

## 江苏省普通高校专转本选拔考试

## 高等数学 模拟试卷 3

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在下列每一小题中选出一个正确答案, 请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑)

1. 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $x^2 \ln(1+x^2)$  是  $\sin^n x$  的高阶无穷小, 而  $\sin^n x$  又是  $1 - \cos x$  的高阶无穷小, 则正整数

$n = ( \quad )$

A.1

B.2

C.3

D.4

2.  $x=0$  是函数  $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1}$  的  $( \quad )$

A. 跳跃间断点

B. 可去间断点

C. 无穷间断点

D. 振荡间断点

3. 曲线  $y = \frac{2x+1}{(x-1)^2}$  的渐近线的条数为  $( \quad )$

A.1

B.2

C.3

D.4

4. 已知  $f(x+3) = x^3 + 8$ , 则  $f'(x) = ( \quad )$

A.  $3x^2$

B.  $3(x-3)^2$

C.  $3(x+3)^2$

D.  $3x^2 + 6x$

5. 曲线  $\begin{cases} x = 2t + \cos t, \\ y = \ln \frac{(3+t)^2}{9} \end{cases}$  在点  $(1, 0)$  处的切线方程为  $( \quad )$

A.  $x - 3y - 1 = 0$

B.  $x - 3y + 1 = 0$

C.  $x + 3y - 1 = 0$

D.  $x + 3y + 1 = 0$

6. 下列反常积分收敛的是  $( \quad )$

A.  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

B.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

C.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

D.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

7. 设  $|\alpha, \beta, \gamma| = 3$ , 则  $|2\alpha, 2\beta, 2\gamma| = ( \quad )$

A.3

B.6

C.12

D.24

8. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & t & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ , 若  $r(A) = 2$ , 则参数  $t = ( \quad )$

A.0

B.-9

C.9

D.5

## 二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 要使函数  $f(x) = (1-2x)^{\frac{1}{x}}$  在点  $x=0$  处连续, 则需补充定义  $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 设  $\begin{cases} x = te^t, \\ y = 2t + t^2, \end{cases}$  则  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^x = \int_{-\infty}^a e^x dx$ , 则常数  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 定积分  $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} (1+x \cos^3 x) dx$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 函数  $f(x) = xe^x$  的  $n$  阶导数  $f^{(n)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 设三阶矩阵  $A$  的行列式为 2, 则  $|5A^{-1} - 3A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 三、计算题(本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \int_0^x \arctan t dt}{\int_0^{x^2} \sin t dt}$ .

16. 设函数  $z = x^3 \sin xy + y^2 e^x$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

17. 计算不定积分  $\int \left[ \frac{1}{x(1+2\ln x)} + \frac{1}{\sqrt{x}} e^{3\sqrt{x}} \right] dx$ .

18. 求定积分  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx$ .

19. 设  $z = x^2 f\left(e^y, \frac{y^2}{x}\right)$ , 其中  $f(u, v)$  具有一阶连续偏导数, 求  $dz$ .

20. 求微分方程  $y'' + y' = 2x^2 e^x$  的通解.

21. 已知  $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 3, 5)$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, a+2, 1)$ ,  $\alpha_4 = (1, 2, 4, a+8)$  及  $\beta = (1, 1, b+3, 5)$ .

(1)  $a, b$  为何值时,  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的线性组合?

(2)  $a, b$  为何值时,  $\beta$  有  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的唯一的线性表示式? 并写出该表示式.

22. 解线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

**四、证明题（本大题 10 分）**

23. 证明: 当  $x > 1$  时,  $e^{x-1} > \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ .

**五、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）**

24. 设平面图形由曲线  $y = 1 - x^2 (x \geq 0)$  及两坐标轴围成.

- (1) 求该平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得的旋转体的体积;
- (2) 求常数  $a$  的值, 使直线  $y = a$  将该平面图形分成面积相等的两部分.

25. 设定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的可导函数  $f(x)$  满足方程  $xf'(x) - 4 \int_1^x f(t) dt = x^3 - 3$ , 求:

- (1) 函数  $f(x)$  的表达式;
- (2) 函数  $f(x)$  的单调区间与极值;
- (3) 曲线  $y = f(x)$  的凹凸区间与拐点.