;
end
```

类似地，求出不含内阻的理想情况下，电流的变化情况

```
% 在不含内阻的理想情况下求解方程
I_ideal = zeros(size(V));
syms x; % 定义未知数 x
index = 1;
for v = Vmin:0.01:Vmax
    f(x) = I_c * (exp(q*(v)/(k_0*T)) - 1.0) - x; % 定义待求解方程
    df = diff(f, x); % 求函数对未知数 x 的导数
    i_curr = i_init; % 设定电流初始值
    iter = 0;
    while true
        i_next = i_curr - double(f(i_curr))/double(df(i_curr)); % 计算下一个迭代值
        if abs((i_next - i_curr)/i_next) < delta % 设定迭代终止条件
            break;
        elseif i_next == 0 % 若 i_next 为 0 则停止迭代
            break;
        end
        i_curr = i_next;
        iter = iter + 1;
    end
    I_ideal(index) = i_curr; % 保存数值解
    index = index + 1;
end
```

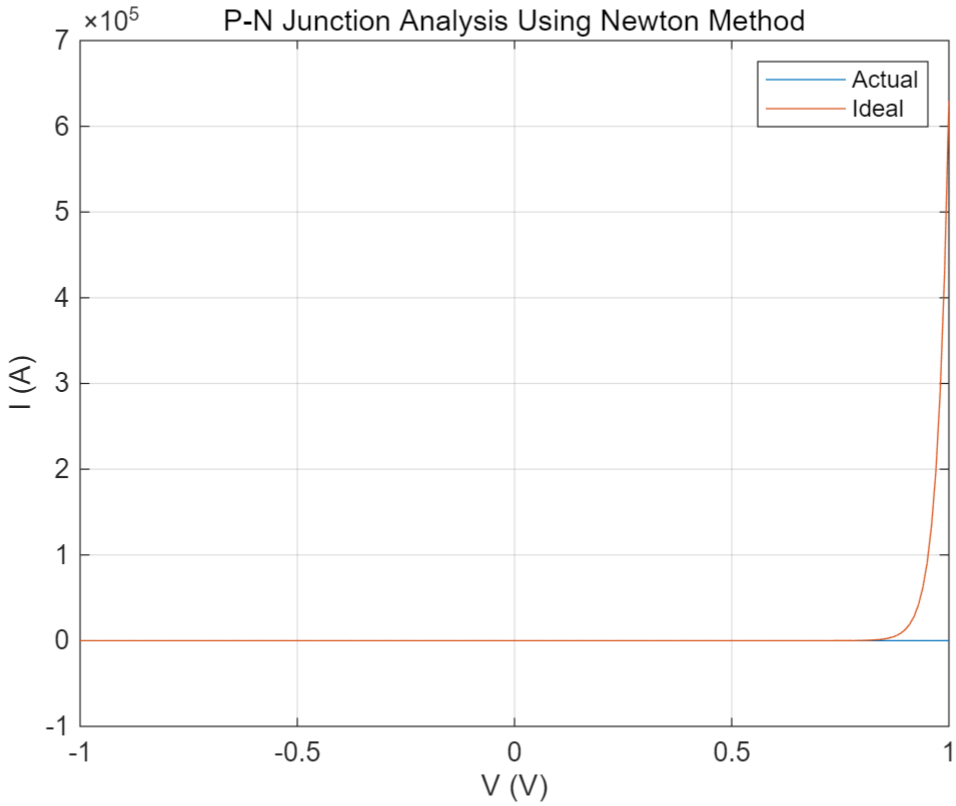
调用 semilogy 命令绘制两种情况下的电流对数图像

```
figure;
semilogy(V, I);
hold on;
semilogy(V, I_ideal);
grid on;
xlabel("V (V)");
ylabel("I (A)");
legend("Actual", "Ideal");
title("P-N Junction Analysis Using Newton Method (Semi-log Plot)");
hold off;
```



上述图像中，绘制了含 $10\ \Omega$ 内阻的 PN 结的电压电流变化曲线。需要注意的是，由于使用了 `semilogy` 绘制对数关系图像，导致程序自动忽略负数解。为了能够观察 $[-1, 1]$ V 范围内的电压电流变化曲线，使用 `plot` 绘制电流变化曲线。

```
figure;
plot(V, I);
hold on;
plot(V, I_ideal);
grid on;
xlabel("V (V)");
ylabel("I (A)");
legend("Actual", "Ideal");
title("P-N Junction Analysis Using Newton Method");
hold off;
```



尝试使用不动点法，求解含内阻情况下的电流方程，调用 fzero 命令

