高等数学模拟试卷（六）参考答案

1. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin ax}{-bx^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=1$$

因 $\lim\limits_{x\to 0}(-3bx^2)=0$，$\therefore$ 必有 $\lim\limits_{x\to 0}(1-a\cos ax)=0$，$a=1$

于是有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}=-\dfrac{1}{6b}=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$

应选 A

2. 解：$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}=-1$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}})'}{(e^{\frac{1}{x}})'}=1$$

因 $f(0-0),f(0+0)$ 都存在，但不相等

$\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，应选 B

3. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0-x)-f(0+x)}{x}$

$$=(-1-1)f'(0)=-2f'(0)=-2$$

应选 B

4. 解：A：$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导

B：$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处不连续

C：$f(x)=\sqrt{x+1}$，$f(-1)\neq f(1)$

$\therefore$ A，B，C 均不满足罗尔定理条件，应选 D

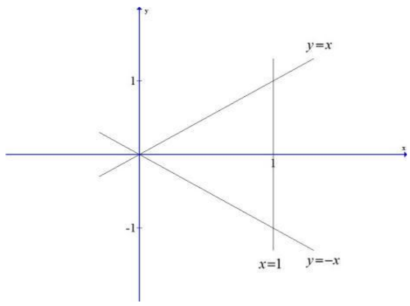
5. 解：积分区域对称于 x 轴

$x^2\sin y$关于y是奇函数，$\therefore \iint\limits_D x^2\sin ydxdy=0$

$y^2\sin x$关于y是偶函数，$\therefore \iint\limits_D y^2\sin xdxdy=2\iint\limits_{D_1} y^2\sin xdxdy$

故有$\therefore \iint\limits_D \left(x^2\sin y+y^2\sin x\right)dxdy=2\iint\limits_{D_1} y^2\sin xdxdy$

应选 B



6. 解：当$n\to\infty$时$\tan\dfrac{1}{n+k}\sim\dfrac{1}{n}$

因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$条件收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\dfrac{1}{n+k}$条件收敛

应选 B

7. 解：$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12}-3a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22}-3a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{23}-3a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & -3a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & -3a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & -3a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

$=2\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+0=-2$

$\therefore\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=-1$

应选 C

8. 解：因向量组的秩为r，所以向量组一个极大线性无关组中含有r个向量，故向量组中任意$r+1$个向量必定线性相关，D 正确，应选 D

9. 解：$f(0)=a$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2+b\right)=b$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\frac{1}{2}x}=4$$

$\because f(x)$在$x=0$处连续，$\therefore$必有$f(0-0)=f(0+0)=f(0)$

解得$a=4,b=4$

10. 解：$\int\frac{f'\left(e^{-x}\right)}{e^x}dx=\int f'\left(e^{-x}\right)e^{-x}dx=-\int f'\left(e^{-x}\right)de^{-x}$

$$=-f\left(e^{-x}\right)+c=-\ln e^{-x}+c=x+c$$

11. 解：$y'=\frac{1}{x+1}$，$y''=\frac{-1}{(x+1)^2}$

$y'''=\frac{1\cdot 2}{(x+1)^3}$，$y^{(4)}=\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(x+1)^4}$

$\therefore y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)\,!}{(x+1)^n}$

由$y^{(n)}\Big|_{x=0}=(-1)^{n+1}(n-1)\ !=2022\ !$，可知$n=2023$

12. 解：$\because\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛半径为$3$，$\therefore\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=3$

对于$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$

令$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}(x-1)^{n+2}}{na_n(x-1)^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}|x-1|<1$

得$|x-1|<3$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛区间为$(-2,4)$

13. 解：$\because A^*=|A|A^{-1}$，$\therefore\left|A^*\right|=\left||A|A^{-1}\right|=|A|^4\left|A^{-1}\right|=|A|^4\cdot\frac{1}{|A|}=|A|^3=27$

