

**总分 150    时间 120 分钟**

1、设  $f(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{1}{x}}}$ , 则  $x=0$  是  $f(x)$  的 ( )

- 2、设  $f(x)$  有连续的导函数, 且  $a \neq 0, 1$ , 则下列命题正确的是 ( )

3. 设  $f(x)$  的一个原函数是  $\ln^2 x$ , 则  $\int x f'(x^2 + 1) dx$  ( )

- 4、下列级数收敛的是 ( )

- 5、二重积分  $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$  交换积分次序后得 ( )

- A.  $\int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$
- B.  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx$
- C.  $\int_0^1 dy \int_{1+y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$
- D.  $\int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y) dx$

- 6、设函数  $f(x)$  二阶可导, 且  $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$ , 则  $x_0$  为  $f(x)$  的 ( )

- A.极大值点                      B.极小值点  
C.极大值                         D.极小值

- 7、 $n$  阶矩阵  $A$  经过若干次初等变换化为矩阵  $B$ , 则 ( )

- A.  $|A|=|B|$                       B. 若  $|A|>0$ , 则  $|B|>0$   
C. 若  $|A|=0$ , 则  $|B|=0$                       D. 若  $|A|<0$ , 则  $|B|<0$

- 8、若  $a_1, a_2, a_3$  线性相关,  $a_2, a_3, a_4$  线性无关, 则 ( )

- A.  $a_1$  可由  $a_2, a_3$  线性表示      B.  $a_4$  可由  $a_1, a_2, a_3$  线性表示  
C.  $a_4$  可由  $a_1, a_3$  线性表示      D.  $a_4$  可由  $a_1, a_2$  线性表示

二、填空题 (共 6 小题, 每题 4 分)

9、设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$ , 则常数  $a =$  \_\_\_\_\_.

10、设  $f'(x_0) = 3$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-3h)}{h} =$  \_\_\_\_\_.

11、幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 3^n}$  的收敛域为 \_\_\_\_\_.

12、定积分  $\int_{-1}^1 \left( x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} + \sqrt{1-x^2} \right) dx$  的值为 \_\_\_\_\_.

13、设函数  $y = f(x)$  由方程  $xy + 2 \ln x = y^4$  所确定, 则曲线  $y = f(x)$  在 (1,1) 处的法线方程为 \_\_\_\_\_.

14、设  $n$  为 3 阶矩阵,  $B$  为 4 阶方阵, 且  $|A| = 3, |B| = -2$ , 则  $\|B|A|\| =$  \_\_\_\_\_.

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

15、求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ .

16、求不定积分  $\int \sin \sqrt{x} dx$ .

17、求不定积分  $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}} dx$ .

18、计算积分  $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy$ , 其中  $D$ : 由  $y = x^2, y = 2x$  所围成的区域.

19、已知  $y = y(x)$  由方程  $(y-1)e^x + xe^{xy} = 2e^x$  确定, 求  $y'(0)$ .

20、已知函数  $z = f(x+y, xy)$ ，其中  $f(u, v)$  具有二阶连续偏导数，求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

21、设 3 阶方阵  $A, B$  满足  $A^{-1}BA = 6A + BA, A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ ，求矩阵  $B$ 。

22、求方程组的通解 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

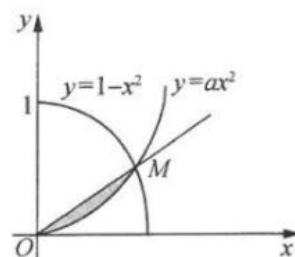
四、证明题 (10 分)

23、证明不等式：当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时， $e^{-x} + \sin x < 1 + \frac{x^2}{2}$ 。

五、综合题 (每题 10 分)

24、设曲线  $y = ax^2 (a > 0, x > 0)$  与  $y = 1 - x^2$  交于点  $M$ ，过坐标原点  $O$  和点  $M$  的直线与曲线  $y = ax^2$  围成一平面区域  $D$  (如图中阴影部分所示) .

- (1) 求平面区域  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积  $V(a)$  .
- (2) 问  $a$  为何值时,  $V(a)$  取得最大值? 并求出最大值.



25、设函数  $f(x) = \frac{ax+b}{(x+1)^2}$  在点  $x = 1$  处取得极值  $-\frac{1}{4}$ , 试求:

- (1) 常数  $a, b$  的值;
- (2) 曲线  $y = f(x)$  的凹凸区间和拐点;
- (3) 曲线  $y = f(x)$  的渐近线.

