

永磁无刷直流电机稳态特性的状态空间分析

A State - Space Approach to Steady - State Performance of a Permanent - Magnet Brushless DC Motor

贺益康 严 岚 (浙江大学电气工程学院 310027)

He Yikang Yan Lan (Zhejiang University 310027 China)

摘要 采用输入函数离散化的状态空间方法, 对永磁无刷直流电机的稳态性能进行直接稳态仿真。由于描述行为特性的状态方程以电机参数和实际磁场空间分布为基础建立, 又计及开关元件的换流重叠过程, 因而这种稳态计算技术给实际电机的运行特性预测提供了一种准确、有效的分析手段。

关键词: 永磁无刷直流电动机 输入函数离散化 状态空间分析 稳态仿真

中图分类号: TM351

Abstract In this paper, a state - space approach with discretized input function to steady state performance simulation of a permanent magnet brushless DC motor (PMBLDCM) was discussed. As the state - space equation served to define the steady state performance of the motor was formulated on the basis of motor parameters and actual magnetic field distribution and counting for the commutation overlapping of the power devices as well, the approach will offer an accurate and effective analysis means for the performance prediction of a practical PMBLDCM.

Key words: Permanent magnet brushless DC motor Input function discretization State space approach Steady - state simulation

1 引言

永磁无刷直流电机具有速度可调、功率密度及系统效率高、控制方便、运行可靠等显著特点, 在伺服控制、电动车辆、机器人技术及家用电器等领域得到了越来越广泛的应用, 人们对其特性预测的兴趣也不断浓厚。目前已有不少涉及其稳态特性计算的论文^[1,2,3], 其中以 R. R. Nucera 等对圆形永磁转子(正弦形反电势)无刷直流电机的状态空间分析和 Z. Q. Zhu 对转子表面安放铁氧体(梯形反电势)电机的解析数字计算最为成功, 获得了很多有关电机稳态的波形信息, 可进而分析其运行特性。然而他们的工作均是在求得电机系统方程解析解的基础上完成的数值计算, 不仅有不少理想化假定,

求解过程更十分繁杂, 而且在某些复杂条件下(如考虑电机气隙磁密的实际分布波形时)难以求得解析表达式, 这样稳态特性的计算就难以继续, 有较大的局限性。

随着数字仿真技术的发展, 已有不少方法可用于电机系统稳态特性的直接计算, 其中基础变换的状态空间方法在交流调速电机系统的仿真分析中显得十分有效^[4]。这种方法避免了从起动到稳态长时间机电过程的耗时计算和引入的积累误差, 可直接实现调速系统的稳态仿真, 同时巧妙地利用三相变量的对称性, 将整个周期的计算量缩小为 1/6 周期内的求解, 更解决了稳态所必需的初始条件闭式解答问题。然而计算中需建立任意时刻电机气隙磁链导数值与该时刻磁链值之间的关系, 当磁链波形不

贺益康 男, 1941 年生, 浙江大学电气工程学院教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 主要从事电机及其控制, 交流调速技术等研究。

严 岚 男, 1977 年生, 浙江大学电气工程学院电机与电器专业博士研究生, 主要从事电机及其控制研究。

规则且无法用函数表示时,这种方法就不能直接应用。为此,本文将采用离散处理气隙磁链波形并求出相应磁链导数的方法来改进算法,以进一步拓展该方法的实用范围。

2 永磁无刷直流电机的状态空间模型

图1为一台典型永磁无刷直流电机原理图,圆形永磁转子的空间位置 θ_r (转子q轴相对定子a相绕组轴线 a_s 的夹角)可采用位置检测器或电机端电压检测电路来感知。

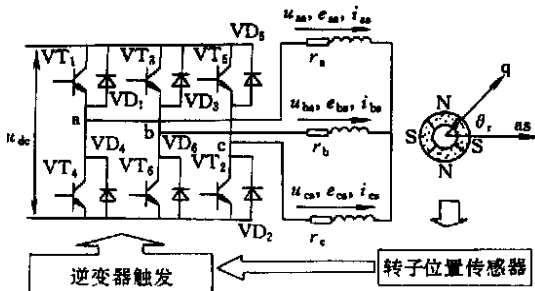


图1 永磁无刷直流电机原理图

Fig. 1 The principle diagram of PMSM

根据现代永磁材料磁导率与空气相近的特性,分析中可认为电机气隙均匀,不计电枢反应,功率半导体器件为理想开关元件。这样,定子电压方程式可写为

$$\begin{bmatrix} u_{as} \\ u_{bs} \\ u_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \end{bmatrix} \quad (1)$$

