高等数学模拟试卷（八）参考答案

1. 解：$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\ln(1-x)-1}{x^k}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\dfrac{1}{x-1}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+1}{kx^{k-1}(x-1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{k(k-1)x^{k-2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{k(k-1)x^{k-3}}=c\neq 0$$

$\therefore$ 必有 $k-3=0$，$k=3$，应选 C

2. 解：$\because \lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}=0=f(0)$

$\therefore f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续

$\because \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}=-\pi$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}=\pi$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处间断，应选 B

3. 解：$f(0)=b$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax+b-b}{x}=a$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan\dfrac{1}{x}-b}{x}$$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$\therefore$ 有 $f_-'(0)=f_+'(0)$

即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arctan\dfrac{1}{x}-b}{x}=a$

因 $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，$\therefore$ 有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\arctan\dfrac{1}{x}-b\right)=0$，即 $\dfrac{\pi}{2}-b=0$，$\therefore b=\dfrac{\pi}{2}$

当$b=\dfrac{\pi}{2}$时，$a=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arctan\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{-1}{x^2}}{1}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{1+x^2}=-1$$

应选 D

4. 解：$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$$

令$f'(x)=0$，得$x=1$，当$x=0$时$f'(x)$不存在

$\because$ 当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，当$x>1$时，$f'(x)>0$

$\therefore f(x)$在$x=1$处取得极小值

$\because$ 当$x<0$时，$f'(x)>0$，当$0<x<1$时，$f'(x)<0$

$\therefore f(x)$在$x=0$处取得极大值

故$f(x)$既有极大值也有极小值，应选 C

5. 解：A：$f(x)=|x|$在$x=0$处不可导

B：$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$在$x=0$处不连续

C：$f(x)=\sqrt{x+1}$，$f(-1)\neq f(1)$

$\therefore$ A，B，C 均不满足罗尔定理条件，应选 D

6. 解：$\because f(x)$的一个原函数是$\dfrac{\sin x}{x}$

$\therefore \int f(x)dx=\dfrac{\sin x}{x}+c$

于是$\int\dfrac{f(ax)}{a}dx=\dfrac{1}{a^2}\int f(ax)d(ax)+c$

$$=\frac{\sin ax}{a^3x}+c$$

应选 A

7. 解：对于 C：取 $v_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 条件收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+n+2}}$ 条件收敛

应选 C

8. 解：$\left|-\dfrac{1}{3}A\right|=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3|A|=\dfrac{-1}{27}|A|=\dfrac{1}{3}$，$\therefore |A|=-9$，应选 A

9. 解：$f(0)=a$

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x^2+b\right)=b$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{\frac{1}{2}x}=4$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\therefore$ 必有 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$

解得 $a=4,b=4$

10. 解：$\because f(x)$ 在 $x=1$ 处可导

$\therefore f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-1)^k\cos\frac{1}{x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to0}(x-1)^{k-1}\cos\dfrac{1}{x-1}$ 存在

因 $\cos\dfrac{1}{x-1}$ 是有界函数，要使上述极限存在，应有 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{k-1}=0$

$\therefore k-1>0$，即 $k>1$

11. 解：$y=\ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导

故 $y=\ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日定理条件

$y'(\xi)=\left.\dfrac{1}{1+x}\right|_{x=\xi}=\dfrac{1}{1+\xi}$

由拉格朗日定理有 $\ln 2=\dfrac{1}{1+\xi}$，$\therefore \xi=\dfrac{1-\ln 2}{\ln 2}$

12. 解：$\int_{-2}^{2}\left(x^3\cos\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}\right)dx=\int_{-2}^{2}x^3\cos\dfrac{x}{2}dx+\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$

$$=2\pi$$

13. 解：$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛区间的中心点为 $x=0$

因 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，$\therefore x=-3$ 是收敛区间的左端点

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3

14. 解：$\begin{vmatrix}2a_1 & 2b_1 & 2c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ -a_3-d_1 & -b_3-d_2 & -c_3-d_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a_1 & 2b_1 & 2c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ -a_3 & -b_3 & -c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2a_1 & 2b_1 & 2c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ -d_1 & -d_2 & -d_3\end{vmatrix}$

$$=-2\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ d_1 & d_2 & d_3\end{vmatrix}=-2m-2n=-2(m+n)$$

15. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin x}{x\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

16. 解：方程两边对 x 求导，得：

$y'-e^y-xe^y\cdot y'=0$ ①

当 $x=0$ 时，由原方程可知 $y=1$

将 $x=0$， $y=1$ 代入①式得： $y'(0)=e$

17. 解：$\int\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}dx=\int\dfrac{e^x+1-1}{1+e^x}de^x=\int de^x-\int\dfrac{1}{1+e^x}d\left(1+e^x\right)$

$$=e^x-\ln\left(1+e^x\right)+c$$

18. 解：$\int_0^3\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}dx=\int_0^3\dfrac{x+1-1}{\sqrt{1+x}}dx$

$$=\int_0^3\sqrt{1+x}dx-\int_0^3\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3-2\sqrt{1+x}\Big|_0^3=\frac{8}{3}$$

19. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'\cdot\frac{1}{y}+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\varphi'\left(-\frac{y}{x^2}\right)=f'+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}\varphi'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''\cdot\frac{-x}{y^2}+\varphi'\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\varphi'-\frac{y}{x}\varphi''\cdot\frac{1}{x}=-\frac{x}{y^2}f''-\frac{y}{x^2}\varphi''$$

