

江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 2 参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。在下列每一小题中选出一个正确答案，请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑）

1. 【答案】B

【解析】 $(e^{-2x})' = f(x)$, 即 $f(x) = -2e^{-2x}$.

【考点】不定积分与原函数的关系

2. 【答案】C

【解析】 $f'(x) = \left[\int_0^x (e^{-t} + t^2) dt \right]' = e^{-x} + x^2$, 故应选 C.

【考点】变上限积分函数求导

【总结】变上限积分函数求导是专转本考试必考考点。

3. 【答案】D

【解析】 $\int_0^{+\infty} 6xe^{-3x^2} dx = -e^{-3x^2} \Big|_0^{+\infty} = 1$; $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx = -\frac{1}{x-1} \Big|_2^{+\infty} = 1$;

$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln\sqrt{x})^2} dx = \int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{2}{u(\ln u)^2} du = -\frac{2}{\ln u} \Big|_{\sqrt{e}}^{+\infty} = 4$; $\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dx = \int_{-\infty}^0 2^x dx + \int_0^{+\infty} 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^{+\infty} = +\infty$,

因此，选项 D 中积分发散。

【考点】无穷区间上的广义积分

【总结】广义积分的计算和敛散性的判断是专转本考试必考考点。

4. 【答案】A

【解析】因为 $\frac{2(x^4 + 3x^2 + 1)\sin x}{1+x^2}$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上是奇函数， $\cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上是偶函数，则

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2(x^4 + 3x^2 + 1)\sin x}{1+x^2} + \cos x \right] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(x^4 + 3x^2 + 1)\sin x}{1+x^2} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

【考点】利用对称性求解定积分

5. 【答案】D

【解析】 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{k}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ，故该级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = +\infty$ ，收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

【考点】求幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域

【总结】幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域是专转本考试必考考点。

6. 【答案】B

【解析】 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{an^2 - 2n + 1}{n^3} = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ ，由于后两项绝对收敛， $a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，所以原级数条件收敛。

【考点】判断级数敛散性

【总结】判断级数的敛散性是专转本考试必考考点。

7. 【答案】C

【解析】 因为 $|B| = -3 \neq 0$ ，所以 B 可逆，则 $R(AB) = R(A) = 2$ ，所以 $|A| = 0$ ，解得 $k = 2$.

【考点】矩阵秩的性质

8. 【答案】A

【解析】 $5 \times (-1) + 2a + 4 \times 4 = 0$ ，解得 $a = -5.5$.

【考点】行列式的性质

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 【答案】3

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{k}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3$ ，即 $k = 3$.

【考点】利用极限求未知参数

10. 【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】 因为 $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$ ，可得 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2t} = \frac{3}{4t}$ ，所以 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} = \frac{3}{4}$.

【考点】参数方程求导

【总结】参数方程求导是专转本考试常考考点。

11. 【答案】 $(-1)^n 2^n n!(2x+1)^{-(n+1)}$.

【解析】因为 $f(x) = (2x+1)^{-1}$, 所以

$$f'(x) = (-1)2(2x+1)^{-2},$$

$$f''(x) = (-1)(-2)2^2(2x+1)^{-3} = (-1)^2 2^2 2!(2x+1)^{-3},$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)2^3(2x+1)^{-4} = (-1)^3 2^3 3!(2x+1)^{-4},$$

以此类推, 可得 $f^{(n)}(x) = (-1)^n 2^n n!(2x+1)^{-(n+1)}$.

【考点】高阶导数

【总结】高阶导数是专转本考试必考考点。

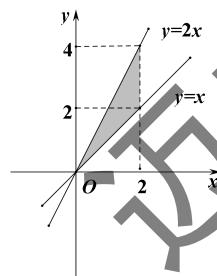
12. 【答案】 $2x \ln x^2$

【解析】因为 $f(x)$ 是 $\ln x$ 的一个原函数, 所以 $f'(x) = \ln x$, 进而 $\frac{df(x^2)}{dx} = f'(x^2) \cdot 2x = 2x \ln x^2$.