考虑定子绕组Y接时三相电流之和为零,则定子磁链方程可写为

$$\begin{bmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_a \\ m_b \\ m_c \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 L_s ——定子绕组每相漏电感

m_a, m_b, m_c ——定子绕组各相互感磁链

r_s ——定子绕组每相电阻

$$D = d/dt$$

隐极圆形转子永磁电机的电磁转矩可表达为

$$T_e = p/2 [m_f (i_{as} - 1/2 i_{bs} - 1/2 i_{cs}) \cos \theta_r + \sqrt{3}/2 (i_{bs} - i_{cs}) \sin \theta_r] \quad (3)$$

式中 p ——极数

m ——互感磁链幅值

由于逆变器对称触发工作,稳态时系统状态方程定常,因此电机系统的三相变量如电压、电流、磁链等均呈现所谓的60°对称性。如用 f 广义地代表 u, i 或 λ ,则三相变量60°对称关系的矩阵表达式为^[4]

$$f_{abc}(r t + \pi/3) = T \cdot f_{abc}(r t) \quad (4)$$

式中 r ——转子电角频率,对永磁无刷直流电机即为定子供电角频率

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

为对称关系矩阵,它联系着时间上互差 $\pi/3$ 两时刻的系统状态。

3 输入磁链的离散化

将式(2)代入式(1)得

$$\begin{bmatrix} u_{as} \\ u_{bs} \\ u_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s \end{bmatrix} \cdot D \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_a \\ m_b \\ m_c \end{bmatrix} \quad (6)$$

求解中需要计算各相互感磁链的导数,这对可用连续、可导函数关系描述的磁链不存在困难,但实际电机磁链关系复杂,难以实现函数描述,却可采用离散化数值处理,此时可用差分近似替代求导的方法来求取输入磁链的导数值,即

$$y(n) = \frac{y(n+1) - y(n)}{x(n+1) - x(n)} = \frac{y(n+1) - y(n)}{h} \quad (7)$$

式中 n ——离散子区间序号

y ——子区间节点处磁链瞬时值

x ——磁链曲线的时间坐标

h ——离散处理的时间步长

对于一个对称的三相电源系统和平衡的三相负载,变流装置对称触发工作,电路处于稳态时三相磁链也应表现出对称性,即在时间上互差 120° 。因此只要求出一相磁链在 $0 \sim 180^\circ$ 的空间分布及其导数在 $0 \sim 180^\circ$ 的空间分布,就可以求得其他两相及其导数在 $0 \sim 60^\circ$ 的空间分布情况,从而为稳态特性的状态空间求解提供了正确的输入值。

4 120 导通方式的状态空间分析

图 2 给出了有代表性的逆变器 120 导通方式下的 a 相电流 i_{as} 波形及相应开关管、二极管的导通状态。根据三相变量的对称性, 一个完整周期可划分为六个不同状态区间, 可将状态 1 的 $\omega_r t = \pi/3$ 范围选择为计算区间, 它开始于晶体管 VT_6 关断时刻, 终止于 VT_3 导通时刻。

状态	1	2	3	4	5	6
导通元件	VT_1, VT_1 VD_3 VT_2, VT_2	VD_4 VT_3, VT_3 VT_2, VT_2	VT_4, VT_4 VT_3, VT_3 VD_5	VT_4, VT_4 VD_6 VT_5, VT_5	VD_1 VT_6, VT_6 VT_5, VT_5	VT_1, VT_1 VT_6, VT_6 VD_2

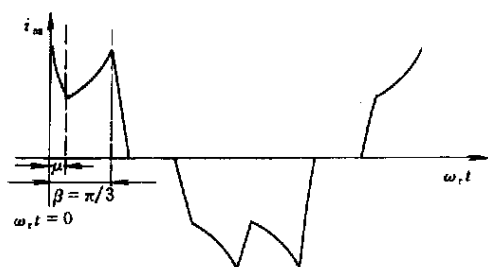
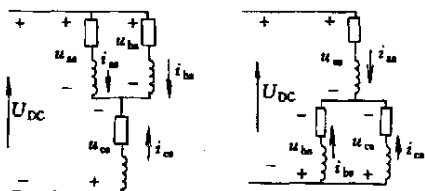


