江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 5 参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.在下列每一小题中选出一个正确答案，请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑）

1.**【答案】**B

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{2+x^3}+\sqrt{2}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x^3}+\sqrt{2}}{x^2}=+\infty$，所以 $x\to 0$ 时，x 是 $\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}$ 的低阶无穷小.

【考点】比较无穷小的阶

【总结】无穷小阶数的比较是专转本考试常考考点，同学们必须牢记等价无穷小的公式。

2.**【答案】**A

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos ax=\cos a$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[2a(x-1)^2+1\right]=1$，且 $f(1)=1$，所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续应有 $1=\cos a$，故 $a=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

【考点】利用函数的连续性，求相关参数

3.**【答案】**B

【解析】$x\sin x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，所以 $f(x)=(x\sin x)'=\sin x+x\cos x$，则

$$f'(x)=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x,$$

从而有 $\int f''(x)\mathrm{d}x=f'(x)+C=2\cos x-x\sin x+C$.

【考点】原函数与不定积分的关系、不定积分与导数的关系

4.**【答案】**D

【解析】$y'=-\sin\left[f(x)\right]\cdot\left[f(x)\right]'=-f'(x)\sin\left[f(x)\right]$，

$y''=-f''(x)\sin\left[f(x)\right]-f'(x)\cos\left[f(x)\right]\cdot f'(x)=-f''(x)\sin\left[f(x)\right]-\left[f'(x)\right]^2\cos\left[f(x)\right]$.

【考点】抽象函数求导

5.**【答案】**B

【解析】 A 项中，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+20}{202n+2022}=\dfrac{1}{202}\neq 0$，所以由级数收敛的必要条件知原级数发散；

B 项中，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+2}{(n+1)!}}{\dfrac{n+1}{n!}}=0<1$，故由比值审敛法可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}$ 收敛；

C 项中，$\int_{\pi}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_{\pi}^{+\infty}=-1-\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在，故该反常积分发散；

D 项中，$\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}\Big|_{1}^{+\infty}=+\infty$，故该反常积分发散.

【考点】 无穷区间上的广义积分

6.**【答案】** D

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件.令 $a_n=\dfrac{1}{3^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 收敛，则 B 项不正确；令 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，则 A、C 项不正确，故选 D.

【考点】 判断级数敛散性

【总结】 判断级数的敛散性是专转本考试必考考点。

7.**【答案】** D

【解析】 因为 A,B 均可逆，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AXBB}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$，即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$.

【考点】 矩阵方程求解

8.**【答案】** C

【解析】 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关.又 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

【考点】 线性相关与线性无关

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9.**【答案】** $\dfrac{1}{2}$

【解析】 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{\frac{n}{-x}}\right]^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$，得 $f(\ln 2)=\mathrm{e}^{-\ln 2}=\dfrac{1}{2}$.

【考点】 函数的极限

10.**【答案】** $\frac{1}{2}$

【解析】方法一 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f^2(x)-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\frac{2f(x)f'(x)}{2x}=\frac{2\times2\times\frac{1}{2}}{2\times2}=\frac{1}{2}$.

方法二 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f^2(x)-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\frac{[f(x)+2][f(x)-2]}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)+2}{x+2}\cdot\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}.=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{2}$.

【考点】 导数的定义

11.**【答案】** $yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y$.

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，则 $\mathrm{d}z=yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y$.

【考点】 二元函数的全微分

12.**【答案】** $\frac{49\pi}{2}$

【解析】 由定积分的几何意义可知 $\int_{-7}^{7}\sqrt{49-x^2}\mathrm{d}x$ 表示圆心在原点，半径为 7 的圆的上半部分面积，故 $\int_{-7}^{7}\sqrt{49-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot7^2=\frac{49}{2}\pi$.

【考点】 利用对称性求解定积分

13.**【答案】** $\pm\frac{1}{3}$

【解析】 因为幂级数的收敛半径 $R=27$，故 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a^{3(n+1)}}{a^{3n}}\right|=\left|a^3\right|=\frac{1}{R}=\frac{1}{27}$，解得 $a=\pm\frac{1}{3}$.

