江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 7 参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.在下列每一小题中选出一个正确答案，请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑）

1.【答案】B

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+kx^2\right)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2/2}=2k=1$，所以 $k=\dfrac{1}{2}$.

【考点】利用等价无穷小求参数

2.【答案】C

【解析】 $y'=1-\dfrac{a}{\frac{1}{2}+ax}$，由 $y'(2)=1-\dfrac{a}{\frac{1}{2}+2a}=0$ 可得 $a=-\dfrac{1}{2}$.

【考点】利用可导性求参数

3.【答案】C

【解析】利用一阶微分形式不变性可得 $2^{xy}\ln2\left(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\right)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.当 $x=0$ 时， $y=1$，将点 $(0,1)$ 代入到 $2^{xy}\ln2\left(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\right)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ 中可得 $\ln2\mathrm{d}x=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\big|_{x=0}$，所以 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=\left(\ln2-1\right)\mathrm{d}x$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\ln2-1$

【考点】隐函数求导

【总结】隐函数求导是专转本考试常考考点。

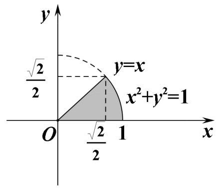
4.【答案】B

【解析】 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t+1$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t-\mathrm{e}^t$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{2t-\mathrm{e}^t}{2t+1}$.

当 $t=0$ 时 $x=0$， $y=-1$， $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=-1$，故所求切线方程是 $y-\left(-1\right)=-\left(x-0\right)$, 即 $x+y+1=0$.

【考点】曲线切线和法线相关问题

5.【答案】C



（第 5 题图）

【解析】积分区域如图所示.选 C.

【考点】交换积分次序

【总结】直角坐标系下积分次序的交换，直角坐标系转化为极坐标系是专转本考试常考考点，需要同学们准确画出积分区域，再列式子。

6.【答案】C

【解析】因为正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，所以$a_n>0$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{1+\alpha}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{\alpha}$，当$\alpha>0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{1+\alpha}}{a_n}=0$，

由正项级数的比较审敛法可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{1+\alpha}$收敛.

【考点】判断级数敛散性

【总结】幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域是专转本考试必考考点。

7.【答案】C

【解析】由$\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|\boldsymbol{E}_4\right|=1$，可得$\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}=-\dfrac{1}{2}$.

【考点】方阵的行列式

8.【答案】B

【解析】根据线性相关、线性无关的定义，可知 B 选项不正确.

【考点】线性相关与线性无关

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9.【答案】$a=3$

【解析】因为$f(x)$在点$x=0$处连续，所以$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，即$\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\tan3x}{x}=a$，得$a=3$.

【考点】利用函数的连续性，求相关参数

10.【答案】$\frac{1}{4}\mathrm{d}x$

【解析】$\mathrm{d}y=\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=1}=\frac{1}{4}\mathrm{d}x$.

【考点】函数的微分

11.【答案】$\ln 2$.

【解析】$\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_a^{+\infty}=\mathrm{e}^{-a}=\frac{1}{2}$，解得 $a=\ln 2$.

【考点】反常积分的计算

12.【答案】π

【解析】$\int_{-1}^{1}\frac{2+\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=4\arctan x\Big|_0^1=\pi$.

【考点】利用对称性计算定积分

13.【答案】$\frac{1}{\pi}$

【解析】$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{1+x^2}\mathrm{d}x=A\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=A\pi=1$，解得 $A=\frac{1}{\pi}$.

【考点】广义积分

【总结】广义积分的计算和敛散性的判断是专转本考试必考考点。

14.【答案】 -4

【解析】$A=\begin{bmatrix}1&3&-1&2\\1&3&2&1\\-2&-6&2&t\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&2\\0&0&3&-1\\0&0&0&t+4\end{bmatrix}$，可得 $t=-4$.

【考点】利用矩阵的秩求未知参数

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

15.【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x}{2x(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$.

【考点】七种未定式极限的计算

【总结】七种未定式极限的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断极限的类型，再选用合适的方

法。

16.【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_2'\cdot y=y^2f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf_2'+y^2\left(f_{21}''\cdot 2y+f_{22}''\cdot x\right)=2yf_2'+2y^3f_{21}''+xy^2f_{22}''.$$

【考点】求抽象函数的偏导数

17.【解析】原式$=\int x^2\cos x\mathrm{d}x+\int \sin x\cos x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}(\sin x)+\int \sin x\mathrm{d}\sin x=x^2\sin x-\int \sin x\mathrm{d}\left(x^2\right)+\dfrac{1}{2}\sin^2 x$

$=x^2\sin x-2\int x\sin x\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}\sin^2 x=x^2\sin x+2\int x\mathrm{d}(\cos x)+\dfrac{1}{2}\sin^2 x=x^2\sin x+2x\cos x-2\int \cos x\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}\sin^2 x$

$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+\dfrac{1}{2}\sin^2 x+C$.

【考点】不定积分的计算

【总结】不定积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是用换元法还是分部积分法求解。

18【解析】$\int_{-2}^{4}\left(x^2-3|x|+\dfrac{2}{|x|+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-2}^{0}\left(x^2+3x+\frac{2}{-x+1}\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\left(x^2-3x+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2\ln|1-x|\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2\ln|1+x|\right)\Bigg|_{0}^{4}$$

$$=-6+2\ln 15.$$

【考点】定积分的计算

【总结】定积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是否可以利用对称性求解，再考虑用换元法或者分部积分法求解。

19.【解析】原式$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cdot r\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{12}$.