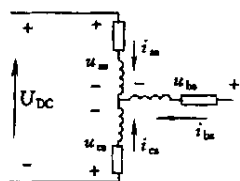
图 2 120 导通模式及 a 相电流波形

Fig. 2 120 Conduction mode and current waveform of phase a

由于绕组电感的影响, 当 VT_5 关断时 b 相将仍有电流经 VD_2 (当 $i_{bs} < 0$) 或 VD_6 (当 $i_{bs} > 0$) 续流。这样, 120 导通方式下将有两种不同的电路拓扑结构存在: 定子三相均接至逆变器输出的换流模式, 如图 3a 或 3b 所示; 定子 a、c 两相接至逆变器输出而 b 相开路的单流模式, 如图 3c 所示。



(a) $i_{bs} < 0$ 时换流模式 (b) $i_{bs} > 0$ 时换流模式



(c) 单流模式

图 3 电路拓扑结构

Fig. 3 The circuit topology structures

可以证明, 换流模式开始时刻 ($t=0$) 转子位于 $\theta_r = -\pi/6$ 处^[1], 其中 θ_r 为触发超前角, 即定子电流超前于反电势的相位角。换流模式持续时间可用换流重叠角 μ 来表示, 由于续流的无功电流衰减快慢与电机转速、触发超前角、电机参数等有关, 运行中 μ 为未知量。为在选定的分析区间内明确划分出换流模式和单流模式的持续时间, 需在两种运行模式的状态空间模型基础上采用 Newton-Raphson 方法叠代求解 μ 角。

4.1 换流模式

根据图 3a 或图 3b, 有

$$\begin{bmatrix} u_{as} \\ u_{bs} \\ u_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{DC}/3 \\ U_{DC}/3 \\ -2U_{DC}/3 \end{bmatrix} \quad (i_{bs} < 0) \quad (8)$$

$$\text{或} \quad \begin{bmatrix} u_{as} \\ u_{bs} \\ u_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2U_{DC}/3 \\ -U_{DC}/3 \\ -U_{DC}/3 \end{bmatrix} \quad (i_{bs} > 0) \quad (9)$$

联立式 (8) 与式 (6), 整理可得

$$\begin{aligned} DX &= A \cdot X + B1 \cdot U \\ &= K_D^{-1} \cdot K_x \cdot X + K_D^{-1} \cdot K_{U1} \cdot U \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} X(\theta_r t) &= [i_{as}, i_{bs}, i_{cs}]^T \\ U(\theta_r t) &= [U_{DC} D_{ma} D_{mb} D_{mc}]^T \\ K_D &= \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s \end{bmatrix}; K_x = - \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \\ K_{U1} &= \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= K_D^{-1} \cdot K_x \end{aligned}$$

$$B1 = K_D^{-1} \cdot K_{U1}$$

状态变量方程 (10) 的解答为

$$X(t) = e^{At} \cdot X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B1 \cdot U(\tau) d\tau \quad (11)$$

当输入函数 $U(\theta_r t)$ 在每个等长采样间隔 $T = h$ 内保持为常数时

$$U(Kh + \tau) = U(Kh) \quad (Kh \leq \tau < Kh + h)$$

则 $B1 \cdot U(\tau)$ 可以移出积分号之外

$$X(t) = e^{At} \cdot X(0) + \left[\int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau \right] B1 \cdot U(Kh) \quad (12)$$

因每个子区间内输入 $U(\tau t)$ 定常, 则有

$$\begin{aligned} X(1) &= e^{Ah} X(0) + \int_0^h e^{A(h-\tau)} d\tau \cdot B1 \cdot U(0) \\ X(2) &= e^{Ah} X(1) + \int_h^{2h} e^{A(2h-\tau)} d\tau \cdot B1 \cdot U(1) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$X(n_1) = e^{Ah} X(n_1 - 1) + \int_{(n_1-1)h}^{n_1 h} e^{A(n_1 h - \tau)} d\tau \cdot B1 \cdot U(n_1 - 1)$$

其中 n_1 ——在换流状态下子区间个数

n_2 ——在单流模式下子区间个数

$$h = 1/3 (n_1 + n_2)$$

可以证明

$$\begin{aligned} \int_0^h e^{A(h-\tau)} d\tau &= \int_h^{2h} e^{A(2h-\tau)} d\tau = \dots \\ &= \int_{(n_1-1)h}^{n_1 h} e^{A(n_1 h - \tau)} d\tau = A^{-1} \cdot (e^{A \cdot h} - I) \end{aligned}$$

