高等数学模拟试卷（三）参考答案

1. 解：$\because$ 当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1 \sim -\frac{1}{2}x^2$

都是与 x^2 同阶的无穷小，故应选 D

2. 解：$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(x-1)(1-e^{-x})}{|x|(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(x-1)x}{-x(x^2-1)}=-1$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x-1)(1-e^{-x})}{|x|(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x-1)x}{x(x^2-1)}=1$

因 $f(0-0), f(0+0)$ 都存在，但不相等

$\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，应选 B

3. 解：A：$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导

B：$f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处不连续

C：$f(x)=\sqrt{x+1}$，$f(-1)\neq f(1)$

$\therefore$ A，B，C 均不满足罗尔定理条件，应选 D

4. 解：由 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x}\right]^{\frac{1}{x}}=e$

可知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x}-1\right]\cdot\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f^2(x)}{x^2}=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x^2}=2$，于是 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\sqrt{2}$，应选 C

5. 解：A：若在 $x=x_0$ 的左、右两侧 $f'(x)$ 同号，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不取得极值

故 A 错误

B：函数 $f(x)$ 在 $f'(x)$ 不存在的点处也可能取得极值，故 B 错误

C：由 A，B 可知 C 错误，应选 D

6. 解：$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$$

令$f'(x)=0$，得$x=1$，当$x=0$时$f'(x)$不存在

$\because$当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，当$x>1$时，$f'(x)>0$

$\therefore f(x)$在$x=1$处取得极小值

$\because$当$x<0$时，$f'(x)>0$，当$0<x<1$时，$f'(x)<0$

$\therefore f(x)$在$x=0$处取得极大值

故$f(x)$既有极大值也有极小值，应选 C

7. 解：对于 D：取$v_n=\frac{n}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\because\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\text{条件收敛，}\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}}\text{条件收敛}$$

应选 D

8. 解：$\left|-\frac{1}{3}A\right|=\left(-\frac{1}{3}\right)^3|A|=\frac{-1}{27}|A|=\frac{1}{3}$，$\therefore|A|=-9$，应选 A

9. 解：令$f(x)=x\varphi(x)$，其中$\varphi(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$

则$f'(x)=\varphi(x)+x\varphi'(x)$

$\therefore f'(0)=\varphi(0)=1\cdot2\cdot\cdots\cdot100=100!$

10. 解：方程两边对x求导，得：$e^{x+y}\cdot(1+y')-\sin(xy)\cdot(y+xy')=0$

解得：$y'=\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$

11. 解：$y=\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$$

$$=(-1)^n\cdot n\ !\left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right]$$

12. 解：方程两边对 y 求偏导数，得：

$3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-3z-3y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$，$\therefore\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{z^2-y}$

当 $x=0,y=0$ 时，由原方程可得 $z=2$

$$\therefore\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\left.\frac{z}{z^2-y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\left.\frac{1}{z}\right|_{z=2}=\frac{1}{2}$$

13. 解：$y=\ln(1+x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导

故 $y=\ln(1+x)$在$[0,1]$上满足拉格朗日定理条件

$$y'(\xi)=\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=\xi}=\frac{1}{1+\xi}$$

由拉格朗日定理有 $\ln 2=\frac{1}{1+\xi}$，$\therefore\xi=\frac{1-\ln 2}{\ln 2}$

14. 解：$A_{21}=-M_{21}=-1$，$A_{22}=M_{22}=2$，$A_{23}=-M_{23}=-3$，$A_{24}=M_{24}=4$

$$\therefore M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}+A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=2(M_{22}+M_{24})=12$$

15. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{1+x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[(x-1)e^x+1](1+x^2)}{x^2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{-2x}=-\frac{1}{2}$$

16. 解：$f(0)=0$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\frac{x^2(1-\cos x)-2x(x-\sin x)}{x^4}$

$$=\frac{2\sin x-x-x\cos x}{x^3}$$

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin x-x-x\cos x}{x^3} & x\neq 0\\ \dfrac{1}{6} & x=0\end{cases}$$

17. 解：$\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}d\tan x=\int\sec^2 x d\tan x$

$$=\int(1+\tan^2 x)d\tan x=\int d\tan x+\int\tan^2 x d\tan x$$

$$=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+c$$

18. 解：令 $x=\sin t$，当 $x=0$ 时 $t=0$，当 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $t=\dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin t}{(2-\sin^2 t)\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2-\sin^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{2(\sin^2 t+\cos^2 t)-\sin^2 t}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sin^2 t+2\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{(\tan^2 t+2)\cos^2 t}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\tan t}{(\sqrt{2})^2+\tan^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$$

19. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf'\cdot\dfrac{1}{y}+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+x\varphi'\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=f'+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}\varphi'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''\cdot\frac{-x}{y^2}+\varphi'\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\varphi'-\frac{y}{x}\varphi''\cdot\frac{1}{x}=-\frac{x}{y^2}f''-\frac{y}{x^2}\varphi''$$

20. 解：对应齐次方程的特征方程 $r^2+4r+4=0$，特征根 $r_1=-2$，$r_2=-2$

其通解 $\overline{y}=(c_1+c_2x)e^{-2x}$

设原方程的一个特解 $y^*=Ax^2e^{-2x}$

将 y^* 代入原方程，解得 $A=\dfrac{1}{2}$， $\therefore y^*=\dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$

所以原方程通解为 $y=\overline{y}+y^*=(c_1+c_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$

