

高等数学模拟试卷 (四)



一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 若 $x=1$ 是函数 $f(x)=\frac{x^2+ax+2}{x-1}$ 的可去间断点, 则常数 a 的值为 ()

- A. 3 B. -3 C. 1 D. -1

2. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小中比 \sqrt{x} 高阶的是 ()

- A. $1-\cos\sqrt{x}$ B. $\ln(1+\sqrt{x})$ C. $1-e^{\sqrt{x}}$ D. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$

3. 曲线 $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ 的渐近线条数为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

4. 若 $x=1$ 是函数 $y=e^{ax^2-2x}$ 的极值点, 则常数 a 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 下列级数中条件收敛的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+2}}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+2}}$

6. $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$, 则 $\int f(2x)dx =$ ()

- A. $\frac{\sin 2x}{2x}+c$ B. $\frac{\sin 2x}{x}+c$ C. $\frac{\sin x}{2x}+c$ D. $\frac{\sin 2x}{4x}+c$

7. 下列各式中正确的是 ()

A. $(ABC)^{-1} = A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ B. $(ABC)^{-1} = A^{-1}C^{-1}B^{-1}$

C. $(ABC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}B^{-1}$ D. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

8. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则下列结论中正确的是 ()

- A. 向量组中必有一个零向量
- B. 向量组中有两个向量对应分量成比例
- C. 向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表示
- D. 向量组中只有一个向量可由其余向量线性表示

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{\frac{k}{x}} = e^2$, 则常数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 设 $f'(0) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$

11. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^3 - 3xy + 3xz + x^3 = 1$ 所确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{y=0} = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-1)^n}{n+1}$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}$

13. 微分方程 $x dy + (y - x^2) dx = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$

14. 如果向量组 $\alpha_1 = (3, 1, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, a)^T$ 线性无关, 则常数 a 的取值应

满足 $\underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [t - \ln(1+t)] dt}{x^2 (\sqrt{1+x} - 1)}$

16. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^z = x + y - 2z$ 所确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

17. 求不定积分 $\int (x \ln x)^2 dx$

18. 计算定积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$

19. 设 $z = f(xy, x^2 + y^2) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, φ 二阶可导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

20. 计算二重积分 $\iint_D xy dxdy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$, 直线 $y = x$ 及 $y = 2$ 所围成的平面闭区域

21. 求微分方程 $y'' + 2y' + 3y = e^{2x}$ 的通解

22. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的值

四、证明题 (本大题共 10 分)

23. 证明: 当 $x > 0$ 时, $\frac{1}{1+2x} < \ln \frac{1+2x}{2x} < \frac{1}{2x}$

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 试确定常数 a, b 的值, 使函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x} & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$ (其中 $g(0) = 1$, $g''(0)$ 存在)

在) 在 $x = 0$ 处连续且可导

25. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2 \end{cases}$ 的通解