

江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 4 参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。在下列每一小题中选出一个正确答案，请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑）

1. 【答案】C

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+ax^2} - 1}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}ax^2}{x^2} = \frac{a}{3} = 1$, 故 $a = 3$.

【考点】 比较无穷小的阶

【总结】 无穷小阶数的比较是专转本考试常考考点，同学们必须牢记等价无穷小的公式

2. 【答案】D

【解析】 显然函数 $f(x)$ 在 $x=0, x=1, x=2, x=-2$ 处均无定义，

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{(x^2-x)\sin(x^2-4)} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x^2-x)\sin(x^2-4)} = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{(x^2-x)\sin(x^2-4)} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x^2-x)\sin(x^2-4)}$

 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x(x-1)(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{24}$, 所以 $x=-2$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，故应选 D.

【考点】 函数的间断点

【总结】 判断函数间断点的类型和计算函数间断点的个数是专转本考试常考考点。

3. 【答案】D

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{2x-6} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{1}{2} f'(3)-1$, 所以 $f'(3)=2$.

【考点】 导数的定义

【总结】 利用导数定义求极限或相关参数是专转本考试常考考点。

4. 【答案】D

【解析】 函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\arctan x^2$, 则 $f(x) = (\arctan x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}$,

$$\text{故 } \int x^2 f(x) dx = \int \frac{2x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^4} d(1+x^4) = \frac{1}{2} \ln(1+x^4) + C.$$

【考点】原函数与不定积分的关系、不定积分与导数的关系

5. 【答案】B

【解析】由题意可知积分区域为 $0 \leq x \leq 2$, $x-2 \leq y \leq 0$, 令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 则在极坐标系下积分区

$$\text{域为 } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0, 0 \leq r \leq \frac{2}{\cos\theta - \sin\theta}, \text{ 所以 } \int_0^2 dx \int_{x-2}^0 f(x, y) dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta - \sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

【考点】交换二次积分的积分次序

【总结】直角坐标系下积分次序的交换，直角坐标系转化为极坐标系是专转本考试常考考点，需要同学们准确画出积分区域，再列式子。

6. 【答案】C

【解析】A 项, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ 满足莱布尼茨审敛法的条件, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ 条件收敛.

B 项, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(n+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = \infty$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ 满足莱布尼茨审敛法的条件, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ 条件收敛.

C 项, 因为 $\left| \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+9}} \right| < \frac{1}{\sqrt{n^3+9}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ 是 $p = \frac{3}{2} > 1$ 的 p -级数, 收敛, 所以由比较审敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+9}}$ 绝对收敛.

D 项, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是调和级数, 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 满足莱布尼茨审敛法的条件, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 条件收敛.

【考点】判断级数敛散性

7. 【答案】A

【解析】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 $\begin{vmatrix} \alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1+a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+1 \end{vmatrix} = (a^2+1)(1-a) = 0$, 故 $a=1$.

【考点】 已知 n 个 n 维向量组的线性相关性求向量中的待定常数

8. 【答案】C

【解析】 $|A| = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot 3 + (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot (-2) + (-1)^{3+3} \cdot (-2) \cdot 1 + (-1)^{4+3} \cdot 2 \cdot 1 = 5$.

【考点】 行列式展开定理

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 【答案】 $\ln 8$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-a}\right)^{a(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-a}\right)^{(x-a)\frac{a(x-2)}{x-a}} = e^a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 8x^3 + 1} =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^4}} = 8, \text{ 则 } e^a = 8, \text{ 所以 } a = \ln 8.$$

【考点】 通过函数极限求待定系数

10. 【答案】 $-\frac{1}{3\ln 3}$

【解析】 $\frac{dx}{dt} = 3^t \ln 3$, $\frac{dy}{dt} + \ln t + 1 = 0$, 则 $\frac{dy}{dt} = -\ln t - 1$, 故 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-1 - \ln t}{3^t \ln 3}$, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = -\frac{1}{3\ln 3}$.

【考点】 参数方程求导数

【总结】 参数方程求导是专转本考试常考考点。

11. 【答案】 $-\sin x$

【解析】 因为 $(2x+1)^{2021}$ 是最高次项为 $2^{2021}x^{2021}$ 的多项式, 所以 $\left[(2x+1)^{2021}\right]^{(2022)} = 0$; 又因为 $(\sin x)^{(2022)} - \sin\left(x + \frac{2022\pi}{2}\right) = -\sin x$, 所以 $f^{(2022)}(x) = -\sin x$.

