МГВРК

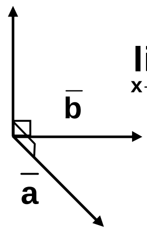
МАТЕМАТИКА

в примерах и задачах

Часть 3

$$y'_x = \frac{y'(t)}{\varphi'(t)}$$

$\bar{a} \times \bar{b}$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\frac{x - x_0}{2} = \frac{y - y_0}{3} = \frac{z - z_0}{4}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$y = ax + b$$

под общ. ред.
Л. И. Майсеня

МИНСК 2007

МАТЕМАТИКА в примерах и задачах

3

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ВЫСШИЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

МАТЕМАТИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие
для учащихся колледжей

В шести частях

Под общей редакцией Л. И. Майсеня

ЧАСТЬ 3

Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия в пространстве. Предел и непрерывность функции. Дифференциальное исчисление. Функции многих переменных

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего образования, и учащихся учреждений, обеспечивающих получение среднего специального образования по специальностям электротехники, радиотехники и информатики

МИНСК 2007

УДК 51
ББК 22.1я7
М34

Рекомендовано к изданию кафедрой математики и Научно-методическим советом Учреждения образования «Минский государственный высший радиотехнический колледж» (протокол № 3 от 04.11.2007 г.)

А в т о р ы:
Л. И. Майсеня, М. А. Калугина,
Е. В. Уласевич, Н. В. Михайлова

Р е ц е н з е н т ы:
А. В. Метельский, д-р физ.-мат. наук, профессор БНТУ,
кафедра высшей математики БГУИР

М34 **Математика** в примерах и задачах : учеб. пособие для учащихся колледжей : в 6 ч. / под общ. ред. Л. И. Майсеня. – Мн. : МГВРК, 2006 – .
ISBN 978-985-6754-70-1
Ч. 3 : Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия в пространстве. Предел и непрерывность функции. Дифференциальное исчисление. Функции многих переменных / Л. И. Майсеня, М. А. Калугина, Е. В. Уласевич, Н. В. Михайлова. – 2007. – 282 с.
ISBN 978-985-6851-27-1

Пособие написано с целью реализации непрерывного образования в системе учебных заведений колледж–университет. Разработано в соответствии с типовыми программами дисциплин «Математика» для 10-х, 11-х классов средней школы и «Высшая математика» для специальностей электро-, радиотехники и информатики. Содержатся необходимые теоретические сведения, примеры с подробными решениями и задания 3-х уровней сложности для самостоятельного решения.

Может быть также использовано для подготовки учащихся к централизованному тестированию по математике.

УДК 51
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-6851-27-1 (ч. 3)
ISBN 978-985-6754-70-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Особенностью образовательной системы Республики Беларусь является становление и развитие учебных заведений различного типа, в том числе колледжей и высших колледжей. В условиях многоуровневого образования в системе учебных заведений колледж–университет актуальна реализация принципов непрерывности и преемственности в обучении.

Предлагаемое учебное пособие «Математика в примерах и задачах» в 6-ти частях призвано обеспечить процесс изучения математики в высших колледжах и колледжах технического профиля. Оно может быть использовано учащимися на практических занятиях, а также при самостоятельном изучении математики.

При создании настоящего пособия авторы ставили перед собой несколько целей: во-первых, дать значительное количество задач (типовых и оригинальных), которые бы достаточно полно отображали суть основных математических понятий; во-вторых, обеспечить необходимой теоретической информацией для их решений; в-третьих, по каждой теме привести решение основных типов задач; в-четвертых, предлагаемый для решения набор задач распределить по трем уровням сложности. Все эти цели и определили структуру учебного пособия, которое делится на главы, главы – на параграфы. В начале каждого параграфа содержится необходимый справочный материал, затем – решение нескольких задач и набор заданий трех уровней сложности.

Предлагаемая структура учебного пособия, по мнению авторов, делает возможным самостоятельное изучение математики. Его использование позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении – каждый учащийся может решать задания доступного ему уровня сложности.

Пособие разработано и прошло апробацию в УО «Минский государственный высший радиотехнический колледж» (МГВРК) в процессе обучения учащихся после базовой школы.

Характерной особенностью методического подхода к изучению математики в МГВРК является построение интегрированного курса математических дисциплин. Этим объясняется то обстоятельство, что определенные темы высшей математики введены в контекст элементарной математики. Поскольку на практике широко реализуется непрерывное образование в системе учебных заведений колледж–университет (в том числе МГВРК интегрирован с Белорусским государственным университетом информатики и радиоэлектроники), то при разработке данного учебного пособия авторы использовали (как и в реальном учебном процессе) в качестве типовых программу изучения математики в средних школах Беларуси и программу изучения высшей математики для высших учебных заведений по специальностям электро-, радиотехники и информатики.

Таким образом реализуются основы непрерывного продолжения обучения в университете. Кроме того, предлагаемое учебное пособие может быть использовано в колледжах при изучении математики по различным базовым и рабочим программам – менее или более полным.

«Математика в примерах и задачах. Часть 3» является непосредственным продолжением учебного пособия «Математика в примерах и задачах. Части 1–2». В этих изданиях принята единая нумерация глав. Предлагаемое пособие (третья часть) состоит из шести глав (гл. 13–18). В отношении авторства отметим, что они подготовлены следующим образом:

М. А. Калугина – гл. 13 «Линейная алгебра», гл. 14 «Векторная алгебра», гл. 15 «Аналитическая геометрия в пространстве»;

Е. В. Уласевич – гл. 16 «Предел и непрерывность функции», гл. 17 «Дифференциальное исчисление»;

Н. В. Михайлова – гл. 18 «Функции многих переменных».

Научно-методическое редактирование осуществила Л. И. Майсеня, она является соавтором всего пособия.

Авторы благодарны рецензентам учебного пособия – доктору физ.-мат. наук, профессору А. В. Метельскому и сотрудникам кафедры высшей математики БГУИР, особенно зав. кафедрой, доктору физ.-мат. наук В. В. Цегельнику и профессору А. А. Карпуку, за очень внимательное прочтение рукописи и ряд ценных замечаний, устранение которых улучшило наше издание.

Надеемся, что предлагаемое издание будет содействовать активизации мыслительной деятельности учащихся и повышению эффективности учебного процесса при изучении математики.

13. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

13.1. Матрицы и операции над ними

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из элементов некоторого множества. Горизонтальные ряды такой таблицы называются ***строками*** матрицы, а вертикальные – ее ***столбцами***. Матрицы обозначают $A, B, C, X\ldots$. Запись a_{ij} используют для указания местоположения элемента матрицы (i – номер строки, j – номер столбца). Числовую матрицу размеров $m\times n$ (т. е. состоящую из m строк и n столбцов чисел) в общем случае записывают в виде

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

или в более компактной форме $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $i=\overline{1,\ m}$, $j=\overline{1,\ n}$.

Ее обозначают также $\grave{A}_{m\times n}$.

Если $m = n$ матрицу называют ***квадратной порядка n*** и обычно обозначают A_n. Элементы a_{ii}, $i=\overline{1,\ n}$, $n\in\mathbf{N}$, такой матрицы образуют ее ***главную диагональ***.

Квадратная матрица вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (13.1)$$

где $a_{ij}\neq 0$, $i=\overline{1,\ n}$, называется ***диагональной***. Если $a_{ii}=1$ для любого $i=\overline{1,\ n}$, то матрица (13.1) называется ***единичной*** и обозначается E_n.

Верхней и ***нижней треугольными матрицами*** называются квадратные матрицы вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ соответственно.

Трапециевидной матрицей называется матрица вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{kk} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

где числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{kk}$ отличны от нуля.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю. Обозначают такую матрицу буквой O.

Две матрицы одинакового размера

$$A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right] \text{ и } B_{m\times n}=\left[b_{ij}\right] \qquad (13.2)$$

называются равными, если $a_{ij}=b_{ij}$ для всех $i=\overline{1,\ m}$, $j=\overline{1,\ n}$.

Суммой матриц (13.2) называется матрица $A + B$ размеров $m\times n$, состоящая из элементов $\tilde{n}_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, где $i=\overline{1,\ m}$, $j=\overline{1,\ n}$.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на число α называется матрица $a\,A_{m\times n}=[a\,a_{ij}]$.

Разностью матриц (13.2) называется матрица $A - B = A + (-1)B$.

Противоположной к B называется матрица $-B$, такая что $-B=(-1)B$.

Свойства операций сложения матриц и умножения на число:

1) $A+B=B+A$;
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3) $A + 0 = A$;
4) $A + (-A) = 0$;
5) $1\cdot A = A$;

6) $a\,(b\,A) = b\,(a\,A) = (a\,b\,)A,$ ãäå a, $b \in \mathbf{R}$;

7) $(a + b\,)A = a\,A + b\,A$;

8) $a\,(A + B) = a\,A + a\,B,$ а матрицы A, B и C – одинакового размера.

Для матриц A и B может быть введена операция умножения $A{\cdot}B$ при условии, что матрицы *согласованы*, т. е. количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B.

Произведением матрицы $A_{l\times m}$ на матрицу $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{l\times n} = A\cdot B,$ элементы которой $\tilde{n}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj}$, $i = \overline{1,\ l}$, $j = \overline{1,\ n}$.

Для получения элемента c_{ij} матрицы C умножают последовательно каждый элемент i-й строки матрицы A на соответствующий элемент j-го столбца матрицы B и находят сумму этих произведений.

Свойства операции умножения матриц

1) $A_n \cdot E_n = E_n \cdot A_n = A_n$;

2) $A_n \cdot O_n = O_n \cdot A_n = O_n$;

3) $(AB)C = A(BC)$;

4) $a\,(AB) = (a\,A)B$;

5) $(A + B)C = AC + BC$;

6) $A(B + C) = AB + AC.$

В общем случае из существования AB не следует существование BA. Даже если оба эти произведения определены, они не всегда равны. Матрицы, для которых $AB = BA$, называются ***коммутативными*** или ***перестановочными***.

Пусть A – квадратная матрица. Тогда k-я степень $(k \in \mathbf{N})$ матрицы A определяется равенством $A^k = \underbrace{A\cdot A \cdots A}_{k\ \text{ðàç}}$. По определению принимают $A^0 = E$ при условии $A \neq 0$.

Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой столбцов строками с теми же номерами, называется ***транспонированной*** к матрице A, т. е. $A^T = \left[a_{ij}\right]^T_{m\times n} = \left[a_{ji}\right]_{n\times m}$.

Свойства операции транспонирования матриц

1) $(A^T)^T = A$;

2) $(a\,A)^T = a\,A^T$, $a \in \mathbf{R}$;

3) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

4) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Если для квадратной матрицы A выполняется соотношение $A = A^T$, то матрица A называется ***симметрической*** матрицей, а если $A = -A^T$, – то ***кососимметрической***.

Элементарными преобразованиями над строками матрицы A называют следующие операции:

1) перестановку строк;

2) умножение строки на ненулевое число;

3) прибавление к элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на ненулевое число.

Говорят, что матрица A эквивалентна матрице B (пишут: $A \sim B$), если матрица B получена из A при помощи элементарных преобразований строк.

Пример 1. Найти $2A - 3B$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Прежде всего следует заметить, что матрицы A и B имеют одинаковый размер 2×3. Поэтому по определению линейных операций над матрицами имеем:

$$2A - 3B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot2 & 2\cdot4 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot0 & 2\cdot3 \end{bmatrix} -$$

$$-\begin{bmatrix} 3\cdot3 & 3\cdot(-8) & 3\cdot4 \\ 3\cdot1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -24 & 12 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2-9 & 4+24 & 8-12 \\ -2-3 & 0+6 & 6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 28 & -4 \\ -5 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Если возможно, вычислить соответствующие произведения и проверить справедливость равенства $AB = BA$ для следующих пар матриц:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$; 4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$;

5) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$;

Решение. 1) Матрицы A и B согласованные, так как матрица A имеет размер 2×2, а матрица B – размер 2×3, т. е. количество столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B.

Значит, $AB=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot 1-2\cdot 2 & 1\cdot 0-2\cdot 4 & 1\cdot(-3)-2\cdot 1\\ 4\cdot 1+3\cdot 2 & 4\cdot 0+3\cdot 4 & 4\cdot(-3)+3\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -8 & -5\\ 10 & 12 & -9\end{bmatrix}.$$

Умножение матрицы B на матрицу A невозможно, так как матрицы не согласованы (число 3 столбцов матрицы B не равно числу 2 строк матрицы A).

2) Произведения AB и BA могут быть найдены, так как в обоих случаях матрицы согласованы:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 3+3\cdot(-1) & 1\cdot(-3)+3\cdot 1\\ 3\cdot 3+9\cdot(-1) & 3\cdot(-3)+9\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$BA=\begin{bmatrix}3 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 1-3\cdot 3 & 3\cdot 3-3\cdot 9\\ -1\cdot 1+1\cdot 3 & -1\cdot 3+1\cdot 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -18\\ 2 & 6\end{bmatrix}.$$

Приходим к выводу, что $AB\neq B\grave{A}$.

Приведенный пример иллюстрирует не только отсутствие свойства коммутативности операции умножения для многих согласованных для этого действия матриц, но и показывает, что при умножении двух ненулевых матриц может быть получена нулевая.

3) Матрицы A и B согласованы для умножения, но произведения AB и BA имеют разные размеры и элементы:

$$\grave{A}\hat{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 2-1\cdot 1 & 1\cdot 0-1\cdot(-5) & 1\cdot 4-1\cdot 3\\ 0\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot(-5) & 0\cdot 4+1\cdot 3\\ 2\cdot 2+4\cdot 1 & 2\cdot 0+4\cdot(-5) & 2\cdot 4+4\cdot 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 8 & -9 & 20\end{bmatrix};$$

$$\hat{A}\grave{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & -5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+0\cdot 0+4\cdot 2 & 2\cdot(-1)+0\cdot 1+4\cdot 4\\ 1\cdot 1-5\cdot 0+3\cdot 2 & 1\cdot(-1)-5\cdot 1+3\cdot 4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 14\\ 7 & 6\end{bmatrix}.$$

AB и BA – квадратные матрицы размеров 3×3 и 2×2 соответственно, $AB\neq B\grave{A}$.

$$4)\ AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 18\end{bmatrix};$$

$$BA=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 18\end{bmatrix}.$$

Приходим к заключению, что $AB = BA$.

Очевидно, что условие будет соблюдаться для любых диагональных матриц одного размера.

5) Матрицы A и B согласованы для умножения:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot a+2\cdot c & 1\cdot b+2\cdot d\\ -1\cdot a+1\cdot c & -1\cdot b+1\cdot d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+2c & b+2d\\ -a+c & -b+d\end{bmatrix};$$

$$\hat{A}\grave{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ \tilde{n} & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\cdot 1+b\cdot(-1) & a\cdot 2+b\cdot 1\\ c\cdot 1+d\cdot(-1) & c\cdot 2+d\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b & 2a+b\\ c-d & 2c+d\end{bmatrix}.$$

$AB = BA$ при соблюдении условий: $a+2c=a-b$, $b+2d=2a+b$, $c-a=c-d$, $d-b=2c+d$, т. е. при $a=d$, $c=-b/2$. Таким образом, матрица A является коммутативной с матрицей $\begin{bmatrix}a & b\\ -b/2 & a\end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix}a & -2c\\ c & \grave{a}\end{bmatrix}$, где a, b, c – любые действительные числа.

Пример 3. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию $2A^T+\left(\frac{1}{3}\right)X=E$, если известна матрица $\grave{A}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$.

Решение. Запишем равенство $2A^T+\left(\frac{1}{3}\right)X=E$ в виде $3\left(2A^T+\left(\frac{1}{3}\right)X\right)=3E$, а затем $6A^T+X=3E$ и, наконец, $X=3E-6A^T=3(T-2A^T)$. Поскольку $A^T=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, то

$$X=3\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}4 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}\right)=3\begin{bmatrix}1-2\cdot 4 & 0-2\cdot 1\\ 0-2\cdot(-2) & 1-2\cdot 3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}-7 & -2\\ 4 & -5\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-21 & -6\\ 12 & -15\end{bmatrix}.$$

Пример 4. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=x^2-2x+2,\quad A=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}.$

Решение. По условию задачи

$$f(A)=A^2-2A+2E=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}4&0\\5&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0\\2&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\3&5\end{bmatrix}.$$

Пример 5. Привести матрицу A к треугольному виду с помощью элементарных преобразований строк, если

$$A=\begin{bmatrix}2&7&4\\3&9&6\\1&5&3\end{bmatrix}.$$

Решение. Поменяв строки местами, получим матрицу, эквивалентную исходной:

$$\begin{bmatrix}1&5&3\\2&7&4\\3&9&6\end{bmatrix}.$$

Затем запишем вместо второй строки сумму первой, умноженной на (–2), и второй, а вместо третьей – результат сложения первой, умноженной на (–3), и третьей:

$$\begin{bmatrix}1&5&3\\0&-3&-2\\0&-6&-3\end{bmatrix}.$$

Осталось прибавить к третьей строке вторую, умноженную на (–2):

$$\begin{bmatrix}1&5&3\\0&-3&-2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

В результате получена треугольная матрица, эквивалентная матрице A.

Эти преобразования (без комментария) записывают в виде

$$A=\begin{bmatrix}2&7&4\\3&9&6\\1&5&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&5&3\\2&7&4\\3&9&6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&5&3\\0&-3&-2\\0&-6&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&5&3\\0&-3&-2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите линейную комбинацию $3A + 2B$ матриц A и B, если:

1) $A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&1&-4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&-2\\3&4&1\end{bmatrix};$

2) $A=\begin{bmatrix}2&3\\0&-1\\4&-2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&-2\\3&2\\1&-3\end{bmatrix};$

3) $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\-1&3&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&0&2\\4&2&1\\7&-1&4\end{bmatrix}.$

1.2. Вычислите:

1) $\begin{bmatrix}1&0&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix};$

2) $\begin{bmatrix}1&-2&5&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&3\\1&0\\2&4\\1&-5\end{bmatrix};$

3) $\begin{bmatrix}3&-2\\5&-4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix};$

4) $\begin{bmatrix}1&0&2\\4&3&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-2&3\\3&1&2\\-1&0&1\end{bmatrix}.$

1.3. Найдите значения $f(A)$ и $f(B)$ функций $f(x)$, если:

1) $f(x)=3x^2-4,\quad A=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&-1&3\\2&3&1\\-2&1&0\end{bmatrix};$

2) $f(x)=x^2-5x+10,\quad A=\begin{bmatrix}4&-3\\2&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&0&1\\-1&3&2\end{bmatrix}.$

1.4. Приведите матрицу к трапециевидной или треугольной форме:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

1.5. Пусть $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Найдите $B^T \cdot A$.

II уровень

2.1. Найдите сумму, разность и произведение матриц A и B, если:

1) $A = \begin{bmatrix} \cos j & -\sin j \\ \sin j & \cos j \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos j & \sin j \\ -\sin j & \cos j \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} 2-i & 4+3i \\ 3 & 5i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} i & 2+3i \\ 1-i & 2+5i \end{bmatrix}$;

3) $A = \begin{bmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2+i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & i & 0 \\ -i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$.

2.2. Выполните действия:

1) $(1+i) \cdot \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} + (1-i) \cdot \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.3. Вычислите n-ю степень матрицы, $n \in \mathbf{N}$:

1) $\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}^n$; 2) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^n$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$, $a \in \mathbf{R}$.

2.4. Найдите матрицу X из условия

$$\left(\frac{1}{2}\right) X + 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 2E.$$

2.5. Найдите $\left(2A^T + 3B\right)C$, если:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 03 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

2.6. Найдите значение функции *f(A)*, если:

1) $f(x) = (x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)$, åñëè $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

2) $f(x) = (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)$, åñëè À $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

III уровень

3.1. Возведите матрицу в степень:

1) $\begin{bmatrix} \cos j & -\sin j \\ \sin j & \cos j \end{bmatrix}^n$, $n \in \mathbf{N}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^n$, $n = 3$;

3) $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}^n$; 4) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^n$.

3.2. Найдите матрицы, коммутативные (перестановочные) с заданной:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3.3. Найдите матрицы второго порядка, квадрат которых равен:
1) нулевой матрице; 2) единичной матрице.

3.4. Определите условие, при котором справедливо равенство:
1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; 2) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

3.5. Для матриц A и B докажите равенство:
1) $\left(\grave{A}^{\grave{O}}\right)^{\grave{O}} = \grave{A}$; 2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3) $(kA)^T = kA^T$, где k – число; 4) $(AB)^T = B^T A^T$.

13.2. Определители, их свойства и вычисление

Каждой квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие единственное число, которое вычисляется по определенному правилу. Это число называется ***определителем*** матрицы A и обозначается $|A|$ или $\det A$, или $\Delta(A)$, Δ_A. Порядок матрицы A является и порядком ее определителя. Определители порядка 1–3 вводятся соответственно равенствами:

$$|a_{11}| = a_{11},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,|a_{22}| - a_{12}\,|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \tag{13.3}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij}, где $i, j = \overline{1, n}$, называется определитель $(n–1)$-го порядка, который состоит из элементов матрицы, полученной из данной путем «вычеркивания» i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением этого же элемента называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Определитель порядка n, где $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$, определяется как число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{ij}.$$

Последнее равенство называют ***разложением определителя по элементам первой строки***. Оно есть обобщение равенств (13.3).

Свойства определителей

1) $|A| = |A^T|$;

2) $|AB| = |A| \cdot |B|$;

3) $|A^n| = |A|^n$;

4) общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя;

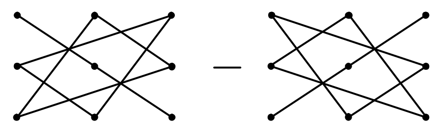
5) перестановка двух строк (столбцов) меняет знак определителя на противоположный;

6) $|A| = 0$, если выполняется одно из следующих условий:
- в определителе есть нулевая строка (нулевой столбец);
- в определителе есть пропорциональные строки (столбцы);
- в определителе есть строки (столбцы), являющиеся линейной комбинацией соответствующих элементов других строк (столбцов);

7) если к элементам одной строки (столбца) определителя прибавить линейную комбинацию соответствующих элементов других строк (столбцов), то значение определителя не изменится.

Основные методы вычисления определителей

1. Для определителей 3-го порядка используют ***правило треугольников***, которое схематично можно изобразить следующим образом:



Линии соединяют по три элемента, которые умножаются, а затем произведения складываются.

2. Определитель порядка n может быть вычислен ***разложением по любой строке (столбцу)***:

$$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i, j=\overline{1, n}.$$

3. ***Метод эффективного понижения порядка определителя***: используя свойства определителя, его преобразуют к такому виду, чтобы все элементы некоторой строки (столбца) определителя, кроме одного, стали нулевыми, затем вычисляют определитель разложением по этой строке (столбцу).

4. ***Метод приведения к треугольному*** или ***диагональному виду*** с использованием свойств определителя, когда определитель равен произведению диагональных элементов.

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ различными способами.

Решение. *1-й способ*. Используем правило треугольников:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot4\cdot5+0\cdot1\cdot3+(-1)\cdot2\cdot2-\big((-1)\cdot4\cdot3+0\cdot2\cdot5+1\cdot1\cdot2\big)=$$

$$=20-4-(-12+2)=26.$$

2-й способ. Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=(20-2)+0-(4-12)=26.$$

3-й способ. Занулим элементы первой строки, т. е. используем метод эффективного понижения порядка. Для этого прибавим к элементам 3-го столбца элементы 1-го столбца. Затем разложим определитель по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=32-6=26.$$

4-й способ. Используя свойства определителя, приведем его к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 13 \end{vmatrix}=26.$$

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Используем метод эффективного понижения порядка. Для этого из первой строки вычтем, а ко второй прибавим удвоенную третью строку. Полученный определитель разложим по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -7 & -5 & -16 \\ 0 & 12 & 12 & 17 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -7 & -5 & -16 \\ 12 & 12 & 17 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot\Delta.$$

Далее, ко второму столбцу определителя Δ прибавим третий столбец, после чего преобразуем следующим образом: прибавим к первому и третьему столбцам второй столбец, умноженный соответственно на –4 и на –6. В результате получим:

$$2\cdot\Delta=2\cdot\begin{vmatrix} -7 & -21 & -16 \\ 12 & 29 & 17 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 77 & -21 & 110 \\ -104 & 29 & -157 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 77 & 110 \\ -104 & -157 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 77 & 110 \\ 104 & 157 \end{vmatrix}=2\cdot(77\cdot157-110\cdot104)=1298.$$

Пример 3. Выяснить, при каких условиях определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$ не равен нулю.

Решение. Разложим определитель по 3-й строке:

$$\Delta=x_1^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}-x_2^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix}+x_3^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_1^2(x_3-x_2)-$$

$$-x_2^2(x_3-x_1)+x_3^2(x_2-x_1)=x_1^2(x_3-x_2)-x_2^2(x_3-x_2+x_2-x_1)+$$

$$+x_3^2(x_2-x_1)=(x_3-x_2)(x_1^2-x_2^2)+(x_2-x_1)(x_3^2-x_2^2)=$$
$$=(x_3-x_2)(x_1-x_2)(x_1+x_2)-(x_1-x_2)(x_3-x_2)(x_3+x_2)=$$
$$=(x_3-x_2)(x_1-x_2)(x_1+x_2-x_3-x_2)=(x_3-x_2)(x_1-x_2)(x_1-x_3).$$

Значит, $\Delta \ne 0$, при $x_3 \ne x_2$, $x_1 \ne x_2$, $x_1 \ne x_3$.

Пример 4. Доказать равенство

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & 2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 0 & 0 & \dots & n\end{vmatrix}=-n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right).$$

Решение. Для доказательства используем метод математической индукции. Проверим справедливость утверждения при n = 1 и 2.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0-1=-1=-1!\cdot 1.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 1\end{vmatrix}=2\left(-1-\frac{1}{2}\right)=-1\cdot 2\left(1+\frac{1}{2}\right)=-2!\left(1+\frac{1}{2}\right).$$

Пусть равенство выполняется при $n = k$, где $k > 2$, т. е. $\Delta_k=-k!\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)$. Докажем истинность при $n = k + 1$.

$$\Delta_{k+1}=(k+1)\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 0 & 0 & \dots & k & 0\\ \frac{1}{k+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(k+1)\left(1\cdot(-1)^{k+2+k+2}\Delta_k+\frac{1}{k+1}(-1)^{k+2+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & k & 0\end{vmatrix}\right)=$$

$$=(k+1)\Delta_k+(k+1)\frac{1}{k+1}(-1)^{k+3}\cdot 1\cdot(-1)^{k+1+1}\begin{vmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & k\end{vmatrix}=$$

$$=(k+1)\Delta_k-k!=(k+1)(-k!)\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)-\frac{k!(k+1)}{k+1}=$$

$$=-(k+1)!\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)-(k+1)!\frac{1}{k+1}=-(k+1)!\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right).$$

Утверждение доказано методом математической индукции.

Пример 5. Вычислить определитель:

1) $\begin{vmatrix}2-i & 3\left(\cos\frac{p}{4}+i\sin\frac{p}{4}\right)\\ 4e^{i\frac{p}{2}} & 2i-5\end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & a\\ 1 & 1 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ a^2 & a & 0 & 1\end{vmatrix}$, где $a=\cos\frac{2p}{3}+i\sin\frac{2p}{3}$.

Решение. 1) Перейдем к алгебраической форме записи всех элементов заданной матрицы: $3\left(\cos\frac{p}{4}+i\sin\frac{p}{4}\right)=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $4e^{i\frac{p}{2}}=4i$.

Тогда

$$\begin{vmatrix}2-i & 3(\cos\frac{p}{4}+i\sin\frac{p}{4})\\ 4e^{i\frac{p}{2}} & 2i-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-i & 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 4i & 2i-5\end{vmatrix}=(2-i)(2i-5)-$$

$$-12i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4i-10-2i^2+5i-6i\sqrt{2}-6i^2\sqrt{2}=(9-6\sqrt{2})i-8+6\sqrt{2}.$$

2) Вычислим определитель разложением по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & a\\ 1 & 1 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ a^2 & a & 0 & 1\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 1 & a^2\\ a^2 & a & 1\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 0 & a^2-a\\ a^2 & a & 1\end{vmatrix}=$$

$$= -5a(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} = -5a^2(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -5a^2(a-1)(1-a) =$$

$$= 5a^2(a-1)(a-1) = 5a^2(a-1)^2 = \Delta.$$

Поскольку $a = \cos\frac{2p}{3} + i\sin\frac{2p}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $a-1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$a^2 = \cos\frac{4p}{3} + i\sin\frac{4p}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Значит,

$$\Delta = 5\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{5}{4}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(9 - 6i\sqrt{3} + 3i^2\right) =$$

$$= -\frac{5}{8}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(6 - 6i\sqrt{3}\right) = -\frac{5\cdot 6}{8}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right) =$$

$$= -\frac{15}{4}\left(1 - (i\sqrt{3})^2\right) = -\frac{15}{4}(1+3) = -15.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите определитель:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} x-y & x+y \\ x+y & x-y \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} \sin j & \cos j \\ -\cos j & \sin j \end{vmatrix}$.

1.2. Вычислите определитель с помощью правила треугольников:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

1.3. Найдите миноры M_{11}, M_{21} и алгебраические дополнения A_{13}, A_{32} для матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1.4. Вычислите определитель, используя разложения по 1-й

строке и по 2-му столбцу:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

II уровень

2.1. Вычислите определитель, используя разложение по первой строке:

1) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & \tilde{n}^2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

2.2. Вычислите определитель:

1) $\begin{vmatrix} e^{ij} & 1 \\ 1 & e^{-ij} \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} x-iy & 2x \\ -y & x+iy \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1+i & 2-i \\ 3+2i & i \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} \cos\frac{p}{3} + i\sin\frac{p}{3} & \sqrt{3}+i \\ -\frac{1}{2} & \cos\frac{p}{6} - i\sin\frac{p}{6} \end{vmatrix}$.

2.3. Вычислите определитель:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ a & b & c & d \\ 4 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & a & 2 & 4 \\ 2 & b & 1 & 3 \\ 3 & c & 5 & -4 \\ 4 & d & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2.4. Используя метод эффективного понижения порядка, вычислите определитель:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -4 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

2.5. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

2.6. Вычислите степень определителя:

1) $\begin{vmatrix} 1-i & 2i \\ 3+i & 4-i \end{vmatrix}^3$; 2) $\begin{vmatrix} 1-i & 0 & 2i \\ -1+3i & 2 & -3 \\ 2-2i & 1 & i-1 \end{vmatrix}^4$.

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $\begin{vmatrix} z & z-9 \\ 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} \cos 7x & -\sin 4x \\ \sin 7x & \cos 4x \end{vmatrix} = 0$.

3.2. Определите, при каких действительных a, b, c и d уравнение $\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix} = 0$ имеет два равных действительных корня.

3.3. Вычислите определитель:

1) $\begin{vmatrix} (2+i)^2 & i \\ 1-3i & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10} \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \dfrac{2-i}{1+i} & i \\ i & \dfrac{3+i}{1-i} \end{vmatrix}$.

3.4. Найдите определитель:

1) $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & \sin^2 a & \cos^2 a \\ 3 & \sin^2 b & \cos^2 b \\ 3 & \sin^2 g & \cos^2 g \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} \cos 30^\circ & \sin 60^\circ & \mathrm{tg}\, 60^\circ \\ \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & \sin 360^\circ \\ \sin 450^\circ & \cos 120^\circ & \mathrm{ctg}\, 45^\circ \end{vmatrix}$.

3.5. Решите неравенство:

1) $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & x & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \le 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x-1 & x & x+1 \\ (x-1)^2 & x^2 & (x+1)^2 \end{vmatrix} < x$.

3.6. Постройте график функции $y = \dfrac{1}{b-a}\begin{vmatrix} x & a & b \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$, если $a < b$.

3.7. Вычислите определитель:

1) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} i & 2i & 3i & 4i \\ -2i & 1 & 2 & 3 \\ -3i & 2 & 2 & -2i \\ -4i & 3 & 2i & 3 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ x^2 & x & 0 & 1 \end{vmatrix}$, где $x = \cos\frac{2}{3}p + i\sin\frac{2}{3}p$.

3.8. Вычислите определитель:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;   2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.

13.3. Обратная матрица. Ранг матрицы

Квадратная матрица B, удовлетворяющая совместно с заданной матрицей A того же порядка равенствам $AB = BA = E$, называется ***обратной*** к матрице A и обозначается A^{-1}. Обратная матрица A^{-1} существует при условии, что A – невырожденная матрица, т. е. $|A| \neq 0$.

Обратную матрицу можно вычислить следующими способами:

1-й способ. Используют формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T, \qquad (13.4)$$

где C – матрица, составленная из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

2-й способ. Для данной матрицы A n-го порядка строится прямоугольная матрица $[A/E]$ размера $n \times 2n$ путем приписывания к матрице A справа единичной матрицы n-го порядка, затем с помощью элементарных преобразований над строками матрица $[A/E]$ приводится к виду $[E/B]$. Тогда $B = A^{-1}$.

Рангом матрицы A размера $m \times n$ называется максимальный порядок r_A отличных от нуля ее миноров. При этом под минором k-го порядка матрицы понимают определитель, составленный из элементов матрицы A, стоящих на пересечении k ее строк и k столбцов. Любой ненулевой минор порядка r называется ***базисным минором*** матрицы A.

Основные методы нахождения ранга матрицы A

Метод окаймляющих миноров

Если в матрице A найден ненулевой минор M_k порядка k,

$k \in \mathbf{N}$, а все окаймляющие его миноры $(k+1)$-го порядка равны нулю, то ранг матрицы равен k ($r_A = k$).

Метод элементарных преобразований

Используя элементарные преобразования строк, матрицу приводят к трапециевидной или треугольной форме, далее ранг находят по определению.

Как частный случай последнего метода, может быть рассмотрен ***метод нулей и единиц***: элементарным преобразованием строк матрицу приводят к эквивалентной, состоящей или из нулевых строк и столбцов, или из строк и столбцов, в которых содержится ровно одна единица, а остальные элементы – нулевые. Количество единиц в такой матрице равно ее рангу.

Пример 1. Исследовать матрицу A на невырожденность, найти A^{-1}, если она существует, результат проверить.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7 \neq 0.$$

Невырожденность матрицы A означает, что существует единственная обратная ей матрица A^{-1}.

1-й способ. Используя формулу (13.4), найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-3) = 5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3+1) = -4;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

Тогда $\tilde{N}^{\grave{O}} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, и по формуле (13.4) имеем:

$$\grave{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}. \qquad (13.5)$$

2-й способ. Воспользуемся эквивалентностью матриц $\left[A/E\right]$ и $\left[E/A^{-1}\right]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 & 5/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2/7 & 4/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/7 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -4/7 & 3/7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/7 & 5/7 & -2/7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/7 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -4/7 & 3/7 \end{array}\right].$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/7 & 5/7 & -2/7 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 \\ 5/7 & -4/7 & 3/7 \end{bmatrix}$.

Для контроля правильности результата достаточно проверить условия $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Действительно,

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/7 & 5/7 & -2/7 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 \\ 5/7 & -4/7 & 3/7 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1+3+5 & 5-1-4 & -2-1+3 \\ -2-3+5 & 10+1-4 & -4+1+3 \\ -1-9+10 & 5+3-8 & -2+3+6 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Аналогично $A^{-1} \cdot A = E$.

Пример 2. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$AXB = C, \qquad (13.6)$$

где A, B, C – заданные матрицы.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Умножим уравнение (13.6) слева на A^{-1} и справа на B^{-1}. Тогда справедливо $A^{-1} \cdot AXB \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ или, учитывая определение обратной матрицы, $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Найдем A^{-1} и B^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{1+2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B^{-1} = \frac{1}{0+1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Значит, $X = \begin{bmatrix} 10/3 & -5/3 \\ -5/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.

Пример 3. Доказать, что матрица A является ортогональной, т. е. для нее выполняется равенство $A^{-1} = A^T$:

$$A = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Найдем A^T и проверим равенство $AA^T = A^T A = E$.

$$A^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$AA^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = E;$$

$$A^T A = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = E.$$

Мы доказали ортогональность матрицы A.

Пример 4. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&5\\2&3&1&8\\3&-1&-4&1\end{bmatrix}.$$

Решение. *1-й способ*. Воспользуемся методом окаймляющих миноров. Фиксируем $M_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0.$ Для M_2 окаймляющими будут два минора 3-го порядка:

$$M_3^{(1)}=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&1\\3&-1&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-1&-1\\3&-7&-7\end{vmatrix}=0;$$

$$M_3^{(2)}=\begin{vmatrix}1&2&5\\2&3&8\\3&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-14&7&5\\-22&11&8\\0&0&1\end{vmatrix}=0.$$

Значит, $r_A=2$, а базисным минором можно считать, например, M_2.

2-й способ. Преобразуем матрицу A:

$$\begin{bmatrix}1&2&1&5\\2&3&1&8\\3&-1&-4&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&5\\0&-1&-1&-2\\0&-7&-7&-14\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&5\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен двум, следовательно, таков же ранг исходной матрицы.

З а м е ч а н и е. О том, что ранг матрицы A равен 2, можно было судить на третьем шаге преобразований (во 2-м способе), когда получили нулевую строку и ненулевой минор (выделен) максимального порядка 2.

Задания

I уровень

1.1. Найдите обратные матрицы для следующих матриц:

1) $\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}1&-2\\3&-1\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{bmatrix}$.

1.2. Решите матричное уравнение:

1) $\begin{bmatrix}1&1\\-2&1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$; 2) $X\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix}5&-6&4\\3&-3&2\\4&-5&2\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$; 4) $X\begin{bmatrix}5&-6&4\\3&-3&2\\4&-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\end{bmatrix}$.

1.3. Найдите какой-либо базисный минор матрицы:

1) $\begin{bmatrix}1&-1\\3&-3\\5&-5\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}0&0&0\\7&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}1&0&0&2&1\\1&0&0&3&-1\\2&0&0&5&0\end{bmatrix}$.

1.4. Определите ранг матрицы:

1) $\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}1&-2&3&-1&2\\4&1&-1&2&-3\\5&8&-11&7&-12\end{bmatrix}$.

II уровень

2.1. Найдите обратную матрицу для заданной матрицы, используя формулу (13.4):

1) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix}2&i&0\\-i&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}1+3i&4\\1-2i&2+3i\end{bmatrix}$.

2.2. Методом эквивалентных преобразований найдите обратные для следующих матриц:

1) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}1&5&3\\2&9&4\\3&13&8\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}1&3&-3\\3&1&3\\-3&3&1\end{bmatrix}$.

2.3. Решите матричное уравнение (найдите матрицу X):

1) $\begin{bmatrix} 1-i & 2+2i \\ 2+2i & -7+i \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2+6i \\ 5+4i \end{bmatrix}$;

2) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & i \\ i & -1 & 3i \\ -2 & 2i & -1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2i \\ 1-i & 0 & 3+4i \\ -2i & 3-4i & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} i & 1+i & 5 \\ 1-i & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2-3i \end{bmatrix}$.

2.4. Найдите ранг матрицы:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{bmatrix}$.

III уровень

3.1. Найдите ранг матрицы в зависимости от значения параметра a:

1) $\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & a \\ 2 & -1 & a & 5 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & a & 7 \\ 3 & 7 & 2 & a \end{bmatrix}$.

3.2. Определите, какие из приведенных матриц удовлетворяют соотношению $A = \overline{A}^T$, где $\overline{A}$ – матрица, элементы которой являются комплексно-сопряженными с элементами матрицы A:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3+i & 4i \\ 3-i & 0 & 5-7i \\ -4i & 5+7i & 8 \end{bmatrix}$; 2) $A_2 = \begin{bmatrix} i & 1+i & 6 \\ 1-i & 2-3i & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; 4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3.3. Найдите обратные матрицы для следующих матриц:

1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$.

13.4. Системы линейных уравнений

Система линейных алгебраических уравнений (или линейная система) имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{13.7}$$

где a_{ij} и b_j – заданные числа.

Эту систему можно записать в матричной форме

$$AX = B, \tag{13.8}$$

где $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ – матрица системы, состоящая из коэффициентов a_{ij}, $i = \overline{1,\ m}$, $j = \overline{1,\ n}$; B – матрица-столбец свободных элементов b_j, $i=\overline{1,\ m}$; X – матрица-столбец неизвестных, т. е. такая, которая обращает матричное уравнение (13.8) в равенство (является решением этого уравнения).

Решением системы (13.7) называется упорядоченная совокупность $\left(x_1^0,\, x_2^0,\, ...,\, x_n^0\right)$ n чисел, которые после подстановки в уравнения системы вместо соответствующих переменных обращают каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Система (13.7) называется ***совместной***, если у нее существует хотя бы одно решение, в противном случае она называется ***несовместной***. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет одно решение, и ***неопределенной*** – если более одного решения. Две системы называются ***эквивалентными*** (***равносильными***), если множества их решений совпадают.

Ответ на вопрос о совместности системы дает ***теорема Кронекера-Капелли***: для того чтобы система (13.7) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы

$r_A = r_{A/B}$,

где $[A/B]$ – расширенная матрица системы (13.7), т. е. матрица A системы, к которой добавлен столбец B свободных членов.

Рассмотрим систему $n\times n$, имеющую вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{13.9}$$

или в матричном виде

$AX = B$,

где $\Delta = |A| \neq 0$.

Определителем системы (13.9) называется определитель матрицы этой системы (т. е. состоящий из коэффициентов системы): $\Delta = |A|$. Если $\Delta \neq 0$, то система называется ***невырожденной***; если $\Delta = 0$ – ***вырожденной***.

Методы решения невырожденных систем используются для решения линейных систем (13.9), состоящих из n уравнений с n неизвестными, для которых $\Delta \neq 0$.

Метод обратной матрицы состоит в решении матричного уравнения $X = A^{-1}\cdot B$.

Метод Крамера также используют для решения невырожденных систем. Неизвестные находят по формулам Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\quad i=\overline{1,\ n}, \tag{13.10}$$

где Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ системы (13.8) заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Решение произвольной линейной системы из m уравнений и n неизвестных начинается с нахождения ранга. Пусть $r_A = r_{A/B} = r$ и система (13.7) сведена к эквивалентной системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{13.11}$$

Если $r = n$, то система (13.11) имеет единственное решение, которое можно получить указанными выше методами; если $r < n$, то существует бесконечное множество решений. Для его получения неизвестные x_1, x_2, …, x_r называют ***базисными***, x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n – ***свободными***, система (13.11) записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Свободным переменным присваиваются произвольные численные значения c_1, c_2, …, c_{n-r}.

Последняя система решается, например, методом Крамера.

Метод Гаусса используют для решения произвольных систем. С помощью элементарных преобразований над строками расширенную матрицу системы (13.7) приводят к виду

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1,r+1} & \ldots & a'_{1n} & & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{2,r+1} & \ldots & a'_{2n} & & b'_2 \\ & \ldots & & & & & & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{r,r+1} & \ldots & a'_{rn} & & b'_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & b'_{r+1} \\ & \ldots & & & & & & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & b'_m \end{array}\right].$$

Соответствующая ей система, равносильная (13.7), примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{2,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots \\ x_r + a'_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r, \\ 0 = b'_{r+1}, \\ \ldots \\ 0 = b'_m. \end{cases} \qquad (13.12)$$

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \ \ldots, \ b'_m$ отлично от нуля, то система (13.12), а значит, и исходная система (13.7) не совместны.

Если $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$, то система (13.12) позволяет получить явное выражение для базисных неизвестных $x_1, \ldots, x_r$ через свободные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Таким образом получают бесконечное множество решений.

Если $r = n$, то свободные переменные отсутствуют, а значит, системы (13.12) и (13.7) имеют единственное решение.

На практике обычно обходятся приведением матрицы системы (13.7) к треугольной или трапециевидной форме, после чего значения базисных переменных ищутся в обратном порядке.

Решение произвольной линейной системы (13.7) из m уравнений и n неизвестных целесообразно начинать с нахождения ранга. Пусть $r_A = r_{A/B} = r$ и система (13.7) сведена к эквивалентной системе.

Если $r = n$, то система (13.7) имеет единственное решение, которое можно получить указанными выше методами. Если $r < n$, то существует бесконечное множество решений. Для его получения неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ объявляют ***базисными***, x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots, x_n$ – ***свободными***, систему (13.12) записывают в виде

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n, \\ x_2 = b'_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{2n}x_n, \\ x_r = b'_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{rn}x_n. \end{cases}$$

Присваивая $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ произвольные численные значения $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ соответственно, получают решение в виде

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1,r+1}c_1 - \ldots - a'_{1n}c_{n-r}, \\ x_r = b'_r - a'_{r,r+1}c_1 - \ldots - a'_{rn}c_{n-r}, \\ x_{r+1} = c_1, \\ x_n = c_{n-r}. \end{cases}$$

Пример 1. Решить разными способами систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \quad = -2, \\ 2x_1 - \ x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. *1-й способ*. Используем метод обратной матрицы. Запишем матрицу системы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица A невырожденная, так как ее определитель не равен нулю. Действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \qquad (13.13)$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$A_{11} = -3$; $A_{21} = -5$; $A_{31} = 5$;
$A_{12} = 1$; $A_{22} = 1$; $A_{32} = -1$;
$A_{13} = 7$; $A_{23} = 13$; $A_{33} = -11$.

Следовательно,

$$\grave{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 13 & -11 \end{bmatrix}.$$

Используем далее формулу (13.10):

$$X = \grave{A}^{-1}\hat{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 13 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix},$$

т. е. $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$ – единственное решение.

Получаем ответ: (–2; 0; 8).

2-й способ. Используя формулы Крамера (13.10), вычисляем определитель системы (13.13).

Заменяем в определителе Δ первый столбец столбцом свободных членов и вычисляем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4.$$

Заменяем в определителе Δ второй столбец столбцом свободных членов и вычисляем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Заменяем в определителе Δ третий столбец столбцом свободных членов. Тогда

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -2(28-36) = 16.$$

Тогда, используя формулы (13.10), получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{16}{2} = 8.$$

Таким образом получаем решение (–2; 0; 8).

3-й способ. Используем метод Гаусса. Приведем заданную систему к равносильной. Для этого осуществим элементарные преобразования строк расширенной матрицы системы:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & -11 & 1 & 8 \\ 0 & -13 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 8. \end{cases}$$

Из нее последовательно находим неизвестные, начиная с x_3:

$x_3 = 8,\ x_2 = 0,\ x_1 = -2 - 5 \cdot 0 = -2,$

Таким образом, приходим к ответу (–2; 0; 8).

Пример 2. Исследовать систему на совместность и найти ее решение

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left[\grave{A}\middle|\hat{A}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Наибольший порядок отличных от нуля миноров равен 2 (так как любой минор 3-го порядка содержит нулевую строку, то он будет равен нулю). Значит, $r_A = r_{A|B} = 2$, т. е. исходная система совместна.

Поскольку ранг меньше количества неизвестных (2 < 5), то система имеет бесконечное множество решений.

Выберем в качестве базисного минор $\grave{I}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3, x_4, x_5 – свободные. Система, равносильная исходной, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 - x_3 - x_4 - x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_6. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$,

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные, и решаем указанную систему.

Получаем:

$$x_2 = 23 - 2c_1 - 2c_2 - 6c_3,$$

$$x_1 = 7 - c_1 - c_2 - c_3 - 23 + 2c_1 + 2c_2 + 6c_3 = -16 + c_1 + c_2 + 5c_3.$$

Таким образом, решение примет вид:

$$\left(-16 + c_1 + c_2 + 5c_3;\ 23 - 2c_1 - 2c_2 - 6c_3;\ c_1,\ c_2,\ c_3\right),$$

где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

Пример 3. Найти матрицу $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ и действительное число l, для которых выполняется условие

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot X = l \cdot X.$$

Решение. Введем обозначение $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$. Тогда условие задачи запишется в виде

$$\grave{A}X = l\,X \quad \text{или} \quad \grave{A}X - l\,X = 0 \Rightarrow \left(\grave{A} - l\,E\right) X = 0.$$

Очевидно, что при любом действительном l нулевая матрица удовлетворяет равенству, т. е. $X = 0$.

Пусть $X \neq 0$. Тогда ненулевое решение найдем, если матрица $\grave{A} - l\,E$ окажется вырожденной, т. е. $\left|A - l\,E\right| = 0$. Решаем последнее уравнение относительно l:

$$\left|\grave{A} - l\,E\right| = \left\| \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} - l \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \begin{vmatrix} 2-l & 4 \\ -1 & -3-l \end{vmatrix} =$$

$$= (2-l)(-3-l) + 4 = -6 + l + l^2 + 4 = l^2 + l - 2.$$

Значит, $\left|A - l\,E\right| = 0$ при $l^2 + l - 2 = 0$, что справедливо при $l_1 = 1$, $l_2 = -2$.

Рассмотрим случай, когда $l = 1$. Тогда $\left(A - l\,E\right)X = 0$. Запишем последнее равенство в виде системы

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем $x_1 = -4x_2$. Если $x_2 = c$, то $x_1 = -4c$, $c \in \mathbf{R}$.

Значит, матрица X, удовлетворяющая заданному матричному уравнению при $l = 1$, примет вид:

$$X = \begin{bmatrix} -4c \\ c \end{bmatrix}, \; c \in \mathbf{R}, \; c \neq 0.$$

При $l = -2$ аналогично получим систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0, \\ -x_1 - \;\; x_2 = 0, \end{cases}$$

из которой находим

$$x_1 = -x_2 \quad \text{или} \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} -c \\ c \end{bmatrix}, \; c \in \mathbf{R}, \; c \neq 0.$$

Таким образом, приходим к следующему заключению относительно выполнимости условия:

1) если $l = \mathbf{R}$, то $X = 0$;

2) если $l = 1$, то $X = \begin{bmatrix} -4c \\ c \end{bmatrix}$, $c \in \mathbf{R}$;

3) если $l = -2$, то $X = \begin{bmatrix} -c \\ c \end{bmatrix}$, $c \in \mathbf{R}$.

Следовательно, данная задача имеет нетривиальное (т. е. ненулевое) решение лишь при $l = 1$ или $l = -2$.

Задания

I уровень

1.1. Запишите систему в матричном виде:

1) $\begin{cases} x + 2y = 1. \\ 2x - 3y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ 2x + 5y + 2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_2 + 3x_3 = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 5 = 0. \end{cases}$

1.2. Используя формулы Крамера и метод обратной матрицы, решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y + x - 1 = 0, \\ y - x - 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + 4z = 1, \\ -x + 6y + z = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 6, \\ x - y + 7z = 8, \\ 3x - y + 2z = 7. \end{cases}$

1.3. Используя теорему Кронекера-Капелли, исследуйте систему на совместность и найдите решение методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 20, \\ 3x_1 + 6x_2 = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 52x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

II уровень

2.1. Решите систему уравнений, используя формулы Крамера:

1) $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ ax+5y=-2a-5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=1-i, \\ 2x-4y=2+i; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y-z=5, \\ 3x-y+z=-4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+x_2-x_3=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+2y-z=12, \\ 3x-y+4z=-13, \\ -x+5y-z=27; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x+4y+3z=14, \\ 3x-y+4z=-13, \\ -x+5y-z=27. \end{cases}$

2.2. Решите систему уравнений, пользуясь методом обратной матрицы:

1) $\begin{cases} 2x+3y-z=0, \\ x-2y+4z=9, \\ y+z=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y-z=-1, \\ x+2y-4z=9, \\ -x-12y+14z=1. \end{cases}$

2.3. Исследуйте систему на совместность и решите методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 4x+y+3z=1, \\ 7y-2z=2, \\ 8x+9y+4z=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4-x_5=4, \\ x_1+4x_2+2x_3-5x_4+3x_5=6, \\ x_1+15x_2+6x_3-19x_4+9x_5=2. \end{cases}$

2.4. Докажите, что система имеет единственное нулевое решение:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_1-3x_2-7x_4=0, \\ 4x_2+2x_3+5x_4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1-3x_2-5x_3+8x_4=0, \\ -3x_1+2x_2+4x_3-6x_4=0, \\ 2x_1-5x_2-7x_3+5x_4=0, \\ -4x_1+3x_2+5x_3-6x_4=0. \end{cases}$

2.5. Найдите ненулевое решение однородной системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1+5x_2-x_3+7x_4=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+7x_2+x_3+5x_4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$

2.6. Решите неоднородную систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1, \\ x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3. \end{cases}$

2.7. Найдите ненулевую матрицу X и соответствующее ей значение действительного числа l, для которых справедливо матричное уравнение $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X = l\,X$.

III уровень

3.1. Определите, при каких значениях параметра a система уравнений имеет решение. Найдите решение в зависимости от a:

1) $\begin{cases} x+ay=1, \\ ax+y=2a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax+y=a, \\ x+ay=a^2. \end{cases}$

3.2. Найдите неизвестные коэффициенты функции, удовлетворяющей условиям:

1) $f(x)=ax^2+bx+c,\quad f(-2)=-8,\quad f(1)=4,\quad f(2)=-4;$

2) $f(x)=a\log_3 x+bx+c,\quad f(1)=5,\quad f(3)=8,\quad f(9)=19.$

3.3. Найдите уравнение параболы, проходящей через точки $A(-1;\ 10)$, $B(0;\ 3)$ и $C(1;\ 0)$.

3.4. Исследуйте данную систему на совместность в зависимости от значения параметра a. Найдите, если оно существует, решение системы

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1. \end{cases}$$

3.5. При каких значениях параметра a хотя бы при одном значении параметра c система имеет решение для любых значений параметра b?

$$\begin{cases} bx + y = ac^2, \\ x + by = ac + 1. \end{cases}$$

3.6. Дано: $E_1 = 60$ Â, $E_2 = 10$ Â, $E_3 = 40$ Â, $R_1 = 98$ Î ì , $R_2 = 99$ Î ì , $R_3 = 80$ Î ì , $R_4 = 10$ Î ì , $R_5 = 11$ Î ì , $r_{01} = 2$ Î ì , $r_{02} = r_{03} = 1$ Î ì .

При решении электротехнической задачи получена система уравнений

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3, \\ E_1 - E_2 = I_1(R_1 + R_4 + r_{01}) - I_2(R_2 - r_{02}), \\ E_2 + E_3 = I_2(R_2 + r_{02}) + I_3(R_3 + R_5 + r_{03}). \end{cases}$$

Найдите значения токов I_1, I_2, I_3.

3.7. Дано: $E_1 = 40$ Â, $E_2 = 20$ Â, $R_1 = 35$ Î ì , $R_2 = 52$ Î ì , $R_3 = 24$ Î ì , $R_4 = 41$ Î ì , $R_5 = 16$ Î ì , $R_6 = 61$ Î ì , $r_{01} = 2$ Î ì , $r_{02} = 1$ Î ì .