【考点】原函数与不定积分的关系、不定积分与导数的关系

13. 【答案】 $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$

【解析】积分区域如图所示.



【考点】交换积分次序

【总结】直角坐标系下积分次序的交换, 直角坐标系转化为极坐标系是专转本考试常考考点, 需要同学们准确画出积分区域, 再列式子。

14. 【答案】2

【解析】由于 $R(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1$, 所以 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 两两线性相关, 对应成比例, 即 α_3, α_4 均可由 α_2 线性表示,

又 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$, 从而 $R(\alpha_1, \alpha_2) = 2$.

【考点】向量组的秩

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2.$

【考点】七种未定式极限的计算

【总结】七种未定式极限的计算是专转本考试必考考点, 同学们需要先判断极限的类型, 再选用合适的方法。

16. 【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf(x^2 + y^2) + x^2f'(x^2 + y^2) \cdot 2x = 2xf(x^2 + y^2) + 2x^3f'(x^2 + y^2),$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f(x^2 + y^2) + 2xf'(x^2 + y^2) \cdot 2x + 6x^2f'(x^2 + y^2) + 2x^3f''(x^2 + y^2) \cdot 2x$$

$$= 2f(x^2 + y^2) + 10x^2f'(x^2 + y^2) + 4x^4f''(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xf'(x^2 + y^2) \cdot 2y + 2x^3f''(x^2 + y^2) \cdot 2y$$

$$= 4xyf'(x^2 + y^2) + 4x^3yf''(x^2 + y^2).$$

【考点】求抽象函数的偏导数

17. 【解析】令 $(x+2)^{\frac{1}{3}} = t$, 则 $x = t^3 - 2$, $dx = 3t^2dt$, 所以

$$\int x(x+2)^{\frac{1}{3}} dx = \int (t^3 - 2)t \cdot 3t^2 dt = 3 \int (t^6 - 2t^3) dt = \frac{3}{7}t^7 - \frac{3}{2}t^4 + C = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

【考点】不定积分的计算

【总结】不定积分的计算是专转本考试必考考点, 同学们需要先判断是用换元法还是分部积分法求解。

18. 【解析】 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = \int_0^\pi f(x) \sin x dx + \int_0^\pi \sin x df'(x)$

$$= \int_0^\pi f(x) \sin x dx + f'(x) \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \cos x dx = \int_0^\pi f(x) \sin x dx - \int_0^\pi \cos x df(x)$$

$$= \int_0^\pi f(x) \sin x dx - f(x) \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(\pi) + f(0) = 5.$$

【考点】定积分的计算

【总结】定积分的计算是专转本考试必考考点, 同学们需要先判断是否可以利用对称性求解, 再考虑用换

无法或者分部积分法求解。

19. 【解析】积分区域为 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt{y}\}$, 又可表示为 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$, 故

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{\sin x}{x} dy = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} (x - x^2) dx$$

$$= \int_0^1 \sin x dx - \int_0^1 x \sin x dx = -\cos x \Big|_0^1 + \int_0^1 x d \cos x$$

$$= -\cos 1 + 1 + x \cos x \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos x dx = 1 - \sin x \Big|_0^1 = 1 - \sin 1.$$

【考点】二重积分的计算

【总结】二重积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是使用直角坐标系还是极坐标系计算。

20 【解析】微分方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 其根为 $r_{1,2} = \pm i$,

故对应的齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

因为 $f(x) = (x-2)e^{3x}$, $\lambda = 3$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为 $y^* = (ax+b)e^{3x}$, 可得

$$(y^*)' = 3(ax+b)e^{3x} + ae^{3x}, \quad (y^*)'' = (9ax+9b)e^{3x} + 6ae^{3x},$$

代入原方程得 $(10ax+10b+6a)e^{3x} = (x-2)e^{3x}$,

$$\text{比较系数得 } a = \frac{1}{10}, \quad b = -\frac{13}{50}, \text{ 从而 } y^* = \left(\frac{1}{10}x - \frac{13}{50} \right) e^{3x}.$$

$$\text{综上, 原方程的通解为 } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\frac{1}{10}x - \frac{13}{50} \right) e^{3x}.$$

