江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 1 参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.在下列每一小题中选出一个正确答案，请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑）

1.【答案】A

【解析】因为当 $x\to 0$ 时，$g(x)$ 与 x^n 是同阶无穷小，则极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{nx^{n-3}}$$ 存在，且不为 0，所以 $n-3=0$，$n=3$.

【考点】比较无穷小的阶

【总结】无穷小阶数的比较是专转本考试常考考点，同学们必须牢记等价无穷小的公式。

2.【答案】B

【解析】函数 $f(x)$ 应满足 $x+1>0$，$x+2\neq 0$ 且 $\mathrm{e}^{\frac{x}{x+2}}-1\neq 0$，即 $x>-1$ 且 $x\neq 0$，所以 $f(x)$ 的间断点只有 $x=0$，共 1 个.

【考点】函数的间断点

【总结】判断函数间断点的类型和计算函数间断点的个数是专转本考试常考考点。

3.【答案】A

【解析】$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}=2f'(x_0)$，所以 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$ 存在，则 $f'(x_0)$ 存在，即 $f(x)$ 在点 x_0 处可导.

$\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=f'_+(x_0)$，只能说明 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数存在.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 存在，但 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 和 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ 不一定存在，故不能说明 $f(x)$ 在点 x_0 处可导.

$\lim\limits_{h\to +\infty}h\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{h}\right)-f(x_0)\right]=\lim\limits_{h\to +\infty}\dfrac{f\left(x_0+\dfrac{1}{h}\right)-f(x_0)}{\dfrac{1}{h}}=f'_+(x_0)$，只能说明 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数存在.

【考点】导数的定义

【总结】利用导数定义求极限或相关参数是专转本考试常考考点。

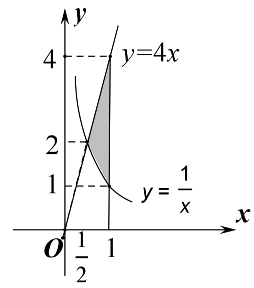
4.【答案】C

【解析】由 $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$，得 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$，则 $\int f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

【考点】原函数与不定积分的关系、不定积分与导数的关系

5.【答案】B

【解析】积分区域 D 如图所示，则可表示为 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 4x\right\}=\left\{(x,y)\middle|1\leqslant y\leqslant 2,\frac{1}{y}\leqslant x\leqslant 1\right\}\cup\left\{(x,y)\middle|2\leqslant y\leqslant 4,\frac{y}{4}\leqslant x\leqslant 1\right\}$，所以



$$原式=\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{1}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{2}^{4}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{4}}^{1}f(x,y)\mathrm{d}x$$

【考点】交换二次积分的积分次序

【总结】直角坐标系下积分次序的交换，直角坐标系转化为极坐标系是专转本考试常考考点，需要同学们准确画出积分区域，再列式子。

6.【答案】A

【解析】选项 A 中，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以由比较审敛法的极限形式可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ 发散，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$，$\frac{n}{n^2+1}>\frac{n+1}{(n+1)^2+1}$（利用 $\frac{n}{n^2+1}-\frac{n+1}{(n+1)^2+1}>0$ 判断），$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ 满足莱布尼茨审敛法的条件，故条件收敛；

选项 B 中，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$ 发散；

选项 C 中，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}}=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由比较审敛法的极限形式可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ 绝对收敛；

选项 D 中，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}\right]=0$，故由比值审敛法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ 收敛，故原级数绝对收敛.

【考点】判断级数敛散性

【总结】判断级数的敛散性是专转本考试必考考点

7.**【答案】**C

【解析】$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$|\boldsymbol{AB}|=0$，即$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=0$，得到$|\boldsymbol{A}|=0$或$|\boldsymbol{B}|=0$，故选C.

【考点】方阵的行列式

8.**【答案】**A

【解析】$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ c & b & d & 1 \\ d & b & c & 1 \\ a & b & d & 1 \end{vmatrix}=0$.

【考点】行列式展开定理

二、填空题（本大题共6小题，每小题4分，共24分）

9.**【答案】**$2\sqrt{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$，要使$f(x)$在$x=4$处连续，只需令$f(1)=2\sqrt{2}$即可.

【考点】补充定义使得函数在某点连续

10.**【答案】**3

【解析】解方程组$\begin{cases} t^3-2t+1=0, \\ t^3+1=2, \end{cases}$得$t=1$，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,2)}=\left.\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{3t^2}{3t^2-2}\right|_{t=1}=3$.

【考点】参数方程求导数

【总结】参数方程求导是专转本考试常考考点。

11.**【答案】**$-\dfrac{87!}{(2+x)^{88}}$

【解析】$y=\ln(2+x)$，$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(2+x)^n}$，故$y^{(88)}=(-1)^{(88-1)}\dfrac{(88-1)!}{(2+x)^{88}}=-\dfrac{87!}{(2+x)^{88}}$.