## 江苏专转本考试高等数学模拟卷2

总分 150 时间 120 分钟

一、选择题 (共 8 题, 每题 4 分, 共 32 分)

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = x - \sin ax$  与  $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$  是等价无穷小, 则 ( )

A.  $a=1, b=-\frac{1}{6}$

B.  $a=1, b=\frac{1}{6}$

C.  $a=-1, b=-\frac{1}{6}$

D.  $a=-1, b=\frac{1}{6}$

2. 函数  $y = f(x)$  在  $x = a$  处连续是  $f(x)$  在  $x = a$  处有极限的 ( )

A. 充要条件

B. 充分条件

C. 必要条件

D. 无关条件

3. 若  $\int f(x)dx = x^2 + C$ , 则  $\int xf'(1-x^2)dx =$  ( )

A.  $2(1-x^2)^2 + C$

B.  $-2(1-x^2)^2 + C$

C.  $\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$

D.  $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$

4. 设  $u_n = (-1)^n \sin \frac{a}{\sqrt{n}}$  ( $a > 0$ ), 则无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  ( )

A. 条件收敛

B. 绝对收敛

C. 发散

D. 敛散性与  $a$  的取值有关

5. 下列反常积分收敛的是 ( )

A.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

B.  $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

C.  $\int_1^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$

D.  $\int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^3} dx$

6. 已知  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax - 2}{x^2 - 1} = 2$ , 则  $a =$ 

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

7. 下列说法正确的是 ( )

A. 若  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ , 则  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ B. 若  $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}, \mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ , 则  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{O}$ C. 若  $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ , 则  $|\mathbf{AB}| = 1$ D.  $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |\mathbf{A} + \mathbf{B}|$ 8. 已知  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{P}$  为 3 阶非零矩阵, 且满足  $\mathbf{PQ} = \mathbf{O}$ , 则 ( )A.  $t = 6$  时,  $\mathbf{P}$  的秩必为 1B.  $t = 6$  时,  $\mathbf{P}$  的秩必为 2C.  $t \neq 6$  时,  $\mathbf{P}$  的秩必为 1D.  $t \neq 6$  时,  $\mathbf{P}$  的秩必为 2

二、填空题 (共 6 小题, 每题 4 分)

9. 已知连续函数  $f(x)$  满足  $f(x) = x + \int_0^2 f(x)dx$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_10. 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+x^3}} =$  \_\_\_\_\_.11. 若  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ , 则  $f^{(n)}(1) =$  \_\_\_\_\_.12. 设函数  $y = f(x)$  由方程  $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$  所确定, 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, 1)$  处的法线

方程为\_\_\_\_\_.

13. 设函数  $f(x)$  连续,  $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$ , 若  $\varphi(1)=1, \varphi'(1)=5$ , 则  $f(1)=$ \_\_\_\_\_.

14. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $Ax = 0$  的基础解系中含有\_\_\_\_\_个解向量.

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{\sec x - \cos x}$ .

16. 求不定积分  $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$ .

17. 求定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x \tan x dx$

18. 设函数  $z = f(x, y)$  由方程  $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$  所确定, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

19. 求微分方程  $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$  的通解.

20. 计算二重积分  $I = \iint_D [y + x(x^2 + y^2)] dx dy$ , 其中积分区域  $D$  由曲线  $y = x^2$  与  $y = 1$  所围.

21. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 求  $(A - 2E)^{-1}$ .

22. 设 
$$\begin{cases} (2 - \lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5 - \lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5 - \lambda)x_3 = -\lambda - 1, \end{cases}$$

问  $\lambda$  为何值时, 此方程组有唯一解、无解、有无穷多解? 并在有无穷多解时求出通解.

四、证明题 (10 分)

23. 证明:  $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \leq 1 + \frac{x^2}{2}$ , 其中  $-1 < x < 1$ .

五、综合题 (每题 10 分)

24. 已知曲线  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的拐点为  $(1, -1)$ , 且在  $x = 0$  处取得极大值 1, 问

- (1) 常数  $a, b, c, d$  的值;
- (2) 求此曲线的极小值.

25. 设函数  $y = f(x)$  满足  $\int_0^x f(t)dt = f(x) + e^x$ , 记由曲线  $y = f(x)$  与直线  $x = t (t < -1)$  及  $x$  轴所围平面图形的面积为  $A(t)$ , 试求  $\lim_{t \rightarrow -\infty} A(t)$ .



# 江苏专转本考试高等数学模拟卷 3

总分 150 时间 120 分钟

一、选择题 (共 8 题, 每题 4 分, 共 32 分)

1. 当  $x \rightarrow 0$  时  $e^{ax^3} - 1$  与  $(1 - \cos x) \ln(1 - x)$  等价, 则常数  $a =$  \_\_\_\_\_.

