

## 江苏省普通高校专转本选拔考试

## 高等数学 模拟试卷 7

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。在下列每一小题中选出一个正确答案，请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑）

1. 设当  $x \rightarrow 0$  时，函数  $f(x) = \ln(1 + kx^2)$  与  $g(x) = 1 - \cos x$  是等价无穷小，则常数  $k$  的值为（ ）

- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{2}$       C. 1      D. 2

2. 若  $x = 2$  是函数  $y = x - \ln\left(\frac{1}{2} + ax\right)$  的可导极值点，则常数  $a =$  （ ）

- A. -1      B.  $\frac{1}{2}$       C.  $-\frac{1}{2}$       D. 1

3. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $2^{xy} = x + y$  所确定，则  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$  （ ）

- A. 0      B. -2      C.  $\ln 2 - 1$       D.  $\ln 2 + 1$

4. 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t^2 + t, \\ y = t^2 - e^t \end{cases}$  所确定，则  $y(x)$  在  $t = 0$  的对应点处的切线方程为（ ）

- A.  $x - y + 1 = 0$       B.  $x + y + 1 = 0$       C.  $x - y - 1 = 0$       D.  $x + 2y + 2 = 0$

5. 设  $f(x, y)$  为连续函数，则  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr =$  （ ）

- |  |  |
|--|--|
| <p>A. <math>\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy</math></p> | <p>B. <math>\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy</math></p> |
| <p>C. <math>\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx</math></p> | <p>D. <math>\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx</math></p> |

6. 已知正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛，则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\alpha}$  （ ）

- |  |  |
|--|--|
| <p>A. 不论 <math>\alpha</math> 为何值都收敛</p>    | <p>B. 不论 <math>\alpha</math> 为何值都发散</p>                |
| <p>C. <math>\alpha &gt; 0</math> 时一定收敛</p> | <p>D. <math>0 &lt; \alpha &lt; 1</math> 时可能收敛也可能发散</p> |

7. 设  $A$  为四阶方阵，且  $|A| = -2$ ，则  $|A^{-1}| =$  （ ）

- A. 4      B. 1      C.  $-\frac{1}{2}$       D.  $\frac{1}{2}$

8. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_s$  均为  $n$  维向量，下列结论不正确的是（ ）

- A. 若对于任意一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ ，有  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$ ，则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关

B. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则对于任意一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

C.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为  $s$

D.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关

## 二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设函数  $f(x) = \begin{cases} a+x, & x \geq 0 \\ \frac{\tan 3x}{x}, & x < 0 \end{cases}$  在点  $x=0$  处连续, 则常数  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 设函数  $y = \arctan \sqrt{x}$ , 则  $dy|_{x=1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 设反常积分  $\int_a^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$ , 则常数  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 定积分  $\int_{-1}^1 \frac{2 + \sin x}{1 + x^2} dx$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 已知  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1 + x^2} dx = 1$ , 则  $A = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 当  $t = \underline{\hspace{2cm}}$  时, 矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & t \end{bmatrix}$  的秩  $R(A) = 2$ .

## 三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$ .

16. 设函数  $z = yf(y^2, xy)$ , 其中函数  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

$$17. \text{求} \int (x^2 + \sin x) \cos x dx .$$

$$18. \text{求定积分} \int_{-2}^4 \left( x^2 - 3|x| + \frac{2}{|x|+1} \right) dx .$$

$$19. \text{计算} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy .$$

20.求微分方程  $y'' + y' + 2y = x^2 - 3$  的通解.

21. 已知向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$  不能由向量组  $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$ ,  $\beta_3 = (3, 4, a)^T$  线性表示.

(1) 求  $a$  的值;

(2) 将  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  由  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  线性表示

22. 问  $t$  取何值时, 齐次线性方程组  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + tx_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$  有非零解? 并求出其通解.

**四、证明题（本大题 10 分）**

23. 证明: 当  $1 < x < 2$  时,  $4x \ln x > x^2 + 2x - 3$ .

**五、综合题（本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分）**

24. 已知一平面图形由抛物线  $y = x^2$  和  $y = -x^2 + 8$  围成.

- (1) 求此平面图形的面积;
- (2) 求此平面图形绕  $y$  轴旋转一周所得的旋转体的体积.

25. 设曲线  $y = f(x)$  通过点  $(1, -11)$ , 且曲线上任一点  $P(x, y)$  处的切线在  $y$  轴上的截距为  $-2x^2$ , 求:

- (1) 曲线  $y = f(x)$  的方程;
- (2) 函数  $y = f(x)$  的单调区间与极值;
- (3) 函数  $y = f(x)$  的凹凸区间与拐点.