【考点】 求幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域

【总结】 幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域是专转本考试必考考点。

14.**【答案】** 0

【解析】 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=\begin{vmatrix}9&3&0\\5&5&5\\1&1&1\end{vmatrix}=0$.

【考点】 展开定理

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

15.**【解析】** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\sin^3x}{x^2-\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^6}{x^2-\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x^5}{2x-2x\cos x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^4}{1-\cos x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^4}{\frac{1}{2}x^4}=6$.

【考点】七种未定式极限的计算

【总结】七种未定式极限的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断极限的类型，再选用合适的方法。

16.**【解析】**根据题设可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'$；

又 f 具有二阶连续偏导数，所以 $f_{12}''=f_{21}''$，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-f_{11}''+xf_{12}''+f_2'+y\left(-f_{21}''+xf_{22}''\right)=-f_{11}''+f_2'+(x-y)f_{12}''+xyf_{22}''.$$

【考点】求二元函数的偏导数、全微分

17.**【解析】**令 $\sqrt{x}=t\left(t>0\right)$，则 $x=t^2$， $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，故

原式 $=\displaystyle\int\frac{\arcsin t}{\sqrt{t^2\left(1-t^2\right)}}\cdot2t\mathrm{d}t=2\int\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=2\int\arcsin t\mathrm{d}\left(\arcsin t\right)=\left(\arcsin t\right)^2+C=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2+C$.

【考点】不定积分的计算

【总结】不定积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是用换元法还是分部积分法求解。

18.**【解析】** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x\xlongequal{令\sqrt{2x-1}=t}\int_0^1\frac{\frac{1+t^2}{2}-1}{1+t}\cdot t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1\left(t^2-t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{12}$.

【考点】定积分的计算

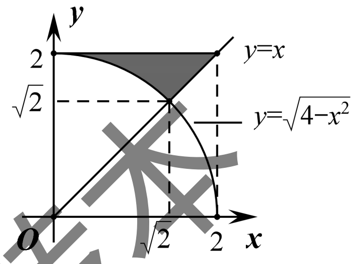
【总结】定积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是否可以利用对称性求解，再考虑用换元法或者分部积分法求解。

19.**【解析】**平面区域 D 如图所示，联立 $\begin{cases}y=\sqrt{4-x^2},\\ y=x,\end{cases}$ 可解得交点为 $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，在直角坐标系下，积分区域

可表示为$\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 2$，$\sqrt{4-y^2}\leqslant x\leqslant y$，

故

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y^2}}^{y}xy\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{2}y\left(x^2\Big|_{\sqrt{4-y^2}}^{y}\right)\mathrm{d}y=\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(y^3-2y\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{4}y^4-y^2\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=1.$$



第 19 题图

【考点】二重积分的计算

【总结】二重积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是使用直角坐标系还是极坐标系计算。

20.**【解析】**原方程的特征方程为$2r^2+4r+3=0$，特征方程的根为$r_1=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$，$r_2=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$，

所以原方程的通解为$y=\mathrm{e}^{-x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$，

$$y'=\mathrm{e}^{-x}\left[\left(-C_1+\frac{\sqrt{2}}{2}C_2\right)\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x-\left(C_2+\frac{\sqrt{2}}{2}C_1\right)\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right],$$

又$y(0)=1$，$y'(0)=0$，则$\begin{cases}C_1=1,\\-C_1+\frac{\sqrt{2}}{2}C_2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}C_1=1,\\C_2=\sqrt{2},\end{cases}$

故所求特解为$y=\mathrm{e}^{-x}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$.

【考点】二阶常系数齐次线性微分方程

21.**【解析】**

$$(A\,\vdots\,E)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&1&0&0\\4&1&2&0&1&0\\2&5&4&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&1&0&0\\0&9&6&-4&1&0\\0&9&6&-2&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&1&0&0\\0&9&6&-4&1&0\\0&0&0&2&-1&1\end{array}\right]$$

由于 $R(\boldsymbol{A})=2$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵不存在.

