

## 江苏省普通高校专转本选拔考试

## 高等数学 模拟试卷 4

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在下列每一小题中选出一个正确答案, 请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑)

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sqrt[3]{1+ax^2} - 1$  与  $\tan^2 x$  是等价无穷小, 则  $a$  的值为 ( )

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

2. 设  $f(x) = \frac{x+2}{(x^2-x)\sin(x^2-4)}$ , 则  $f(x)$  的可去间断点为 ( )

A.  $x=2$ B.  $x=1$ C.  $x=0$ D.  $x=-2$ 

3. 设函数  $f(x)$  在  $x=3$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{2x-6} = 1$ , 则  $f'(3) =$  ( )

A. 0

B.  $\frac{1}{2}$ 

C. 1

D. 2

4. 设函数  $f(x)$  的一个原函数为  $\arctan x^2$ , 则不定积分  $\int x^2 f(x) dx =$  ( )

A.  $\ln(1+x^2) + C$ B.  $-\frac{1}{2} \ln(1+x^4) + C$ C.  $\ln(1+x^4) + C$ D.  $\frac{1}{2} \ln(1+x^4) + C$ 

5. 二次积分  $\int_0^2 dx \int_{x-2}^0 f(x,y) dy$  在极坐标系下可化为 ( )

A.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta - \sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ B.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta - \sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ C.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\sin\theta + \cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ D.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{2}{\sin\theta + \cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 

6. 下列级数绝对收敛的是 ( )

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+9}}$ D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 

7. 若向量组  $\alpha_1 = (1, 1+a, 0)$ ,  $\alpha_2 = (1, 2, 0)$ ,  $\alpha_3 = (0, 0, a^2+1)$  线性相关, 则  $a =$  ( )

A. 1

B. 0

C. -1

D. -2

8. 已知四阶方阵  $A$ , 其第三列元素分别为 1, 3, -2, 2, 它们的余子式的值分别为 3, -2, 1, 1, 则行列式  $|A| =$  ( )

A. 3

B. -2

C. 5

D. 1

## 二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-a}\right)^{a(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 8x^3 + 1}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

10. 设  $y = y(x)$  是由  $\begin{cases} x = 3^t, \\ y + t \ln t = 1 \end{cases}$  确定的函数, 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} =$  \_\_\_\_\_.

11. 设  $f(x) = (2x+1)^{2021} + \sin x$ , 则  $f^{(2022)}(x) =$  \_\_\_\_\_.

12. 反常积分  $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{e}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

13. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (x+1)^n$  的收敛域为 \_\_\_\_\_.

14. 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  的秩为 \_\_\_\_\_.

## 三、计算题(本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (\sqrt{t+t^2} - \sqrt{t}) dt}{\ln \left( \frac{5}{x^2} + 1 \right)}$ .

16. 设  $z = e^u \ln v$ , 其中  $u = x^2 + 2y$ ,  $v = x - y^2$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

17. 求不定积分  $\int e^{\sqrt{2x+3}} dx$ .

18. 已知  $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{x^4+1}, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x^2}, & x > \frac{1}{2}, \end{cases}$  求定积分  $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx$ .

19. 已知区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ , 计算二重积分  $I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$ .

20. 求微分方程  $y'' - y' = 2x$  的通解.

21. 设  $AX + E = A^2 + X$ , 且矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求矩阵  $X$ .

22. 已知线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1, \end{cases}$$
 当  $a, b$  为何值时方程组有无穷多解, 并求出其通解.

#### 四、证明题 (本大题 10 分)

23. 证明: 当  $x > 1$  时,  $\int_1^x \left( t + \frac{1}{t} \right) dt < \frac{2}{3} x^3$ .

**五、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）**

24. 抛物线  $y = ax^2 + (4-a)x$ ,  $a < 0$ , 记  $D_1$  为该曲线与直线  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$  所围成的平面图形,  $D_2$  为该曲线与直线  $y = \frac{5}{2}x$  所围成的平面图形.

(1)  $a = -2$  时, 求  $D_1$  绕  $x$  轴旋转一周所得的旋转体体积;

(2) 求  $a$  为何值时,  $D_2$  的面积最小.

25. 设函数  $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ .

(1) 求  $y$  的单调区间、凹凸区间;

(2) 判断  $y$  是否有水平渐近线和垂直渐近线, 若有, 求出相应的渐近线方程.