高等数学模拟试卷（七）参考答案

1. 解：$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\ln(1+t)}{1+t^4}dt}{\int_0^{\tan x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot e}=\frac{1}{2e}$$

$\therefore$ 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是与 $\varphi(x)$ 同阶但不等价的无穷小，应选 B

2. 解：$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x-1)(1-e^{-x})}{|x|(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x-1)x}{-x(x^2-1)}=-1$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x-1)(1-e^{-x})}{|x|(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x-1)x}{x(x^2-1)}=1$

因 $f(0-0),f(0+0)$ 都存在，但不相等

$\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，应选 B

3. 解：由 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{1-\cos f(x)}{\sin x}\right]^{\frac{1}{x}}=e$

可知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{1-\cos f(x)}{\sin x}-1\right]\cdot\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos f(x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f^2(x)}{x^2}=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)}{x^2}=2$，于是 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\sqrt{2}$，应选 C

4. 解：A：若在 $x=x_0$ 的左、右两侧 $f'(x)$ 同号，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不取得极值

故 A 错误

B：函数 $f(x)$ 在 $f'(x)$ 不存在的点处也可能取得极值，故 B 错误

C：由 A，B 可知 C 错误，应选 D

5. 解：因仅知 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，故 $f(x)$ 在区间端点 $x=a,x=b$ 处是否连续是未知的，

即不能保证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。所以式中只要带有 $f(a)$ 或 $f(b)$ 时，结论都不一定成立，

即 A，B，C 三式都不一定成立，应选 D

6. 解：两边对 x 求导，得：$f'(x^3)=3x^2$

令 $x^3=t$，则 $f'(t)=3t^{\frac{2}{3}}$，$\therefore f'(x)=3x^{\frac{2}{3}}$

两边积分 $\int f'(x)dx=3\int x^{\frac{2}{3}}dx$，即 $f(x)=\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+c$，应选 B

7. 解：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

当 $n\to\infty$ 时 $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\sim\frac{1}{n+1}$

$\because\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ 收敛，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$\because\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ 收敛，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ 收敛

应选 A

8. 解：由矩阵转置及逆矩阵性质可知 D 正确，应选 D

9. 解：$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}$

$$=\frac{1}{2}[2-(-1)]f'(x_0)=\frac{3}{2}f'(x_0)$$

10. 解：$\because x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点，$\therefore f'(1)=0$

将 $f'(1)=0$ 代入已知的关系式中，得：

$f''(1)=2-e<0$，故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点

11. 解：$y=\ln(3+7x-6x^2)=\ln(3-2x)(1+3x)=\ln(3-2x)+\ln(1+3x)$

$y'=-2\cdot\frac{1}{3-2x}+3\cdot\frac{1}{1+3x}=\frac{2}{2x-3}+\frac{3}{1+3x}$

$$y''=\frac{-1}{(2x-3)^2}\cdot 2^2+\frac{-1}{(1+3x)^2}\cdot 3^2$$

$$y'''=\frac{1\cdot 2}{(2x-3)^3}\cdot 2^3+\frac{1\cdot 2}{(1+3x)^3}\cdot 3^3$$

$$y^{(4)}=\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(2x-3)^4}\cdot 2^4+\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(1+3x)^4}\cdot 3^4$$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)\,!}{(2x-3)^n}\cdot 2^n+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)\,!}{(1+3x)^n}\cdot 3^n$$

$$y^{(n)}(1)=-2^n\cdot(n-1)\,!+(-1)^{n+1}\cdot(n-1)\,!\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

12. 解：$\int_a^{+\infty}e^{-x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b e^{-x}dx=-\lim\limits_{b\to+\infty}\left.\frac{1}{e^x}\right|_a^b$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^b}-\frac{1}{e^a}\right)=\frac{1}{e^a}$$

由$\frac{1}{e^a}=\frac{1}{2}$得，$e^a=2$，$\therefore a=\ln 2$

13. 解：$\because\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径为3，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=3$

