江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 3 参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.在下列每一小题中选出一个正确答案，请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑）

1.**【答案】**C

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^n x}=0$，得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^n}=0$，所以 $4>n$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^n x}{1-\cos x}=0$，得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{\frac{1}{2}x^2}=0$，所以 $n>2$，

即 $2<n<4$，所以 $n=3$.

【考点】比较无穷小的阶

【总结】无穷小阶数的比较是专转本考试常考考点，同学们必须牢记等价无穷小的公式。

2.**【答案】**A

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=1$.

【考点】间断点的类型

【总结】判断函数间断点的类型和计算函数间断点的个数是专转本考试常考考点。

3.**【答案】**B

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}=0$，曲线有一条水平渐近线 $y=0$；$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}=\infty$，曲线有一条垂直渐近线 $x=1$.

【考点】曲线的渐近线

4.**【答案】**B

【解析】令 $x+3=t$，则 $x=t-3$，故 $f\left(x+3\right)=f\left(t\right)=\left(t-3\right)^3+8$ $f\left(x+3\right)=f\left(t\right)=\left(t-3\right)^3+8$，即 $f\left(x\right)=\left(x-3\right)^3+8$，因此 $f'\left(x\right)=3\left(x-3\right)^2$.

【考点】抽象函数求导

5.**【答案】**A

【解析】点 $(1,0)$ 对应的 t 为 0，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\frac{9}{(3+t)^2}\cdot\frac{2(3+t)}{9}}{2-\sin t}=\dfrac{2}{(3+t)(2-\sin t)}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{3}$，所以曲线在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y-0=\dfrac{1}{3}(x-1)$，即 $x-3y-1=0$.

【考点】曲线切线和法线相关问题

6.【答案】C

【解析】$\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{+\infty}=+\infty$，$\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln(\ln x)\Big|_e^{+\infty}=+\infty$，

$\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=1$，$\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=+\infty$.

【考点】广义积分

【总结】广义积分的计算和敛散性的判断是专转本考试必考考点。

7.【答案】D

【解析】根据行列式性质，一列的公因数可以提出来，所以原式提出 $2^3=8$.从而 $|2\alpha,2\beta,2\gamma|=8|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=8\times3=24$

【考点】行列式的性质

8.【答案】C

【解析】$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\6&t&2\\4&6&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&4\\0&t-9&-10\\0&0&-5\end{pmatrix}$ $\because r(A)=2$，$\therefore t-9=0$，解得 $t=9$.

【考点】利用矩阵的秩求参数

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9.【答案】e^{-2}.

【解析】因为 $f(x)=(1-2x)^{\frac{1}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续，所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)}=e^{-2}$.

【考点】补充定义使得函数在某点连续

10.【答案】-2

【解析】因为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2+2t}{\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t}=2\mathrm{e}^{-t}$，所以 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-2\mathrm{e}^{-t}}{(1+t)\mathrm{e}^t}=\frac{-2}{(1+t)\mathrm{e}^{2t}}$，

则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{-2}{(1+t)\mathrm{e}^{2t}}\right|_{t=0}=-2$.

【考点】参数方程求导

【总结】参数方程求导是专转本考试常考考点。

11.【答案】-1

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{\frac{x}{-1}\cdot(-1)}=\left.\mathrm{e}^x\right|_{-\infty}^{a}$，所以 $\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^a$，得 $a=-1$.

【考点】广义积分的计算

【总结】广义积分的计算和敛散性的判断是专转本考试必考考点。

12.【答案】2π

【解析】$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\left(1+x\cos^3x\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}x\cos^3x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=2\pi+0=2\pi$.

【考点】利用对称性计算定积分

13.【答案】$(n+x)\mathrm{e}^x$

【解析】因为

$f'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=(1+x)\mathrm{e}^x, f''(x)=\mathrm{e}^x+(1+x)\mathrm{e}^x=(2+x)\mathrm{e}^x,\ f'''(x)=\mathrm{e}^x+(2+x)\mathrm{e}^x=(3+x)\mathrm{e}^x,\ \cdots,$

所以 $f^{(n)}(x)=(n+x)\mathrm{e}^x$.

【考点】高阶导数

【总结】高阶导数是专转本考试必考考点。

14.【答案】$-\frac{1}{2}$

【解析】$\left|5A^{-1}-3A^*\right|=\left|A^{-1}\right|\left|5E-3AA^*\right|=\left|A^{-1}\right||5E-3|A|E|=\left|A^{-1}\right||-E|=(-1)^3\left|A^{-1}\right|=-\frac{1}{2}$.

【考点】方阵的行列式

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

15.【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2-\int_0^x \arctan t\mathrm{d}t}{\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{2x\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{6x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{6\left(1+x^2\right)}=\dfrac{1}{6}$.

【考点】七种未定式极限的计算

【总结】七种未定式极限的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断极限的类型，再选用合适的方法。

16.【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2\sin xy+yx^3\cos xy+y^2\mathrm{e}^x$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^3\cos xy+x^3\cos xy-yx^4\sin xy+2y\mathrm{e}^x=4x^3\cos xy-yx^4\sin xy+2y\mathrm{e}^x$.

【考点】求抽象函数的偏导数

17.【解析】$\int\left[\dfrac{1}{x\left(1+2\ln x\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}\right]\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x\left(1+2\ln x\right)}\mathrm{d}x+\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{1+2\ln x}\mathrm{d}\left(1+2\ln x\right)+\dfrac{2}{3}\int\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}\mathrm{d}\left(3\sqrt{x}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\ln\left|1+2\ln x\right|+\dfrac{2}{3}e^{3\sqrt{x}}+C$.