定义 $W = A^{-1} \cdot (e^{A \cdot h} - I)$

根据以上的一组等式, 经子区间递推计算, 可得

$$X(n_1) = (e^{Ah})^{n_1} \cdot X(0) + \sum_{k=0}^{n_1-1} (e^{Ah})^k \cdot W \cdot B1 \cdot U(n_1 - k - 1) \quad (13)$$

4.2 单流模式

根据图 3c, 对于单流模式有

$$\begin{bmatrix} u_{as} \\ u_{bs} \\ u_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{DC}/2 - r D_{mb}/2 \\ r D_{mb} \\ -U_{DC}/2 - r D_{mb}/2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式 (14) 代入式 (6), 可得

$$\begin{aligned} DX &= A \cdot X + B2 \cdot U \\ &= K_D^{-1} \cdot K_x \cdot X + K_D^{-1} \cdot K_{U2} \cdot U \end{aligned} \quad (15)$$

其中 K_D, K_x, X, U, A 定义同换流模式。

$$K_{U2} = \begin{bmatrix} 1/2 & -r & -r/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -r/2 & r \end{bmatrix}$$

$$B2 = K_D^{-1} \cdot K_{U2}$$

单流模式的每个子区间 h 内, 同样可认为输入函

数 $U(\tau t)$ 保持为常数, 则有

$$X(n_1 + 1) = e^{Ah} X(n_1) + W \cdot B2 \cdot U(n_1)$$

$$X(n_1 + 2) = e^{Ah} X(n_1 + 1) + W \cdot B2 \cdot U(n_1 + 1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X(n_1 + n_2) = e^{Ah} X(n_1 + n_2 - 1) + W \cdot B2 \cdot U(n_1 + n_2 - 1)$$

由上面的一组等式, 经过子区间的递推计算, 可得

$$X(n_1 + n_2) = (e^{Ah})^{n_2} \cdot X(n_1) + \sum_{k=0}^{n_2-1} (e^{Ah})^k \cdot W \cdot B2 \cdot U(n_1 + n_2 - k - 1) \quad (16)$$

4.3 初始矢量的显式表达

将式 (13) 代入式 (16) 可得

$$\begin{aligned} X(n_1 + n_2) &= (e^{Ah})^{n_2} \cdot (e^{Ah})^{n_1} \cdot X(0) + \\ &\sum_{k=0}^{n_2-1} (e^{Ah})^k \cdot W \cdot B2 \cdot U(n_1 + n_2 - k - 1) + \\ &\sum_{k=0}^{n_1-1} (e^{Ah})^k \cdot W \cdot B1 \cdot U(n_1 - k - 1) \end{aligned} \quad (17)$$

又根据式 (4) 可知

$$X(n_1 + n_2) = T \cdot X(0) \quad (18)$$

其中 T 为式 (5) 定义的对称关系矩阵。

将式 (17) 与式 (18) 联立, 可得初始矢量的显式表达为

$$\begin{aligned} X(0) &= [T - (e^{Ah})^{n_2} \cdot (e^{Ah})^{n_1}]^{-1} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n_2-1} (e^{Ah})^k \cdot W \cdot B2 \cdot U(n_1 + n_2 - k - 1) + \right. \\ &\left. \sum_{k=0}^{n_1-1} (e^{Ah})^k \cdot W \cdot B1 \cdot U(n_1 - k - 1) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

4.4 Newton-Raphson 叠代及子区间状态转移

由于 $t=0$ 选定在 V_{T2} 开始导通时刻, 故有 $i_{cs}=0$, 初始条件可用状态矢量来表示为

$$f(\mu) = i_{cs}(0) = C \cdot X(0) = 0 \quad (20)$$

根据 $X(0) = [i_{as}(0) \ i_{bs}(0) \ i_{cs}(0)]^T$, 显然有 $C = [0 \ 0 \ 1]^T$ 。

从而可采用以下叠代算法求得满足式 (20) 的换流重叠时间 μ

$$\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} - f(\mu^{(k)}) \cdot \frac{\mu^{(k)} - \mu^{(k-1)}}{f(\mu^{(k)}) - f(\mu^{(k-1)})} \quad (21)$$

求得两种运行模式的持续时间 μ 、 $(- \mu)$ 和初始矢量后, 即可在子区间内进行状态转移计算: 即从初始点开始, 将上一子区间的终点状态转移成

本子区间的初始条件, 继而求得本子区间的终点状态, 直至推求获得整个区间的状态方程的解答。以后可重复利用式 (4) 的 60° 对称关系来获得一个完整周期的解答。