```
i_fzero = zeros(size(V)); % 创建新电流数组
index = 1;
for v = Vmin:0.01:Vmax
    % 定义待求解函数
    fun = @(x) I_c * (exp(q*(v - x*R)/(k_0*T)) - 1.0) - x;
    x0 = 0.0; % 定义初始值
    root = fzero(fun, x0); % 调用 fzero 求解方程
    i_fzero(index) = root;
    index = index + 1;
end
```

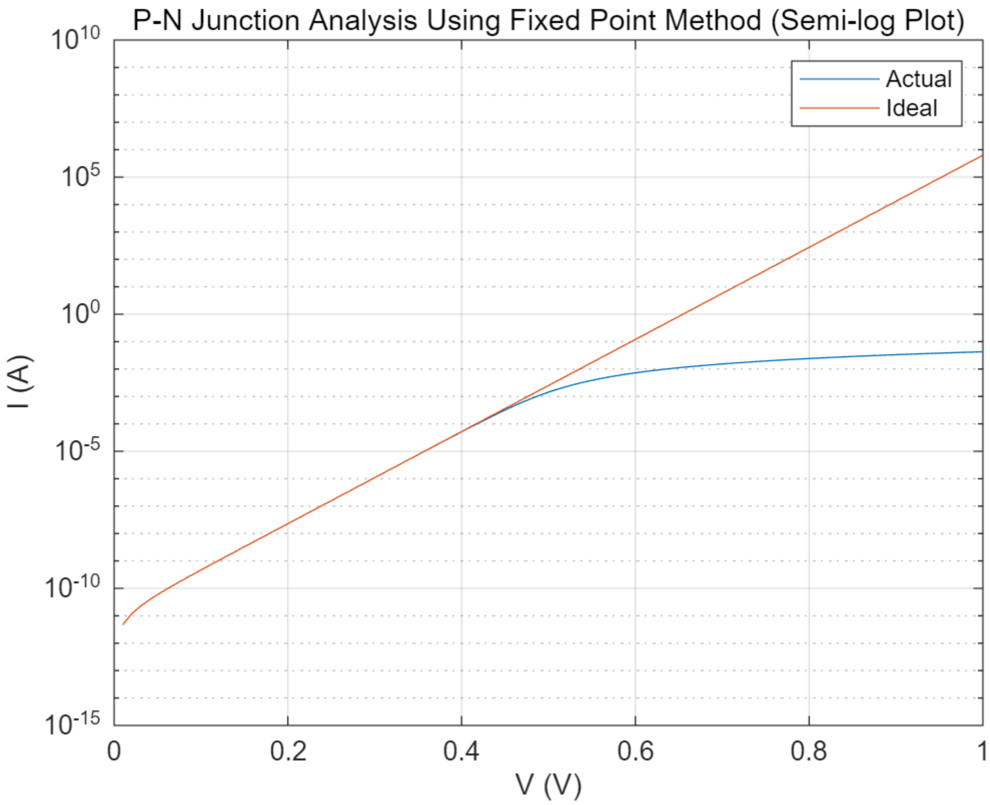
同样采用不动点法，求解理想情况下的电流方程