【考点】 求高阶导数

【总结】高阶导数是专转本考试必考考点。

12. 【答案】1

【解析】 $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_a^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} d\sqrt{x} = -2e^{-\sqrt{x}} \Big|_a^{+\infty} = \frac{2}{e^{\sqrt{a}}} = \frac{2}{e}$, 则 $a=1$.

【考点】无穷区间上的广义积分

【总结】广义积分的计算是专转本考试必考考点。

13. 【答案】 $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}(x+1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n(x+1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} |x+1| = 2|x+1|$,

当 $2|x+1| < 1$, 即 $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$ 时, 幂级数收敛.

又当 $x=-\frac{3}{2}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, 收敛; 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 发散.

所以幂级数的收敛域为 $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

【考点】求幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域

【总结】幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域是专转本考试必考考点。

14. 【答案】2

【解析】 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $r(A)=2$.

【考点】矩阵的秩

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (\sqrt{t+t^2} - \sqrt{t}) dt}{\ln(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (\sqrt{t+t^2} - \sqrt{t}) dt}{\frac{5}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{\frac{5}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)}{\frac{5}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{5}{2}x^2} = \frac{1}{5}.$$

【考点】七种未定式极限的计算

【总结】七种未定式极限的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断极限的类型，再选用合适的方法。

16. 【解析】 $\frac{\partial z}{\partial u} = e^u \ln v$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{e^u}{v}$, 且 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -2y$, 故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = e^u \ln v \cdot 2x + \frac{e^u}{v} \cdot 1$$

$$= 2xe^{x^2+2y} \ln(x-y^2) + \frac{e^{x^2+2y}}{x-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = e^u \ln v \cdot 2 - \frac{e^u}{v} \cdot 2y$$

$$= 2e^{x^2+2y} \ln(x-y^2) - \frac{2ye^{x^2+2y}}{x-y^2}.$$

【考点】求二元函数的偏导数、全微分

17. 【解析】令 $\sqrt{2x+3} = t$, 则 $x = \frac{t^2 - 3}{2}$, $dx = tdt$, 故

$$\int e^{\sqrt{2x+3}} dx = \int e^t t dt = \int t de^t = te^t - \int e^t dt = (t-1)e^t + C = (\sqrt{2x+3} - 1)e^{\sqrt{2x+3}} + C.$$

【考点】不定积分的计算

【总结】不定积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是用换元法还是分部积分法求解。

18. 【解析】令 $t = x-1$, 则 $dx = dt$, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $t = -\frac{1}{2}$; 当 $x = 2$ 时, $t = 1$,

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^3 e^{t^4+1} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^2} dt = 0 - \frac{1}{t} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -1 + 2 = 1.$$

【考点】定积分的计算

【总结】定积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是否可以利用对称性求解，再考虑用换元法或者分部积分法求解。

19. 【解析】由题意可知区域 $D = \left\{ (\theta, r) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1 \right\}$.

$$\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy + \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy ,$$

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} \cdot r dr = \frac{\pi}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{2} \pi ;$$

区域 D 关于 x 轴对称, $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是关于 y 的奇函数, 所以

$$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = 0 .$$

$$\text{故 } I = \frac{\ln 2}{2} \pi + 0 = \frac{\ln 2}{2} \pi .$$

【考点】二重积分的计算

【总结】二重积分的计算是专转本考试必考考点, 同学们需要先判断是使用直角坐标系还是极坐标系计算。

20. 【解析】原方程对应的二阶齐次微分方程的特征方程为 $r^2 - r = 0$,

解得特征根为 $r_1 = 1$, $r_2 = 0$,

故对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2$,

又 $\lambda = 0$ 是特征方程的单根, 故设 $y'' - y' = 2x$ 的一个特解为 $y^* = x(ax+b)$,

则 $(y^*)' = 2ax+b$, $(y^*)'' = 2a$, 代入原方程, 得 $2a - 2ax - b = 2x$, 解出 $a = -1$, $b = -2$,

则原方程的一个特解为 $y^* = -x^2 - 2x$,

故原方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 - x^2 - 2x$.