- A. 1  
B. 2  
C. 3  
D.  $-\frac{1}{2}$

2. 设  $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{k}{x}}, & x > 0, \\ e^{x-1}, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则常数  $k =$  \_\_\_\_\_.

- A. 1  
B. 2  
C. 3  
D. 4

3. 下列级数发散的是 ( )

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+1)}$   
B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$   
C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-1}$   
D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

4. 设  $f(x, y)$  为连续函数,  $a > 0$ , 则  $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy$  改变积分次序为 ( )

- A.  $\int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx$   
B.  $\int_0^a dy \int_x^a f(x, y) dx$   
C.  $\int_0^a dy \int_0^y f(x, y) dx$   
D.  $\int_0^a dy \int_0^y f(x, y) dx$

5. 设曲线  $y = x^2 + ax + b$  与  $2y = -1 + xy^3$  在点  $(1, -1)$  处有公共切线, 则  $a, b$  的值分别为 ( )

- A. 0, 2  
B. -1, -1  
C. -1, 1  
D. 1, -3

6. 曲线  $y = x \sin \frac{1}{x}$  ( )

- A. 有且仅有水平渐近线  
B. 有且仅有垂直渐近线  
C. 既有水平渐近线, 也有垂直渐近线  
D. 既无水平渐近线, 也无垂直渐近线

7. 设  $A, B$  均是  $n$  阶矩阵, 下列命题中正确的是 ( )

- A.  $AB = O \Leftrightarrow A = O$  或  $B = O$   
B.  $AB \neq O \Leftrightarrow A \neq O$  且  $B \neq O$   
C.  $AB = O \Rightarrow A = O$  或  $B = O$   
D.  $AB \neq O \Rightarrow A \neq O$  且  $B \neq O$

8. 设 3 阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$ , 其中  $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3$  均为 3 维行向量, 又行列式

$|A| = 18, |B| = 2$ , 则行列式  $|A - B| =$  ( )

- A. 1  
B. 2  
C. 3  
D. 4

二、填空题 (共 6 小题, 每题 4 分)

9. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 若  $y = f(x)$  由方程  $x^3 + y^3 - \sin x + 6y = 0$  确定, 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

11. 设参数方程为  $\begin{cases} x = te^t, \\ y = 2t + t^2, \end{cases}$  则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 设  $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)^3 + e^x$ , 则  $f^{(10)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$  的收敛半径为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B$  为 3 阶非零矩阵, 且  $AB = O$ , 则  $t = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{x - \arctan x}.$

16. 求不定积分  $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx.$

17. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0, \end{cases}$  求  $\int_0^2 f(x-1) dx.$

18. 求由方程  $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  确定的隐函数  $y = y(x)$  的导数。

19. 计算二重积分  $I = \iint_D xy \, dx \, dy$ , 其中  $D$  是由抛物线  $y = x^2$  及直线  $y = x$  所围成的区域.

20. 已知函数  $y = e^x$  和  $y = e^{-2x}$  是二阶常系数齐次线性微分方程  $y'' + py' + qy = 0$  的两个解, 试确定常数  $p, q$  的值, 并求微分方程  $y'' + py' + qy = e^x$  的通解。

21. 求矩阵  $X$ , 使得  $AX = B$ , 其中矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ , 矩阵  $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 14 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$ .

22. 问  $a, b$  分别为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多解? 并求出有无穷多解时的通解.

四、证明题 (10 分)

23. 证明: 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $0 < x < \frac{\pi}{2} \tan x > x + \frac{x^3}{3}$ .

五、综合题 (每题 10 分)

24. 设  $f$  为定义在  $[0, +\infty)$  上的单调连续函数, 曲线  $C: y = f(x)$  通过点  $(0, 0)$  及  $(1, 1)$ , 过  $C$  上一点  $M(x, y)$  分别作垂直于  $x$  轴的直线  $l_x$ , 和垂直于  $y$  轴的直线  $l_y$ , 由曲线  $C$  与直线  $l_x$  及  $x$  轴所围成的平面图形的面积记为  $S_1$ ; 曲线  $C$  与直线  $l_y$  及  $y$  轴所围成的平面图形的面积记为  $S_2$ . 已知  $S_1 = 2S_2$ , 试求:

- (1) 曲线  $C$  的方程;
- (2) 曲线  $C$  与直线  $y = x$  所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

25. 设奇函数  $y = f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上满足: (1)  $0 < f(x) < e^x - 1$ ; (2) 过曲线  $y = f(x)$  上任一点  $M(x, y)$  作平行于  $y$  轴直线  $l$ ,  $l$  与  $y = e^x - 1$  交于  $P$  点; (3) 曲线  $y = f(x)$ 、直线  $l$  和  $x$  轴所围图形面积  $S$  恒等于线段  $MP$  的长度. 求:

- (1) 函数  $y = f(x)$  的表达式, (2) 曲线  $F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - 1$  的单调区间及渐近线.

