МГВРК

МАТЕМАТИКА

в примерах и задачах

Часть 1

под общ. ред.

Л. И. Майсеня

$y = 2x$

$z = x + yi$

$\sin x$ $x = 1$

$\cos x$

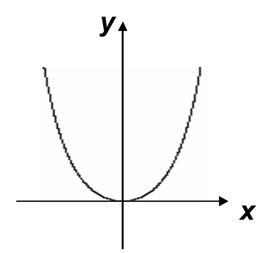
$y = 3 - 2x$

$f(y) = x$

$\log_a b$

$\ln x^2 = 1$

$\mathrm{tg}\, x$



$y = ax + b$

МИНСК 2006

МАТЕМАТИКА в примерах и задачах

1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ВЫСШИЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

МАТЕМАТИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие
для учащихся колледжей

В шести частях

Под общей редакцией Л. И. Майсеня

ЧАСТЬ 1

Алгебраические уравнения и неравенства. Функции. Логарифмы

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для учащихся и студентов специальностей электро-, радиотехники и информатики учреждений, обеспечивающих получение среднего специального и высшего образования

МИНСК 2006

УДК 51
ББК 22.1я7
М34

Рекомендовано к изданию кафедрой математики и Научно-методическим советом Учреждения образования «Минский государственный высший радиотехнический колледж»

А в т о р ы:
Л. И. Майсеня, С. Б. Махнач, Д. И. Радюк, Н. И. Романовская

Р е ц е н з е н т ы:
А. В. Метельский, д-р физ.-мат. наук, профессор БНТУ,
кафедра высшей математики БГУИР

М34 **Математика** в примерах и задачах : учеб. пособие для учащихся колледжей : в 6 ч. / под общ. ред. Л. И. Майсеня. – Мн. : МГВРК, 2006 – .
ISBN 978-985-6754-70-1
Ч. 1 : Алгебраические уравнения и неравенства. Функции. Логарифмы / Л. И. Майсеня, С. Б. Махнач, Д. И. Радюк, Н. И. Романовская. – 2006. – 226 с.
ISBN 978-985-6754-71-8

Пособие написано с целью реализации непрерывного образования в системе учебных заведений колледж–университет. Разработано в соответствии с типовыми программами дисциплин «Математика» для 10-х, 11-х классов средней школы и «Высшая математика» для специальностей электро-, радиотехники и информатики. Содержатся необходимые теоретические сведения, примеры с подробными решениями и задания 3-х уровней сложности для самостоятельного решения.

Может быть также использовано для подготовки учащихся к централизованному тестированию по математике.

УДК 51
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-6754-71-8 (ч. 1)
ISBN 978-985-6754-70-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Особенностью образовательной системы Республики Беларусь является становление и развитие учебных заведений различного типа, в том числе колледжей и высших колледжей. В условиях многоуровневого образования в системе учебных заведений колледж–университет актуальна реализация принципов непрерывности и преемственности в обучении.

Предлагаемое учебное пособие «Математика в примерах и задачах» в 6-ти частях призвано обеспечить процесс изучения математики в высших колледжах и колледжах технического профиля. Оно может быть использовано учащимися на практических занятиях, а также при самостоятельном изучении математики.

При создании настоящего пособия авторы ставили перед собой несколько целей: во-первых, дать значительное количество задач (типовых и оригинальных), которые бы достаточно полно отображали суть основных математических понятий; во-вторых, обеспечить необходимой теоретической информацией для их решений; в-третьих, по каждой теме привести решение основных типов задач; в-четвертых, предлагаемый для решения набор задач распределить по трем уровням сложности. Все эти цели и определили структуру учебного пособия, которое делится на главы, главы – на параграфы. В начале каждого параграфа содержится необходимый справочный материал, затем – решение нескольких задач и набор заданий трех уровней сложности.

Предлагаемая структура учебного пособия, по мнению авторов, делает возможным самостоятельное изучение математики. Его использование позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении – каждый учащийся может решать задания доступного ему уровня сложности.

Пособие разработано и прошло апробацию в УО «Минский

государственный высший радиотехнический колледж» (МГВРК) в процессе обучения учащихся после базовой школы.

Характерной особенностью методического подхода к изучению математики в МГВРК является построение интегрированного курса математических дисциплин. Этим объясняется то обстоятельство, что определенные темы высшей математики введены в контекст элементарной математики. Поскольку на практике широко реализуется непрерывное образование в системе учебных заведений колледж–университет (в том числе МГВРК интегрирован с Белорусским государственным университетом информатики и радиоэлектроники), то при разработке данного учебного пособия авторы использовали (как и в реальном учебном процессе) в качестве типовых программу изучения математики в средних школах Беларуси и программу изучения высшей математики для высших учебных заведений по специальностям электро-, радиотехники и информатики.

Таким образом реализуются основы непрерывного продолжения обучения в университете. Кроме того, предлагаемое учебное пособие может быть использовано в колледжах при изучении математики по различным базовым и рабочим программам – менее или более полным.