值得提出的是, 由于 180° 导通型只有单流模式而无换流模式, 可以看作 120° 导通型的特例, 故只要设定 $\mu = 0$, 以上的状态空间解法也完全适合逆变器 180° 导通方式下永磁无刷直流电机的稳态特性的直接计算。

5 计算实例与仿真波形

5.1 气隙磁密正弦分布电机

电机参数为 $r_s = 3.4$ 、 $L_s = 12.1\text{mH}$ 、4 极, 磁链幅值 $\psi_m = 0.083\text{V}\cdot\text{s}$, 逆变器输入直流电压 $U_{\text{DC}} = 25\text{V}$, 电机恒速 $\omega_r = 120\text{rad/s}$ 。

图 4、图 5 分别列出 120° 导通模式下, $\mu = 30^\circ$ 和 $\mu = 60^\circ$ 时的 a 相电流波形和转矩波形, 它们与文献中采用正、余弦连续函数表示磁链及其导数时求解的结果完全一致。

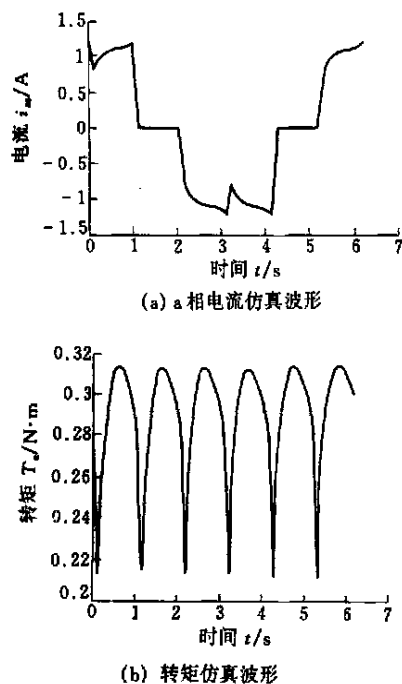


图 4 $\mu = 30^\circ$ 时, a 相电流 i_{as} 和
转矩 T_e 仿真波形

Fig. 4 Simulated waveforms of phase a current i_{as} and
electromagnetic torque T_e under $\mu = 30^\circ$

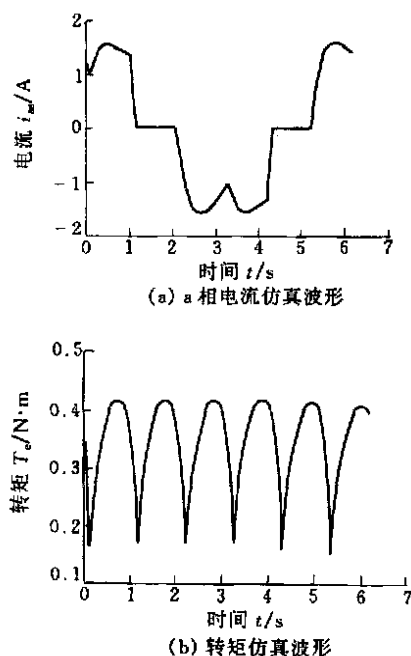


图 5 $\mu = 60^\circ$ 时, a 相电流 i_{as} 和
转矩 T_e 仿真波形

Fig. 5 Simulated waveforms of phase a current i_{as}
and electromagnetic torque T_e under $\mu = 60^\circ$

5.2 气隙磁密帽形分布电机

电机功率为 750W、4 极、三相桥式逆变电路、钕铁硼永磁体表面安装。

图 6 为通过有限元分析及其后处理获得的一对极下气隙磁密波形, 这是具体电机磁密的真实分布。由此可求得一相磁链波形, 将其离散化并求取其导数后, 即可实现该电机的稳态特性仿真计算。

由图 7 的空载相电流计算与实测波形以及图 8 额定相电流计算与实测波形的对比可以看出, 这种输入函数离散化的稳态特性状态空间分析既接近实际又具有相当的精确性和实用性。