【考点】二阶常系数非齐次线性微分方程

$$21. \text{ 【解析】 } (A|B) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{可得 } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}.$$

【考点】矩阵方程求解

22. 【解析】系数矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = 2x_4, \end{cases}$$

令 $x_2 = k_1$, $x_4 = k_2$,

$$\text{可得线性方程组的通解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

【考点】非齐次方程组的相关问题

四、证明题（本大题 10 分）

23. 【解析】令 $F(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi} - \cos x$, 因为 $F(-x) = F(x)$, 所以 $F(x)$ 是偶函数, 且 $F(0) = 0$,

故只需要考虑区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

因为 $F'(x) = -\frac{2x}{\pi} + \sin x$, 且 $F'(0) = 0$, $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

又由 $F''(x) = -\frac{2}{\pi} + \cos x = 0$, 得 $x = \arccos \frac{2}{\pi} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

当 $x \in \left[0, \arccos \frac{2}{\pi}\right]$ 时, $F''(x) \geq 0$, $F'(x)$ 在 $\left[0, \arccos \frac{2}{\pi}\right]$ 上单调增加, $F'(x) \geq F'(0) = 0$;

当 $x \in \left(\arccos \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $F''(x) < 0$, 表明 $F'(x)$ 在 $\left(\arccos \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调减少,

即 $F'(x) > F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

所以在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内, $F'(x) \geq 0$, 从而 $F(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加,

则 $F(x) \geq F(0) = 0$.

所以 $F(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内满足 $F(x) \geq 0$, 即 $\cos x \leq 1 - \frac{1}{\pi}x^2$ 成立.

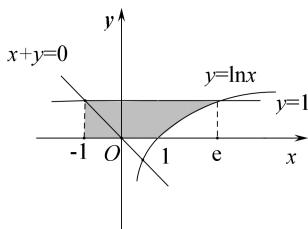
【考点】不等式的证明

【总结】不等式的证明是专转本考试必考考点, 同学们需要先判断所证结论是否带等号。

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 【解析】(1) 由题意得所围图形如图所示, 则平面区域 D 的面积

$$S = \int_0^1 [e^y - (-y)] dy = \left(e^y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = e - \frac{1}{2};$$



(2) 所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot 1^2 \cdot (e+1) - \frac{\pi}{3} \times 1^2 \times 1 - \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi(e+1) - \frac{\pi}{3} - \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx \right) \\ &= \pi(e+1) - \frac{\pi}{3} - \pi \left(e - 2x \ln x \Big|_1^e + 2 \int_1^e dx \right) = \pi \left(e + \frac{2}{3} \right) - \pi(e - 2e + 2e - 2) = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

【考点】平面图形面积、旋转体体积

【总结】平面图形面积、旋转体体积是专转本考试必考考点, 同学们需要先画出积分区域, 再求解, 每年这类题的计算量都很大, 同学们计算时要特别仔细。

25. 【解析】(1) 函数 y 在定义域上处处可导, 且 $y' = 3x^2 + 2ax + b$,

因为 $x = -1$ 和 $x = 3$ 是 y 的极值点,

故 $y'(-1) = 3 - 2a + b = 0$, $y'(3) = 27 + 6a + b = 0$, 解得 $a = -3$, $b = -9$;

(2) 由 (1) 得 $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$,

当 $x > 3$ 时, $y' > 0$, 当 $-1 < x < 3$ 时, $y' < 0$, 当 $x < -1$ 时, $y' > 0$,

所以 y 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(3, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(-1, 3)$ ；

(3) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$, $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y'' = 6x - 6$, 令 $y'' = 0$, 解得 $x=1$.

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$, 当 $x = 1$ 时, $y = 16$,

所以 y 的凹区间是 $(1, +\infty)$, 凸区间是 $(-\infty, 1)$, 拐点是 $(1, 16)$.

【考点】导数的应用

【总结】导数的应用专转本考试必考考点，常考察求解函数解析式、未知参数，单调性和单调区间、极值和极值点、凹凸区间和拐点、间断点、渐近线等等。