

江苏省普通高校专转本选拔考试

高等数学 模拟试卷 5

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在下列每一小题中选出一个正确答案, 请在答题卡上将所选项前的字母标号涂黑)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, x 是 $\sqrt{2+x^3} - \sqrt{2}$ 的 ()

- A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小 C. 同阶但非等价无穷小 D. 等价无穷小

2. 若 $f(x) = \begin{cases} \cos ax, & x < 1, \\ 2a(x-1)^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续, 则 $a =$ ()

- A. $2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ B. $k\pi, k \in \mathbf{Z}$ C. $2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ D. $k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

3. 若函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $x \sin x$, 则 $\int f''(x) dx =$ ()

- A. $x \sin x + C$ B. $2 \cos x - x \sin x + C$
C. $\sin x - x \cos x + C$ D. $\sin x + x \cos x + C$

4. 设 $y = \cos[f(x)]$, 其中 f 为二阶可导函数, 则 $y'' =$ ()

- A. $f''(x) \sin[f(x)] + [f'(x)]^2 \cos[f(x)]$ B. $-f''(x) \sin[f(x)] + [f'(x)]^2 \cos[f(x)]$
C. $f''(x) \sin[f(x)] - [f'(x)]^2 \cos[f(x)]$ D. $-f''(x) \sin[f(x)] - [f'(x)]^2 \cos[f(x)]$

5. 下列级数或反常积分收敛的是 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+20}{202n+2022}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ C. $\int_{\pi}^{+\infty} \sin x dx$ D. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$

6. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ()

- A. 收敛且和不为零 B. 必发散
C. 收敛且和为零 D. 可能收敛也可能发散

7. 已知 a, b 均是可逆矩阵, 则由 $AXB = C$, 得 $X =$ ()

- A. $CA^{-1}B^{-1}$ B. $CB^{-1}A^{-1}$ C. $A^{-1}B^{-1}C$ D. $A^{-1}CB^{-1}$

8. 若向量组 α, β, γ 线性无关, 向量组 α, β, δ 线性相关, 则 ()

- A. α 必可由 β, γ, δ 线性表示 B. β 必可由 α, γ, δ 线性表示
C. δ 必可由 α, β, γ 线性表示 D. δ 必不可由 α, β, γ 线性表示

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, 则 $f(\ln 2) =$ _____.

10. 设函数 $f(x)$ 可导, $f(2) = 2$, $f'(2) = \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4}{x^2 - 4} =$ _____.

11. 函数 $z = x^y$ 的全微分 $dz =$ _____.

12. 定积分 $\int_{-7}^7 \sqrt{49 - x^2} dx =$ _____.

13. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a^{3n} (x-1)^n$ 的收敛半径 $R = 27$, 则 $a =$ _____.

14. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix}$, 则 $A_{31} + A_{32} + A_{33} =$ _____.

三、计算题(本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin^3 x}{x^2 - \sin x^2}$.

16. 设 $z = f(x - y, xy)$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

17. 计算不定积分 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

18. 求定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}} dx$

19. 计算二重积分 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 为由曲线 $y = \sqrt{4-x^2}$ 与直线 $y = x$ 及直线 $y = 2$ 所围成的平面闭区

域.

20. 求微分方程 $2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ 满足初始条件 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 的特解.

21. 用初等行变换求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

22. 求 λ 取何值时, 非齐次线性方程组
$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = \lambda, \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3 \end{cases}$$
 有唯一解; 无解; 有无穷多解, 并

求出通解.

四、证明题（本大题 10 分）

23. 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $x < \frac{1}{2}x^2 + \sin x$.

五、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

24. 已知由曲线 $y = \sqrt{x}$, 直线 $x + y = 6$ 以及 x 轴所围成的平面图形为 D .

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

25. 已知曲线 $f(x) = x^2 + ax + b\ln x$ 的拐点为 $(\sqrt{2}, 2 - 6\sqrt{2} + 2\ln 2)$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(3) 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$, 求 $g(x)$ 的水平渐近线和垂直渐近线.