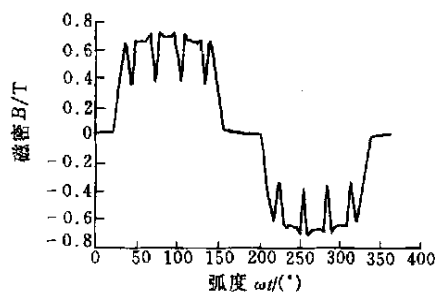


图 6 气隙磁密分布波形

Fig. 6 Air-gap flux density distribution

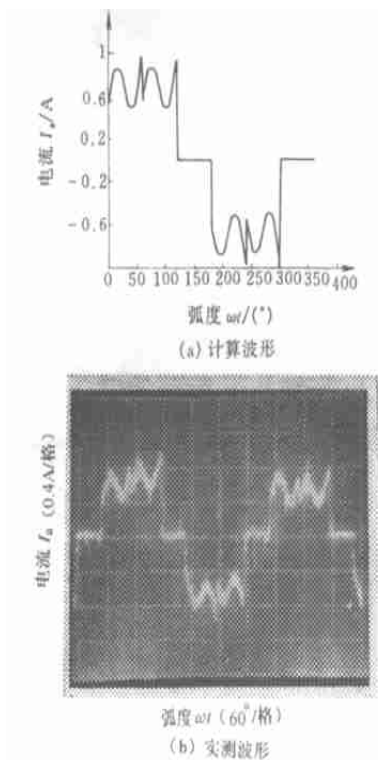


图7 空载相电流下计算及实测结果

Fig.7 Phase current at no - load simulated and measured

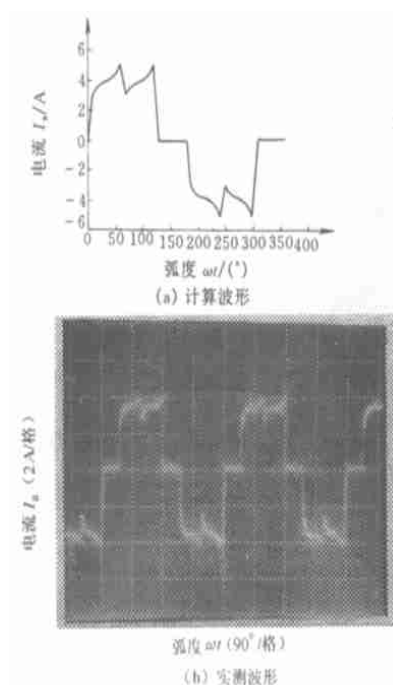


图8 额定相电流下计算及实测结果

Fig.8 Phase current at rated load simulated and measured

6 结论

本文所介绍的永磁无刷直流电机稳态特性预测的状态空间方法,为评价电机的磁场分布、定子参数、逆变器触发超前角、功率开关元件导通方式等对电机特性的影响提供了一种有效的手段。由于采用了离散法获取磁链导数值,使该方法能适用于任何气隙磁密分布波形下的仿真计算,从而使理论研究更进一步接近实际,提高了仿真计算的实用性和精确度。

参考文献

- 1 Nucera R R, et al. Computation of steady - state performance of an electronically commutated motor. IEEE Trans. on IA 1989, 25 (6): 1110 ~ 1117
- 2 Zhu Z Q, et al. Analytical prediction of dynamic performance characteristics of brushless drive. Electrical Machines and Power System, 1992, (20): 661 ~ 678
- 3 He Y K The state - space analysis of excitation regulation of self - controlled synchronous motor with constant margin - angle control, IEEE Trans. on PE 1993, 5 (3): 269 ~ 275
- 4 贺益康. 交流电机调速系统计算机仿真. 杭州: 浙江大学出版社, 1993.

收稿日期 2001 - 09 - 03

中国电工技术学会电力电子学会 第八届学术年会征文通知

电力电子学会 2001 年五届三次理事会会议决定, 将于 2002 年 11 月在深圳召开“中国电工技术学会电力电子学会第八届学术年会”。现将有关征文等事宜通知如下:

征文范围 各种新型电力半导体器件(含各类模块的设计、工艺、特性分析、测试、可靠性等技术。 各类新型器件的驱动、控制、保护等技术, 及配套件、外壳、散热器、焊接、保护材料等技术。 各种类型的半导体电路、拓扑、装置、电子电源的设计、调试、故障诊断、试验等技术。 有源电力滤波及无功功率补偿技术。 交、直流电动机各类调速与控制技术。 电气传动、运动控制与系统建模仿真和 CAD 技术。 现代控制理论在电力电子技术中的应用等。

征文要求 论文应反映国内(外)先进水平, 有一定的实用价值。 每篇字数限在 5000 字内(综述类论文字数可稍放宽。 论文征稿截止时间: 2002 年 7 月底。