При решении электротехнической задачи получена система уравнений

$$\begin{cases} -I_2 + I_6 - I_3 = 0, \\ I_5 - I_4 - I_6 = 0, \\ I_1 - I_5 + I_2 = 0, \\ E_2 = I_2(R_2 + r_{02}) + I_5R_5 + I_6R_6, \\ E_2 - E_1 = I_2(R_2 + r_{02}) - I_1(R_1 + r_{01}) + I_3R_3, \\ E_1 = I_5R_5 + I_4R_4 + I_1(R_1 + r_{01}). \end{cases}$$

Найдите значения токов I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6.

3.8. Дано: $E_1 = 20$ Â, $E_2 = 40$ Â, $R_1 = 64$ Î ì , $R_2 = 48$ Î ì , $R_3 = 32$ Î ì , $R_4 = 25$ Î ì , $R_5 = 51$ Î ì , $R_6 = 15$ Î ì , $r_{01} = 1$ Î ì , $r_{02} = 2$ Î ì .

1) При решении электротехнической задачи получена система уравнений

$$\begin{cases} E_1 = I_{k1}(R_3 + R_1 + r_{01}) - I_{k2}R_3, \\ -E_2 = I_{k2}(R_4 + R_6 + R_2 + r_{02} + R_3) - I_{k1}R_3 + I_{k3}(R_3 + R_6 + r_{02}), \\ E_2 = I_{k3}(R_2 + R_6 + R_5 + r_{02}) - I_{k2}(R_2 + r_{02} + R_6). \end{cases}$$

Найдите значения токов I_{k1}, I_{k2}, I_{k3}.

2) Найдите значения токов I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} I_3 - I_4 - I_5 = 0, \\ I_5 + I_6 - I_2 = 0, \\ I_4 + I_1 - I_6 = 0, \\ 0 = I_6R_6 - I_5R_5 + I_4R_4, \\ E_2 = I_5R_5 + I_2(R_2 + r_{02}) + I_3R_3, \\ E_1 = I_1(R_1 + r_{01}) - I_4R_4 - I_3R_3. \end{cases}$$

14. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

14.1. Векторы в пространстве: линейные операции над векторами в геометрической форме, проекция вектора на ось

Как и на плоскости (см. § 8.1), векторы в пространстве определяются как направленные отрезки, для которых вводятся операции сложения (правило треугольника, параллелограмма для двух векторов и правило ломаной для n векторов) и умножения на число. Эти операции обладают теми же свойствами, что и операции на плоскости.

Векторы называются ***компланарными***, если они лежат в параллельных плоскостях (или в одной плоскости). Для трех некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ справедливо ***сложение по правилу параллелепипеда***:

$$\overline{d} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c},$$

где $\overline{d}$ – диагональ параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ с общим началом, с тем же началом (рис. 14.1).

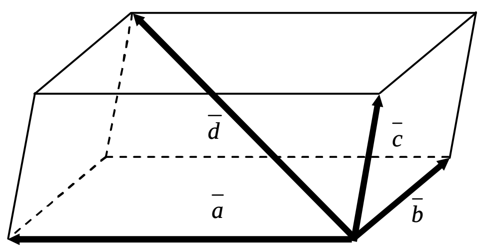
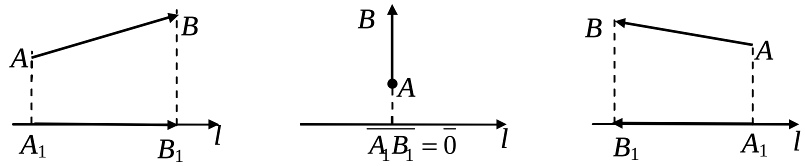


Рис. 14.1

Геометрической проекцией вектора $\overline{AB}$ ***на ось*** l называется вектор $\overline{A_1B_1}$, где A_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных на ось из точек A и B соответственно (рис. 14.2).



а) б) в)

Рис. 14.2

Если $\overline{a} = \overline{AB}$, то $\overline{A_1B_1}$ является геометрической проекцией (или составляющей) вектора $\overline{a}$ на ось l и обозначается $\overline{a_l}$.

Алгебраической проекцией (просто ***проекцией***) вектора $\overline{a}$ на ось l называется число $np_l\overline{a}$, которое определяется следующим образом:

$$np_l\,\overline{a} = \begin{cases} \left|\overline{A_1B_1}\right|, & \text{если } \overline{A_1B_1}\uparrow\uparrow l; \\ -\left|\overline{A_1B_1}\right|, & \text{если } \overline{A_1B_1}\uparrow\downarrow l. \end{cases}$$

Запись $np_{\overline{b}}\,\overline{a}$ обозначает проекцию вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b}$, т. е. на ось, определяемую ортом

$$\overline{b_0} = \frac{\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}.$$

Свойства проекции вектора на ось

1. $np_l\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos\left(\overline{a}\,\widehat{,}\,l\right)$;

2. $\overline{a} \perp l,\quad \overline{a} \neq \overline{0} \Rightarrow np_l\,\overline{a} = 0$;

3. $np_l\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = np_l\,\overline{a} + np_l\,\overline{b}$;

4. $\text{ï ð}_l\, l\,\overline{a} = l\,\text{ï ð}_l\,\overline{a},\ a \in \mathbf{R}$.

Скалярное произведение двух векторов в пространстве определяется аналогично случаю на плоскости:

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right) = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\left(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{b}\right).$$

Формула скалярного квадрата:

$$\overline{a}^2 = \left(\overline{a},\overline{a}\right) = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{a}\right|^2.$$

Справедлива формула, связывающая скалярное произведение векторов и проекции этих векторов:

$$np_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{\left|\bar{a}\right|}. \qquad (14.1)$$

Пример 1. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 14.3). Разложить вектор $\overline{AA_1}$ по векторам $\overline{AC_1}$, $\overline{BA_1}$ и $\overline{CB_1}$.

Решение. По правилу треугольника имеем:

$\overline{AA_1} = \overline{AB} + \overline{BA_1}$, $\overline{BB_1} = \overline{BC} + \overline{CB_1}$, $\overline{CC_1} = \overline{CA} + \overline{AC_1}$.

Складывая левые и правые части этих векторных равенств, получаем:

$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}\right) + \overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1}$.

Так как $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AA} = \bar{0}$ и $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$, то $3\overline{AA_1} = \overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1}$ и, следовательно, $\overline{AA_1} = \frac{1}{3}\left(\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1}\right)$.

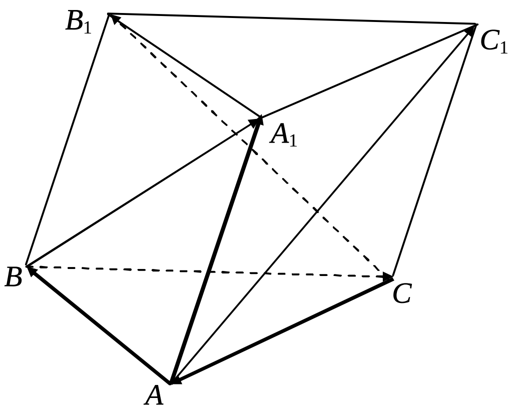


Рис. 14.3

Пример 2. При соблюдении каких условий ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ удовлетворяют условию $\left|\bar{a}+\bar{b}\right| > \left|\bar{a}-\bar{b}\right|$?

Решение. Так как неравенство связывает неотрицательные числовые величины, возведем в квадрат, что не изменит его смысла:

$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2 > \left|\bar{a}-\bar{b}\right|^2$.

Перейдя к скалярному квадрату и воспользовавшись алгебраическими свойствами скалярного произведения, получим:

$\left(\bar{a}+\bar{b}\right)^2 > \left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2$,

откуда

$\bar{a}^2 + 2(\bar{a},\bar{b}) + \bar{b}^2 > \bar{a}^2 - 2(\bar{a},\bar{b}) + \bar{b}^2$.

Получаем:

$4(\bar{a},\bar{b}) > 0$, т. е. $(\bar{a},\bar{b}) > 0$.

Очевидно, последнее условие выполняется при $\cos(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}) > 0$, т. е. при $0 \le (\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}) < \frac{p}{2}$.

Таким образом, векторы или сонаправлены ($\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$), или образуют острый угол.

Пример 3. Вычислить $np_l\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)$ и $np_l\left(3\bar{a}-2\bar{b}\right)$, если $\left|\bar{a}\right| = 4$, $\left|\bar{b}\right| = \sqrt{2}$, а векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют с осью l соответственно углы в 120° и 45°.

Решение. Согласно свойствам проекции, имеем:

$np_l\bar{a} = \left|\bar{a}\right|\cos\left(\bar{a},l\right) = 4\cos 120° = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2,$

$np_l\bar{b} = \left|\bar{b}\right|\cos\left(\bar{b},l\right) = \sqrt{2}\cos 45° = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$

Тогда получаем:

$np_l\left(2\bar{a}+\bar{b}\right) = 2np_l\bar{a} + np_l\bar{b} = -4+1 = -3,$

$np_l\left(3\bar{a}-2\bar{b}\right) = 3np_l\bar{a} - 2np_l\bar{b} = -6-2 = -8.$

Пример 4. Найти проекцию вектора $\overline{AC}$ на направление вектора $\bar{a}$, если $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, $\left|\overline{AB}\right| = 6$, $\left|\overline{BC}\right| = 2\sqrt{2}$, $\left|\bar{a}\right| = 2$, $\left(\overline{AB}\,\hat{,}\,\bar{a}\right) = 60°$, $\left(\overline{BC}\,\hat{,}\,\bar{a}\right) = 45°$.

Решение. Используем свойства проекции:

$np_{\bar{a}}\overline{AC} = np_{\bar{a}}\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right) = np_{\bar{a}}\overline{AB} + np_{\bar{a}}\overline{BC} = \left|\overline{AB}\right|\cos\left(\overline{AB},\bar{a}\right) +$

$+\left|\overline{BC}\right|\cos\left(\overline{BC},\bar{a}\right) = 6\cos 60° + 2\sqrt{2}\cos 45° = 3+2 = 5.$

Пример 5. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=\bar{e}_1+2\bar{e}_2$ и $\bar{b}=3\bar{e}_1-\bar{e}_2$, если $|\bar{e}_1|=|\bar{e}_2|=1$, $\left(\bar{e}_1\hat{,}\bar{e}_2\right)=\frac{p}{3}$.

Решение. Пусть $\bar{d}_1=\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{d}_2=\bar{a}-\bar{b}$. Тогда $|\bar{d}_1|$ и $|\bar{d}_2|$ представляют длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{d}_1=\bar{a}+\bar{b}=\bar{e}_1+2\bar{e}_2+3\bar{e}_1-\bar{e}_2=4\bar{e}_1+\bar{e}_2,$$
$$\bar{d}_2=\bar{a}-\bar{b}=\bar{e}_1+2\bar{e}_2-(3\bar{e}_1-\bar{e}_2)=-2\bar{e}_1+3\bar{e}_2,$$
$$|\bar{d}_1|=\sqrt{\bar{d}_1^{\,2}}=\sqrt{\left(4\bar{e}_1+\bar{e}_2\right)^2}=\sqrt{16\bar{e}_1^{\,2}+8(\bar{e}_1,\bar{e}_2)+\bar{e}_2^{\,2}}=$$
$$=\sqrt{16|\bar{e}_1|^2+8|\bar{e}_1||\bar{e}_2|\cos(\bar{e}_1\hat{,}\bar{e}_2)+|\bar{e}_2|^2}=\sqrt{16\cdot1+8\cdot1\cdot1\cos\frac{p}{3}+1}=$$
$$=\sqrt{16+8\cdot\frac{1}{2}+1}=\sqrt{17+4}=\sqrt{21},$$
$$|\bar{d}_2|=\sqrt{\bar{d}_2^{\,2}}=\sqrt{\left(-2\bar{e}_1+3\bar{e}_2\right)^2}=\sqrt{4\bar{e}_1^{\,2}-12(\bar{e}_1,\bar{e}_2)+9\bar{e}_2^{\,2}}=$$
$$=\sqrt{4\cdot1-12\cdot\frac{1}{2}+9}=\sqrt{4-6+9}=\sqrt{7}.$$

Пример 6. Найти угол между векторами $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$, если $|\bar{a}|=\sqrt{3}$, $|\bar{b}|=1$, $(\bar{a},\bar{b})=\frac{1}{6}$.

Решение. Обозначим угол между векторами φ, тогда

$$\cos j=\frac{(\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b})}{|\bar{a}+\bar{b}|\cdot|\bar{a}-\bar{b}|}.$$
$$(\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}^2-(\bar{a},\bar{b})+(\bar{b},\bar{a})-\bar{b}^2=\bar{a}^2-\bar{b}^2=|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2=3-1=2;$$
$$|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{(\bar{a}+\bar{b})^2}=\sqrt{\bar{a}^2+2(\bar{a},\bar{b})+\bar{b}^2}=\sqrt{3+2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=$$
$$=\sqrt{3+3+1}=\sqrt{7};$$
$$|\bar{a}-\bar{b}|=\sqrt{(\bar{a}-\bar{b})^2}=\sqrt{\bar{a}^2-2(\bar{a},\bar{b})+\bar{b}^2}=\sqrt{3-2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=$$
$$=\sqrt{3-3+1}=1;$$

Тогда $\cos j=\frac{2}{\sqrt{7}}\ \Rightarrow\ j=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}.$

Задания

I уровень

1.1. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите сумму векторов:

1) $\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$; 2) $\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CB}$; 3) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$.

1.2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите, какие из следующих трех векторов компланарны:

1) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DD_1}$; 2) $\overline{AA_1}$, $\overline{B_1B}$, $\overline{CC_1}$;
3) $\overline{AB}$, $\overline{A_1D_1}$, $\overline{CC_1}$; 4) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{A_1C_1}$.

1.3. Назовите по три упорядоченных пары вершин тетраэдра *ABCD*, задающие компланарные и некомпланарные векторы.

1.4. Найдите $np_{\bar{b}}\bar{a}$, если:

1) $|\bar{a}|=2$, $\left(\bar{a}\hat{,}\bar{b}\right)=60°$; 2) $|\bar{a}|=1$, $\left(\bar{a}\hat{,}\bar{b}\right)=135°$;
3) $|\bar{a}|=3$, $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$; 4) $|\bar{a}|=4$, $\bar{a}\perp\bar{b}$; 5) $|\bar{a}|=1$, $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$.

1.5. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

1) $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=2$, $j=\frac{p}{3}$; 2) $|\bar{a}|=2$, $np_{\bar{a}}\bar{b}=3$;
3) $np_{\bar{b}}\bar{a}=-3$, $|\bar{b}|=2$;
4) $\bar{a}=2\bar{p}$, $\bar{b}=\bar{p}-\bar{q}$, $|\bar{p}|=|\bar{q}|=1$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right)=\frac{p}{6}$.

1.6. Найдите $np_{\bar{a}}\bar{b}$, если известно, что $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=10$, а длина $|\bar{a}|=5$.

II уровень

2.1. В тетраэдре *ABCD* известны векторы $\overline{DA}=\bar{a}$, $\overline{DB}=\bar{b}$, $\overline{DC}=\bar{c}$. Представьте вектор $\overline{DO}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, если O – точка пересечения медиан треугольника ABC.

2.2. Докажите, что если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, то вектор $\overline{c}$ компланарен с векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ тогда и только тогда, когда имеет место разложение $\overline{c} = c_1\overline{a} + c_2\overline{b}$.

2.3. Найдите проекцию вектора $\overline{AC}$ на направление вектора $\overline{a}$, если $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, $\left|\overline{AB}\right| = 6$, $\left|\overline{BC}\right| = 21\sqrt{2}$, $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left(\overline{AB} \hat{,} \overline{a}\right) = 60°$, $\left(\overline{BC} \hat{,} \overline{a}\right) = 45°$.

2.4. Известно, что $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$ и $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right| = \left|\overline{c}\right| = 1$. Найдите $(\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{b}, \overline{c}) + (\overline{a}, \overline{c})$.

2.5. При каком значении α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ перпендикулярны, если $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 2$?

III уровень

3.1. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 120°. Найдите число k из условий, что $\left|\overline{b}\right| = 2\left|\overline{a}\right|$ и вектор $\overline{a} + k\overline{b}$ перпендикулярен вектору $\overline{a} - \overline{b}$.

3.2. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – единичные неколлинеарные векторы. Вычислите $\left|2\overline{a} - 5\overline{b}\right|$, $\left|3\overline{a} + \overline{b}\right|$, если $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = \sqrt{3}$.

3.3. Определите, при каком значении m векторы $\overline{a} = m\overline{e_1} + 7\overline{e_2} - 2\overline{e_3}$ и $\overline{b} = -3\overline{e_1} + m\overline{e_2} + 2\overline{e_3}$ перпендикулярны, если $\left|\overline{e_1}\right| = \left|\overline{e_2}\right| = \left|\overline{e_3}\right| = 1$ и $\left(\overline{e_1} \hat{,} \overline{e_2}\right) = \left(\overline{e_1} \hat{,} \overline{e_3}\right) = \left(\overline{e_2} \hat{,} \overline{e_3}\right) = 90°$.

14.2. Линейная зависимость векторов. Действия над векторами в координатной форме

Векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, ..., $\overline{e_n}$ называются ***линейно-независимыми***, если равенство $\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{e_i} = \overline{0}$ справедливо тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$. В противном случае эти векторы называются ***линейно-зависимыми***. Для того чтобы векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, ..., $\overline{e_n}$ были линейно-зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из них можно было представить в виде линейной комбинации остальных.

Упорядоченная тройка $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ ненулевых линейно-независимых векторов образует ***базис*** в трехмерном пространстве. Это значит, что любой вектор $\overline{a}$ этого пространства единственным образом может быть представлен в виде

$$\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3},$$

где a_1, a_2, a_3 – координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$. Записывают: $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

В физическом пространстве линейная независимость векторов равносильна их некомпланарности. Таким образом, любая тройка ненулевых некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке, образует базис этого пространства.

Пусть задана тройка $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ некомпланарных векторов. Совместим начала этих векторов. Если кратчайший поворот вектора $\overline{a}$ до направления вектора $\overline{b}$, наблюдаемый с конца вектора $\overline{c}$, совершается против часовой стрелки, то тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется ***правой***. В противном случае – ***левой***. Всюду далее будем рассматривать правые тройки базисных векторов.

Совокупность базисных векторов и их общего начала образует, говорят, ***аффинную систему координат в пространстве***. Координаты векторов в таком случае называют ***аффинными***.

Если даны два вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ в некотором базисе, то $\overline{a} = \overline{b}$ тогда и только тогда, когда $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

$$\overline{a}\pm\overline{b}=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2,\ a_3\pm b_3);\qquad(14.2)$$

$$l\,\overline{a}=(l\,a_1,\ l\,a_2,\ l\,a_3),\ \text{где}\ \ l\in\mathbf{R}.\qquad(14.3)$$

В случае, когда базисные векторы попарно перпендикулярны, система координат называется ***прямоугольной декартовой системой координат***. Если добавить, кроме того, условие нормированности базисных векторов (или их единичную длину), то получим ***ортонормированный*** базис, который обозначают $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$. Таким образом, $\left|\bar{i}\right|=\left|\bar{j}\right|=\left|\bar{k}\right|$, $\bar{i}\perp\bar{j}$, $\bar{i}\perp\bar{k}$, $\bar{j}\perp\bar{k}$. Прямоугольные декартовы координаты вектора $\overline{a}$ является его проекциями на векторы $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ соответственно. В частности, если точка M имеет прямоугольные декартовы координаты x, y, z в системе координат с началом в точке $O(0,\ 0,\ 0)$ и базисом $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, то радиус-вектор $\overline{OM}$ равен

$$\overline{OM}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=(x,y,z).$$

Если $A(x_A,y_A,z_A)$ и $B(x_B,y_B,z_B)$, то

$$\overline{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A),$$

а длина $\left|\overline{AB}\right|$ этого вектора может быть найдена по формуле

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

Линейные операции для векторов $\overline{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\overline{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ в координатной форме и их скалярное произведение вычисляются по формулам:

$$\overline{a}\pm\overline{b}=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2,\ z_1\pm z_2);\qquad(14.4)$$

$$l\,\overline{a}=(l\,x_1,\ l\,y_1,\ l\,z_1),\ \text{где}\ \ l\in\mathbf{R};\qquad(14.5)$$

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2;\qquad(14.6)$$

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2};\qquad(14.7)$$

$$\cos(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b})=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.\qquad(14.8)$$

Направляющими косинусами вектора $\overline{a}$ называются величины $\cos a$, $\cos b$, $\cos g$, где a,b,g – углы, которые образует

вектор $\overline{a}$ соответственно с осями Ox, Oy, Oz. Их вычисляют по формулам:

$$\cos a=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos b=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},\qquad(14.9)$$

$$\cos g=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

Если $\overline{a_0}$ – единичный вектор, то $\overline{a_0}=(\cos a,\cos b,\cos g)$.

Координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении l $(l>0)$, можно найти по формулам:

$$x_C=\frac{x_A+l\,x_B}{1+l},\quad y_C=\frac{y_A+l\,y_B}{1+l},\quad z_C=\frac{z_A+l\,z_B}{1+l}.\qquad(14.10)$$

Пример 1. Даны векторы $\overline{a}=(2,\ 3,\ -1)$, $\overline{b}=(0,\ 1,\ 8)$, $\overline{c}=(-1,\ 2,\ 4)$ в некотором базисе. Найти координаты вектора $\overline{d}=2\overline{a}-3\overline{b}+\overline{c}$ в этом базисе.

Решение. Определим координаты вектора $\overline{d}$, следуя правилам действий над векторами в координатной форме, т. е.

$$\overline{d}=2\cdot(2,\ 3,\ -1)-3\cdot(0,\ 1,\ 8)+(-1,\ 2,\ 4)=(4,\ 6,\ -2)-(0,\ 3,\ 24)+$$
$$+(-1,\ 2,\ 4)=(4-0-1,\ 6-3+2,\ -2-24+4)=(3,\ 5,\ -22).$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, все координаты считаются заданными в ортонормированном базисе.

Пример 2. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}=(1,\ 0,\ -2)$ на направление вектора $\overline{b}=(2,\ -1,\ 3)$.

Решение.

$$np_{\overline{b}}\,\overline{a}=\frac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\left|\overline{b}\right|}=\frac{1\cdot2+0\cdot(-1)+(-2)\cdot3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{2-6}{\sqrt{14}}=-\frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Пример 3. Найти направляющие косинусы вектора $\overline{a}=(3,\ -1,\ 2)$.

Решение. Используем формулы (14.9):

$$\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{i}\right)=\frac{x_{\overline{a}}}{\sqrt{x_{\overline{a}}^2+y_{\overline{a}}^2+z_{\overline{a}}^2}}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}};$$

$$\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{j}\right)=\frac{y_{\overline{a}}}{\sqrt{x_{\overline{a}}^2+y_{\overline{a}}^2+z_{\overline{a}}^2}}=\frac{-1}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}=-\frac{1}{\sqrt{14}};$$

$$\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{k}\right)=\frac{z_{\overline{a}}}{\sqrt{x_{\overline{a}}^2+y_{\overline{a}}^2+z_{\overline{a}}^2}}=\frac{2}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Пример 4. Найти прямоугольные декартовы координаты вектора $\overline{a}$, если $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{i}\right)=120°$, $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{j}\right)=60°$, $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{k}\right)=45°$, $|\overline{a}|=6$.

Решение. Пусть $\overline{a}=(x,y,z)$, тогда

$$x=np_{\overline{i}}\,\overline{a}=|\overline{a}|\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{i}\right)=6\cdot\cos 120°=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3;$$

$$y=np_{\overline{j}}\,\overline{a}=|\overline{a}|\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{j}\right)=6\cdot\cos 60°=6\cdot\frac{1}{2}=3;$$

$$z=np_{\overline{k}}\,\overline{a}=|\overline{a}|\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{k}\right)=6\cdot\cos 45°=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}.$$

Итак, $\overline{a}=\left(3,\ -3,\ 3\sqrt{2}\right)$.

Пример 5. Даны векторы $\overline{a}=(2,-1,3)$ и $\overline{b}=(4,1,-2)$. Вычислить:

1) $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$; 2) $\left(2\overline{a}-3\overline{b},\overline{b}-\overline{a}\right)$; 3) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2$; 4) $\left|3\overline{a}-\overline{b}\right|$;

5) $np_{\overline{a}}\overline{b}$; 6) $np_{\overline{a}+\overline{b}}\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)$; 7) $\overline{b_0}$.

Решение. 1) Используем формулу (14.6):

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left((2,\ -1,\ 3),(4,\ 1,\ -2)\right)=2\cdot4+(-1)\cdot1+3\cdot(-2)=8-1-6=1.$$

2) Сначала вычислим координаты векторов $2\overline{a}-3\overline{b}$ и $\overline{b}-\overline{a}$, используя формулы (14.4) и (14.5):

$$2\overline{a}-3\overline{b}=2(2,\ -1,\ 3)-3(4,\ 1,\ -2)=(4-12,\ -2-3,\ 6+6)=$$
$$=(-8,-5,12);$$

$$\overline{b}-\overline{a}=(4,\ 1,\ -2)-(2,\ -1,\ 3)=(2,2,-5).$$

Тогда согласно формуле (14.6) получим:

$$\left(2\overline{a}-3\overline{b},\overline{b}-\overline{a}\right)=-8\cdot2+(-5)\cdot2+12\cdot(-5)=-86.$$

3) Найдем координаты суммы векторов:

$$\overline{a}+\overline{b}=(2+4,\ -1+1,\ 3-2)=(6,\ 0,\ 1).$$

Далее, используя формулу скалярного квадрата и формулу (14.7) длины вектора, получим:

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2=\left|\overline{a}+\overline{b}\right|^2=6^2+0^2+1^2=37.$$

4) Вычислим координаты вектора $3\overline{a}-\overline{b}$, используя формулы (14.4) и (14.5):

$$3\overline{a}-\overline{b}=3(2,\ -1,\ 3)-(4,\ 1,\ -2)=(2,\ -4,\ 11).$$

Тогда по формуле (14.7) получим:

$$\left|3\overline{a}-\overline{b}\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2+11^3}=\sqrt{4+16+121}=\sqrt{141}.$$

5) По формуле (14.1) получим:

$$np_{\overline{a}}\overline{b}=\frac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{|\overline{a}|}=\frac{2\cdot4+(-1)\cdot1+3\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

6) Используя формулы (14.1), (14.4)–(14.7), получим:

$$np_{\overline{a}+\overline{b}}\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)=\frac{\left(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-2\overline{b}\right)}{\left|\overline{a}+\overline{b}\right|}=\frac{\left((6,\ 0,\ 1),\ (-6,\ -3,\ 7)\right)}{\sqrt{6^2+0^2+1^2}}=$$

$$=\frac{6\cdot(-6)+0\cdot(-3)+1\cdot7}{\sqrt{37}}=-\frac{29}{\sqrt{37}}.$$

7) Вектор $\overline{b_0}$ – это единичный вектор направления вектора $\overline{b}$:

$$\overline{b_0}=\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}=\frac{(4,\ 1,\ -2)}{\sqrt{4^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{(4,\ 1,\ -2)}{\sqrt{21}}=\left(\frac{4}{\sqrt{21}},\ \frac{1}{\sqrt{21}},\ -\frac{2}{\sqrt{21}}\right).$$

Пример 6. Вектор $\overline{d}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}=(2,\ 3,\ -1)$ и $\overline{b}=(1,\ -2,\ 3)$ и удовлетворяет условию $\left(\overline{d},\overline{c}\right)=-6$, где $\overline{c}=(2,\ -1,\ 1)$.

Найти координаты вектора $\overline{d}$.

Решение. Пусть $\overline{d}=(x,y,z)$. По условию $\overline{d}\perp\overline{a}$, что влечет $\left(\overline{d},\overline{a}\right)=0$, т. е. $2x+3y-z=0$. Аналогично из условия $\overline{d}\perp\overline{b}$ получаем $x-2y+3z=0$. Наконец, из $\left(\overline{d},\overline{c}\right)=-6$ имеем $2x-y+z=-6$.

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0, \\ x-2y+3z=0, \\ 2x-y+z=-6, \end{cases}$$

Решая которую, придем к ответу:

$$\begin{cases} x=-3, \\ y=3, \quad \text{т. е. } \overline{d}=(-3,\ 3,\ 3). \\ z=3, \end{cases}$$

Пример 7. Даны векторы $\overline{a}=(1,\ 1,\ 0)$ и $\overline{b}=(1,\ -1,\ 2)$. Найти косинус угла между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$, для которых $2\overline{x}+\overline{y}=\overline{a}$, $\overline{x}+2\overline{y}=\overline{b}$.

Решение. Выразим векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ через $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Из равенства $2\overline{x}+\overline{y}=\overline{a}$ получим $\overline{y}=\overline{a}-2\overline{x}$. Тогда, используя $\overline{x}+2\overline{y}=\overline{b}$, получим:

$$\overline{x}+2\left(\overline{a}-2\overline{x}\right)=\overline{b}, \text{ т. е. } 3\overline{x}=2\overline{a}-\overline{b}.$$

Далее находим координаты вектора $\overline{x}$:

$$\overline{x}=\frac{1}{3}\left(2\overline{a}-\overline{b}\right)=\frac{1}{3}\left(2(1,\ 1,\ 0)-(1,\ -1,\ 2)\right)=\frac{1}{3}(1,\ 3,\ -2)=\left(\frac{1}{3},\ 1,\ -\frac{2}{3}\right).$$

Поскольку $\overline{y}=\overline{a}-2\overline{x}$, то

$$\overline{y}=(1,1,0)\ -2\left(\frac{1}{3},1,-\frac{2}{3}\right)=\left(1-\frac{2}{3},1-2,\ 0+\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},-1,\frac{4}{3}\right).$$

Используя формулу (14.8), находим:

$$\cos\left(\overline{x}\,\hat{,}\,\overline{y}\right)=\frac{\left(\overline{x},\overline{y}\right)}{\left|\overline{x}\right|\cdot\left|\overline{y}\right|}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot(-1)+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{9}-1-\frac{8}{9}}{\sqrt{\frac{14}{9}}\cdot\sqrt{\frac{26}{9}}}=\frac{-\frac{16}{9}}{\frac{2}{3}\sqrt{91}}=-\frac{16\cdot 3}{9\cdot 2\sqrt{91}}=-\frac{8}{3\sqrt{91}}.$$

Пример 8. Луч образует с векторами $\overline{i}$ и $\overline{j}$ углы соответственно $\frac{p}{4}$ и $\frac{p}{3}$, а с вектором $\overline{k}$ – тупой угол. Найти этот угол.

Решение. Рассмотрим единичный вектор $\overline{e}$, сонаправленный с

заданным лучом. Он определяется направляющими косинусами, т. е. $\overline{e}=\left(\cos a, \cos b, \cos g\right)$. Так как $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 g=1$, то имеем $\cos^2\frac{p}{4}+\cos^2\frac{p}{3}+\cos^2 g=1$ или $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2 g=1$. Из последнего равенства имеем $\cos^2 g=\frac{1}{4}$. По условию γ – тупой угол. Значит, $\cos g<0$, т. е. $\cos g=-\frac{1}{2}$.

Таким образом, искомый угол равен $\frac{2p}{3}$.

Пример 9. Показать, что векторы $\overline{a}=(3,\ -2,\ 1)$, $\overline{b}=(-1,\ 1,\ -2)$ и $\overline{c}=(2,\ 1,\ -3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{d}=(11,\ -6,\ 5)$ в этом базисе.

Решение. *1-й способ.* В трехмерном пространстве базис образуют любые три линейно-независимых вектора с ненулевой длиной. Определим, будут ли три заданные вектора линейно-независимыми. Для этого составим их линейную комбинацию с коэффициентами $a, b, g\in\mathbf{R}$ и приравняем к $\overline{0}$, т. е. рассмотрим:

$$a\,\overline{a}+b\,\overline{b}+g\,\overline{c}=\overline{0}.$$

Если окажется, что при этом $a=b=g=0$, то система этих векторов линейно-независима, а значит, они образуют базис.

Векторному равенству $a\,\overline{a}+b\,\overline{b}+g\,\overline{c}=\overline{0}$ в координатной форме соответствует следующее условие:

$$a(3,\ -2,\ 1)+b(-1,\ 1,\ -2)+g(2,\ 1,\ -3)=(0,\ 0,\ 0).$$

Из определения равенства двух векторов имеем систему

$$\begin{cases} 3a-b+2g=0, \\ -2a+b+g=0, \\ a-2b-3g=0, \end{cases}$$

решая которую, получим $a=b=g=0$.

Найдем в этом базисе координаты вектора $\overline{d}=(d_1, d_2, d_3)$.

Так как $\overline{d}=d_1\overline{a}+d_2\overline{b}+d_3\overline{c}$, то в координатной форме

$$(11,\ -6,\ 5)=d_1(3,\ -2,\ 1)+d_2(-1,\ 1,\ -2)+d_3(2,\ 1,\ -3),$$

что приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 3d_1 - d_2 + 2d_3 = 11, \\ -2d_1 + d_2 + d_3 = -6, \\ d_1 - 2d_2 - 3d_3 = 5. \end{cases}$$

Решая последнюю систему каким-либо методом, получим $d_3 = 1$, $d_2 = -3$, $d_1 = 2$. Это значит что в базисе $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ вектор $\overline{d}$ имеет координаты: $\overline{d} = (2,\ -3,\ 1)$.

2-й способ. Векторы образуют базис пространства, если они некомпланарны. Это равносильно тому, что их смешанное произведение не равно 0, т. е. (в координатной форме)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Вычисление последнего определителя показывает, что он не нулевой. Таким образом, векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе можно, как в 1-м способе.

Пример 10. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны. Найти, при каком a векторы $\overline{c} = (l - 1)\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{d} = (2l + 1)\overline{a} - \overline{b}$ будут коллинеарны.

Решение. Если $\overline{c} \parallel \overline{d}$, то существует такое число $b \neq 0$, что $\overline{d} = b\overline{c}$, т. е.

$(2l + 1)\overline{a} - \overline{b} = b(l - 1)\overline{a} + b\overline{b}$, откуда

$\big((2l + 1) - b(l - 1)\big)\overline{a} - (1 + b)\overline{b} = \overline{0}.$

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, поэтому

$$\begin{cases} 2l + 1 - bl + b = 0, \\ 1 + b = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $b = -1$ и $2l + 1 - l - 1 = 0$ или $l = 0$. Таким образом, при $l = 0$ $\overline{c} = -\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$. Как легко видеть, векторы $\overline{c}$, $\overline{d}$ противоположны, т. е. $\overline{d} = -\overline{c}$.

Задания

I уровень

1.1. Даны векторы $\overline{a} = (1,\ -1,\ 0)$, $\overline{b} = (2,\ 4,\ -1)$ и $\overline{c} = (3,\ 2,\ 1)$ в некотором базисе. Найдите координаты векторов:

1) $2\overline{a} - \overline{b} - 2\overline{c}$; 2) $\frac{1}{2}\left(\overline{a} + \overline{b}\right)$; 3) $\overline{a} - 2\overline{b} + \overline{c}$; 4) $\frac{1}{3}\left(\overline{a} - \overline{b} + 2\overline{c}\right)$.

1.2. Найдите прямоугольные декартовы координаты вектора $\overline{a}$, если известны углы $a = \left(\widehat{\overline{a}, \overline{i}}\right)$, $b = \left(\widehat{\overline{a}, \overline{j}}\right)$, $g = \left(\widehat{\overline{a}, \overline{k}}\right)$ и на $\left|\overline{a}\right|$:

1) $a = 60°$, $b = 45°$, $g = 120°$, $\left|\overline{a}\right| = 2$;

2) $a = 120°$, $b = 150°$, $g = 30°$, $\left|\overline{a}\right| = 3$;

3) $a = 180°$, $b = 60°$, $g = 135°$, $\left|\overline{a}\right| = 4$;

4) $a = 30°$, $b = 90°$, $g = 0°$, $\left|\overline{a}\right| = 6$.

1.3. Заданы векторы $\overline{a_1} = (-1,\ 2,\ 0)$, $\overline{a_2} = (3,\ 1,\ 1)$, $\overline{a_3} = (1,\ 0,\ 1)$ и $\overline{a} = \overline{a_1} - 2\overline{a_2} + \overline{a_3}$. Найдите:

1) $\left|\overline{a_1}\right|, \left|\overline{a_2}\right|, \left|\overline{a_3}\right|$; 2) $\cos\left(\widehat{\overline{a_1}, \overline{i}}\right)$, $\cos\left(\widehat{\overline{a_2}, \overline{k}}\right)$, $\cos\left(\widehat{\overline{a_3}, \overline{j}}\right)$;

3) координаты вектора $\overline{a}$; 4) $\left(\overline{a}, \overline{a_1}\right)$, $\left(\overline{a}, \overline{a_3}\right)$;

5) $\cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{a_2}}\right)$; 6) $np_{\overline{a_1}}\overline{a}$, $np_{\overline{a}}\overline{a_2}$.

1.4. Найдите значение числа λ, при котором векторы $\overline{a} = 6\overline{i} - l\,\overline{j} + \overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + 5\overline{j} - l\,\overline{k}$ перпендикулярны.

1.5. Вычислите работу, произведенную силой $\overline{F} = (2,\ 4,\ -3)$ при перемещении ее точки приложения из начала в конец вектора $\overline{S} = (2,\ 3,\ -1)$.

II уровень

2.1. Даны векторы $\overline{a} = (1,\ 5,\ 3)$, $\overline{b} = (6,\ -4,\ -2)$, $\overline{c} = (0,\ -5,\ 7)$,

$\overline{d}=(-20,\,27,\,-35)$. Подберите числа a, b, g такие, чтобы векторы $a\overline{a}$, $b\overline{b}$, $g\overline{c}$ и $\overline{d}$ образовали замкнутую ломаную.

2.2. Покажите, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образовывают в пространстве базис и найдите координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе:
1) $\overline{a}=(2,1,-1)$, $\overline{b}=(1,-1,2)$, $\overline{c}=(3,-2,1)$, $\overline{d}=(-8,9,-1)$;
2) $\overline{a}=\overline{i}$, $\overline{b}=\overline{i}+\overline{j}$, $\overline{c}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{d}=(-8,\ 9,\ -1)$.

2.3. Найдите вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a}=(1,-2,-2)$, образующий с вектором $\overline{j}$ острый угол и имеющий длину $|\overline{b}|=15$.

2.4. Найдите вектор $\overline{x}$, образующий со всеми тремя базисными векторами $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ равные острые углы, если $\left|\overline{x}\right|=2\sqrt{3}$.

2.5. Найдите вектор $\overline{x}$, образующий с ортом $\overline{j}$ угол 60°, с ортом $\overline{k}$ – угол 120°, если $\left|\overline{x}\right|=5\sqrt{2}$.

2.6. Вычислите координаты вектора, длина которого равна 8, зная, что с вектором $\overline{j}$ он образует угол 45°, с вектором $\overline{k}$ – угол 60°, с вектором $\overline{i}$ – тупой угол.

2.7. Определите координаты концов отрезка, который точками $C(2, 0, 2)$ и $D(5, -2, 0)$ разделен на три равные части.

2.8. Вычислите скалярное произведение векторов:
1) $\overline{a}=(1, 2\sin 15°, \cos 15°)$ и $\overline{b}=(0,\ \sin 15°,\ 2\cos 15°)$;
2) $\overline{a}=(\cos 60°,\ \mathrm{tg}\,30°,\ 1)$ и $\overline{b}=(\sin 90°,\ \cos 30°,\ \mathrm{tg}\,60°)$.

2.9. Найдите угол между векторами
1) $\overline{a}=(1,\ \cos 20°,\ -\sin 20°)$ и $\overline{b}=(1, \sin 20°, \cos 20°)$;
2) $\overline{a}=(0, \cos 5°, \sin 5°)$ и $\overline{b}=(0,0,1)$.

2.10. Для векторов $\overline{a}=(2,-1,5)$ и $\overline{b}=(3,1,1)$ найдите вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий условиям $\left(\overline{c},\overline{k}\right)=0$, $\left(\overline{c},\overline{a}\right)=1$, $\left(\overline{c},\overline{b}\right)=4$.

III уровень

3.1. Даны три некомпланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Вычислите значения λ, при которых векторы $l\,\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{a}+l\,\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{a}+\overline{b}+l\,\overline{c}$ компланарны.

3.2. Даны три вершины $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, 2)$ и $C(1, 2, -3)$ параллелограмма $ABCD$. Найдите его четвертую вершину D.

3.3. Даны вершины треугольника $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$ и $C(-4, 0, 3)$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A.

3.4. Даны вершины $A(1, -1, -3)$, $B(2, 1, -2)$ и $C(-5, 2, -6)$ треугольника ABC. Вычислите длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

3.5. Треугольник задан координатами своих вершин $A(3, -2\ 1)$, $B(3, 1, 5)$ и $C(4, 0, 3)$. Вычислите расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

3.6. В вершинах треугольника $A(1, -1, 2)$, $B(0, 4, 2)$ и $C(2, -1, 1)$ сосредоточены массы 1, 2, 3 соответственно. Найдите координаты центра масс этой системы.

У к а з а н и е. Из функции известно, что для пары масс m_1 и m_2, сосредоточенных в точках A и B, центр находится в точке, делящей отрезок AB в отношении $l=\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_2}{m_1}$, где l_1 и l_2 – расстояние от соответствующих точек до их центра.

3.7. Даны два вектора: $\overline{a}=(8,\ 4,\ 1)$ и $\overline{b}=(2,\ -2,\ 1)$. Найдите вектор $\overline{c}$, компланарный векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, перпендикулярный вектору $\overline{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\overline{b}$ тупой угол.

3.8. Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найдите координаты вектора $\bar{c}$, если $\bar{a} = (1,\ 1,\ 0)$, $\bar{b} = (0,\ 0,\ 1)$.

3.9. Выразите координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ через координаты в базисе $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ и наоборот, если $\bar{i}' = (\cos j,\ \sin j,\ 0)$, $\bar{j}' = (-\sin j,\ \cos j,\ 0)$, $\bar{k}' = (0,\ 0,\ -1)$.

14.3. Векторное произведение

Векторным произведением $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$;

2) $\left[\bar{a},\bar{b}\right] \perp \bar{a}$, $\left[\bar{a},\bar{b}\right] \perp \bar{b}$;

3) тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \left[\bar{a},\bar{b}\right]$ – правая.

Векторное произведение обозначают также $\bar{a} \times \bar{b}$.

Если хотя бы один из векторов $\bar{a}$ или $\bar{b}$ нулевой, то $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right] = \bar{0}$.

Геометрический смысл векторного произведения $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ состоит в том, что длина этого вектора численно равна площади параллелограмма, который построен на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведенных к общему началу,

$$S = \left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|.$$

Физический смысл векторного произведения состоит в том, что момент $\overline{M}$ силы $\overline{F}$, приложенной к точке A относительно точки O, есть векторное произведение векторов $\overline{OA}$ и $\overline{F}$, т. е.

$$\overline{M} = \left[\overline{OA}, \overline{F}\right].$$

Свойства векторного произведения

1. $\left[\bar{a},\bar{b}\right] = -\left[\bar{b},\bar{a}\right]$;

2. $\left[l\,\bar{a},\bar{b}\right] = \left[\bar{a},\ l\,\bar{b}\right] = l\left[\bar{a},\bar{b}\right]$;

3. $\left[\bar{a},\bar{b}+\bar{c}\right] = \left[\bar{a},\bar{b}\right] + \left[\bar{a},\bar{c}\right]$;

4. $\left[\bar{a},\bar{b}\right] = \bar{0}$ при $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в ортонормированном базисе и $\bar{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\bar{b} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$, то

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right] = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\bar{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\bar{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\bar{k}.$$

Последнюю формулу удобно записать в виде формального определителя третьего порядка

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Пусть $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = 30°$. Найти:

1) $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|$; 2) $\left|\left[\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b}\right]\right|$; 3) $\left|\left[2\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-3\bar{b}\right]\right|$.

Решение. 1) По определению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ его длина

$$\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = 2 \cdot 5 \cdot \sin 30° = 5.$$

2) Используя алгебраические свойства векторного произведения, имеем:

$$\left[\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b}\right] = \left[\bar{a},\bar{a}\right] - \left[\bar{a},\bar{b}\right] + \left[\bar{b},\bar{a}\right] - \left[\bar{b},\bar{b}\right] = \bar{0} - \left[\bar{a},\bar{b}\right] - \left[\bar{a},\bar{b}\right] - \bar{0} =$$
$$= -2\left[\bar{a},\bar{b}\right] = 2\left[\bar{b},\bar{a}\right].$$

Значит, $\left|\left[\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b}\right]\right| = 2 \cdot |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \cdot \sin\left(\widehat{\bar{b},\bar{a}}\right) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin 30° = 10.$

3) Используя свойства векторного произведения и условие задачи, получим:

$$\left|\left[2\bar a+\bar b,\bar a-3\bar b\right]\right| = \left|2\left[\bar a,\bar a\right]-6\left[\bar a,\bar b\right]+\left[\bar b,\bar a\right]-3\left[\bar b,\bar b\right]\right| = \left|7\left[\bar b,\bar a\right]\right| = 7\cdot 5 = 35.$$

Пример 2. Упростить выражение:

1) $\left[\bar i,\bar j+\bar k\right]-\left[\bar j,\bar i+\bar k\right]+\left[\bar k,\bar i+\bar j+\bar k\right]$;

2) $\left(2\bar i,\left[\bar j,\bar k\right]\right)+\left(3\bar i,\left[\bar i,\bar k\right]\right)+\left(4\bar k,\left[\bar i,\bar j\right]\right)$.

Решение. Воспользуемся равенствами $\left[\bar i,\bar j\right]=\bar k$, $\left[\bar j,\bar k\right]=\bar i$, $\left[\bar k,\bar i\right]=\bar j$, $\left[\bar j,\bar i\right]=-\bar k$, $\left[\bar k,\bar j\right]=-\bar i$, $\left[\bar i,\bar k\right]=-\bar j$.

Тогда имеем:

1) $\left[\bar i,\bar j+\bar k\right]-\left[\bar j,\bar i+\bar k\right]+\left[\bar k,\bar i+\bar j+\bar k\right]=\left[\bar i,\bar j\right]+\left[\bar i,\bar k\right]-\left[\bar j,\bar i\right]-\left[\bar j,\bar k\right]+$
$+\left[\bar k,\bar i\right]+\left[\bar k,\bar j\right]+\left[\bar k,\bar k\right]=\bar k-\bar i+\bar k-\bar i+\bar j-\bar i+\bar 0=2\bar k-2\bar i=2\left(\bar k-\bar i\right).$

2) $\left(2\bar i,\left[\bar j,\bar k\right]\right)+\left(3\bar i,\left[\bar i,\bar k\right]\right)+\left(4\bar k,\left[\bar i,\bar j\right]\right)=\left(2\bar i,\bar i\right)+\left(3\bar j,-\bar j\right)+\left(4\bar k,\bar k\right)=$
$=2\bar i^2-3\bar j^2+4\bar k^2=2\left|\bar i\right|^2-3\left|\bar j\right|^2+4\left|\bar k\right|^2=2-3+4=3.$

Пример 3. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\bar p+\bar q$ и $4\bar p-3\bar q$, где $\left|\bar p\right|=\left|\bar q\right|=1$, $\left(\widehat{\bar p,\bar q}\right)=\dfrac{p}{6}$.

Решение. Используем известную из планиметрии формулу площади параллелограмма и геометрический смысл векторного произведения:

$$S_{пар}=\frac{1}{2}\left|\bar d_1\right|\cdot\left|\bar d_2\right|\sin(\widehat{\bar d_1,\bar d_2})=\frac{1}{2}\left|\left[\bar d_1,\bar d_2\right]\right|,$$

где $\bar d_1=2\bar p+\bar q$, $\bar d_2=4\bar p-3\bar q$.

Тогда по свойствам векторного произведения получим:

$$S_{пар}=\frac{1}{2}\left|\left[\bar d_1,\bar d_2\right]\right|=\frac{1}{2}\left|\left[2\bar p+\bar q,4\bar p-3\bar q\right]\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\left|\left[2\bar p,4\bar p\right]-\left[2\bar p,3\bar q\right]+\left[\bar q,4\bar p\right]-\left[\bar q,3\bar q\right]\right|=\frac{1}{2}\left|8\cdot\bar 0-6\left[\bar p,\bar q\right]+4\left[\bar q,\bar p\right]-3\cdot\bar 0\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 10\left|\left[\bar q,\bar p\right]\right|=\frac{1}{2}\cdot 10\left|\bar q\right|\left|\bar p\right|\sin(\widehat{\bar q,\bar p})=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{p}{6}=2{,}5.$$

Пример 4. Вычислить площадь треугольника *ABC* и его высоту, опущенную из вершины *A* к стороне *BC*, если *A*(1, 1, 1), *B*(4, 2, –1), *C*(2, 3, 0).

Решение. Используем тот факт, что $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}S_{\overline{AB},\overline{AC}}$, где $S_{\overline{AB},\overline{AC}}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Так как $S_{\overline{AB},\overline{AC}}=\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|$, найдем сначала $\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]$.

$\overline{AB}=(4-1,\ 2-1,\ -1-1)=(3,\ 1,\ -2);$

$\overline{AC}=(2-1,\ 3-1,\ 0-1)=(1,\ 2,\ -1);$

Вычисляем векторное произведение в координатной форме:

$$\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\3&1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=\bar i\begin{vmatrix}1&-2\\2&-1\end{vmatrix}-\bar j\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}+\bar k\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=3\bar i+\bar j+5\bar k=(3,1,5).$$

Тогда $\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|=\sqrt{3^2+1^2+5^2}=\sqrt{35}.$

Значит, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{35}.$

Для нахождения высоты *h* треугольника *ABC* воспользуемся формулой $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ah.$ Тогда $h=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{a}$, здесь $a=\overline{BC}.$

Значит

$$h=\frac{2S_{\Delta ABC}}{\left|\overline{BC}\right|}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{(2-4)^2+(3-2)^2+(0-(-1))^2}}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt 6}=\frac{\sqrt{210}}{6}.$$

Пример 5. Даны три силы: $\overline{F_1}=(2,\ -1,\ -3)$, $\overline{F_2}=(3,\ 2,\ -1)$, $\overline{F_3}=(-4,1,3)$, приложенные к точке *A*(–1, 4, 2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки *O*(2, 3, –1).

Решение. Пусть сила $\bar F$ – равнодействующая сил $\overline{F_1},\overline{F_2},\overline{F_3}$. Тогда $\bar F=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\overline{F_3}=(2+3-4,\ -1+2+1,\ -3-1+3)=(1,\ 2,\ -1)$. Значит момент $\overline M$ этой силы равен

$$\overline M=\left[\overline{OA},\bar F\right]=\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\-3&1&3\\1&2&-1\end{vmatrix}=\bar i\begin{vmatrix}1&3\\2&-1\end{vmatrix}-\bar j\begin{vmatrix}-3&3\\1&-1\end{vmatrix}+\bar k\begin{vmatrix}-3&1\\1&2\end{vmatrix}=$$
$$=-7\bar i-7\bar k=(-7,\ 0,\ -7).$$

Вычисляем $|\overline{M}|=\sqrt{(-7)^2+(-7)^2}=7\sqrt{2}$. Для нахождения направляющих косинусов используем формулы (14.9):

$$\cos\left(\overline{M}\,\hat{,}\,\overline{i}\right)=-\frac{7}{7\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}};\qquad \cos\left(\overline{M}\,\hat{,}\,\overline{j}\right)=\frac{0}{7\sqrt{2}}=0;$$

$$\cos\left(\overline{M}\,\hat{,}\,\overline{k}\right)=-\frac{7}{7\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задания

I уровень

1.1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ такие, что $\left|\overline{a}\right|=2$, $\left|\overline{b}\right|=3$, $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=\frac{p}{3}$. Вычислите:

1) $\left|\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right|$; 2) $\left|\left[2\overline{a}-3\overline{b},\ 5\overline{a}+\overline{b}\right]\right|$; 3) $\left|\left[\overline{a},\ \overline{b}+\overline{a}\right]\right|$.

1.2. Для векторов $\overline{a}=3\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$ найдите:

1) $\left[\overline{a},\overline{b}\right]$; 2) $\left[\overline{a}+\overline{b},\ \overline{a}-\overline{b}\right]$; 3) $\left|\left[2\overline{a}-\overline{b},\ 3\overline{a}+\overline{b}\right]\right|$.

1.3. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=(0,-1,1)$ и $\overline{b}=(1,1,1)$.

II уровень

2.1. Докажите, что $\left[\overline{a}-\overline{b},\ \overline{a}+\overline{b}\right]=2\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]$, и выясните геометрический смысл этого тождества.

2.2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ были коллинеарными?

2.3. $\left|\overline{a}\right|=4$, $\left|\overline{b}\right|=5$, $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=\frac{p}{4}$. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}-2\overline{b}$ и $3\overline{a}+2\overline{b}$.

2.4. $\left|\overline{a}\right|=2$, $\left|\overline{b}\right|=5$, $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=\frac{p}{6}$. Выразите через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ единичный вектор $\overline{c_0}$, перпендикулярный векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и такой, что:

1) тройка векторов $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c_0}\right)$ – правая;

2) тройка векторов $\left(\overline{b},\overline{c_0},\overline{a}\right)$ – левая.

2.5. Вычислите площадь треугольника с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(3, 4,2)$.

2.6. Сила $\overline{F}=(2,\ 2,\ 9)$ приложена к точке $A(4, 2, –3)$. Вычислите величину $\left|\overline{M}\right|$ момента $\overline{M}$ этой силы относительно точки $O(2, 4, 0)$.

III уровень

3.1. Вычислите длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=-\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$. Докажите, что этот параллелограмм является прямоугольником.

3.2. Найдите составляющую вектора $\overline{a}=(-1,\ 2,\ 0)$, перпендикулярную плоскости векторов $\overline{e_1}=(1,\ 0,\ 1)$ и $\overline{e_2}=(1,\ 1,\ 1)$.

3.3. Найдите синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=(2,1,-1)$ и $\overline{b}=(1,-3,1)$.

3.4. Сила $\overline{F}$ приложена к точке $B(2, –3, 4)$ и перпендикулярна оси Ox. Момент $\overline{M}$ этой силы относительно точки $A(4, 0, –2)$ равен $\overline{M}=(12,-8,6)$. Найдите $|\overline{F}|$.

