

江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 1

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在下列每一小题中选出一个正确答案, 请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑)

1. 设 $g(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x)$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 $n =$ ()

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

2. 函数 $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\frac{x}{e^{x+2}-1} - 1}$ 的间断点的个数为 ()

- A. 0 B. 1 D. 2 D. 3

3. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的一个充分条件是 ()

- A. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h}$ 存在 B. $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$ 存在
C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ 存在 D. $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(x_0 + \frac{1}{h}\right) - f(x_0) \right]$ 存在

4. 设 $\int f(x) dx = e^x + C$, 则不定积分 $\int f(x) e^x dx =$ ()

- A. $2e^x + C$ B. $\frac{1}{2}e^x + C$ C. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$ D. $2e^{2x} + C$

5. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{x}}^{4x} f(x, y) dy$ 交换积分次序后可变为 ()

- A. $\int_1^2 dy \int_{\frac{y}{4}}^1 f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{1}{y}}^1 f(x, y) dx$
B. $\int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^1 f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{4}}^1 f(x, y) dx$
C. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{y}{4}}^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^1 f(x, y) dx$
D. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{4}}^1 f(x, y) dx$

6. 下列级数中条件收敛的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$

7. 如果 n 阶方阵 A , B 满足条件 $AB = O$, 则必有 ()

A. $|A+B| = 0$

B. $A+B = O$

C. $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$

D. $|A| + |B| = 0$

8. 设 4 阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$, A_{ij} 为其代数余子式, 则 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} =$ ()

A. 0

B. $abcd$

C. $ab^2 - cd^2$

D. bc^2

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 要使函数 $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ 在 $x=4$ 处连续, 须补充定义 $f(4) =$ _____.

10. 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 - 2t + 1, \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 在点 $(0, 2)$ 处的导数为 _____.

11. 已知 $y = \ln(2+x)$, 则 $y^{(88)} =$ _____.

12. 设 $\int_a^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \frac{3}{32} \pi^2$, 其中 $a > 0$, 则 $a =$ _____.

13. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n(n+1)}$ 的收敛域为 _____.

14. 已知向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, a, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ 线性相关, 则 $a =$ _____.

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{2(x-1)}}{\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-1}}$.

16. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 确定了函数 $z=z(x,y)$, 求 dz .

17. 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx (x>1)$.

18. 计算定积分 $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^t}-1}dt$.

19. 计算二重积分 $\iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

20. 设二阶常系数微分方程 $y'' + ay' + y = be^{2x}$ 的一个特解为 $y^* = (2x - 1)e^{2x}$, 求该微分方程及其通解.

21. 求矩阵 \mathbf{X} , 使得 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

22. 求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases}$$
 的通解.

四、证明题 (本大题 10 分)

23 证明: 当 $x > 1$ 时, $\frac{x-1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{2} < \frac{x-1}{2}$.

五、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

24. 设曲线 $y = \sin 2x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$ 与直线 $x = a$ 及 x 轴所围成图形 D_1 的面积为 s_1 ，曲线 $y = \sin 2x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$

与直线 $x = a$ 、 $y = 1$ 所围成图形 D_2 的面积为 s_2 ，且 $0 < a < \frac{\pi}{4}$ 。

- (1) a 为多少时， $s = s_1 + s_2$ 最小？并求出最小值；
- (2) 求 s 最小时，两平面图形分别绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积各是多少。

25. 设函数 $f(x) = \frac{ax+b}{(x+1)^2}$ 在点 $x=1$ 处取得极值 $-\frac{1}{4}$ ，试求：

- (1) 常数 a ， b 的值；
- (2) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间与拐点；
- (3) 曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线和垂直渐近线。