Первая часть учебного пособия «Математика в примерах и задачах» состоит из шести глав. В отношении авторства отметим, что главы подготовлены следующим образом:

Л. И. Майсеня – гл. 1 «Введение в курс математики», параграфы 1.1, 1.2;

С. Б. Махнач – гл. 1 «Введение в курс математики», параграф 1.3;

Н. И. Романовская – гл. 2 «Многочлены и рациональные дроби», гл. 3 «Алгебраические уравнения и алгебраические неравенства», гл. 4 «Числовые функции»;

Д. И. Радюк – гл. 5 «Степени и корни», гл. 6 «Показательные и логарифмические выражения».

Научно-методическое редактирование осуществила Л. И. Майсеня, она является соавтором всего пособия.

Авторы надеются, что предлагаемое издание будет содействовать активизации мыслительной деятельности учащихся и повышению эффективности учебного процесса при изучении математики.

1. ВВЕДЕНИЕ В КУРС МАТЕМАТИКИ

1.1. Высказывания. Типы теорем. Метод математической индукции

Под ***простым высказыванием*** понимают утверждение (повествовательное предложение), в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно (но не то и другое вместе).

Высказывания обозначают латинскими буквами $A, B, C, \ldots$, их значения ***истина*** и ***ложь*** соответственно, через «И» и «Л». Сложные высказывания получают из простых при помощи логических операций, к которым относятся ***отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность* (*эквиваленция*)**.

Если A – высказывание, то ***отрицание высказывания А*** определяется как такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно. Отрицание высказывания A обозначается $\overline{A}$ (или $\neg A$) и читается «*не А*».

Истинность-ложность операции ***отрицания*** выражает истинностная таблица 1.1.

Т а б л и ц а 1.1

A	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

Конъюнкцией двух высказываний называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба составляющие ее высказывания истинны.

Если A, B – высказывания, то их конъюнкция обозначается $A \wedge B$ (или A & B) и читается «A и B».

Конъюнкции соответствует истинностная таблица 1.2.

Т а б л и ц а 1.2

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкцией двух высказываний называется такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба составляющие ее высказывания ложны.

Если A, B – два высказывания, то их дизъюнкция обозначается $A \vee B$ и читается «A или B». Союз «или» здесь употребляется в соединительном, а не в разделительном смысле, т. е. для истинности высказывания $A \vee B$ допускается также случай истинности обоих высказываний A, B.

Операции дизъюнкции соответствует истинностная таблица 1.3.

Т а б л и ц а 1.3

A	B	$A \vee B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	И
Л	Л	Л

Импликация высказываний А, В определяется как такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно. Импликация двух высказываний A, B обозначается $A \Rightarrow B$ и читается «если A, то B». Высказывание A называется ***посылкой импликации***, а B – ***заключением***.

Импликации соответствует истинностная таблица 1.4.

Т а б л и ц а 1.4

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И

Эквивалентность двух высказываний A, B определяется как высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания A, B оба истинны или оба ложны. Обозначается $A \Leftrightarrow B$ и читается «A тогда и только тогда, когда B» («если A, то B, и, если B, то A», «A есть необходимое и достаточное условие для B»). Значения эквивалентности определены в истинностной таблице 1.5.

Таблица 1.5

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Если теорема сформулирована в виде $A \Rightarrow B$, то она называется ***признаком*** или ***достаточным условием*** для B, где A, B – некоторые высказывания.

Теорема типа $B \Rightarrow A$ называется ***обратной*** для теоремы $A \Rightarrow B$.

Если теорема имеет вид $A \Leftrightarrow B$, то она называется ***критерием*** или ***необходимым и достаточным условиями*** для B.

Теорема такого типа объединяет прямую и обратную теоремы.

Теорема типа $\overline{B} \Rightarrow A$ называется ***противоположной к обратной теореме***.

Высказывание $A \Rightarrow B$ истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. На этом факте основан ***метод доказательства от противного***.

Для доказательства истинности некоторого утверждения $A(n)$ при всех значениях натуральной переменной n, от которой оно зависит (начиная с n_0, $n_0 \in \mathbf{N}$), часто используют ***метод математической индукции***. Для этого необходимо сделать следующие три шага:

1) непосредственной проверкой убедиться в истинности $A(n_0)$;
2) допустить, что $A(k)$ истинно для любого $k \geq n_0$;
3) доказать, что $A(k + 1)$ истинно для всех $k \in \mathbf{N}$, $k \geq n_0$.

Пример 1. Заданы высказывания:
A: *число 7 больше числа 6*;
B: *число 7 равно числу 6*;
C: *сумма углов треугольника равна* 180°.

Рассмотреть следующие высказывания и установить их значения (И или Л): $\overline{A}$, $\grave{A} \vee \hat{A}$, $\grave{A} \wedge \hat{A}$, $A \Rightarrow B$, $B \Leftrightarrow C$, $\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$, $(\grave{A} \vee \tilde{N}) \Rightarrow \overline{\grave{A}}$.

Решение. $\overline{A}$: *число 7 не больше числа 6*. Это высказывание есть Л, так как A – И.

$\grave{A} \vee \hat{A}$: *число 7 больше или равно числу 6*. Это высказывание является дизъюнкцией высказываний A, B, где A – И, B – Л. Согласно табл. 1.3, оно есть И.

