

江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 6 参考答案

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在下列每一小题中选出一个正确答案, 请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑)

1. 【答案】D

【解析】由常见等价无穷小的结论可得到 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, 即 x^2 , $1 - \cos x$, $\sqrt{1-x^2} - 1$ 在 $x \rightarrow 0$ 时互为同阶无穷小, 故排除 A、B、C. $2^{x^3} - 1 \sim x^3 \ln 2 (x \rightarrow 0)$, 故四个无穷小中, $2^{x^3} - 1$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是最高阶的无穷小.

【考点】比较无穷小的阶

【总结】无穷小阶数的比较是专转本考试常考考点, 同学们必须牢记等价无穷小的公式

2. 【答案】C

【解析】当且仅当 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续.

由于当 $\alpha \leq 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \arctan \frac{1}{x}$ 不存在,

而当 $\alpha > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \arctan \frac{1}{x} = 0$,

由此可知, 要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 α 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

【考点】利用函数的连续性, 求相关参数

3. 【答案】A

【解析】 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$, $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-\infty}^1 = -\infty$,

$\int_1^{+\infty} \frac{2^x}{\ln 2} dx = \frac{2^x}{\ln^2 2} \Big|_1^{+\infty} = +\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_1^{+\infty} = +\infty$, 故选 A.

【考点】无穷区间上的广义积分

【总结】广义积分的计算和敛散性的判断是专转本考试必考考点。

4. 【答案】B

【解析】 $f(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}$, 则 $\int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx = 2xe^{2x} - \int (e^{2x})'dx = (2x-1)e^{2x} + C$, 故选 B.

【考点】原函数与不定积分的关系、不定积分与导数的关系

5. 【答案】B

【解析】 $\frac{dx}{dt} = e^{t-1}$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2$, 所以 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=0} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\bigg|_{t=0} = \frac{3t^2 + 2}{e^{t-1}}\bigg|_{t=0} = 2e$.

【考点】参数方程求导数

【总结】参数方程求导是专转本考试常考考点。

6. 【答案】B

【解析】A 项中, $\frac{1}{\sqrt[3]{n}-\frac{1}{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 是 $p = \frac{1}{3}$ 的 p -级数, 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}-\frac{1}{2}}$ 发散;

B 项中, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{-1} < 1$, 故原级数收敛;

C 项中, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$, 原级数发散;

D 项中, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 为 $p = 4$ 的 p -级数, 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$ 是公比 $q = \frac{3}{2} > 1$ 的等比级数, 发散, 故原级数发散.

【考点】判断级数敛散性

【总结】判断级数的敛散性是专转本考试必考考点。

7. 【答案】A

【解析】 $\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+2 & 0 & 0 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-1) \neq 0$, 故选 A.

【考点】克拉默法则

8. 【答案】C

【考点】矩阵方程求解

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 【答案】 $\ln 2$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+ax)^{\frac{1}{ax}} \right]^a = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{2}{x}$, 即 $e^a = 2$, 得 $a = \ln 2$.

【考点】利用极限求未知参数

10. 【答案】 $x=1$

【解析】间断点为 $x=0$, $x=1$.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x(x-1)} = \infty$, 所以 $x=0$ 为第二类间断点;

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x} = 2$, 所以 $x=1$ 为第一类可去间断点.

【考点】函数间断点

【总结】判断函数间断点的类型和计算函数间断点的个数是专转本考试常考考点。

11. 【答案】 $2x \arctan x^4 - 3 \arctan 9x^2$

【解析】 $\frac{d}{dx} \int_{3x}^x \arctan t^2 dt = (x^2)' \arctan x^4 - (3x)' \arctan (3x)^2 = 2x \arctan x^4 - 3 \arctan 9x^2$

【考点】变上限积分函数求导

【总结】变上限积分函数求导是专转本考试必考考点。

12. 【答案】0

【解析】令 $f(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 因为 $f(-x) = (-x)^2 \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = x^2 \ln \frac{(-x + \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}} = x^2 \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上为奇函数, 故 $\int_{-1}^1 x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = 0$.