```
i_fzero_ideal = zeros(size(V));
index = 1;
for v = Vmin:0.01:Vmax
    % 定义待求解函数
    fun_ideal = @(x) I_c * (exp(q*(v)/(k_0*T)) - 1.0) - x;
    x0 = 0.0; % 定义初始值
    root = fzero(fun_ideal, x0); % 调用 fzero 求解方程
    i_fzero_ideal(index) = root;
    index = index + 1;
end
```

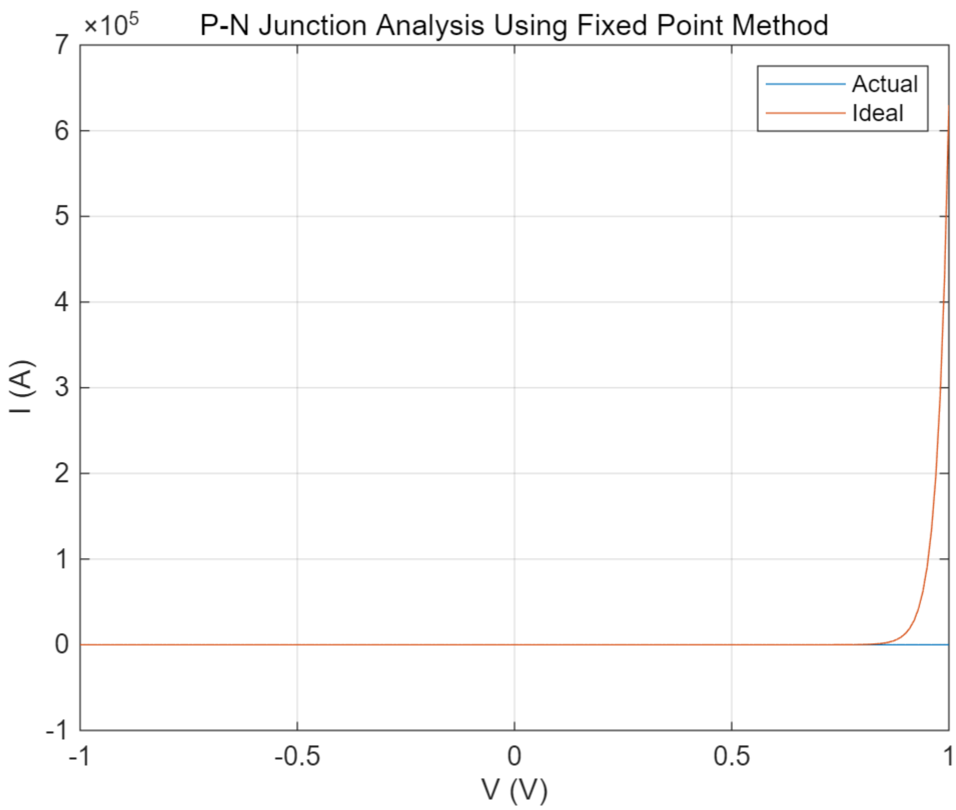
上述代码通过调用 fzero 得到了另一个电流值数组，使用 semilogy 以及 plot 绘制电流变化曲线

```
% 调用 semilogy
figure;
```

```
semilogy(V, i_fzero);
hold on;
semilogy(V, i_fzero_ideal);
grid on;
xlabel("V (V)");
ylabel("I (A)");
legend("Actual", "Ideal");
title("P-N Junction Analysis Using Fixed Point Method (Semi-log Plot)");
hold off;
```




```
% 调用 plot
figure;
plot(V, i_fzero);
hold on;
plot(V, i_fzero_ideal);
grid on;
xlabel("V (V)");
ylabel("I (A)");
legend("Actual", "Ideal");
title("P-N Junction Analysis Using Fixed Point Method");
hold off;
```



警告：已忽略了负数
警告：已忽略了负数
警告：已忽略了负数
警告：已忽略了负数

比较上述图像可知，使用牛顿法和不动点法求得的数值解相符。

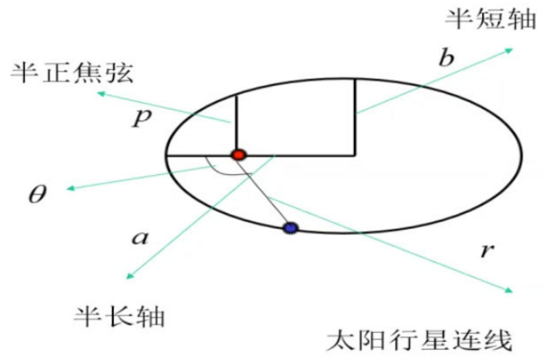
Question 2

开普勒行星运动轨迹定律：

1. 行星绕太阳运动的轨道都是椭圆（ellipse），太阳处在椭圆的一个焦点（focus）上。
2. 行星与太阳的连线在相同时间间隔扫过相等的面积。
3. 行星轨道的半长轴的三次方跟公转周期的二次方的比值都相等：$a^3/T^2 = \text{const}$。（不同行星轨迹之间的联系）

Kepler 第一定律

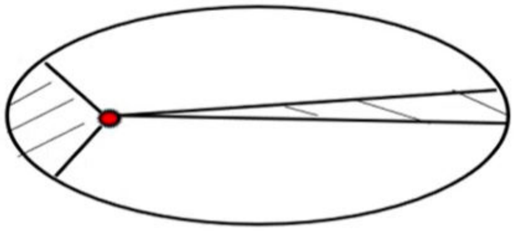
行星绕太阳运动的轨道都是椭圆，太阳处在椭圆的一个焦点上。



离心率（eccentricity）：$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$

太阳行星连线长度：$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\theta}$

Kepler 第二定律
行星与太阳的连线在相同时间间隔扫过相等的面积。



$\Delta A \propto \Delta t$

$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta t}{P}$

其中 A 为椭圆面积，P 为轨道周期。

求解 Kepler 方程：$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

1. 定义$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta t}{P} = \frac{M}{2\pi}$
2. $M = E - \varepsilon \cdot \sin E$
3. $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \tan\frac{E}{2}$
4. $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\theta}$

求解顺序：$\Delta t \to M \to E \to \theta \to r$

已知：$\varepsilon = 0.7 \quad p = 1.1$

采用不动点迭代法，以相对精度0.001求θ。

Solution

根据题设条件设定程序参数