$A \wedge B$: *число 7 больше и равно числу 6*. Это конъюнкция высказываний, где A – И, B – Л. По табл. 1.2 оно есть Л.

$A \Rightarrow C$: *если число 7 больше числа 6, то сумма углов треугольника равна 180°*. Это импликация двух истинных высказываний, а поэтому оно есть И.

$B \Leftrightarrow C$: *число 7 равно числу 6 тогда и только тогда, когда сумма углов треугольника равна 180°*. Поскольку B – Л, C – И, то согласно табл. 1.5 для эквивалентности получаем, что $B \Leftrightarrow C$ есть Л.

$\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$: *если сумма углов треугольника не равна 180°, то число 7 не больше числа 6*. Поскольку рассматривается импликация двух ложных высказываний, то по табл. 1.4 это высказывание есть И.

$(\grave{A} \vee \tilde{N}) \Rightarrow \overline{A}$: *если число 7 больше 6 или сумма углов треугольника равна 180°, то число 7 не равно числу 6*. Высказывание $\grave{A} \vee \tilde{N}$ является И (по табл. 1.3 как дизъюнкция двух истинных высказываний). Высказывание $\overline{B}$ также есть И. Тогда рассматриваемая импликация по своему значению есть И.

Пример 2. Доказать истинность эквивалентности

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B). \tag{1.1}$$

Решение. Для доказательства рассмотрим четыре возможных случая.

1. Пусть оба высказывания A, B есть истина. Тогда согласно таблице истинности 1.4 для импликации, $A \Rightarrow B$ есть И. Поскольку B есть И, то по таблице истинности 1.3 для дизъюнкции $\overline{A} \vee B$ есть И. Значит, высказывания в левой и правой частях истинны, т. е. эквивалентность также есть И.

2. Пусть A является истиной, B – ложное. Тогда импликация $A \Rightarrow B$ есть Л. В правой части эквивалентности (1.1) также имеем ложное высказывание, так как это дизъюнкция двух ложных высказываний. Следовательно, эквивалентность (1.1) является истиной.

3. Пусть A есть ложь, B – истина. Тогда $A \Rightarrow B$ есть И, $\overline{A} \vee B$ – И, а поэтому эквивалентность (1.1) является истинной.

4. Пусть оба высказывания A, B есть Л. Тогда $A \Rightarrow B$ есть И, $\overline{A} \vee B$ – И.

Мы доказали, что во всех возможных случаях исходных значений высказываний A, B эквивалентность (1.1) есть И.

Пример 3. Доказать справедливость формулы

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \tag{1.2}$$

для любого $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Используем метод математической индукции.

1. Проверяем справедливость равенства (1.2) при $n=1$. Для этого в равенстве (1.2) полагаем $n=1$, причем левая часть равенства будет состоять из одного слагаемого:

$2\cdot 1-1=1^2$, $1 = 1$ – выполняется.

2. Допускаем, что для $n = k$ верно утверждение

$$1+3+5+...+(2k-1)=k^2. \qquad (1.3)$$

3. Доказываем его истинность для $n = k + 1$:

Рассмотрим левую часть равенства (1.2):

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(1+3+5+...+2k-1)+2k+1.$$

Используем далее тот факт, что выражение в последних скобках, согласно (1.3), равно k^2. В итоге получаем

$k^2+2k+1=(k+1)^2$.

Правая часть равенства (1.2) для $n = k + 1$ имеет вид: $(k+1)^2$.

Очевидно, что левая и правая части равенства (1.3) при $n = k + 1$ равны.

Так как все три шага математической индукции реализованы, формула верна для любого $n \in \mathbf{N}$.

Пример 4. Найти все натуральные числа n, для которых верно неравенство

$$2^n > n^2. \qquad (1.4)$$

Решение. Утверждение, которое можно было бы доказывать методом математической индукции явно не сформулировано. По этой причине выясним закономерность взаимозависимости величин 2^n и n^2. Придадим последовательно числу n значения 1, 2, 3, 4, 5, 6 и соответственно получим $2^1>1$, $2^2=2^2$, $2^3<3^2$, $2^4=4^2$, $2^5>5^2$, $2^6>6^2$. Таким образом, можно высказать гипотезу: исходное неравенство справедливо для $n = 1$ и каждого натурального $n \geq 5$. Докажем это утверждение.

1. Истинность неравенства (1.4) для $n = 5$ уже доказана.

2. Допустим, что неравенство (1.4) верно для любого $n=k$, $k \geq 5$, $k \in \mathbf{N}$, т. е.

$$2^k > k^2. \qquad (1.5)$$

Используя неравенство (1.5), докажем неравенство

$$2^{k+1} > (k+1)^2. \qquad (1.6)$$

Исходя из неравенства (1.5), имеем:

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k > 2\cdot k^2. \qquad (1.7)$$

Заметим, что $(k-1)^2>2$ для всех натуральных $k \geq 3$, в чем можно убедиться, например, графически, рассмотрев функцию $y=(x-1)^2$ для $x = 3, 4, 5, \ldots$ (рис. 1.1).