【考点】利用对称性求解定积分

13. 【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{x+1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} (x+1)^n$, $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}}{a_n \cdot \frac{1}{2^n}} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3}{2}$, 所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = \frac{2}{3}$.

【考点】求幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域

【总结】幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域是专转本考试必考考点。

14 【答案】 0

【解析】 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = \begin{vmatrix} a & b & 1 & d \\ d & b & 1 & c \\ c & b & 1 & a \\ d & b & 1 & a \end{vmatrix} = 0$.

【考点】展开定理

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 【解析】

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{3^x} - \frac{1}{2^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{\frac{1}{x}} \ln 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3^{\frac{1}{x}} \ln 3 - 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 \right) = \ln \frac{3}{2}.$$

【考点】七种未定式极限的计算

【总结】七种未定式极限的计算是专转本考试必考考点, 同学们需要先判断极限的类型, 再选用合适的方法。

16. 【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x+y}{x^2 + y^2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^2 + y^2 - (x+y) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

【考点】求二元函数的偏导数、全微分

17. 【解析】

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} dx \stackrel{\text{令 } t=\sqrt{2x+1}}{=} \int \frac{1}{\frac{t^2-1}{2} \cdot t} \cdot t dt = \int \frac{2}{t^2-1} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right| + C.$$

【考点】不定积分的计算

【总结】不定积分的计算是专转本考试必考考点, 同学们需要先判断是用换元法还是分部积分法求解。

$$\begin{aligned} 18. \text{【解析】} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx &= -2 \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin \sqrt{x} d(\sqrt{1-x}) = -2 \left(\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} d(\sqrt{x}) \\ &= -2 \times \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + 2\sqrt{x} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{4}. \end{aligned}$$

【考点】定积分的计算

【总结】定积分的计算是专转本考试必考考点, 同学们需要先判断是否可以利用对称性求解, 再考虑用换元法或者分部积分法求解。

19. 【解析】因为积分区域 D 关于 y 轴对称, $\frac{y^2 \sin x^3}{2y^2+1}$ 是关于 x 的奇函数, 所以

$$\iint_D \frac{y^2 \sin x^3}{2y^2+1} d\sigma = 0;$$

而 $\iint_D 5d\sigma = 5 \iint_D d\sigma = 5S_D = 5\pi$, 其中 S_D 是圆域 $x^2 + y^2 \leq 2y$ 的面积.

$$\text{综上可得 } \iint_D \left(\frac{y^2 \sin x^3}{2y^2+1} + 5 \right) d\sigma = \iint_D \frac{y^2 \sin x^3}{2y^2+1} d\sigma + \iint_D 5d\sigma = 5\pi.$$

【考点】二重积分的计算

【总结】二重积分的计算是专转本考试必考考点, 同学们需要先判断是使用直角坐标系还是极坐标系计算。

20. 【解析】将原方程改写成 $y' + y \frac{2x}{3+x^2} = \frac{e^{2x}}{3+x^2}$, 则

$$y = e^{-\int \frac{2x}{3+x^2} dx} \left(\int \frac{e^{2x}}{3+x^2} e^{\int \frac{2x}{3+x^2} dx} dx + C \right) = \frac{1}{3+x^2} \left(\int e^{2x} dx + C \right) = \frac{1}{3+x^2} \left(\frac{e^{2x}}{2} + C \right).$$

又因为 $y(0)=1$, 代入通解可得 $C=\frac{5}{2}$, 故所求特解为 $y = \frac{1}{3+x^2} \left(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{5}{2} \right) = \frac{1}{2(3+x^2)} (e^{2x} + 5).$

【考点】一阶非齐次线性微分方程

21. 【解析】

$$(A|E) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

$$\text{故 } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

【考点】求矩阵的逆矩阵

22. 【解析】对方程组的增广矩阵进行初等行变换, 即

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\text{得同解方程组} \begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}x_4, \\ x_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x_4, \\ x_3 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

令 $x_4 = k$, 可得方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

【考点】非齐次方程组的相关问题

四、证明题 (本大题 10 分)

23. 【证明】令 $f(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x$, 则

$$f'(x) = \frac{2\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} - 2,$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{1+x} \cdot (1+x) - 2\ln(1+x)}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^2} = -\frac{2\ln(1+x)}{(1+x)^2},$$

当 $x > 0$ 时, $f''(x) < 0$, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减;

因为 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 故当 $x > 0$ 时, $f'(x) < f'(0) = 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减.

