

江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 6

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在下列每一小题中选出一个正确答案, 请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小中, 最高阶的无穷小是 ()

- A. x^2 B. $1 - \cos x$ C. $\sqrt{1-x^2} - 1$ D. $2^{x^3} - 1$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 α 的取值范围 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

3. 下列反常积分收敛的是 ()

- A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ B. $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x} dx$ C. $\int_1^{+\infty} \frac{2^x}{\ln 2} dx$ D. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

4. 设 $F(x) = e^{2x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x f'(x) dx =$ ()

- A. $e^{2x} \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) + C$ B. $e^{2x} (2x - 1) + C$ C. $e^{2x} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) + C$ D. $e^{2x} (2x + 1) + C$

5. 设参数方程 $\begin{cases} x = e^{t-1}, \\ y = \int_0^t (3u^2 + 2) du \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} =$ ()

- A. e B. $2e$ C. 0 D. 1

6. 下列级数收敛的是 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} - \frac{1}{2}}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^n} + \frac{1}{2} \right)$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{2^n} + \frac{1}{n^4} \right)$

7. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} kx + y - z = 0, \\ x + ky - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ 只有零解, 则 ()

- A. $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ B. $k \neq 1$ 或 $k \neq -2$ C. $k = 1$ 或 $k = -2$ D. k 不存在

8. 设矩阵 $A_{m \times s}, B_{p \times n}$, 若 AB 有意义, 必有 ()

- A. $m = p$ B. $m = n$ C. $s = p$ D. $s = n$

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2}{x}$, 则常数 $a =$ _____.

10. 设函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x|(x-1)}$, 则其第一类间断点为 _____.

11. $\frac{d}{dx} \int_{3x}^{x^2} \arctan t^2 dt =$ _____.

12. $\int_{-1}^1 x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx =$ _____.

13. 设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{3}$, 则该幂级数的收敛半径为 _____.

14. 设四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & b & a & c \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \end{vmatrix}$, 则 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} =$ _____.

三、计算题(本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} \right)$.

16. 已知函数 $z = \arctan \frac{x}{y} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

17. 计算不定积分 $\int \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} dx$.

18. 求定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

19. 设平面区域 D 由圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 围成, 求 $\iint_D \left(\frac{y^2 \sin x^3}{2y^2 + 1} + 5 \right) d\sigma$.

20. 求微分方程 $(x^2 + 3)y' + 2xy - e^{2x} = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1$ 的特解.

21. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} .

22. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$ 的通解.

四、证明题（本大题 10 分）

23. 证明: 当 $x > 0$ 时, $2x > \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x)$.

五、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

24. 已知函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的导函数连续, $f(x) > 0$. 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1$, $x = t (t > 1)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积是该曲边梯形面积的 πt 倍, 求关于 $f(x)$ 的表达式.

25. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + \int_0^x t f(t) dt = 1$, 求:

- (1) 函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间与拐点;
- (3) 曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.