

高等数学模拟试卷 (一)



一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 为等价无穷小, 则 ()

- A. $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ B. $a = 1, b = \frac{1}{6}$ C. $a = -1, b = -\frac{1}{6}$ D. $a = -1, b = \frac{1}{6}$

2. 下列各函数中在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的是 ()

A. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ B. $g(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ \cos x - 1 & x > 0 \end{cases}$

C. $\varphi(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ e & x = 0 \end{cases}$ D. $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$

3. 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} =$ ()

- A. $f'(a)$ B. $2f'(a)$ C. 0 D. $f'(2a)$

4. 曲线 $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ()

- A. 没有水平渐近线 B. 仅有水平渐近线
C. 仅有垂直渐近线 D. 既有水平渐近线又有垂直渐近线

5. 二次积分 $\int_{-1}^0 dy \int_{1-y}^2 f(x, y) dx$ 交换积分次序后得 ()

A. $\int_{-1}^0 dx \int_{1-x}^2 f(x, y) dy$ B. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$
C. $\int_1^2 dx \int_{1-x}^0 f(x, y) dy$ D. $\int_1^2 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$

6. 下列级数中收敛的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{n+1}}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n(n+1)}{3n^2+2n+1}}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+(-1)^n}{n^2}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

7. 设行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = k$, 则 $D_2 = \begin{vmatrix} 2a_1 & 6a_2 \\ b_1 & 3b_2 \end{vmatrix} = ()$

A. k

B. $2k$

C. $3k$

D. $6k$

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & y \end{pmatrix}$, 且 $2A = B$, 则 $()$

A. $x=1, y=1$

B. $x=1, y=2$

C. $x=2, y=1$

D. $x=2, y=2$

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{2x} = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 函数 $y = x \cdot 2^x$ 取得极小值的点为 $\underline{\hspace{2cm}}$

11. 定积分 $\int_{-2}^2 (x^3+1)\sqrt{4-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 设 $z = \ln \sqrt{x^2+y^2}$, 则 $dz|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} (x+1)^n$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}$

14. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $AB^T = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arcsin x}{x^2 \arcsin x}$

16. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$

17. 求不定积分 $\int x^2 \cos^2 x dx$

18. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{(3-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$

19. 设 $z = f(x+y, x^2-y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

20. 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$, 直线 $y = x$ 及 y 轴所围成的平面闭区域。

21. 求微分方程 $y'' + 3y' - 4y = (x+1)e^x$ 的通解。

22. 求向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (0, 2, 0, 1)^T$, $\alpha_4 = (-1, 0, -3, -1)^T$ 的秩及一个极大线性无关组。

四、证明题 (本大题共 10 分)

23. 证明不等式: 当 $x > 0$ 时, $x > \ln(1+x)$, 并进而证明当 $x > 0$ 时 $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 平面图形 D 由曲线 $y = \sqrt{x}$ 及其过点 $(0,1)$ 的切线与 y 轴所围成, 求:

(1) 切线的方程;

(2) 平面图形 D 的面积;

(3) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

25. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -5 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$ 的通解。