3.5. Докажите, что для вектора $\left[\overline{a},\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right]$, который называется двойным векторным произведением, справедливо отношение

$$\left[\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]=\bar{b}\left(\bar{a},\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a},\bar{b}\right).$$

3.6. Найдите $\left[\bar{a},\ \left[\bar{b},\ \bar{c}\right]\right]-\left[\bar{m},\ \left[\bar{n},\ \bar{p}\right]\right]$, если $\bar{a}=(1,\ 2,\ -2)$, $\bar{b}=(-2,\ 3,\ 1)$, $\bar{c}=(2,\ -2,\ 2)$, $\bar{m}=(-1,\ 3,\ 5)$, $\bar{n}=(1,\ 0,\ -2)$, $\bar{p}=(3,\ -2,\ 2)$.

У к а з а н и е. Можно воспользоваться формулой из предыдущей задачи 3.5.

14.4. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением $\left(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\right)$ трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, определяемое соотношением $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)$.

Если хотя бы один из векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – нулевой, то их смешанное произведение равно нулю.

Геометрический смысл смешанного произведения векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ состоит в том, что его абсолютное значение равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, приведенных к общему началу:

$$V=\left|\left(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\right)\right|.$$

Свойства смешанного произведения

1. $\left(\bar{a},\bar{c},\bar{b}\right)=\left(\bar{c},\bar{b},\bar{a}\right)=\left(\bar{b},\bar{a},\bar{c}\right)=-\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$;
2. $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{b},\bar{c},\bar{a}\right)=\left(\bar{c},\bar{a},\bar{b}\right)$;

   $\left(\bar{a},\bar{c},\bar{b}\right)=\left(\bar{c},\bar{b},\bar{a}\right)=\left(\bar{b},\bar{a},\bar{c}\right)=-\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$;
3. $\left(a_1\bar{a}_1+a_2\bar{a}_2,\bar{b},\bar{c}\right)=a_1\left(\bar{a}_1,\bar{b},\bar{c}\right)+a_2\left(\bar{a}_2,\bar{b},\bar{c}\right)$, где $a_1,a_2\in\mathbf{R}$;
4. $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=0$ при $\bar{a}\neq\bar{0}$, $\bar{b}\neq\bar{0}$, $\bar{c}\neq\bar{0}$ тогда и только тогда, когда $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – компланарные векторы;
5. векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют базис в трехмерном пространстве при условии $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\neq 0$;
6. если $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})>0$, то векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют правую тройку; если $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})<0$, – левую.

В случае, когда векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ заданы в ортонормированном базисе координатами $\bar{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\bar{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $\bar{c}=(x_3,\ y_3,\ z_3)$, их смешанное произведение может быть найдено по формуле

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \tag{14.11}$$

Пример 1. Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=3$. Вычислить их смешанное произведение.

Решение. По определению $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)$. Вектор $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ образует с $\bar{a}$ и $\bar{b}$ правую тройку, причем $\left[\bar{a},\bar{b}\right]\perp\bar{a}$, $\left[\bar{a},\bar{b}\right]\perp\bar{b}$. Значит, $\left[\bar{a},\bar{b}\right]\uparrow\uparrow\bar{c}$. Кроме того, $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\sin\left(\bar{a}\hat{\ ,}\bar{b}\right)=1\cdot 2\cdot\sin\frac{p}{2}=2$. Тогда $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cos\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right]\hat{\ ,}\bar{c}\right)=2\cdot 3\cdot\cos 0=6.$

Пример 2. Для векторов $\bar{a}=(1,\ -3,\ 2)$, $\bar{b}=(-2,\ 2,\ 1)$ и $\bar{c}=(4,\ 1,\ -1)$ найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, приведенных к общему началу, и определить ориентацию этой тройки векторов.

Решение. Используем формулу (4.11) для вычисления смешанного произведения в координатной форме:

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ 4 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}9 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 1 & -1\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}9 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-\left(27+2\right)=-29.$$

Поскольку получили отрицательное значение, то тройка векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ является левой, а объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения, т. е.

$$V_{\bar a,\bar b,\bar c}=\left|\left(\bar a,\bar b,\bar c\right)\right|=|-29|=29.$$

Пример 3. Доказать, что точки $A(1,\ 2,\ -1)$, $B(0,\ 1,\ 5)$, $C(-1,\ 2,\ 1)$ и $D(2,\ 1,\ 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Рассмотрим три вектора:

$$\overline{AB}=\left(0-1,\ 1-2,\ 5+1\right)=(-1,\ -1,\ 6),$$

$$\overline{AC}=\left(-1-1,\ 2-2,\ 1+1\right)=(-2,\ 0,\ 2),$$

$$\overline{AD}=\left(2-1,\ 1-2,\ 3+1\right)=(1,\ -1,\ 4).$$

Вычисляем их смешанное произведение:

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1&-1&6\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&6\\-2&0&2\\2&0&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&2\\2&-2\end{vmatrix}=0,$$

Поскольку оно равно нулю, то это значит, что векторы $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$ – компланарны. Они лежат в одной плоскости, так как имеют общее начало. Таким образом, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример 4. Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\overline{OA}=3\bar i+4\bar j$, $\overline{OB}=-3\bar j+\bar k$, $\overline{OC}=2\bar j+5\bar k$.

Решение. Используем формулу

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}V_{пар},$$

где $V_{пар}$ – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Объем параллелепипеда вычисляется через смешанное произведение

$$V_{пар}=|\left(\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC}\right)|.$$

Поскольку

$$\left(\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC}\right)=\begin{vmatrix}3&4&0\\0&-3&1\\0&2&5\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-3&1\\2&5\end{vmatrix}=3\cdot(-15-2)=-51,$$

то $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}|-51|=8{,}5.$

Пример 5. Вершины треугольника расположены в точках $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(2,\ 3,\ 2)$ и $C(4,\ 2,\ 5)$. Найти расстояние от точки $D(5,\ 3,\ 6)$ до плоскости ΔABC.

Решение. Убедимся, что точка D не лежит в одной плоскости с точками A, B и C, для чего найдем смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Если оно будет не нулевым, то тем самым будет доказано, что векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ не являются компланарными, а значит, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Так как $\overline{AB}=\left(2-1,3-1,2-1\right)=(1,2,1)$, $\overline{AC}=\left(4-1,2-1,5-1\right)=(3,1,5)$, $\overline{AD}=\left(5-1,\ 3-1,\ 6-1\right)=(4,\ 2,\ 5)$, то смешанное произведение равно

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&1&4\\4&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&0&-7\\3&1&4\\-2&0&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&-7\\-2&-3\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Значит, $V_{\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}}=1.$

Поскольку расстояние h от точки D до плоскости ΔABC численно равно высоте параллелепипеда, опущенной из вершины D на основание, в котором лежит ΔABC, то из формулы $V_{\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}}=S_{\overline{AB},\overline{AC}}\cdot h$ находим

$$h=\frac{V_{\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}}}{S_{\overline{AB},\overline{AC}}}=\frac{\left|\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)\right|}{\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|}=\frac{1}{\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|}.$$

Найдем $\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|$. Поскольку

$$\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\1&2&1\\3&1&4\end{vmatrix}=\bar i(8-1)-\bar j(4-3)+\bar k(1-6)=7\bar i-\bar j-5\bar k=(7,-1,-5),$$

то $\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|=\sqrt{7^2+(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}.$

Таким образом, $h=\dfrac{1}{5\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$, т. е. искомое расстояние равно $\dfrac{\sqrt{3}}{15}$.

Пример 6. Доказать, что векторы $\bar a,\ \bar b,\ \bar c$ компланарны, если $2\left[\bar a,\bar b\right]+\left[\bar b,\bar c\right]+3\left[\bar c,\bar a\right]=\bar 0.$.

Решение. Умножим скалярно данное равенство на вектор $\bar a$:

$$2\left(\bar a,\left[\bar a,\bar b\right]\right)+\left(\bar a,\left[\bar b,\bar c\right]\right)+3\left(\bar a,\left[\bar c,\bar a\right]\right)=0.$$

Так как $\left(\bar a,\left[\bar a,\bar b\right]\right)=\left(\bar a,\left[\bar c,\bar a\right]\right)=0$, то $\left(\bar a,\left[\bar b,\bar c\right]\right)=0$ или векторы

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны.

Доказанное можно обобщить на случай, когда задано равенство $a\left[\bar{a},\bar{b}\right]+b\left[\bar{b},\bar{c}\right]+g\left[\bar{c},\bar{a}\right]=\bar{0}$, где a, b, g – числа, среди которых, по крайней мере, есть одно ненулевое.

Задания

I уровень

1.1. Вычислите смешанное произведение векторов:

1) $(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$; 2) $(\bar{k},\bar{j},\bar{i})$; 3) $(\bar{j},\bar{i},\bar{k})$; 4) $(\bar{i},\bar{j},\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})$.

1.2. Определите ориентацию тройки векторов:

1) $(\bar{j},\bar{k},\bar{i})$; 2) $(\bar{i}+\bar{j},\ \bar{j}-\bar{k},\ \bar{k})$;

3) $(\bar{i}+\bar{k},\ \bar{j}+2\bar{k},\ 2\bar{i})$; 4) $(\bar{j}-2\bar{k},\ \bar{i}+\bar{k},\ 2\bar{i})$.

1.3. Вычислите смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и укажите ориентацию тройки векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

1) $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{c}=8\bar{i}+6\bar{j}+4\bar{k}$;

2) $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{c}=2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$;

3) $\bar{a}=(13,12,11)$, $\bar{b}=(24,23,22)$, $\bar{c}=(35,34,33)$;

4) $\bar{a}=(1,3,5)$, $\bar{b}=(2,4,6)$, $\bar{c}=(8,9,7)$.

II уровень

2.1. Выясните, компланарны ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

1) $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=9\bar{i}-11\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{c}=2\bar{i}+4\bar{j}-2\bar{k}$;

2) $\bar{a}=8\bar{i}-3\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$;

3) $\bar{a}=(-2,-1,1)$, $\bar{b}=(4,-4,1)$, $\bar{c}=(4,-6,2)$;

4) $\bar{a}=(1,1,1)$, $\bar{b}=(1,0,1)$, $\bar{c}=(0,1,1)$.

2.2. Установите, образуют ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ базис, если:

1) $\bar{a}=(2,3,-1)$, $\bar{b}=(1,-1,3)$, $\bar{c}=(1,9,-11)$;

2) $\bar{a}=(3,-1,2)$, $\bar{b}=(2,1,2)$, $\bar{c}=(3,-1,-2)$.

2.3. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

1) $\bar{a}=(1,\ -1,\ 2)$, $\bar{b}=(3,2,0)$, $\bar{c}=(-1,\ 1,\ 1)$;

2) $\bar{a}=(1,0,1)$, $\bar{b}=(0,-2,1)$, $\bar{c}=(1,\ 3,\ 0)$.

III уровень

3.1. Вычислите объем тетраэдра с вершинами в точках *A*(1, 1, 1), *B*(2, 3, 2), *C*(4, 2, 5) и *D*(5, 3, 6) и высоту, опущенную на грань *ABC* из вершины *D*.

3.2. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 30°, $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=3$. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Зная, что $|\bar{c}|=3$, вычислите $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.

3.3. Даны два вектора $\bar{a}=(11,10,2)$ и $\bar{b}=(4,0,3)$. Найдите единичный вектор $\bar{c}$, перпендикулярный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ была правой.

3.4. Упростите:

1) $(\bar{a}+\bar{c},\bar{b},\bar{a}+\bar{b})$; 2) $(\bar{a}-\bar{b},\bar{a}-\bar{b}-\bar{c},\bar{a}+2\bar{b}-\bar{c})$;

3) $(\bar{a}+\bar{b},\bar{b}+\bar{c},\bar{c}+\bar{a})$; 4) $(\bar{a},\bar{b}-\bar{c},\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c})$.

3.5. Для тетраэдра *SABC*, заданного вершинами *S*(1, 0, –1), *A*(1, 2, 1), *B*(–1, 1, 5) и *C*(–2, 0, 1), найдите:

1) угол между ребрами $\overline{SA}$ и $\overline{SB}$, $\overline{SA}$ и $\overline{BC}$;

2) площадь основания *ABC*;

3) высоту тетраэдра (из вершины *S*).

14.5. Цилиндрическая и сферическая системы координат

Цилиндрические координаты являются обобщением полярных на случай трехмерного пространства.

Рассматривается координатная плоскость xOy с полюсом O и полярной осью Ox. Пусть M – произвольная точка пространства, а M_1 – ее проекция на плоскость xOy. ***Цилиндрическими координатами*** точки M называются три числа r, j, z, где r, j – полярные координаты точки M_1, $z = np_{Oz}\overline{M_1M}$ (рис. 14.4), $r \ge 0$, $j \in [0, 2p)$ или $j \in (-p, p]$, $z \in \mathbf{R}$.

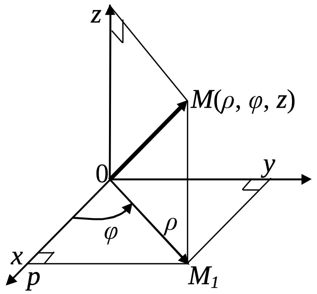


Рис. 14.4

Прямоугольные координаты x, y, z точки M будут связаны с цилиндрическими формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos j, \\ y = r\sin j, \\ z = z. \end{cases} \qquad (14.12)$$

Сферическими координатами точки M называются три числа r, j, q, где $r = \left|\overline{OM}\right|$, j – полярный угол точки M_1, а $q = \left(Oz \hat{,} \overline{OM}\right)$ (рис. 14.5), $r \ge 0$, $j \in [0, 2p)$ или $j \in (-p, p]$, $\Theta \in [0, p]$.

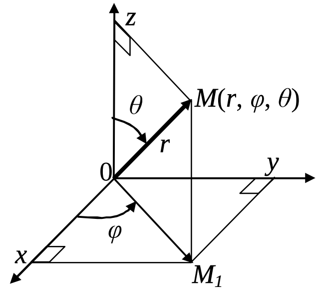


Рис. 14.5

Прямоугольные координаты точки M связывают со сферическими формулами:

$$\begin{cases} x = r\sin q\cos j, \\ y = r\sin q\sin j, \\ z = r\cos q. \end{cases} \qquad (14.13)$$

Пример 1. Найти цилиндрические координаты по их прямоугольным координатам, если $A\left(\sqrt{3}, 1, -2\right)$, $B(-1, 0, 3)$, $\tilde{N}\left(\cos\frac{p}{4}, -\sin\frac{p}{4}, -3\right)$, $D\left(-\sin\frac{7p}{8}, \cos\frac{7p}{8}, 5\right)$.

Решение. Используем рис. 14.4. Исходя из определения цилиндрических координат, имеем:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos j = \frac{x}{r}, \quad \sin j = \frac{y}{r}.$$

Точка $A(\sqrt{3}, 1, 2)$ имеет координаты $x = \sqrt{3}$, $y = 1$, $z = -2$. Значит, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Для нахождения j удобно использовать $\operatorname{tg} j$ с учетом четверти, в которой находится проекция A_1 точки A на плоскость xOy (рис. 14.6), а именно: $\operatorname{tg} j = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $A_1 \in$ I четверти, значит, $j = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{p}{6}$.

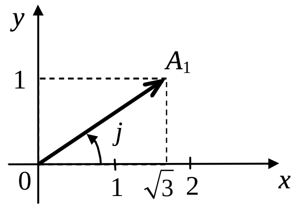


Рис. 14.6

Осталось добавить $z = -2$. Таким образом, в цилиндрической системе координат $A\left(2,\ \frac{p}{6},\ -2\right)$.

Рассмотрим точку $B(-1,\ 0,\ 3)$. Для наглядности изобразим ее проекцию B_1 на плоскость xOy (рис. 14.7).

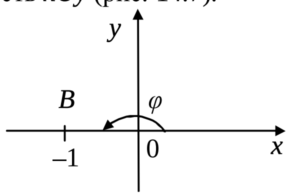


Рис. 14.7

Очевидно, что $r = 1$ $\left(r = \left|\overline{OB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1\right)$, $j = p$, остается добавить $z = 3$. Таким образом, в цилиндрической системе координат $B(1,\ p,\ 3)$.

Точка $C\left(\cos\frac{p}{4},\ -\sin\frac{p}{4},\ -3\right)$ имеет в плоскости xOy проекцию $C_1\left(\cos\frac{p}{4},\ -\sin\frac{p}{4}\right)$ (рис. 14.8), для которой $r = \sqrt{\cos^2\frac{p}{4} + \left(-\sin\frac{p}{4}\right)^2} = 1.$

Находим полярный угол

$$j = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sin\frac{p}{4}}{\cos\frac{p}{4}}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{p}{4}\right) = -\frac{p}{4},$$

так как C_1 находится в IV четверти (рис. 14.8).

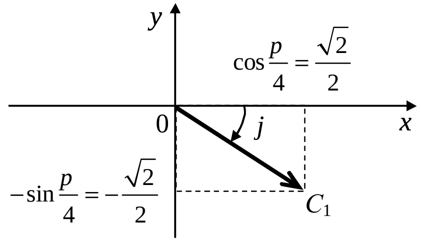


Рис. 14.8

Таким образом, в цилиндрической системе координат получаем $C\left(1, -\frac{p}{4}, -3\right)$.

Точка $D\left(-\sin\frac{7p}{8}, \cos\frac{7p}{8}, 5\right)$ имеет проекцией на плоскость xOy точку $D_1\left(-\sin\frac{7p}{8},\ \cos\frac{7p}{8}\right)$, находящуюся в III четверти (рис. 14.9).

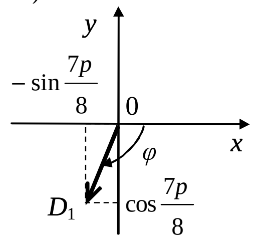


Рис. 14.9

Так как $\sin\frac{7p}{8} = \sin\frac{p}{8} > 0$, $\cos\frac{7p}{8} = -\cos\frac{p}{8} < 0$, причем $\sin\frac{p}{8} < \cos\frac{p}{8}$.

Для нее $r = \sqrt{\left(-\sin\frac{7p}{8}\right)^2 + \cos^2\frac{7p}{8}} = 1,$

$$j = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\cos\frac{7p}{8}}{\sin\frac{7p}{8}}\right) - p = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{ctg}\frac{7p}{8}\right) - p = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{p}{8}\right) - p =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{p}{2} - \frac{p}{8}\right)\right) - p = \frac{p}{2} - \frac{p}{8} - p = \frac{4p - p - 8p}{8} = -\frac{5p}{8}.$$

Итак, $D\left(1, -\frac{5p}{8}, 5\right)$.

Пример 2. Найти сферические координаты точек $A(1, 1, 1)$, $B(-4, 8, -1)$, $C(-1, -2, -2)$ и $D(-9, 0, 0)$.

Решение. Используем рис. 14.5. Сферические координаты точки $M(x, y, z)$ выражаются через декартовы следующим образом:

$$r = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

φ – полярный угол проекции $M_1(x, y)$ точки M на плоскости xOy.

$q = \left(Oz \hat{,} \overline{OM}\right)$, что позволит для его нахождения использовать формулу

$$\cos q = \frac{\left(\bar{k}, \overline{OM}\right)}{\left|\bar{k}\right| \cdot \left|\overline{OM}\right|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

где $\bar{k}$ – единичный вектор оси Oz.

Рассмотрим точку $A(1, 1, 1)$ и ее проекцию $A_1(1, 1)$ на плоскость xOy (рис. 14.10).

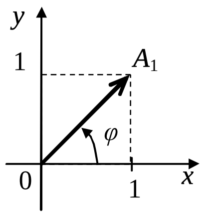


Рис. 14.10

Для них $r = \left|\overline{OA}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$; $j = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \operatorname{arctg}1 = \frac{p}{4}$, поскольку A_1 лежит в I четверти, то $\cos q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ или $q = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, в сферической системе координат точка $A\left(\sqrt{3},\ \frac{p}{4},\ \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Для точки $B(-4, 8, -1)$ имеем $r = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-1)^2} = 9$, проекция $B_1(-4, 8)$ на плоскость xOy определяется полярным углом $j = \operatorname{arctg}\left(-\frac{8}{4}\right) + p = p - \operatorname{arctg}2$ (рис. 14.11).

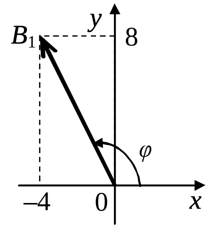


Рис. 14.11

Получаем $\cos q = -\frac{1}{9}$, откуда $q = p - \arccos\frac{1}{9}$. Таким образом, в сферической системе координат $B\left(9, p - \arccos 2, p - \arccos\frac{1}{9}\right)$.

Прямоугольные координаты точки $C(-1, -2, -2)$ и ее проекции $C_1(-1, -2)$ на плоскость xOy (рис. 14.12) позволяют найти сферические координаты точки C:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3,\ \ j = \operatorname{arctg}2 - p,\ \ q = p - \arccos\frac{2}{3}.$$

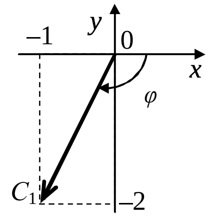


Рис. 14.12

Таким образом, в сферической системе координат

$$C\left(3, \operatorname{arctg} 2 - p, p - \arccos\frac{2}{3}\right).$$

Точка $D(-9, 0, 0)$ и ее проекция $D_1(-9, 0)$ на плоскость xOy приводят к сферическим координатам $r = \sqrt{(-9)^2 + 0^2 + 0^2} = 9$, $j = p$, $q = \arccos 0 = \frac{p}{2}$, т. е. в сферической системе координат $D\left(9,\ p,\ \frac{p}{2}\right)$.

Пример 3. Найти прямоугольные координаты точек A и B, если цилиндрические координаты точки $A\left(1, \frac{3p}{4}, -2\right)$, а сферические координаты точки $B\left(2,\ \dfrac{4p}{3},\ \dfrac{5p}{6}\right)$.

Решение. Поскольку точка $A\left(1, \dfrac{3p}{4}, -2\right)$ задана в цилиндрической системе координат, т. е. $r = 1$, $j = \dfrac{3p}{4}$, $z = -2$, то прямоугольные координаты находим по формулам (14.12):

$$x = r\cos j = 1\cdot\cos\frac{3p}{4} = 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y = r\sin j = 1\cdot\sin\frac{3p}{4} = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z = -2.$$

Итак, в прямоугольной декартовой системе координат $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -2\right)$.

Точка $B\left(2,\ \dfrac{4p}{3},\ \dfrac{5p}{6}\right)$ задана в сферической системе координат, что значит $r = 2$, $j = \dfrac{4p}{3}$, $q = \dfrac{5p}{6}$. Для нахождения прямоугольных координат используем формулы (14.13):

$$x = r\sin q\cos j = 2\sin\frac{5p}{6}\cos\frac{4p}{3} = 2\sin\frac{p}{6}\left(-\cos\frac{p}{3}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$y = r\sin q\sin j = 2\sin\frac{5p}{6}\sin\frac{4p}{3} = 2\sin\frac{p}{6}\left(-\sin\frac{p}{3}\right) = -2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z = r\cos q = 2\cos\frac{5p}{6} = -2\cos\frac{p}{6} = -2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

Таким образом, в прямоугольной системе координат

$$B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}\right).$$

Пример 4. Определить фигуры, заданные в цилиндрической системе координат соотношениями:

1) $r = 2$; 2) $\begin{cases} r \le 2, \\ -\dfrac{p}{4} < j < \dfrac{p}{4}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} r > 1, \\ z < 2. \end{cases}$

Решение. 1) Для цилиндрической системы координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, где *x*, *y* – декартовы координаты проекции (при переменном значении r). Условие $r = 2$ означает, что если $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z \in \mathbf{R}$, значит задан круговой цилиндр.

2) Условие $r \le 2$ в декартовых координатах означает $x^2 + y^2 \le 4$. Последнее условие определяет в пространстве внутреннюю область цилиндра с его границей – круговой цилиндрической поверхностью.

Уравнения $j = \dfrac{p}{4}$ и $j = -\dfrac{p}{4}$ задают полуплоскости, которые образуют двугранный угол. Условие $-\dfrac{p}{4} < j < \dfrac{p}{4}$ означает внутреннюю область двугранного угла. Система неравенств определяет пересечение внутренней области двугранного угла и замкнутой внутренней области цилиндра.

3) Заданное условие в декартовых координатах имеет вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1, \\ z < 2. \end{cases}$$

Условие задает пересечение двух открытых полупространств. Одно представляет внешнюю область кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, а второе – часть пространства, ограниченного сверху плоскостью $z = 2$.

Пример 5. Фигуры заданы в прямоугольных координатах. Найти уравнения этих фигур в соответствующих цилиндрических координатах:

1) $x = 0$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 3 = 0$.

Решение. 1) Условие $x = 0$ в пространстве определяет координатную плоскость *yOz*. Используя первую формулу из (14.12), имеем $r\cos j = 0$. Получили уравнение координатной плоскости *yOz* в цилиндрических координатах.

2) Выделяя полный квадрат относительно *z*, приходим к уравнению $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2^2$. Оно задает в пространстве сферу с центром (0, 0, – 1) и радиусом 2.

Пример 6. В прямоугольных координатах известны уравнения фигур:

1) $x^2+(y-1)^2+z^2=1$; 2) $z=2$.

Написать эти уравнения в сферических координатах.

Решение. 1) Запишем уравнение $x^2+(y-1)^2+z^2=1$ в виде $x^2+y^2-2y+1+z^2=1$ или $x^2+y^2+z^2-2y=0$. Тогда, учитывая, что $x^2+y^2+z^2=r^2$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, имеем:

$$r^2-2r\sin\theta\sin\varphi=0.$$

2) Поскольку $z=r\cos\theta$, то уравнение $z=2$ примет вид: $r\cos\theta=2$.

Задания

I уровень

1.1. Найдите прямоугольные координаты точек по их цилиндрическим координатам:

1) $A\left(1, \frac{\pi}{2}, 2\right)$; 2) $B(2, \pi, -3)$; 3) $C\left(1, \frac{\pi}{4}, 2\right)$;

4) $D\left(1, \frac{5\pi}{6}, -1\right)$; 5) $E\left(2, \frac{4\pi}{3}, -8\right)$; 6) $F\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}, 3\right)$.

1.2. Найдите прямоугольные координаты точек по их сферическим координатам:

1) $A\left(1, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$; 2) $B(2, 0, \pi)$; 3) $C\left(3, \pi, \frac{\pi}{6}\right)$;

4) $D\left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$; 5) $E\left(1, -\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right)$; 6) $F\left(2, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$;

1.3. Запишите уравнение фигуры в цилиндрических координатах:

1) $y=0$; 2) $x^2+y^2+z^2=4$; 3) $x-y+z-2=0$.

1.4. Запишите уравнение фигуры в сферических координатах:

1) $x^2+y^2+z^2=4$; 2) $x^2+y^2=1$; 3) $y=3$.

II уровень

2.1. Найдите цилиндрические координаты точки по прямоугольным координатам:

1) $A(3, -4, 5)$; 2) $B(1, 1, 1)$;

3) $C\left(4\cos\frac{\pi}{6}, -4\sin\frac{\pi}{6}, -2\right)$; 4) $D(-6, 0, 8)$.

2.2. Найдите сферические координаты точек по прямоугольным координатам:

1) $A(3, 4, 5)$; 2) $B(0, -4, 3)$;

3) $C(-2, -2, -1)$; 4) $D(1, -1, -1)$.

2.3. Найдите цилиндрические координаты точки M, зная, что вектор $\overline{OM}$ составляет с координатными осями углы $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$ и $\left|\overline{OM}\right|=1$.

2.4. Найдите сферические координаты точки M, зная, что вектор $\overline{OM}$ составляет с осями Ox и Oy углы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$ и третья координата точки M $z=-1$.

2.5. Вычислите $\left(\overline{OM}, \hat{\ } \bar{j}\right)$, зная цилиндрические координаты ρ, φ, z точки M.

2.6. Найдите прямоугольные координаты точки, принадлежащей сфере радиусом 1, зная ее широту $\theta=45°$ и долготу $\varphi=330°$.

III уровень

3.1. Определите цилиндрические и сферические координаты точки, заданной в прямоугольных координатах:

1) $A(2, 1, -4)$; 2) $B\left(\sin\frac{5\pi}{6}, \cos\frac{5\pi}{6}, 1\right)$;

3) $C\left(-1,\ \mathrm{tg}\frac{p}{8},\ 2\right)$; 4) $D(0,\ -4,\ -7)$.

3.2. Найдите, какие фигуры определяются соотношениями, заданными в цилиндрических координатах:

1) $j = \frac{p}{4}$; 2) $\begin{cases} r = 1, \\ j = \frac{p}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} z > 0, \\ z < 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 0 \le j \le \frac{p}{4}, \\ 0 < z < 1. \end{cases}$

3.3. Найдите, какие фигуры определяются соотношениями, заданными в сферических координатах:

1) $r = 3$; 2) $j = \frac{p}{3}$; 3) $q = \frac{p}{4}$; 4) $\begin{cases} r = 3, \\ j = \frac{p}{3}. \end{cases}$

15. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

15.1. Плоскость в пространстве

Пусть P – плоскость, для которой требуется построить уравнение, $M(x, y, z)$ – произвольная точка этой плоскости.

1. Если задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости P и два неколлинеарных вектора $\overline{a_1} = (k_1, l_1, m_1)$ и $\overline{a_2} = (k_2, l_2, m_2)$, параллельных данной плоскости, то справедливо ***векторно-параметрическое*** уравнение плоскости P

$$\overline{r} = \overline{r_0} + s\overline{a_1} + t\overline{a_2}, \qquad (15.1)$$

где $\overline{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ – радиус-вектор точки M_0, $s, t \in \mathbf{R}$.

Запись уравнения (15.1) в координатной форме

$$\begin{cases} x = x_0 + sk_1 + tk_2, \\ y = y_0 + sl_1 + tl_2, \\ z = z_0 + sm_1 + tm_2 \end{cases} \qquad (15.2)$$

называется ***параметрическими*** уравнениями плоскости.

Кроме того, исходные данные позволяют записать уравнение плоскости P и с помощью определителя

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (15.3)$$

2. Если известны три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ плоскости P, не лежащие на одной прямой, то аналогично (15.3) можно построить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (15.4)$$

3. Если известны точки пересечения плоскости P с координатными осями, т. е. $M_0(a, 0, 0)$, $M_1(0, b, 0)$, $M_2(0, 0, c)$, то справедливо уравнение плоскости «*в отрезках*»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (15.5)$$

4. Если задан нормальный вектор $\overline{n} = (A, B, C) \perp P$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости P, то справедливо уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (15.6)$$

на основании которого выводится *общее уравнение плоскости* P

$Ax + By + Cz + D = 0,$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

5. В качестве нормального вектора плоскости P можно взять единичный вектор $\overline{n_0}$, направленный из начала координат в сторону плоскости, т. е. $\overline{n_0} = (\cos a, \cos b, \cos g)$, где $a = (\widehat{\overline{n_0}, Ox})$, $b = (\widehat{\overline{n_0}, Oy})$, $g = (\widehat{\overline{n_0}, Oz})$. Тогда справедливо нормальное уравнение плоскости

$$x\cos a + y\cos b + z\cos g - ð = 0, \qquad (15.7)$$

где $p > 0$ – расстояние от начала координат до плоскости.

Величина

$$d(M_0, P) = x_0\cos a + y_0\cos b + z_0\cos g - p \qquad (15.8)$$

называется ***отклонением*** точки M_0 от плоскости P. При этом: $d < 0$, если M_0 и $O(0, 0, 0)$ лежат по одну сторону от плоскости; $d > 0$ – если лежат по разные стороны; $d = 0$, если $M_0 \in P$. Расстояние $d(M_0, P)$ от точки M_0 до плоскости P равно абсолютному значению ее отклонения, т. е.

$d(M_0, P) = |x_0\cos a + y_0\cos b + z_0\cos g - p|.$

От общего уравнения плоскости к нормальному можно перейти с помощью умножения на нормирующий множитель

$$m = -\frac{\operatorname{sign} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (15.9)$$

Расстояние $d(M_0, P)$ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, может быть найдено по формуле

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (15.10)$$

Угол j между плоскостями в пространстве определяется по косинусу угла между нормальными векторами $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ этих плоскостей:

$$\cos j = \cos(\overline{n_1}, \widehat{\ } \overline{n_2}) = \frac{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}. \qquad (15.11)$$

Пример 1. Записать общее уравнение плоскости, проходящей через точку $N(1, -1, 2)$ параллельно векторам $\overline{a_1} = (0, 1, -2)$ и $\overline{a_2} = (-1, 2, 3)$.

Решение*. 1-й способ.* Поскольку векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ не коллинеарны (их соответствующие координаты не являются пропорциональными), то, согласно формуле (15.3), справедливо уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} y+1 & z-2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (x-1)(3+4) -$$

$$-\big((y+1)(-2) - (z-2)\big) = 7(x-1) - (-2y - 2 - z + 2) = 7x - 7 + 2y + z.$$

Таким образом, получаем общее уравнение искомой плоскости:

$7x + 2y + z - 7 = 0.$

2-й способ. Найдем нормальный вектор плоскости, используя векторное произведение векторов $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$:

$$\overline{n} = \left[\overline{a_1}, \overline{a_2}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\overline{k} =$$

$$= 7\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k} = (7;\ 2;\ 1).$$

Тогда, согласно уравнению (15.6), имеем:

$7(x-1) + 2(y+1) + 1(z-2) = 0,$

$7x + 2y + z - 7 = 0.$

Пример 2. Записать общее уравнение плоскости P, проходящей через точки $M_1(1, 0, 2)$ и $M_2(-1, 2, 3)$ параллельно вектору $\overline{a} = (1, 2, 1)$.

Решение. Векторы $\overline{M_1M_2} = (-1-1, 2-0, 3-2) = (-2, 2, 1)$ и $\overline{a} = (1, 2, 1)$ не коллинеарны. Если точка $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости, то векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{a}$ компланарны. Поэтому, согласно формуле (15.3), уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем общее уравнение $3y - 6z + 12 = 0$.

Задачу можно решить и вторым способом, если найти нормальный вектор плоскости (см. 2-й способ решения примера 1).

Пример 3. Записать уравнение плоскости $2x - 4y - z + 2 = 0$:

1) «в отрезках»;

2) в параметрическом виде.

Решение. Запишем уравнение плоскости в виде $2x - 4y - z = -2$, откуда после деления на –2 получим искомое уравнение «в отрезках»:

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{2} = 1.$$

Из полученного уравнения «в отрезках» имеем точки $M_0(-1, 0, 0)$, $M_1\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ и $M_2(0, 0, 2)$, которые лежат в заданной плоскости. Тогда в качестве двух неколлинеарных векторов $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$, параллельных плоскости, можно взять $\overline{a_1} = \overline{M_0M_1} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ и $\overline{a_2} = \overline{M_0M_2} = (1, 0, 2)$. Используя параметрические уравнения плоскости (15.2), получим:

$$\begin{cases} x = -1 + s + t, \\ y = \frac{1}{2}s, \\ z = 2t. \end{cases}$$

Это и есть параметрические уравнения заданной плоскости.

Пример 4. Привести к нормальному виду уравнение плоскости $2x-3y-6z+21=0,$ найти единичный нормальный вектор плоскости и расстояние до нее от начала координат.

Решение. Запишем нормальное уравнение плоскости. Так как 21 – это свободный член уравнения плоскости, то по формуле (15.9) вычисляем нормирующий множитель

$$m=-\frac{1}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-6)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{49}}=-\frac{1}{7}.$$

Тогда нормальным уравнением будет:

$$-\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z-3=0.$$

Значит, $\overline{n_0}=\left(-\frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{6}{7}\right),$ а расстояние от начала координат до плоскости равно 3.

Пример 5. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $P_1: x+y=0$ и $P_2: 2x-2z-1=0.$

З а м е ч а н и е. Такие плоскости называются биссекторными.

Решение. Пусть точка $M(x,y,z)$ принадлежит искомой плоскости. Тогда $d(M,P_1)=d(M,P_2),$ т. е. выполняется равенство

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}=\frac{|2x-2z-1|}{\sqrt{8}},$$

которое приводит к двум уравнениям

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}}=\pm\frac{2x-2z-1}{\sqrt{8}} \text{ или } 2(x+y)=\pm(2x-2z-1).$$

Таким образом, задача имеет два решения:

$P^{(1)}: 2y+2z+1=0,$

$P^{(2)}: 4x+2y-2z-1=0.$

Заметим, что это две взаимно перпендикулярные плоскости. Действительно, $\overline{n_1}=(0,\ 2,\ 2)\perp P^{(1)},$ $\overline{n_2}=(4,\ 2,\ -2)\perp P^{(2)}$ и $\left(\overline{n_1},\overline{n_2}\right)=0\cdot4+2\cdot2-2\cdot2=0,$ т. е. $\overline{n_1}\perp\overline{n_2},$ а значит, $P^{(1)}\perp P^{(2)}.$

Пример 6. Определить, пересекает ли плоскость $P: x+y-z+1=0$ отрезок AB, если $A(1, -1, 2)$ и $B(2, 4, -3)$.

Решение. Данная плоскость P пересекает отрезок AB тогда и только тогда, когда $d(A,P)\cdot d(B,P)<0.$ По формуле (15.8) находим:

$$d(A,P)=-\frac{1-1-2+1}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}>0,$$

$$d(B,P)=-\frac{2+4+3+1}{\sqrt{3}}=-\frac{10}{\sqrt{3}}<0.$$

Значит, $d(A,P)\cdot d(B,P)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{10}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{10}{3}<0.$ Следовательно, плоскость пересекает отрезок.

Пример 7. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $P: x+2y-3z+1=0$ и отстоящих от нее на расстояние $d=3.$

Решение. Пусть $M(x,y,z)$ – точка искомой плоскости. Тогда, используя формулу расстояния (15.10), имеем:

$$d(M,P)=\frac{|x+2y-3z+1|}{\sqrt{14}}=3,$$

т. е. $x+2y-3z+1=\pm3\sqrt{14}.$

Отсюда получаем уравнения искомых плоскостей

$x+2y-3z+1-3\sqrt{14}=0$ и $x+2y-3z+1+3\sqrt{14}=0.$

Пример 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,\ 0,\ -1)$, $B(1,\ 3,\ -4)$ и образующей угол $\frac{p}{3}$ с плоскостью $P: 2x+y-z+7=0.$

Решение. Не ограничивая общности, будем искать уравнение плоскости в виде

$x+By+Cz+D=0.$

Поскольку точки $A(1, 0, -1)$ и $B(1, 3, -4)$ лежат в искомой плоскости, то их координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости. Значит, имеем:

$$\begin{cases}1-C+D=0,\\ 1+3B-4C+D=0,\end{cases}$$

откуда $D=C-1,$ $B=C.$ Подставим найденные значения D и B, выраженные через C, в уравнение плоскости:

$x+Cy+Cz+C-1=0.$

Следовательно, нормальный вектор есть $\overline{n}=(1,\ C,\ C).$

Воспользуемся тем, что плоскость образует угол $j = \frac{p}{3}$ с плоскостью $P: 2x + y - z + 7 = 0$, нормальный вектор которой $\overline{n_P} = (2,\ 1,\ -1)$. По формуле косинуса угла между плоскостями (15.11) имеем:

$$\cos\frac{p}{3} = \frac{1}{2} = \frac{\left(\overline{n}, \overline{n_P}\right)}{\left|\overline{n}\right| \cdot \left|\overline{n_P}\right|} = \frac{2 + C - C}{\sqrt{1^2 + C^2 + C^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + 2C^2}},$$

откуда $\sqrt{6(1 + 2C^2)} = 4$ или $6(1 + 2C^2) = 16$. Находим *C*, преобразовывая последнее равенство:

$$1 + 2C^2 = \frac{8}{3}, \qquad 2C^2 = \frac{5}{3}, \qquad C^2 = \frac{5}{6}, \qquad C = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Окончательно имеем уравнения двух плоскостей:

$$x + \sqrt{\frac{5}{6}}y + \sqrt{\frac{5}{6}}z + \sqrt{\frac{5}{6}} - 1 = 0 \ \text{ и } \ x - \sqrt{\frac{5}{6}}y - \sqrt{\frac{5}{6}}z - \sqrt{\frac{5}{6}} - 1 = 0.$$

Задания

I уровень

1.1. Составьте параметрические уравнения плоскости, которая проходит через:

1) точку $M_0(1,\ 0,\ 2)$ параллельно векторам $\overline{a_1} = (1,\ 2,\ 3)$ и $\overline{a_2} = (0,\ 3,\ 1)$;
2) точку $A(1,\ 2,\ 1)$ параллельно векторам $\overline{i}$ и $\overline{j}$;
3) три точки $A(1, 2, 3)$, $B(2, 4, 4)$ и $C(3, 3, 1)$;
4) начало координат и точки $M_1(1,\ 0,\ 1)$ и $M_2(-2,\ -3,\ 1)$.

1.2. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через:

1) точку $M_0(1,\ 1,\ 1)$ параллельно векторам $\overline{a_1} = (1,\ 2,\ 0)$ и $\overline{a_2} = (0,\ 1,\ 3)$;
2) точки $M_1(1,\ 0,\ 1)$, $M_2(0,\ 2,\ 3)$ и $M_3(0,\ 2,\ 1)$;
3) точку $M_0(1,\ 2,\ -2)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (2,\ -1,\ 3)$.

1.3. Найдите величины отрезков, отсекаемых на координатных осях плоскостью:

1) $2x + 3y - 9z + 18 = 0$; 2) $x - 2y + 5z - 20 = 0$.

1.4. Известны координаты вершин тетраэдра $A(0, 0, 2)$, $B(3, 0, 5)$, $C(1, 1, 0)$ и $D(4, 1, 2)$. Составьте уравнения его граней.

1.5. Определите, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны, совпадают:

1) $x - y + 3z + 1 = 0$ и $2x - y + 5z - 2 = 2$;
2) $2x + y + 2z + 4 = 0$ и $4x + 2y + 4z + 8 = 0$;
3) $3x + 2y - z + 2 = 0$ и $6x + 4y - 2z + 1 = 0$.

II уровень

2.1. Составьте параметрические уравнения плоскости, которая проходит через:

1) точку $A(1, 7, 1)$ параллельно плоскости Oxz;
2) точки $M_1(5,\ 3,\ 2)$ и $M_2(1,\ 0,\ 1)$ параллельно вектору $\overline{a} = (1,\ 3,\ -3)$;
3) точку $A(1, 5, 7)$ и ось Ox;
4) ось Oy параллельно вектору $\overline{a} = (1,\ 2,\ 1)$.

2.2. Составьте общее уравнение плоскости, которая проходит через:

1) точку $M_0(3,\ 0,\ 1)$ и ось Ox;
2) точку $C(1, 2, 2)$ параллельно плоскости Oxz;
3) начало координат и точки $M_1(1, 0, 2)$ и $M_2(0, 0, 3)$.

2.3. Напишите общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям:

1) $\begin{cases} x = 2 + 3s - 4t, \\ y = 4 - t, \\ z = 2 + 3s; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = s + t, \\ y = s - t, \\ z = 5 + 6s - 4t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 1 - s + t, \\ y = 4 + s + t, \\ z = -2 - s - 2t. \end{cases}$

2.4. Напишите уравнение плоскости «в отрезках» по ее параметрическим уравнениям:

1) $\begin{cases} x = 1 + s + t, \\ y = 2 + s, \\ z = 3 + s - t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3 + 2s, \\ y = 2 - 2s + 4t, \\ z = 1 + s + 3t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t, \\ y = s, \\ z = 2. \end{cases}$

2.5. Напишите параметрические уравнения плоскости по ее общему уравнению:
1) $3x - 6y + z = 0$; 2) $2x - y - z - 3 = 0$.

2.6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 5, -7)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной величины.

2.7. Вычислите объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $3x - 5y + 15z - 30 = 0$.

2.8. Даны вершины тетраэдра $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$ и $D(0, -7, 8)$. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и середину ребра CD.

2.9. Установите, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны, совпадают:

1) $\begin{cases} x = 1 + s + t, \\ y = 2 + s, \\ z = 3 + s - t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 + 2s, \\ y = 2 - 2s + 4t, \\ z = 1 + s + 3t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = s + 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = s - t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2 + 3s + t, \\ y = 1 + s + t, \\ z = 2 - 2t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 2 + s + 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 + s - t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3s + t, \\ y = s + t, \\ z = -2t. \end{cases}$

2.10. Найдите косинусы углов между плоскостями:
1) $2x + y - 2z + 6 = 0$ и $2x - 2y + z + 8 = 0$;
2) $2x - 2y + z + 2 = 0$ и $x + y + z - 5 = 0$;

3) $\begin{cases} x = 1 + s + t, \\ y = 2 + s, \\ z = 3 + s - t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 + 2s, \\ y = 2 - 2s + 4t, \\ z = 1 + s + 3t. \end{cases}$

2.11. Найдите отклонения и расстояния от каждой из точек $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(8, -1, 2)$ и $M_3(3, 0, 5)$ до плоскости $x - 2y - 2z + 6 = 0$.

2.12. Найдите расстояние между параллельными плоскостями:
1) $x - 2y - 2z + 7 = 0$ и $2x - 4y - 4z + 17 = 0$;
2) $6x + 2y - 4z + 15 = 0$ и $9x + 3y - 6z + 10 = 0$.

III уровень

3.1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, -2, 3)$ параллельно плоскости, которой принадлежат точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 0, -1)$ и $M_3(3, 4, 5)$.

3.2. Найдите основание перпендикуляра, проведенного из точки $A(1, 3, 5)$ к прямой, по которой пересекаются плоскости $2x + y + z - 1 = 0$ и $3x + y + 2z - 3 = 0$.

3.3. Составьте уравнение плоскости, зная, что точка $A(1, -1, 3)$ служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.

3.4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и образующей с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ угол 60°.

3.5. Составьте уравнение плоскостей, делящих пополам двугранные углы, гранями которых служат плоскости $3x - y + 7z + 4 = 0$ и $5x + 3y - 5z + 2 = 0$.

3.6. Даны вершины тетраэдра $A(0, 6, 4)$, $B(3, 5, 3)$, $C(-2, 11, -5)$ и $D(1, -1, 4)$. Найдите высоту, проведенную из вершины A к грани BCD.

3.7. Составьте уравнение плоскостей, параллельных плоскости $2x-2y-z-6=0$ и отстоящих от нее на расстояние $d=7$.

3.8. Внутри треугольника, отсекаемого на плоскости Oxy плоскостями $x+4y+8z+8=0$, $x-2y+2z+2=0$ и $3x+4y+12=0$, найдите координаты точки, равноудаленной от этих плоскостей.

3.9. Найдите координаты центра и радиус шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $11x-10y-2z-57=0$.

15.2. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых

Пусть L – прямая, для которой необходимо составить уравнения, $M(x,\ y,\ z)$ – произвольная точка этой прямой.

1. Если известны координаты направляющего вектора $\overline{a}=(k,l,m)\neq\overline{0}$ прямой L и некоторой фиксированной ее точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, то уравнение

$$\overline{r}=\overline{r_0}+t\overline{a}, \tag{15.12}$$

где $\overline{r_0}$ – радиус-вектор точки M_0; $\overline{r}$ – радиус-вектор произвольной точки, $t\in\mathbf{R}$, называется ***векторно-параметрическим*** уравнением прямой L. В координатной форме уравнение (15.12) равносильно трем параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x=x_0+kt, \\ y=y_0+lt, \\ z=z_0+mt, \quad t\in\mathbf{R}. \end{cases} \tag{15.13}$$

Система (15.13) определяет параметрические уравнения прямой L.

По исходной информации получаем также канонические уравнения прямой L:

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}. \tag{15.14}$$

2. Пусть известны две точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, лежащие на прямой L. Тогда векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_2M}$ коллинеарны, и можно записать уравнения прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{15.15}$$

3. В пространстве прямую можно задать как линию пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{15.16}$$

В уравнениях плоскостей (15.16) коэффициенты при переменных не являются пропорциональными (иначе плоскости либо параллельны, либо совпадают).

О взаимном расположении двух прямых в пространстве можно судить по их направляющим векторам.

Угол между прямыми можно определить через косинус угла между направляющими векторами.

Прямые ***параллельны*** при условии коллинеарности их направляющих векторов (координаты пропорциональны).

Угол между прямыми ***прямой*** при условии перпендикулярности их направляющих векторов (скалярное произведение равно 0).

Прямые лежат в одной плоскости при условии компланарности их направляющих векторов и вектора $\overline{M_1M_2}$, где M_1 и M_2 – точки этих прямых (смешанное произведение равно 0).

Расстояние от точки M_0 до прямой L вычисляется по формуле

$$d(M_0,L)=\frac{\left|\left[\overline{M_0M_1},\overline{a}\right]\right|}{\left|\overline{a}\right|}, \tag{15.17}$$

где $\overline{a}$ – направляющий вектор; M_1 – точка прямой.

Эту формулу можно использовать и для нахождения расстояния между параллельными прямыми.

Если прямые L_1 и L_2 являются скрещивающимися, то расстояние между ними определяют по формуле

$$d(L_1, L_2) = \frac{\left|\left(\overline{r_1} - \overline{r_2}, \overline{a_1}, \overline{a_2}\right)\right|}{\left|\left(\overline{a_1}, \overline{a_2}\right)\right|}, \qquad (15.18)$$

где $\overline{r_1}$ и $\overline{r_2}$ – радиус-векторы точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, принадлежащих прямым L_1 и L_2 соответственно, а векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ – направляющие векторы этих прямых.

Пример 1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через:

1) точку $M_0(-2,\ 1,\ 5)$ параллельно вектору $\overline{a} = (1,\ -3,\ 4)$;

2) две заданные точки $M_1(1,\ 5,\ 1)$ и $M_2(4,\ 6,\ 9)$.

Решение. 1) Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка искомой прямой. Тогда $\overline{M_0M} \parallel \overline{a}$, т. е. их координаты пропорциональны. $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (x+2, y-1, z-5)$, $\overline{a} = (1, -3, 4)$. Согласно (15.14) получаем уравнения

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-5}{4},$$

которые и представляют собой канонические уравнения прямой.

2) Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка прямой. Тогда, используя уравнение (15.15) для нашего случая, имеем:

$\overline{M_1M} = (x-1, y-5, z-1)$, $\overline{M_1M_2} = (4-1,\ 6-5,\ 9-1) = (3,\ 1,\ 8)$, откуда

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{8}.$$

Это и есть искомый результат.

Пример 2. Записать канонические уравнения прямой, заданной системой уравнений двух плоскостей

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Для перехода к каноническим уравнениям прямой обычно поступают следующим образом. Подбирают какую-либо точку $M_0 \in L$, фиксируя числовое значение одной из координат и решая систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Затем находят направляющий вектор $\overline{a}$ прямой L как векторное произведение нормальных векторов плоскостей, задающих прямую L. Реализуем этот

подход на данном примере.

$$L: \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Имеем $\overline{n_1} = (3,\ 2,\ 4)$ – нормальный вектор плоскости $3x + 2y + 4z - 11 = 0$, $\overline{n_2} = (2,\ 1,\ -3)$ – нормальный вектор плоскости $2x + y - 3z - 1 = 0$.

Тогда вектор $\overline{a} = \left[\overline{n_1}, \overline{n_2}\right]$ является направляющим вектором прямой L. Определим его координаты:

$$\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \overline{k} = -10\overline{i} + 17\overline{j} - \overline{k} =$$

$$= (-10,\ 17,\ -1).$$

Для нахождения точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ зафиксируем одно из координатных значений, например, $x = 1$. Тогда, подставив в заданные общие уравнения значение $x = 1$, имеем:

$$\begin{cases} 2y + 4z = 8, \\ y - 3z = -1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 2, \\ z = 1, \end{cases} \text{ т. е. } M_0(1,\ 2,\ 1) \in L.$$

Таким образом, получаем искомые канонические уравнения заданной прямой L:

$$\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}.$$

З а м е ч а н и е. Для нахождения точки $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \in L$ можно сначала решить систему в общем виде, а потом выбрать частное решение, а в качестве $\overline{a}$ взять $a\left[\overline{n_1},\ \overline{n_2}\right]$, где $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$.

Пример 3. Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны, и найти расстояние между ними, если они заданы параметрическими уравнениями:

$$L_1: \begin{cases} x = -2t + 1, \\ y = 3t, \\ z = t - 2 \end{cases} \text{ и } L_2: \begin{cases} x = 4t + 7, \\ y = -6t + 5, \\ z = -2t + 4. \end{cases}$$

Решение. Прямая L_1 имеет направляющий вектор $\overline{a_1} = (-2,\ 3,\ 1)$, а L_2 – вектор $\overline{a_2} = (4,\ -6,\ -2)$, причем $\overline{a_1} \parallel \overline{a_2}$, так как $\dfrac{-2}{4} = \dfrac{3}{-6} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$.

Значит, $L_1 \parallel L_2$.

Найдем расстояние $d(L_1, L_2)$ между ними, используя формулу расстояния (15.17) от точки до прямой. В параметрических уравнениях заданных прямых полагаем $t=0$, имеем $M_1(1,\ 0,\ -2) \in L_1$, $M_2(7,\ 5,\ 4) \in L_2$. Тогда $d(L_1, L_2) = d(M_1, L_2) = \dfrac{\left|\left[\overline{M_1M_2}, \overline{a_2}\right]\right|}{\left|\overline{a_2}\right|}$.

Вычисляем векторное произведение:

$$\left[\overline{M_1M_2}, \overline{a_2}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 7-1 & 5-0 & 4-(-2) \\ 4 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 5 & 6 \\ 4 & -6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 26\bar{i} + 36\bar{j} - 56\bar{k} = (26,\ 36,\ -56).$$

После этого находим длины нужных векторов:

$$\left|\left[\overline{M_1M_2},\ \overline{a_2}\right]\right| = \sqrt{26^2 + 36^2 + (-56)^2} = \sqrt{5108} = 2\sqrt{1277};$$

$$\left|\overline{a_2}\right| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56}.$$

Значит, $d(L_1, L_2) = \dfrac{\sqrt{5108}}{\sqrt{56}} = \dfrac{2\sqrt{1277}}{2\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{1277}{14}}.$

Пример 4. Доказать, что прямые L_1 и L_2 пересекаются, и найти координаты точки пересечения, если они заданы параметрическими уравнениями:

$$L_1: \begin{cases} x = -3t, \\ y = 3t + 2, \\ z = 1 \end{cases} \text{ и } L_2: \begin{cases} x = 5t + 1, \\ y = 13t + 1, \\ z = 10t + 1. \end{cases}$$

Решение. Координаты направляющего вектора прямой равны соответственно числовым коэффициентам при t, т. е. $\overline{a_1} = (-3,\ 3,\ 0) \parallel L_1$, $\overline{a_2} = (5,\ 13,\ 10) \parallel L_2$. При этом $\overline{a_1} \nparallel \overline{a_2}$. Значит $L_1 \nparallel L_2$.