【考点】二重积分的计算

【总结】二重积分的计算是专转本考试必考考点，同学们需要先判断是使用直角坐标系还是极坐标系计算。

20.【解析】微分方程的特征方程为$r^2+r+2=0$，其根为$r_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}$，

故对应的齐次方程的通解为 $Y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$.

因为 $f(x) = x^2 - 3$，$\lambda = 0$ 不是特征方程的根，

故原方程的特解设为 $y^* = ax^2 + bx + c$，可得 $\left(y^*\right)' = 2ax + b, \left(y^*\right)'' = 2a$，

代入原方程得 $2ax^2 + (2a+2b)x + (2a+b+2c) = x^2 - 3$，

比较系数得 $\begin{cases} 2a = 1, \\ 2a + 2b = 0, \\ 2a + b + 2c = -3, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{7}{4}$，

从而 $y^* = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$.

综上，原方程的通解为 $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$.

【考点】二阶常系数非齐次线性微分方程

21.**【解析】**（1）对 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 进行初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

当 $a = 5$ 时，$R(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = 2 \neq R(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\alpha}_1) = 3$，此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

（2）对 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$ 进行初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3 = 5\boldsymbol{\alpha}_1 + 10\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3$.

【考点】线性表示

22.**【解析】**方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & t & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+2r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t-4 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{\substack{r_4-r_3 \\ \frac{1}{5}r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & t-4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-(t-4)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -t-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $-t-1=0$，即 $t=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = 2 < 3$，原方程组有非零解.此时

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则与原方程组同解的方程组为$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$

即$\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_3, \end{cases}$ x_3 为自由未知量.

令 $x_3 = k$，则原方程组的通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

【**考点**】齐次方程组的相关问题

四、证明题（本大题 10 分）

23.令 $f(x) = 4x\ln x - x^2 - 2x + 3$，则

$$f'(x) = 4\ln x - 2x + 2, \quad f''(x) = \frac{4}{x} - 2 = \frac{4-2x}{x}.$$

当$1 < x < 2$ 时，$f''(x) > 0$，

故函数 $f'(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调增加，从而当$1 < x < 2$ 时 $f'(x) > f'(1) = 0$，

于是函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调增加，从而当$1 < x < 2$ 时，$f(x) > f(1) = 0$，

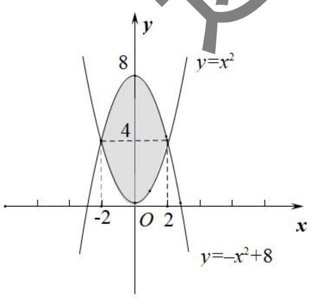
即当$1 < x < 2$ 时，$4x\ln x > x^2 + 2x - 3$.

【**考点**】不等式的证明

【**总结**】不等式的证明是专转本考试必考考点，同学们需要先判断所证结论是否带等号。

五、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

24.【**解析**】两条抛物线所围区域如图所示.



（1）$S = \int_{-2}^{2}\left(8 - x^2 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{64}{3}$.

（2）$V=\pi\int_0^4(\sqrt{y})^2\mathrm{d}y+\pi\int_4^8(\sqrt{8-y})^2\mathrm{d}y=16\pi$.

【考点】平面图形面积、旋转体体积

【总结】平面图形面积、旋转体体积是专转本考试必考考点，同学们需要先画出积分区域，再求解，每年这类题的计算量都很大，同学们计算时要特别仔细。

25.**【解析】**（1）因曲线上任一点 $P(x,y)$ 处的切线在 y 轴上的截距为 $-2x^2$，

所以曲线在点 $P(t,f(t))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 $-2x^2$.

又曲线在 $P(t,f(t))$ 处的切线 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 在 y 轴上的截距为 $f(t)-tf'(t)$，

所以 $f(t)-tf'(t)=-2t^2$，

于是 $f(x)-xf'(x)=-2x^2$，也即 $f'(x)=\frac{1}{x}f(x)+2x^2$，

通解为 $f(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int 2x^2\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x^3+Cx$.

又 $y=f(x)$ 通过点 $(1,-11)$，所以 $C=-12$，

从而 $f(x)=x^3-12x$.

（2）定义域为 $\mathbf{R}$，

$f'(x)=3(x^2-4)$，

因 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(-2,2)$ 时，$f'(x)<0$；$x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，又 f 为连续，

所以 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-2]$ 和 $[2,+\infty)$，单调递减区间为 $[-2,2]$，

进而 f 在 $x=-2$ 处取得极大值为 16，在 $x=2$ 处取得极小值为 -16.

（3）$f''(x)=6x$.

因 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f''(x)<0$；$x\in(0,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，

又 f 连续，

所以 $y=f(x)$ 的凸区间为 $(-\infty,0]$，凹区间为 $[0,+\infty)$，

进而拐点为 $(0,0)$.

【考点】导数的应用

【总结】导数的应用专转本考试必考考点，常考察求解函数解析式、未知参数，单调性和单调区间、极值和极值点、凹凸区间和拐点、间断点、渐近线等等。