# 江苏专转本考试高等数学模拟卷 4

总分 150 时间 120 分钟

## 一、选择题 (共 8 题, 每题 4 分, 共 32 分)

1. 设  $f(x) = x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt$ ,  $g(x) = \sin^{10} x$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的 ( )

- A. 等价无穷小 B. 同阶但非等价无穷小  
C. 低阶无穷小 D. 高阶无穷小

2. 设  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ a + x^2, & x \leq 0, \end{cases}$  要使  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

3. 点  $x = 0$  是函数  $f(x) = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} \arctan \frac{1}{x}$  上的 ( )

- A. 跳跃间断点 B. 可去间断点  
C. 无穷间断点 D. 振荡间断点

4. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$  条件收敛的充要条件是 ( )

- A.  $p > 1$  B.  $p < 1$  C.  $p > 0$  D.  $0 < p \leq 1$

5. 已知常数  $a > 0$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( 1 - \cos \frac{2a}{n} \right)$  ( )

- A. 绝对收敛 B. 条件收敛 C. 发散 D. 敛散性与  $a$  有关

6. 函数  $z = e^{xy}$  在点  $(1, 1)$  处的全微分  $dz =$  ( )

- A.  $dx + dy$  B.  $e(dx + dy)$  C.  $e^2(dx + dy)$  D.  $e^3(dx + dy)$

7. 下列命题中, 正确的是 ( )

- A. 如果  $AB = E$ , 则  $A$  必可逆, 且  $A^{-1} = B$   
B. 如果  $A, B$  都是  $n$  阶可逆矩阵, 则  $A + B$  必可逆  
C. 如果  $A, B$  都是  $n$  阶可逆矩阵, 则  $A^{-1}B^T$  必可逆  
D. 如果  $A, B$  都是  $n$  阶不可逆矩阵, 则  $A + B$  必不可逆

8. 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 且  $A$  的行列式  $|A| = 0$ , 则  $A$  中

- A. 必有一列元素全为 0  
B. 必有两列元素对应成比例  
C. 必有一列向量是其余列向量的线性组合  
D. 任意一列向量都是其余列向量的线性组合

## 二、填空题 (共 6 小题, 每题 4 分)

9. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{5}{n} \right)^{-kn} = e^{-10}$ , 则  $k =$  \_\_\_\_\_

10. 若  $y = f(x)$  由方程  $x^3 + y^3 - \sin x + 6y = 0$  确定, 则  $dy|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_

11. 交换  $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$  的积分次序为 \_\_\_\_\_.

12. 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$ , 则  $\int_0^1 f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

13.  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  的收敛半径为 \_\_\_\_\_.

14. 设 4 阶矩阵  $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ ,  $B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ , 其中  $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  均为 4 维列向量, 且已知行列式  $|A| = 4, |B| = 1$ , 则行列式  $|A+B| =$  \_\_\_\_\_.

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{\sin^2 x^2}}$ .

16.  $\int \frac{2x + \arctan x}{1+x^2} dx$

17.  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

18. 计算二重积分  $I = \iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $D: x^2 + y^2 \leq R^2$ .

19. 已知  $z = z(x, y)$  由方程  $x^2 + y^2 = ye^z + z^2$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

20. 求微分方程  $xy' + y - e^x = 0$  满足  $y|_{x=1} = e$  的特解.

21. 解方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

22. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ , 求  $r(A)$  及  $A$  的列向量组的一个极大无关组.

四、证明题 (10 分)

23. 证明: 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $e^x - x > \frac{1}{2}x \sin x + 1$ .

五、综合题 (每题 10 分)

24. 设由抛物线  $y = x^2 (x \geq 0)$ , 直线  $y = a^2 (0 < a < 1)$  与  $y$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积记为  $V_1(a)$ , 由抛物线  $y = x^2 (x \geq 0)$ , 直线  $y = a^2 (0 < a < 1)$  与直线  $x = 1$  所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积记为  $V_2(a)$ , 另  $V(a) = V_1(a) + V_2(a)$ , 试求常数  $a$  的值, 使  $V(a)$  取得最小值.

25. 已知定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的可导函数  $f(x)$  满足方程  $xf(x) - 4 \int_1^x f(t) dt = x^3 - 3$ , 试求:

- (1) 函数  $f(x)$  的表达式;
- (2) 函数  $f(x)$  的单调区间与极值;
- (3) 曲线  $y = f(x)$  的凹凸区间与拐点.



