

江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 7

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在下列每一小题中选出一个正确答案, 请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑)

1. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = \ln(1+kx^2)$ 与 $g(x) = 1 - \cos x$ 是等价无穷小, 则常数 k 的值为 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

2. 若 $x=2$ 是函数 $y = x - \ln\left(\frac{1}{2} + ax\right)$ 的可导极值点, 则常数 $a =$ ()

A. -1

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. 1

3. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ ()

A. 0

B. -2

C. $\ln 2 - 1$

D. $\ln 2 + 1$

4. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + t, \\ y = t^2 - e^t \end{cases}$ 所确定, 则 $y(x)$ 在 $t=0$ 的对应点处的切线方程为 ()

A. $x - y + 1 = 0$

B. $x + y + 1 = 0$

C. $x - y - 1 = 0$

D. $x + 2y + 2 = 0$

5. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr =$ ()

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

6. 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\alpha}$ ()

A. 不论 α 为何值都收敛B. 不论 α 为何值都发散C. $\alpha > 0$ 时一定收敛D. $0 < \alpha < 1$ 时可能收敛也可能发散

7. 设 A 为四阶方阵, 且 $|A| = -2$, 则 $|A^{-1}| =$ ()

A. 4

B. 1

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_s$ 均为 n 维向量, 下列结论不正确的是 ()

A. 若对于任意一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 有 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

- B. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则对于任意一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$
- C. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s
- D. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} a+x, & x \geq 0 \\ \frac{\tan 3x}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 设函数 $y = \arctan \sqrt{x}$, 则 $dy|_{x=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.
11. 设反常积分 $\int_a^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. 定积分 $\int_{-1}^1 \frac{2+\sin x}{1+x^2} dx$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
13. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1+x^2} dx = 1$, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 当 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & t \end{bmatrix}$ 的秩 $R(A) = 2$.

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$.

16. 设函数 $z = yf(y^2, xy)$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

17. 求 $\int (x^2 + \sin x) \cos x dx$.

18. 求定积分 $\int_{-2}^4 \left(x^2 - 3|x| + \frac{2}{|x|+1} \right) dx$.

19. 计算 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy$.

20. 求微分方程 $y'' + y' + 2y = x^2 - 3$ 的通解.

21. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

22. 问 t 取何值时, 齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + tx_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解? 并求出其通解.

四、证明题（本大题 10 分）

23. 证明: 当 $1 < x < 2$ 时, $4x \ln x > x^2 + 2x - 3$.

五、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

24. 已知一平面图形由抛物线 $y = x^2$ 和 $y = -x^2 + 8$ 围成.

- (1) 求此平面图形的面积;
- (2) 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

25. 设曲线 $y = f(x)$ 通过点 $(1, -11)$, 且曲线上任一点 $P(x, y)$ 处的切线在 y 轴上的截距为 $-2x^2$, 求:

(1) 曲线 $y = f(x)$ 的方程;

(2) 函数 $y = f(x)$ 的单调区间与极值;

(3) 函数 $y = f(x)$ 的凹凸区间与拐点.