绝密★启用前

公共课-高等数学

参考答案

一、单项选择题

1.【解析】 B

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x-1)\sqrt{x+1}}{x^3-1}=\frac{\sqrt{2}}{3}\neq0$。

2.【解析】 B

$\because \lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]'}{x'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1}=f(0)$

$\therefore x=0$是函数$g(x)$的可去间断点。

3.【解析】 B

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{x}=\frac{1}{2}f'(1)=-1$

$\therefore f'(1)=-2$。

4.【解析】 B

由行列式的定义可知，x^3这项是D中(1,2)、(2,1)、(3,3)、(4,4)元之积。

5.【解析】 C

$\because \int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=2\sqrt{x-1}\Big|_1^2=2$，$\therefore$收敛。

6.【解析】 C

设$\eta_1\neq\eta_2$为方程$Ax=b$的解，则$\xi=\eta_1-\eta_2$为$Ax=0$的非零解。

7.【解析】 D

$r=\cos\theta, r^2=r\cos\theta, x^2+y^2=x, \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$

由图像得，原式$=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,dy$。

8.【解析】 D

由莱布尼茨判别法可得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^2}}$收敛，由$p$ −级数性质可判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$发散。

二、填空题

9.【解析】

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(a+bx^2)=a, f(0)=a$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=b$

$\therefore a\neq b$。

10.【解析】

$sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)(1+y')=e^y y'$

代入$x=0, y=0$

$\therefore y'|_{(0,0)}=-2$，$\therefore$切线方程为$2x+y=0$。

11.【解析】

$f'(x)=\ln x+1$，$f''(x)=\frac{1}{x}$,当$n\geq 3$时，$f^{(n)}(x)=(-1)^n(n-2)!\,x^{-(n-1)}$，

$\therefore f^{(n)}(1)(n\geq 3)=(-1)^n(n-2)!$。

12.【解析】

$\because |A|=-6(k-1)^2(k+2)\neq 0$，$\therefore k\neq 1$且$k\neq -2$。

13.【解析】

若β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示，

即$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$只有唯一解，则$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0$

即$\begin{vmatrix}1+k & 1 & 1\\ 1 & 1+k & 1\\ 1 & 1 & 1+k\end{vmatrix}=k^2(3+k)\neq 0$

$\therefore k\neq 0$且$k\neq -3$。

14.【解析】

令$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{3^{\sqrt{n+1}}}\cdot\frac{3^{\sqrt{n}}}{x^n}\right|<1$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{\sqrt{n}}}{3^{\sqrt{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}3^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}=1$

$\therefore |x|<1$，$-1<x<1$，$\therefore$收敛区间为$(-1,1)$。

三、计算题

15.【解析】

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\sqrt{4+x^2}}}{\sqrt{1+x}-1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{2}x}=2$。

16.【解析】

原式$=x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\,dx=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)\,dx$

$\therefore\int\sin(\ln x)\,dx=\frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$。

17.【解析】

原式$=\int_0^1\ln(1+x)\,d(2-x)^{-1}=\frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2-x}\frac{1}{1+x}dx=\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\ln 2-\left(\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right|\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$。

18.【解析】

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot e^{xy}y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''e^{xy}\cdot x]+(e^{xy}+ye^{xy}\cdot x)f_2'+e^{xy}y[f_{21}''(-2y)+f_{22}''\cdot e^{xy}\cdot x]=-4xyf_{11}''+2e^{xy}f_{12}''(x^2-y^2)+f_2'e^{xy}(1+xy)+xye^{2xy}\cdot f_{22}''$。

19.【解析】

在方程两端对x求导，得$(z+y)^x\left[ln(z+y)+\frac{xz_x'}{z+y}\right]=y$,将$x=1,y=2,z(1,2)=0$代入，得$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2(1-ln\,2)$

20.【解析】

$$(A,B)=\begin{bmatrix}2&1&-3&\vdots&1&-1\\1&2&-2&\vdots&2&0\\-1&3&2&\vdots&-2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-2&\vdots&2&0\\0&-3&1&\vdots&-3&-1\\0&5&0&\vdots&0&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-2&\vdots&2&0\\0&1&0&\vdots&0&1\\0&0&1&\vdots&-3&2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&-4&2\\0&1&0&\vdots&0&1\\0&0&1&\vdots&-3&2\end{bmatrix}$$

$\therefore X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-4&2\\0&1\\-3&2\end{bmatrix}$。

21.【解析】

$\because r^2+3r+2=0$

$\therefore r_1=-1,r_2=-2$

$\therefore Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

设$y^*=xe^{-x}(ax+b)=e^{-x}(ax^2+bx)$

代入得$2ax+(2a+b)=3x$

$\therefore a=\frac{3}{2},b=-3\ \ \therefore y^*=e^{-x}\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)$

$\therefore$通解为$y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)$。

22.【解析】

原式$=\int_1^2dx\int_0^{e^x}\frac{ln\,x}{e^x}dy=\int_1^2\ln x\,dx=2\ln 2-1$。

四、证明题

23.【解析】

证明：设$f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$

$f'(x)=ln\left(\frac{1+x}{x}\right)>0$

$\therefore f(x)$单调增，$\therefore f(x)>f(1)=2\,ln\,2>0$

$\therefore \frac{ln(1+x)}{ln\,x}>\frac{x}{1+x}$。

五、综合题

24.【解析】

由题意知旋转体的体积为$v=\int_1^t \pi f^2(x)\,dx=\pi\int_1^t f^2(x)\,dx$。

曲边梯形的面积为：$S=\int_1^t f(x)\,dx$，则由题可知$V=\pi tS$。

即$\pi\int_1^t f^2(x)\,dx=\pi t\int_1^t f(x)\,dx$，$\therefore \int_1^t f^2(x)\,dx=t\int_1^t f(x)\,dx$。

两边求导，求解得$t=cy^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}y$，得$c=\frac{1}{3}$,$\therefore t=\frac{1}{3}(\frac{1}{\sqrt{y}}+2y)$。

$\therefore$该曲线方程为：$2y+\frac{1}{\sqrt{y}}-3x=0$。

25.【解析】

（1）当$a=0$时，$R(A)=2$，$R(A,b)=3$，$\therefore$无解。

（2）当$a^2+a\neq 0$时，即$a\neq 0$且$a\neq -1$时，方程组解唯一。

$x_1=\frac{2}{a}$，$x_2=\frac{-4}{a(a+1)}$，$x_3=1-\frac{4}{a+1}-\frac{4}{a}$。

（3）当$a=-1$时，$R(A)=R(A,b)=2<3$，故解不唯一。方程组的通解为：

$x=(2,0,-3)^T+c(0,1,-1)^T$,其中 c 为任意常数。