



一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. $x=2$ 是函数 $f(x) = \frac{|x-2|(x-1)}{x^2-3x+2}$ 的 ()
- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 无穷型间断点 D. 连续点
2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x \geq 0 \\ x^2 + ax & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则常数 a 的值为 ()
- A. 0 B. -1 C. 1 D. 2
3. 设 $\varphi(x) = \int_{\frac{1}{x}}^1 e^t \sin t dt$, 则 $\varphi'(x) =$ ()
- A. $e^{\frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}$ B. $-e^{\frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}$
C. $\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}$ D. $-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}$
4. 函数 $f(x) = xe^{-x}$ 的单调递减且图形是凸的区间为 ()
- A. (1,2) B. $(-\infty, 1)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-2, -1)$
5. 二次积分 $\int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$ 化成极坐标系下的二次积分, 得 ()
- A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\csc \theta}^{\sqrt{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sec \theta}^{\sqrt{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
C. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\csc \theta}^{\sqrt{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ D. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sec \theta}^{\sqrt{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

6. 下列级数中收敛的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 \sqrt{n+1}}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

7. 设 A 是方阵, 如有矩阵关系式 $AB = AC$, 则必有 ()

A. $A = 0$

B. 当 $B \neq C$ 时, $A = 0$

C. 当 $A \neq 0$ 时, $B = C$

D. 当 $|A| \neq 0$ 时, $B = C$

8. 下列结论中正确是 ()

A. 任意 n 个 $n+1$ 维向量线性相关

B. 任意 n 个 $n+1$ 维向量线性无关

C. 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关

D. 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性无关

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 曲线 $y = \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{2x}$ 的水平渐近线方程为 _____

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} & x \neq 0 \text{ 且 } x > -1 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 $a =$ _____

11. 定积分 $\int_{-2}^2 (x^2 \sin x + 1) \sqrt{4-x^2} dx$ 的值为 _____

12. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^2 - 2xyz + x^2 = 0$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____

13. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域为 _____

14. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 若 $B = A^2 - 2A + E$, 则矩阵 $B =$ _____

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3 - \sin x}{x^2 \arctan x}$

16. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 所确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$

17. 求不定积分 $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$

18. 计算定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+5} dx$

19. 设 $z = f(x+y, e^{x-y})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

20. 计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $x = 2$ 及 x 轴所围成

的平面闭区域

21. 设 $\int \frac{f(x)}{x} dx = e^{2x} + c$, 求微分方程 $y'' + y' - 2y = f(x)$ 的通解

22. 已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -7 & 8 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, 求 $|A^{-1}|$ 的值

四、证明题 (本大题共 10 分)

23. 证明: 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $x^3 + (1-x)^3 \geq \frac{1}{4}$

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 设平面图形 D 由曲线 $x = \sqrt{y}$, 直线 $y = -x$, $y = 1$ 所围成, 求:

(1) 平面图形 D 的面积;

(2) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积

25. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解