```
% 设定程序参数
M = linspace(0, 2*pi, 50);
epsilon = 0.7;
p = 1.1;
delta = 1e-3; % 相对精度
```

由$M = E - \varepsilon \cdot \sin E$，求各 M 值对应的 E

```
% 根据 M 求 E
E = zeros(size(M)); % 创建 E 数组
index = 1; % 初始化索引
func_M_E = @(m, e) e - epsilon * sin(e) - m;
for m = M
    func = @(e) func_M_E(e, m);
    % 不动点法开始
    e0 = 0; % E 初始值
    % 不动点法迭代
    while true
        e = func(e0);
        if abs((e - e0) / e) < delta % 相对精度条件
            root = e0;
            break;
        elseif e == 0 % 考虑除数为零情况
            root = e0;
            break;
        end
        e0 = e;
    end
    E(index) = root; % 存储数值解
    index = index + 1;
end
```

根据 $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \tan\frac{E}{2}$，有 $\theta = 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \tan\frac{\mathrm{E}}{2}\right)$，求得各 M 对应的 θ

```
% 根据 M 求 Theta
Theta = 2 * atan(sqrt((1+epsilon)/(1-epsilon)) * tan(E / 2));
```

由 $r = \frac{p}{1+\varepsilon \cdot \cos\theta}$，求每个 θ 对应的 r

```
% 根据 Theta 求 R
R = p ./ (1+epsilon*cos(Theta));
```

极坐标与直角坐标存在下列对应关系：

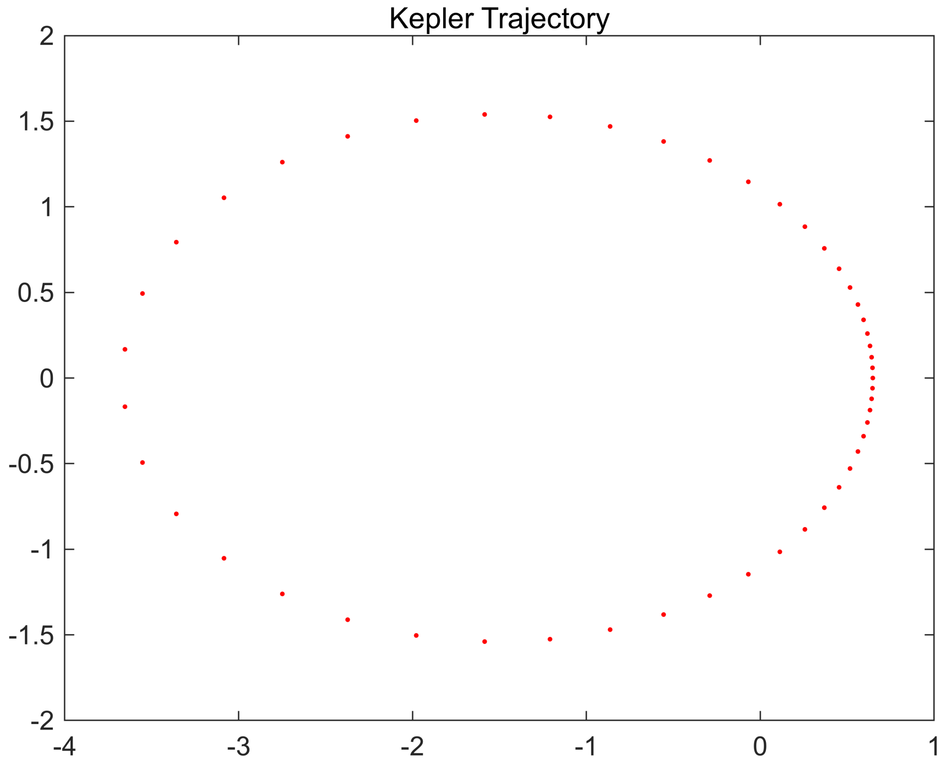
$x = r \cdot \cos\theta \quad y = r \cdot \sin\theta$

根据该关系，可将极坐标下的 θ 与 r 转换为直角坐标下的 x 和 y

```
% 坐标转换
x = R .* cos(Theta);
y = R .* sin(Theta);
```

根据上述直角坐标信息，调用 plot 绘制轨迹

```
figure;
plot(x, y, "r.");
title("Kepler Trajectory");
```



Kepler Trajectory
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-4
-3
-2
-1
0
1