【考点】用初等变换法求逆矩阵

22.【解析】方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda-1 & 1\\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 2\\ 3-\lambda-\lambda^2 & 0 & 3-2\lambda\\ 3-\lambda^2 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3-\lambda-\lambda^2 & 3-2\lambda\\ 3-\lambda^2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1),$$

（Ⅰ）当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq1$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，方程组有唯一解.

（Ⅱ）当 $\lambda=0$ 时，有增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 3 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=2\neq3=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})$，方程组无解.

（Ⅲ）当 $\lambda=1$ 时，有增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 6 & 1 & 4 & 3\end{array}\right)\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-4r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})=2<3$，从而方程组有无穷多解.

同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_3=1,\\ x_2-2x_3=-3,\end{cases}$ x_3 为自由未知量，令 $x_3=k$，

解得其通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 0\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

【考点】非齐次方程组的相关问题

四、证明题（本大题 10 分）

23.令 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\sin x-x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $f'(x)=x+\cos x-1$，$f''(x)=1-\sin x$，

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f''(x)>0$，可知 $f'(x)$ 单调递增，$f'(x)>f'(0)=0$，

故 $f(x)$ 单调递增，$f(x)>f(0)=0$，即 $x<\frac{1}{2}x^2+\sin x$.

【考点】不等式的证明

【总结】不等式的证明是专转本考试必考考点，同学们需要先判断所证结论是否带等号。

五、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

24.**【解析】**联立 $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ x+y=6 \end{cases}$ 得 $y=\sqrt{x}$ 与 $x+y=6$ 的交点为 $(4,2)$.

（1）D 的面积

$$S=\int_0^2\left(6-y-y^2\right)\mathrm{d}y=\left(6y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^2=\frac{22}{3};$$

（2）所求旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_4^6(6-x)^2\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^4+\frac{\pi}{3}(x-6)^3\Big|_4^6=\frac{32}{3}\pi.$$

【考点】平面图形面积、旋转体体积

【总结】平面图形面积、旋转体体积是专转本考试必考考点，同学们需要先画出积分区域，再求解，每年这类题的计算量都很大，同学们计算时要特别仔细。

25.**【解析】**（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2x+a+\frac{b}{x}$，$f''(x)=2-\frac{b}{x^2}$，

因为 $f(x)$ 的拐点为 $\left(\sqrt{2},2-6\sqrt{2}+2\ln 2\right)$，所以 $f\left(\sqrt{2}\right)=2-6\sqrt{2}+2\ln 2$，$f''\left(\sqrt{2}\right)=0$，

即 $2+\sqrt{2}a+b\ln\sqrt{2}=2-6\sqrt{2}+2\ln 2$，$2-\frac{b}{2}=0$，解得 $a=-6$，$b=4$；

（2）由（1）可得 $f(x)=x^2-6x+4\ln x$，$f'(x)=2x-6+\frac{4}{x}=\frac{2(x-1)(x-2)}{x}$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=2$. 当 $x>2$ 或 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，且 $f(1)=-5$，$f(2)=4\ln 2-8$，

所以 $f(x)$ 的单调增加区间为 $(2,+\infty)$ 和 $(0,1)$，单调减少区间为 $(1,2)$，极大值 $f(1)=-5$，极小值 $f(2)=4\ln 2-8$；

（3）$g(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-6x+4\ln x}{x^2-1}=+\infty$， $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+4\ln x}{x^2-1}=\infty$，

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-6x+4\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-6+\frac{4}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x^2}}{2}=1$，

所以曲线有垂直渐近线 $x=1$， $x=0$ 和水平渐近线 $y=1$.

【考点】导数的应用

【总结】导数的应用专转本考试必考考点，常考察求解函数解析式、未知参数，单调性和单调区间、极值和极值点、凹凸区间和拐点、间断点、渐近线等等。