Прежде всего определим, лежат ли прямые в одной плоскости, т. е. являются ли векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ и $\overline{M_1M_2}$ компланарными (здесь $M_1(0,\ 2,\ 1) \in L_1$, $M_2(1,\ 1,\ 1) \in L_2$). Найдем для этого их смешанное произведение:

$$(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 5 & 13 & 10 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, прямые лежат в одной плоскости и не параллельны. Следовательно, они пересекаются.

Найдем точку их пересечения $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Поскольку $M_0 \in L_1$, то $z_0 = 1$; $M_0 \in L_2$, то $z_0 = 1 + 10t$.

Получаем, что при подстановке $z_0 = 1$ в уравнение прямой L_2 $t = 0$.

Значит, $x_0 = 1 + 0 = 1$, $y_0 = 1 + 0 = 1$. Итак, $M_0(1,\ 1,\ 1)$ – точка пересечения заданных прямых.

Пример 5. Доказать, что прямые L_1 и L_2 скрещиваются, найти расстояние между ними, если они заданы параметрическими уравнениями:

$$L_1: \begin{cases} x = t + 3, \\ y = -t + 1, \\ z = 2t + 2 \end{cases} \text{ и } L_2: \begin{cases} x = -t, \\ y = 3t + 2, \\ z = 3t. \end{cases}$$

Решение. Направляющий вектор прямой L_1 есть $\overline{a_1} = (1,\ -1,\ 2)$, а прямой L_2 – вектор $\overline{a_2} = (-1,\ 3,\ 3)$, причем $\overline{a_1} \nparallel \overline{a_2}$. Значит $L_1 \nparallel L_2$. Определим, пересекаются ли прямые. Так как $M_1(3,\ 1,\ 2) \in L_1$, $M_2(0,\ 2,\ 0) \in L_2$, то условием пересечения прямых служит компланарность векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ и $\overline{M_1M_2}$. Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 18 \neq 0. \quad (15.19)$$

Значит, указанные векторы, а вместе с ними и прямые L_1 и L_2, не лежат в одной плоскости.

Прямые L_1 и L_2 скрещиваются, так как они не пересекаются и не параллельны. Найдем расстояние между ними по формуле (15.18), используя (15.19):

$$d(L_1, L_2) = \frac{18}{\left|\left[\overline{a_1}, \overline{a_2}\right]\right|}.$$

Определяем координаты:

$$\left[\overline{a_1}, \overline{a_2}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$= -9\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k} = (-9,\ -5,\ 2).$$

Тогда

$\left|\left[\overline{a_1}, \overline{a_2}\right]\right| = \sqrt{81+25+4} = \sqrt{110}.$

Получаем: $d(L_1, L_2) = \dfrac{18}{\sqrt{110}} = \dfrac{18\sqrt{110}}{110} = \dfrac{9}{55}\sqrt{110}.$

Задания

I уровень

1.1. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через:

1) точку $M_0(2,\ 0,\ 3)$ параллельно вектору $\overline{a} = (3,\ -2,\ -2)$;

2) точку $M_0(1,\ 2,\ 3)$ параллельно оси Oy;

3) точки $M_1(1,\ 2,\ -1)$ и $M_2(-2,\ 4,\ 0)$.

1.2. Определите, какие из точек $A(2, 1, 5)$, $B(0, 4, 3)$ и $C(3,\ 4,\ 37)$ принадлежат прямой

$$\begin{cases} x = 2+t, \\ y = 1+3t, \\ z = 5+2t. \end{cases}$$

1.3. Определите по параметрическим уравнениям точку, принадлежащую прямой, направляющий вектор и канонические уравнения этой прямой:

1) $\begin{cases} x = 2+t, \\ y = 1-2t, \\ z = 3t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 5, \\ y = -1+2t, \\ z = 5+t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = -1+t, \\ y = 3, \\ z = 7t. \end{cases}$

1.4. Определите по каноническим уравнениям точку, принадлежащую прямой, направляющий вектор и параметрические уравнения этой прямой:

1) $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z+2}{7}$; 2) $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-1}{4}$; 3) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+5}{0} = \dfrac{z}{3}$.

II уровень

2.1. Составьте параметрические уравнения прямых:

1) $\begin{cases} x+y+2z-2=0, \\ x-y+z-1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y+4z-7=0, \\ 2x+y-z-5=0. \end{cases}$

2.2. Составьте канонические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y+z-2=0, \\ 4x+y-3z-2=0. \end{cases}$

2.3. Составьте уравнения прямой, проходящей через точку $A(0,\ 1,\ -\ 4)$, параллельно прямой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ 2x+2y-3z+6=0. \end{cases}$$

2.4. Определите взаимное расположение прямых:

1) $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 0, \\ z = -2t \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-3=0, \\ x-y+z-1=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = -2+3t, \\ y = -1, \\ z = 4-t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2y-z+2=0, \\ x-7y+3z-17=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+z-1=0, \\ 3x+y-z+13=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ y+2z-8=0. \end{cases}$

III уровень

3.1. Дан треугольник с вершинами $A(3, 7, 5)$, $B(1, 2, 3)$ и $C(3, 0, 1)$. Составьте параметрические уравнения его медиан.

3.2. Дан треугольник с вершинами $A(1, 2, -7)$, $B(2, 2, -7)$ и $C(3, 4, -5)$. Составьте параметрические уравнения его биссектрис.

3.3. Дан треугольник с вершинами $A(1, -2, -4)$, $B(3, 1, -7)$ и $C(5, 1, -7)$. Составьте канонические уравнения его высот.

3.4. Составьте уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(0,\ 1,\ -4)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ 2x+2y-3z+6=0. \end{cases}$$

3.5. Докажите, что прямые скрещиваются, найдите расстояние между ними и угол, который они образуют:

1) $\begin{cases} x=3-6t, \\ y=-1+4t, \\ z=t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=4, \\ z=3-t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ 2x-3y+z-4=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-9=0, \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$

15.3. Прямая и плоскость в пространстве

Пусть прямая L задана каноническими уравнениями:

$$L: \frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)\in L$, $\bar{a}=(k, l, m)\parallel L$, а плоскость P задана общим уравнением:

$$P: Ax+By+Cz+D=0,$$

где $\bar{n}=(A, B, C)\perp P$.

Тогда взаимное расположение прямой L и плоскости P в пространстве можно определить по взаимному расположению направляющего вектора $\bar{a}$ прямой L и нормального вектора $\bar{n}$ плоскости P. Справедливы утверждения:

$L\parallel P$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}\perp\bar{n}$, $M_0\notin P$;

$L\subset P$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} \bar{a}\perp\bar{n}, \\ M_0\in P; \end{cases}$

$L\perp P$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}\parallel\bar{n}$;

$L\cap P=M_1$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}\not\perp\bar{n}$.

В последнем случае координаты точки пересечения M_1 могут быть найдены следующим образом. От канонических уравнений прямой следует перейти к параметрическим, после чего подставить $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ в уравнение плоскости. Затем надо разрешить полученное уравнение относительно параметра t и найденное значение t подставить в параметрические уравнения прямой. Это позволит найти значения x_1, y_1, z_1, которые и будут координатами искомой точки M_1 пересечения прямой L и плоскости P.

Углом j между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость, т. е.

$$\sin j=\left|\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{n}})\right|=\frac{\left|(\bar{a}, \bar{n})\right|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{n}|}.$$

Пример 1. Установить взаимное расположение прямой и плоскости. В случае их пересечения найти координаты точки пересечения:

1) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ и $3x-3y+2z-5=0$;

2) $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ и $x+2y-4z+1=0$;

3) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ и $3x-y+2z-5=0$.

Решение. 1) Определим координаты направляющего вектора прямой $L: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ по ее каноническим уравнениям. Это вектор $\bar{a}=(2,\ 4,\ 3)$. Нормальный вектор $\bar{n}$ плоскости $P: 3x-3y+2z-5=0$ имеет координаты $\bar{n}=(3,\ -3,\ 2)$. Найдем скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{n}$:

$$\left(\bar{a}, \bar{n}\right)=\left((2,\ 4,\ 3), (3,\ -3,\ 2)\right)=2\cdot 3+4\cdot(-3)+3\cdot 2=6-12+6=0.$$

Значит, $\bar{a}\perp\bar{n}$, т. е. прямая L и плоскость P параллельны. Проверим, не лежит ли прямая L в плоскости P. Для этого определим, принадлежит ли плоскости P точка $M_0(-1,\ 3,\ 0)$, которая лежит на прямой. Подставим ее координаты в уравнение плоскости:

$$3\cdot(-1)-3\cdot 3+2\cdot 0-5=-3-9-5=-17\neq 0.$$

Следовательно, $M_0\notin P$, а значит, $L\parallel P$.

2) Прямая $L: \frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ имеет направляющий вектор $\overline{a} = (8,\ 2,\ 3)$ и проходит через точку $M_0(13,\ 1,\ 4)$. Выясним, будет ли вектор $\overline{a}$ перпендикулярен нормальному вектору $\overline{n} = (1,\ 2,\ -4)$ заданной плоскости $P: x + 2y - 4z + 1 = 0$. Вычислим скалярное произведение:

$$\left(\overline{a}, \overline{n}\right) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) = 8 + 4 - 12 = 0.$$

Поскольку оно равно нулю, то $\overline{a} \perp \overline{n}$.

Осталось проверить принадлежность точки M_0 плоскости:

$13 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 4 + 1 = 13 + 2 - 16 + 1 = 0.$

Значит, прямая L лежит в плоскости P.

3) Направляющий вектор $\overline{a} = (5,\ 1,\ 4)$ заданной прямой и нормальный вектор $\overline{n} = (3,\ -1,\ 2)$ плоскости не коллинеарны и не перпендикулярны, так как $\frac{5}{3} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{4}{2}$ (коэффициенты не пропорциональны) и $5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 15 - 1 + 8 = 22 \neq 0$ (скалярное произведение не равно нулю). Значит, $L \cap P = M_1$. Найдем координаты точки M_1 пересечения прямой и плоскости. Для этого перейдем сначала к параметрическим уравнениям прямой:

$$\begin{cases} x = 5t + 7, \\ y = t + 4, \\ z = 4t + 5. \end{cases}$$

Затем в уравнение плоскости P подставим вместо x, y, z их выражение через параметр t:

$$3(5t + 7) - (t + 4) + 2(4t + 5) - 5 = 0,$$

откуда имеем:

$15t + 21 - t - 4 + 8t + 10 - 5 = 0$, т. е. $22t = -22$, $t = -1$.

Подставим найденное значение параметра t в параметрические уравнения прямой: $x = 7 + 5 \cdot (-1) = 7 - 5 = 2$, $y = 4 - 1 = 3$, $z = 5 + 4 \cdot (-1) = 5 - 4 = 1$.

Получили точку $M_1(2,\ 3,\ 1)$, в которой прямая пересекает плоскость.

Пример 2. Определить угол между прямой L и плоскостью P:

1) $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$, $P: 4x + 6y + 8z - 11 = 0$;

2) $L: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1}$, $P: 2x - 3y + 5 = 0$;

3) $L: \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{7}$, $P: x + 2y - 3 = 0$.

Решение. 1) По уравнению прямой L находим ее направляющий вектор $\overline{a} = (2; 3; 4)$, а для плоскости P – нормальный вектор $\overline{n} = (4; 6; 8)$.

Очевидно, что координаты этих векторов пропорциональны, а значит, векторы являются коллинеарными. Следовательно, прямая L перпендикулярна плоскости P, т. е. $(L \hat{,} P) = \frac{p}{2}$.

2) Направляющий вектор $\overline{a}$ прямой L имеет координаты $\overline{a} = (3; 2; 1)$, а нормальный вектор $\overline{n}$ плоскости P – $\overline{n} = (2; -3; 0)$. Так как $\left(\overline{a}, \overline{n}\right) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 = 0$, то векторы перпендикулярны, а прямая и плоскость параллельны. Определим, не лежит ли прямая L в плоскости. Для этого координаты точки $M_0(0; -1; 3) \in L$ подставим в уравнение плоскости: $2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) + 5 \neq 0$. Значит прямая и плоскость параллельны, т. е. $(L \hat{,} P) = 0$.

3) $\overline{a} = (5; 3; 7)$, $\overline{n} = (1; 2; 0)$. Значит,

$$\cos(\overline{a} \hat{,} \overline{n}) = \frac{(\overline{a}, \overline{n})}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{n}\right|} = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 0}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 7^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{11}{\sqrt{83} \cdot \sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{415}}.$$

Таким образом $(L \hat{,} P) = \arccos \frac{11}{\sqrt{415}}$.

Пример 3. Найти координаты точки N, симметричной точке $M(2,\ -5,\ 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(5,\ 4,\ 6)$ и $B(-2,\ -17,\ -8)$.

Решение. *1-й способ.* Построим плоскость P, проходящую через точку M перпендикулярно прямой AB.

$$P: -7(x - 2) - 21(y + 5) - 14(z - 7) = 0,$$

откуда P: $x + 3y + 2z - 1 = 0$.

Уравнения прямой AB: $x = 5 + t$, $y = 4 + 3t$, $x = 6 + 2t$.

Найдем точку O пересечения плоскости P и прямой AB. Для этого решим уравнение

$5+t+3(4+3t)+2(6+2t)-1=0,\ t=-2$. Значит, $O(3, -2, 2)$. Так как O – середина отрезка MN, то

$$x_0=\frac{x_M+x_N}{2},\ y_0=\frac{y_M+y_N}{2},\ z_0=\frac{z_M+z_N}{2}.$$

Зная координаты точек O и M, найдем $N(4, 1, -3)$.

2-й способ. Для решения можно также воспользоваться следующими рассуждениями: точка N, симметричная точке M, находится в той же плоскости, что прямая AB и точка M, лежит на перпендикуляре MN к прямой AB и удалена от прямой AB на то же расстояние, что и точка M.

Пусть $N(x, y, z)$. Тогда

1) $\overline{MN},\ \overline{MA},\ \overline{MB}$ – компланарны;

2) $\overline{MN}\perp\overline{AB}$;

3) $\left|\overline{MA}\right|=\left|\overline{NA}\right|$;

4) середина отрезка MN лежит на прямой AB.

Составим систему уравнений, используя координатную форму записи условий 1–3:

$\overline{MN}=(x-2,\ y+5,\ z-7)$, $\overline{MA}=(3,\ 9,\ -1)$, $\overline{MB}=(-4,\ -12,\ -15)$.

$\overline{MN},\ \overline{MA},\ \overline{MB}$ компланарны при условии $\left(\overline{MN}, \overline{MA}, \overline{MB}\right)=0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-7 \\ 3 & 9 & -1 \\ -4 & -12 & -15 \end{vmatrix}=0,$$ откуда получаем:

$$(x-2)\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -12 & -15 \end{vmatrix}-(y+5)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -15 \end{vmatrix}+(z-7)\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -12 \end{vmatrix}=0,$$

$-147(x-2)+49(y+5)+0(z-7)=0$, т. е.

$-147x+49y+539=0$.

После сокращения имеем:

$3x-y-11=0$, откуда

$$y=3x-11. \tag{15.20}$$

Условие $\overline{MN}\perp\overline{AB}$ равносильно условию $(\overline{MN}, \overline{AB})=0$ или $(x-2)(-2-5)+(y+5)(-17-4)+(z-7)(-8-6)=0$, что приводит к уравнению

$-7(x-2)-21(y+5)-14(z-7)=0$.

После преобразования имеем:

$x+3y+2z-1=0$.

Далее получим:

$2z=1-x-3(3x-11)=-10x+34$,

откуда

$$z=-5x+17. \tag{15.21}$$

Вычислим:

$\left|\overline{MA}\right|=\sqrt{3^2+9^2+(-1)^2}=\sqrt{91}$;

$\left|\overline{NA}\right|=\sqrt{(5-x)^2+(y-4)^2+(6-z)^2}$.

Равенство этих величин дает нам:

$(5-x)^2+(y-4)^2+(6-z)^2=91$.

Подставим в последнее равенство правые части формул (15.20) и (15.21) вместо y и z соответственно, откуда получим уравнение $x^2-6x+8=0$.

Решим это уравнение, найдя корни $x_1=2,\ \ x_2=4$.

Соответствующие значения y, z вычислим, используя равенства (15.20) и (15.21). Получим точки $N_1(2,\ -5,\ 7)$ и $N_2(4,\ 1,\ -3)$, которые удовлетворяют первым трем условиям. Осталось проверить четвертое условие. Найдем середины O_1 и O_2 отрезков MN_1 и MN_2 соответственно:

$O_1\left(\frac{2+2}{2},\ \frac{-5-5}{2},\ \frac{7+7}{2}\right)$ или $O_1(2,\ -5,\ 7)$;

$O_2\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{-5+1}{2},\ \frac{7-3}{2}\right)$ или $O_2(3,\ -2,\ 2)$.

Проверим, какая из точек (O_1 или O_2) лежит на прямой AB:

$AB: x-5=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{2}$.

$O_1\notin AB$, так как $2-5=\frac{-5-4}{3}=-3$, но $\frac{7-6}{2}=\frac{1}{2}\neq-3$;

$O_2\in AB$, так как $3-5=\frac{-2-4}{3}=\frac{2-6}{2}=-2$.

Приходим к ответу: $N(4,\ 1,\ -3)$.

Пример 4. Прямая L задана как линия пересечения плоскостей

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2=0. \end{cases}$$

Написать уравнение ее проекции на координатную плоскость Oxz.

Решение. Построим канонические уравнения прямой L. В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overline{a} = \left[\overline{n_1}, \overline{n_2}\right]$, где $\overline{n_1} = (1,\ 1,\ -1)$, $\overline{n_2} = (2,\ -1,\ 0)$. Тогда

$$\left[\overline{n_1}, \overline{n_2}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}, \text{ т. е. } \overline{a} = (-1,\ -2,\ -3).$$

Если $x = 0$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} y - z = 0, \\ -y + 2 = 0, \end{cases}$$

из которой найдем $y = 2$, $z = 2$, а значит точка $M_0(0,\ 2,\ 2)$ лежит на прямой L.

Таким образом, канонические уравнения прямой L таковы:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-3},$$

что эквивалентно системе трех уравнений, описывающих три плоскости, проектирующие прямую на координатные плоскости *Oxy*, *Oxz* и *Oyz* соответственно:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{-2}, \\ \dfrac{x}{-1} = \dfrac{z-2}{-3}, \\ \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-2}{-3}. \end{cases}$$

После упрощения получаем:

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ 3x - z + 2 = 0, \\ 3y - 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Искомое уравнение: $3x - z + 2 = 0$.

Задания

I уровень

1.1. Найдите точку пересечения прямой L с плоскостью P или установите их параллельность:

1) $L: \begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 - t, \end{cases}$ $P: 4x + y - z + 13 = 0;$

2) $L: \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2t, \end{cases}$ $P: x + y - z + 3 = 0;$

3) $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{5}$, $P: 4x + 3y - z + 3 = 0;$

4) $L: \dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$, $P: 3x - y + 2z - 5 = 0;$

5) $L: \begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0, \\ x - 2y - 2z + 2 = 0, \end{cases}$ $P: 4x - 5y - z + 8 = 0.$

1.2. Найдите угол между прямой и плоскостью:

1) $\begin{cases} x = 1 + 11t, \\ y = 2 - 7t, \\ z = 5 - 8t \end{cases}$ и $7x - 8y + 2z - 10 = 0;$

2) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z+2}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0;$

3) $\begin{cases} x + 4y - 2z + 7 = 0, \\ 3x + 7y - 2z = 0 \end{cases}$ и $3x + y - z + 1 = 0.$

1.3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через начало координат и прямую $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = 5 - 2t. \end{cases}$

II уровень

2.1. Определите, при каком значении m прямая $\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2 + mt, \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ не имеет с плоскостью $x + 3y + 3z - 2 = 0$ общих точек.

2.2. Найдите, при каких значениях m и n прямая $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ лежит в плоскости $mx+y-2z+n=0$.

2.3. Найдите, при каких значениях m и n прямая $\begin{cases}3x-2y+z+3=0,\\4x-3y+4z+1=0\end{cases}$ перпендикулярна плоскости $mx+8y+nz+2=0$.

2.4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases}x+3y-2z-4=0,\\2x-y+3z-1=0\end{cases}$ параллельно прямой $\begin{cases}x=3t+2,\\y=6t-1,\\z=4t.\end{cases}$

2.5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Oz параллельно прямой $\begin{cases}x=t+2,\\y=2t,\\z=3t+1.\end{cases}$

2.6. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,\ 2,\ 1)$ и перпендикулярной плоскости $3x+7y-2z+5=0$.

2.7. Найдите проекцию точки $A(2,\ 11,\ -5)$ на плоскость $x+4y-2z+7=0$.

2.8. Найдите точку, симметричную точке $A(6,\ -5,\ 5)$ относительно плоскости $2x-3y+z-4=0$.

2.9. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,\ 2,\ -2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2}$.

2.10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases}2x+3y-z+5=0,\\3x-2y+2z-1=0\end{cases}$ параллельно вектору $\overline{a}=(1,\ 1,\ 1)$.

III уровень

3.1. Составьте параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $A(3,\ -2,\ -4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую $\begin{cases}x=2+3t,\\y=-4-2t,\\z=1+2t.\end{cases}$

3.2. Найдите проекцию прямой L на плоскость $3x-2y-z+15=0$, если она задана уравнениями:

1) $\begin{cases}x=1+2t,\\y=3+t,\\x=2+t;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y+z-5=0,\\2x-3y+z-4=0.\end{cases}$

3.3. Найдите основание перпендикуляра, проведенного из точки $A(1,\ 2,\ 3)$ к прямой $\begin{cases}x=8+3t,\\y=1+t,\\z=6-2t.\end{cases}$

3.4. Найдите точку, симметричную точке $A(-3,\ 1,\ -1)$ относительно прямой $\begin{cases}4x-3y-13=0,\\y-2z+5=0.\end{cases}$

3.5. Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $5x-y+3z-2=0$ и:

1) пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости Oxy;

2) проходящей через прямую $\begin{cases}2x-y+3z-5=0,\\x+2y-z+2=0.\end{cases}$

3.6. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямой $\begin{cases}x=t,\\y=1,\\z=-1,\end{cases}$ при условии, что искомая прямая принадлежит заданной плоскости и перпендикулярна заданной прямой.

15.4. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность S, общее уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0, \quad (15.22)$$

где коэффициенты при одночленах второй степени одновременно не равны нулю.

Существует девять типов невырожденных поверхностей, уравнения которых с помощью преобразования координат могут быть приведены к одному из следующих видов. Эти уравнения определяют тип поверхности и называются ***каноническими уравнениями***.

1. ***Эллипсоид***: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 15.1).

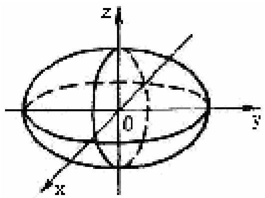


Рис. 15.1

2. ***Конус второго порядка***: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ (рис. 15.2).

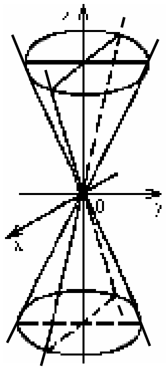


Рис. 15.2

3. ***Гиперболоиды***

1) ***однополостный***: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 15.3);

2) ***двуполостный***: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. 15.4).

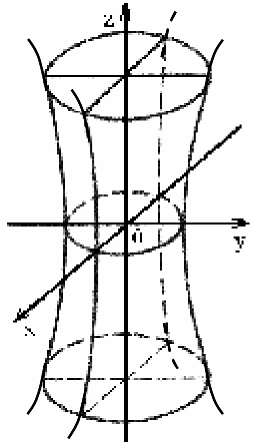


Рис. 15.3

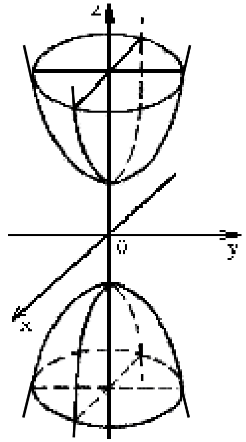


Рис. 15.4

4. ***Параболоиды***

1) ***эллиптический***: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ (рис. 15.5);

2) ***гиперболический***: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ (рис.15.6).

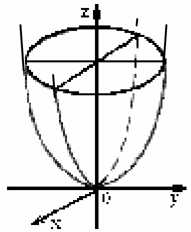


Рис. 15.5

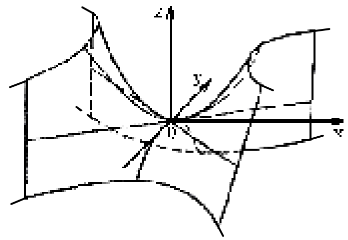


Рис. 15.6

5. ***Цилиндры***

1) ***эллиптический***:

2) ***гиперболический***:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 15.7); $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 15.8);

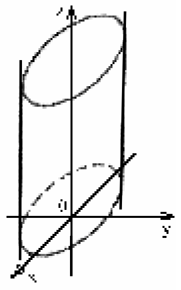


Рис. 15.7

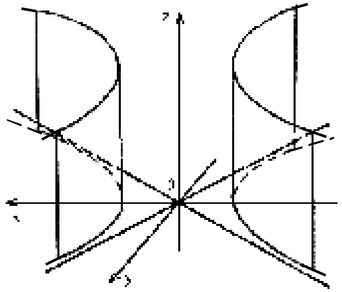


Рис. 15.8

3) ***параболический***: $y^2=2px$ $(p>0)$ (рис. 15.9).

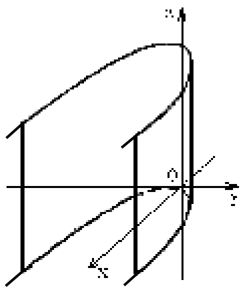


Рис. 15.9

Основным методом исследования формы поверхности является метод параллельных сечений, который состоит в следующем. Поверхность пересекается координатными плоскостями и им параллельными, а затем на основании вида полученных в сечениях линий делается вывод о типе поверхности. Таким образом можно изучать основные геометрические свойства невырожденных поверхностей второго порядка на основе их канонических уравнений.

При этом, когда в общем уравнении поверхности коэффициенты $D=E=F=0$, приведение к каноническому виду осуществляется с помощью метода выделения полных квадратов.

В определенных случаях уравнение (15.22) поверхности может быть приведено к уравнениям, задающим, так называемые, ***вырожденные поверхности***. Приведем примеры таких случаев:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ – пустое множество точек (мнимый эллипсоид);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ – точка (0, 0, 0);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – пустое множество точек (мнимый эллиптический цилиндр);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – прямая (ось Oz);

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара пересекающихся плоскостей;

$x^2=a^2$ $(a\neq 0)$ – пара параллельных плоскостей;

$x^2=-a^2$ $(a\neq 0)$ – пустое множество точек;

$x^2=0$ – плоскость (пара совпадающих плоскостей).

Пример 1. Привести уравнение к каноническому виду и определить тип поверхности, которую оно задает:

1) $4x^2+8y^2-z^2+8x-16y+4z-32=0$;

2) $3x^2-2z^2+6x+2y+4z+1=0$;

3) $x^2+2y^2+3z^2-6x+4y-12z-13=0$;

4) $4x^2+9y^2+16x-90y+205=0$.

Решение. 1) Воспользуемся методом выделения полных квадратов. Преобразуем левую часть уравнения:

$$4x^2+8y^2-z^2+8x-16y+4z-32=$$
$$=4(x^2+2x+1-1)+8(y^2-2y+1-1)-(z^2-4z+4-4)-32=$$
$$=4(x+1)^2-4+8(y-1)^2-8-(z-2)^2+4-32=$$
$$=4(x+1)^2+8(y-1)^2-(z-2)^2-40.$$

Значит, заданное уравнение равносильно уравнению

$$4(x+1)^2+8(y-1)^2-(z-2)^2=40 \text{ или}$$

$$\frac{(x+1)^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2}+\frac{(y-1)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}-\frac{(z-2)^2}{\left(2\sqrt{10}\right)^2}=1.$$

Имеем уравнение однополостного гиперболоида, центр которого находится в точке (–1, 1, 2). Его ось симметрии – прямая, параллельная оси Oz и проходящая через точку (–1, 1, 2).

2) Поскольку $3x^2-2z^2+6x+2y+4z+1=$

$$=3(x^2+2x+1-1)-2(z^2-2z+1-1)+2y+1=$$

$$=3(x+1)^2-2(z-1)^2-3+2+2y+1=3(x+1)^2-2(z-1)^2+2y,$$

то заданное уравнение равносильно уравнению

$3(x+1)^2-2(z-1)^2+2y=0$ или $\dfrac{(x+1)^2}{\frac{1}{3}}-\dfrac{(z-1)^2}{\frac{1}{3}}=-2y,$ что приводит окончательно к уравнению гиперболического параболоида $\dfrac{(z-1)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}-\dfrac{(x+1)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2y,$ смещенного в точку (–1, 0, 1).

3) Выделяем полные квадраты в выражении, стоящем в левой части уравнения:

$$x^2+2y^2+3z^2-6x+4y-12z-13=(x-3)^2+2(y+1)^2+3(z-2)^2-36.$$

Поэтому заданное уравнение принимает вид:

$$(x-3)^2+2(y+1)^2+3(z-2)^2-36=0$$

или (после деления на 36)

$$\frac{(x-3)^2}{6^2}+\frac{(y+1)^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2}+\frac{(z-2)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2}=1.$$

Это уравнение эллипсоида с центром в точке (3, – 1, 2).

4. Методом выделения полных квадратов уравнение $4x^2+9y^2+16x-90y+205=0$ приводится к уравнению

$$4(x+2)^2-16+9(y-5)^2-225+205=0, \text{ т. е.}$$

$$4(x+2)^2+9(y-5)^2=36.$$

Почленное деление на 36 дает:

$$\frac{(x+2)^2}{3^2}+\frac{(y-5)^2}{2^2}=1.$$

Это уравнение эллиптического цилиндра, смещенного в точку (–2, 5, 0).

Пример 2. Исследовать поверхность методом сечений и построить ее:

$$z=1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}.$$

Решение. Для исследования геометрических свойств и формы поверхности используем метод сечений.

Определим сечение поверхности плоскостями $z=h$, где $h=const$, параллельными координатной плоскости Oxy:

$$\begin{cases} z=1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}, \\ z=h. \end{cases}$$

Очевидно, что это кривые, проекции которых на ось Oxy задаются уравнением

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1-h. \qquad (15.23)$$

Уравнение (15.23) при $h>1$ не имеет решений относительно (x, y). Это означает, что соответствующее сечение есть пустое множество точек, а значит, рассматриваемая поверхность целиком расположена ниже плоскости $z=1$. При $h\le 1$ уравнение (15.23) определяет эллипс

$$\frac{x^2}{4(1-h)}+\frac{y^2}{16(1-h)}=1$$

с полуосями $a=2\sqrt{1-h}$ и $b=4\sqrt{1-h}$, вырождающийся в точку (0, 0, 1) при $h=1$. Заметим, что все эллипсы, которые получаются в сечениях поверхности плоскостями $z=h<1$, подобны между собой, причем с уменьшением h их полуоси неограниченно монотонно возрастают.

Дальнейшее уточнение формы можно получить, рассматривая сечения координатными плоскостями Oxz и Oyz:

$$\begin{cases} z=1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}, \\ y=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} z=1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}, \\ x=0. \end{cases}$$

В первом случае имеем кривую $x^2=4(1-z)$, т. е. параболу с параметром $p=2$, вершиной в точке $x=0$, $z=1$ и ветвями, направленными в отрицательную сторону оси Oz. Во втором – параболу $y^2 = 16(1 - z)$ с параметром $p = 8$, вершиной в точке $y = 0$, $z = 1$ и аналогичным направлением ветвей.

Выполненное исследование позволяет построить заданную поверхность (рис. 15.10). Это эллиптический параболоид $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 - z$ с вершиной в точке (0, 0, 1), направленный в сторону убывания значений z с осью симметрии Oz.

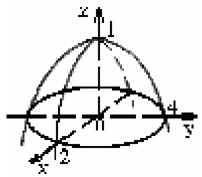


Рис. 15.10

Пример 3. Построить тело, ограниченное поверхностями
$x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Решение. Уравнение $x + y + z = 3$ задает плоскость. Перейдя к уравнению плоскости «в отрезках», получим:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1,$$

т. е. плоскость пересекает координатные оси в точках (3, 0, 0), (0, 3, 0) и (0, 0, 3) соответственно.

Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает круговой цилиндр, осью которого служит Oz. Уравнение $z = 0$ определяет координатную плоскость Oxy.

Сделаем рисунок тела (рис. 15.11, 15.12), ограниченного заданными поверхностями.

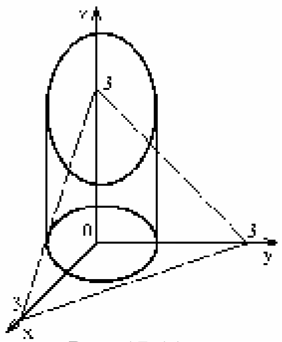


Рис. 15.11

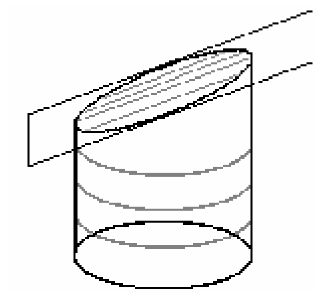


Рис. 15.12

Задания

I уровень

1.1. Найдите координаты центра и радиус сферы:

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 8z + 10 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 6y + 37 = 0$.

1.2. Найдите центр и длины полуосей эллипсоида:

1) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$;

2) $16(x-1)^2 + 9(y+2)^2 + 36(z-2)^2 = 144$;

3) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 + 8x + 36y - 72z + 40 = 0$.

1.3. Определите, какая поверхность задана уравнением:

1) $x^2 + y^2 - a^2 = 0$; 2) $y^2 = 8z$; 3) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$;

4) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$; 5) $x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$; 6) $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$.

1.4. Определите линию пересечения двух параболических цилиндров $y^2 = x$ и $z^2 = 1 - x$.

1.5. Установите, какую фигуру задает система уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{9} = 2z, \\ z - 4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1, \\ x = 2z; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = z, \\ x + 2y - 3 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 2y, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$

II уровень

2.1. Приведите уравнение к каноническому виду и определите тип поверхности:

1) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y + 2z + 4 = 0$;

2) $3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 49 = 0$;

3) $x^2+2y^2+6x-18y+8z+49=0$;

4) $2x^2+3y^2+6x-18y-12z+47=0$;

5) $2x^2+y^2-z^2+16x-2y+4z+17=0$.

2.2. Найдите точки пересечения поверхности и прямой:

1) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ и $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$;

2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

2.3. Докажите, что поверхность и плоскость имеют одну общую точку, найдите ее координаты, если:

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$ и $2x-2y-z-10=0$;

2) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$ и $5x+2z+5=0$.

2.4. Постройте цилиндр:

1) $x^2+z^2=4$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$;

3) $y^2=x^2+z^2$; 4) $x^2-y^2-z^2-4=0$.

2.5. Запишите уравнение сферы, имеющей центр в точке $M_0(1,\ 4,\ -7)$ и касающейся плоскости $6x+6y-7z+42=0$.

III уровень

3.1. Постройте тело, ограниченное заданными поверхностями:

1) $x^2+y^2=1,\quad z=4x,\quad z=0$;

2) $z=4-y^2,\quad z=y^2+2,\quad x=-1,\quad x=2$;

3) $y=\sqrt{x},\quad y=2\sqrt{x},\quad z=0,\quad x+z=6$;

4) $x^2+y^2+z^2=16,\quad x^2+y^2=4$.

3.2. Напишите уравнение фигуры, каждая точка которой равноудалена от точки $M_0(-1,\ 0,\ 0)$ и плоскости $x=1$.

3.3. Составьте каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, которому принадлежат:

1) точки $M_1(3,\ 1,\ 2)$, $M_2(2,\ \sqrt{11},\ 3)$ и $M_3(6,\ 2,\ \sqrt{15})$;

2) гиперболы $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,\\ z=0\end{cases}$ и $\begin{cases}\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,\\ x=0.\end{cases}$

3.4. Составьте уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат и который проходит через:

1) эллипсы $\begin{cases}\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1,\\ x=0\end{cases}$ и $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1,\\ z=0;\end{cases}$

2) эллипс $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}=1,\\ z=0\end{cases}$ и точку $M_0(2,\ 0,\ 1)$.

16. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

16.1. Предел функции в точке и на бесконечности

Определение предела функции по Гейне было дано в § 10.3.

Определение по Коши. Число A называется *предельм функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если функция определена в некоторой выколотой окрестности точки x_0 и если для любого сколь угодно малого числа $e > 0$ существует такое число $d = d(e)$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < d, \qquad (16.1)$$

выполняется

$$|f(x) - A| < e. \qquad (16.2)$$

Это записывают так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Число A называется ***пределом функции на бесконечности*** (при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$), если для любого $e > 0$ существует число $d = d(e)$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x| > d,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < e.$$

Это записывают так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \text{ или } \lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

Определение предела функции в точке (на бесконечности) по Гейне и Коши эквивалентны.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to x_0$ $(x \to \pm\infty)$, если для всякого числа $M > 0$ существует число $d = d(\mathrm{M})$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < d \ \ (|x| > d),$$

выполняется неравенство

$$|f(x)| > M.$$

Это записывают так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \ \ (\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty).$$

Если $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to x_0$ $(x \to \pm\infty)$, то она не имеет предела в этой точке (на бесконечности). Символ предела в данном случае используют лишь для обозначения.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$ $(x \to \pm\infty)$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \ \ (\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0).$$

Свойства предела функции в точке

1. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то существует окрестность этой точки (за исключением, быть может, самой точки x_0), на которой функция ограничена.

2. Если существует предел функции $f(x)$ в точке x_0, равный числу $A(A \neq 0)$, то существует такая окрестность точки x_0, на которой функция имеет тот же знак, что и число A.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке x_0, то:

$$\lim_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x), \text{ где } C = const;$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x); \qquad (16.3)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x); \qquad (16.4)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \qquad (16.5)$$

$$\text{где } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

Формулы (16.3) и (16.4) обобщаются на любое конечное количество слагаемых и множителей. В случае их бесконечного количества равенство выполняется не всегда.

Аналогичные свойства верны и для предела функции на бесконечности.

Если в результате непосредственного использования формул (16.3) – (16.5) возникают неопределенности типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, то вначале необходимо тождественно преобразовать выражение, стоящее под знаком предела (то же для неопределенностей 1^∞, 0^0, ∞^0).

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций

1. Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует бесконечно малая функция $a(x)$ при $x \to x_0$ такая, что $f(x) = A + a(x)$.

2. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых (бесконечно больших) функций при $x \to x_0$ является бесконечно малой (бесконечно большой) функцией.

3. Произведение бесконечно малой функции при $x \to x_0$ на ограниченную функцию является бесконечно малой.

4. Частное при делении постоянной C, $C \neq 0$, на бесконечно малую функцию при $x \to x_0$ является бесконечно большой при $x \to x_0$.

5. Частное при делении постоянной C на бесконечно большую функцию при $x \to x_0$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

При вычислении пределов функций удобно применять метод замены переменной, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} f(y)$, где $y = g(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$.

Пример 1. Пользуясь определением предела функции в точке по Коши, доказать, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{x-2}=7.$$

Решение. Зафиксируем произвольное значение $e > 0$.

Согласно определению, требуется по e найти такое число $d > 0$, чтобы из условия $0 < |x-2| < d$ следовало неравенство (16.2), которое в данном случае имеет вид:

$$\left|\frac{3x^2-5x-2}{x-2}-7\right|<e. \qquad (16.6)$$

Упрощая последнее неравенство, получим:

$$\left|\frac{(3x+1)(x-2)}{x-2}-7\right|<e.$$

Откуда, поскольку $x \neq 2$, имеем:

$|3x+1-7| < e$,

$|3(x-2)| < e$.

Получаем: $|x-2| < \dfrac{e}{3}$.

Следовательно, если принять $d = \dfrac{e}{3}$, то из неравенства $|x-2| < d$, будет следовать неравенство (16.6). Это и означает, что $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$.

Пример 2. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x+1}{2+x+x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2+x-x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x-2)^4-(2x+1)^4}{-x^3-4x^2-2x+3}$.

Решение. 1) При подстановке в выражение, стоящее под знаком предела, значения $x=-1$ получаем

$$\lim_{x\to -1}\frac{3(-1)^2+2(-1)+1}{2+(-1)+(-1)^2}=\lim_{x\to -1}\frac{3-2+1}{2-1+1}=\frac{2}{2}=1.$$

2) При подстановке в выражение, стоящее под знаком предела, значения $x=-1$ получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, для раскрытия которой разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$,

$2+x-x^2=(x+1)(2-x)$.

Подставив полученные выражения, получим:

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(2-x)}=\lim_{x\to -1}\frac{3x-1}{2-x}=\frac{3(-1)-1}{2-(-1)}=-\frac{4}{3}.$$

3) Непосредственная подстановка значения $x=3$ приводит к неопределенности $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть ее, в числителе используем формулу бинома Ньютона, а многочлен в знаменателе разложим по схеме Горнера:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^4-4x^3 2+6x^2 2^3+2^4-((2x)^4+2)}{(-x-3)(x^2+x-1)}=\lim_{x\to -3}\frac{-15x^4-40x^3-40x+15}{(-x-3)(x^2+x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{-5(x^2+1)(x+3)(3x-1)}{-(x+3)(x^2+x-1)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x^2+1)(3x-1)}{x^2+x-1}=\frac{10\cdot(9-1)}{9+3-1}=\frac{80}{11}.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^2+\ln(1+x))\sin\frac{1}{x}\right)$.

Решение. Представим функцию $f(x)=(x^2+\ln(1+x))\cdot\sin\frac{1}{x}$ как произведение двух функций $j(x)=x^2+\ln(1+x)$ и $y(x)=\sin\frac{1}{x}$.

Функция $j(x)=x^2+\ln(1+x)$ является суммой двух бесконечно малых функций при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=\ln 1=0$. Значит $y(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to 0$.

Функция $y(x)=\sin\frac{1}{x}$ является ограниченной, так как значения этой функции будут лежать в промежутке $[-1;\ 1]$.

Получаем произведение бесконечно малой функции $j(x)$ на ограниченную $y(x)$.

Значит функция $f(x)$ – есть бесконечно малая при $x\to 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Пример 4. Вычислить предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x^2+2\sqrt[3]{x^7}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})$.

Решение. 1) Непосредственная подстановка в выражение, стоящее под знаком предела, значения $x=0$ дает неопределенность $\frac{0}{0}$. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, следующим образом:

$$\frac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x^2+2\sqrt[3]{x^7}}=\frac{(\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x})(\sqrt[3]{(8+x)^2}+\sqrt[3]{8+x}\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2})}{x^2(1+2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(8+x)^2}+\sqrt[3]{8+x}\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2})}=$$

$$=\frac{8+x-8+x}{x^2(1+2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(8+x)^2}+\sqrt[3]{8+x}\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2})}=$$

$$=\frac{2}{x(1+2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(8+x)^2}+\sqrt[3]{8+x}\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2})}.$$

Возвращаясь к пределу, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{x(1+2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(8+x)^2}+\sqrt[3]{8+x}\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{0\cdot 1\cdot(2+4+2)}=\frac{2}{0}=\infty.$$

2) При непосредственном вычислении предела получим неопределенность вида $\infty-\infty$. Чтобы избавиться от нее, домножим и разделим выражение на $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(x+2-x+3)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{\frac{x+2}{x}}+\sqrt{\frac{x+3}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{5}{2}.$$

Задания

I уровень

1.1. Определите, имеет ли функция $y=f(x)$ предел при $x\to+\infty$, если:

1) $f(x)=3$; 2) $f(x)=2^x$; 3) $f(x)=(0,(3))^x$;

4) $f(x)=\frac{1}{x}$; 5) $f(x)=2+x+3x^2$; 6) $f(x)=\cos x$.

1.2. Постройте график какой-либо функции, если известно, что:
1) ее предел при $x\to+\infty$ равен 1;
2) она не имеет предела при $x\to-\infty$;
3) ее предел при $x\to+\infty$ равен 1, а при $x\to-\infty$ равен – 2.

1.3. Вычислите предел функции в точке:

1) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{16-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x-8}+2}{\sqrt{9+x}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4+3x^2-1}$; 9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$;

10) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$;

13) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; 14) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

1.4. Вычислите предел функции на бесконечности:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2-(2x-1)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^4-(x-1)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2x-1}{4x^2-1}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-5x+6})$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+4}-\sqrt{5x^4+1}}{1+3+5+\ldots+(2x-1)}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\ldots+x}{x+2}-\dfrac{x}{2}\right)$.

II уровень

2.1. Пользуясь определением предела функции в точке по Коши, докажите, что:

1) $\lim\limits_{x\to0}(x-3)=-3$; 2) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-7x+6}{x-6}=5$;

3) $\lim\limits_{x\to2}(2x+1)=5$; 4) $\lim\limits_{x\to-5}(5-2x)=15$;

5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-x-3}{x+1}=-5$; 6) $\lim\limits_{x\to1}(3x-4)=-1$;

7) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-x^2+5x-6}{x-3}=-1$; 8) $\lim\limits_{x\to\frac12}\dfrac{8x^2-2x-1}{x-\frac12}=6$.

2.2. Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что функция $y=f(x)$ является бесконечно малой в окрестности точки x_0:

1) $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$, $x_0=1$; 2) $y=\dfrac{2}{x^2}+x$, $x_0=0$.

2.3. Вычислите предел функции в точке:

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac12}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$;

5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^4-2x^2+1}{10x^5-x^4+3}$;

7) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-2\sqrt[3]{x}}{x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$; 10) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{1+x}$; 12) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-7x+10}{8-x^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$; 14) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{1}{x^2-x-6}\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt[6]{x}}$; 16) $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{10}{x^2-4x-21}\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$; 18) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+5x^3-5x^2-3x+2}{x^4+5x^3-3x^2+2}$;

19) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$; 20) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{x^2-x-2}\right)$;

21) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4+3x^2-4}{x^4-13x^2+36}$; 22) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[5]{27-x}}$.

2.4. Вычислите предел функции на бесконечности:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^5-3}-x\sqrt{x(x^2+2)}}{\sqrt{3x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{1+27x^3}-3x)$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x+2^x}{\operatorname{arctg}x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{-x}+1}{\operatorname{arcctg}x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+x+3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\sqrt{3x}-\sqrt{16x^6+1}}{\left(x-\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{x^6-3}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{e^{-x}+2}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{-x}-5\cdot 3^{x+1}}{3^{x-1}-5^{x-1}}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3+9+\ldots+3^x}{5^{-x+1}+2\cdot 3^{x-4}}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^x+2\cdot 3^{x+1}-5^{-x}}{2\cdot 4^{x+1}-3^{x-1}}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{x+1}+5\cdot 2^x-7^{-x}}{7\cdot 3^x-6\cdot 2^{x-1}}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\sqrt[3]{x^2(x^6+1)}-x^3\sqrt[3]{x^8+2}\right)$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2+2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$.

III уровень

3.1. Верно ли, что:

1) если $f(x)$ – четная функция и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, то существует $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$?

2) если $f(x)$ – нечетная функция и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, то существует $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$?

3) если $f(x)$ – нечетная функция и существует $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$, то существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-A$?

3.2. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+7\cdot 2^2+\mathbf{K}+(2x-1)2^{x-1})$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2^x+(-3)^x)^2}{10^x}$.

3.3. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, если

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x+1}, & \text{если } x>0;\\[2mm] \dfrac{5x}{4x-1}, & \text{если } x\le 0.\end{cases}$$

3.4. Вычислите $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$, где a – предел числовой последовательности, заданной формулой общего члена $x_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+n}$.

3.5. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{p}{6}\right)\left(5x^2+3x-1\right)^{x^2}}{\left(5x^2+3x+3\right)^{x^2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\left(x-\dfrac{p}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{-x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt[3]{x+2}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x^2+2}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{8\sin\left(\dfrac{p}{2}-x\right)+7x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt{\lg\left(x+2\right)^2+\cos\dfrac{4p}{x}\sin\dfrac{x+1}{x-8}}$.

16.2. Замечательные пределы

При вычислении пределов в случае неопределенностей часто используют специальные формулы, которые называются замечательными пределами.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{16.7}$$

Как следствие формулы (16.7), справедливы формулы:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^n=1,\ n\in\mathbf{N}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^n=1,\ n\in\mathbf{N}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

Второй замечательный предел

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\\ &\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \end{aligned}\right] \qquad (16.8)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e, \qquad (16.9)$$

в частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \qquad (16.10)$$

в частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a. \qquad (16.11)$$

Указанные формулы (16.7) – (16.11) замечательных пределов обобщаются на любую функцию $u(x)$, стоящую вместо независимой переменной x при условии, что $u(x)\to 0$, если $x\to x_0$ (или $x\to\pm\infty$) во всех формулах, кроме (16.8), в которых $u(x)\to\infty$.

Обобщенная таблица замечательных пределов

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1;$$

$$\lim_{u(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e;\quad \lim_{u(x)\to 0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e; \qquad (16.12)$$

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\log_a(1+u(x))}{u(x)}=\log_a e;\qquad \lim_{u(x)\to 0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1; \quad (16.13)$$

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a;\qquad \lim_{u(x)\to 0}\frac{e^{u(x)}-1}{u(x)}=1; \qquad (16.14)$$

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{(1+u(x))^2-1}{u(x)}=a. \qquad (16.15)$$

При использовании обобщенных формул на практике вместо $u(x)\to 0$ $(u(x)\to\infty)$ под знаком предела пишут указанное в условии: $x\to x_0\,(u(x)\to\infty)$.

Все приведенные формулы обобщенной таблицы замечательных пределов (кроме формул (16.12)) раскрывают неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Формулы (16.12) раскрывают неопределенность вида 1^∞.

Пример 1. Вычислить предел функций в точке:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2(x-1)}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\sin^2 7x}$.

Решение. 1) При непосредственной подстановке в функцию значения $x=0$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}\cdot\frac{5}{5}=\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\left|x\to 0\Rightarrow 5x\to 0\right|=\frac{5}{2}.$$

2) При $x=0$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой сначала применим формулы тригонометрии, а затем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2(x-1)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2(x-1)}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{3x^2\cdot\frac{4}{4}}=-\frac{1}{6}\left(\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=-\frac{1}{6}.$$

3) Преобразуем вначале разность косинусов в произведение, а затем используем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\sin^2 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\sin 2x}{\sin^2 7x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\left(\frac{7x}{\sin 7x}\right)^2\cdot\frac{6}{49}=$$

$$=\frac{12}{49}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x}{\sin 7x}\right)^2=\frac{12}{49}.$$

Пример 2. Вычислить предел функции, используя соответствующий замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{x^2-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{2}{5x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin x)}{1-\sqrt[3]{1+2x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{p}{6}}(\sin 3x)^{\frac{4}{\cos^2 3x}}$.

Решение. 1) Воспользуемся первой формулой из (16.12):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{x^2-6}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+3}{x^2-1}-1\right)^{x^2-6}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)^{x^2-6}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{4}}\right)^{x^2-6}.$$

В данном случае $u(x)=\dfrac{x^2-1}{4}$ и $u(x)\to\infty$, если $x\to\infty$, значит

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{4}}\right)^{x^2-6}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{4}}\right)^{(x^2-6)\cdot\frac{x^2-1}{4}\cdot\frac{4}{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{4}}\right)^{\frac{x^2-1}{4}\cdot\frac{4x^2-24}{x^2-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-24}{x^2-1}}=e^4.$$

2) Непосредственная подстановка в функцию значения $x=0$ дает неопределенность вида 1^∞ для раскрытия которой воспользуемся второй формулой из (16.12). Для этого преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{2}{5x}}=\lim_{x\to 0}(x+e^x-1+1)^{\frac{2}{5x}}=\lim_{x\to 0}(1+(x+e^x-1))^{\frac{2(x+e^x-1)}{(x+e^x-1)5x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+(x+e^x-1))^{\frac{1}{x+e^x-1}\cdot\frac{2(x+e^x-1)}{5x}}=e^{\frac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{e^x-1}{x})}=e^{\frac{2}{5}\cdot 2}=e^{\frac{4}{5}}.$$

3) При $x=0$ получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, для раскрытия которой сначала упростим выражение, а затем применим формулы (16.7), (16.13), (16.15):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{1-\sqrt[3]{1+2x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{\ln(1+(-\sin x))}{-\sin x}:\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(-\sin x))}{-\sin x}:\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}=$$

$$=\left|\begin{matrix}x\to 0\Rightarrow 2x\to 0\\ x\to 0\Rightarrow(-\sin x)\to 0\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1:\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}.$$

4) Имеем неопределенность вида 1^∞. Сделаем замену переменной. Пусть $y=x-\dfrac{p}{6}$, тогда $x=\dfrac{p}{6}+y$. При $x\to\dfrac{p}{6}$ новая переменная $y\to 0$. При этом $3x=\dfrac{p}{2}+3y$,

$$\sin 3x=\sin\left(\frac{p}{2}+3y\right)=\cos 3y,\ \text{а}\ \cos 3x=\cos\left(\frac{p}{2}+3y\right)=-\sin 3y.$$

Подставив полученные выражения в формулу, получим:

$$\lim_{x\to\frac{p}{6}}(\sin 3x)^{\frac{4}{\cos^2 3x}}=\lim_{y\to 0}(\cos 3y)^{\frac{4}{\sin^2 3y}}=\lim_{y\to 0}(1+\cos 3y-1)^{\frac{4}{\sin^2 3y}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(1+\left(-2\sin^2\frac{3}{2}y\right)\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{3}{2}y}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{3}{2}y}{1}\cdot\frac{4}{\sin^2 3y}}=e^{-8\lim\limits_{y\to 0}\frac{\left(\frac{3}{2}y\right)^2}{(3y)^2}}=e^{-2}.$$

Заметим, что этот пример также можно было решать без замены переменной.

Задания

I уровень

1.1. Вычислите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1+2x)}{3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x^2+x)}{x^2+x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+1)^3-1}{2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-2^{2x}}{2x+x^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{ctg}^2 2x\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\sin x}{\frac{1}{\cos x}-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 3x-\sin^2 2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\sin^2 3x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\ 3x}{1-\cos^3 5x}$.

