

江苏省 2021 年普通高校专转本统一考试

高等数学 试卷

一、选择题

1. 将 $x \rightarrow 0$ 的无穷小 $\alpha(x) = 1 - \cos x^2$, $\beta(x) = e^{x^2} - 1$, $\gamma(x) = x \tan^2 x$ 排列起来, 使排在后面的一个比前面一个的高阶无穷小, 则正确的排序是 ()

- A. $\alpha(x), \gamma(x), \beta(x)$ B. $\beta(x), \gamma(x), \alpha(x)$
C. $\beta(x), \alpha(x), \gamma(x)$ D. $\gamma(x), \beta(x), \alpha(x)$

2. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{e^x} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x^a} & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处连续, 则常数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

3. 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-2x)}{x} =$ ()

- A. -4 B. -1 C. 1 D. 4

4. 若函数 $f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则常数 a, b 的值分别为 ()

- A. $-\frac{1}{2}, 1$ B. $\frac{1}{2}, 1$ C. -2, 0 D. 0, 1

5. 设 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$, 其中 f 函数具有二阶导数, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ ()

- A. $\frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right)$ B. $-\frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right)$
C. $\frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right)$ D. $-\frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right)$

6. 设常数 $p \in (0, 1)$, 则反常积分 $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, $I_2 = \int_1^{+\infty} p^x dx$ 的敛散性为 ()

- A. I_1 与 I_2 都收敛 B. I_1 与 I_2 都发散

C. I_1 收敛, I_2 发散

D. I_1 发散, I_2 收敛

7. 下面级数发散的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$

8. 二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$ 在极坐标系下可表示为 ()

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(\rho^2) \rho d\rho$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^1 f(\rho^2) \rho d\rho$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sin\theta}^{1-\cos\theta} f(\rho^2) \rho d\rho$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} f(\rho^2) \rho d\rho$

二、填空题

9. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{k}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$, 则常数 $k =$ _____

10. 已知 $\vec{a} = (2, -3, 4)$, $\vec{b} = (2, 2, -1)$, 则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) =$ _____ (不在新大纲范围内)

内)

11. 设函数 $f(x) = \frac{x^{2021} - 1}{x}$, 则 $f^{(2021)}(1) =$ _____

12. 设曲线 $\begin{cases} x = 3 + t + t^2 \\ y = 12 + 10t - 2t^2 \end{cases}$ 在点 p 处的切线方程为 $y = 2x + 10$, 则切点 p 的坐标

_____ 专注江苏专转本考试培训

13. 设 $\ln(1+x^2)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_0^1 f'(x) dx =$ _____

14. 设常数 $a > 0$, 若幂级数 $\sum \frac{(x-1)^n}{a^n}$ 的收敛区间为 $(-1, 3)$, 则 $a =$ _____

三、计算题

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \arctan x} \right)$

16. 求不定积分 $\int x \cos(2x-3) dx$

17. 求定积分 $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

18. 已知直线 L 在平面 $\Pi_1: x+y+z-1=0$, 且通过平面 Π_1 与 x 轴的交点, 又与平面 $\Pi_2: x+2y+3z+6=0$ 平行, 求直线 L 的方程 (不在大纲范围内)

19. 设函数 $z = y^3 f\left(\frac{x}{y}, e^x\right)$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

20. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z^3 - 3x^2z - 6yz + 3x - 3y = 1$ 所确定的二元函数, 求 $dz \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$

21. 计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2$ ($x \leq 0$) 与直线 $y = x$ 及 $y = 1$ 所围成的平面闭区域

22. 设函数 $f(x)$ 是微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 1$ 的特解, 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ 的通解

四、证明题

23. 证明: 当 $x > 0$ 时 $2 - \frac{e}{x} \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$

专注江苏专转本考试培训

五、综合题

24. 设 D 是由曲线 $y = 1 - ax^2$, $y = \frac{1}{a}x^2$ ($x \geq 0, a > 0$) 与 y 轴围成的平面图形:

(1) 求 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 $V_{(a)}$;

(2) 问 a 为何值时, $V_{(a)}$ 取得最大值? 并求此时 D 的面积

25. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + \int_0^x t f(t) dt = 1$, 求:

(1) 函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间与拐点;

(3)曲线 $y = f(x)$ 的渐近线。



扫码查看答案解析



同方专转本

专注江苏专转本考试培训