对于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$

令$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}(x-1)^{n+2}}{na_n(x-1)^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}|x-1|<1$

得$|x-1|<3$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为$(-2,4)$

14. 解：由$3\alpha-2(\beta+\gamma)=0$可知

$$\gamma=\frac{1}{2}(3\alpha-2\beta)=\frac{1}{2}[(3,12,0,6)-(6,2,4,10)]=\left(-\frac{3}{2},5,-2,-2\right)$$

15. 解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\dfrac{1}{2}x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

16. 解：$\dfrac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t\left(\sin t+\cos t\right)$

$\dfrac{dy}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=-e^{-t}\left(\cos t+\sin t\right)$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-e^{-t}\left(\cos t+\sin t\right)}{e^t\left(\cos t+\sin t\right)}=-e^{-2t}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(-e^{-2t}\right)_t'\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=2e^{-2t}\cdot\dfrac{1}{e^t\left(\sin t+\cos t\right)}=\dfrac{2e^{-3t}}{\sin t+\cos t}$

17. 解：$\int x^2\arcsin x dx=\dfrac{1}{3}\int\arcsin x dx^3$

$$=\frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{3}\int x^3 d\arcsin x$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{6}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{6}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}d\left(1-x^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{6}\int\sqrt{1-x^2}d\left(1-x^2\right)+\frac{1}{6}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d\left(1-x^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{9}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+c$$

18. 解：令$x=\sin t$，当$x=0$时$t=0$，当$x=1$时$t=\dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore\int_0^1\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos t}d\sin t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t}{1+\cos t}dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\cos t}d\cos t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t+1-1}{1+\cos t}d\cos t$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\cos t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos t}d(1+\cos t)$$

$$=-\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\ln|1+\cos t|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\ln 2$$

19. 解：方程两边对 x 求偏导数，得：

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=3\frac{\partial z}{\partial x} \qquad ①$$

方程两边对 y 求偏导数，得：

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=3\frac{\partial z}{\partial y} \qquad ②$$

①式两边再对 y 求偏导数，得：

$$2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{3-2z} \qquad ③$$

由①式可知 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{3-2z}$，由②式可知 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{3-2z}$

将此结果代入③式，得：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2\cdot\frac{2y}{3-2z}\cdot\frac{2x}{3-2z}}{3-2z}=\frac{8xy}{(3-2z)^3}$$

20. 解：$f'(x)-3f(x)=e^{3x}$ 的通解 $f(x)=e^{\int 3dx}\left(\int e^{3x}\cdot e^{-\int 3dx}dx+c\right)=e^{3x}(x+c)$

将 $f(0)=2$ 代入通解中，得 $c=2$，$\therefore f(x)=(x+2)e^{3x}$

以下求 $y''-2y'-3y=(x+2)e^{3x}$ 的通解

对应齐次方程的特征方程 $r^2-2r-3=0$，特征根 $r_1=3$，$r_2=-1$

其通解 $\overline{y}=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$

设原方程的一个特解 $y^*=x(ax+b)e^{3x}=(ax^2+bx)e^{3x}$

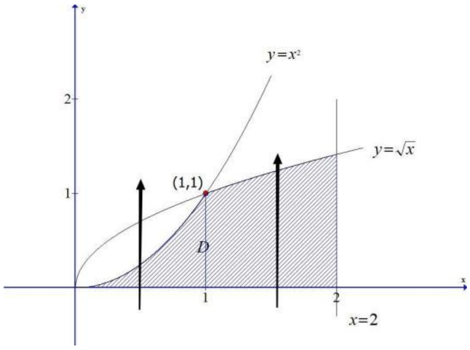
将 y^* 代入原方程，解得 $a=\frac{1}{8}$， $b=\frac{7}{16}$， $\therefore y^*=\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{7}{16}x\right)e^{3x}$

所以原方程通解为 $y=\overline{y}+y^*=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}+\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{7}{16}x\right)e^{3x}$

