



一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 设 $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\ln(1+t)}{1+t^4} dt$, $\varphi(x) = \int_0^{\tan x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$, 则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的 ()

- A. 等价无穷小 B. 同阶但非等价无穷小
C. 低阶无穷小 D. 高阶无穷小

2. $x=0$ 是函数 $f(x) = \frac{(x-1)(1-e^{-x})}{|x|(x^2-1)}$ 的 ()

- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 无穷型间断点 D. 连续点

3. 设 $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1 - \cos f(x)}{\sin x} \right]^{\frac{1}{x}} = e$, 则 $f'(0) =$ ()

- A. 0 B. 1
C. $\sqrt{2}$ D. \sqrt{e}

4. $f'(x_0) = 0$ 是函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极值的 ()

- A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分条件也非必要条件

5. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, $x_1, x_2 \in (a, b)$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使下列各式中一定成立的是 ()

- A. $f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$ B. $f(b) - f(x_2) = (b-x_2)f'(\xi)$
C. $f(x_2) - f(a) = (x_2-a)f'(\xi)$ D. $f(x_2) - f(x_1) = (x_2-x_1)f'(\xi)$

6. 设 $\int f'(x^3)dx = x^3 + c$, 则 $f(x) = (\)$

A. $x^{\frac{5}{3}} + c$ B. $\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$

C. $x^3 + c$ C. $x + c$

7. 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$, 则下列结论中正确的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散

D. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

8. 下列运算中正确的是 ()

A. $(AB)^T = A^T B^T$

B. $(AB)^T = (BA)^T$

C. $(AB)^{-1} = (BA)^{-1}$

D. $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设 $f'(x_0)$ 存在, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{2h} = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 设 $f(x)$ 二阶可导, $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点, 且 $f(x)$ 满足 $f''(x) + f'(x) = 1 + x - e^x$, 则 $x=1$ 为 $f(x)$ 的_____ (填极大值点或极小值点)

11. $y = \ln(3 + 7x - 6x^2)$, 则 $y^{(n)}(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 设 $\int_a^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$

14. 已知 $\alpha = (1, 4, 0, 2)$, $\beta = (3, 1, 2, 5)$, 且有 $3\alpha - 2(\beta + \gamma) = 0$, 则 $\gamma = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$

16. $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^{-t} \cos t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

17. 求不定积分 $\int x^2 \arcsin x dx$

18. 计算定积分 $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} dx$

19. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 3z$ 所确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

20. 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = f(x)$ 的通解, 其中 $f(x)$ 是微分方程 $f'(x) - 3f(x) = e^{3x}$ 满足

$f(0) = 2$ 的特解

21. 计算二重积分 $\iint_D xy dxdy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, 直线 $x = 2$ 及 x 轴所围成的平面闭区域

22. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}

四、证明题 (本大题共 10 分)

23. 证明: 当 $x > 0$ 时, $\ln x \leq \frac{2}{e} \sqrt{x}$

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 求曲线 $y = \ln x$ ($2 \leq x \leq 6$) 的一条切线, 使该切线与直线 $x = 2$, $x = 6$ 及曲线 $y = \ln x$ 所围成的平面图形的面积 S 最小

25. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_3 - 5x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解