



一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = e^x + \ln(1-x) - 1$ 与 $\varphi(x) = x^k$ 为同阶无穷小, 则常数 k 的值为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

- $$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} (x+1) \arctan \frac{1}{x^2-1} & x \neq \pm 1 \\ 0 & x = \pm 1 \end{cases}, \text{ 则 ()}$$

- A. $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处连续, 在点 $x = -1$ 处间断

- B. $f(x)$ 在点 $x=1$ 处间断, 在点 $x=-1$ 处连续

- C. $f(x)$ 在点 $x = 1$, $x = -1$ 处都间断

- D. $f(x)$ 在点 $x=1$, $x=-1$ 处都连续

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x > 0 \\ ax + b & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 ()

- $$\text{A. } a = 1, b = \frac{\pi}{2}$$

- B $a=1$ $b=0$

- C. $a = -1, b = -\frac{\pi}{2}$

- D. $a = -1, b = \frac{\pi}{2}$

4. 设函数 $f(x) = 2x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$, 则 $f'(x)$ ()

- A. 只有一个极大值

- B. 只有一个极小值

- C. 既有极大值又有极小值

- D. 没有极值

5. 下列函数中在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是 ()

A. $f(x) = |x|$

B. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

C. $f(x) = \sqrt{x+1}$

D. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

6. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 则当 $a \neq 0$ 时, $\int \frac{f(ax)}{a} dx = (\)$

A. $\frac{\sin ax}{a^3 x} + c$

B. $\frac{\sin ax}{a^2 x} + c$

C. $\frac{\sin ax}{ax} + c$

D. $\frac{\cos ax}{ax} + c$

7. 下列级数中条件收敛的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{2n-1}}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+2}}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{\sqrt{n^2+n+1}}$

8. 设 A 为三阶方阵, 且 $\left| -\frac{1}{3} A \right| = \frac{1}{3}$, 则 $|A| = (\)$

A. -9

B. -3

C. -1

D. 9

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-1} & x > 0 \\ a & x = 0 \text{ 在点 } x = 0 \text{ 处连续, 则常数 } a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}} \\ x^2 + b & x < 0 \end{cases}$

(10) 设 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^k \cos \frac{1}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处可导, 则常数 k 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$

11. 对函数 $y = \ln(1+x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上应用拉格朗日定理求得的点 $\xi = \underline{\hspace{2cm}}$

12. $\int_{-2}^2 \left(x^3 \cos \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -3$ 处条件收敛, 则其收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}$

14. 设 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = n$,

则 $\begin{vmatrix} 2a_1 & 2b_1 & 2c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ -a_3 - d_1 & -b_3 - d_2 & -c_3 - d_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}}{e^x - 1}$

16. 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 所确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$

17. 求不定积分 $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$

18. 计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

19. 设 $z = yf\left(\frac{x}{y}\right) + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f, φ 二阶可导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

20. 求微分方程 $y'' + 3y' - 4y = (x+1)e^x$ 的通解

21. 计算二重积分 $\iint_D (xy+1) dx dy$, $D: \{(x,y) | x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

22. 已知 $X = AX + B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X

四、证明题 (本大题共 10 分)

23. 证明: 当 $x > -1$ 时, $xe^{-x} \leq \ln(1+x)$

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 设 $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$, 求:

(1) 函数 $y = f(x)$ 的单调区间、极值;

(2) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间、拐点及渐近线方程。

25. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = -21 \end{cases}$ 的通解