【考点】二阶常系数非齐次线性微分方程

21. 【解析】由题意可知 $(A - E)X = A^2 - E = (A - E)(A + E)$,

又 $|A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, 故 $A - E$ 可逆, 则有

$$X = A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

【考点】矩阵方程求解

22. 【解析】所给方程组的增广矩阵

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right),$$

若方程组有无穷多解, 则需 $r(A)=r(\bar{A})$, 有 $\begin{cases} a-1=0, \\ b+1=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-1, \end{cases}$

即 $a=1, b=-1$ 时方程组有无穷多解, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

则同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1, \end{cases}$$

x_3, x_4 为自由未知量. 令 $x_3 = k_1, x_4 = k_2$, 可得方程组的通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = k_1(1, -2, 1, 0)^T + k_2(1, -2, 0, 1)^T + (-1, 1, 0, 0)^T, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

【考点】非齐次方程组的相关问题

四、证明题 (本大题 10 分)

23. 构造函数 $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \int_1^x \left(t + \frac{1}{t}\right) dt, x \in [1, +\infty)$,

$$\text{则 } F'(x) = 2x^2 - x - \frac{1}{x},$$

$$F''(x) = 4x - 1 + \frac{1}{x^2},$$

则 $x > 1$ 时, $F''(x) > 0$, 所以 $F'(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

从而 $x > 1$ 时, $F'(x) > F'(1) = 0$, 所以 $F(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $x > 1$ 时, $F(x) > F(1) > 0$, 即 $\int_1^x \left(t + \frac{1}{t}\right) dt < \frac{2}{3}x^3$.

【考点】不等式的证明

【总结】不等式的证明是专转本考试必考考点，同学们需要先判断所证结论是否带等号。

五、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

24. 【解析】(1) $a = -2$ 时， $y = -2x^2 + 6x$ ，所求旋转体体积为

$$V_1 = \pi \int_0^2 (-2x^2 + 6x)^2 dx = 4\pi \left(\frac{x^5}{5} + 3x^3 - \frac{3}{2}x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{128}{5}\pi;$$

$$(2) \text{由} \begin{cases} y = ax^2 + (4-a)x, \\ y = \frac{5}{2}x \end{cases} \text{得} x = 0 \text{ 或 } x = 1 - \frac{3}{2a},$$

则平面图形的面积

$$S_{D_2} = \int_0^{1-\frac{3}{2a}} \left[ax^2 + (4-a)x - \frac{5}{2}x \right] dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \left(\frac{3}{4} - \frac{a}{2} \right)x^2 \right] \Big|_0^{1-\frac{3}{2a}} = \frac{(3-2a)^3}{48a^2} (a < 0).$$

$$\frac{d(S_{D_2})}{da} = -\frac{(3-2a)^2(a+3)}{24a^3}, \text{令} \frac{d(S_{D_2})}{da} = 0, \text{得} a = -3.$$

$$\text{当} a < -3 \text{ 时, } \frac{d(S_{D_2})}{da} < 0; \text{ 当} -3 < a < 0 \text{ 时, } \frac{d(S_{D_2})}{da} > 0,$$

所以 S_{D_2} 在 $a = -3$ 时取得最小值，即 D_2 的面积最小。

【考点】平面图形面积、旋转体体积

【总结】平面图形面积、旋转体体积是专转本考试必考考点，同学们需要先画出积分区域，再求解，每年这类题的计算量都很大，同学们计算时要特别仔细。

25. 【解析】(1) 函数 y 的定义域为 $(-1, 1)$ ， $y = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ ，

$$y' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x} = \frac{2}{x^2-1} < 0, \text{ 所以 } y \text{ 在 } (-1, 1) \text{ 内是单调递减的,}$$

$$y'' = \frac{-2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}, \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 解得 } x = 0, \text{ 此时 } y(0) = 0.$$

当 $0 < x < 1$ 时， $y'' < 0$ ，当 $-1 < x < 0$ 时， $y'' > 0$ ，

所以曲线 y 的凸区间为 $(0, 1)$ ，区间为 $(-1, 0)$ ；

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{1-x}{1+x} = -\infty$ ， $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \frac{1-x}{1+x} = +\infty$ ，所以 y 的垂直渐近线为 $x = 1$ 和 $x = -1$ ，没有水平渐近线。

【考点】导数的应用

【总结】导数的应用专转本考试必考考点，常考察求解函数解析式、未知参数，单调性和单调区间、极值和极值点、凹凸区间和拐点、间断点、渐近线等等。