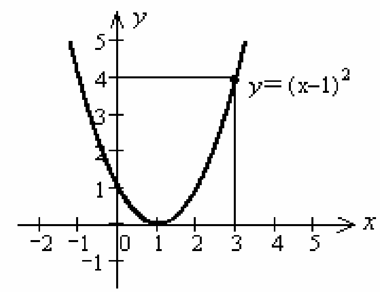


Рис. 1.1

Тогда $k^2>2+2k-1$, или $k^2>2k+1$. Прибавим к обеим частям последнего неравенства k^2. Получим $2k^2>k^2+2k+1$.

Полученное неравенство может быть записано в виде $2k^2>(k+1)^2$. Вместе с неравенством (1.7) оно доказывает справедливость неравенства (1.6).

На основании метода математической индукции приходим к выводу, что исходное неравенство верно для каждого $k \geq 5$, и, кроме этого, непосредственно убедились, что верно и для $n = 1$.

Задания

I уровень

1.1. Укажите, какое предложение определяет высказывание:

1) Пусть всегда будет солнце!
2) Минск – столица Болгарии.
3) Число 7 больше числа 5.
4) Ты идешь сегодня в школу.
5) Выражение x^2 принимает значения больше нуля или равно нулю.

1.2. Определите тип высказывания (простое или сложное):

1) Если сумма углов четырехугольника равна 360°, то четырех-

угольник является квадратом.
2) Квадрат является ромбом.
3) Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда сумма двух его сторон больше третьей стороны.
4) Если высота треугольника проведена к основанию и она является медианой, то треугольник – равнобедренный.
5) Число 15 делится нацело на 7.
6) Если в четырехугольнике стороны попарно параллельны или попарно равны, то такой четырехугольник является параллелограммом.

1.3. Даны высказывания:
1) A: развернутый угол равен 180°.
2) B: число 7 является четным.
3) C: Беларусь – европейская страна.
4) D: Минск – столица Беларуси.
Сформулируйте высказывания:
$A \Rightarrow B,\ \overline{B} \Rightarrow A,\ C \Leftrightarrow D,\ C \Rightarrow (A \vee B)$.

1.4. Определите тип теоремы:
1) Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда две его противоположные стороны параллельны и равны.
2) Если x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.
3) Числа x_1, x_2 являются корнями квадратного трехчлена ax^2+bx+c тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

4) Если окружность вписана в четырехугольник, то суммы противоположных сторон равны.
5) Для того чтобы окружность была вписана в четырехугольник, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны.

1.5. Для теоремы «Если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы» сформулируйте:
1) обратную;
2) противоположную;
3) противоположную к обратной;
4) необходимые и достаточные условия.
Определите значение И или Л сформулированных утверждений.

1.6. Докажите справедливость равенств для всех $n \in \mathbf{N}$:
1) $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;
2) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
3) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

II уровень

2.1. Введите обозначения буквами всех простых высказываний, приведенных в задании 1.2. Запишите символически сложные высказывания с помощью операций над высказываниями. Определите их значение (И или Л).

2.2. Установите, равны ли по значению пары высказываний:
1) $A, \overline{A}$; 2) $A \vee B,\ \overline{A \wedge B}$; 3) $A \wedge B,\ \overline{A \vee B}$.

2.3. Приведите пример конкретных математических высказываний *A, B, C*, которые соответствовали бы содержательно высказываниям:
1) $(A \vee B) \Rightarrow C$; 2) $A \Leftrightarrow (B \wedge C)$.

2.4. Докажите, что сумма первых n чисел натурального ряда равна $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

2.5. Докажите, что для всех $n,\ n \in \mathbf{N}$ верно равенство:

1) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)\cdot n=\dfrac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}$;

2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;

3) $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$.

2.6. Докажите неравенство:

1) $4^n>7n-5$, если $n\in\mathbf{N}$;

2) $2^n>5n+1$, если $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 5$.

III уровень

3.1. Докажите, что высказывания $A\Rightarrow B$, $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$ равны при всех возможных значениях высказываний A, B.

3.2. На вопрос, кто из трех студентов сдал экзамен на «отлично», был получен правдивый ответ: «когда сдал первый, то сдал и третий, но неправда, что если сдал второй, то сдал и третий». Определите, какой студент сдал экзамен на «отлично».

3.3. Выясните истинность высказывания:

1) $\overline{(\overline{A\wedge B})\vee(B\wedge C)}$, если B и C истинны;

2) $(\overline{\overline{A\Rightarrow B}})\wedge(B\vee(\overline{C}\Rightarrow A))$, если A, B – ложны, C – истинно.

3.4. Докажите, что при всех $n\in\mathbf{N}$ выполняется:

1) n^3+2n кратно 3;

2) $7^{2n}-1$ кратно 7;

3) $3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}$ кратно 19;

4) $2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1}$ кратно 37.

3.5. Докажите, что:

1) 7^n+9 кратно 8, если n – нечетное;

2) 3^n+7 кратно 8, если n – четное.

1.2. Множества и операции над ними. Числовые множества. Некоторые обозначения

Множество – первичное неопределяемое понятие. Обозначают множества прописными латинскими буквами A, B, C, X, …. Под множеством понимают совокупность (группу, набор и т. д.) элементов, которые характеризуются одинаковыми свойствами.