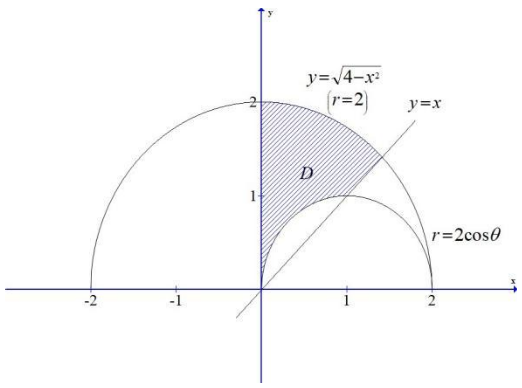
21. 解：$\displaystyle\iint\limits_D ydxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}r^2\sin\theta dr=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cdot\sin\theta r^3\Big|_{2\cos\theta}^{2}$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(8-8\cos^3\theta\right)\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta d\theta$$

$$=-\frac{8}{3}\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\cos\theta$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\cos^4\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{6}$$



22. 解：$(A\vdots E)=\begin{pmatrix}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&4&3&1&-2&0\\0&1&1&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&4&3&0&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_2]{rr_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&2&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-1&1&-6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&-1&1&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{pmatrix}，\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$$

23. 证明：令 $F(x)=e^x-x-1-\frac{1}{2}x\sin x$，则 $F(0)=0$

$F'(x)=e^x-1-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

$F'(0)=0$

$F''(x)=e^x-\cos x+\frac{1}{2}x\sin x$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$F''(x)>0$，$\therefore F'(x)$ 单调递增

$F'(x)>F'(0)=0$

由 $F'(x)>0$ 又可知 $F(x)$ 单调递增，从而 $F(x)>F(0)=0$

即 $e^x-x-1-\frac{1}{2}x\sin x>0$，所以 $e^x-x-1>\frac{1}{2}x\sin x$

24. 解：(1)设切点为 $(a,\ln a)$

$y'=\frac{1}{x}$，$k_{切}=y'|_{x=a}=\frac{1}{a}$

切线方程 $y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$

$\because$ 切线过点 $M(0,1)$，$\therefore 1-\ln a=-1$，$a=e^2$

切点为 $P(e^2,2)$

切线方程 $y-\ln e^2=\frac{1}{e^2}(x-e^2)$，即 $y=\frac{1}{e^2}x+1$

(2) $S=\int_0^{e^2}\left(\frac{1}{e^2}x+1\right)dx-\int_1^{e^2}\ln x dx$

$=\left(\frac{1}{2e^2}x^2+x\right)\Bigg|_0^{e^2}-x\ln x\Big|_1^{e^2}+\int_1^{e^2}dx$

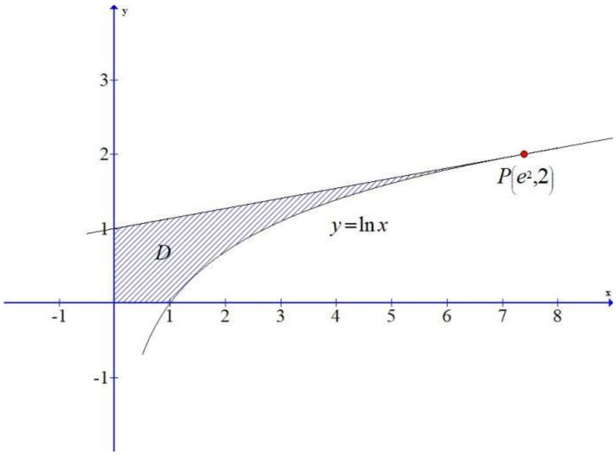
$=\frac{3}{2}e^2-2e^2+e^2-1=\frac{1}{2}e^2-1$

(3) $V_y=\int_0^2\pi(e^y)^2dy-\int_1^2\pi\left[e^2(y-1)\right]^2dy$

$=\pi\int_0^2 e^{2y}dy-\pi e^4\int_1^2(y-1)^2dy$

$$=\frac{1}{2}\pi e^{2y}\Big|_0^2-\frac{\pi e^4}{3}(y-1)^3\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{6}\pi e^4-\frac{1}{2}\pi$$



25. 解：$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&k&4\\-1&k&1&k^2\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&k+1&k+1&k^2+4\\0&-2&2-k&-8\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&-2&2-k&-8\\0&k+1&k+1&k^2+4\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&1&\dfrac{k-2}{2}&4\\0&k+1&k+1&k^2+4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-(k+1)r_2}\begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&1&\dfrac{k-2}{2}&4\\0&0&\dfrac{(k+1)(4-k)}{2}&k(k-4)\end{pmatrix}$$

(1)当 $k\neq-1$ 和 $k\neq4$ 时，$R(A)=R(\overline{A})=3$，方程组有唯一解

(2)当 $k=-1$ 时，$R(A)=2$，$R(\overline{A})=3$，$R(A)\neq R(\overline{A})$，方程组无解

(3)当 $k=4$ 时，$R(A)=R(\overline{A})=2<3$，方程组有无穷多组解

当 $k=4$ 时，$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&4&4\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

x_1,x_2 为约束变量，x_3 为自由变量

一般解$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \end{cases}$，令 $x_3 = 0$ 得方程组的一个特解 $\eta^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

导出组一般解$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$，令 $x_3 = 1$ 得基础解系 $\xi = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

方程组通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$（其中 k 为任意常数）