20. 解：对应齐次方程的特征方程 $r^2+3r-4=0$，特征根 $r_1=1$，$r_2=-4$

其通解 $\overline{y}=c_1e^x+c_2e^{-4x}$

设原方程的一个特解 $y^*=x(ax+b)e^x=(ax^2+bx)e^x$

将 y^* 代入原方程，解得 $a=\frac{1}{10}$，$b=\frac{4}{25}$，$\therefore y^*=\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{4}{25}x\right)e^x$

所以原方程通解为 $y=\overline{y}+y^*=c_1e^x+c_2e^{-4x}+\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{4}{25}x\right)e^x$

21. 解：由 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2+y^2-2x=0\end{cases}$，解得两图交点坐标 $M_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$M_2\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

因积分区域关于 x 轴对称，xy 关于 y 是奇函数

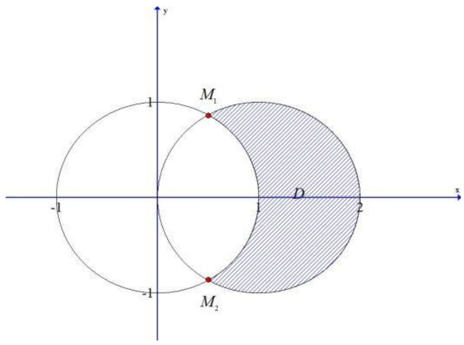
所以 $\iint\limits_D xydxdy=0$

于是 $\iint\limits_D(xy+1)dxdy=\iint\limits_D dxdy=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}rdr$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\cdot\frac{1}{2}r^2\Big|_1^{2\cos\theta}=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(2\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos2\theta+\frac{1}{2}\right)d\theta=\left(\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{1}{2}\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$$



22. 解：由 $X=AX+B$，得 $X-AX=B$，$\therefore (E-A)X=B$

两边左乘 $(E-A)^{-1}$，得 $X=(E-A)^{-1}B$

进而求得 $(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

所以 $X=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

23. 证明：令 $F(x)=\ln(1+x)-xe^{-x}$

$F'(x)=\frac{1}{1+x}-e^{-x}+xe^{-x}=\frac{1}{1+x}+(x-1)e^{-x}$

令 $F'(x)=0$，得 $x=0$，$F''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}+e^{-x}-(x-1)e^{-x}$

$F''(0)=1>0$，$\therefore F(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值，最小值为 $F(0)=0$

故当 $x>-1$ 时，$F(x)\geq 0$，即 $\ln(1+x)-xe^{-x}\geq 0$

所以 $xe^{-x}\leq \ln(1+x)$

24. 解：$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0),(0,+\infty)$

(1) $f'(x)=\frac{-1}{x^2}-\frac{2}{x^3}=-\frac{x+2}{x^3}$

令 $f'(x)=0$，得 $x=-2$

<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty,-2)$</td><td>-2</td><td>$(-2,0)$</td><td>0</td><td>$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td rowspan="2">无定义</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\downarrow$</td><td>极小值</td><td>$\uparrow$</td><td>$\downarrow$</td></tr>
</table>

由表可知，$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-2)$，$(0,+\infty)$

单调递增区间为$(-2,0)$，极小值为$f(-2)=-\dfrac{1}{4}$

(2) $f''(x)=\dfrac{2x+6}{x^4}$，令$f''(x)=0$，得$x=-3$

<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty,-3)$</td><td>-3</td><td>$(-3,0)$</td><td>0</td><td>$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td rowspan="2">无定义</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\cap$</td><td>拐点</td><td>$\cup$</td><td>$\cup$</td></tr>
</table>

由表可知，曲线的凸区间为$(-\infty,-3)$，凹区间为$(-3,0)$，$(0,+\infty)$

$f(-3)=-\dfrac{2}{9}$，曲线的拐点为$\left(-3,-\dfrac{2}{9}\right)$

因$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=0$

$\therefore y=0$是曲线的水平渐近线

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^2}=\infty$

$\therefore x=0$是曲线的垂直渐近线

25.解：$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&1&5\\2&4&0&-1&-3\\-1&-2&3&2&8\\1&2&-9&-5&-21\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}}\begin{pmatrix}1&2&3&1&5\\0&0&-6&-3&-13\\0&0&6&3&13\\0&0&-12&-6&-26\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&1&5\\0&0&-6&-3&-13\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{6}r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&1&5\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{13}{6}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{13}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1,x_3为约束变量， x_2,x_4为自由变量

一般解$\begin{cases} x_1=-\frac{3}{2}-2x_2+\frac{1}{2}x_4 \\ x_3=\frac{13}{6}-\frac{1}{2}x_4 \end{cases}$

取$\begin{cases} x_2=0 \\ x_4=0 \end{cases}$，得方程组的一个特解$\eta^*=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{13}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$

导出组一般解$\begin{cases} x_1=-2x_2+\frac{1}{2}x_4 \\ x_3=-\frac{1}{2}x_4 \end{cases}$

依次取$\begin{cases} x_2=1 \\ x_4=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=0 \\ x_4=1 \end{cases}$，得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\xi_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 原方程组通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{13}{6} \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ （其中k_1,k_2为任意常数）