



一、选择题

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $\varphi(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 为等价无穷小, 则常数 a, b 的值为

()

A. $a = 1, b = -\frac{1}{6}$

C. $a = -1, b = -\frac{1}{6}$

B. $a = 1, b = \frac{1}{6}$

D. $a = -1, b = \frac{1}{6}$

2. $x=0$ 是函数 $f(x) = \frac{(x-1)(1-e^{-x})}{|x|(x^2-1)}$ 的 ()

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 无穷型间断点

D. 连续点

3. 设 $f(x)$ 是可导函数, 下列各式中正确的是 ()

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(x)}{x} = -f'(0)$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2x) - f(x_0)}{x} = f'(x_0)$

C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$

D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2f'(x_0)$

4. 设 $f(x)$ 的导函数为 e^{-x} , 且 $f(0) = 0$, 则 $\int f(-x)dx =$ ()

A. $-e^{-x} + x + c$

B. $e^{-x} + x + c$

C. $-e^x + x + c$

D. $e^x - x + c$

5. 若 $f(1,1) = -1$ 为二元函数 $f(x,y) = ax^3 + by^3 + cxy$ 的极值, 则常数 a, b, c 的值为 ()

A. $a=1, b=-1, c=3$

B. $a=1, b=1, c=-3$

C. $a=-1, b=-1, c=3$

D. $a=-1, b=-1, c=-3$

6. 下列命题中正确的是 ()

A. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

B. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$

C. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 也收敛

D. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛

7. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \neq 0$, 则 $D_1 = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \end{vmatrix} = ()$

A. $2m$

B. $-2m$

C. $8m$

D. $-8m$

8. 设 A 是 4 阶方阵, 则 $|-A| = ()$

A. $-4|A|$

B. $-|A|$

C. $|A|$

D. $4|A|$

二、填空题

9. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{\frac{k}{x}} = e^2$, 则常数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^3 - 3yz + 3x = 8$ 所确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \underline{\hspace{2cm}}$

11. 微分方程 $(1+x^2)dy = (1+2xy+x^2)dx$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$

12. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{2n-1} (x-2)^{2n-1}$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}$

13. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & t & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, 若 $R(A) = 2$, 则常数 $t = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若 AB 为对称矩阵, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \arcsin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

16. 函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \sin y = 1 \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$

17. 求不定积分 $\int (x \ln x)^2 dx$

18. 求定积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$

19. 设 $z = yf(2x+3y, x^2y)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

20. 计算二重积分 $\iint_D xy dxdy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$, 直线 $y = x$, $y = 2$ 及 $x = 0$ 所

围成的平面闭区域

21. 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ 的通解

22. 求下列向量组的一个极大无关组及秩, 并将组内其余向量用极大无关组线性表示

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

四、证明题

23. 证明: 当 $x > -1$ 时, $xe^{-x} \leq \ln(1+x)$

五、综合题

24. 平面图形 D 由曲线 $y = \sqrt{-x}$ 及其过点 $(1,0)$ 的切线及 x 轴所围成, 求:

(1) 平面图形 D 的面积;

(2) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

25. 当 k 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多组解? 当
有无穷多组解时, 求出其全部解