1.2. Вычислите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{5x}\right)^{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-2}\right)^{3x-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-1}\right)^{2x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{x}{2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{x^2-4}{2x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\mathrm{ctg}\left(\dfrac{p}{2}+x\right)\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

II уровень

2.1. Вычислите предел функции, используя замечательные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-x^2\right)\mathrm{tg}\ 4x}{\sqrt{1+x\sin x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{3}\left(1-8^{\mathrm{tg}\ 3x}\right)}{3\sqrt{1+x^3+2x^2}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt{1+\mathrm{tg}\ 3x}\right)\sin 5x}{\ln\left(1-x^2+3x^3\right)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+2x}-1\right)\ln(1+\sin 3x)}{\mathrm{tg}\ 2x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x^3}{e^x-e^{-3x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x-x^2}-1\right)\ln\left(1-\mathrm{tg}\ ^2x\right)}{\sin 5x^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\ln\left(3x^2-1\right)-\ln\left(3x^2+2\right)\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\left(\ln(5x+1)-\ln(5x+2)\right)$.

2.2. Вычислите пределы функций, сделав соответствующую замену переменной:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos 2p\,x}{\left(2^{\mathrm{tg}\,p\,x}-1\right)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{e^{\cos^2 x}-1}{\lg\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{\mathrm{tg}^2 p\,x}-1}{\log_2\cos 4p\,x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{e^x-e^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\ln(6-x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{x^3-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{tg}\frac{3p}{4}x}$; 8) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{-x}-e^3}{9-x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{x+4}{x+1}}$; 10) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{1-x}{x-3}}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2}{x}}$; 12) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{\sqrt{2}}}\dfrac{e^{\ln(\arcsin x+p/3)}}{\log_{32}8x}$;

13) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}(\sin x)^{tg^2 3x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}(\sin 2x)^{\frac{8}{\cos 2x}}$;

15) $\lim\limits_{x\to 1}(\cos 4p\,x)^{\frac{1}{\sin p\,x}}$; 16) $\lim\limits_{x\to 1}(\cos 2p\,x)^{\frac{1}{\mathrm{ctg}\,p\,x}}$;

17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2+\cos p\,x)}{1-2^{\mathrm{tg}^2 2p\,x}}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$;

19) $\lim\limits_{x\to\frac{3p}{2}}\left(\dfrac{3p}{2}-x\right)\mathrm{tg}\ x$; 20) $\lim\limits_{x\to p}(p-x)\,\mathrm{ctg}\ 3x$;

21) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{1+\cos 2x}{\cos 3x}$; 22) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{\sin(6x-p)}$;

23) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x+1}{2-x}}$; 24) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{x+1}{3-x}}$.

III уровень

3.1. Вычислите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}(a>1)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

3.2. Вычислите предел функции, предварительно преобразовав выражение:

1) $\lim\limits_{x\to p}\frac{\operatorname{ctg}a+\operatorname{tg}a}{\operatorname{ctg}a-\operatorname{tg}a}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin a+2\sin 3a+\sin 5a}{\sin 3a+2\sin 5a+\sin 7a}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\left(\sqrt{\operatorname{tg}2x+\sin 2x}-\sqrt{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}\right)$.

16.3. Эквивалентность бесконечно малых функций

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми, при $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

это записывают так: $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$.

При вычислении пределов функций в точке и на бесконечности удобно пользоваться следующей теоремой:

Теорема. Если $h(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, определенные в окрестности точки x_0 (на числовой полуоси) и $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$, то

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left(h(x)\cdot f(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(h(x)\cdot g(x)\right). \qquad (16.16)$$

Формула (16.16) показывает, что в произведении можно заменять функцию-сомножитель на эквивалентную ей – более простую для вычисления предела.

Таблица эквивалентных бесконечно малых

Пусть $u(x)\to 0$, если $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$. Тогда справедливы следующие эквивалентности:

$$\sin u(x)\sim u(x); \qquad (16.17)$$

$$tg\ u(x)\sim u(x); \qquad (16.18)$$

$$\arcsin u(x)\sim u(x); \qquad (16.19)$$

$$arctg\ u(x)\sim u(x); \qquad (16.20)$$

$$\cos u(x)\sim 1-\frac{(u(x))^2}{2}; \qquad (16.21)$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_a(1+u(x))\sim u(x)\log_a e;\\ \ln(1+u(x))\sim u(x);\end{array}\right. \qquad (16.22)$$

$$\left[\begin{array}{l}a^{u(x)}-1\sim u(x)\ln a;\\ e^{u(x)}-1\sim u(x);\end{array}\right. \qquad (16.23)$$

$$(1+u(x))^a-1\sim a\,u(x). \qquad (16.24)$$

Пример 1. Вычислить предел функции в точке, заменяя бесконечно малые эквивалентными им:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{1-\sqrt[3]{1+2x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x\left(1-e^{\sin\frac{x}{2}}\right)}{\sqrt[5]{1+2x^2}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin\left(x^2+4x+4\right)}{x^2-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$.

Решение. 1) Непосредственное вычисление предела приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Используем формулу (16.16), а также формулы (16.22), (16.24), (16.17) таблицы эквивалентных функций.

При этом выполняются условия $2x\to 0$, $-\sin x\to 0$, если $x\to 0$, которые являются обязательными для перехода к эквивалентным функциям. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(-\sin x))}{-\left((1+2x)^{\frac{1}{3}}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-\frac{1}{3}\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

Заметим, что решение примера с таким условием уже дано выше (см. 3-е условие примера 2 из параграфа 16.2).

2) При подстановке $x=0$ в выражения получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы от нее избавиться, воспользуемся формулами (16.18), (16.23), (16.24) таблицы эквивалентных бесконечно малых. Поскольку $x\to 0$, то справедливы эквивалентности:

$\operatorname{tg} x \sim x$;

$$1-e^{\sin\frac{x}{2}}=-\left(e^{\sin\frac{x}{2}}-1\right)\sim -\sin\frac{x}{2}\sim -\frac{x}{2};$$

$$\sqrt[5]{1+2x^2}-1=\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{5}}-1\sim\frac{1}{5}\cdot 2x^2.$$

Подставив полученные эквивалентные функции вместо соответствующих бесконечно малых, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x\left(1-e^{\sin\frac{x}{2}}\right)}{\sqrt[5]{1+2x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)}{\frac{2}{5}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}}=-\frac{5}{4}.$$

3) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, и используем формулу (16.19):

$$\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin\left(x^2+4x+4\right)}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin\left(x+2\right)^2}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}=$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin\left(x+2\right)^2}{x+2}=\left|\frac{0}{0}\right|=-\frac{1}{4}\lim_{x\to -2}\frac{\left(x+2\right)^2}{x+2}=0.$$

Использование формулы (16.19) было обосновано тем, что $u\left(x\right)=x+2\to 0$, если $x\to -2$.

4) Замечаем, что непосредственное вычисление предела приводит к неопределенности вида $0\cdot\infty$. Вместе с тем, $\frac{1}{x}\to 0$, если $x\to\infty$, а поэтому можем использовать формулу (16.20). Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=1.$$

Пример 2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\log_3\cos 4p\,x}{e^{tg^2p\,x}-1}$ несколькими способами.

Решение. *1-й способ*. При $x\to 3$ получим:

$\log_3\cos 4p\,x=\log_3\cos 12p=\log_3 1=0$ и

$e^{\operatorname{tg}^2 p\,x}-1=e^{\operatorname{tg}^2 3p}-1=e^0-1=1-1=0.$

Следовательно, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Сделаем замену переменной. Введем такое t, чтобы $t\to 0$, если $x\to 3$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log_3\cos 4p\,x}{e^{\operatorname{tg}^2p\,x}-1}=\left|\begin{array}{l}x-3=t,x=t+3\\ x\to 3\Rightarrow t\to 0\\ \cos 4p\,x=\cos 4p\left(t+3\right)=\cos\left(4p\,t+12p\right)=\cos 4p\,t\\ \operatorname{tg}^2p\,x=\operatorname{tg}^2\left(p\left(t+3\right)\right)=\operatorname{tg}^2\left(p\,t+3p\right)=\operatorname{tg}^2\left(p\,t\right)\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3\cos 4p\,t}{e^{\operatorname{tg}^2p\,t}-1}.$$

Далее заменим бесконечно малые в числителе и знаменателе на эквивалентные по формулам (16.21), (16.23), (16.22), (16.18).

Мы имеем право сделать это, так как для соответствующей функции $u(t)$ выполняется $u(t)\to 0$, если $t\to 0$. Получаем:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log_3\cos 4p\,t}{e^{\operatorname{tg}^2p\,t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3\left(1-\frac{\left(4p\,t\right)^2}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2p\,t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{\left(4p\,t\right)^2}{2}\cdot\log_3 e}{\left(p\,t\right)^2}=$$

$$=\log_3 e\lim_{t\to 0}\frac{16\left(p\,t\right)^2}{2\left(p\,t\right)^2}=-8\log_3 e.$$

2-й способ. Поскольку при непосредственном вычислении предела имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то необходимо преобразовать выражение, стоящее под знаком предела. Однако сразу использовать таблицу эквивалентности бесконечно малых нельзя, поскольку $\cos 4p\,x$ и $\operatorname{tg}^2p\,x$ не стремятся к нулю, если $x\to 3$. Используя свойство периодичности тригонометрических функций, получаем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log_3\cos 4p\,x}{e^{\operatorname{tg}^2p\,x}-1}=\lim_{x\to 3}\frac{\log_3\cos\left(4p\,x-12p\right)}{e^{\operatorname{tg}^2\left(p\,x-3p\right)}-1}=\lim_{x\to 3}\frac{\log_3\cos\left(4p\left(x-3\right)\right)}{e^{\operatorname{tg}^2\left(p\left(x-3\right)\right)}-1}.$$

Выражение под знаком предела преобразовано таким образом, что $4p\left(x-3\right)\to 0$ и $p\left(x-3\right)\to 0$, если $x\to 3$. Поэтому можно использовать формулы эквивалентности (16.21), (16.23), (16.22), (16.18). В результате получаем:

$$\lim_{x\to3}\frac{\log_3\left(1-\dfrac{16p^2(x-3)^2}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(p(x-3)\right)}=\lim_{x\to3}\frac{-8p^2(x-3)^2\log_3 e}{p^2(x-3)^2}=-8\log_3 e.$$

Пример 3. Вычислить предел функции, заменяя бесконечно малые эквивалентными,

$$\lim_{x\to0}\left(1-\ln\left(1+x^3\right)\right)^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}.$$

Решение. Непосредственное вычисление предела приводит к неопределенности вида 0^∞. Используем формулы (16.19) и (16.22) таблицы эквивалентных функций.

При этом выполняется условие $x^3\to0$, если $x\to0$, которое является обязательным для перехода к эквивалентным функциям. Тогда

$$\lim_{x\to0}\left(1-\ln\left(1+x^3\right)\right)^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}=\lim_{x\to0}\left(1-x^3\right)^{\frac{3}{x^2\cdot x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\left(-x^3\right)\right)^{\frac{-3}{-x^3}}.$$

Используя далее вторую формулу из (16.12), получаем:

$$\lim_{x\to0}\left(1+\left(-x^3\right)\right)^{\frac{-3}{-x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}(-3)}=e^{-3}.$$

Задания

I уровень

1.1. Докажите, что функции $a(x)$ и $b(x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми при $x\to0$:

1) $a(x)=2x^3+3x^5,\ b(x)=x^2$;

2) $a(x)=\dfrac{7x^{10}}{x^3+1},\ b(x)=x^5$;

3) $a(x)=\dfrac{3\sqrt{x^3}}{1-x^2},\ b(x)=x^{\frac{1}{2}}$;

4) $a(x)=\sin^2 2x,\ b(x)=x$.

1.2. Вычислите предел функции, заменяя бесконечно малые эквивалентными:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\arcsin 4x)^2}{x\left(\sqrt{1+5x}-1\right)}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(5^x-1\right)\left(2^x-1\right)}{\left(3^x-1\right)\left(6^x-1\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\sin 3x}-1}{\sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+2x}-1\right)\ln(1+x)}{\operatorname{tg}\,2x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x\operatorname{arctg}7x}{\operatorname{tg}5x\arcsin 3x}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\operatorname{arctg}\,2x-7x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+tgx^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{arctg}x-x^2}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-2^{7x}}{\operatorname{tg}3x-x}$;

12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\operatorname{tg}2x}$.

II уровень

2.1. Вычислите предел функции, используя эквивалентность бесконечно малых:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}-1\right)}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{3}+x^2}{\operatorname{arctg}3x-x^2+4x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+2x-3x^2+4x^3\right)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1-7x^2}{\sin\left(3(x+p)\right)+\operatorname{tg}x^2-\sqrt[5]{x^6}}$;

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{2x-x^3}-1)\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2}}{\sqrt[3]{1-x^3}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{3}\left(1-8^{tg3x}\right)}{\sqrt[3]{1+x^3+2x^2}-1}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1-\sqrt{1+\operatorname{tg}2x}\right)\sin 6x}{\ln\left(1-x^2+3x^3\right)}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{3x}\right)^{x/(x+4)}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{(3x+8)/(2+x)}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2}{\ln\left(1+x^2\right)}\right)^{2/(x+3)}$;

12) $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{5p}{4}-x\right)\right)^{\left(e^x-1\right)/x}$.

2.2. Вычислите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)\cos\dfrac{p\,x}{2}}{3(x-1)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos p\,x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{e^{\cos^2 x}-1}{\lg\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\left(x^2-3x+3\right)}{x^2-7x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-p^2}}{\ln\left(1+\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\right)}$; 6) $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}\dfrac{\ln\sin 4x}{(4x-p)^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2^{\sin p\,x}-1}{\ln(x^3-6x+5)}$;

9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3^x+6}-3^{\frac{x+1}{2}}}{x^3-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\ln\cos 4x}{\ln\cos 2x}$.

III уровень

3.1. Вычислите предел функции с помощью таблицы эквивалентности бесконечно малых двумя способами (производя замену переменной и без замены переменной):

1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{\sin 7p\,x}}{\sqrt[4]{x\sin 8p\,x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{e^{\cos x}-e^{\cos 3x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\lg\left(2+\sin\dfrac{p\,x}{2}\right)}{e^{\sin p\,x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to p/2}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

3.2. Вычислите предел функции несколькими способами:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\left(\dfrac{p}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg} x$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\operatorname{tg}^2 x\left(\sqrt{2\sin^2 x+3\sin x+4}-\sqrt{\sin^2 x+6\sin x+2}\right)$.

3.3. Вычислите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$; 2) $\lim\limits_{x\to p}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}\right)^{1/\cos(x/2)}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\operatorname{tg} 9p\,x}{\sin 4p\,x}\right)^{x/(x+1)}$; 4) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}\right)^{x^2/a^2}$.

16.4. Односторонние пределы. Асимптоты графика функции

Левой (правой) полуокрестностью точки x_0 называется произвольный интервал (a,x_0) $\left((x_0,b)\right)$, где $a<x_0$ $(b>x_0)$ слева (справа).

Число A называется ***пределом слева (справа) функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0, если функция $f(x)$ определена в некоторой левой (правой) полуокрестности точки x_0 и если для любого $e>0$ существует $d=d(e)>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0-d<x<x_0$ $(x_0<x<x_0+d)$, выполняется неравенство

$$\left|f(x)-A\right|<e.$$

В этом случае пишут: $A=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\left(A=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)\right)$.

Пределы слева и справа называются ***односторонними пределами***. Если $x_0=0$, то односторонние пределы обозначают $\lim\limits_{x\to-0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$.

Функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют оба односторонних предела, равных между собой.

В этом случае их общее значение является пределом функции $f(x)$ в точке x_0:

$$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x).$$

Асимптота графика функции $y=f(x)$ – это прямая линия, к которой неограниченно приближается график данной функции, когда его точка неограниченно удаляется от начала координат.

Различают горизонтальную, вертикальную и наклонную асимптоты.

Прямая $x=a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty$.

В случае вертикальной асимптоты $x=a$ функция является бесконечно большой в точке $x=a$.

Прямая $y = b$ называется ***горизонтальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$.

Вертикальные асимптоты могут существовать у функций, которые определены не на всей числовой прямой, т. е. имеют разрыв второго рода.

Если областью определения функции является вся числовая прямая, то у функции нет вертикальных асимптот.

Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, при $x\to+\infty$, если

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0.$

Для нахождения коэффициентов k и b применяют следующие формулы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \tag{16.25}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right). \tag{16.26}$$

Если хотя бы один из пределов (16.25), (16.26) равен ∞ или не существует, то у функции наклонных асимптот нет.

Если $k=0$, $b\neq 0$, то прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой. Заметим, что наклонных асимптот у функции может быть не больше двух, а вертикальных может быть сколько угодно.

Пример 1. Найти односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$, $x_0=2$; 2) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\le 0;\\ (x+1)^2, x>0;\end{cases}$ $x_0=0$.

Решение. 1) Вычислим пределы функции в точке $x_0=2$ слева и

справа, т. е. $\lim\limits_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}}$ и $\lim\limits_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}}$.

Если $x\to 2-0$, то $x-2\to -0$, значит $\dfrac{1}{x-2}\to-\infty$. Получаем

$\lim\limits_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}}=0.$

Если $x\to 2+0$, то $x-2\to +0$, значит $\dfrac{1}{x-2}\to+\infty$. Получаем

$\lim\limits_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}}=+\infty.$

2) При $x\le 0$ функция задана формулой $f(x)=\sin x$. Поэтому

$$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\sin x=0.$$

При $x>0$ функция задана формулой $f(x)=(x+1)^2$ т. е.

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}(x+1)^2=1.$$

Значит $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0}(x+1)^2=1.$

Пример 2. С помощью односторонних пределов показать, что функция $f(x)=\dfrac{|x|}{x+x^2}$ не имеет предела в точке $x_0=0$.

Решение. При $x<0$ имеем $|x|=-x$ и функция принимает вид:

$f(x)=\dfrac{-x}{x+x^2}=\dfrac{-x}{x(1+x)}=\dfrac{-1}{1+x}.$

Поэтому $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{-1}{1+x}=-\dfrac{1}{1+0}=-1.$

При $x>0$ имеем $|x|=x$ и функцию $f(x)=\dfrac{x}{x(1+x)}=\dfrac{1}{1+x}.$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1+0}=1.$

Получим, что оба односторонних предела функции в точке $x_0=0$ существуют, однако они различны, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x+x^2}$ не существует.

Пример 3. Найти асимптоты графика функции:

1) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; 2) $y=\dfrac{(x+2)^3}{(x-2)^2}$.

Решение. 1) Вертикальных асимптот данная функция не имеет, потому что она определена для любых $x\in(-\infty;\ +\infty)$. Для того чтобы найти горизонтальные асимптоты, надо рассмотреть пределы функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

Получили, что $y=0$ – горизонтальная асимптота (ось $0x$).

Будем искать наклонные асимптоты в виде функции $y=kx+b$.

Согласно формулам (16.25) и (16.26), вычисляем:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{(1+x)^2\,x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=0.$$

Так как $k=0$, значит наклонных асимптот у графика нет.

2) Так как при $x=2$ функция не определена, рассмотрим $\lim\limits_{x\to2-0}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to2+0}f(x)$.

Вычисляем:

$$\lim_{x\to2-0}\frac{(x+2)^3}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2-0}\frac{(2-0+2)^3}{(2-0-2)^2}=\lim_{x\to2-0}\frac{(4-0)^3}{(-0)^2}=\frac{64}{0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to2+0}\frac{(x+2)^3}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2+0}\frac{(2+0+2)^3}{(2+0-2)^2}=\lim_{x\to2+0}\frac{(4+0)^3}{0^2}=\frac{64}{0}=+\infty.$$

Поэтому прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Ищем горизонтальную асимптоту.

Вычисляем

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+2)^3}{(x-2)^2}=\infty,$$

это означает, что горизонтальных асимптот нет.

Выясним наличие наклонных асимптот. По формулам (16.25) и (16.26) находим:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+2)^3}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-4x^2+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{6x^2}{x^3}+\dfrac{12x}{x^3}+\dfrac{8}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{4x^2}{x^3}+4\dfrac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+2)^3}{(x-2)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+6x^2+12x+8-x^3+4x^2-4x}{x^2-4x+4}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{10x^2+8x+8}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{10+\dfrac{8}{x}+\dfrac{8}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=10.$$

Приходим к выводу, что $y=x+10$ – наклонная асимптота.

Пример 4. Найти асимптоты графика функции:

1) $y=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{x^2-4}}$; 2) $y=\dfrac{|x-1|}{x+1}$.

Решение. 1) Областью определения $D(y)$ функции является то множество, на котором выполняется неравенство $x^2-4>0$. Решив последнее неравенство, получим что $D(y)=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Определим вертикальные асимптоты графика функции. Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x=-2$. Функция определена только в левой полуокрестности этой точки, поэтому вычисляем левосторонний предел:

$$\lim_{x\to-2-0}f(x)=\lim_{x\to-2-0}\frac{1-2x^2}{\sqrt{x^2-4}}=\left|\frac{-7}{+0}\right|=-\infty.$$

В окрестности точки $x=2$ функция определена только справа, поэтому в этой точке можем рассмотреть правосторонний предел:

$$\lim_{x\to+2+0}f(x)=\lim_{x\to2+0}\frac{1-2x^2}{\sqrt{x^2-4}}=\left|\frac{-7}{+0}\right|=-\infty..$$

Приходим к заключению, что прямые $x=-2$ и $x=2$ являются вертикальными асимптотами графика функции. Горизонтальных асимптот нет, так как

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x^2}{\sqrt{x^2-4}}=\infty.$$

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x^2}{x\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2}-2\right)}{\frac{x}{x}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-2}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=-2.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{x^2-4}}+2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x^2+2x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}=$$

$$=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1-2x^2\right)^2-4x^2\left(x^2-4\right)}{\sqrt{x^2-4}\left(1-2x^2-2x\sqrt{x^2-4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-4x^2+4x^4-4x^4+16x^2}{-2x\left(x^2-4\right)-2x^2\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-4}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{12x^2+1}{-2x^3-2x^2\sqrt{x^2-4}+8x+\sqrt{x^2-4}}=0.$$

Таким образом, $y=-2x$ – наклонная асимптота.

2) Функция определена всюду на числовой прямой, кроме точки $x=-1$, т. е. $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. Рассмотрим

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{|x-1|}{x+1}=\left|\frac{2}{-0}\right|=-\infty,\qquad \lim_{x\to-1+0}\frac{|x-1|}{x+1}=\left|\frac{2}{+0}\right|=+\infty.$$

Прямая $x=-1$ – вертикальная асимптота.

Найдем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<1}}\frac{|x-1|}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{x+1}=-1,\qquad \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>1}}\frac{|x-1|}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1.$$

Получаем, что прямая $y=-1$ является горизонтальной асимптотой при $x\to-\infty$ $(x<1)$, а прямая $y=1$ – горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$ $(x>1)$.

Ищем наклонные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x-1|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right|}{\frac{x}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{0}{1}=0.$$

Наклонных асимптот нет.

Задания

I уровень

1.1. Вычислите односторонние пределы функции:

1) $\lim\limits_{x\to1\pm0}\frac{x+3}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to2\pm0}\frac{2x+1}{(x-2)^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to-3\pm0}\frac{1}{(x+3)^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pm0}\frac{1+\sqrt{x+4}}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\pm0}\frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+4}}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to-2\pm0}\frac{x^2+x-2}{x-1}$.

1.2. Определите, сколько вертикальных асимптот имеет график функции $y=f(x)$, найдите их:

1) $y=\frac{1}{(x-2)(x+1)}$; 2) $y=\frac{\sin x}{x^2-6x+9}$;

3) $y=\frac{\log_3(x-2)}{x-5}$; 4) $y=\frac{x+4}{|x+1|-2}$.

1.3. Найдите асимптоты кривых:

1) $y=\frac{2x+1}{x-1}$; 2) $y=\frac{x^2-4x+3}{x-1}$;

3) $y=\frac{x-3}{\sqrt{x^3+1}}$; 4) $y=1-\sqrt[3]{2x-x^2}$.

II уровень

2.1. С помощью односторонних пределов определите, имеет ли функция предел в точке. В случае существования вычислите его:

1) $\lim\limits_{x\to+4}\frac{2-\sqrt{x}}{16-x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x}{|x+2|}$; 4) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{3}{8-x^3}\right)$.

2.2. Среди данных функций выберите те, которые имеют вертикальные асимптоты (ответ подтвердите доказательством):

1) $y=\frac{x^2-5x-6}{x+1}$; 2) $y=\frac{x^2-2x}{x^2-4}$;

3) $y=\begin{cases}\sqrt{-x+1}, & \text{если } x\le 1,\\ \dfrac{1}{1+x}, & \text{если } x>1;\end{cases}$ 4) $y=\begin{cases}2x^2-7, & \text{если } x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{если } x>2.\end{cases}$

2.3. Найдите асимптоты кривых:

1) $y=\dfrac{2x^2+1}{x-4}$; 2) $y=\dfrac{x^3+x^2-x+2}{3x^2-3}$;

3) $y=\dfrac{x^3+x^2-x+2}{3x^2-3}$; 4) $y=\dfrac{1-x^2}{x^2-5x+6}$;

5) $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$; 6) $y=x^3e^{x+1}$;

7) $y=\ln\left(4-x^2\right)$; 8) $y=\ln\left(x^2-2x+6\right)$.

2.4. Докажите, что заданные прямые являются асимптотами графика функции $y=f(x)$:

1) $x=0$ для функции $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$;

2) $y=x\pm p$ для функции $y=x-2\operatorname{arctg}x$;

3) $x=2,\ y=0$ для функции $y=4\dfrac{x-3}{(x-2)^2}$.

III уровень

3.1. Вычислите односторонние пределы функции в точке:

1) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\left(1-2^{\frac{1}{x-1}}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{6}\pm 0} p\operatorname{arctg}3x$; 4) $\lim\limits_{x\to\pm 0}\log_2 e^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2-0}\arcsin\log_3(2-x)$; 6) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\log_2^{-1}\log_3(x+1)$.

3.2. Вычислите односторонние пределы функции $y=f(x)$ в точке x_0:

1) $y=\begin{cases}x-1, & \text{åñëè } x<0,\\ \sin x, & \text{åñëè } x\ge 0,\end{cases}$ $x_0=0$;

2) $y=\begin{cases}2, & \text{åñëè } x<1,\\ \ln x, & \text{åñëè } x\ge 1,\end{cases}$ $x_0=1$;

3) $y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}, & \text{åñëè } x\le 3,\\ (x-3)^2, & \text{åñëè } x>3,\end{cases}$ $x_0=3$.

3.3. Определите асимптоты графика функции:

1) $y=\dfrac{10-5x^2}{\sqrt{1-9x^2}}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{2+x}$; 3) $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}\left(x^2+3\right)$;

4) $y=\dfrac{x+1}{|x|+1}$; 5) $y=\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|$; 6) $y=\dfrac{1}{|x|-1}$.

16.5. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и если выполняется условие

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (16.27)$$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что функция непрерывна на этом промежутке.

Существуют и другие определения непрерывности функции в точке. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0. \qquad (16.28)$$

Непрерывность функции в точке определяется также на основе односторонних пределов.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и если существуют односторонние пределы (конечные) такие, что

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0). \tag{16.29}$$

Свойства непрерывных функций

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $f(x)+g(x)$ также есть непрерывная функция в точке x_0. Это свойство справедливо для любого конечного количества слагаемых.

2. Произведение конечного количества непрерывных функций есть функция непрерывная.

3. Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная, если знаменатель в рассматриваемой точке не обращается в нуль.

4. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то значения функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеют тот же знак, что и функция $f(x_0)$.

5. Если функция $y = j(x)$ непрерывна в точке x_0 и принимает в этой точке значение $u_0 = j(x_0)$, а функция $f(u)$ непрерывна в точке u_0, то сложная функция $f(j(x))$ в точке x_0 непрерывна.

6. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

7. Если непрерывная на некотором отрезке функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков, то на этом отрезке найдется хотя бы одна точка, в которой функция $f(x)=0$.

8. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то операции вычисления предела в этой точке и функции f переставимы, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right). \tag{16.30}$$

На свойстве 8 (равенство (16.30)) и было основано непосредственное вычисление предела функции в случае отсутствия неопределенности (см. § 16.1–16.4).

Если нарушается хотя бы одно условие, указанное в определении непрерывности, то точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции.

Классификацию точек разрыва дают в зависимости от того, какое условие последнего определения непрерывности, в том числе равенства (16.29), нарушено.

Точки разрыва I рода

1. Если существуют односторонние пределы в точке x_0 (конечные) и

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0),$$

то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***.

2. Если существует односторонние пределы в точке x_0 (конечные) и

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x), \tag{16.31}$$

то x_0 – точка разрыва, который называется ***скачок***.

В случае устранимого разрыва функцию можно доопределить в точке x_0 значением функции $f(x)$ и она станет непрерывной. В случае скачка это сделать невозможно.

Точки разрыва II рода

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty$, то x_0 – точка разрыва, который называется ***бесконечный скачок***. В этом случае прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой.

2. Если односторонние пределы в точке x_0 не существуют (не определены), то x_0 – ***точка неопределенности***.

Для того чтобы исследовать функцию на непрерывность, необходимо ответить на вопросы:

1) где функция непрерывна;

2) какие точки являются точками разрыва;

3) какой характер разрыва в этих точках?

Пример 1. Пользуясь определением непрерывности доказать, что функция $f(x) = x^2 - x + 1$ непрерывна всюду на $\mathbf{R}$.

Решение. Докажем непрерывность этой функции в произвольной точке $x_0 \in \mathbf{R}$.

Пусть Δx – приращение аргумента в точке x_0. Соответствующее приращение функции имеет вид:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - (x_0+\Delta x) + 1 - \left(x_0^2 - x_0 + 1\right) =$$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0 - \Delta x + 1 - x_0^2 + x_0 - 1 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - \Delta x.$$

Вычислим предел приращения функции, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - \Delta x\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x)^2 - \lim_{\Delta x \to 0}\Delta x = 2x_0 \cdot 0 + 0^2 - 0 = 0.$$

Получили, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$, что и означает непрерывность функции $f(x) = x^2 - x + 1$ на всей числовой прямой, так как x_0 – произвольная действительная точка.

Пример 2. Найти точки разрыва функции $y = f(x)$ и исследовать их характер. Построить схематически график функции в окрестности точек разрыва:

1) $y = \dfrac{2}{x-4}$; 2) $y = \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{2+x}}}$.

Решение. 1) Функция $y = \dfrac{2}{x-4}$ определена на всей числовой прямой, кроме x = 4. Данная функция является элементарной, следовательно, она является непрерывной в каждой точке своей области определения. Поэтому единственной точкой разрыва является точка x = 4, в которой функция не определена. Для определения типа разрыва в этой точке вычислим односторонние пределы функции:

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{2}{x-4} = \left|\frac{2}{-0}\right| = -\infty; \qquad \lim_{x \to 4+0} \frac{2}{x-4} = \left|\frac{2}{+0}\right| = +\infty.$$

Приходим к выводу, что $x_0 = 4$ – точка разрыва II рода (бесконечного скачка).

График функции $y = \dfrac{2}{x-4}$ в окрестности точки $x_0 = 4$ представлен на рис. 16.1.

2) Точкой разрыва данной функции является точка $x = -2$. Вычислим односторонние пределы заданной функции в точке $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{2+x}}} = \left| \begin{array}{l} x \to -2+0 \\ 2+x \to +0 \\ \dfrac{1}{2+x} \to +\infty \\ 3^{\frac{1}{2+x}} \to +\infty \end{array} \right| = 0,$$

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{2+x}}} = \left| \begin{array}{l} x \to -2-0 \\ 2+x \to -0 \\ \dfrac{1}{2+x} \to -\infty \\ 3^{\frac{1}{2+x}} \to 0 \end{array} \right| = \frac{1}{1+0} = 1.$$

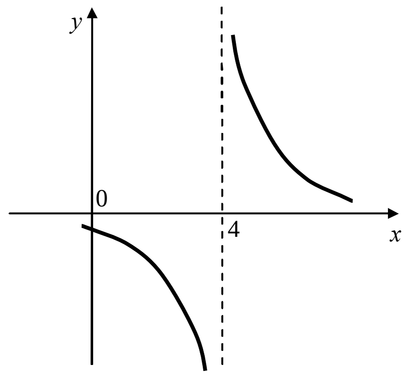


Рис. 16.1

Получили, что оба односторонних предела существуют (и конечны), но не равны между собой. Поэтому $x = -2$ – точка разрыва I рода (скачка) – рис. 16.2. Заметим, что скачок равен:

$$\lim_{x \to -2+0} f(x) - \lim_{x \to -2-0} f(x) = 0 - 1 = -1.$$

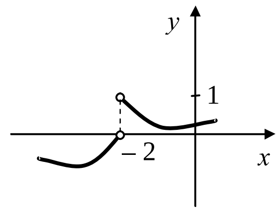


Рис. 16.2

Пример 3. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \le -1, \\ x^2 - 2, & \text{если } -1 < x \le 2, \\ 3, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

Исследовать ее на непрерывность и разрыв. Построить график.

Решение. На промежутках $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; +\infty)$ заданы аналитические выражения элементарных функций, которые определены и, следовательно, непрерывны на каждом промежутке. Поэтому точками, «подозрительными на разрыв», являются точки $x=-1$ и $x=2$.

Вычислим односторонние пределы функции в точке $x=-1$.

Так как функция $f(x)=x^3$ при $x\le -1$, то

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0} x^3=-1.$$

Так как функция $f(x)=x^2-2$ при $-1<x\le 2$, то

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim\left(x^2-2\right)=-1.$$

Вычислим значение функции в точке $x=-1$:

$$f(-1)=(-1)^3=-1.$$

Таким образом, условия непрерывности функции в точке –1 выполнены. Поэтому в точке $x=-1$ разрыва нет.

Вычислим односторонние пределы функции в точке $x=2$.

Так как функция $f(x)=x^2-2$ при $-1<x\le 2$, то

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\left(x^2-2\right)=2.$$

Так как функция $f(x)=3$ при $x>2$, то

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} 3=3.$$

Получили, что $x=2$ – точка разрыва I рода (скачка). Значит, функция непрерывна всюду на числовой прямой кроме точки $x=2$ (рис. 16.3), в которой она имеет скачок, равный 1.

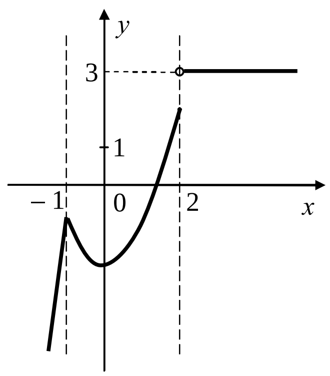


Рис. 16.3

Пример 4. Дана функция $f(x)=\begin{cases}x^2+4, & \text{если } x\le 1,\\ -x+a, & \text{если } x>1.\end{cases}$

Определить, при каком значении параметра a функция является непрерывной.

Решение. Данная функция определена на всей числовой прямой. Область определения разбивается точкой $x=1$ на два промежутка: $(-\infty;1]$ и $(1;+\infty)$. На каждом из них задана элементарная функция x^2+4 и $-x+a$ соответственно. Для непрерывности заданной функции $f(x)$ на $(-\infty;+\infty)$ необходимо наличие непрерывности в точке $x=1$, т. е. должно выполняться равенство

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=1.$$

Вычислим односторонние пределы функции в точке $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\left(x^2+4\right)=5,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(-x+a)=-1+a.$$

Найдем значение функции в точке $x=1$:

$$f(1)=1^2+4=5.$$

Следовательно, должно выполняться равенство $-1+a=5$. Из него получаем $a=6$. При $a=6$ функция примет вид:

$$y=\begin{cases}x^2+4, & x\le 1,\\ -x+6, & x>1\end{cases}$$

и будет непрерывной на всей числовой прямой.

Пример 5. Используя свойства непрерывных функций, доказать, что уравнение $3x^3+x^2-12x=4$ имеет хотя бы один корень в промежутке $[-1;0]$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=3x^3+x^2-12x-4$. Она непрерывна на отрезке $[-1;0]$ как сумма элементарных функций. Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f(-1)=-3+1+12-4=6>0,$$

$$f(0)=-4<0.$$

Получаем, что функция на концах отрезка принимает значения разных знаков, потому существует точка $x\in(-1;0)$, в которой функция обращается в нуль, т. е. $3(x)+(x)-12(x)-4=0.$

Другими словами, точка x будет являться корнем уравнения $3x+x-12x-4=0$.

Пример 6. Решить неравенство $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

Решение. Решим это неравенство, используя свойства непрерывных функций. Заданное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{3-x-\sqrt{15-x}}{\sqrt{15-x}}<0.$$

Функция $f(x)=\dfrac{3-x-\sqrt{15-x}}{\sqrt{15-x}}$ определена и непрерывна на промежутке $(-\infty;15)$. Найдем точку, в которой эта функция обращается в нуль. Для этого решим уравнение $3-x-\sqrt{15-x}=0$.

Получим два решения $x_2=6$ и $x_1=-1$. В точках $x_1=-1$ и $x_2=6$ функция определена, непрерывна и выполняется равенство $f(x)=0$. Поэтому на каждом из промежутков $(-\infty;-1)$, (1; 6), (6; 15) функция сохраняет свой знак. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значение функции в какой-либо одной точке для каждого промежутка.

Пусть $x\in(-\infty;-1)$. На этой полуоси выберем точку $x=-10$ и вычислим значение функции:

$$f(-10)=\frac{3-(-10)-\sqrt{15-(-10)}}{\sqrt{15-(-10)}}=\frac{13-5}{5}=\frac{8}{5}.$$

Полученное значение положительно и не удовлетворяет условию (по условию: меньше нуля).

Пусть $x\in(-1;6)$. Вычислим $f(0)$:

$$f(0)=\frac{3-0-\sqrt{15-0}}{\sqrt{15-0}}=\frac{3-\sqrt{15}}{\sqrt{15}}<0.$$

Следовательно, на промежутке (– 1; 6) функция принимает отрицательные значения. Пусть теперь $x\in(6;15)$. Выберем $x=11$ и вычисляем:

$$f(11)=\frac{3-11-\sqrt{15-11}}{\sqrt{15-11}}=\frac{-8-2}{2}=-5<0.$$

На промежутке (6; 15) функция также отрицательна. Поэтому решением данного неравенства является $x\in(-1;\,6)\cup(6;15)$.

Задания

I уровень

1.1. Приведите пример непрерывной функции:

1) на всей числовой прямой;
2) при всех значениях x, кроме $x=1$;
3) при всех значениях x, кроме $x=0$, $x=5$;
4) на луче $(-\infty;\,1]$;
5) на интервале (0; 2);
6) на отрезке [– 1; 1].

1.2. Пользуясь определениями непрерывности функции в точке, докажите, что функция $f(x)$ непрерывна всюду на числовой прямой:

1) $f(x)=x^3$; 2) $f(x)=x^2-3$;
3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; 4) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

1.3. Исследуйте функцию $f(x)$ на непрерывность. Найдите точки разрыва и классифицируйте их.

1) $y=\dfrac{1}{2x+1}$; 2) $y=\dfrac{|x+1|}{x+1}$; 3) $y=\dfrac{1}{4-|x|}$;
4) $y=\dfrac{x+2}{5^x}$; 5) $y=\dfrac{1}{3^x-1}$; 6) $y=\dfrac{x+2}{(x+1)2^x}$.

1.4. Исследуйте функцию на непрерывность, постройте ее график. Вычислите скачок функции в соответствующей точке разрыва:

1) $f(x)=\begin{cases} x+4, \text{ åñëè } x\le -2,\\ -2, \text{ åñëè } -2<x\le \dfrac{p}{2},\\ \sin x, \text{ eñëè } x>\dfrac{p}{2};\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} 1-x, \text{ åñëè } x\le 0,\\ \dfrac{1}{x}, \text{ åñëè } 0<x\le 2,\\ \dfrac{x}{4}, \text{ åñëè } x>2;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x+4, \text{ если } x<-1, \\ x^2+2, \text{ если } -1\le x<1, \\ 2x, \text{ если } x\ge 1; \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, \text{ åñëè } x<1, \\ 2, \text{ åñëè } 1\le x<3, \\ x-1, \text{ åñëè } x\ge 3; \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } x<0, \\ 1+x, \text{ если } 0\le x<3, \\ (x-3)^2, \text{ если } x\ge 3; \end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} -x^3, \text{ если } x\le 1, \\ 2+x, \text{ если } x>1. \end{cases}$

II уровень

2.1. Определите точки разрыва функции и установите их тип:

1) $y=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1}$; 2) $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-p}}$;

3) $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x^2}}-1}{2^{\frac{1}{x^2}}+1}$; 4) $y=\dfrac{x}{1-\sin x}$;

5) $y=(x+2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 6) $y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

2.2. Исследуйте функцию на непрерывность, постройте ее график. Найдите точки разрыва и классифицируйте их.

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{если } x<2, \\ 1, & \text{если } 2\le x<4, \\ x^2-4x+2, & \text{если } x\ge 4; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{x+2}{|x+2|}, & \text{если } x<-2, \\ -2, & \text{если } -2\le x<0, \\ \dfrac{1}{x^2-4}, & \text{если } x\ge 0; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|}\left(x^2+2x-1\right), & \text{åñëè } 0<x<2, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{åñëè } x=0, \\ x^2, & \text{åñëè } x\ge 2; \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x-2}{|3x-2|}, & \text{åñëè } x\ne\dfrac{2}{3}, \\ 0, & \text{åñëè } x=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

2.3. Доопределите функцию $f(x)$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в точке x_0:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x_0=2$; 2) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{2x}$, $x_0=0$;

3) $f(x)=\dfrac{(1+x)-1}{x}$, $x_0=0$; 4) $f(x)=\dfrac{a^{x-3}-1}{x-3}$, $x_0=3$.

2.4. Задана функция $f(x)$. Найдите все значения параметров, при которых функция непрерывна:

1) $f(x)=\begin{cases} ax+1, \text{ если } x\le 2, \\ \sin\dfrac{p}{x}, \text{ если } x>2; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<0, \\ ax, & \text{если } 0\le x<1, \\ -x^2+bx-2, & \text{если } 1\le x<3, \\ b-x, & \text{если } x\ge 3. \end{cases}$

III уровень

3.1. Исследуйте функцию на непрерывность:

1) $y=\dfrac{|x^2-1|+x+1}{x^2}-\dfrac{|x-1|}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{1}{\lg|x|}$;

3) $y=\dfrac{\sin x}{|\cos x|}$; 4) $y=\dfrac{x}{|x|}\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{p}{4}\right)$.

3.2. Докажите, что уравнение имеет хотя бы один корень на указанном промежутке:

1) $5x(x^2-2)=8-18x^2$, åcëè $x\in[0,\ 1]$;

2) $x^3-19x=30$, eñëè $x\in[3;\ 6]$;

3) $2x^3-5x^2=8x-20$, åñëè $x\in[-3;\ 0]$.

3.3. Пользуясь свойствами непрерывных на промежутке функций, решите неравенство:

1) $\sqrt{(x-3)(2-x)}<3+2x$; 2) $\sqrt{2x+4}>x+3$.

17. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

17.1. Дифференцирование функции с переменной в основании степени и в показателе

Производная функции

$$y=\left(f(x)\right)^{g(x)}, \qquad (17.1)$$

где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые выражения с переменной x, не может быть вычислена по табличным формулам дифференцирования степенной функции и показательной функции (так как переменная находится как в основании степени, так и в ее показателе).

Заданная функция типа (17.1) называется ***показательно-степенной***.

Способы вычисления производной показательно-степенной функции

Первый способ. Используют ***метод логарифмического дифференцирования***. Для этого:

1) логарифмируют обе части уравнения, которым задается функция (например, по основанию e):

$$\ln y=\ln\left(f(x)\right)^{g(x)},$$

получают

$$\ln y=g(x)\cdot\ln f(x);$$

2) дифференцируют обе части полученного равенства, где считают $\ln y$ сложной функцией от $y=y(x)$ (правую часть равенства дифференцируют как произведение функций):

$$\frac{1}{y}y'=g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)};$$

3) выражают из полученного равенства y':

$$y'=y\cdot\left(g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right);$$

4) заменяют y его выражением через x:

$$y'=\left(f(x)\right)^{g(x)}\cdot\left(g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right). \qquad (17.2)$$

При решении данным методом используют не конечную формулу (17.2), а реализуют процесс логарифмического дифференцирования для каждой функции типа (17.1).

Второй способ. На основании свойства логарифмов записывают

$$\left(f(x)\right)^{g(x)}=e^{\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}. \qquad (17.3)$$

Далее дифференцируют как сложную функцию.

С помощью логарифмического дифференцирования удобно также вычислять производные функций при наличии в их аналитическом задании большого количества операций умножения, деления, возведения в степень.

Пример 1. Найти производную функции $y=(\cos x)^{\log_3 x}$ с помощью логарифмического дифференцирования.

Решение. Функция $y=(\cos)^{\log_3 x}$ является показательно-степенной. Прологарифмируем ее по основанию e:

$$\ln y=\ln(\cos x)^{\log_3 x};$$

$$\ln y=\log_3 x\cdot\ln(\cos x).$$

Дифференцируем обе части полученного равенства, учитывая, что y – это функция от x. Используя формулы дифференцирования сложной функции и произведения функций, получаем:

$$\frac{1}{y}y'=(\log_3 x)'\cdot\ln\cos x+\log_3 x\cdot(\ln\cos x)';$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{\ln\cos x}{x\ln 3}-\frac{\sin x\log_3 x}{\cos x};$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{\ln\cos x}{x\ln 3}-\operatorname{tg}x\log_3 x.$$

Выразим y' из последнего равенства:

$$y'=y\left(\frac{\ln\cos x}{x\ln 3}-\operatorname{tg}x\log_3 x\right).$$

Подставим вместо переменной y заданное выражение и приходим к ответу:

$$y'=(\cos x)^{\log_3 x}\cdot\left(\frac{\ln\cos x}{x\ln 3}-\operatorname{tg}x\log_3 x\right).$$

Пример 2. Вычислить производную показательно-степенной функции $y=(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt[3]{x-2}}$, используя переход к основанию e.

Решение. Используем формулу (17.3):

$$y=(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt[3]{x-2}}=e^{\sqrt[3]{x-2}\cdot\ln\operatorname{arctg} x}.$$

Полученную функцию продифференцируем по правилу вычисления производной сложной функции:

$$y'=\left(e^{\sqrt[3]{x-2}\cdot\ln\operatorname{arctg} x}\right)'=e^{\sqrt[3]{x-2}\cdot\ln\operatorname{arctg} x}\cdot\left(\sqrt[3]{x-2}\ln\operatorname{arctg} x\right)'=$$

$$=e^{\sqrt[3]{x-2}\ln\operatorname{arctg} x}\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x-2}\right)'\cdot\ln\operatorname{arctg} x+\sqrt[3]{x-2}(\ln\operatorname{arctg} x)'\right)=$$

$$=e^{\sqrt[3]{x-2}\ln\operatorname{arctg} x}\left(\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}\ln\operatorname{arctg} x+\sqrt[3]{x-2}\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg} x}(\operatorname{arctg} x)'\right)=$$

$$=e^{\sqrt[3]{x-2}\ln\operatorname{arctg} x}\left(\frac{\ln\operatorname{arctg} x}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}+\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x}\right).$$

Пример 3. Вычислить значение производной функции в точке x_0:

1) $y=\dfrac{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)\sin 2x}\cdot\operatorname{tg}^4 x}{\ln^5\left(\sqrt{x}+1\right)}$; 2) $y=\dfrac{(x+2)^3\cdot\sqrt{x^5+2}}{\sqrt[3]{2x+8}}$, $x_0=0$.

Решение. 1) Аналитическое задание данной функции представляет собой выражение, удобное для логарифмирования. Поэтому для нахождения производной этой функции используем метод логарифмического дифференцирования:

$$\ln y=\ln\frac{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)\sin 2x}\cdot\operatorname{tg}^4 x}{\ln^5\left(\sqrt{x}+1\right)}==\ln\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}+\ln(\sin 2x)^{\frac{1}{3}}+\ln(\operatorname{tg} x)^4-$$

$$-\ln\left(\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)^5=\frac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{3}\ln\sin 2x+4\ln\operatorname{tg} x-5\ln\left(\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right).$$

Обе части полученного равенства дифференцируем по переменной x, где считаем $\ln y$ сложной функцией от $y=y(x)$:

$$\frac{1}{y}y'=\frac{\left(x^2+1\right)'}{3\left(x^2+1\right)}+\frac{(\sin 2x)}{3\sin 2x}+\frac{4(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x}-\frac{5\left(\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)'}{\ln\left(\sqrt{x}+1\right)};$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2x}{3\left(x^2+1\right)}+\frac{2\cos 2x}{3\sin 2x}+\frac{4}{\cos^2 x\operatorname{tg} x}-\frac{5}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}.$$

Заменяя y его выражением через x и окончательно преобразуя выражение в правой части, получим:

$$y'=\ln\frac{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)\sin 2x}\cdot\operatorname{tg}^4 x}{\ln^5\left(\sqrt{x}+1\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{2x}{3\left(x^2+1\right)}+\frac{2}{3}\operatorname{ctg}2x+\frac{8}{\sin 2x}-\frac{5}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}\right).$$

2) Прологарифмируем равенство, задающее функцию по основанию e, используя основные свойства логарифмов:

$$\ln y=\ln\frac{(x+2)^3\cdot\sqrt{x^5+2}}{\sqrt[3]{2x+8}};$$

$$\ln y=\ln(x+2)^3+\ln\left(x^5+2\right)^{\frac{1}{2}}-\ln(2x+8)^{\frac{1}{3}};$$

$$\ln y=3\ln(x+2)+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^5+2\right)-\frac{1}{3}\cdot\ln(2x+8).$$

Дифференцируем полученное равенство при условии, что y – это функция от x:

$$\frac{1}{y}y'=\frac{3}{x+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5x^4}{x^5+2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2x+8}.$$

Выразим далее y' и заменим переменную y заданным выражением:

$$y'=y\cdot\left(\frac{3}{x+2}+\frac{5x^4}{2\left(x^5+2\right)}-\frac{2}{3(2x+8)}\right).$$

Подставляя в полученное выражение значение $x_0=0$, получим:

$$y'(0)=\frac{2^3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[3]{8}}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{12}\right)=\frac{17\sqrt{2}}{3}.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите производную показательно-степенной функции, используя правило логарифмического дифференцирования:

1) $y = x^{\sin x}$;   2) $y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$;

3) $y = (\operatorname{ch} x)^{\arcsin 3x}$;   4) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arctg} x}$.

1.2. Найдите производную показательно-степенной функции, используя переход к основанию *e*:

1) $y = x^{\sin x}$;   2) $y = (2^x)^{\operatorname{sh} x}$;

3) $y = \operatorname{tg} x^{\ln \operatorname{tg} x}$;   4) $y = \ln x^{2\ln x}$.

II уровень

2.1. Пользуясь правилом логарифмического дифференцирования, найдите производную:

1) $y = (x^2 - 1)\cdot\sqrt[4]{x^3 + \dfrac{1}{x^2}}$;   2) $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x^6 + 7x^4 + 3x}$;

3) $y = 3\sqrt{\dfrac{2 + 3\sqrt{x}}{2 - 3\sqrt{x}}}$;   4) $y = \dfrac{\sqrt[5]{x}\cdot(7x^4 + 3x)}{\cos^2 x}$.

2.2. Вычислите производную показательно-степенной функции, перейдя к основанию *e*:

1) $y = (2 + x^3)^{\sin x}$;   2) $y = x^{\operatorname{ctg} e^x}$;

3) $y = (\cos x^2)^{\ln\cos x^2}$;   4) $y = x^{7^x}\cdot e^{6x}$.

2.3. С помощью метода логарифмического дифференцирования найдите производную сложной функции:

1) $y = \dfrac{x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}}{2x+1}$;   2) $y = \sqrt[5]{\dfrac{(x+3)^3\cdot x^2}{\sqrt[6]{x+1}}}$;

3) $y = \sqrt{\dfrac{2x-3}{x+4}}\cdot(6x^2 + 3x + 5)$;   4) $y = \dfrac{\sqrt[5]{\sin^2 x}}{\operatorname{arctg} 7x\cdot\log_3 x}$.

III уровень

3.1. Вычислите значение $y'(x_0)$, если:

1) $y = (\operatorname{tg} 3x)^{\sin 6x}$, $x_0 = \dfrac{p}{12}$;

2) $y = \sqrt[5]{(x+1)^2}\,(x^2 - 1)^3\sqrt{x-3}$, $x_0 = 4$;

3) $y = \sqrt[4]{\dfrac{(1 - x^2)\cos x}{(x^2+1)^3}}$, $x_0 = 0$.

3.2. Запишите уравнение касательной и нормали к графику функции в указанной точке:

1) $y = (\cos x)^{\sqrt[3]{2px}}$, $x_0 = \dfrac{p}{8}$;   2) $y = \dfrac{e^x \arcsin x}{x^2 - 1}$, $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

17.2. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически

Уравнение

$$F(x, y) = 0 \qquad (17.4)$$

задает неявно функцию $y = f(x)$, если при подстановке выражения $f(x)$ вместо y в уравнение (17.4) оно превращается в тождество. Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема и требуется вычислить производную $y'(x)$.

Первый способ. Если практически возможно, выражают y через x и дифференцируют $y(x)$ по правилам дифференцирования.

Второй способ. Дифференцируют уравнение (17.4) по x, считая, что y есть функция от x. Получают новое уравнение, содержащее x, y и y'. Из него находят $y'(x)$.

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = j(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a; b], \qquad (17.5)$$

где функции $j(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы для любого $t \in [a; b]$, причем $j'(t) \neq 0$, и требуется найти $y'(x)$.

Первый способ. Из первого уравнения системы (17.5) выражают t через x (если это возможно) и подставляют во второе уравнение системы (17.5). Приходят к сложной функции от переменной x, которую дифференцируют по x.

Второй способ. Используют формулу

$$y'_x = \frac{y'(t)}{j'(t)}. \qquad (17.6)$$

Полученное таким образом выражение для y'_x зависит от переменной t. Если возможно (и необходимо) из первого уравнения системы (17.5) выражают t через x и подставляют в выражение, полученное для $y'(x)$.