因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 故当 $x > 0$ 时, $f(x) < f(0) = 0$, 即

$$2x > \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x).$$

【考点】不等式的证明

【总结】不等式的证明是专转本考试必考考点, 同学们需要先判断所证结论是否带等号。

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 【解析】由题意可得

$$\pi \int_1^t f^2(x) dx = \pi \int_1^t f(x) dx,$$

等式两边对 t 求导得

$$\pi f^2(t) = \pi \int_1^t f(x) dx + \pi f(t),$$

再次求导得 $2\pi f(t)f'(t) = \pi f(t) + \pi f'(t)$,

整理得 $[2f(t) - 1]f'(t) = f(t)$.

令 $f(t) = y$, 则有 $(2y - t) \cdot \frac{dy}{dt} = 2y$, 故 $\frac{dt}{dy} + \frac{t}{2y} = 1$,

其为一阶非齐次线性微分方程, 利用通解公式可得

$$t = e^{-\int \frac{1}{2y} dy} \left(C + \int e^{\int \frac{1}{2y} dy} dy \right) = \frac{1}{\sqrt{y}} \left(C + \int \sqrt{y} dy \right) = \frac{1}{\sqrt{y}} \left(C + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{C}{\sqrt{y}} + \frac{2}{3} y,$$

将 $t=1$ 代入 $\pi f^2(t) = \pi \int_1^t f(x) dx + \pi f(t)$ 中可得

$$\pi f^2(1) = \pi \int_1^1 f(x) dx + \pi f(1),$$

又 $f(x) > 0$, 所以 $f(1) = 1$,

将 $f(1) = 1$ 代入通解中可得 $C = \frac{1}{3}$,

$$\text{所以 } t = \frac{1}{3\sqrt{y}} + \frac{2}{3} y = \frac{1}{3\sqrt{f(t)}} + \frac{2}{3} f(t),$$

$$\text{即 } x = \frac{1}{3\sqrt{f(x)}} + \frac{2}{3} f(x).$$

【考点】平面图形面积、旋转体体积

【总结】平面图形面积、旋转体体积是专转本考试必考考点, 同学们需要先画出积分区域, 再求解, 每年这类题的计算量都很大, 同学们计算时要特别仔细。

25. **【解析】**(1) 方程 $f(x) + \int_0^x t f(t) dt = 1$ 两边对 x 求导, 得

$$f'(x) + x f(x) = 0, \text{ 即 } \frac{df(x)}{f(x)} = -x dx,$$

$$\text{所以 } \int \frac{df(x)}{f(x)} = \int (-x) dx, \text{ 解得 } \ln f(x) = -\frac{x^2}{2} + \ln C,$$

$$\text{即 } f(x) = C e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

再由原方程得 $f(0) = 1$, 从而有 $C = 1$, 所以 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(2) 因为

$$f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}, f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

令 $f''(x) = 0$, 得 $x = \pm 1$, 且 $f(1) = e^{-\frac{1}{2}}, f(-1) = e^{-\frac{1}{2}}$.

当 $-\infty < x < -1$ 时 $f''(x) > 0$, 当 $-1 < x < 1$ 时 $f''(x) < 0$,

当 $1 < x < +\infty$ 时 $f''(x) > 0$,

从而曲线 $y = f(x)$ 的凹区间为 $(-\infty, -1], [1, +\infty)$, 凸区间为 $[-1, 1]$,

拐点为 $\left(-1, e^{-\frac{1}{2}}\right), \left(1, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, 从而有水平渐近线 $y = 0$;

无垂直渐近线.

【考点】 导数的应用

【总结】 导数的应用专转本考试必考考点, 常考察求解函数解析式、未知参数, 单调性和单调区间、极值和极值点、凹凸区间和拐点、间断点、渐近线等等。