

## 江苏省普通高校专转本选拔考试

## 高等数学 模拟试卷 5

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。在下列每一小题中选出一个正确答案，请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑）

1. 当  $x \rightarrow 0$  时， $x$  是  $\sqrt{2+x^3} - \sqrt{2}$  的（ ）  
 A. 高阶无穷小      B. 低阶无穷小      C. 同阶但非等价无穷小      D. 等价无穷小
  
2. 若  $f(x) = \begin{cases} \cos ax, & x < 1, \\ 2a(x-1)^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$  在点  $x=1$  处连续，则  $a =$  （ ）  
 A.  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$       B.  $k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$       C.  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$       D.  $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$
  
3. 若函数  $f(x)$  的一个原函数为  $x \sin x$ ，则  $\int f''(x) dx =$  （ ）  
 A.  $x \sin x + C$       B.  $2 \cos x - x \sin x + C$   
 C.  $\sin x - x \cos x + C$       D.  $\sin x + x \cos x + C$
  
4. 设  $y = \cos[f(x)]$ ，其中  $f$  为二阶可导函数，则  $y'' =$  （ ）  
 A.  $f''(x) \sin[f(x)] + [f'(x)]^2 \cos[f(x)]$       B.  $-f''(x) \sin[f(x)] + [f'(x)]^2 \cos[f(x)]$   
 C.  $f''(x) \sin[f(x)] - [f'(x)]^2 \cos[f(x)]$       D.  $-f''(x) \sin[f(x)] - [f'(x)]^2 \cos[f(x)]$
  
5. 下列级数或反常积分收敛的是（ ）  
 A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+20}{202n+2022}$       B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$       C.  $\int_{\pi}^{+\infty} \sin x dx$       D.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$
  
6. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，则常数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ （ ）  
 A. 收敛且和不为零      B. 必发散  
 C. 收敛且和为零      D. 可能收敛也可能发散
  
7. 已知  $a$ ,  $b$  均是可逆矩阵，则由  $AXB = C$ ，得  $X =$  （ ）  
 A.  $CA^{-1}B^{-1}$       B.  $CB^{-1}A^{-1}$       C.  $A^{-1}B^{-1}C$       D.  $A^{-1}CB^{-1}$
  
8. 若向量组  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  线性无关，向量组  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  线性相关，则（ ）  
 A.  $\alpha$  必可由  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  线性表示      B.  $\beta$  必可由  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  线性表示  
 C.  $\delta$  必可由  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  线性表示      D.  $\delta$  必不可由  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  线性表示

**二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)**

9. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ , 则  $f(\ln 2) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 设函数  $f(x)$  可导,  $f(2) = 2$ ,  $f'(2) = \frac{1}{2}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4}{x^2 - 4} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 函数  $z = x^y$  的全微分  $dz = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 定积分  $\int_{-7}^7 \sqrt{49 - x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 已知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a^{3n} (x-1)^n$  的收敛半径  $R = 27$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 设行列式  $D = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ , 则  $A_{31} + A_{32} + A_{33} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)**

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin^3 x}{x^2 - \sin x^2}$ .

16. 设  $z = f(x-y, xy)$ , 其中函数  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

17. 计算不定积分  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ .

18. 求定积分  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}} dx$

19. 计算二重积分  $\iint_D xy dxdy$ , 其中  $D$  为由曲线  $y = \sqrt{4 - x^2}$  与直线  $y = x$  及直线  $y = 2$  所围成的平面闭区域.

20.求微分方程  $2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$  满足初始条件  $y(0)=1, y'(0)=0$  的特解.

21.用初等行变换求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$  的逆矩阵.

22.求  $\lambda$  取何值时, 非齐次线性方程组  $\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = \lambda, \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3 \end{cases}$  有唯一解; 无解; 有无穷多解, 并

求出通解.

**四、证明题（本大题 10 分）**

23. 证明: 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $x < \frac{1}{2}x^2 + \sin x$ .

**五、综合题（本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分）**

24. 已知由曲线  $y = \sqrt{x}$ , 直线  $x + y = 6$  以及  $x$  轴所围成的平面图形为  $D$ .

- (1) 求  $D$  的面积;
- (2) 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

25. 已知曲线  $f(x) = x^2 + ax + b \ln x$  的拐点为  $(\sqrt{2}, 2 - 6\sqrt{2} + 2\ln 2)$ .

(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 求  $f(x)$  的单调区间和极值;

(3) 令  $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$ , 求  $g(x)$  的水平渐近线和垂直渐近线.