Пример 1. Найти производную $y'(x)$ функции, используя возможные способы:

1) $\begin{cases} x = 3t-2, \\ y = t^2+t+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \ln(1+t^3), \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Решение. 1) *1-й способ*. Из первого уравнения системы выразим t через x:

$$t = \frac{x+2}{3}.$$

Полученное выражение подставим во второе уравнение вместо t:

$$y = \left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + \frac{x+2}{3} + 1.$$

Получили функцию одной переменной x. Дифференцируем ее:

$$y' = 2\left(\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2x+4+3}{9} = \frac{2x+7}{9}.$$

2-й способ. Используем формулу (17.6):

$$y'_x = \frac{(t^2+t+1)'}{(3t-2)'} = \frac{2t+1}{3}.$$

В полученное выражение подставив $t = \frac{x+2}{3}$, получим:

$$y'_x = \frac{2\left(\frac{x+2}{3}\right)+1}{3} = \frac{2x+4+3}{3\cdot 3} = \frac{2x+7}{9}.$$

2) *1-й способ*. Выразим из первого уравнения системы переменную t:

$$e^x = 1+t^3;$$

$$t^3 = e^x - 1;$$

$$t = \sqrt[3]{e^x-1}.$$

Подставляя найденное выражение для t во второе уравнение системы, получим сложную функцию переменной x: $y = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{e^x-1}$, которую продифференцируем по правилу вычисления производной сложной функции:

$$y' = \left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{e^x-1}\right)' = \frac{1}{1+\sqrt[3]{(e^x-1)^2}}\cdot\left(\sqrt[3]{e^x-1}\right)' =$$

$$= \frac{(e^x-1)'}{3\left(1+\sqrt[3]{(e^x-1)^2}\right)\cdot\sqrt[3]{(e^x-1)^2}} = \frac{e^x}{3\sqrt[3]{(e^x-1)^2}\left(1+\sqrt[3]{(e^x-1)^2}\right)}.$$

2-й способ. Воспользуемся формулой (17.6):

$$x'_t = \frac{(t^3)'}{1+t^3} = \frac{3t^2}{1+t^3};$$

$$y'_t = \frac{1}{1+t^2}.$$

Подставляя выражения в формулу (17.6), получим:

$$y'_x = \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{3t^2}{1+t^3}} = \frac{1+t^3}{3t^2(1+t^2)}.$$

Подставляя $t = \sqrt[3]{e^x-1}$, получим:

$$y'_x = \frac{1+\left(\sqrt[3]{e^x-1}\right)^3}{3\left(\sqrt[3]{e^x-1}\right)^2\left(1+\left(\sqrt[3]{e^x-1}\right)^2\right)} = \frac{e^x}{3\sqrt[3]{(e^x-1)^2}\left(1+\sqrt[3]{(e^x-1)^2}\right)}.$$

Пример 2. Вычислить значение производной параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$ в точке $t_0 = \frac{p}{3}$.

Решение. Функция $y = f(x)$ задана параметрически. Дифференцируем ее, используя формулу (17.6).

Вычислим: $x'_t = (\cos t)' = -\sin t,$

$y' = (4\sin t)' = 4(\sin t)' = 4\cdot 2\sin t\cdot(\sin t)' = 4\cdot 2\sin t\cdot\cos t = 4\sin 2t.$

Подставим полученные выражения в формулу (17.6):

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\sin 2t}{-\sin t} = -8\cos t.$$

Найдем значение производной в заданной точке. Подставим значение $t_0 = \dfrac{p}{3}$ в полученное выражение:

$$y'_x = -8\cos\frac{p}{3},\ \text{т. е.}\ y'_x = -4.$$

Пример 3. Вычислить $y'(x)$, используя возможные способы:

1) $(x+1)^2 = \cos\left(x+\sqrt[3]{y}\right);$ 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right).$

Решение. 1) Данное уравнение задает неявно функцию $y = f(x)$. Продифференцируем ее двумя способами:

1-й способ. Выразим из уравнения y через x:

$$\arccos(x+1)^2 = x+\sqrt[3]{y};\quad \sqrt[3]{y} = \arccos(x+1)^2 - x;$$

$$y = \left(\arccos(x+1)^2 - x\right)^3.$$

Продифференцируем выражение по переменной x:

$$y' = 3\left(\arccos(x+1)^2 - x\right)^2\cdot\left(\arccos(x+1)^2 - x\right)' =$$

$$= 3\left(\arccos(x+1)^2 - x\right)^2\cdot\left(-\frac{2(x+1)}{\sqrt{1-(x+1)^4}} - 1\right).$$

2-й способ. Продифференцируем обе части уравнения по переменной x, считая, что y есть функция от x:

$$\left((x+1)^2\right)' = \left(\cos\left(x+\sqrt[3]{y}\right)\right)';$$

$$2(x+1) = -\sin\left(x+\sqrt[3]{y}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\cdot y'\right).$$

Откуда выразим y':

$$1+\frac{y'}{3\sqrt[3]{y^2}} = \frac{2(x+1)}{-\sin\left(x+\sqrt[3]{y}\right)};$$

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}\left(-\frac{2(x+1)}{\sin\left(x+\sqrt[3]{y}\right)} - 1\right).$$

При необходимости можем выразить y через x из заданного равенства и подставить в полученное выражение.

2) Функция $y = y(x)$ задана неявно и в данном случае проблематично выразить переменную y через x, поэтому дифференцируем обе части равенства, учитывая, что y есть функция аргумента x:

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)' = \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)';$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)';$$

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y'\cdot x - x'\cdot y}{x^2} = \frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\cdot(2x+2y\cdot y').$$

Из полученного равенства выразим $y'(x)$:

$$\frac{xy'-y}{x^2+y^2} = \frac{x+yy'}{x^2+y^2};$$

$$xy'-y = x+yy';$$

$$y'(x-y) = x+y.$$

Приходим к ответу: $y' = \dfrac{x+y}{x-y}.$

Задания

I уровень

1.1. Найдите производную функции, заданной параметрически, возможными способами:

1) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^3 + t^6 - 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{6t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = 3t^3 + \dfrac{t^2}{2} - 1, \\ x = 4t^5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

1.2. Найдите производную неявно заданной функции возможными способами:

1) $3x+2y-17=0$; 2) $xy=\operatorname{tg} y$;

3) $\ln(x+y)=x^2$; 4) $x^3+y^3=8$.

II уровень

2.1. Найдите производную y'_x:

1) $\begin{cases} x=\ln t+\arccos(t^2), \\ y=\sqrt[3]{t^4+2t+3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\sin t+t\cos t, \\ y=\cos t-t\sin t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+2}, \\ y=\left(\dfrac{t}{t+2}\right)^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=\operatorname{sh} t, \\ x=t\operatorname{sh} t-\operatorname{ch} t. \end{cases}$

2.2. Найдите производную $y'(x)$ функции, заданной неявно:

1) $2y^2+x^2=\cos y$; 2) $yx^2-x^3=4y^3-5$;

3) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{3}$; 4) $y^2=\dfrac{x+y}{x-y}$;

5) $\operatorname{tg}^2(x+y)=4x$; 6) $y^2x=x+\ln\left(\dfrac{7}{x}\right)$.

2.3. Вычислите производную в точке x_0 функции, заданной параметрически:

1) $\begin{cases} x=t+\ln t, \\ y=cht, \quad x_0=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=t+\operatorname{arctg} t, \\ y=e^t, \quad x_0=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=t^3+e^t, \\ y=\operatorname{tg} t, \quad x_0=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=t^t, \\ y=t^{t^2}, \quad x_0=27. \end{cases}$

2.4. Вычислите $y'(x_0)$ для функции y, удовлетворяющей указанному уравнению:

1) $xe^y+ye^x=1, x_0=0$; 2) $(x-1)\arcsin y+e^{xy}=1, x_0=1$;

3) $y+e^y+\sin(x^2y)=1, x_0=0$; 4) $\operatorname{tg}x\, \operatorname{tg}p\, y+y^3+\ln y=1, x_0=0$.

III уровень

3.1. Найдите значение производной y' в точке $x=1$ для функции $y=y(x)$, заданной уравнением $x^2-2xy^3+1=0$, если $y(1)=1$.

3.2. Вычислите $y'(\sqrt{2})$ для функции, заданной уравнением $y\operatorname{arctg} y-\arcsin\dfrac{x}{2}=0$, если $y(\sqrt{2})=1$.

3.3. Составьте уравнения касательной и нормали к параболе $x=t^2$, $y=t^3$, проведенных в точке $t=2$.

3.4. Запишите уравнение нормали к астроиде $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ в точке, для которой $t=p/4$.

3.5. Запишите уравнения касательных и нормалей к кривой $x^2+y^2+4x-2y-3=0$ в точках пересечения ее с осью Ox.

3.6. Найдите уравнения касательной и нормали к кривой $4x^3-3xy+6x^2-5xy-3y^2+9x+14=0$ в точке (– 2; 3).

17.3. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости функций. Дифференциал функции

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x), \tag{17.7}$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0,\quad A\in \mathbf{R}. \quad (17.8)$

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала производная и в равенстве (17.7) выполнялось условие $f'(x) = A$.

Понятие дифференцируемости функции эквивалентно равенству

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x), \qquad (17.9)$$

где $f'(x_0)\cdot\Delta x$ – ***главная часть приращения функции***, а для бесконечно малой $o(\Delta x)$ выполняется (17.8).

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0, называется главная часть $f'(x_0)\cdot\Delta x$ приращения функции. Дифференциал обозначается символом $df(x_0)$ и по определению равен

$df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x$

В частности, для функции $f(x) = x$ получим $dx = \Delta x$.

Тогда определение дифференциала имеет вид:

$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \qquad (17.10)$$

Свойства дифференциала

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции на некотором множестве $X \subset \mathbf{R}$. Тогда:

1) $d(c) = 0$, $c = const$;
2) $d(cu) = cdu$, $c = const$;
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4) $d(uv) = udv + vdu$;
5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{udv - vdu}{v^2}$, $v \neq 0$;
6) $df(u) = f'(u)du$, где $f(u)$ – сложная функция, дифференцируемая по переменной $u = u(x)$ (свойство инвариантности дифференциала), т. е. $du = u'(x)dx$.

При достаточно малом значении Δx приращение функции с большой степенью точности можно заменить дифференциалом функции:

$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$

или

$$f(x_0+\Delta x) \approx f'(x_0)dx + f(x_0). \qquad (17.11)$$

Формулу (17.11) используют в приближенных вычислениях.

С геометрической точки зрения дифференциал функции dy равен приращению ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, когда аргумент получает приращение Δx.

Пример 1. Вычислить при $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$ значение дифференциала функции $y = x^3 - x^2 + 3x$.

Решение. Дифференциал функции вычислим по формуле (17.10). Найдем $y'(x)$:

$y'(x) = \left(x^3 - x^2 + 3x\right)' = 3x^2 - 2x + 3.$

Найдем $y'(x_0)$:

$y'(x_0) = y'(2) = 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 3 = 11.$

$dx = \Delta x = 0{,}1.$

Подставляя найденные значения в формулу (17.10), получим,

$dy = y'(2)\cdot\Delta x = 11\cdot 0{,}1 = 1{,}1.$

Пример 2. Вычислить дифференциал функции:

1) $f(x) = \mathrm{tg}^2(x^3+1)$; 2) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln t; \end{cases}$ 3) $y^2 - 2yx + x^3 = 0.$

Решение. 1) Найдем $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\mathrm{tg}^2\left(x^3+1\right)\right)' = 2\mathrm{tg}\left(x^3+1\right)\cdot\left(\mathrm{tg}\left(x^3+1\right)\right)' = 2\mathrm{tg}\left(x^3+1\right)\cdot\frac{3x^2}{\cos^2\left(x^3+1\right)}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (17.10), получим:

$$df(x) = \frac{6x^2\mathrm{tg}\left(x^3+1\right)}{\cos^2\left(x^3+1\right)}dx.$$

2) Функция задана параметрически. Выразим из первого уравнения системы переменную t через x:

$t = \arccos x$

и подставим во второе уравнение:

$y = \ln\arccos x,$

которое продифференцируем как сложную функцию:

$$y' = \left(\ln\arccos x\right)' = \frac{\left(\arccos x\right)'}{\arccos x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x}.$$

Производную этой функции, заданной параметрически, можно было вычислять также по формуле (17.6).

Используя формулу (17.10) получим:

$$dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arccos x}dx.$$

3) Функция $y = y(x)$ задана в неявном виде уравнением

$$y^2 - 2xy + x^3 = 0.$$

Дифференцируем обе части уравнения, считая, что $y = y(x)$:

$$2yy' - (2y'x + 2yx') + 3x^2 = 0;$$

$$2yy' - 2xy' - 2y + 3x^2 = 0;$$

$$y'(2y - 2x) = 2y - 3x^2.$$

Выразим y': $y' = \dfrac{2y-3x^2}{2y-2x}.$

По формуле (17.10), получим:

$$dy = \frac{2y-3x^2}{2y-2x}\cdot dx.$$

Пример 3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение выражения:

1) $\sqrt[3]{8,009}$; 2) $\ln 0,97$; 3) $\cos 47°$.

Решение. 1) Воспользуемся формулой (17.11) для функции $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 8 + 0,009$. Считаем, что $x_0 = 8$, $\Delta x = 0,009$.

Вычислим $f(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2.$

Найдем $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; $f'(x_0) = f'(8) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \dfrac{1}{3\cdot 4} = \dfrac{1}{12}.$

Тогда: $\sqrt[3]{8,009} \approx \dfrac{1}{12}\cdot 0,009 + 2 = 2,00075.$

Таким образом, $\sqrt[3]{8,009} \approx 2,00075.$

2) Будем находить приближенное значение функции $y(x) = \ln(x)$ в точке $x = 0,97$ по формуле (17.11). Обозначим $x = 0,97 = 1 + (-0,03)$, откуда $x_0 = 1$, $\Delta x = -0,03.$

Найдем значение $f(x_0)$:

$$f(1) = \ln 1 = 0.$$

Вычислим производную функции $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \text{ откуда } f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1.$$

Подставив найденные значения в формулу (17.11), получим $\ln(0,97) \approx 1\cdot(-0,03) + 0 = -0,03.$

Таким образом, получим ответ $\ln(0,97) \approx -0,03.$

3) Необходимо найти приближенное значение функции $f(x) = \cos x$ в точке $x = 47°.$

Представим $x = 47° = 45° + 2° = \dfrac{p}{4} + \dfrac{p}{90}$, откуда $x_0 = \dfrac{p}{4}$, $\Delta x = \dfrac{p}{90}.$

Тогда $f(x_0) = f\left(\dfrac{p}{4}\right) = \cos\dfrac{p}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Поскольку $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$, то

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{p}{4}\right) = -\sin\frac{p}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда по формуле (17.11) получим:

$$\cos 47° \approx -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{p}{90} + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,6824.$$

Итак, $\cos 47° \approx 0,6824.$

Пример 4. Куб со стороной a = 10 увеличился на 0,05 своего объема. Вычислить приближенно приращение ребра куба.

Решение. Объем куба со стороной a вычисляется по формуле $V = a^3$. Поэтому первоначальный объем куба равен $V(10) = 1000$. По условию приращение объема куба равно 0,05 всего объема, т. е.

$$\Delta V = 0,05V = 0,05\cdot 1000 = 50.$$

Так как $\Delta V \approx dV$, то $dV \approx 50.$

Дифференциал функции вычисляем по формуле (11.9), т. е.

$$dV = V'(a)\Delta a, \text{ откуда } \Delta a = \frac{dV}{V'(a)}.$$

Вычислим значение производной $V' = 3a^2$ для $a = 10$:

$$V'(10) = 3\cdot 10^2 = 300.$$

Теперь находим $\Delta a = \dfrac{50}{300} \approx 0,17.$

Таким образом, ребро куба увеличилось приблизительно на 0,17.

Задания

I уровень

1.1. Вычислите дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 при заданном значении Δx:

1) $y=\cos^2 x,\ x_0=\dfrac{p}{4},\ \Delta x=0{,}03;$ 2) $y=\ln\operatorname{tg}2x,\ x_0=\dfrac{p}{8},\ \Delta x=0{,}01;$

3) $y=\ln\sin 2x,\ x_0=\dfrac{p}{8},\ \Delta x=0{,}01;$ 4) $y=\ln\sqrt{\cos 2x},\ x_0=\dfrac{p}{8},\ \Delta x=0{,}04.$

1.2. Найдите главную часть приращения Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0:

1) $y=\operatorname{ctg}x+\dfrac{12x^3}{p^2},\ x_0=\dfrac{p}{6};$ 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}},\ x_0=\dfrac{p}{4};$

3) $y=\left(x^2-3x+1\right)\cdot e^x,\ x_0=0;$ 4) $y=\dfrac{4}{2-\cos 3x},\ x_0=\dfrac{p}{6};$

5) $y=\dfrac{2\sqrt{x}}{2-x},\ x_0=1;$ 6) $y=5(3x+2)^{-\frac{1}{3}},\ x_0=-\dfrac{1}{3}.$

1.3. Вычислите дифференциал функции:

1) $y=\log_3\sqrt{2x^2-5x+1};$ 2) $y=\dfrac{x^2-1}{\sin 3x};$

3) $y=arctg\dfrac{1}{\sqrt{x}};$ 4) $y=\operatorname{ctg}\operatorname{tg}^2 3x.$

1.4. Вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции $y = f(x)$ в точке x:

1) $y=\dfrac{1}{x},\ x=0{,}96;$ 2) $y=\lg x,\ \ x=99.$

3) $y=x^3-2x^2+x+2,\ x=2{,}03;$ 4) $y=5x^3-x^2+5x+4,\ x=2{,}01;$

5) $y=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2-2x+2\sqrt{x},\ x=1{,}01;$ 6) $y=\sqrt[3]{x^2+x+6},\ x=0{,}98;$

II уровень

2.1. Вычислите дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_1, если аргумент изменяется от x_1 до x_2:

1) $y=\ln(4x^2+1)+\operatorname{arctg}\sqrt{x},\ x_1=1,\ x_2=2;$

2) $y=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+3x^2},\ x_1=1,\ x_2=1{,}2;$

3) $y=\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right),\ x_1=0,\ x_2=0{,}02;$

4) $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right),\ x_1=2,\ x_2=2{,}2;$

5) $y=e^x\left(\cos 2x+2\sin 2x\right),\ x_1=0,\ x_2=0{,}1;$

6) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2},\ x_1=1,\ \Delta x=0{,}2;$

2.2. Вычислите дифференциал функции:

1) $y=\ln\dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x};$ 2) $y=x(\arcsin x+\arccos x);$

3) $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^2}, \\ y=\ln(1+t^2); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\arcsin t^2; \end{cases}$

5) $x^3-y^3=\cos x^2y^2;$ 6) $\operatorname{sh}\left(3x+y^2\right)=\ln\left(xy\right)+x^2y.$

2.3. Проверьте, удовлетворяет ли функция $y = f(x)$ заданному уравнению:

1) $xdy=(2y-x^2)dx,\ y=-x^2\ln x;$

2) $2x^3dy+\left(3x^2y^2+1\right)dx=0,\ y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^{\frac{3}{2}}};$

3) $xdy+ydx+\dfrac{xdx}{e^{x^2}}=0,\ y=\dfrac{e^{-x^2}}{2^x};$

4) $y^3\cos x\,dx+\operatorname{tg}x\,dx-\dfrac{dy}{y}=0,\ y=\dfrac{1}{\cos x\sqrt[3]{3-\operatorname{tg}x}}.$

2.4. Вычислите с помощью дифференциала приближенное значение выражения:

1) $\ln(0{,}093e)$; 2) $\sin 136°$; 3) $\sqrt{7741}$;

4) $\operatorname{arctg} 1{,}032$; 5) $10^{4\lg 2{,}996}$; 6) $\operatorname{tg} 43°30'$.

2.5. Даны два тетраэдра, ребра которых равны соответственно 4 и 4,21. Определите, на сколько объем первого тетраэдра меньше объема второго.

2.6. Определите, на сколько увеличится при нагревании объем куба, ребро которого равно 10 см, если удлинение ребра куба равно 0,03 см.

2.7. Сторона квадратного листа жести, равная 15 см, после охлаждения уменьшилась на 0,001 см. Вычислите приближенно, на сколько изменилась площадь этого листа.

III уровень

3.1. Докажите, что функция $y = y(x)$, заданная в неявном виде уравнением $F(x, y) = 0$, удовлетворяет уравнению:

1) $x^2 dy = y(x + y)dx$, если $y + \dfrac{x}{\ln x} = 0$;

2) $3^{x^2+y} dy + xdx = 0$, если $2 \cdot 3^y - 3^{-x^2} = 0$;

3) $\sin x \operatorname{tg} y dx = \dfrac{dy}{\sin x}$, если $\ln \sin y + \dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{2}x = 0$.

3.2. Вычислите приближенно значение выражения:

1) $\dfrac{\sqrt{\cos 30'}}{\operatorname{arctg} 1{,}03}$; 2) $e^{\log_2 4{,}1 - \log_4 3{,}9}$.

3.3. Боковую поверхность стального конуса с диаметром основания 20 см и высотой 10 см отшлифовали, после чего диаметр стал равен 19,95 см. Определите, на сколько приблизительно изменилась масса конуса, если плотность стали равна 7,80 г/см^3.

17.4. Производные и дифференциалы высшего порядка

Производная $f'(x)$, определенная на некотором множестве $D \subset \mathbf{R}$, является также функцией от x. В случае ее дифференцируемости можно вычислить ее производную. Производная от производной $f'(x)$ называется ***производной второго порядка***:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Аналогично $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$.

Начиная с четвертого, порядок производной обозначают в скобках (сверху): $f^{(4)}(x) = \left(f'''(x)\right)'$. Производные порядка 1–3 также обозначают $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$. По определению $f^{(0)}(x) = f(x)$. В случае дифференцируемости производной $f^{(n-1)}(x)$, $n \in \mathbf{N}$, производная порядка n определяется равенством

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', \; n \in \mathbf{N}. \qquad (17.12)$$

Для производных высшего порядка справедливо ***свойство линейности***:

$$\left(a\, f(x) + b\, g(x)\right)^{(n)} = a\, f^{(n)}(x) + b\, g^{(n)}(x),$$

где a, b – произвольные действительные числа; $f(x)$, $g(x)$ – n раз дифференцируемые функции, $n \in \mathbf{N}$.

Если $f(x)$ и $g(x)$ – n раз дифференцируемые функции, $n \in \mathbf{N}$, то верна ***формула Лейбница***:

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)} &= C_n^0 f^{(n)} g^{(0)} + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + C_n^2 f^{(n-2)} g^{(2)} + \ldots + \\ &+ C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} + \ldots + C_n^{n-1} f^{(1)} g^{(n-1)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n)},\end{aligned} \qquad (17.13)$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Коэффициенты C_n^k можно найти также из треугольника Паскаля.

Если функция $y(x)$ задана в неявном виде уравнением $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной второго порядка (в случае ее существования) надо продифференцировать найденную первую производную по аргументу x, продолжая рассматривать y как функцию от x. Затем вместо y' надо подставить найденное ранее значение.

Если функция задана параметрически в виде

$$\begin{cases} x = j\,(t), \\ y = y\,(t), \end{cases}$$

то находят вначале производную 1-го порядка по формуле (17.6) и записывают:

$$\begin{cases} x = j\,(t), \\ y' = \dfrac{y\,'(t)}{j\,'(t)}; \end{cases} \tag{17.14}$$

Для нахождения производной второго порядка используют формулу (17.6) к параметрически заданной функции (17.14):

$$y'' = \frac{\left(\dfrac{y\,'(t)}{j\,'(t)}\right)'}{j\,'(t)}.$$

Аналогично реализуют тот же подход при нахождении производной $y'''(x)$ и т. д.

Дифференциал от дифференциала функции f в точке x (если функция определена и дважды дифференцируема) называется ***дифференциалом второго порядка***:

$$d^2 f = d(df).$$

Дифференциал n-го порядка функции $f(x)$ (в случае дифференцируемости n раз, $n \in \mathbf{N}$) определяют как дифференциал от дифференциала (n–1)-го порядка:

$$d^{(n)} f = d(d^{(n-)} f), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Для вычисления дифференциала порядка n используют формулу

$$d^{(n)} y = f^{(n)}(x) dx^n, \; n \in \mathbf{N}. \tag{17.15}$$

Дифференциалы второго и выше порядков не обладают (в отличие от дифференциалов первого порядка) свойством инвариантности, т. е. их форма, а следовательно, и способ вычисления зависят от того, является ли аргумент x независимой переменной или дифференцируемой функцией другой переменной.

Пример 1. Вычислить $y^{(4)}(x)$ для функции:

1) $y = (1 - \ln x)x$; 2) $y = \dfrac{\ln(1+2x)}{e^{\frac{x}{2}}}$.

Решение. 1) Вычислим искомую производную последовательно, не применяя формулу Лейбница:

$$f^{(1)}(x) = \left((1 - \ln x)x\right)' = -\frac{1}{x} \cdot x + (1 - \ln x) = -1 + 1 - \ln x = -\ln x;$$

$$f^{(2)}(x) = \left(-\ln x\right)' = -\frac{1}{x};$$

$$f^{(3)}(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2};$$

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}.$$

2) Искомую производную удобно найти, используя формулу Лейбница (17.13). Для производной 4-го порядка формула Лейбница примет вид:

$$y^{(4)}(x) = f^{(4)} g^{(0)} + 4 f^{(3)} g^{(1)} + 6 f^{(2)} g^{(2)} + 4 f^{(1)} g^{(3)} + f^{(0)} g^{(4)}.$$

Функцию $y = \dfrac{\ln(1+2x)}{e^{\frac{x}{2}}}$ представим в виде $y = \ln(1+2x) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$. Введем обозначения: $f(x) = \ln(1+2x)$, $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$. Для функции $f(x)$ найдем производные:

$$f^{(1)}(x) = \left(\ln(1+2x)\right)' = \frac{2}{1+2x};$$

$$f^{(2)}(x) = \left(\frac{2}{1+2x}\right)' = -\frac{2 \cdot 2}{(1+2x)^2} = -\frac{4}{(1+2x)^2};$$

$$f^{(3)}(x) = \left(-\frac{4}{(1+2x)^2}\right)' = \frac{16}{(1+2x)^3};$$

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{16}{(1+2x)^3}\right)' = -\frac{96}{(1+2x)^4}.$$

Аналогично для функции $g(x)$ найдем производные:

$$g^{(1)}(x) = \left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2};$$

$$g^{(2)}(x)=\left(-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)'=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4};$$

$$g^{(3)}(x)=\left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}\right)'=-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{8};$$

$$g^{(4)}(x)=\left(-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{8}\right)'=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{16}.$$

Полученные выражения подставим в формулу Лейбница:

$$y^{(4)}(x)=-\frac{96}{(1+2x)^4}\cdot e^{-\frac{x}{2}}+4\cdot\frac{16}{(1+2x)^3}\cdot\left(-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)+$$

$$+6\cdot\left(-\frac{4}{(1+2x)^2}\right)\cdot\left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}\right)+4\cdot\left(\frac{2}{1+2x}\right)\cdot\left(-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{8}\right)+\ln(1+2x)\cdot\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{16}.$$

Упрощая это выражение, окончательно получим:

$$\left(\frac{\ln(1+2x)}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^{(4)}=e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{96}{(1+2x)^4}-\frac{32}{(1+2x)^3}-\frac{6}{(1+2x)^2}-\frac{1}{1+2x}+\frac{\ln(1+2x)}{16}\right).$$

Пример 2. Для функции $y=f(x)$ найти формулу производной n-го порядка, $n\in\mathbf{N}$, если:

1) $y=5^{2x+3}$; 2) $y=\ln(2x+1)$.

Решение. 1) Вычислим производную 1-го порядка:

$$y'=\left(5^{2x+3}\right)'=2\cdot\ln5\cdot5^{2x+3}.$$

Далее

$$y''=\left(2\cdot\ln5\cdot5^{2x+3}\right)'=2\cdot\ln5\cdot2\cdot\ln5\cdot5^{2x+3}=\left(2\cdot\ln5\right)^2\cdot5^{2x+3}.$$

$$y'''=\left(\left(2\ln5\right)^2\cdot5^{2x+3}\right)'=\left(2\ln5\right)^2\cdot2\ln5\cdot5^{2x+3}=\left(2\ln5\right)^3\cdot5^{2x+3}.$$

Установив закономерность, запишем формулу для производной n-го порядка:

$$y^{(n)}=\left(5^{2x+3}\right)^{(n)}=\left(2\ln5\right)^n\cdot5^{2x+3}.$$

Докажем справедливость этой формулы методом математической индукции.

При $n=1$ имеем $y'=2\ln5\cdot5^{2x+3}$, что совпадает с найденной ра-

нее производной y'. Предположим, что наша формула верна при $n=k$, т. е. $y^{(k)}=\left(2\ln5\right)^k\cdot5^{2x+3}$.

Докажем, что она верна и для $n=k+1$. Вычислим:

$$y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=\left(\left(2\ln5\right)^k\cdot5^{2x+3}\right)'=\left(2\ln5\right)^k\cdot\left(5^{2x+3}\right)'=$$

$$=\left(2\ln5\right)^k\cdot\ln5\cdot5^{2x+3}(2x+3)'=\left(2\ln5\right)^k\cdot2\ln5\cdot5^{2x+3}=\left(2\ln5\right)^{k+1}\cdot5^{2x+3}.$$

Получили, что равенство выполняется при $n=k+1$. По методу математической индукции формула будет верна для любого $n\in\mathbf{N}$.

2) Вычисляем последовательно:

$$y'=\frac{2}{2x+1};$$

$$y''=-\frac{2\cdot2}{(2x+1)^2}=-\frac{2^2}{(2x+1)^2};$$

$$y'''=\frac{2\cdot2\cdot2(2x+1)\cdot2}{(2x+1)^4}=\frac{2^3\cdot2}{(2x+1)^3};$$

$$y^{(4)}=-\frac{2^3\cdot2\cdot3(2x+1)^2\cdot2}{(2x+1)^6}=-\frac{2^4\cdot2\cdot3}{(2x+1)^4}.$$

Приходим к заключению, что

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot2^n\cdot n!}{(2x+1)^n}.$$

Справедливость этой формулы доказывается методом математической индукции.

Пример 3. Для функции, заданной уравнением $x^2y+x=5y$, найти производную второго порядка.

Решение. Функция задана в неявном виде. Дифференцируем обе части равенства $x^2y^2+x=5y$, рассматривая y как функцию переменной x:

$$\left(x^2\right)'y+x^2y'+x'=5y';$$

$$2xy+x^2y'+1=5y'. \qquad (17.16)$$

Выражая y' из равенства (17.16), получим:

$$y'=\frac{2xy+1}{5-x^2}. \qquad (17.17)$$

Продолжаем дифференцировать по переменной x равенство (17.16):

$$2x'y + 2xy' + (x^2)'y' + x^2(y')' = 5(y')';$$
$$2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' = 5y''.$$

Из последнего равенства выражаем $y'' = \dfrac{2y + 4xy'}{5 - x^2}$.

Подставим в эту формулу найденное выражение (17.17) для y', получим:

$$y'' = \frac{2y + 4x\dfrac{2xy+1}{5-x^2}}{5 - x^2}.$$

После упрощения приходим к ответу: $y'' = \dfrac{10y + 4x + 6x^2y}{\left(5 - x^2\right)^2}$.

Пример 4. Вычислить $y'''(x)$, если

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Решение. По формуле (17.6) получаем

$$y' = \frac{\left(\dfrac{t^2}{2}\right)'}{(\operatorname{arctg} t)'} = \frac{t}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = t\sqrt{1+t^2}.$$

Имеем:

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y' = t\sqrt{1+t^2}. \end{cases}$$

Для нахождения производной второго порядка снова используем формулу (17.6):

$$y'' = \frac{(t\sqrt{1+t^2})'}{(\operatorname{arctg} t)'} = \frac{\sqrt{1+t^2} + \dfrac{2t \cdot t}{2\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{2\sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{1+t^2} + 2t^2}{2\sqrt{1+t^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}} =$$

$$= \frac{2 + 2t^2 + 2t^2}{2} = \frac{2 + 4t^2}{2} = 1 + 2t^2.$$

Результат может быть записан в виде

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y'' = 1 + 2t^2. \end{cases} \qquad (17.18)$$

Дифференцируем еще раз:

$$y''' = \frac{(1+2t^2)'}{(\operatorname{arctg} t)'} = \frac{4t}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = 4t\sqrt{1+t^2}.$$

Из первого равенства системы (17.18) можем выразить t через x: $t = \operatorname{tg} x$.

Подставляем полученное выражение в формулу производной третьего порядка и приходим к ответу:

$$y'''(x) = 4\operatorname{tg} x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = 4\operatorname{tg} x\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = 4\operatorname{tg} x\sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= 4\operatorname{tg} x\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = 4\frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

т. е. $y'''(x) = 4\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Пример 5. Найти d^3y для функции

$$y = 3x^3 + 4x^2 + 7x + 1.$$

Решение. Согласно формуле (17.15), для дифференциала 3-го порядка справедлива формула $d^3y = f'''(x)dx^3$.

Последовательно вычисляем производные заданной функции:

$$y' = 9x^2 + 8x + 7; \qquad y'' = 18x + 8; \qquad y''' = 18.$$

Подставив полученное выражение в формулу d^3y, приходим к ответу:

$$d^3y = 18dx^3.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите производную второго порядка $y''(x)$, если:

1) $y = 2\ln x + x^3$; 2) $y = \dfrac{1}{5 - 3x}$; 3) $y = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$;

4) $y = \cos^2 3x$; 5) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$; 6) $y = e^{\cos x} + x$.

1.2. Вычислите производную указанного порядка:

1) $y''(0)$, если $y = 1 - e^{-x}$;

2) $y'''(0)$, если $y = e^{-x} - e^{x} + 2\sin x$;

3) $y'''(0)$, если $y = \cos 3x + \sin 3x$.

1.3. Найдите производную второго порядка неявно заданной функции:

1) $x^2 y - \cos x + \cos y = 0$; 2) $x\ln y + y^2 = 0$;

3) $\ln y + y\ln\sin x = 0$; 4) $\sqrt[3]{x}\cdot y + \operatorname{tg} y = 0$.

1.4. Вычислите производную второго порядка функции, заданной параметрически:

1) $\begin{cases} x = t - 1, \\ y = \dfrac{2}{t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \sin 2t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{2t}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3 - 2t^2 - 3. \end{cases}$

1.5. Вычислите производную указанного порядка функции $y = f(x)$ по формуле Лейбница:

1) $y^{(3)}$, если $y = x^3 \cdot e^{2x}$;

2) $y^{(4)}$, если $y = (e^{2x} + e^{-3x})\sin x$;

3) $y^{(3)}$, если $y = \operatorname{sh}(3x+1)\ln x$;

4) $y^{(4)}$, если $y = (x^4 + 3x^3 - 2x + 1)\cos(2x+1)$.

1.6. Вычислите дифференциал указанного порядка функции $y = f(x)$:

1) $d^2 y$, если $y = \operatorname{tg}(2x+3)$;

2) $d^3 y$, если $y = (x^2 + x)\ln x$;

3) $d^4 y$, если $y = \dfrac{2^{2x}}{e^{-x}}$.

II уровень

2.1. Найдите производную второго порядка неявно заданной функции:

1) $x^2 + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $4y^2 = x\sqrt{2}$;

3) $x^4 + x^2 y^2 + y^4 = \ln\cos 2$; 4) $y = x(e^{\sin x} + 1)$.

2.2. Вычислите $y''(x_0)$, если:

1) $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos 2t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{p}{8}$; 2) $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = t^2 + 3t, \end{cases}$ $t_0 = 0$;

3) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^3 - 3t, \end{cases}$ $t_0 = 1$; 4) $\begin{cases} x = a\cos^2 j, \\ y = b\sin^2 j, \end{cases}$ $j_0 = \dfrac{p}{4}$.

2.3. Найдите $y'''(0)$, если $y = e^{-x}(2 - 4x - 4x^2) - 2e^{x}$.

2.4. Найдите производную *n*-го порядка для функции:

1) $y = 2^{3x}$; 2) $y = 4^{5x-1}$; 3) $y = \log_5(x-2)$;

4) $y = \lg(4-x)$; 5) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$; 6) $y = \dfrac{2x}{x+3}$;

7) $y = \sin(3x+2)$; 8) $y = \cos(-x+1)$.

2.5. Найдите производную указанного порядка:

1) $y^{(4)}$, если $y = e^{3x+1}(\cos 3x + 2)$;

2) $y^{(6)}$, если $y = (x^3 + 3x + 2)\log_2(-x+2)$;

3) $y^{(5)}$, если $y = \dfrac{\ln(3x+1)}{3x+1}$;

4) $y^{(7)}$, если $y = \dfrac{\ln^7 x}{\sqrt{x}}$.

2.6. Найдите дифференциал 2-го порядка функции $y = f(x)$:

1) $y = -\sqrt{2 - x^2} - 2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}}$;

2) $y = -\dfrac{1}{2}\ln(2x^2 - x - 3) + \dfrac{1}{10}\ln\dfrac{2x-3}{2x+2}$;

3) $y = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x$;

4) $y = \dfrac{1}{\cos^3 x} - \dfrac{3}{\cos x}$.

2.7. Найдите d^3y функции $y = f(x)$, если $x = x(t)$:

1) $y = \ln(2x)$, $x = t^4 - t + 2$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = \frac{1}{9t}$;

3) $y = e^{x^2+2}$, $x = \sqrt[3]{t}$; 4) $y = \cos 3x$, $x = t^3 + 1$.

III уровень

3.1. Проверьте, удовлетворяет ли функция $y = f(x)$ заданному уравнению:

1) $y'' = y'e^y$, где $y = \frac{1}{\ln(1-x)}$;

2) $2(y')^2 = (y-1)y''$, где $y = \frac{2-2x}{1-2x}$;

3) $yy'' - 2yy'\ln y = (y')^2$, где $y = e^{tgx}$;

4) $yy'' + (y')^2 = 0$, где $y = \sqrt{2x+1}$.

3.2. Вычислите производную 2-го порядка функции $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ в точке, где $f'(x) = 0$.

3.3. Вычислите значение $y''(x_0)$, если x_0 – наименьшее положительное число из области определения $y'(x)$:

$$y = \frac{x^3}{3} + 3x + \frac{9}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}.$$

3.4. Вычислите производную первого порядка функции $y = -\frac{8x}{x^2+4}$ в точке, где $y''(x) = 0$.

3.5. Найдите d^2y функции $y = \ln(x-1)$, если $x = \cos t$, $t = z^2$.

3.6. Вычислите $y'''(x_0)$ для функции, заданной неявно:

1) $3^{-y^2} = 3^{-x^2}$, $x_0 = 1$; 2) $2y + \sin 2y = 4\sin 2x$, $x_0 = \frac{p}{2}$, $y_0 = 0$.

17.5. Правило Лопиталя. Формула Тейлора

В случае неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов часто бывает полезным правило Лопиталя, которое задается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) определены и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, за исключением, быть может, точки x_0, причем $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$, $x \neq x_0$;

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (либо $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$);

3) существует предел $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, тогда существует предел отношений функций $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (17.19)$$

Правило Лопиталя можно использовать последовательно несколько раз.

Аналогичное правило верно в случае $x \to \infty$.

Если при вычислении пределов возникает неопределенность иного вида, то вначале пределы необходимо свести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, а затем использовать правило Лопиталя.

В частности, выражения, которые приводят к неопределенностям вида $0\cdot\infty$, $\infty\cdot\infty$, тождественно преобразуют к такому выражению, которое приводят к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0 возникают при рассмотрении функции типа $(f(x))^{g(x)}$. С помощью тождества

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)} \qquad (17.20)$$

они сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$, а затем – к $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки $x = x_0$ производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то при $x \to x_0$ верна формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \tag{17.21}$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора.

Существует несколько форм записи остаточного члена. В частности, в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \ \ x \in (x_0, x).$$

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$, получим частный вид формулы Тейлора – ***формулу Маклорена***:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где $0 < q < 1$.

Верны следующие формулы Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \tag{17.22}$$

где $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{qx}, \ \ 0 < q < 1;$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(qx + (n+1)\dfrac{p}{2}\right), \ \ n \in \mathbf{N}, \ \ 0 < q < 1;$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + R_n(x), \tag{17.23}$$

где $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(qx + (n+1)\dfrac{p}{2}\right), \ \ n \in \mathbf{N}, \ \ 0 < q < 1;$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x), \tag{17.24}$$

где $R_n(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+qx)^{n+1}}, \ 0 < q < 1;$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}(1+qx)^{m-n-1}x^{n+1}, \ \ 0 < q < 1.$

Формулы Маклорена могут быть использованы в приближенных вычислениях. При этом абсолютная погрешность приближения в случае чередования знаков в формуле Маклорена не превосходит абсолютной величины первого отбрасываемого слагаемого.

Пример 1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{5x^2} - e^5}{4x^3 - 4}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{-x}+9}{x + 2\sqrt{-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to \frac{p}{2}}(2x - p)\operatorname{tg} x$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 3x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} 3x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. 1) Непосредственное вычисление предела дает неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Поскольку условия теоремы 1 выполняются, используем правило Лопиталя. По формуле (17.19) имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{5x^2} - e^5}{4x^3 - 4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(e^{5x^2} - e^5)'}{(4x^3 - 4)'} = \lim_{x\to 1}\frac{(e^{5x^2})'}{(4x^3)'} = \lim_{x\to 1}\frac{10xe^{5x^2}}{12x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{10e^{5x^2}}{12x} = \frac{10e^5}{12} = \frac{5}{6}e^5.$$

2) Непосредственное вычисление предела дает неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, поэтому используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{-x}+9}{x + 2\sqrt{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{(\sqrt{-x}+9)'}{(x + 2\sqrt{-x})'} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}}{1 + \dfrac{2(-1)}{2\sqrt{-x}}} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{-2\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}(2\sqrt{-x} - 2)} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-1}{(2\sqrt{-x} - 2)} = 0.$$

3) Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Поэтому, чтобы воспользоваться правилом Лопиталя, преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to\frac{p}{2}}(2x-p)\operatorname{tg}x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{p}{2}}\frac{2x-p}{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}=\lim_{x\to\frac{p}{2}}\frac{2x-p}{\operatorname{ctg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{p}{2}}\frac{(2x-p)'}{(\operatorname{ctg}x)'}=\lim_{x\to\frac{p}{2}}\frac{2}{-\frac{1}{\sin^2x}}=\frac{2}{-1}=-2.$$

4) Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Для того чтобы использовать правило Лопиталя, преобразуем вначале выражение с помощью формул тригонометрии:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin3x}-\frac{1}{\operatorname{tg}3x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{tg}3x-\sin3x}{\sin3x\cdot\operatorname{tg}3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(2\operatorname{tg}3x-\sin3x)'}{(\sin3x\cdot\operatorname{tg}3x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2\cdot3}{\cos^23x}-3\cos3x}{3\cos3x\cdot\operatorname{tg}3x+\frac{3\sin3x}{\cos^23x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6-3\cos^33x}{3\cos^33x\cdot\operatorname{tg}3x+3\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{6-3\cos^33x}{3\sin3x\cdot\cos^23x+3\sin3x}=$$

$$=3\lim_{x\to0}\frac{1}{3\sin3x\left(\cos^23x+1\right)}=\frac{3}{3\cdot2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin3x}=\infty.$$

5) Так как приходим к неопределенности вида 1^∞, то вначале преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to0}\left(\cos2x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left|1^\infty\right|=e^{\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos2x)}.$$

Получили $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos2x)$, неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразовав выражение, используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos2x)=\left|\infty\cdot0\right|=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos2x)}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-2\sin2x}{\cos2x}}{2x}=$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}2x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

Используем далее эквивалентность бесконечно малых:

$$-\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}2x}{x}=-\lim_{x\to0}\frac{2x}{x}=-2.$$

Пример 2. Разложить многочлен $x^5-3x^4+x^2+7x+1$ по степени $x+2$.

Решение. Используем формулу (17.21). В данном случае $x_0=-2$. Тогда

$$f(-2)=(-2)^5-3(-2)^4+(-2)^2+7(-2)+1=-89.$$

Найдем производные функции:

$$f'(x)=5x^4-12x^3+2x+7;$$

$$f''(x)=20x^3-36x^2+2;$$

$$f'''(x)=60x^2-72x;$$

$$f^{(4)}(x)=120x-72;$$

$$f^{(5)}(x)=120;$$

$$f^{(6)}(x)=0.$$

Все производные порядка выше пятого равны нулю. Вычислив значение полученных производных в точке $x_0=-2$, получаем:

$$f'(-2)=5\cdot2^4+12\cdot2^3-2\cdot2+7=179;$$

$$f''(-2)=-20\cdot2^3-36\cdot2^2+2=-302;$$

$$f'''(-2)=60\cdot2^2+72\cdot2=384;$$

$$f^{(4)}(x)=-120\cdot2-72=-312;$$

$$f^{(5)}(x)=120.$$

Подставив найденные значения в формулу (17.21), получим:

$$x^5-3x^4+x^2+7x+1=-89+179(x+2)-\frac{302}{2!}(x+2)^2+\frac{384}{3!}(x+2)^3-$$

$$-\frac{312}{4!}(x+2)^4+\frac{120}{5!}(x+2)^5=-89+179(x+2)-151(x+2)^2+$$

$$+64(x+2)^3-13(x+2)^4+(x+2)^5.$$

Пример 3. Вычислить предел с помощью формул Маклорена:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\ln(1+2x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3x}{2x-x^2}$.

Решение. 1) Используем формулу Маклорена (17.22). Тогда

$$e^{x^2}-1=\left(1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}+R_n^1(x)\right)-1.$$

Выражение в правой части равенства эквивалентно величине $\dfrac{x^2}{1!}$

при $x \to 0$, так как остальные слагаемые имеют более высокий порядок малости («быстрее» стремятся к 0), т. е.

$e^{x^2} - 1 \sim x^2$.

По формуле (17.24) получаем:

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + \ldots + R_n^2(x) \sim 2x, \text{ если } x \to 0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\ln(1+2x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x} = 0.$

Заметим, что более рациональное решение этого примера возможно с помощью таблицы эквивалентных бесконечно малых, так как использование формул Маклорена выступает здесь как способ доказательства эквивалентностей.

2) Преобразуя выражение под знаком предела и используя формулу (17.23), получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{2x-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x(2-x)} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots+R_n(x)\right)}{x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{24}+\ldots+R_n(x)\right) = 0.$$

Пример 4. Используя формулу Маклорена, вычислить приближенное значение $\ln 1,2$ с точностью 0,001.

Решение. Используем формулу (17.24):

$$\ln 1,2 = \ln(1+0,2) = \ln\left(1+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{2\cdot 5^2} + \frac{1}{3\cdot 5^3} - \frac{1}{4\cdot 5^4} + \ldots$$

Поскольку знаки чередуются и $\dfrac{1}{4\cdot 5^4} = 0,0004 < 0,001,$ то достаточно взять три слагаемых.

Получаем $\ln 1,2 \approx \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{375} \approx 0,183.$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите предел с помощью правила Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x^2-3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x-8}+2}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+2x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

1.2. Используя формулу Тейлора, разложите многочлен $P(x)$ по степеням $(x-a)$:

1) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x + 2,\ \ a = -1;$

2) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 13x - 9,\ \ a = 1;$

3) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 9,\ \ a = 2;$

4) $P(x) = 3x^3 + 22x^2 + 57x + 47,\ \ a = -2;$

5) $y = -x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1,\ \ a = -2;$

6) $y = x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2,\ \ a = -1.$

1.3. Используя известные формулы Маклорена, получите формулу Маклорена для функции:

1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \operatorname{sh} 3x$; 3) $y = \log_2 3x$; 4) $y = e^{x^2}$.

II уровень

2.1. Вычислите предел функции с помощью правила Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\sin^2 x}-1}{\ln\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\sin^2 x}-1}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{p}{x}}{\log_2\left(\frac{x}{2-x}\right)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3^{\sin p x}-1}{\ln(x^3-6x^2+7)}$;

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-2x}\ln(6x+1)$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \ln(1+x)$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3+3)\ln\dfrac{x+5}{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{arctg} 5x \cdot 2^{\frac{1}{x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-6x+8} - \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$; 10) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x} - \ln 3x\right)$.

2.2. Используя формулу Тейлора, разложите функцию по степеням $(x-a)$:

1) $y = x^4 + 3x^3 + x - 2,\ \ a = 2;$

2) $y = 2x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x - 3,\ \ a = 1.$

2.3. Используя формулу Маклорена, вычислите приближенно с указанной точностью Δ:

1) $\sqrt[3]{0{,}98},\ \ \Delta = 0{,}0001;$ 2) $\cos 22{,}5°,\ \ \Delta = 0{,}001;$

3) $\log_3 1{,}02,\ \ \Delta = 0{,}0001;$ 4) $\sin 132{,}5°,\ \ \Delta = 0{,}001.$

2.4. Разложите следующие функции по формуле Маклорена до члена указанного порядка включительно:

1) $f(x) = e^{-x}$ до члена с x^3;

2) $f(x) = e^{x^2 - 2x}$ до члена с x^4;

3) $f(x) = \ln(\sin x)$ до члена с x^5;

4) $f(x) = \cos\cos x$ до члена с x^2.

III уровень

3.1. Вычислите предел функции с помощью правила Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^x;$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin 3x};$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^{5x};$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}\right)^{e^{-x}};$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2 + 8x - 4}{x^2 - 3x + 5}\right)^{\ln(x^3 + x + 3)};$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \operatorname{tg}^3 x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}};$

7) $\lim\limits_{x\to \frac{p}{4}}\dfrac{\ln\sin 2x}{(4x - p)^2};$ 8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}\right).$

3.2. Вычислите предел функции различными способами:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x - \cos 3x}{\cos 3x - 1};$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x - \sin 3x}{e^{3x} - e^x};$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin 3x}{\ln(1 + x^3)};$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_5(1 + x) - x}{e^x - \cos x - x};$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x}{x^4};$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2};$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4};$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x + \dfrac{x^2}{2}\right)}{x(\sin x - x)}.$

3.3. Используя известные формулы Маклорена, разложите функцию *f*(*x*) по степеням *x* (запишите первые 5 слагаемых):

1) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x;$ 2) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1 - 2x^2}{x + 1}};$

3) $f(x) = \sqrt[5]{32 + 16x^2};$ 4) $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x.$

17.6. Исследование функций. Наибольшее и наименьшее значение функций на промежутке

Всюду далее функция *f*(*x*) определена на рассматриваемых промежутках.

Теорема 1 ***(****достаточное условие монотонности****)****.* Дифференцируемая на (*a*, *b*) функция возрастает (убывает) на этом интервале тогда и только тогда, когда $f'(x) > 0\ \ (f'(x) < 0)\ \ \forall x \in (a, b).$

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции *f*(*x*), если существует некоторая окрестность точки x_0 такая, что для всех *x* из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)\ \ (f(x) \ge f(x_0)).$

Значение $f(x_0)$ называется локальным ***максимумом (минимумом)*** функции.

Точки максимума или минимума функции называются ***точками экстремума*** (локального). Максимум и минимум называются ***экстремумом функции***.

Теорема 2 ***(****необходимое условие существования экстремума функции****)****.* Если в точке x_0 функция *f*(*x*) достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Те точки из области определения функции *f*(*x*), в которых производная функции *f*(*x*) обращается в нуль или не существует, называют ***критическими***. Исследование функции на экстремум начинается с нахождения критических точек. Однако не в каждой критической точке существует экстремум. Для того чтобы определить точки экстремума, используют достаточные условия (признаки экстремума).

Теорема 3 *(первый признак экстремума функции)*. Пусть x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется условие

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ для всех } x < x_0, \\ f'(x) < 0 \text{ для всех } x > x_0, \end{cases}$$

то x_0 – точка локального максимума;
если выполняется условие

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ для всех } x < x_0, \\ f'(x) > 0 \text{ для всех } x > x_0, \end{cases}$$

то x_0 – точка локального минимума.

Если производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак в левой и правой полуокрестности точки x_0, то x_0 не является точкой экстремума.

Теорема 4 *(второй признак экстремума функции)*. Пусть x_0 – критическая точка дважды дифференцируемой функции $f(x)$. Тогда x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, и точкой локального максимума, если $f''(x_0) < 0$.

Теорема 5 *(третий признак экстремума функции)*. Пусть $f(x)$ – n раз непрерывно дифференцируемая в критической точке x_0 функция и $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума;

2) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума;

3) если n – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

З а м е ч а н и е 1. При исследовании функции и построении ее графика целесообразно использовать первый признак экстремума, так как одновременно получаем возможность исследования функции на монотонность.

Точка x_0 называется ***точкой глобального максимума (минимума)*** функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для любой точки x из этого промежутка выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$.

Точки глобального максимума и минимума называются ***точками глобального экстремума***. Значения функции в этих точках называются соответственно глобальным максимумом (наибольшим значением) и глобальным минимумом (наименьшим значением).

Теорема 6 *(Вейерштрасса)*. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она достигает на нем своих наименьшего и наибольшего значений.

Непрерывная на отрезке функция достигает наименьшего (наибольшего) значений либо на концах отрезка, либо в точках ее локального экстремума.

Для отыскания глобального экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ необходимо:

1) найти производную $y'(x)$;

2) найти критические точки функции;

3) найти значения функции на концах отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$, а также в критических точках, принадлежащих (a, b);

4) из всех полученных значений функции определить наибольшее и наименьшее ее значения.

График функции $y = f(x)$ называется ***вогнутым*** (выпуклым вниз) на (a, b), если дуга кривой $y = f(x)$ на этом интервале расположена выше любой касательной, проведенной к графику этой функции (рис. 17.1).

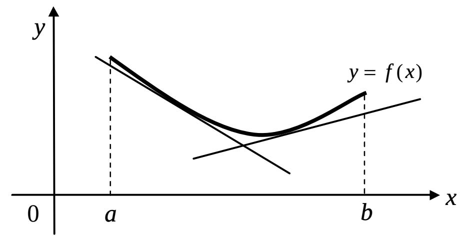


Рис. 17.1

График функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым*** (выпуклым вверх) на (a, b), если дуга кривой $y = f(x)$ на этом интервале расположена ниже любой касательной, проведенной к графику этой функции (рис. 17.2).

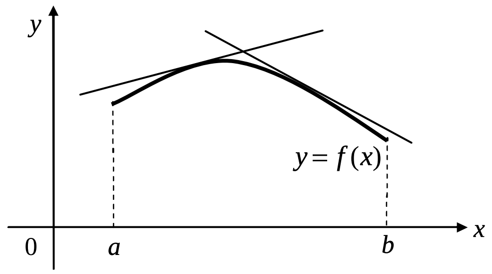


Рис. 17.2

Теорема 7. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b) и $f''(x) > 0$ $\left(f''(x) < 0\right)$ всюду на этом интервале, то график функции вогнутый (выпуклый) на (a, b).