21. 解： $\iint\limits_D xydxdy=\int_0^1dx\int_0^{x^2}xydy+\int_1^2dx\int_0^{\sqrt{x}}xydy$

$$=\int_0^1dx\cdot\frac{1}{2}xy^2\Big|_0^{x^2}+\int_1^2dx\cdot\frac{1}{2}xy^2\Big|_0^{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1x^5dx+\frac{1}{2}\int_1^2x^2dx=\frac{5}{4}$$



22. 解： $(A\vdots E)=\begin{pmatrix}2&1&0&0&1&0&0&0\\0&2&1&0&0&1&0&0\\0&0&2&1&0&0&1&0\\0&0&0&2&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3,\ \frac{1}{2}r_4]{\frac{1}{2}r_1,\ \frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{1}{2}r_4}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

23. 证明：令 $F(x)=\frac{2}{e}\sqrt{x}-\ln x$

则 $F'(x)=\frac{1}{e\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-e}{ex}$，令 $F'(x)=0$，得唯一驻点 $x=e^2$

当 $0<x<e^2$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减

当 $x>e^2$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增

$\therefore$ 当 $x=e^2$ 时，$F(x)$ 取得最小值，最小值为 $F(e^2)=0$

故当 $x>0$ 时，$F(x)\geq 0$

即 $\frac{2}{e}\sqrt{x}-\ln x\geq 0$，所以 $\ln x\leq\frac{2}{e}\sqrt{x}$

24. 解：设切点为 $(a,\ln a)$

$y'=\frac{1}{x}$，$k_{切}=y'|_{x=a}=\frac{1}{a}$

切线方程 $y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$，即 $y=\frac{1}{a}x+\ln a-1$

$$S=\int_2^6\left[\left(\frac{1}{a}x+\ln a-1\right)-\ln x\right]dx$$

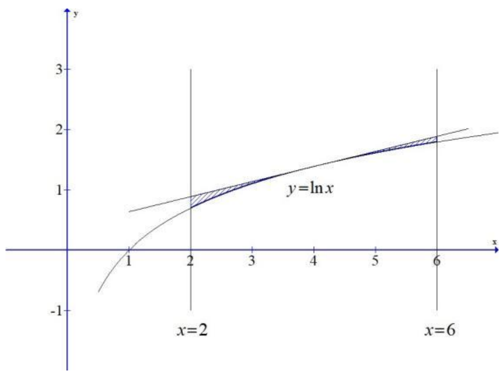
$$=\left(\frac{1}{2a}x^2+x\ln a-x\ln x\right)\Big|_2^6$$

$$=\frac{16}{a}+4\ln a+2\ln 2-6\ln 6$$

令 $\frac{ds}{da}=0$，得 $a=4$

当 $a<4$ 时 $\frac{ds}{da}<0$，当 $a>4$ 时 $\frac{ds}{da}>0$

$\therefore a=4$ 是最小值点，从而所求切线方程为 $y=\frac{1}{4}x+2\ln 2-1$



25. 解：$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&2&3\\1&0&1&-5&-2\\2&1&0&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&2&3\\0&-1&2&-7&-5\\0&-1&2&-7&-5\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&2&3\\0&-1&2&-7&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&2&3\\0&1&-2&7&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&-5&-2\\0&1&-2&7&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

x_1,x_2 为约束变量，x_3,x_4 为自由变量

一般解 $\begin{cases}x_1=-2-x_3+5x_4\\x_2=5+2x_3-7x_4\end{cases}$

令$\begin{cases} x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$，得原方程组的一个特解$\eta^*=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

导出组一般解$\begin{cases} x_1=-x_3+5x_4 \\ x_2=2x_3-7x_4 \end{cases}$

依次令$\begin{cases} x_3=1 \\ x_4=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x_3=0 \\ x_4=1 \end{cases}$，得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$原方程组通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （其中k_1,k_2为任意常数）