Множества изображают ***диаграммами (кругами) Эйлера-Венна*** (рис. 1.2).

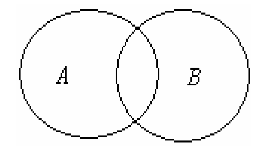


Рис. 1.2

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a\in A$; если элемент a не принадлежит множеству A, то пишут $a\notin A$.

Множество может задаваться с указанием его характеристического свойства. Например, если A состоит из элементов x, для которых выполняется свойство $P(x)$, то пишут $A=\{x|\,P(x)\}$.

Если каждый элемент множества A есть элемент множества B, то множество A называется ***подмножеством*** множества B (или говорят, что A ***включено в*** B), пишут $A\subset B$ (или $B\supset A$) (рис. 1.3). Два множества A, B называются ***равными*** ($A=B$), если они состоят из одних и тех же элементов: $A=B$ тогда и только тогда, когда $A\subset B$ и $B\subset A$. Множество, которое не имеет элементов, называется ***пустым*** и обозначается символом $\varnothing$.

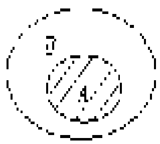
К основным операциям над множествами относят пересечение, объединение, разность, дополнение.

Пересечением множеств A, B называется множество $A\cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B (рис. 1.4).

Объединением множеств A, B называется множество $A\cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат или множеству A, или множеству B (хотя бы одному из множеств A, B) (рис. 1.5).

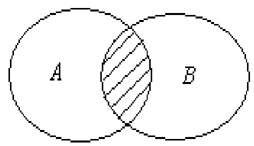
Разностью множеств $A\backslash B$ называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (рис. 1.6).

Дополнением множества A до конкретного (универсального) множества U называется множество $\overline{A}$, которое определяется равенством $\overline{A} = U \setminus A$ (рис. 1.7).



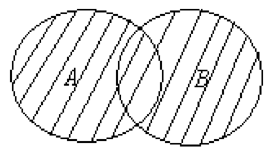
$A \subset B$

Рис. 1.3



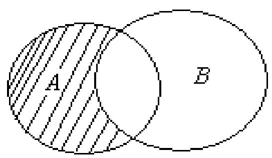
$A \cap B$

Рис. 1.4



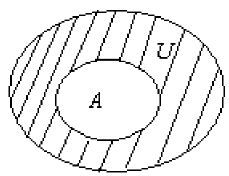
$A \cup B$

Рис. 1.5



$A \backslash B$

Рис. 1.6



$\overline{A}$

Рис. 1.7

Для произвольных множеств A, B, C справедливы свойства:

1) $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность объединения;
2) $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность пересечения;
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – ассоциативность объединения;
4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ – ассоциативность пересечения;
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность;
6) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
7) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
8) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
9) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пусть $m(A), m(B)$ – количество элементов множеств A и B соответственно, тогда справедлива формула

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \qquad (1.8)$$

Рассматривают следующие числовые множества:

1) $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ – ***множество натуральных чисел***;
2) $\mathbf{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ – ***множество целых чисел***;
3) $\mathbf{Q}$ – ***множество рациональных чисел***: это множество всех обыкновенных дробей, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$.

Множество $\mathbf{Q}$ определяется также, как множество всех бесконечных десятичных периодических дробей;

4) $\mathbf{I}$ – ***множество иррациональных чисел***: это множество всех бесконечных десятичных непериодических дробей;
5) $\mathbf{R}$ – ***множество действительных чисел***: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Верны соотношения:

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$.

Произведение первых n натуральных чисел называется ***факториалом***, для него введен специальный символ:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$.

По определению принимают $0! = 1$.

Для всякого $x \in \mathbf{R}$ определены следующие понятия:

$[x]$ – ***целая часть*** (антье) числа x, определяется как целое число такое, что

$[x] \le x \le [x] + 1$;

$\{x\}$ – ***дробная часть*** (мантисса), определяется равенством

$\{x\} = x - [x]$;

$\operatorname{sign} x$ – ***знак числа*** (сигнум), определяется следующим образом:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \text{ åñëè } x > 0, \\ 0, \text{ åñëè } x = 0, \\ -1, \text{ åñëè } x < 0. \end{cases}$$

Если $a_1, a_2, ..., a_n$ некоторые действительные числа, то ***сумму*** этих величин обозначают с использованием ***знака суммы***:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

где k – ***индекс суммирования***.

Свойства суммы:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{p=1}^{n} a_p$ – сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования;

2) $c \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (c \cdot a_k), c = const;$

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k;$

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=2}^{n+1} a_{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$ – свойство сдвига индекса суммирования.

Пример 1. Доказать равенство

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B. \qquad (1.9)$$

Доказательство. Пусть $x \in A \setminus (A \setminus B)$. Согласно определению разности, получаем $x \in A$ и $x \notin (A \setminus B)$. Поскольку выполняются оба эти условия, то это возможно только в случае $x \in B$. Получаем, что $x \in A$ и $x \in B$, т. е. $x \in A \cap B$. Этим мы доказали, что

$$(A \setminus (A \setminus B)) \subset (A \cap B). \qquad (1.10)$$

Допустим, что $x \in (A \cap B)$. Тогда $x \in A$ и $x \in B$, но это означает, что $x \notin (A \setminus B)$.