Точка x_0 такая, что график функции $y = f(x)$ меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, проходя через $\left(x_0, f(x_0)\right)$, называется ***точкой перегиба*** (рис. 17.3).

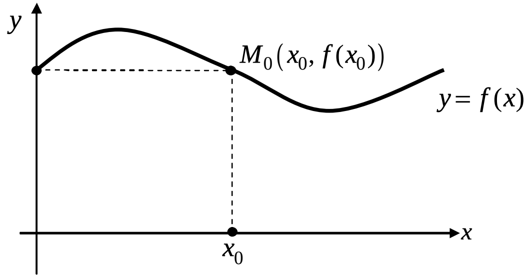


Рис. 17.3

Для нахождения точек перегиба вначале находят ***критические точки 2-го рода*** – те значения x, для которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует. Далее используют достаточные условия перегиба.

Теорема 8 (*первый признак перегиба*). Если функция $f(x)$ непрерывна в критической точке 2-го рода x_0 и ее вторая производная $f''(x)$ имеет различные знаки слева и справа от x_0, то x_0 – точка перегиба.

Теорема 9 (*второй признак перегиба*). Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'''(x)$ в точке x_0, в которой $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка перегиба.

З а м е ч а н и е 2. При исследовании функции и построении ее графика целесообразно использовать первый признак перегиба, так как одновременно получаем возможность исследования графика функции на выпуклость и вогнутость.

План исследования функции и построения графика

1. Найти область определения $D(f)$ функции $f(x)$.
2. Найти область значений $E(f)$ (если это возможно вначале, часто $E(f)$ можно указать только по результатам исследования).
3. Исследовать функцию на четность.
4. Исследовать функцию на периодичность.
5. Найти точки пересечения с осью Ox (нули функции) и точки пересечения с осью Oy.
6. Найти промежутки знакопостоянства функции.
7. Исследовать функцию на непрерывность, дать классификацию разрывов.
8. Найти асимптоты графика функции (горизонтальную, вертикальную, наклонную).
9. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
10. Исследовать график функции на выпуклость, вогнутость, перегиб.
11. Построить график функции.

Пример 1. Найти экстремумы функции $y = -x \cdot e^{1-2x^2}$.

Решение. Подозрительными на экстремумы точками будут те, в которых производная функции либо равна нулю, либо не существует.

Найдем производную функции:

$$y' = (-x \cdot e^{1-2x^2})' = -(x)' \cdot e^{1-2x^2} + (-x)(e^{1-2x^2})' =$$

$$= -e^{1-2x^2} - x \cdot e^{1-2x^2}(-4x) = e^{1-2x^2}(-1 + 4x^2).$$

Она определена для любого $x \in \mathbf{R}$.

Приравняем производную к нулю:

$e^{1-x^2}(-1 + 4x^2) = 0$, значит, $-1 + 4x^2 = 0$. Решая это уравнение, получим $x=\pm\frac{1}{2}$. Областью определения функции является числовая прямая.

Исследуем функцию на экстремум в этих точках тремя способами.

1-й способ. Воспользовавшись теоремой 3, исследуем поведение функции на промежутках $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Для этого определим знак производной, т. е. выражения $e^{1-2x^2}(-1+4x^2)$. Очевидно, что для всякого $x\in\mathbf{R}$ выполняется неравенство $e^{1-2x^2}>0$. Поэтому знак выражения $f'(x)$ зависит от знака квадратичного выражения $4x^2-1$ (рис. 17.4).

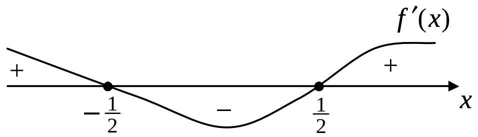


Рис. 17.4

Так как при «переходе» через точку с абсциссой $x=-\frac{1}{2}$ производная y' меняет знак с «+» на «–», то, согласно теореме 1, в этой точке функция достигает максимума.

При «переходе» через точку $x=\frac{1}{2}$ производная y' меняет знак с «–» на «+». Поэтому в данной точке функция достигает минимума.

2-й способ. Воспользуясь теоремой 4, вычислим вторую производную функции:

$$y''=\left(e^{1-2x^2}(-1+4x^2)\right)'=-2\cdot 2x\cdot e^{1-2x^2}(-1+4x^2)+e^{1-2x^2}\cdot 8x=$$

$$=e^{1-2x^2}\left(4x-16x^3+8x\right).$$

Вычислим ее значение в критических точках $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{2}$:

$$y''\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{1-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\left(4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-16\left(-\frac{1}{2}\right)^3+8\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=-4e^{\frac{1}{2}}<0.$$

Согласно теореме 4, в точке $x=\frac{1}{2}$ функция достигает максимума.

$$y''\left(\frac{1}{2}\right)=e^{1-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(4\cdot\frac{1}{2}-16\left(\frac{1}{2}\right)^3+8\cdot\frac{1}{2}\right)=4e^{\frac{1}{2}}>0.$$

Согласно теореме 4 в точке $x=\frac{1}{2}$ функция достигает минимума.

3-й способ. Воспользуемся теоремой 5. Так как производная первого порядка в точке $x=-\frac{1}{2}$ равна нулю, а производная второго (четного) порядка в этой точке меньше нуля, то, согласно теореме 5, $x=-\frac{1}{2}$ – точка локального максимума. В точке $x=\frac{1}{2}$ производная первого порядка также равна нулю, а производная второго (четного) порядка больше нуля. Следовательно, точка $x=\frac{1}{2}$ – точка локального минимума.

Вычислим максимум и минимум функции.

Максимум функции равен значению функции в точке $x_0=-\frac{1}{2}$:

$$y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}e^{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Итак, локальный максимум функции равен $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

Вычислим значение функции в точке $x_0=\frac{1}{2}$:

$$y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{1-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}e^{1-\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Итак, локальный минимум функции равен $-\frac{\sqrt{e}}{2}$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{x}{x-x^2-1}$ на отрезке [– 2, 2].

Решение. Найдем точки, которые будут подозрительными на экстремум. Для этого вычислим производную функции

$$y'(x)=\frac{x'(x-x^2-1)-x(x-x^2-1)'}{(x-x^2-1)^2}=\frac{x-x^2-1-x(1-2x)}{(x-x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{x-x^2-1-x+2x^2}{(x-x^2-1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2-x+1)^2}.$$

Производная существует во всех точках $x\in\mathbf{R}$. Найдем критические точки. Полагаем $y'(x)=0$, т. е. $x^2-1=0$. Получаем $x=\pm1$. Обе точки $x=1$ и $x=-1$ принадлежат интервалу $(-2, 2)$. Поэтому, будем искать значение функции в этих точках и на концах отрезка. Вычисляем:

$$f(-2)=\frac{-2}{-2-4-1}=\frac{2}{7};$$

$$f(-1)=\frac{-1}{-1-1-1}=\frac{1}{3};$$

$$f(1)=\frac{1}{1-1-1}=-1;$$

$$f(2)=\frac{2}{2-4-1}=-\frac{2}{3}.$$

Выбрав среди полученных значений наибольшее и наименьшее, получаем:

$$y_{наим.}=y(1)=-1, \qquad y_{наиб.}=y(-1)=\frac{1}{3}.$$

Пример 3. Дана функция $y=\frac{x^5}{5}-\frac{3}{4}x^4-x^3+\frac{11}{2}x^2-6x$. Вычислить $4m+M$, где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции.

Решение. Найдем производную функции:

$$y'=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3}{4}x^4-x^3+\frac{11}{2}x^2-6x\right)'=x^4-3x^3-3x^2+11x-6.$$

Разложив полученное выражение на множители, получим:

$y'=(x-1)^2(x+2)(x-3)$.

Поскольку функция задана на всей числовой оси (не на отрезке), то исследуем производную на знак методом интервалов (рис. 17.5).

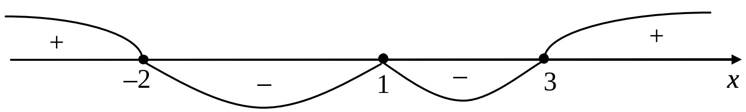


Рис. 17.5

В окрестности точки $x=-2$ выполняется условие

$$\begin{cases} f'(x)>0, \ \forall x\in(-\infty;-2), \\ f'(x)<0, \ \forall x\in(-2;1). \end{cases}$$

Поэтому, согласно теореме 3 (первый признак экстремума функции), $x=-2$ – точка локального максимума.

В окрестностях точки $x=1$ производная y' всюду отрицательна. Поэтому в точке $x=1$ экстремума нет.

В окрестности точки $x=3$ выполняется условие

$$\begin{cases} f'(x)<0, \ \forall x\in(1;3), \\ f'(x)>0, \ \forall x\in(3;+\infty). \end{cases}$$

Поэтому $x=3$ – точка локального минимума.

Найдем значения функции в точках минимума и максимума:

$$m=f(3)=-\frac{273}{20}; \qquad M=f(-2)=\frac{118}{5}.$$

Иных точек локального минимума и максимума функция не имеет.

Искомая величина равна

$$4m+M=-4\cdot\frac{273}{20}+\frac{118}{5}=\frac{-155}{5}=-31.$$

Пример 4. Найти точки перегиба функции $y=\ln x+\frac{1}{x}$.

Решение. Для данной функции найдем критические точки 2-го рода. Для этого найдем производную 2-го порядка заданной функции:

$$y'=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2};$$

$$y''=\left(\frac{x-1}{x^2}\right)'=\frac{(x-1)'\cdot x^2-\left(x^2\right)'\cdot(x-1)}{\left(x^2\right)^2}=\frac{x^2-2x(x-1)}{x^4}=$$

$$=\frac{x\left(x-2x+2\right)}{x^4}=\frac{2-x}{x^3}.$$

В точке $x=2$ полученная производная $f''(x)=0$, а в точке $x=0$ производная $f''(x)$ не существует. Поэтому точки $x=2$ и $x=0$ являются критическими точками 2-го рода.

Исследуем функцию на перегиб несколькими способами.

1-й способ. Воспользуемся теоремой 8 (первым признаком перегиба). Исследуем вторую производную на знак методом интервалов (рис. 17.6).

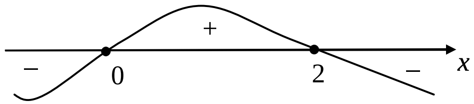


Рис. 17.6

В окрестности точки $x=0$ выполняется условие:

$$\begin{cases} f''(x)<0, \ \forall x\in(-\infty;0), \\ f''(x)>0, \ \forall x\in(0;2). \end{cases}$$

Поэтому, согласно теореме 8, $x=0$ – точка перегиба функции.

В окрестности точки $x=2$ выполняется условие:

$$\begin{cases} f''(x)>0, \ \forall x\in(0;2), \\ f'(x)<0, \ \forall x\in(2;+\infty). \end{cases}$$

Поэтому $x=2$ – точка перегиба.

2-й способ: Воспользуемся теоремой 9 (второй признак перегиба). Вычислим:

$$y'''(x)=\left(\frac{2-x}{x^3}\right)'=\frac{(2-x)'\cdot x^3-\left(x^3\right)'\cdot(2-x)}{\left(x^3\right)^2}=\frac{-x^3-3x^2(2-x)}{x^6}=\frac{2x-6}{x^4}.$$

Вычислим значение этой производной в точке $x=2$, где $f''(x)=0$:

$$y'''(2)=\frac{2\cdot 2-6}{2^4}=-\frac{1}{8}\neq 0.$$

Согласно теореме 9 в точке $x=2$ функция имеет перегиб.

В точке $x=0$ заданная функция не определена, однако слева и справа от нее имеет различный характер выпуклости.

Вычислим значение функции в точке $x=2$:

$$y(2)=\ln 2+\frac{1}{2}.$$

Получили $\left(2;\ \ln 2+\frac{1}{2}\right)$ – точка перегиба.

Пример 5. Исследовать функцию $y=(x-1)^2(x+3)$ и построить ее график.

Решение. Исследование функции произведем согласно указанному выше плану.

1. Область определения функции:

$D(f)=(-\infty;\ +\infty).$

2. Область значений $E(f)$ укажем по результатам исследования.

3. Исследуем функцию на четность и нечетность:

$y(-x)=(-x-1)^2\cdot(-x+3)\neq \pm y(x).$

Функция не является четной и нечетной.

4. Функция непериодическая.

5. Найдем точки пересечения графика с координатными осями.

Если $y=0$, т. е. $(x-1)^2(x+3)=0$, то $x=1$, $x=-3$ – точки пересечения с осью Ox (нули функции).

Если $x=0$, то $y=3$ – точка пересечения с осью Oy.

6. Найдем промежутки знакопостоянства функции с помощью метода интервалов (рис. 17.7).

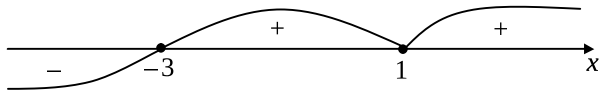


Рис. 17.7

Получаем: $f(x)<0$, если $x\in(-\infty;\ -3)$;

$f(x)>0$, если $x\in(-3;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

7. Функция непрерывна на всей числовой оси.

8. Горизонтальных асимптот функция не имеет, так как она определена на всей числовой прямой.

Ищем наклонную асимптоту $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^2(x+3)}{x}=\infty.$$

Функция наклонных асимптот также не имеет.

9. Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Найдем $y'(x)$:

$$y'=\left((x-1)^2(x+3)\right)'=2(x-1)(x+3)+(x-1)^2=$$

$$=(x-1)(2(x+3)+x-1)=(x-1)(3x+5).$$

Производная существует $\forall x\in(-\infty;\ +\infty)$. Критическими точками являются те, для которых $y'(x)=0$, т. е. $x_1=-\frac{5}{3}$ и $x_2=1$.

Исследуем знак производной для конкретных промежутков, на которые критические точки делят числовую ось (рис. 17.8).

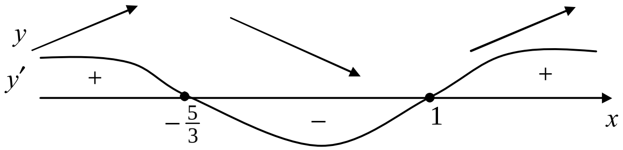


Рис. 17.8

Согласно теореме 1, функция возрастает на множестве $\left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right)\cup(1;\ +\infty)$ и убывает на $\left(-\frac{5}{3};\ 1\right)$, что схематически показано на рис. 17.8. Согласно теореме 3, в точке $x=-\frac{5}{3}$ она имеет локальный максимум, а в точке $x = 1$ – минимум. Найдем их значения:

$$y_{\max}=y\left(-\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{5}{3}-1\right)^2\cdot\left(-\frac{5}{3}+3\right)=\frac{64}{9}\cdot\frac{4}{3}=\frac{256}{27}\approx 9{,}5;$$

$$y_{\min}=y(1)=(1-1)^2(1+3)=0.$$

10. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и перегиб. Вычислим производную 2-го порядка:

$$y''(x)=\big((x-1)\cdot(3x+5)\big)'=3x+5+3(x-1)=6x+2.$$

Если $y''(x)=0,$ то $x=-\frac{1}{3},$ т. е. $x=-\frac{1}{3}$ – критическая точка 2-го рода, иных нет.

Имеем $y''(x)<0,$ если $x\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)$ и

$y''(x)>0,$ если $x\in\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ (рис. 17.9).

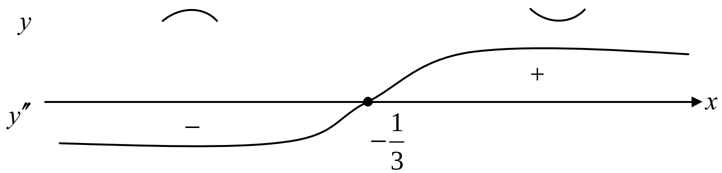


Рис. 17.9

Значит, график функции является выпуклым на $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)$ и вогнутым на $\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$, (согласно теореме 7), $x=-\frac{1}{3}$ – точка перегиба

(теорема 8).

11. Используя полученные данные, построим график функции (рис. 17.10).

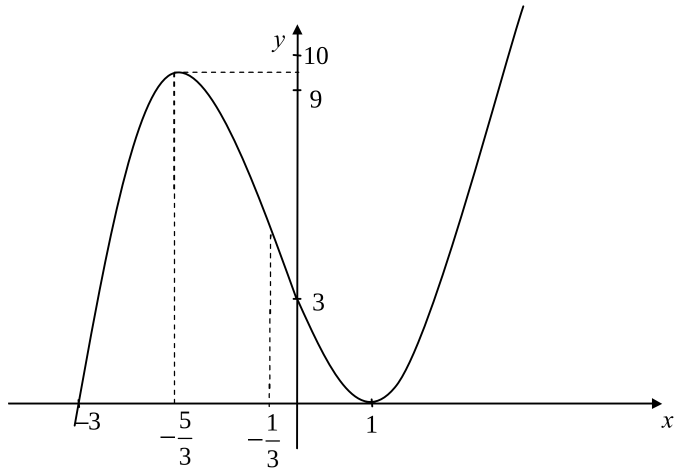


Рис. 17.10

Заметим, что $E(f)=(-\infty;\ +\infty)$.

Пример 6. Исследовать функцию $y=e^{\frac{1}{2-x}}$ и построить ее график.

Решение. 1. Область определения:

$D(f)=(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty).$

2. Область значений $E(f)$ укажем по результатам исследования.

3. Поскольку область определения $D(f)$ функции не является множеством, симметричным относительно $x = 0$, то функция не является четной и нечетной.

4. Функция непериодическая.

5. График функции не пересекает ось Ox, так как $e^{\frac{1}{2-x}}\neq 0$ для всех $x\in D(f)$.

Если $x = 0$, то $y=\sqrt{e}$ – точка пересечения с осью Oy.

6. Для всех $x\in D(f)$ выполняется $e^{\frac{1}{2-x}}>0,$ т. е. функция положительна на всей области определения.

7. Функция непрерывна на своей области определения, $x = 2$ – точка разрыва.

Исследуем характер разрыва.

Вычисляем односторонние пределы в точке $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{2-x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{2-x}} = 0.$$

Следовательно, $x = 2$ – точка разрыва 2-го рода (бесконечный скачок).

8. Найдем асимптоты функции. Поскольку

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{2-x}} = e^0 = 1,$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{2-x}} = e^0 = 1,$$

то $y = 1$ – горизонтальная асимптота.

Мы показали, что в точке $x = 2$ имеется бесконечный скачок, а поэтому $x = 2$ – вертикальная асимптота.

Ищем наклонную асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{\frac{1}{2-x}} - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{2-x}} = 1.$$

Получаем $y = 1$ – это горизонтальная асимптота. Наклонных асимптот нет.

9. Исследуем функцию на монотонность и экстремум.

Найдем производную функции:

$$y' = \left(e^{\frac{1}{2-x}}\right)' = e^{\frac{1}{2-x}}\cdot\frac{(-1)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^2}.$$

Производная положительна на всей $D(f)$. Следовательно, функция возрастает всюду, где она определена. Экстремума нет.

10. Находим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^2}\right)' = \frac{\left(e^{\frac{1}{2-x}}\right)'\cdot(2-x)^2 - e^{\frac{1}{2-x}}\cdot\left((2-x)^2\right)'}{(2-x)^4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{(2-x)^2}\cdot e^{\frac{1}{2-x}}\cdot(2-x)^2 - e^{\frac{1}{2-x}}\cdot 2(2-x)\cdot(-1)}{(2-x)^4} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2-x}} + 2(2-x)e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^4} = \frac{e^{\frac{1}{2-x}}(1+4-2x)}{(2-x)^4} = \frac{e^{\frac{1}{2-x}}(5-2x)}{(2-x)^4}.$$

Поскольку $e^{\frac{1}{2-x}} > 0$ и $(2-x)^4 > 0$ на $D(f)$, то знак производной 2-го порядка зависит от знака выражения $5 - 2x$. Очевидно, что $y''(x) > 0$, если $x \in (-\infty;\ 2) \cup \left(2;\ \frac{5}{2}\right)$. На этих промежутках график функции вогнут.

Если $x \in \left(\frac{5}{2};\ +\infty\right)$, то $y''(x) < 0$, т. е. график функции является выпуклым на этом промежутке. Точка $x = \frac{5}{2}$ является точкой перегиба, так как при этом значении вогнутость графика изменяется на его выпуклость. Найдем ординату, соответствующую точке перегиба:

$$y\left(\frac{5}{2}\right) = e^{\frac{1}{2-\frac{5}{2}}} = e^{-2} \approx 0{,}14.$$

11. Используя результаты исследования, строим график функции (рис. 17.11).

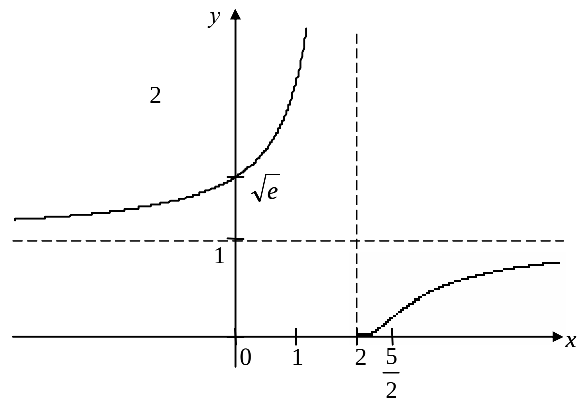


Рис. 17.11

В дополнении отметим, что $E(f)=(0;\ 1)\cup(1:+\infty)$.

Пример 7. Для перевозки груза необходимо изготовить контейнер с крышкой, объем которого равен 72 м^3, а стороны основания относятся как 1:2. Определить, каковы должны быть размеры контейнера, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала.

Решение. Контейнер представляет собой прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объем которого 72 м^3 (рис. 17.12).

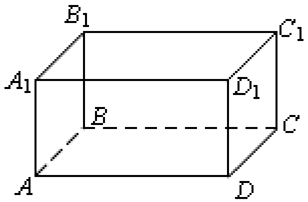


Рис. 17.12

Пусть k – коэффициент пропорциональности. Тогда стороны основания равны:

$AB=k,\ AD=2k.$

$V=AB\cdot AD\cdot AA_1$, откуда

$AA_1=\dfrac{V}{AB\cdot AD}$, т. е. $AA_1=\dfrac{72}{2k^2}=\dfrac{36}{k^2}.$

Количество материала, необходимого на изготовление контейнера, численно равно полной поверхности параллелепипеда, т. е. $S=S_{бок}+2S_{осн}$.

Выразим площадь боковой поверхности:

$$S_{бок}=2(AB+AD)\cdot AA_1=2(k+2k)\cdot\frac{36}{k^2}=\frac{216}{k}.$$

Площадь основания:

$S_{осн}=AB\cdot AD=k\cdot 2k=2k^2.$

Поэтому площадь полной поверхности выражается функцией

$$S=\frac{216}{k}+4k^2=\frac{216+4k^3}{k}.$$

Исследуем полученную функцию на экстремум с помощью первой производной:

$$S'=\left(\frac{216+4k^3}{k}\right)'=\frac{12k^2\cdot k-\left(216+4k^3\right)}{k^2}=\frac{8k^3-216}{k^2}.$$

Критические точки: значение $k=0$ (производная не существует) – не подходит по смыслу задачи.

$S'=0$, т. е. $8k^3-216=0,\ \ k^3=27,\ \ k=3.$

При переходе через точку $k=3$ производная функции меняет свой знак с «–» на «+». Значит, при $k=3$ площадь полной поверхности будет наименьшей. Получаем размеры контейнера:

$$AB=3\ \text{ì};\ AD=2\cdot 3=6\ \text{ì};\ AA_1=\frac{36}{3^2}=4\ \text{ì}.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите критические точки функции:

1) $y=3x^3-27y;$ 2) $y=2xe^x;$

3) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2};$ 4) $y=x^5-5x^4+5x^3-1.$

1.2. Найдите интервалы возрастания и убывания функции:

1) $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^3+\dfrac{11}{2}x^2-6x;$ 2) $y=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^4}{2}-x^3;$

3) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{13}{12}x^2+x;$ 4) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5}{2}x^2.$

1.3. Исследуйте функцию на локальный и глобальный экстремумы:

1) $y=x^3-6x^2+9x+4;$ 2) $y=2x^2-x^4;$

3) $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2;$ 4) $y=x^2-x^3.$

1.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке:

1) $y=\dfrac{3}{2}x^4-6x+2,\ x\in[-1;\ 2];$ 2) $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}+1,\ x\in[1;\ 4];$

3) $y=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+3,\ x\in[-2;\ 2];$ 4) $y=\dfrac{4}{x^2}+x^2,\ x\in[1;\ 2].$

1.5. Найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции:

1) $y=\dfrac{2x+1}{3-x}$; 2) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$;

3) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; 4) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

II уровень

2.1. Вычислите сумму наибольшего и наименьшего значений функции:

1) $y=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$; 2) $y=x\sqrt{2-x^2}$;

3) $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$; 4) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$.

2.2. Найдите длину промежутков убывания функции:

1) $y=4x^3+21x^2+18x+7$; 2) $y=x^5-5x^4+5x^3-1$;

3) $y=x^2-10\ln x$; 4) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

2.3. Найдите наибольшее целое число из промежутка убывания функции:

1) $y=(x-1)^3\cdot(2x+3)^2$; 2) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

2.4. Найдите глобальный экстремум функции $y=f(x)$ на отрезке:

1) $y=\sin 2x-x,\ -\dfrac{3p}{2}\le x\le\dfrac{p}{2}$; 2) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2},\ 0\le x\le 1$;

3) $y=\dfrac{x-1}{x+1},\ 0\le x\le 4$; 4) $y=\sqrt{100-x^2},\ -6\le x\le 8$.

2.5. Найдите интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба графика функции:

1) $y=e^{\operatorname{arctg} x}$; 2) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

3) $y=\dfrac{2x+1}{e^x}$; 4) $y=e^{-x^2}$.

2.6. Исследуйте функцию и постройте ее график:

1) $y=\dfrac{x^2}{9-x^2}$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$;

3) $y=\dfrac{8-x^3}{x^2}$; 4) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$;

5) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; 6) $y=\dfrac{x^2-2x-7}{x+2}$;

7) $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2}$; 8) $y=\dfrac{3x^2-7x-16}{x^2-x-6}$;

9) $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$; 10) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.

2.7. Из всех ваз, одинаковой вместимости и имеющих форму усеченного конуса, в котором образующая составляет с основанием угол a, найдите ту, у которой полная поверхность минимальна.

2.8. Определите, каково должно быть соотношение размеров консервной банки цилиндрической формы с заданной поверхностью, чтобы она имела наибольшую вместимость.

2.9. В равнобедренный треугольник с длинами сторон 15, 15 и 18 см вписан параллелограмм наибольшей площади так, что угол при основании у них общий. Найдите стороны параллелограмма.

2.10. Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных резисторов. Определите, при каком соотношении между сопротивлениями этих резисторов сопротивление цепи минимально, если при последовательном соединении оно равно R Ом.

2.11. Пусть x_1 и x_2 соответственно точка минимума и точка максимума функции $y = -2x^3 + 3(1-2a)x^2 + 12ax - 1$. Найдите все значения параметра *a*, при которых $x_1^2 - x_2 = 0$.

2.12. Определите, при каких значениях параметра *a* наименьшее значение функции $f(x) = 8a\cos x - \cos 2x + 4a - 8a^2$ на отрезке $\left[0;\ \frac{p}{2}\right]$ является наибольшим.

III уровень

3.1. Определите, при каких значениях параметра *a* кривая $y = x^4 + 2ax^3 + 6x^2 + 1$ выпукла вниз всюду на области определения.

3.2. Исследуйте функцию и постройте ее график:

1) $y = \frac{2x}{e^x}$; 2) $y = \frac{e^x}{x}$; 3) $y = \frac{x^2}{e^x}$.

3.3. Определите, каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника, вписанного в данный круг, чтобы его периметр был наибольшим.

3.4. Найдите число, куб которого превышает утроенный его квадрат, но имеет минимальное значение.

3.5. Найдите положительное число, сумма которого со своей обратной величиной имеет наименьшее значение.

3.6. Найдите расстояние от точки М(2; – 4) до прямой $y = 3x$.

3.7. Найдите расстояние между параболой $y = x^2 + x + 1$ и прямой $y = 3x - 20$.

3.8. Пусть x_1 и x_2 соответственно точка минимума и точка максимума функции $y = -2x^3 + 3(1-2a)x^2 + 12ax - 1$. Найдите все значения параметра *a*, при которых $x_1^2 - x_2 = 0$.

3.9. Определите, при каких значениях параметра *a* наименьшее значение функции $f(x) = 8a\cos x - \cos 2x + 4a - 8a^2$ на отрезке $\left[0;\ \frac{p}{2}\right]$ является наибольшим.

3.10. Определите, при каком значении параметра *a* из промежутка $\left[\frac{3}{4};\ 1\right]$ площадь фигуры, ограниченной касательной к графику функции $y = x^{\frac{2}{3}}$ с абсциссой *a* в точке касания, осью абсцисс и прямыми $x = 2$ и $x = \frac{1}{2}$, будет наименьшей. Найдите эту площадь.

3.11. Определите, при каком наибольшем значении параметра *a* уравнение $x^4 + 4x + a = 0$ имеет решение.

18. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

18.1. Основные понятия теории функций многих переменных

Пусть задано множество точек координатной плоскости $D \subseteq R^2$. Если каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x;y) \in D$ ставится в соответствие единственное действительное число z, то говорят, что на множестве D задана ***функция двух переменных*** со значениями в R и пишут:

$z = f(x;y)$ или $z = f(M)$,

где $M(x;y) \in D$.

Множество D называется ***областью определения*** функции f. Множество $E \subseteq R$, состоящее из всех чисел z, равных $f(x;y)$, где $(x;y) \in D$, называется ***множеством значений*** функции.

Множество называется ***открытым***, если каждая точка множества принадлежит ему вместе с некоторой окрестностью этой точки. Множество называется ***связным***, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

Множество, обладающее свойствами открытости и связности, называется ***областью***.

Точка M называется ***граничной*** точкой области D, если в любой ее окрестности содержатся точки как принадлежащие D, так и не принадлежащие D.

Совокупность всех граничных точек области называется ***границей*** этой области.

Замкнутой областью называется объединение области и ее границы.

Область называется ***ограниченной***, если все ее точки содержатся в некотором круге конечного радиуса с центром в начале системы координат.

Область $D \subseteq R^2$ называется ***односвязной***, если для любой замкнутой кривой, принадлежащей этой области, ограниченная

ею часть плоскости целиком принадлежит области D. В противном случае – область ***многосвязная***. Многосвязная область называется ***n-связной***, если ее граница состоит из n замкнутых кривых.

Графиком функции $z = f(x;y)$, определенной на области D, называется множество точек $(x;y;z)$ пространства R^3, где $(x;y) \in D$ и $z = f(x;y)$.

Множество точек $(x;y) \in D \subseteq R^2$, для которых $f(x;y) = C$, $C = const$ (т. е. функция имеет постоянное значение C), называется ***линией уровня*** функции $f(x;y)$.

С помощью линий уровня изучают вид графика функции двух переменных.

Пусть D – множество точек пространства R^3. Если каждой точке $M(x;y;z) \in D \subseteq R^3$ поставлено в соответствие единственное число $u \in R$, то говорят, что на множестве D задана ***функция трех переменных*** и пишут:

$u = f(x,y,z)$ или $u = f(M)$,

где $M(x;y;z) \in D$.

Графиком функции $u = f(x,y,z)$ определенной области D называется множество точек (x,y,z,u) пространства R^4, где $(x,y,z) \in D$, $u = f(x,y,z)$.

Поверхностью уровня функции трех переменных $u = f(x;y;z)$ называется множество точек $(x,y,z) \in D \subseteq R^3$ таких, что $f(x;y;z) = C$, $C = const$.

Понятие функции нескольких переменных обобщается на любое $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

С помощью поверхностей уровня изучают вид графика функции трех переменных.

Пусть G – множество точек пространства R^n, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Если каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in G$ поставлено в соответствие единственное число $u \in \mathbf{R}$, то говорят, что на множестве G определена ***функция n переменных*** и пишут:

$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

График функции n переменных находится в пространстве R^{n+1}, $n \in \mathbf{N}$. Его невозможно изобразить геометрически для $n \geq 3$.

Для функции нескольких переменных можно определить понятие предела и непрерывности. Приведем эти понятия для функции двух переменных.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ некоторая точка области $D \subseteq R^2$. Множество точек $M(x; y)$, для которых выполняется неравенство

$$r(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < d,$$

называется ***d*-окрестностью точки M_0**.

Число A называется ***пределом функции*** $z = f(M)$ $(z = f(x; y))$ в точке M_0 (при $M \to M_0$), если $\forall e > 0$ $\exists d > 0$ такое, что для любой точки $M \in D$, удовлетворяющей условию $0 < r(M, M_0) < d$, выполняется неравенство

$$|f(M) - A| < e.$$

Обозначают:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \text{ или } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A.$$

Функция $z = f(M)$ $(z = f(x; y))$ называется ***непрерывной в точке*** $M_0 \in D$, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) \text{ или } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

Функция f называется ***непрерывной в области D***, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Аналогичным образом определяются понятия предела и непрерывности в точке для функции n переменных, $n > 2$.

Пример 1. Найти область определения функции

$$z = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}}.$$

Решение. Заданная функция определена, если $4x^2 + 9y^2 - 36 > 0$, т. е. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1$. Областью определения функции является часть плоскости, лежащая вне эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (рис. 18.1).

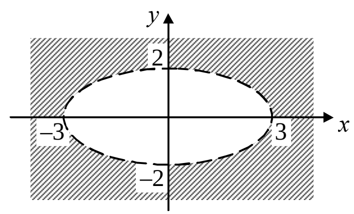


Рис. 18.1

Пример 2. Найти область определения функции

$u = \arccos(x + y)$.

Решение. Функция u определена при условии $-1 \leq x + y \leq 1$, т. е. $-1 - x \leq y \leq 1 - x$. Областью определения является часть плоскости, заключенная между двумя прямыми $y = -x - 1$ и $y = -x + 1$ вместе с точками этих прямых (рис. 18.2).

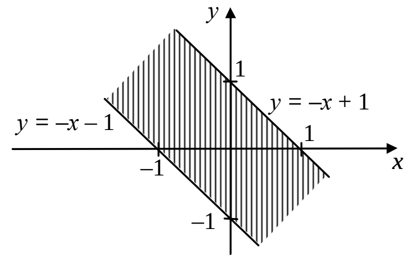


Рис. 18.2

Пример 3. Найти область определения функции

$u = \ln(2x^2 + y^2 - 4z^2 - 4)$.

Решение. Данная функция трех переменных определена при условии $2x^2 + y^2 - 4z^2 - 4 > 0$, т. е. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} > 1$.

Областью определения функции u является часть пространства, находящаяся вне однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$ (рис. 18.3).

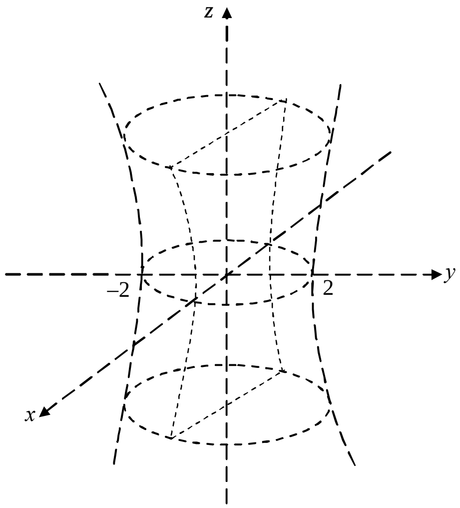


Рис. 18.3

Пример 4. Найти линии уровня функции $z = x^2 + 2x + y^2$.

Решение. Уравнение семейства линий уровня имеет вид:

$x^2 + 2x + y^2 = C$ или $(x+1)^2 + y^2 = C + 1,\ C \in \mathbf{R}$.

Рассмотрим те значения C, которые приводят к различным ответам.

Если $\tilde{N} < -1$, то линии уровня не существует. Если $C = -1$, то линия уровня вырождается в точку (–1; 0). Если $C > -1$, то в качестве линий уровня получим концентрические окружности с центром в точке (–1; 0).

Пример 5. Найти поверхности уровня функции

$u = z^2 - 3x^2 + 2y^2$.

Решение. Уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид: $z^2 - 3x^2 + 2y^2 = C,\ \tilde{N} \in \mathbf{R}$. Если $C = 0$, то получаем: $z^2 - 3x^2 + 2y^2 = 0$ или $\dfrac{z^2}{6} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 0$. Этим уравнением задается конус. Если $C > 0$, то $\dfrac{z^2}{6C} - \dfrac{x^2}{2C} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ – семейство однополостных гиперболоидов. Если $C < 0$, то $\dfrac{z^2}{6C} - \dfrac{x^2}{2C} + \dfrac{y^2}{3C} = -1$ – семейство двуполостных гиперболоидов.

Пример 6. Вычислить предел функции:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{x^2+y^2}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{2}{y^2+xy}}$.

Решение. *1*) Так как $x \to 0$ и $y \to 1$, то числитель дроби стремится к 1, а знаменатель стремится к нулю, т. е. является бесконечно малой величиной. Следовательно, заданная дробь – бесконечно большая величина и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{x^2+y^2}{xy} = \infty$.

2) Преобразуем выражение $\dfrac{\sin xy}{y} = \dfrac{x \sin xy}{xy}$.

Теперь, используя первый замечательный предел и свойства пределов при $x \to 3$ и $y \to 0$, получим:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} x \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 3 \cdot 1 = 3.$$

3) Представим функцию в виде $\left((1+xy)^{\frac{1}{xy}} \right)^{\frac{2x}{x+y}}$. Так как при $x \to 2$ и $y \to 0$ имеем $xy \to 0$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = e$ (второй замечательный предел). Показатель $\dfrac{2x}{x+y}$ при $x \to 2,\ y \to 0$ стремится к 2.

Поэтому получаем $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{2}{y^2+xy}} = e^2$.

Пример 7. Найти точки разрыва функции $z = \dfrac{x-y}{x^2-y^2}$.

Решение. Данная функция не определена в тех точках, где знаменатель дроби обращается в нуль: $x^2 - y^2 = 0$, т. е. функция не определена для точек прямых $y = x$ и $y = -x$. В остальных точках плоскости функция определена. В любой точке M на прямых $y = x$ или $y = -x$ функция не является непрерывной, так как $z(M)$ не существует. Таким образом, любая точка прямых $y = x$ и $y = -x$ есть точка разрыва заданной функции. В любой точке M_1, не лежащей на прямых $y = x$ или $y = -x$, заданная функция непрерывна.

Задания

I уровень

1.1. Найдите область определения функции:

1) $z = 7 - 3x + y$; 2) $z = \dfrac{2}{\sqrt{xy}}$;

3) $z = \arccos\left(\dfrac{y}{x}\right)$; 4) $z = \ln(x + 2y) - x + y + 3$;

5) $z = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{y}}$; 6) $z = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{y}$.

1.2. Найдите линии уровня функции:

1) $z = 3x - y$; 2) $z = \dfrac{y}{x^2}$; 3) $z = \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$; 4) $z = \ln(xy)$.

1.3. Найдите поверхности уровня функции:

1) $u = x + 4y + z$; 2) $u = \dfrac{x^2}{2} - y^2 + z^2$;

3) $u = x^2 + y^2 + z^2$; 4) $u = y^2 - x^2 - z^2$.

II уровень

2.1. Найдите область определения функции:

1) $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$; 2) $z = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$;

3) $u = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z}$; 4) $u = \ln x \cdot \ln y \cdot \ln z$.

Изобразите найденную область D:

5) $u = \dfrac{x + y}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$; 6) $u = \sqrt{x + y - z}$.

2.2. Найдите линии уровня функции:

1) $z = \ln\sqrt{y - x}$; 2) $z = x + \sqrt{y}$;

3) $z = e^{x^2 y}$; 4) $z = 3x^2 + 8xy - 3y^2 - 14x - 2y$.

Изобразите несколько линий уровня для конкретных значений C:

5) $z = 4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y$; 6) $z = x^2 - 9y^2 + 2x + 36y$.

2.3. Найдите поверхности уровня функции:

1) $u = x^2 + z^2 - 4x - 4z$; 2) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z$.

Изобразите несколько поверхностей уровня для конкретных значений C:

3) $u = x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z$; 4) $u = 4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z$.

2.4. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\operatorname{tg} 2xy}{xy^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \left(1 + xy^2\right)^{\frac{y}{x^7 + y + xy^2}}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x + y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^2}{|x| + |y|}$;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin(x + y)\ln\left(x^2 + y^2\right)$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$.

2.5. Найдите точки разрыва функции:

1) $z = \dfrac{x - y}{x^3 - y^3}$; 2) $z = \ln\left(16 - x^2 - y^2\right)$;

3) $u = \dfrac{1}{x^2 - y^2 + z^2}$; 4) $z = \cos\dfrac{x}{y}$;

5) $u = \operatorname{tg}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$; 6) $z = \dfrac{\sin x \sin y}{xy}$.

III уровень

3.1. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{2x+y}{x^2+xy+y^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{|y|}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to\infty}} \left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{\frac{y^2}{x+y}}$.

3.2. Докажите, что предел не существует:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{2x^2+y^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\ln(x+y)}{x}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$.

3.3. Докажите непрерывность функции в R^2:

1) $f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$; 2) $f(x,y)=\sqrt{1+e^{xy}}$.

3.4. Докажите, что функция непрерывна по каждой из переменных x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0,\\ 0,\ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

18.2. Частные производные и дифференциал первого порядка

Частной производной по переменной x функции $z=f(x;\ y)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;\ y_0)-f(x_0;\ y_0)}{\Delta x}=\frac{\partial f(x_0;\ y_0)}{\partial x}, \qquad (18.1)$$

если он существует.

Производную (18.1) обозначают также $f'_x(x_0;\ y_0)$.

Частной производной по переменной y функции $z=f(x;\ y)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ называется предел

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0;\ y_0+\Delta y)-f(x_0;\ y_0)}{\Delta y}=\frac{\partial f(x_0;\ y_0)}{\partial y}, \qquad (18.2)$$

если он существует.

Производную (18.2) обозначают также $f'_y(x_0;\ y_0)$.

Если частные производные определены на множестве $D\subseteq R^2$ и $M\in D$, то они являются функциями двух переменных $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$.

Для функции трех переменных $u=f(x;\ y;\ z)$, в случае их существования, аналогично определяют три частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Полным приращением функции $z=f(x;\ y)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ называется разность

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)-f(x_0;\ y_0),$$

где $\Delta x,\ \Delta y$ – приращения аргументов.

Функция $z=f(x;\ y)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $M_0(x_0;\ y_0)$, если полное приращение функции в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+a\cdot\Delta x+b\cdot\Delta y, \qquad (18.3)$$

где A, B – некоторые числа; $a=a(\Delta x,\ \Delta y)$, $b=b(\Delta x,\ \Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Если функция дифференцируема в точке M_0, то в формуле (18.3)

$$\mathrm{A}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x},\ \mathrm{B}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}.$$

Главная часть полного приращения (формула (18.3)) дифференцируемой функции $z=f(x;\ y)$ называется ***дифференциа-***

лом этой функции и обозначается dz:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \qquad (18.4)$$

Для независимых переменных x и y дифференциалы совпадают с их приращениями: $dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y$.

Дифференциал функции двух переменных $z = f(x;\ y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (18.5)$$

Дифференциал функции трех переменных $u = f(x;\ y;\ z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \qquad (18.6)$$

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ для функции $z = f(x;\ y)$, дифференцируемой в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ и ее окрестности, имеет место приближенное равенство

$$f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) \approx$$
$$\approx f(x_0;\ y_0) + \frac{\partial f(x_0;\ y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0;\ y_0)}{\partial y}\Delta y. \qquad (18.7)$$

Для функции трех переменных (в случае дифференцируемости в точке M_0 и малых приращениях независимых переменных) справедливо:

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z) \approx f(x_0,\ y_0,\ z_0) +$$
$$+ \frac{\partial f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial z}\Delta z. \qquad (18.8)$$

Пример 1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = x^3 - 2x^2y + 3y^2 - x + 7y + 4$. Найти значения частных производных в точке (–1, 1).

Решение. Зафиксируем y, вычислим производную по x, пользуясь правилами дифференцирования (условно считаем $y = const$):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 4xy - 1.$$

Тогда

$$\frac{\partial z(-1,1)}{\partial x} = 3\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 1 - 1 = 6.$$

Зафиксируем x, вычислим производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2 + 6y + 7.$$

Тогда

$$\frac{\partial z(-1,1)}{\partial y} = -2(-1)^2 + 6\cdot 1 + 7 = 11.$$

Пример 2. Найти частные производные функции

$$u = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Решение. Фиксируя y и z, вычислим производную по x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y\cdot\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - xy\left(\frac{1}{2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}2x\right)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{y(x^2 + y^2 + z^2) - x^2y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$$

Зафиксируем x и z и аналогично вычислим производную по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - xy\left(\frac{1}{2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}2y\right)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x(x^2 + y^2 + z^2) - xy^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$$

Зафиксируем x и y и вычислим производную по z:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy\left(-\frac{1}{2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}\right)2z = -\frac{xyz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$$

Пример 3. Найти dz функции $z = e^{xy}$.

Решение. Используя формулу (18.5), найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy}y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy}x.$$

Тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = e^{xy}\left(ydx + xdy\right).$$

Пример 4. Найти $du\left(-1, 1, e\right)$ функции $u = z^{x^2 y}$.

Решение. Используя формулу (18.6), вычислим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^{x^2 y}\ln z \cdot 2xy; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = z^{x^2 y}\ln z \cdot x^2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 y z^{x^2 y - 1}.$$

Тогда

$$du = 2xyz^{x^2 y}\ln z dx + x^2 z^{x^2 y}\ln z dy + x^2 yz^{x^2 y-1}dz.$$

Подставим $x = -1$, $y = 1$, $z = e$.

Получим:

$$du\left(-1,1,e\right) = -2edx + edy + dz.$$

Пример 5. Вычислить приближенно $\sqrt{0,09^3 + 1,01^3}$.

Решение. Используем формулу (18.7). Рассмотрим функцию $f(x; y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ и найдем ее значение при $x = 0$, $y = 1$: $f(0;\ 1) = \sqrt{0^3 + 1^3} = 1$.

Вычислим значения частных производных функции f в точке (0; 1).

$$\frac{\partial f(0,\ 1)}{\partial x} = \left.\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}\right|_{(0;\ 1)} = 0;$$

$$\frac{\partial f(0,\ 1)}{\partial y} = \left.\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}\right|_{(0;\ 1)} = \frac{3}{2}.$$

Приращения аргументов $\Delta x = 0,09$; $\Delta y = 0,01$.

Тогда по формуле (18.7) имеем:

$$\sqrt{0,09^3 + 1,01^3} \approx 1 + 0 \cdot 0,09 + \frac{3}{2}\cdot 0,01 = 1,015.$$

Пример 6. Вычислить приближенно $\sqrt{1,02^{2,99} + 3e^{0,005}}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x;\ y;\ z) = \sqrt{x^y + 3e^z}$ и найдем ее значение при $x = 1$, $y = 3$ è $z = 0$. Имеем: $f(1;\ 3;\ 0) = \sqrt{1^3 + 3e^0} = 2$.

Вычислим значения частных производных в точке (1; 3; 0):

$$\frac{\partial f(1,\ 3,\ 0)}{\partial x} = \left.\frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y + 3e^z}}\right|_{(1;\ 3;\ 0)} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{\partial f(1,\ 3,\ 0)}{\partial y} = \left.\frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + 3e^z}}\right|_{(1;\ 3;\ 0)} = 0;$$

$$\frac{\partial f(1,\ 3,\ 0)}{\partial z} = \left.\frac{3e^z}{2\sqrt{x^y + 3e^z}}\right|_{(1;\ 3;\ 0)} = \frac{3}{4}.$$

Приращение аргументов $\Delta x = 0,02$; $\Delta y = -0,01$; $\Delta z = 0,005$.

Используя далее формулу (18.8), получаем:

$$\sqrt{1,02^{2,99} + 3e^{0,005}} \approx 2 + \frac{3}{4}\cdot 0,02 + 0\cdot(-0,01) + \frac{3}{4}\cdot 0,005 = 2,01875 \approx 2,019.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите частные производные первого порядка функции:

1) $z = \sqrt[3]{3x + 2y}$; 2) $z = x^3 - 6x^2 y + 4xy^2 - 2x + 3y + 1$;

3) $z = r^2 \sin^4 u$; 4) $u = \left(x - y\right)\left(z - x\right)\left(y - z\right)$.

1.2. Найдите полный дифференциал функции:

1) $z = e^{\sqrt{x^3 - y^3}}$; 2) $z = \ln\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)$;

3) $z = \sin\left(xy\right)$; 4) $u = y^3 + \sqrt{x^2 + z^2}$.

1.3. Вычислите приближенно значение:

1) $1,09^{3,02}$; 2) $\ln\left(0,95^2 + 0,03^2\right)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{0,97}{1,04}\right)$.

II уровень

2.1. Найдите частные производные и вычислите их значения в указанной точке M_0:

1) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{2y}{x}$, $M_0\left(1; 1\right)$; 2) $z = e^{\frac{x}{y}}$, $M_0\left(0; 1\right)$;

3) $z=(1-x)^{y^3}$, $M_0(-1;1)$; 4) $z=x\ln\left(\frac{x}{y}\right)$, $M_0(e;e)$;

5) $u=3x\sqrt{y}+z\sqrt[4]{x}$, $M_0(1;1;0)$; 6) $z=e^{\sin xy}$, $M_0\left(\frac{p}{2};\frac{p}{2}\right)$.

2.2. Найдите дифференциал функции в точке M_0:

1) $z=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$, $M_0\left(\frac{p}{4};\frac{p}{4}\right)$; 2) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{x-y}$, $M_0(2;1)$;

3) $u=e^{\frac{xz}{y}}$, $M_0(1;1;1)$; 4) $u=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, $M_0(1;0;-1)$.

2.3. Вычислите приближенно:

1) $\sqrt[4]{1{,}03^{3{,}99}+0{,}07^3}$; 2) $\ln(2{,}74)^{1{,}98}$;

3) $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3$; 4) $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98}\sqrt[4]{1{,}05^3}}$.

2.4. Вычислите:

1) $2\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}-3\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, если $f(x;y)=\operatorname{arctg}(x-2y)$;

2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$, если $f(x,y)=\sqrt{xy}$;

3) $\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}x+\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}y+\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}z$, если $u(x;y;z)=z^{\frac{x}{y}}$.

III уровень

3.1. Определите, существует ли частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ в точке (1; 0).

3.2. Установите, имеет ли заданная функция частные производные в точке $O(0;0)$ и дифференцируема ли она в этой точке:

1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; 2) $z=\sqrt[3]{xy}$;

3) $z=\sqrt[3]{y\sin x}$; 4) $z=\sqrt[5]{x}\operatorname{tg}y$;

5) $z=\sqrt[3]{x^2y^2}$; 6) $z=\sqrt[4]{x^4+y^4}$.

3.3. Найдите частные производные функции:

1) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{\sin x+y}{1-y\sin x}$; 2) $u=e^{xyz}(z\cos x+y\sin x)$;

3) $u=(1+x)(1+y)^2(1+z)^3$; 4) $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

5) $z=\operatorname{tg}(x-y)e^{\frac{y}{x}}$; 6) $u=\left(\dfrac{z}{y}\right)^x$;

7) $u=y^{\frac{z}{x}}$; 8) $u=z^{y^x}$;

9) $u=x^zy^xz^y$; 10) $u=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z$.

3.4. Покажите, что функция $z=x\sin\dfrac{x}{y}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{x}$.

3.5. Вычислите $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$, если $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}$, $y=\sqrt{uv}$.

3.6. Найдите $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x(M_0)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(M_0)}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y(M_0)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(M_0)}{\partial v}\end{vmatrix}$, если $x=\sqrt[3]{uv^2}$, $y=\sqrt[3]{u^2v}$, $M_0(1;2)$.

18.3. Дифференцирование сложных функций

Пусть $z = f(x;y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные, функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные, t – независимая переменная. Тогда ***производная сложной функции*** $z = f(x(t); y(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \qquad (18.9)$$

Пусть $z = f(x;y)$ и $y = y(x)$, где x – независимая переменная, причем функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные, $y(x)$ – непрерывную производную. Тогда справедлива ***формула полной производной*** функции z по x:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (18.10)$$

Пусть $z = f(x;y)$ и $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, причем функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y, а функции $x(u;v)$, $y(u;v)$ имеют непрерывные частные производные по u и v. Тогда частные производные функции z по u и v находят по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (18.11)$$

Формулы (18.9)–(18.11) обобщаются на любое конечное количество переменных (зависимых и независимых).

Пример 1. Найти $\frac{dz}{dt}$ двумя способами (свести к функции одной переменной t и по формуле (18.9)), если $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, где $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Решение. *1-й способ.* Подставив вместо x, y заданные выражения,

получим: $z = \ln\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$ – функцию одной переменной t. Тогда

$$\frac{dz}{dt} = \left(\ln\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\right)'_t;$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-2\cos t\sin t + 2\sin t\cos t);$$

$$\frac{dz}{dt} = -2\cos t\sin t + 2\sin t\cos t = 0.$$

2-й способ. Найдем частные производные по x и y функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Вычисляем производные функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = \cos t.$$

По формуле (18.9) получаем:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2x\sin t}{x^2 + y^2} + \frac{2y\cos t}{x^2 + y^2}.$$

Заменив x и y их выражениями через t, получим:

$$\frac{dz}{dt} = -2\cos t\sin t + 2\sin t\cos t = 0.$$

Пример 2. Вычислить $\frac{dz}{dt}$ в точке $t_0 = \frac{p}{4}$, если $z = \ln\sqrt{\frac{x}{y}}$, где $x = \mathrm{tg}^2 t$, $y = \mathrm{ctg}^2 t$.

Решение. Находим частные производные заданной функции $z(x,y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2y}.$$

Вычисляем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\mathrm{tg}t}{\cos^2 t}; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2\mathrm{ctg}t}{\sin^2 t}.$$

По формуле (18.9) получаем:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\mathrm{tg}t}{x\cos^2 t} + \frac{\mathrm{ctg}t}{y\sin^2 t}.$$

Делаем замену переменных:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{\operatorname{tg}t\cos^2 t}+\frac{1}{\operatorname{ctg}t\sin^2 t}=\frac{1}{\sin t\cos t}+\frac{1}{\sin t\cos t}=\frac{4}{2\sin t\cos t}=\frac{4}{\sin 2t}.$$

Вычислим значение $\dfrac{dz}{dt}$ в точке $t_0=\dfrac{p}{4}$:

$$z'\left(\frac{p}{4}\right)=\frac{4}{\sin 2\cdot\dfrac{p}{4}}=4.$$

Пример 3. Вычислить различными способами z'_x функции $z=(\sin x)^y$, где $y=\operatorname{tg}x$.

