



一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小中哪一个是比其他三个更高阶的无穷小 ()

- A. x^2 B. $1 - \cos x$
C. $\sqrt{1-x^2} - 1$ D. $x - \tan x$

2. $x=0$ 是函数 $f(x) = \frac{(x-1)(1-e^{-x})}{|x|(x^2-1)}$ 的 ()

- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 无穷型间断点 D. 连续点

3. 下列函数中在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是 ()

- A. $f(x) = |x|$ B. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
C. $f(x) = \sqrt{x+1}$ D. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

4. 设 $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1-\cos f(x)}{\sin x} \right]^{\frac{1}{x}} = e$, 则 $f'(0)=$ ()

- A. 0 B. 1
C. $\sqrt{2}$ D. \sqrt{e}

5. $f'(x_0)=0$ 是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值的 ()

- A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分条件也非必要条件

6. 设函数 $f(x) = 2x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$, 则 $f(x)$ ()

- A. 只有一个极大值 B. 只有一个极小值
 C. 既有极大值又有极小值 D. 没有极值

7. 下列级数中条件收敛的是 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n-1}$
 B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+2}}$
 C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$
 D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}}$

8. 设 A 为三阶方阵, 且 $\left| -\frac{1}{3}A \right| = \frac{1}{3}$, 则 $|A| = ()$

- A. -9 B. -3 C. -1 D. 9

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$

11. $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$, 则 $y^{(n)} = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^3 - 3yz + 3x = 8$ 所确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 对函数 $y = \ln(1+x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上应用拉格朗日定理求得的点 $\xi = \underline{\hspace{2cm}}$

14. D 是 4 阶行列式, M_{ij} , A_{ij} 分别表示 (i, j) 元素的余子式和代数余子式, 且 $M_{21} = 1$, $M_{22} = 2$,

$M_{23} = 3$, $M_{24} = 4$, 则 $M_{21} + M_{22} + M_{23} + M_{24} + A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{x - \arctan x}$

16. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$

17. 求不定积分 $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

18. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

19. 设 $z = yf\left(\frac{x}{y}\right) + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f, φ 二阶可导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

20. 求微分方程 $y''+4y'+4y = e^{-2x}$ 的通解

21. $\iint_D y dxdy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = \sqrt{4 - x^2}$, 直线 $y = x$, $x = 0$ 所围成的平面闭区域

22. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}

四、证明题 (本大题共 10 分)

23. 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $e^x - x - 1 > \frac{1}{2}x \sin x$

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 过点 $M(0,1)$ 作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 求:

(1) 切点 p 的坐标及切线 Mp 的方程;

(2) 由曲线 $y = \ln x$, 切线 Mp 及两坐标轴所围成的平面图形 D 的面积;

(3) 平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

25. 当 k 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多解? 当有无穷多解时, 求出其全部解