【考点】求高阶导数；

【总结】高阶导数是专转本考试必考考点。

12.**【答案】**1

【解析】$\int_a^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\int_a^{+\infty}\arctan x d\arctan x=\frac{\arctan^2 x}{2}\bigg|_a^{+\infty}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\arctan^2 a}{2}=\frac{3\pi^2}{32}$，则 $\arctan^2 a=\frac{\pi^2}{16}$，因为 $a>0$，所以 $a=1$.

【考点】无穷区间上的广义积分

【总结】广义积分的计算是专转本考试必考考点。

13.**【答案】**$[-5,5)$

【解析】因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{5^n(n+1)}{5^{n+1}(n+2)}\right|=\frac{1}{5}$，所以收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=5$，故收敛区间为 $(-5,5)$.

当 $x=5$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，发散；当 $x=-5$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$，收敛，所以级数的收敛域为 $[-5,5)$.

【考点】求幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域

【总结】幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域专转本考试必考考点。

14.**【答案】**3 或 -2

【解析】由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关得存在不全为零的数 k_1，k_2，k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，则有 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$，即 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}a&2&1\\2&a&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=a^2-a-6=(a-3)(a+2)=0$，得 $a=3$ 或 $a=-2$，即当 $a=3$ 或 $a=-2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

【考点】已知 n 个 n 维向量组的线性相关性求向量中的待定常数

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

15.**【解析】**$\lim\limits_{x\to1}\frac{1-e^{2(x-1)}}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-2(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}\right)}{3x-2-(2x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}\right)}{x-1}=-\lim_{x\to1}2\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}\right)=-4.$$

【考点】七种未定式极限的计算

【总结】七种未定式极限的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断极限的类型，再选用合适的方法。

16.**【解析】**记 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，

则 $F_x=2\cos(x+2y-3z)-1$，

$F_y=2\cos(x+2y-3z)\cdot2-2=4\cos(x+2y-3z)-2$，

$F_z=2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3=3-6\cos(x+2y-3z)$.

当 $F_x\neq0$ 时，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{6\cos(x+2y-3z)-3}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{4\cos(x+2y-3z)-2}{6\cos(x+2y-3z)-3}=\frac{2}{3},$$

故 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\mathrm{d}y$.

【考点】求二元函数的偏导数、全微分

17.**【解析】**令 $x=\sec t$，则 $\mathrm{d}x=\sec t\tan t\mathrm{d}t$， $0<t<\frac{\pi}{2}$，故

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sec^2t\tan t}\sec t\tan t\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sec t}\mathrm{d}t=\int\cos t\mathrm{d}t=\sin t+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$$

【考点】不定积分的计算

【总结】不定积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是用换元法还是分部积分法求解。

18.**【解析】**令 $\sqrt{e^t-1}=u$，则 $t=\ln\left(1+u^2\right)$， $\mathrm{d}t=\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$，当 $t=\ln2$ 时， $u=1$；当 $t=2\ln2$ 时， $u=\sqrt{3}$，

故 $\int_{\ln2}^{2\ln2}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt3}\frac{2u}{u\left(1+u^2\right)}\mathrm{d}u=2\int_1^{\sqrt3}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=2\arctan u\Big|_1^{\sqrt3}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}$.

【考点】定积分的计算

【总结】 定积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是否可以利用对称性求解，再考虑用换元法或者分部积分法求解。

19. **【解析】** 该二重积分适合选择在极坐标系下进行计算，且 D 可表示为 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$1\leqslant r\leqslant 2$，故

$$\iint\limits_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\ln r\,\mathrm{d}r=\pi\int_1^2 \ln r\,\mathrm{d}r^2=\pi\left(r^2\cdot\ln r\Big|_1^2-\int_1^2 r^2\cdot\frac{1}{r}\mathrm{d}r\right)=\pi\left(4\ln 2-\frac{1}{2}r^2\Big|_1^2\right)=\left(4\ln 2-\frac{3}{2}\right)\pi$$

【考点】 二重积分的计算

【总结】 二重积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是使用直角坐标系还是极坐标系计算。

20. **【解析】** 特解 $y^*=(2x-1)\mathrm{e}^{2x}$，$\left(y^*\right)'=4x\mathrm{e}^{2x}$，$\left(y^*\right)''=(4+8x)\mathrm{e}^{2x}$，

将 y^*，$\left(y^*\right)'$，$\left(y^*\right)''$ 代入到原方程中得

$(4+8x)\mathrm{e}^{2x}+4ax\mathrm{e}^{2x}+(2x-1)\mathrm{e}^{2x}=\left[3+(10+4a)x\right]\mathrm{e}^{2x}=b\mathrm{e}^{2x}$，

对应系数相等，则 $b=3$，$10+4a=0$，$a=-\dfrac{5}{2}$，

则原方程为 $y''-\dfrac{5}{2}y'+y=3\mathrm{e}^{2x}$.

该方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-\dfrac{5}{2}r+1=0$，解得其特征根为 $r_1=\dfrac{1}{2}$，$r_2=2$，

则对应的齐次方程通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$，

故原方程通解为 $y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+C_1\mathrm{e}^{2x}+(2x-1)\mathrm{e}^{2x}$.