Два условия $x \in A$ и $x \notin (A \setminus B)$, которые имеют место, означают, что $x \in (A \setminus (A \setminus B))$, т. е.

$$(A \cap B) \subset (A \setminus (A \setminus B)). \qquad (1.11)$$

Равенство (1.9) доказано, поскольку установлена справедливость включений (1.10) и (1.11).

Пример 2. На первом курсе учатся 200 студентов. Из них своевременно сдали зачет по математике 175 человек, а по физике – 185 человек. Не сдали зачет ни по математике, ни по физике 10 человек. Сколько студентов сдали оба зачета?

Решение. Пусть A – множество всех студентов курса; B – множество студентов, которые сдали зачет по математике, C – по физике (рис. 1.8).

Согласно условию задачи, $m(A)=200$, $m(B)=175$, $m(C)=185$, $m(A \setminus (B \cup C)) = 10$ и надо найти $A \cap B$.

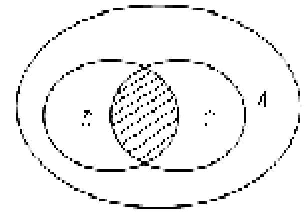


Рис. 1.8

Находим, сколько человек сдали хотя бы один зачет:
$m(A \cup B) = m(A) - m(A \setminus (B \cup C)) = 200 - 10 = 190.$

Используем далее формулу (1.8), из которой выражаем
$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B).$

Получаем
$m(A \cap B) = 185 + 175 - 190 = 170.$

Пример 3. Сократить дробь

$$\frac{(2n-1)!+(2n)!}{(2n+1)!}.$$

Решение. Выделим общий множитель в числителе и знаменателе. Очевидно, что

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n = (2n-1)!2n;$$

$$(2n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1) = (2n-1)!(2n)(2n+1).$$

Поэтому

$$\frac{(2n-1)!+(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{(2n-1)!(1+2n)}{(2n-1)!(2n)(2n+1)} = \frac{1}{2n}.$$

Пример 4. Вычислить сумму

$$\sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-1)!}.$$

Решение. Получим последовательно слагаемые, придавая значения 1, 2, …, 7:

$$\sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^{\left[\frac{1}{2}\right]}}{0!} + \frac{(-1)^{[1]}}{1!} + \frac{(-1)^{\left[\frac{3}{2}\right]}}{2!} + \frac{(-1)^{[2]}}{3!} + \frac{(-1)^{\left[\frac{5}{2}\right]}}{4!} + \frac{(-1)^{[3]}}{5!} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\left[\frac{7}{2}\right]}}{6!} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^1}{2!} + \frac{(-1)^2}{3!} + \frac{(-1)^2}{4!} + \frac{(-1)^3}{5!} + \frac{(-1)^3}{6!} =$$

$$= 1 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} - \frac{1}{720}.$$

Вычисляя, приходим к ответу

$$\sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-1)!} = -\frac{217}{720}.$$

Задания

I уровень

1.1. Пусть $A = [-2, 3]$, $B = (-\infty, 0)$, $C = [0, 4)$. Найдите множество:

1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $B \cup C$; 4) $B \cap C$;
5) $(A \cup B) \cap C$; 6) $A \cup (B \cap C)$; 7) $A / (B \cap C)$.

1.2. Пусть A – множество натуральных делителей числа 15; B – множество простых чисел, меньших 10; C – множество четных чисел, меньших 9. Найдите множество:

1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $B \cap C$;
4) $(A \cup C) \cap B$; 5) $A \cup (C \cap B)$; 6) $A \cap B \cap C$.

1.3. В группе учатся 28 студентов, каждый из которых умеет кататься на лыжах или коньках. При этом 20 человек умеют кататься на лыжах, 15 человек – на коньках. Определите, сколько студентов умеют кататься и на коньках, и на лыжах.

1.4. Задано некоторое количество натуральных чисел, которые кратны или числу 2, или числу 3. Известно, что числу 2 кратны 10 чисел; числу 3 кратны 7 чисел; и числу 2, и числу 3 кратны 4 числа. Определите общее количество заданных чисел.

1.5. Все 25 человек класса сходили в театр или кино. Известно, что 20 человек были в кино, 10 человек – и в театре, и в кино. Сколько человек было в театре?

1.6. Вычислите:

1) $3!+2!$; 2) $\frac{5!}{3!}$; 3) $\frac{(2 \cdot 3)!}{2 \cdot 3!}$; 4) $\frac{(5-2)!}{5!-2!}$.

1.7. Сократите дробь:

1) $\frac{(n+1)!}{2 \cdot n!}$; 2) $\frac{(2n)!}{(2n+1)!}$.

1.8. Определите целую и дробную части числа:

1) 1,02; 2) –1,2; 3) $\frac{3}{2}$;
4) $\frac{3}{28}$; 5) –5,2; 6) 3,25.