# 江苏专转本考试高等数学模拟卷 5

总分 150 时间 120 分钟

一、选择题 (共 8 题, 每题 4 分, 共 32 分)

1. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ ax + b, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处可导, 则 ( )

A.  $a = 1, b = 0$

B.  $a = 0, b$  为任意常数

C.  $a = 0, b = 0$

D.  $a = 1, b$  为任意常数

2. 若  $\cos x$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int df(x) = ( )$

A.  $-\sin x + C$

B.  $\sin x + C$

C.  $-\cos x + C$

D.  $\cos x + C$

3. 函数  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln(1+x)}{(e^x - 1)(x-2)}$  的第二类间断点的个数为 ( )

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

4. 设  $x = 2$  是函数  $y = x + \ln(3 + ax)$  的可导极值点, 则常数  $a = ( )$

A.  $-1$

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $-\frac{1}{2}$

D. 1

5. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$  的敛散性依次是 ( )

A. 收敛, 收敛

B. 发散, 发散

C. 收敛, 发散

D. 发散, 收敛

6. 如果二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  可化为二次积分  $\int_0^1 dy \int_{y+1}^2 f(x, y) dx$ , 则积分域  $D$  可表示为 ( )

A.  $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 1\}$

B.  $\{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, x-1 \leq y \leq 1\}$

C.  $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 0\}$

D.  $\{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x-1\}$

7. 设  $n$  阶方阵  $A, B, C$  满足关系式  $ABC = E$ , 其中  $E$  是  $n$  阶单位阵, 则必有 ( )

A.  $ACB = E$

B.  $CBA = E$

C.  $BAC = E$

D.  $BCA = E$

8. 设  $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 则下列向量线性无关的是 ( )

A.  $a_1, a_2$

B.  $a_1, a_3, a_4$

C.  $a_2, a_3, a_4$

D.  $a_3, a_4$

二、填空题 (共 6 小题, 每题 4 分)

9. 若  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  与  $\sin 3\Delta x$  为  $\Delta x \rightarrow 0$  时的等价无穷小, 则  $f'(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 设反常积分  $\int_a^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$  则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$  的收敛域为\_\_\_\_\_.

12. 已知  $f'(x_0) = -1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} =$ \_\_\_\_\_.

13.  $f(x)$  是连续函数, 且  $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$ , 求  $f(x)$ .

14. 已知  $\alpha = (1, 2, 3)^T, \beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T, A = \alpha \beta^T$ , 则  $A^4 =$ \_\_\_\_\_.

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\sqrt{1+x^4} - 1}$

16.  $\int \frac{1}{x(1+x)} dx$

17. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x e^{-x^2}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1 + \cos x}, & -1 < x < 0, \end{cases}$ , 计算  $\int_1^4 f(x-2) dx$ .

18. 设  $z = f(x^2 + y^2)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

19. 计算二重积分  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ , 其中区域  $D$  是由  $x^2 + y^2 = 2y$  和  $x = 0$  围成的在第一象限内的部分.

20. 设可导函数  $\varphi(x)$  满足  $\varphi(x)\cos x + 2\int_0^x \varphi(t)\sin t \, dt = x + 1$ , 求  $\varphi(x)$ .

21. 设方阵  $A$  满足  $A^2 - 2A + 4E = 0$ . 证明 (1)  $A + E$  可逆, 并求  $(A + E)^{-1}$ ; (2)  $A - 3E$  可逆, 并求  $(A - 3E)^{-1}$ .

22. 求  $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$  的通解.

四、证明题 (10 分)

23. 证明: 当  $x > 0$  时,  $x^a - ax \leq 1 - a$  (其中  $a$  为常数, 且  $0 < a < 1$ ).

五、综合题 (每题 10 分)

24. 记  $y = xe^x$  与直线  $x = t (t < 0)$  及  $x$  轴围成的平面图形为  $D$ .

(1) 求  $D$  的面积  $S(t)$ , 并求  $\lim_{t \rightarrow -\infty} S(t)$ ;

(2) 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体体积  $V(t)$ , 并求  $\lim_{t \rightarrow -\infty} V(t)$ .

25. 设曲线  $y = f(x)$  通过点  $(1, -11)$ , 且曲线上任一点  $P(x, y)$  处的切线在  $y$  轴上的截距为  $-2x^3$ , 求:

(1) 曲线  $y = f(x)$  的方程;

(2) 函数  $y = f(x)$  的单调区间与极值;

(3) 函数  $y = f(x)$  的凹凸区间与拐点.