Решение. *1-й способ*. Используем метод логарифмического дифференцирования. Прологарифмируем равенство, задающее функцию:

$$\ln z=\ln(\sin x)^y \text{ или } \ln z=y\ln(\sin x).$$

Дифференцируем по x полученное равенство, считая $z=z(x)$:

$$(\ln z)'_x=\left(y\ln(\sin x)\right)'_x;$$

$$\frac{z'_x}{z}=y'_x\ln\sin x+y(\ln\sin x)'_x;\quad z'_x=z\left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}+\frac{y\cos x}{\sin x}\right).$$

Подставляя вместо z и y заданные выражения из условия, получаем:

$$z'_x=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}\left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}+1\right).$$

2-й способ. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y(\sin x)^{y-1}\cos x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=(\sin x)^y\ln(\sin x).$$

Вычисляем производную функции y:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теперь по формуле (18.10) получаем:

$$z'_x=y(\sin x)^{y-1}\cos x+\frac{(\sin x)^y\ln(\sin x)}{\cos^2 x}=(\sin x)^y\left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}+y\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

или $z'_x=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}\left(\dfrac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}+1\right).$

Пример 4. Найти z'_u, z'_v функции $z=2x^2+y^3$, если $x=e^{uv}$, $y=u^2-v^2$.

Решение. Используя формулу (18.11), найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x,\quad \frac{\partial x}{\partial u}=e^{uv}v,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=e^{uv}u;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2,\quad \frac{\partial y}{\partial u}=2u,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=-2v.$$

По формуле (18.11) получим:

$$z'_u=4xve^{uv}+6\acute{o}^2u,\qquad z'_v=4xue^{uv}-6y^2v$$

или

$$z'_u=4ve^{2uv}+6u\left(u^2-v^2\right)^2,\qquad z'_v=4ue^{2uv}-6v\left(u^2-v^2\right)^2.$$

Заметим, что этот пример можно решать и вторым способом – вначале подставить вместо x, y их выражения через u, v, а затем – найти частные производные по u, v.

Пример 5. Найти u'_x функции $u=\sqrt{xyz}$, где $y=\sin x$, $z=\cos x$ при $x_0=\dfrac{p}{4}$.

Решение. *1-й способ*. Подставив в исходную функцию $y=\sin x$, $z=\cos x$, получим функцию одной переменной:

$$u=\sqrt{x\cos x\sin x}.$$

Дифференцируем по x:

$$u'_x=\frac{(x\cos x\sin x)'}{2\sqrt{x\cos x\sin x}}=\frac{(x2\cos x\sin x)'}{4\sqrt{x\cos x\sin x}}=\frac{(x\sin 2x)'}{2\sqrt{2}\sqrt{x\sin 2x}}=\frac{\sin 2x+2x\cos 2x}{2\sqrt{2}\sqrt{x\sin 2x}}.$$

2-й способ. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}},$$

а также производные:

$$\frac{dy}{dx}=\cos x,\quad \frac{dz}{dx}=-\sin x.$$

По формуле (18.10) получаем:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}}\cos x-\frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}}\sin x.$$

После замены переменных получим:

$$u'_x=\frac{du}{dx}=\frac{\sin x\cos x+x\cos^2 x-x\sin^2 x}{2\sqrt{x\sin x\cos x}}=\frac{\sin 2x+2x\cos 2x}{2\sqrt{2}\sqrt{x\sin 2x}}.$$

Пришли к такому же аналитическому выражению для u'_x, что и в первом способе решения.

Вычислим u'_x в точке $x_0 = \frac{p}{4}$:

$$u'_x\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{\sin 2\cdot\frac{p}{4} + 2\cdot\frac{p}{4}\cos 2\cdot\frac{p}{4}}{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{p}{4}\sin 2\cdot\frac{p}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2p}}.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите $\frac{dz}{dx}$ функции, при $x = x_0$:

1) $z = \frac{xy}{x+y}$, где $y = 3 - x$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

2) $z = x^3 y$, где $y = \sin x$, $x_0 = \frac{p}{2}$.

1.2. Найдите $\frac{dz}{dt}$ функции $z = \frac{1}{3}\ln\frac{x}{y}$, где $x = \cos 3t$, $y = \sin 3t$.

1.3. Найдите частные производные z'_u и z'_v:

1) $z = e^{xy}$, где $x = u + v$, $y = u - v$;

2) $z = x^3 + y^3$, где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$;

3) $z = x^y$, где $x = \sin u$, $y = \cos v$.

1.4. Найдите производную u'_y функции:

1) $u = xy^2z^3$, где $x = \sqrt{y}$, $z = e^y$;

2) $u = e^{y(x+z)}$, где $x = \ln y$, $z = \ln y^2$.

II уровень

2.1. Найдите двумя способами $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial t}$ функции:

1) $z = e^{\frac{y^2}{x}}$, где $x = t\cos t$, $y = t\sin t$;

2) $z = x\mathrm{tg}y$, где $x = \mathrm{tg}\, t$, $y = \mathrm{ctg}t$;

3) $z = ar\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{y}\right)$, где $x = t\sin t$, $y = t\cos t$.

2.2. Найдите $\frac{du}{dx}$ функции u в точке x_0:

1) $u = z\cos y\sin^2 x$, где $y = \sqrt{x}$, $z = \mathrm{ctg}x$, $x_0 = \frac{p}{4}$;

2) $u = y\ln(x^2+1) + z^3$, где $y = x^2$, $z = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $x_0 = 1$;

3) $u = \cos(xy - \cos yz)$, где $y = \frac{1}{\sin x}$, $z = \frac{1}{\cos x}$, $x_0 = \frac{3p}{4}$.

2.3. Найдите частные производные u'_x, u'_y и u'_z функции:

1) $u = t\,e^{x+h}$, где $t = x$, $x = xy$, $h = xyz$;

2) $u = tx\ln(xh)$, где $t = \sqrt{xy}$, $x = \sqrt{yz}$, $h = \sqrt{xz}$.

2.4. Покажите, что функция $z = xe^{y^2-x^2}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{x^2}.$$

III уровень

3.1. Найдите частные производные u'_x, u'_y и u'_z функции в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$:

1) $u = txh$, где $t = x^2 - y^2$, $x = y^2 - z^2$, $h = z^2 - x^2$, $N_0(1;\,1;\,1)$;

2) $u=\dfrac{\sin t-\sin x}{\cos t+\cos h}$, где $t=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\sqrt{y^2+z^2}$, $h=\sqrt{x^2+z^2}$, $N_0(p;p;p)$.

3.2. Вычислите определитель:

1) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial j} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial j} \end{vmatrix}$, если $x=4r\cos^2 j$, $y=2r\sin^2 j$;

2) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial j} & \dfrac{\partial x}{\partial q} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial j} & \dfrac{\partial y}{\partial q} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial j} & \dfrac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix}$, если $x=r\cos j\,\sin q$, $y=2r\sin j\,\sin q$, $z=3r\cos q$;

3) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial h} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial h} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial h} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}$, если $x=xhz$, $y=xh-xhz$, $z=h-xh$.

3.3. Проверьте равенства:

1) $\left(x^2-y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xyz$, если $z=e^y\sqrt{ye^{\frac{x^2}{2y^2}}}$;

2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{3}{x+y+z}$, если $u=\ln\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$;

3) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, если $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}}$.

18.4. Дифференцирование неявных функций

Допустим, что функция $y=y(x)$ задана неявно уравнением

$$F(x;y)=0 \qquad (18.12)$$

и требуется найти $y'(x)$.

1-й способ. Если практически возможно, из (18.12) выражают явно y через x и дифференцируют.

2-й способ. Дифференцируют уравнение (18.12), считая $y=y(x)$, и выражают затем $y'(x)$.

3-й способ. Используют формулу

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}, \qquad (18.13)$$

если $F'_y(x;y)\neq 0$.

Способы 1–2 были рассмотрены в теории дифференцирования функции одной переменной и не всегда являются рациональными.

Производные неявной функции $y=f(x)$ порядка выше первого находят последовательным дифференцированием формулы (18.13), учитывая, что y – функция от x.

Для нахождения частных производных функции $z=z(x;y)$, заданной неявно уравнением

$$F(x;y;z)=0, \qquad (18.14)$$

используют формулы

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}, \qquad (18.15)$$

при условии, что эти производные существуют и $F'_z\neq 0$.

Пример 1. Для функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением $x^3+y^3+1=0$, найти y' всеми возможными способами.

Решение. Используем *1-й способ*. Выражаем y через x и дифференцируем по x:

$$y=\sqrt[3]{-x^3-1};\quad y'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x^3-1)^2}}(-3)x^2=-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(-x^3-1)^2}}.$$

Таким образом, $y' = -\dfrac{x^2}{y^2}$.

Используем *2-й способ*. Продифференцируем по x заданное уравнение, считая $y = y(x)$:

$3x^2 + 3y^2 y'_x = 0.$

Отсюда выражаем y'_x:

$y'_x = -\dfrac{3x^2}{3y^2}$ или $y'_x = -\dfrac{x^2}{y^2}$.

Используем *3-й способ*. Применим формулу (18.13):

$F(x;y) = x^3 + y^3 + 1;$

$F'_x = 3x^2$, $F'_y = 3y^2$.

По формуле (18.13) получаем:

$y'_x = -\dfrac{3x^2}{3y^2}$ или $y'_x = -\dfrac{x^2}{y^2}$.

Вывод: способы 2 и 3 оказались наиболее рациональными.

Пример 2. Найти y' функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\ln y = x + y$.

Решение. Используем *3-й способ*.

$F(x;y) = x + y - \ln y;$

$F'_x = 1$, $F'_y = 1 - \dfrac{1}{y}$.

По формуле (18.13) получаем:

$$y'_x = -\frac{1}{1-\frac{1}{y}} = -\frac{y}{y-1} = \frac{y}{1-y}.$$

Таким образом,

$$y'_x = \frac{y}{1-y}.$$

Пример 3. Найти y' в точке $x = 0$ функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 + y^3 + y\sin x = 1$.

Решение. Вычислим y' по формуле (18.13):

$F(x;y) = x^2 + y^3 + y\sin x - 1$, $F'_x = 2x + y\cos x$, $F'_y = 3y^2 + \sin x$;

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x + y\cos x}{3y^2 + \sin x}.$$

Пусть $x_0 = 0$. Вычислим $y(x_0)$, подставив $x = 0$ в исходное уравнение:

$y^3 + y\sin 0 = 1$, $y = 1$.

Тогда $y'(0) = -\dfrac{1\cdot\cos 0}{3+\sin 0} = -\dfrac{1}{3}$.

Пример 4. Найти $z'_x(M_0)$, $z'_y(M_0)$ функции $z = z(x;y)$, заданной неявно уравнением $x^2 = xyz + 1$, если $M_0(1,1)$.

Решение. Воспользуемся формулой (18.15) для функции

$F(x;y;z) = x^2 - xyz - 1.$

Вычисляем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - yz,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = -xz,\quad \frac{\partial F}{\partial z} = -xy.$$

Тогда по формуле (18.15) имеем:

$$z'_x = -\frac{2x - yz}{-xy} = \frac{2x - yz}{xy};$$

$$z'_y = -\frac{-xz}{-xy} = -\frac{z}{y}.$$

Для заданной точки $M_0(1,1)$ найдем соответствующее значение $z_0 = z(M_0)$. Для этого подставим $x = 1$, $y = 1$ в уравнение, которое задает неявно функцию z: $1 = z + 1$. Получаем $z_0 = 0$. Подставив значения $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ в выражения z'_x и z'_y, получим $z'_x(M_0) = 2$; $z'_y(M_0) = 0$.

Задания

I уровень

1.1. Найдите y' функции:

1) $e^y - x - \sqrt{1+x^2} = 0;$	2) $\ln(1-\cos x) - \sqrt{y} = 0;$
3) $\operatorname{arctg} y + xy = 0;$	4) $\cos(x+y) = \sin\dfrac{x}{y};$

5) $\ln(xy)+x=0$; 6) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+3x^2+2y^3=0$;

7) $3x-2y=e^{y-x}$; 8) $\left(x^2+y^2-3x\right)^2=4\left(x^2+y^2\right)$.

1.2. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции z, заданной неявно уравнением:

1) $x-y-z=e^{4z+1}$; 2) $\sin\dfrac{x-y}{z}=3$;

3) $y^2-xyz+z^3=16$; 4) $x^2+y^2+z^2=4$.

II уровень

2.1. Найдите dz функции, если:

1) $x\ln y+y\ln x+z\ln x=1$; 2) $x=ze^{\frac{z}{y}}$;

3) $y\cos x+x\cos z+z\cos y=1$; 4) $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{z-y}+y-z=0$.

2.2. Дано уравнение $x^y=y^x\ (y\neq x)$. Найдите $y'(x)$ двумя способами.

2.3. Дано уравнение $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)-\dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{2}=0$. Найдите x', если $x=x(y)$.

2.4. Найдите частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0)$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)$ функции:

1) $z^3-xyz+y^2=16$, $M_0(1;\ 4)$;

2) $3xyz+x^2z^2=5(x+y)$, $M_0(1;\ -2)$;

3) $x^3+z^3-9xz=y^3$, $M_0(3;3)$.

2.5. Найдите частные производные функции:

1) $\operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$; 2) $e^{x+y+z}(x+y+z)=1$;

3) $z=x-z\ln\dfrac{z}{y}$; 4) $xy+xz+yz=1$.

III уровень

3.1. Найдите производные функций $x=x(t)$, $y=y(t)$ в точке $t_0=2$, если функции заданы системой уравнений $\begin{cases}2\left(x^2+y^2\right)=t^2,\\ x+y+t=2\end{cases}$ и удовлетворяют условиям $x(2)=1$, $y(2)=-1$.

3.2. Найдите производные $x'(0)$, $z'(0)$ неявных функций $x=x(t)$, $z=z(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0)=-1$, $z(0)=1$ и заданных системой уравнений:

1) $\begin{cases}x+z=-t,\\ x^2+z^2=2-t^2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+2=t^2+z^2,\\ x^2+xt+t^2+z-2=0.\end{cases}$

3.3. Докажите, что неявная функция $z=f(x;y)$, определяемая уравнением $x^2+y^2+z^2=ye^{\frac{y}{z}}$, удовлетворяет уравнению $\left(x^2-y^2-z^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

3.4. Докажите, что неявная функция $x=f(y;z)$, определяемая уравнением $\sqrt{z-2x}+\sqrt{y-4x}=0$, является решением уравнения $2\dfrac{\partial x}{\partial z}+4\dfrac{\partial x}{\partial y}=1$.

3.5. Докажите, что неявная функция $z=f(u;v)$, заданная уравнением $e^{\left(u+\frac{z}{v}\right)\left(v+\frac{z}{v}\right)}=2,$ удовлетворяет уравнению

$$u\frac{\partial z}{\partial u}+v\frac{\partial z}{\partial v}=z-uv.$$

3.6. Найдите дифференциал функции $z=f(x;y;z),$ заданной уравнением $z^3-xz+y=0$ в точке $(3;-2)$ и удовлетворяющей условию $f(3;-2)=2.$

3.7. Найдите дифференциалы функций $x=x(u;v)$ и $y=y(u;v),$ заданных системой уравнений $\begin{cases} x+y=u+v, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\dfrac{u}{v}. \end{cases}$

18.5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением

$z=f(x;y),\ (x;y)\in D\subseteq R^2.$

Тогда ***уравнение касательной плоскости*** в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}(y-y_0)-(z-z_0)=0, \quad (18.16)$$

где $z_0=f(x_0;y_0).$

Нормалью к поверхности в точке $N_0(x_0;y_0;z_0),$ $z_0=f(x_0;y_0),$ называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно к касательной плоскости в этой точке.

Уравнение нормали к поверхности (18.16) в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \quad (18.17)$$

Если поверхность задана уравнением

$$F(x;y;z)=0 \quad (18.18)$$

и в точке $N_0(x_0;y_0;z_0)$ этой поверхности существуют частные производные $\dfrac{\partial F(N_0)}{\partial x},$ $\dfrac{\partial F(N_0)}{\partial y},$ $\dfrac{\partial F(N_0)}{\partial z},$ не равные нулю одновременно, то уравнение касательной плоскости к поверхности (18.18) в точке $N_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$$\frac{\partial F(N_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(N_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(N_0)}{\partial z}(z-z_0)=0. \quad (18.19)$$

Уравнение нормали к поверхности (18.18) в точке $N_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(N_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(N_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(N_0)}. \quad (18.20)$$

Пример 1. Поверхность задана уравнением $z=yx^2+xy^2.$ Составить уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности в точке $M_0(1;1).$

Решение. Найдем частные производные:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy+y^2;\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2xy.$

Их значения в точке $M_0(1;1)$ равны $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}=3,$ $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}=3.$

Найдем соответствующее значение z_0 функции для $M_0(1;1)$: $z_0=2.$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$3(x-1)+3(y-1)-(z-2)=0,$

или

$3x+3y-z-4=0.$

Уравнение нормали:

$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{-1}.$

Пример 2. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3+y^3-3e^z+3=0$ в точке $N_0(1;-1;0).$

Решение. Частные производные имеют вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2;\ \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2;\ \frac{\partial F}{\partial z}=-3e^z.$$

Их значения в точке N_0 равны:

$$\frac{\partial F(N_0)}{\partial x}=3,\ \frac{\partial F(N_0)}{\partial y}=3,\ \frac{\partial F(N_0)}{\partial z}=-3.$$

Тогда уравнение касательной плоскости в точке N_0: $3(x-1)+3(y+1)-3z=0$ или $x+y-z=0.$

Уравнение нормали: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-3}.$

Пример 3. Составить уравнения касательных плоскостей к поверхности $3x^2-2y^2+z^2=9,$ параллельных плоскости $x+y-z=2.$

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=-4y,\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z.$$

Так как касательная плоскость параллельна плоскости $x+y-z=2,$ то справедливо условие параллельности плоскостей:

$$\frac{F'_x(N_0)}{1}=\frac{F'_y(N_0)}{1}=\frac{F'_z(N_0)}{-1},\text{ т. е. } 6x=-4y=-2z.$$

Координаты точек касания найдем из системы уравнений

$$\begin{cases}6x=-4y=-2z,\\ 3x^2-2y^2+z^2=9.\end{cases}$$

Решая систему, получаем: $x=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{5},\ \ y=\mp\dfrac{3\sqrt{30}}{10},\ \ z=\mp\dfrac{3\sqrt{30}}{5}.$

Точки касания имеют координаты:

$$N_1\left(\frac{\sqrt{30}}{5};-\frac{3\sqrt{30}}{10};-\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)\text{ и } N_2\left(-\frac{\sqrt{30}}{5};\frac{3\sqrt{30}}{10};\frac{3\sqrt{30}}{5}\right).$$

Тогда уравнения касательных плоскостей имеют вид:

$$x+y-z-\frac{\sqrt{30}}{2}=0,\ \ x+y-z+\frac{\sqrt{30}}{2}=0.$$

Пример 4. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $z=\dfrac{u}{v},$ где $u=x^y,$ $v=\sqrt{xy}$ в точке $M_0(1;1).$

Решение. Поверхность задана сложной функцией. Найдем частные производные, используя формулы (18.11) (см. § 18.3):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{v}\cdot yx^{y-1}-\frac{u}{v^2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{v}\cdot x^y\cdot\ln x-\frac{u}{v^2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.$$

Их значения в точке $M_0(1;1)$ соответственно равны:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\ \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}=-\frac{1}{2}.$$

Найдем соответствующее значение $z_0: z_0=1.$

Тогда уравнение касательной плоскости:

$$\frac{x-1}{2}-\frac{y-1}{2}-(z-1)=0\text{ или } x-y-2z+2=0.$$

Пример 5. Записать уравнение нормали к поверхности, заданной уравнением $z=e^{y\sin x}$ в точке $N_0\left(-\dfrac{p}{2};\ 1;\ \dfrac{1}{e}\right).$

Решение. Найдем частные производные и вычислим их в точке N_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{y\cdot\sin x}y\cos x,\ \ \frac{\partial z(N_0)}{\partial x}=0,\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=e^{y\cdot\sin x}\sin x,\ \ \frac{\partial z(N_0)}{\partial y}=-\frac{1}{e}.$$

Уравнение нормали в точке N_0:

$$\frac{x+\frac{p}{2}}{0}=\frac{y-1}{-\frac{1}{e}}=\frac{z-\frac{1}{e}}{-1}\text{ или }\frac{x+\frac{p}{2}}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\frac{1}{e}}{e}.$$

Равенство нулю $\dfrac{\partial z(N_0)}{\partial x}$ означает, что касательная плоскость параллельна оси Ox, а нормаль к ней лежит в плоскости $x=-\dfrac{p}{2}.$

Задания

I уровень

1.1. Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной функцией $z=f(x;y)$ в точке $N_0(x_0;y_0;z_0)$:

1) $z=xy,\ N_0(-2;2;2)$;

2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z,\ N_0(-3;2;0)$;

3) $z=x\operatorname{tg}(2y),\ N_0\left(1;\frac{p}{8};1\right)$;

4) $z=x^3+y^3,\ N_0(1;-1;0)$;

5) $z=e^{x+y},\ N_0(1;-1;1)$;

6) $z=x^2+y,\ N_0(1;0;1)$.

1.2. Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $F(x;y;z)=0$ в точке $N_0(x_0;y_0;z_0)$:

1) $z(x+y)(x-yz)=8,\ N_0(3;1;2)$;

2) $4^{\frac{x}{z}}+4^{\frac{y}{z}}=32,\ N_0(2;2;1)$;

3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{16}=0,\ N_0(3;4;4)$.

II уровень

2.1. Найдите уравнения касательных плоскостей к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=16$, перпендикулярных координатным плоскостям.

2.2. Составьте уравнения касательных плоскостей к поверхности $3x^2-y^2+2z^2+114=0$, параллельных:

1) координатным плоскостям; 2) плоскости $x-2y+z=0$.

2.3. Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z=u-v$, где $u=(x-y)^2$, $v=x-2y$, в точке $M_0(1;1)$.

2.4. Найдите точки на поверхности

$$4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0,$$

в которых нормаль к ее поверхности будет:

1) параллельна осям координат;

2) перпендикулярна осям координат.

III уровень

3.1. Определите, в каких точках сферы $x^2+y^2+z^2=1$ касательные плоскости к ней отсекают на осях координат равные отрезки.

3.2. Найдите точки эллипсоида $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, в которых нормаль к его поверхности образует равные углы с осями координат.

3.3. Выясните, является ли плоскость $z=0$ в точке $O(0;0;0)$ касательной:

1) к параболоиду вращения $z=x^2+y^2$;

2) к конусу $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

3) к гиперболическому параболоиду $z=xy$.

3.4. Найдите точки на поверхности

$$x^2+y^2-z^2-2x-2y+2z+2=0,$$

касательная плоскость в которых к данной поверхности будет:

1) параллельна координатным плоскостям;

2) перпендикулярна координатным плоскостям.

3.5. Докажите, что $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos a}{\cos g}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos b}{\cos g}$, где $\cos a$, $\cos b$, $\cos g$ – направляющие косинусы нормали к поверхности $z=\sin(xy)$.

18.6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными второго порядка функции $z=f(x;y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \qquad (18.21)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \qquad (18.22)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \qquad (18.23)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \qquad (18.24)$$

Частные производные (18.21–18.24) обозначают также (соответственно) f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2}.

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и высших порядков.

В частности, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$.

Подобным образом определяются производные высшего порядка функции трех и более переменных.

Частная производная второго порядка и выше, взятая по различным переменным, называется ***смешанной частной производной.***

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка не зависят от порядка дифференцирования, например, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}$.

Дифференциал второго порядка функции $z=f(x;y)$ определяется формулой

$$d^2 z=d(dz). \qquad (18.25)$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и высших порядков.

Справедлива формула

$$d^{n+1}z=d\left(d^n z\right),\ n\in\mathbf{N}. \qquad (18.26)$$

Если функция $z=f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные, и переменные x и y являются независимыми, то дифференциалы второго и третьего порядков вычисляются по формулам:

$$d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2; \qquad (18.27)$$

$$d^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \qquad (18.28)$$

Для всякого $n\in\mathbf{N}$ формула вычисления дифференциала порядка n по форме записи аналогична формуле бинома Ньютона:

$$d^n z=C_n^0\frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n+C_n^1\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy+C_n^2\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2+$$
$$+\ldots+C_n^{n-1}\frac{\partial^n z}{\partial x\partial y^{n-1}}dxdy^{n-1}+C_n^n\frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n. \qquad (18.29)$$

Пример 1. Вычислить частные производные второго порядка функции:

1) $z=x^2y^3$; 2) $z=\ln(\sin xy)+x^y$ в точке $M_0\left(\frac{p}{2};1\right)$.

Решение. 1) Найдем частные производные первого порядка:

$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2$.

Далее дифференцируем полученные производные по x и по y каждую:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^3\right)=2y^3$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2\right)=6x^2y$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2\right)=6xy^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3\right)=6xy^2$.

2) Находим частные производные первого порядка:

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\cos xy}{\sin xy}y+yx^{y-1}=y\mathrm{ctg}xy+yx^{y-1}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\cos xy}{\sin xy}x+x^y\ln x=x\mathrm{ctg}xy+x^y\ln x$.

Полученные равенства дифференцируем еще раз по x и по y:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\mathrm{ctg}xy+yx^{y-1}\right)=y\left(-\frac{1}{\sin^2 xy}y\right)+y(y-1)x^{y-2}=$

$$= -\frac{y^2}{\sin^2 xy} + y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\mathrm{ctg}xy + x^y\ln x\right) = \mathrm{ctg}xy + x\left(-\frac{1}{\sin^2 xy}y\right)+$$

$$+yx^{y-1}\ln x + x^y\frac{1}{x} = \mathrm{ctg}xy - \frac{xy}{\sin^2 xy} + yx^{y-1}\ln x + x^{y-1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\,\mathrm{ctg}xy + yx^{y-1}\right) = \mathrm{ctg}xy + y\left(-\frac{1}{\sin^2 xy}x\right) + x^{y-1} +$$

$$+yx^{y-1}\ln x = \mathrm{ctg}xy - \frac{xy}{\sin^2 xy} + yx^{y-1}\ln x + x^{y-1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\,\mathrm{ctg}xy + x^y \ln x\right) = x\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 xy}x\right) + x^y(\ln x)^2 =$$

$$= x^y(\ln x)^2 - \frac{x^2}{\sin^2 xy}.$$

Найдем значения частных производных в точке $M_0\left(\frac{p}{2};\ 1\right)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{p}{2};1\right) = -\frac{1}{\sin^2\frac{p}{2}} + 1(1-1)\frac{p}{2}^{-1} = -1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(\frac p2;1\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\left(\frac p2;1\right) = \mathrm{ctg}\frac p2 - \frac{\frac p2}{\sin^2\frac p2} + \frac p2^0 \ln\frac p2 + \frac p2^0 =$$

$$= -\frac p2 + \ln\frac p2 + 1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac p2;1\right) = \frac p2\left(\ln\frac p2\right)^2 - \frac{\left(\frac p2\right)^2}{\sin^2\frac p2} = \frac p2 \ln^2\frac p2 - \frac{p}{4}^2.$$

Пример 2. Найти частную производную $\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial z^2\partial y}$ функции $u = e^{\frac{x}{z}}\ln y$.

Решение. Найдем частную производную 1-го порядка $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{e^{\frac{x}{z}}}{y}$.

Продифференцировав полученное равенство дважды по z, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{\frac{x}{z}}}{y}\right) = \frac{e^{\frac{x}{z}}}{y}\left(-\frac{x}{z^2}\right) = -\frac{x}{yz^2}e^{\frac{x}{z}};$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x}{yz^2}e^{\frac{x}{z}}\right) = \frac{2x}{yz^3}e^{\frac{x}{z}} - \frac{x}{yz^2}e^{\frac{x}{z}}\left(-\frac{x}{z^2}\right) =$$

$$= \frac{2x}{yz^3}e^{\frac{x}{z}} + \frac{x^2}{yz^4}e^{\frac{x}{z}} = e^{\frac{x}{z}}\left(\frac{2x}{yz^3} + \frac{x^2}{yz^4}\right).$$

Дифференцируем последнее равенство дважды по x:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial z^2\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{x}{z}}\left(\frac{2x}{yz^3} + \frac{x^2}{yz^4}\right)\right) = e^{\frac{x}{z}}\frac{1}{z}\left(\frac{2x}{yz^3} + \frac{x^2}{yz^4}\right) +$$

$$+e^{\frac{x}{z}}\left(\frac{2}{yz^3} + \frac{2x}{yz^4}\right) = \frac{e^{\frac{x}{z}}}{yz^5}\left(4xz + x^2 + 2z^2\right);$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial z^2\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{\frac{x}{z}}}{yz^5}\left(4xz + x^2 + 2z^2\right)\right) = \frac{e^{\frac{x}{z}}}{yz^5}\cdot\frac{1}{z}\left(4xz + x^2 + 2z^2\right) +$$

$$+\frac{e^{\frac{x}{z}}}{yz^5}(4z + 2x) = \frac{e^{\frac{x}{z}}}{yz^6}\left(x^2 + 2z^2 + 4xz + 2xz + 4z^2\right) = \frac{e^{\frac{x}{z}}}{yz^6}\left(x^2 + 6z^2 + 6xz\right).$$

Пример 3. Найти дифференциал четвертого порядка функции $z = e^y\cos x$ в точке $M_0(0;0)$.

Решение. По формуле (18.29) имеем:

$$d^4 z = C_4^0\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}dx^4 + C_4^1\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}dx^3dy + C_4^2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2 +$$

$$+C_4^3\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3}dxdy^3 + C_4^4\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}dy^4,$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты, которые найдем по формуле

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(n=4,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ или по треугольнику Паскаля.

Формула вычисления d^4z принимает вид:

$$d^4z = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}dx^4 + 4\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}dx^3dy + 6\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}dx^2dy^2 + +4\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3}dxdy^3 + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}dy^4. \quad (18.30)$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y(-\sin x),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -e^y\cos x,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = e^y\sin x,\ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = e^y\cos x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = e^y\cos x;$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial^4 z}{\partial y \partial x^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y\sin x\right) = e^y\sin x;$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 z}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-e^y\cos x\right) = -e^y\cos x;$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = \frac{\partial^4 z}{\partial y^3 \partial x} = \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(-e^y\sin x\right) = -e^y\sin x.$$

Вычислим значения частных производных в точке $M_0(0;0)$:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}(M_0) = 1,\ \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}(M_0) = 0,\ \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}(M_0) = -1,$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3}(M_0) = 0,\ \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}(M_0) = 1.$$

Подставляя все значения в формулу (18.30), получим:

$d^4z(M_0) = dx^4 - 6dx^2dy^2 + dy^4.$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите частные производные второго порядка функции:

1) $z = x^3 - 3x^2y + y^2$; 2) $z = e^y \ln x$;

3) $z = \cos(xy)$; 4) $z = \dfrac{x}{y} + \sin(x+y)$;

5) $z = \ln\left(x + y^2\right)$, в точке $M_0(1;0)$;

6) $z = e^{\frac{x}{\sqrt{y}}}$, в точке $M_0(0;1)$.

1.2. Найдите производную $\dfrac{\partial^6 z}{\partial x^2 \partial y^4}$ функции $z = e^{xy}$.

1.3. Найдите производную $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial z}$ функции $u = e^{\frac{xy}{z}}$.

1.4. Вычислите дифференциалы третьего порядка функции $z = f(x;y)$ в точке M_0:

1) $z = \ln(1+x+y)$, $M_0(0;0)$;

2) $z = (x-y)\cos(x+y)$, $M_0(0;0)$.

II уровень

2.1. Найдите частные производные указанного порядка:

1) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = \cos(x + \sin y)$;

2) $\dfrac{\partial^8 z}{\partial x^4 \partial y^4}$, если $z = x^4\sin y - y^4\sin x$;

3) $\dfrac{\partial^{10} z}{\partial x^4 \partial y^6}$, если $z = \sin 2x \cos y$;

4) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если $u = e^{\sqrt{xyz}}$;

5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, если $u = \left(\dfrac{y}{z}\right)^x$;

6) $\dfrac{\partial^{10} z}{\partial y \partial x^9}$, если $z=\left(x+y^2\right)^{10} \operatorname{tg} y$.

2.2. Найдите дифференциалы второго порядка функции z в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$:

1) $x \operatorname{tg} z-y=0,\ M_0(1;1)$; 2) $x^2+y^2+\ln z=0,\ M_0(1;1)$.

2.3. Найдите дифференциалы указанного порядка функции:

1) $d^2 u$, если $u=x^3 y^2 z+\dfrac{x^3}{y^2 z}$; 2) $d^3 u$, если $u=z^{\frac{x}{y}}$;

3) $d^4 z$, если $z=\dfrac{x-y}{x+y}$; 4) $d^2 z$, если $z=\operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-x y}$.

2.4. Докажите, что для функции $z=x^3 y^2$ справедливо равенство $\dfrac{\partial^5 z\left(\mathrm{M}_0\right)}{\partial y^2 \partial x^3}-\dfrac{\partial^5 z\left(\mathrm{M}_0\right)}{\partial x^3 \partial y^2}=0$, если $\mathrm{M}_0(1;1)$.

III уровень

3.1. Докажите, что указанная функция $z(x; y)$ имеет в точке $O(0;0)$ смешанные частные производные второго порядка, но при этом $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0;\ 0) \neq \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0;\ 0)$:

1) $z(x; y)=\begin{cases} x y \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

2) $z(x; y)=\begin{cases} x y, & \text{ï ðè } |y| \leq x, \\ -x y, & \text{ï ðè } |y|>x.\end{cases}$

3.2. Найдите второй дифференциал функции $z=f(u; v)$ в точке $M(x; y)$, если $u=u(x; y)$, $v=v(x; y)$ – дифференцируемые функции:

1) $z=u^v,\ u=x+y,\ v=x y$;

2) $z=u \sqrt{v},\ u=x+y,\ v=x^2+y^2$;

3) $z=\ln v^u,\ u=x+y,\ v=x$.

3.3. Докажите, что функция $u=\dfrac{1}{2 a \sqrt{p t}} e^{-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{4 a^2 t}}$ (a, x_0 – числа) удовлетворяет уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

3.4. Докажите, что произвольные дважды дифференцируемые функции f и g удовлетворяют уравнениям:

1) $z=f(x+2 t)+g(x-2 t),\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=4 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

2) $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+x g\left(\dfrac{y}{x}\right),\ x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2 x y \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

3) $z=f(x+g(y)),\ \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3.5. Найдите решение $z=z(x; y)$ уравнения:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x$, удовлетворяющее условиям $\begin{cases} z(x; 0)=x^2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x; 0)=x;\end{cases}$

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\sin y$, удовлетворяющее условиям $\begin{cases} z(x; 0)=0, \\ z(0; y)=y.\end{cases}$

3.6. Проверьте равенства:

1) $9\left(z \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)=16\left(z \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)$, если $z=\dfrac{3 y+4 x}{4 x-3 y}$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z=e^{x+\sqrt{y}}$.

18.7. Производная по направлению. Градиент

Производной функции $u=f(x;y;z)$ ***в точке*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***по направлению*** $\bar{l}$ называется предел

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y;z_0+\Delta z)-f(x_0;y_0;z_0)}{\Delta l},$$

где $\bar{l}=\overline{M_0M}$, $M=(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y;z_0+\Delta z)$,

$$\Delta l=\left|\overline{M_0M}\right|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2},$$

если предел существует.

Если функция $u=f(x;y;z)$ дифференцируема, то производная по направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos a+\frac{\partial u}{\partial y}\cos b+\frac{\partial u}{\partial z}\cos g, \qquad (18.31)$$

где $\cos a$, $\cos b$, $\cos g$ – направляющие косинусы вектора $\bar{l}$.

В частности, если $z=f(x;y)$ – функция двух переменных, то формула (18.31) производной по направлению примет вид:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos a+\frac{\partial z}{\partial y}\sin a, \qquad (18.32)$$

где a – угол между вектором $\bar{l}$ и осью *Ox*.

Градиентом функции $u(x;y;z)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ называется вектор

$$\overline{grad\ u}=\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x};\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y};\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right) \qquad (18.33)$$

или, то же самое,

$$\overline{grad\ u}=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Связь между градиентом функции и производной по направлению устанавливает формула

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left|\overline{grad\ u}\right|\cdot\cos j,$$

где j – угол между векторами $\overline{grad\ u}$ и $\bar{l}$.

Градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции. Наибольшее значение производной $\frac{\partial u}{\partial l}$, достигаемое в направление градиента, равно

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left|\overline{grad\ u}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

В частности, если $z=f(x;y)$ – функция двух переменных, то

$$\overline{grad\ z}=\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}.$$

Пример 1. Найти производную функции $z=x^2+\ln y$ в точке $A(1;\ 1)$ по направлению вектора $\bar{l}$, образующего с положительным направлением оси *Ox* угол $a=\frac{p}{6}$.

Решение. Используя формулу (18.32), вычислим частные производные функции *z* в точке *A*:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;\ 1)}=2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;\ 1)}=1.$$

Так как $\cos a=\cos\frac{p}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin a=\sin\frac{p}{6}=\frac{1}{2}$, то

$$\frac{\partial z}{\partial l}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\approx 2,2.$$

Пример 2. Найти производную функции $u=xy-\sqrt{y^2+z^2}$ в точке $A(1;\ 4;\ -3)$ по направлению к точке $B(1;\ 7;\ -4)$.

Решение. Найдем вектор $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}=\bar{l}=(1-1)\bar{i}+(7-4)\bar{j}+(-4+3)\bar{k}=3\bar{j}-\bar{k}.$$

Его направляющие косинусы равны:

$$\cos a=0,\quad \cos b=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \cos g=-\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Найдем значения частных производных функции u в точке $A(1;\ 4;\ -3)$:

$$\frac{\partial u(A)}{\partial x}=y\Big|_{(1;\ 4;\ -3)}=4;$$

$$\frac{\partial u(A)}{\partial y}=x-\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\Bigg|_{(1;\ 4;\ -3)}=1-\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5};$$

$$\frac{\partial u(A)}{\partial z}=-\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\Bigg|_{(1;\ 4;\ -3)}=\frac{3}{5}.$$

Тогда по формуле (18.31) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=4\cdot 0+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=0.$$

Пример 3. Найти длину и направление (указать направляющие косинусы) градиента функции $u=\sin(x+y+z)$ в точке $M(0;\ 0;\ p)$.

Решение. Вычислим частные производные функции u в точке M.

Используем формулу (18.33) при условии, что частные производные вычисляем в заданной точке $(0; 0; p)$.

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x}=\cos(x+y+z)\Big|_{(0;\ 0;\ p)}=\cos p=-1;$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y}=\cos(x+y+z)\Big|_{(0;\ 0;\ p)}=\cos p=-1;$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z}=\cos(x+y+z)\Big|_{(0;\ 0;\ p)}=\cos p=-1.$$

Тогда $\overline{grad\ \ u}\Big|_{(0;\ 0;\ p)}=(-1;-1;-1).$

Вычисляем длину полученного вектора:

$$\left|\overline{grad\ \ u}\right|\Big|_{(0;\ \ 0;\ \ p)}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}.$$

Используем тот факт, что направляющие косинуса равны координатам единичного вектора направления, определяемого вектором дроби. Поэтому

$$\cos a=-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \cos b=-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \cos g=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите производную функции $z=f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ по направлению вектора $\bar{l}$:

1) $z=x^2-3xy-y^2,\ M_0(2;\ 0),\ \bar{l}=3\bar{i}+\bar{j};$
2) $z=\ln\left(x^2+y^2\right),\ M_0(1;\ 1),\ \bar{l}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$
3) $z=\mathrm{tg}x-\sin^2 y,\ M_0\left(\frac{p}{4};\ \frac{p}{6}\right),\ \bar{l}=2\bar{i}+\bar{j};$
4) $z=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ M_0(1;\ 1),\ \bar{l}=6\bar{i}+3\bar{j}.$

1.2. Найдите производную функции $u=\ln\left(y+\sqrt{x^2+z^2}\right)$ в точке $N_0(-3;\ 1;\ 4)$ по направлению вектора $\bar{l}=-\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}.$

1.3. Найдите величину и направление градиента функции $u(x;\ y;\ z)$ в точке $N_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$:

1) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ N_0(0;\ \ 0;\ \ 1);$
2) $u=xy^2z^2-\ln(x-1),\ N_0(2;\ 1;\ 1);$
3) $u=z\ln\left(y^2-x\right),\ N_0(3;\ \ 2;\ \ 1);$
4) $u=yz-\frac{z}{x},\ N_0(-1;\ \ 3;\ \ -4);$
5) $u=\sin(z+2x)-\sqrt{xyz},\ N_0\left(\frac{p}{2};\ \ 3;\ \ \frac{3p}{2}\right).$

II уровень

2.1. Найдите производную указанной функции в точке $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ по направлению к точке $B(x_1;\ y_1;\ z_1)$:

1) $u=\sqrt{xz}+\sqrt{25-y^2},\ A(1;\ \ 0;\ \ 1),\ B(3;\ \ -1;\ \ 3);$

2) $u = xy^2 + \sqrt{xy - z^2}$, $A(1;\ 5;\ -2)$, $B(1;\ 7;\ -4)$;

3) $u = x^3 + \operatorname{arctg}(z - y)$, $A(2;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 4;\ -3)$;

4) $u = \sin\left(\dfrac{x+y}{z}\right)$, $A\left(\dfrac{p}{2};\ \dfrac{3p}{2};\ 4\right)$, $B\left(\dfrac{p}{2}+4;\ \dfrac{3p}{2}+2;\ 3\right)$.

2.2. Найдите величину и направление градиента функции $z = f(x; y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0; y_0)$:

1) $y - x = e^z$, $M_0(0;\ 1)$;

2) $y - z\ln\left(\dfrac{z}{x}\right) = 0$, $M_0(1;\ 0)$;

3) $y\sin x - \cos(z - y) = 0$, $M_0\left(\dfrac{p}{4};\ 0\right)$;

4) $x\sin y + y\sin x + z\sin y = \dfrac{3p}{2}$, $M_0\left(\dfrac{p}{2};\ \dfrac{p}{2}\right)$.

2.3. Найдите угол между градиентами функции $u = \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $A(2;\ 2;\ 1)$ и $B(0;\ 1;\ -3)$.

2.4. Найдите производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0(2; 2)$ в направлении $\bar{l}$, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

III уровень

3.1. Найдите градиент функции $z = \min(x;\ y)$ в точках $A(4;\ 2)$ и $B(2;\ 4)$.

3.2. Определите, в каких точках градиент функции $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ удовлетворяет условию:

1) параллелен оси Oy;

2) перпендикулярен оси Oy;

3) равен нулю.

3.3. Выясните, в каких точках градиент функции $z = x^2 + y^2 - 2xy$ удовлетворяет условию:

1) перпендикулярен прямой $x = y$; 2) равен нулю.

3.4. Определите, в каких точках выполнено равенство $\left|\overline{grad}\ \ln\dfrac{1}{r}\right| = 2$, если $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3.5. Найдите градиент функции $z = z(x;\ y)$, заданной неявно уравнением:

1) $z^3 - 3xyz = 4$; 2) $x + y + z = e^z$; 3) $x + y + z = e^{-x-y-z}$.

3.6. Определите направление наибыстрейшего возрастания функции:

1) $u = \sin(2x + y) + 2\sqrt{xyz}$; 2) $u = \ln(1 - y^2) + x^2yz$;

3) $u = xy - \dfrac{y}{z}$; 4) $u = y^3 + \sqrt{x^2 + z^2}$.

18.8. Экстремумы функций двух переменных

Функция $z = f(x;\ y)$ имеет в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ ***локальный максимум (минимум)***, если существует такая d-окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x;\ y)$ из этой окрестности (отличных от M_0) выполняется неравенство

$$f(x;\ y) < f(x_0;\ y_0) \qquad \big(f(x;\ y) > f(x_0;\ y_0)\big).$$

Максимум и минимум функции называются ее ***экстремумами*** (локальными), а точка M_0, в которой достигается экстремум, называется ***точкой экстремума***.

Необходимое условие экстремума: если в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x;\ y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{18.34}$$

Точки, в которых частные производные существуют и равны нулю, называются ***стационарными***.

Точки из области определения функции, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются ***критическими точками***.

Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Достаточное условие экстремума. Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ – стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x;\ y)$. Обозначим:

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2},\ \ B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y},\ \ C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2},$$

$\Delta = AC - B^2.$

Тогда:

1) если $\Delta > 0,$ то функция имеет в точке M_0 локальный экстремум (максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$);

2) если $\Delta < 0,$ то в точке M_0 функция не имеет экстремума;

3) если $\Delta = 0,$ то в точке M_0 функция может иметь локальный экстремум, а может и не иметь его (нужны дополнительные исследования).

Допустим, что функция $f(x;\ y)$ определена на некотором множестве $D \subseteq R^2$.

Число C называют ***наибольшим значением функции*** (*глобальный максимум*) на множестве D, если

$f(x;\ y) \le \tilde{N}\ \ \forall (x;\ y) \in D,$ записывают так:

$$C = \max_{(x;\ y)\in D} f(x;\ y).$$

Число c называют ***наименьшим значением функции*** (*глобальным минимумом*) на множестве D, если

$f(x;\ y) \ge \tilde{n}\ \ \forall (x;\ y) \in D,$ записывают так:

$$c = \min_{(x;\ y)\in D} f(x;\ y).$$

Теорема Вейерштрасса. Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $\overline{D}$ функция $z = f(x;\ y)$ достигает на этом множестве своего наибольшего и наименьшего значений.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в области $\overline{D}$ нужно:

1) найти критические точки функции, принадлежащие D, и вычислить значение функции в них;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границах области $\overline{D}$;

3) сравнить все полученные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Если область определения функции не является замкнутой, то для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции необходимо:

1) найти критические точки функции, принадлежащие D;

2) исследовать найденные критические точки на экстремум (локальный);

3) вычислить значения функции в точках локального максимума (минимума) и отобрать среди них наибольшее (наименьшее).

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$z = x^2 - 3xy + y^2 - 7x - 2y.$

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 7,\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 2y - 2.$$

Приравниваем их к нулю, чтобы найти стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 7 = 0, \\ -3x + 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим: $x = -4,\ \ y = -5,$ т. е. $M_0(-4;\ -5)$.

Вычисляем значения частных производных второго порядка в точке M_0:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 2;\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3;\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Тогда $\Delta = AC - B^2 = 4 - 9 = -5 < 0.$ Следовательно, в точке $M_0(-4;\ -5)$ экстремума нет.

Пример 2. Найти экстремум функции $z = e^{x-y}\left(x^2 - 2y\right)$.

Решение. Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y}\left(x^2 - 2y\right) + 2xe^{x-y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{x-y}\left(x^2 - 2y\right) - 2e^{x-y}.$$

Стационарные точки:

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 2x = 0, \\ x^2 - 2y + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = \dfrac{3}{2}; \end{cases} \quad M_0\left(1;\ \frac{3}{2}\right).$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x-y}\left(x^2 - 2y\right) + 2xe^{x-y} + 2e^{x-y} + 2xe^{x-y} =$$

$$= e^{x-y}\left(x^2 + 4x - 2y + 2\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^{x-y}\left(x^2 - 2y\right) - 2e^{x-y} - 2xe^{x-y} = e^{x-y}\left(-x^2 - 2x + 2y - 2\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x-y}\left(x^2 - 2y\right) + 2e^{x-y} + 2e^{x-y} = e^{x-y}\left(x^2 - 2y + 4\right).$$

Тогда $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = e^{-\frac{1}{2}}(1 + 4 - 3 + 2) = 4e^{-\frac{1}{2}};$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = e^{-\frac{1}{2}}(-1 - 2 + 3 - 2) = -2e^{-\frac{1}{2}};$$

$$\tilde{N} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) = e^{-\frac{1}{2}}(1 - 3 + 4) = 2e^{-\frac{1}{2}}.$$

Получаем:

$$\Delta = AC - B^2 = 4e^{-\frac{1}{2}} \cdot 2e^{-\frac{1}{2}} - \left(-2e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 8e^{-1} - 4e^{-1} = 4e^{-1} > 0.$$

Поскольку $A = 4e^{-\frac{1}{2}} > 0$, то в точке $M_0\left(1;\ \dfrac{3}{2}\right)$ функция имеет минимум: $z_{\min} = e^{-\frac{1}{2}}(1 - 3) = -2e^{-\frac{1}{2}} \approx -1{,}22.$

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + 3x$ в области $\overline{D}$, ограниченной прямыми $y = x$, $y = 0$, $x = -3$.

Решение. 1) Вычислим частные производные и найдем критические точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x;$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ 2y - x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Получим: $M_1(-2;\ -1)$ – критическая точка, принадлежащая области $\overline{D}$.

Вычислим в ней значение функции:

$$z_1 = z(-2;\ -1) = 4 + 1 - 2 - 6 = -3.$$

2) Исследуем функцию z на границе области $\overline{D}$ (рис. 18.4).

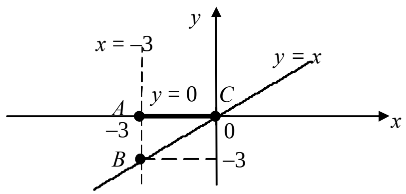


Рис. 18.4

Уравнение границы AB: $x = -3$. Подставляем число –3 вместо x в аналитическое задание функции: $z = y^2 + 3y$, где $y \in [-3;\ 0]$.

Исследуем полученную функцию, как функцию одной переменной, на наибольшее значение.

Найдем критические точки:

$$z'_y = 2y + 3, \quad 2y + 3 = 0.$$

Получаем $y = -\dfrac{3}{2}$ – критическая точка, при этом $-\dfrac{3}{2} \in (-3; 0)$.

Вычисляем значение функции в точке $y = -\dfrac{3}{2}$ и на концах отрезка:

$$z_2 = z\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}; \quad z_3 = z(-3) = z(0) = 0.$$

Уравнение границы BC: $y = x$. На этом участке уравнение функции имеет вид: $z=x^2+3x$, где $x\in[-3;\ 0]$.

Поскольку $z'_x=2x+3$, то для $2x+3=0$ получаем критическую точку $x=-\dfrac{3}{2}$. Тогда

$$z_4=z\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4},\quad z_5=z(-3)=z(0)=0.$$

Уравнение границы AC: $y=0$. Тогда $z=x^2+3x$, где $x\in[-3;\ 0]$. Критическая точка $x=-\dfrac{3}{2}$, принадлежащая $(-3;\ 0)$.

Вычисляем значение функции для $x=-\dfrac{3}{2}$:

$$z_6=z\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4},\quad z_7=z(-3)=z(0)=0.$$

3) Из всех полученных значений z выбираем наименьшее и наибольшее:

$$z_{\text{наим}}=z_1=-3,\quad z_{\text{наиб}}=z_3=z_5=z_7=0.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите экстремум функции:

1) $z=x^2y-x^3y-x^2y^2$;

2) $z=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y}+x$;

3) $z=(x-1)^2+2y^2$;

4) $z=e^{x-y}\left(x^2-2y^2\right)$;

5) $z=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y,\ (x>0,\ y>0)$;

6) $u=2x^2+\dfrac{y^2}{x}+2\dfrac{z^2}{y}-4z$;

7) $u=x^3-x-xy+2y^2+2yz+z^2$.

1.2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z=2xy$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $y=1-x$.

1.3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^3-3x+3y^3-4$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=-1$, $x=2$, $y=-1$, $y=1$.

II уровень

2.1. Исследуйте функцию на экстремум (локальный):

1) $z=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$; 2) $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-x^2-y^2}$;

3) $z=xy\sqrt{4-x^2-y^2}$; 4) $z=\sqrt{(x+y-1)(1-x)(1-y)}$;

5) $u=(2z+y+z)e^{-x^2-y^2-z^2}$.

2.2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции в заданной области:

1) $z=x^2-xy+y^2$ в круге $x^2+y^2\le 4$;

2) $z=\dfrac{x^2+y}{xy}+y$ в области, ограниченной прямыми $x=1$, $y=1$, $2x+2y=3$;

3) $z=\sin(x+y)+\cos x+\cos y$ в области $0\le x\le\dfrac{p}{2}$, $0\le y\le\dfrac{p}{2}$;

4) $z=\cos x\cos y\cos(x+y)$ в области $0\le x\le p$, $0\le y\le p$;

5) $z=x^2-2xy+4y^2$ в области $x^2+y^2\le 2(x+y)$.

III уровень

3.1. Найдите локальные экстремумы функции $z=f(x;\ y)$, заданной неявно:

1) $x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z=10$;

2) $z^3+x^2-xyz=16$;

3) $z^3-xyz+y^2+4x^2-16=0$;

4) $4\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(x^2+y^2-z^2\right)^2$.

3.2. Докажите, что функция $z=\left(x^2-y\right)\left(x^2-2y\right)$:

1) не имеет локального минимума в точке $O(0;\ 0)$;

2) имеет локальный минимум вдоль каждой прямой, проходящей через точку $O(0;\ 0)$.

3.3. Внутри четырехугольника найдите точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

3.4. В данный конус впишите прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

3.5. Проведите к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ касательную плоскость с наименьшей суммой отрезков на осях.

Содержание

Учебное издание

МАТЕМАТИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие
для учащихся колледжей

В шести частях

ЧАСТЬ 3

Майсеня Людмила Иосифовна
Калугина Марина Алексеевна
Уласевич Екатерина Владимировна
Михайлова Наталия Викторовна

Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия в пространстве. Предел и непрерывность функции. Дифференциальное исчисление. Функции многих переменных

Зав. ред.-издат. отд. О. П. Козельская
Редактор Г. Л. Говор
Корректор Н. Г. Михайлова
Компьютерная верстка Н. М. Олейник, А. П. Пучек

План изданий 2007 г. (поз. 20)

Изд. лиц. № 02330/0131735 от 17.02.2004.
Подписано в печать 29.12.2007. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 16,74. Уч.-изд. л. 14,11. Тираж 500 экз. Заказ 237.

Издатель и полиграфическое исполнение Учреждение образования
«Минский государственный высший радиотехнический колледж»
220005, г. Минск, пр-т Независимости, 62.

ISBN 978 985 6851 27 1