1.9. Вычислите выражение:

1) $[2{,}8] + 3[-2{,}8] - 2\{2{,}25\}$; 2) $\frac{\{6{,}25\}}{[5{,}25]} + [-7{,}08]$.

1.10. Запишите сумму, указав каждое слагаемое, и вычислите ее:

1) $\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=2}^{6} \frac{(-1)^n}{n-1}$; 3) $\sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

II уровень

2.1. Запишите, с помощью каких операций над множествами *A, B, C* получено заштрихованное множество на рис. 1.9:

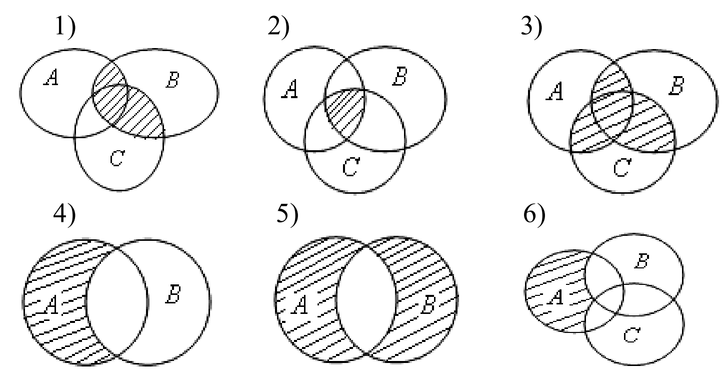


Рис. 1.9

2.2. Пусть $A = [-\infty; 2]$, $B = [-3; 5)$ – подмножества универсального множества $U = \mathbf{R}$. Найдите множество:

1) $A \cup \overline{B}$; 2) $\overline{A} \cap B$; 3) $\overline{A \cup B}$; 4) $\overline{A} \cap \overline{B}$.

2.3. Заданы множества:

$A = \{a_n \mid a_n = 2n,\ n \in \mathbf{N}\}$; $B = \{b_n \mid b_n = 4n - 2,\ n \in \mathbf{N}\}$;

$C = \{c_n \mid c_n = 4n + 2,\ n \in \mathbf{N}\}$.

Найдите множество:

1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $B \setminus C$;

4) $A \setminus B$; 5) $A \cap B \cap C$; 6) $A \cup B \cup C$.

2.4. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на лыжах, и на коньках?

2.5. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский, 45 французский и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

2.6. В штучном отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и коробку конфет. В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

2.7. В первом туре олимпиады участвовали 100 студентов, из них 70 человек получили право участвовать во втором туре олимпиады по физике, 45 – по математике. Известно, что 23 человека могут участвовать во втором туре и по физике, и по математике. Сколько студентов не допущено ко второму туру ни по физике, ни по математике?

2.8. Сравните дроби:

1) $\dfrac{(2n)! - (2n-2)!}{(2n-1)!}$ и $\dfrac{(2n)! + (2n-2)!}{(2n+2)!}$;

2) $\dfrac{(2n-1)! + (2n+1)!}{n(2n)!}$ и $\dfrac{(2n)! + n^2(2n-1)!}{(2n+2)!}$.

2.9. Сократите дробь и упростите полученное выражение:

1) $\dfrac{(n-1)! + 3n!}{(n+1)(n-1)! - (n-2)!}$; 2) $\dfrac{(n-1)! + (n-3)!}{2n^2(n-3)! + (n-2)!}$;

3) $\dfrac{2nn! - 3(n-1)!}{(n+1)! - 4n!}$; 4) $\dfrac{(2n)! + (2n+2)!}{(2n-2)! - (2n)!}$.

III уровень

3.1. Для универсального множества $\mathbf{R}$ рассматриваются подмножества $A = \{x \mid x^2 - 4 \le 0,\ x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x^2 - 6x + 5 > 0,\ x \in \mathbf{R}\}$. Найдите множество:

1) $A \cap \overline{B}$; 2) $\overline{A \cup B}$; 3) $\overline{(A \cap \overline{B})} \setminus B$.

3.2. Докажите включение:

1) $((A \cup B) \setminus C) \subset (A \cup (B \setminus C))$;

2) $((A \cap B) \setminus C) \subset ((A \cup B) \setminus C)$.

3.3. Докажите равенство:

1) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

2) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

3.4. Среди абитуриентов, которые успешно выдержали вступительные экзамены в университет, оценку «отлично» получили: по математике – 48 человек; по физике – 37; по белорусскому языку – 42; по математике или физике – 75; по математике или белорусскому языку – 76; по физике или белорусскому языку – 66; по всем трем дисциплинам – 4. Выясните: 1) сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку; 2) сколько человек получили только одну пятерку.

3.5. В школьной олимпиаде по математике участвовали 100 человек, по физике – 50, по информатике – 48. Когда учеников опросили, в скольких олимпиадах они участвовали, ответ «в двух» дали вдвое меньше человек, чем «в одной», а «в трех» - втрое меньше, чем «в одной». Сколько всего учеников участвовало в этих олимпиадах?

