

江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 4

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。在下列每一小题中选出一个正确答案，请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑）

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sqrt[3]{1+ax^2} - 1$ 与 $\tan^2 x$ 是等价无穷小，则 a 的值为（ ）

A.1

B.2

C.3

D.4

2. 设 $f(x) = \frac{x+2}{(x^2-x)\sin(x^2-4)}$ ，则 $f(x)$ 的可去间断点为（ ）

A. $x=2$ B. $x=1$ C. $x=0$ D. $x=-2$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续，且 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{2x-6} = 1$ ，则 $f'(3) =$ （ ）

A.0

B. $\frac{1}{2}$

C.1

D.2

4. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\arctan x^2$ ，则不定积分 $\int x^2 f(x) dx =$ （ ）

A. $\ln(1+x^2) + C$ B. $-\frac{1}{2} \ln(1+x^4) + C$ C. $\ln(1+x^4) + C$ D. $\frac{1}{2} \ln(1+x^4) + C$

5. 二次积分 $\int_0^2 dx \int_{x-2}^0 f(x, y) dy$ 在极坐标系下可化为（ ）

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta-\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ B. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta-\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

6. 下列级数绝对收敛的是（ ）

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+9}}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

7. 若向量组 $\alpha_1 = (1, 1+a, 0)$, $\alpha_2 = (1, 2, 0)$, $\alpha_3 = (0, 0, a^2+1)$ 线性相关，则 $a =$ （ ）

A.1

B.0

C.-1

D.-2

8. 已知四阶方阵 A ，其第三列元素分别为 1, 3, -2, 2，它们的余子式的值分别为 3, -2, 1, 1，则行列式 $|A| =$ （ ）

A.3

B.-2

C.5

D.1

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-a}\right)^{a(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 8x^3 + 1}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $y = y(x)$ 是由 $\begin{cases} x = 3^t, \\ y + t \ln t = 1 \end{cases}$ 确定的函数, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 设 $f(x) = (2x+1)^{2021} + \sin x$, 则 $f^{(2022)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{e}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (x+1)^n$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (\sqrt{t+t^2} - \sqrt{t}) dt}{\ln\left(\frac{5}{x^2+1}\right)}$.

16. 设 $z = e^u \ln v$, 其中 $u = x^2 + 2y$, $v = x - y^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

17. 求不定积分 $\int e^{\sqrt{2x+3}} dx$.

18. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{x^4+1}, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x^2}, & x > \frac{1}{2}, \end{cases}$ 求定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx$.

19. 已知区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$.

20.求微分方程 $y'' - y' = 2x$ 的通解.

21.设 $AX + E = A^2 + X$, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

22. 已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1, \end{cases}$$
 当 a, b 为何值时方程组有无穷多解，并求出其通解.

四、证明题（本大题 10 分）

23. 证明：当 $x > 1$ 时， $\int_1^x \left(t + \frac{1}{t}\right) dt < \frac{2}{3}x^3$.

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 抛物线 $y = ax^2 + (4-a)x$, $a < 0$, 记 D_1 为该曲线与直线 $x=0$, $y=0$, $x=2$ 所围成的平面图形, D_2 为该曲线与直线 $y = \frac{5}{2}x$ 所围成的平面图形.

(1) $a = -2$ 时, 求 D_1 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积;

(2) 求 a 为何值时, D_2 的面积最小.

25. 设函数 $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

(1) 求 y 的单调区间、凹凸区间;

(2) 判断 y 是否有水平渐近线和垂直渐近线, 若有, 求出相应的渐近线方程.