14. 解：$A_{21}=-M_{21}=-1$，$A_{22}=M_{22}=2$，$A_{23}=-M_{23}=-3$，$A_{24}=M_{24}=4$

$$\therefore M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}+A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=2\left(M_{22}+M_{24}\right)=12$$

15. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\left[x\ln(1+x)-x^2\right]\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)-x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}-2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos^3 x\right)(1+x)}{(1+x)\ln(1+x)-x-2x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{\ln(1+x)-4x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x}{\dfrac{1}{1+x}-4}=-\frac{1}{2}$$

16. 解：$\displaystyle\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=-\int\ln\sin x d\cot x=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\cot x d\ln\sin x$

$$=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\cot x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\cot^2 x dx$$

$$=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\left(\csc^2 x-1\right)dx$$

$$=-\cot x\cdot\ln\sin x-\cot x-x+c$$

17. 解：令 $x=\sin t$，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时 $t=\dfrac{\pi}{6}$，当 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $t=\dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin t}{\sin t\cos t}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin t}dt$$

$$=\ln\left|\csc t-\cot t\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right|$$

18. 解：方程两边对 x 求偏导数，得：

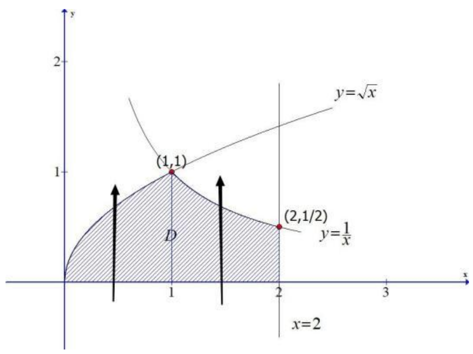
$$y+y\frac{\partial z}{\partial x}+z+x\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+y}$$

方程两边对 y 求偏导数，得：

$$x+z+y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad \therefore \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{x+y}$$

19. 解：$\iint\limits_D x^2ydxdy=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x}}x^2ydy+\int_1^2dx\int_0^{\frac{1}{x}}x^2ydy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1x^3dx+\frac{1}{2}\int_1^2dx=\frac{5}{8}$$



20. 解：对应齐次方程的特征方程 $r^2-5r+6=0$，特征根 $r_1=2$，$r_2=3$

其通解 $\overline{y}=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

设原方程的一个特解 $y^*=x(ax+b)e^{2x}=(ax^2+bx)e^{2x}$

将 y^* 代入原方程，解得 $a=-1$，$b=-2$，$\therefore y^*=-(x^2+2x)e^{2x}$

所以原方程通解为 $y=\overline{y}+y^*=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}-(x^2+2x)e^{2x}$

21. 解：由 $X=AX+B$，得 $X-AX=B$，$\therefore (E-A)X=B$

两边左乘 $(E-A)^{-1}$，得 $X=(E-A)^{-1}B$

进而求得 $(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

所以$X=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

22. 解：$\overline{A}=\begin{pmatrix}3 & -3 & -5 & 7 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -4 & 6 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 3 & -3 & -5 & 7 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -4 & 6 & -1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -8 & 16 & -4\\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -6 & 12 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{4}r_2\\ -\frac{1}{3}r_4}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3-r_2\\ r_4-r_2\\ -r_2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

x_1,x_3为约束变量，x_2,x_4为自由变量

一般解$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}+x_2+x_4\\ x_3=\frac{1}{2}+2x_4\end{cases}$

令$\begin{cases}x_2=0\\ x_4=0\end{cases}$，得原方程组的一个特解$\eta^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$

导出组一般解$\begin{cases}x_1=x_2+x_4\\ x_3=2x_4\end{cases}$

依次取$\begin{cases} x_2=1 \\ x_4=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=0 \\ x_4=1 \end{cases}$，得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

$\therefore$ 原方程组通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$（其中$k_1,k_2$为任意常数）

23. 证明：令$F(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$

则$F'(x)=2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{2x}{1+x^2}=2\arctan x$

令$F'(x)=0$，得唯一驻点$x=0$，又$F''(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$，$F''(0)=2>0$