【考点】不定积分的计算

【总结】不定积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是用换元法还是分部积分法求解。

18.【解析】令 $x=\sqrt{2}\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$，

且当 $x=0$ 时 $\theta=0$，当 $x=1$ 时 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，可得

$$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin^2\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\sqrt{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos2\theta)\mathrm{d}\theta=\left(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

【考点】定积分的计算

【总结】定积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是否可以利用对称性求解，再考虑用换元法或者分部积分法求解。

19.【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2\left(-\dfrac{y^2}{x^2}\right)f_2'=2xf-y^2f_2'$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2\left(e^y f_1'+\dfrac{2y}{x}f_2'\right)=x^2e^y f_1'+2xyf_2'$，

则 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=\left(2xf-y^2f_2'\right)dx+\left(x^2e^y f_1'+2xyf_2'\right)dy$.

【考点】求二元函数的偏导数、全微分

【总结】求二元函数的偏导数、全微分是专转本考试必考考点，同学们需要通过相关公式求出偏导数。

20.**【解析】**微分方程的特征方程为 $r^2+r=0$，其根为 $r_1=0$, $r_2=-1$，故对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1+C_2e^{-x}$.

因为 $f(x)=2x^2e^x$，$\lambda=1$ 不是特征方程的根，

故原方程的特解设为 $y^*=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$，可得

$$\left(y^*\right)'=\left(ax^2+bx+c\right)e^x+(2ax+b)e^x,$$

$$\left(y^*\right)''=\left(ax^2+bx+c\right)e^x+2(2ax+b)e^x+2ae^x,$$

代入原方程得 $\left(2ax^2+2bx+2c+6ax+3b+2a\right)e^x=2x^2e^x$，

比较系数得 $a=1$，$b=-3$，$c=\dfrac{7}{2}$，从而 $y^*=\left(x^2-3x+\dfrac{7}{2}\right)e^x$.

综上，原方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}+\left(x^2-3x+\dfrac{7}{2}\right)e^x$.

【考点】二阶常系数非齐次线性微分方程

21.**【解析】**将 $\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T,\boldsymbol{\beta}^T$ 用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T,\boldsymbol{\beta}^T\right)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+5&2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{bmatrix}.$$

（1）当 $a=-1$，$b\neq0$ 时，$R\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T\right)\neq R\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T,\boldsymbol{\beta}^T\right)$，

故 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合.

（2）当 $a\neq-1$ 时， $R\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T\right)=R\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T,\boldsymbol{\beta}^T\right)$，此时 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 唯一线性表示，且

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4 .$$

【考点】线性表示

22.**【解析】**用初等行变换把该线性方程组所对应的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&3&2&4\\2&4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&3\\0&2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

与原线性方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4=0,\\x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{3}{2}x_4=0.\end{cases}$$

取 x_3， x_4 为自由未知量，得

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,\\x_2=-\frac{1}{2}x_3-\frac{3}{2}x_4.\end{cases}$$

令 $x_3=k_1$， $x_4=k_2$，得该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2}k_2\\-\frac{1}{2}k_1-\frac{3}{2}k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\text{（}k_1\text{，}k_2\text{为任意常数）}.$$

【考点】齐次方程组的相关问题

四、证明题（本大题 10 分）

23.**【解析】**构造函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$，则

$$f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-x,\quad f''(x)=\mathrm{e}^{x-1}-1>0(x>1)，$$

所以 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调增加.

又 $f'(1)=0$，所以 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调增加，

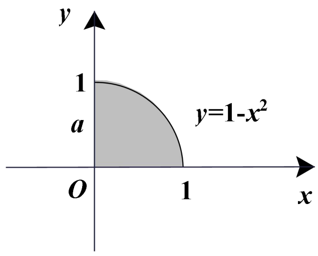
因为 $f(1)=0$，所以 $f(x)>0$，即 $\mathrm{e}^{x-1}>\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$.

【考点】不等式的证明

【总结】不等式的证明是专转本考试必考考点，同学们需要先判断所证结论是否带等号。

五、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

24.**【解析】**平面图形如图所示.



（1）$V=\int_0^1 \pi\left(1-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{8\pi}{15}$.

（2）由题意得 $\int_0^a(1-y)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=\int_a^1(1-y)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$，由此得 $(1-a)^{\frac{3}{2}}-1=-(1-a)^{\frac{3}{2}}$，解得 $a=1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

【考点】平面图形面积、旋转体体积

【总结】平面图形面积、旋转体体积是专转本考试必考考点，同学们需要先画出积分区域，再求解，每年这类题的计算量都很大，同学们计算时要特别仔细。

25.**【解析】**（1）方程 $xf\left(x\right)-4\int_1^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=x^3-3$ 两边同时对 x 求导，得

$$f(x)+xf'(x)-4f(x)=3x^2，即 f'(x)-\frac{3}{x}f(x)=3x，$$

可得 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\left(\int 3x\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=-3x^2+Cx^3$

再由 $f(1)=-2$，得 $C=1$，所以 $f(x)=-3x^2+x^3$.

（2）由 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$，可得 $x_1=0,x_2=2$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0],[2,+\infty)$ 上单调增加，在[0,2]上单调减少，

极大值 $f(0)=0$，极小值 $f(2)=-4$.

（3）由 $f''(x)=6x-6=0$，可得 $x=1$，且 $f(1)=-2$.

在 $(-\infty,1)$ 上 $f''(x)<0$，在 $(1,+\infty)$ 上 $f''(x)>0$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上凸，在 $[1,+\infty)$ 上凹，拐点为(1,-2).

【考点】导数的应用

【总结】导数的应用专转本考试必考考点，常考察求解函数解析式、未知参数，单调性和单调区间、极值和极值点、凹凸区间和拐点、间断点、渐近线等等。