【考点】 二阶常系数非齐次线性微分方程

21. **【精析】** 由于 $\begin{vmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{vmatrix}=-1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&8\\-2&-5\end{vmatrix}=-1\neq 0$，

所以 $\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$ 可逆，则

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}3&0&8&1&0&0\\3&-1&6&0&1&0\\-2&0&-5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_3]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&1&2&1&-1&0\\3&-1&6&0&1&0\\1&0&\frac{5}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-3r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)\xrightarrow[\substack{2r_1 \\ -r_2}]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-\frac{5}{2}r_1]{r_2-\frac{3}{2}r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & -8 \end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

所以$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -3 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，故

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -3 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 5 & -50 \\ 10 & 0 & -40 \\ -4 & -2 & 19 \end{pmatrix}.$$

【考点】矩阵方程求解

22.**【解析】**由题意得方程组的增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 10 & 2 & 12 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

可知$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})=3<4$，所以方程组有无穷多解，同解方程组为$\begin{cases} x_1+x_3=3, \\ x_2+x_3=1, \\ x_4=-2, \end{cases}$

取x_3为自由未知量，令$x_3=k$，则通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\text{（}k\text{为任意常数）}.$$

【考点】非齐次方程组的相关问题

四、证明题（本大题 10 分）

23.**【证明】**构造函数 $f(t)=\ln(t+1)$，

当 $x>1$ 时，显然 $f(t)$ 在 $[1,x]$ 上连续，在 $(1,x)$ 内可导，且 $f'(t)=\dfrac{1}{1+t}$，

所以由拉格朗日中值定理可知至少存在一点 $\xi\in(1,x)$，使 $f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1)$，

则 $\ln(x+1)-\ln 2=\dfrac{1}{\xi+1}\cdot(x-1)$，即 $\ln\dfrac{1+x}{2}=\dfrac{x-1}{\xi+1}$.

又因为 $1<\xi<x$，则 $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{\xi+1}<\dfrac{1}{2}$，

所以当 $x>1$ 时，有 $\dfrac{x-1}{x+1}<\dfrac{x-1}{\xi+1}<\dfrac{x-1}{2}$，即 $\dfrac{x-1}{x+1}<\ln\dfrac{1+x}{2}<\dfrac{x-1}{2}$.

【考点】不等式的证明

【总结】不等式的证明是专转本考试必考考点，同学们需要先判断所证结论是否带等号。

五、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

25.**【解析】**（1）由题意得

$$s_1=\int_0^a \sin 2x\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^a=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2a\ ,$$

$$s_2=\int_a^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin 2x)\mathrm{d}x=\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_a^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-a-\frac{1}{2}\cos 2a\ .$$

则 $s=s_1+s_2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}-a-\cos 2a$ ，

$s'(a)=2\sin 2a-1$，令 $s'(a)=0$，解得 $a=\dfrac{\pi}{12}$.

由驻点唯一且实际问题必有最值可知 $a=\dfrac{\pi}{12}$ 也是最小值点，最小值

$$s\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

（2）D_1 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V_{D_1}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{12}}\sin^2 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}}(1-\cos 4x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{12}}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right),$$

D_2 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V_{D_2}=\pi\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)-\pi\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\sqrt{3}\pi}{16}.$$

【考点】平面图形面积、旋转体体积

【总结】平面图形面积、旋转体体积是专转本考试必考考点，同学们需要先画出积分区域，再求解，每年这类题的计算量都很大，同学们计算时要特别仔细。

25.**【解析】**（1）函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{a(x+1)^2-2(x+1)(ax+b)}{(x+1)^4}=\dfrac{-ax+a-2b}{(x+1)^3}$，

因为$f(x)$在$x=1$处取得极值，则$f'(1)=0$，所以$b=0$，又因为$f(1)=-\dfrac{1}{4}$，所以$a=-1$；

（2）$f(x)=-\dfrac{x}{(x+1)^2}$，$f'(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^3}$，$f''(x)=\dfrac{(x+1)^3-3(x-1)(x+1)^2}{(x+1)^6}=\dfrac{-2(x-2)}{(x+1)^4}$，

令$f''(x)=0$，得$x=2$，此时$f(2)=-\dfrac{2}{9}$.

当$x>2$时，$f''(x)<0$，当$x<2$且$x\neq-1$时，$f''(x)>0$，

所以曲线$f(x)$的凹区间为$(-\infty,-1)$和$(-1,2)$，凸间为$(2,+\infty)$，拐点为$\left(2,-\dfrac{2}{9}\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-x}{(x+1)^2}=\infty$，故$x=-1$是曲线$f(x)$的垂直渐近线；

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{(x+1)^2}=0$，故$y=0$是曲线$f(x)$的水平渐近线.

【考点】导数的应用

【总结】导数的应用专转本考试必考考点，常考察求解函数解析式、未知参数，单调性和单调区间、极值和极值点、凹凸区间和拐点、间断点、渐近线等等。