$\therefore F(x)$在$x=0$处取得最小值，最小值为$F(0)=0$

故当$x\in(-\infty,+\infty)$时，$F(x)\geq 0$

即$2x\arctan x-\ln(1+x^2)\geq 0$，所以$2x\arctan x\geq \ln(1+x^2)$

24. 解：(1)设切点为$(a,\ln a)$

$y'=\dfrac{1}{x}$，$k_{切}=y'\big|_{x=a}=\dfrac{1}{a}$

切线方程$y-\ln a=\dfrac{1}{a}(x-a)$

$\because$ 切线过点$M(0,1)$，$\therefore 1-\ln a=-1$，$a=e^2$

切点为$P(e^2,2)$

切线方程$y-\ln e^2=\dfrac{1}{e^2}(x-e^2)$，即$y=\dfrac{1}{e^2}x+1$

(2) $S=\int_0^{e^2}\left(\dfrac{1}{e^2}x+1\right)dx-\int_1^{e^2}\ln x dx$

$=\left(\dfrac{1}{2e^2}x^2+x\right)\Bigg|_0^{e^2}-x\ln x\Big|_1^{e^2}+\int_1^{e^2}dx$

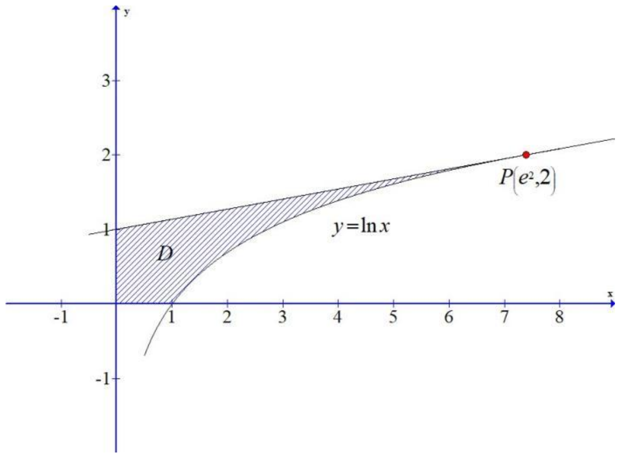
$=\dfrac{3}{2}e^2-2e^2+e^2-1=\dfrac{1}{2}e^2-1$

(3) $V_y=\int_0^2 \pi\left(e^y\right)^2 dy-\int_1^2 \pi\left[e^2(y-1)\right]^2 dy$

$=\pi\int_0^2 e^{2y}dy-\pi e^4\int_1^2 (y-1)^2 dy$

$=\frac{1}{2}\pi e^{2y}\Big|_0^2-\frac{\pi e^4}{3}(y-1)^3\Big|_1^2$

$=\frac{1}{6}\pi e^4-\frac{1}{2}\pi$



25. 解：(1)微分方程可化成 $f'(x)+\frac{-3}{x}f(x)=3x+18$

通解 $f(x)=e^{-\int -\frac{3}{x}dx}\left[\int(3x+18)e^{\int -\frac{3}{x}dx}dx+c\right]$

$=e^{3\ln x}\left[\int(3x+18)e^{-3\ln x}dx+c\right]$

$=x^3\left[\int\left(\frac{3}{x^2}+\frac{18}{x^3}\right)dx+c\right]$

$=x^3\left(-\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}+c\right)=-3x^2-9x+cx^3$

由 $f(1)=-11$ 可知 $c=1$

$\therefore f(x)=x^3-3x-9x$

(2) $f(x)$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3\left(x^2-2x-3\right)=3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1,x=3$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由表可知，$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$

单调递减区间为$(-1,3)$

极大值$f(-1)=5$，极小值$f-27$

(3) $f''(x)=6x-6$，令$f''(x)=0$，得$x=1$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	拐点	$\cup$

由表可知，曲线的凸区间为$(-\infty,1)$，凹区间为$(1,+\infty)$，拐点$(1,-11)$