3.6. В олимпиаде по математике принимало участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну – по геометрии и одну – по тригонометрии. Результаты проверки работ представлены в таблице:

Решены задачи	Количество решивших
по алгебре	20
по геометрии	18
по тригонометрии	18
по алгебре и геометрии	7
по алгебре и тригонометрии	8
по геометрии и тригонометрии	9

Известно также, что три человека не справились ни с одной задачей. Сколько учащихся решили все три задачи? Сколько решили ровно две задачи?

3.7. Из 100 абитуриентов на первом экзамене получили отличные и хорошие оценки 80 %, на втором экзамене – 72 %, на третьем – 60 %. Какое может быть наименьшее число абитуриентов, получивших отличные и хорошие оценки на всех трех экзаменах?

3.8. Выясните, при каком натуральном n справедливо неравенство и докажите его методом математической индукции:

1) $2^n < n!$; 2) $n^n > 2^n \cdot n!$; 3) $\frac{4n}{n+1}(n!)^2 > 2n!$.

1.3. Понятие комплексного числа, алгебраическая форма записи

Число вида
$$z = a + ib, \tag{1.12}$$
где a, $b \in \mathbf{R}$, i – ***мнимая единица***, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется ***комплексным числом.***

Число a называется ***действительной частью*** комплексного числа z и обозначается $a = \operatorname{Re} z$; b называется ***мнимой частью*** комплексного числа z и обозначается $b = \operatorname{Im} z$. Запись ком-

плексного числа в виде (1.12) называется ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Если $a = 0, b \neq 0$, то комплексное число называется ***чисто мнимым***; при $b = 0$ получается действительное число.

Множество всех комплексных чисел обозначают **C**. Имеет место: $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

В прямоугольной декартовой системе координат комплексное число $z = a + ib$ изображается точкой M с абсциссой a и ординатой b (рис. 1.10). Между множеством всех точек координатной плоскости и множеством всех комплексных чисел существует взаимно-однозначное соответствие. Координатная плоскость называется ***комплексной плоскостью***. Ось абсцисс называется ***действительной осью***, ось ординат – ***мнимой осью***.

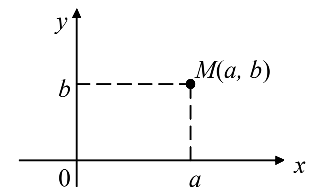


Рис. 1.10

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются ***равными***, если соответственно равны их действительные и мнимые части:
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Если $z = a + ib$, то число $z = a - ib$ называется ***сопряженным*** числу z и обозначается $\bar{z}$:
$$\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib.$$

Сопряженные числа в системе координат изображаются точками, симметричными относительно оси Ox.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, тогда:
$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i; \tag{1.13}$$
$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i; \tag{1.14}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i. \qquad (1.15)$$

Формулы (1.13)–(1.15) показывают, что операции сложения, вычитания и умножения выполняются аналогично таким же действиям над многочленами (с учетом $i^2 = -1$ при умножении).

Для нахождения частного комплексных чисел z_1 и z_2 сначала числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ умножают на сопряженное знаменателю число $\overline{z_2} = a_2 - ib_2$, а затем производят остальные действия:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$
$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 - (b_2 i)^2} = \qquad (1.16)$$
$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Свойства комплексно-сопряженных чисел:

1) $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$; 2) $\overline{(\overline{z})} = z$;

3) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$; 4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; 6) $z = \overline{z} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$.

Пример 1. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если

1) $z = 2$; 2) $z = -3i$; 3) $z = 1 - i + \sqrt{3}$.

Решение. 1) Так как $z = 2 + 0i$, то $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = 0$.

2) Поскольку $z = 0 - 3i$, $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -3$.

3) Запишем число в стандартном виде: $z = (\sqrt{3} + 1) - i$. Поэтому $\operatorname{Re} z = \sqrt{3} + 1$, $\operatorname{Im} z = -1$.

Пример 2. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + i$ и $z_2 = 3 + i$. Найти:

1) $z_1 + z_2$; 2) $z_2 - z_1$; 3) $z_1 \cdot z_2$; 4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. 1) $z_1 + z_2 = -2 + i + 3 + i = (-2 + 3) + i(1 + 1) = 1 + 2i$.

2) $z_2 - z_1 = 3 + i - (-2 + i) = (3 - (-2)) + i(1 - 1) = 5 + 0i = 5$.

3) Перемножим числа z_1 и z_2:

$z_1 \cdot z_2 = (-2 + i)(3 + i) = (-2 \cdot 3 - 1 \cdot 1) + (-2 \cdot 1 + 3 \cdot 1)i = -7 + i$.

4) Для нахождения частного $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2 + i}{3 + i}$ умножим числитель и знаменатель дроби на $3 - i$ (т. е. на число, сопряженное знаменателю). Тогда получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-2 + i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{-6 + 2i + 3i - i^2}{3^2 + 1^2} = \frac{-5 + 5i}{4} = -\frac{5}{4} + \frac{5}{4}i.$$

Пример 3. Найти число, сопряженное числу $z = \frac{2 - i}{3 + i} + 3$.

Решение. Умножив числитель и знаменатель дроби на $3 - i$, получим

$$z = \frac{(2 - i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} + 3 = \frac{6 - 2i - 3i - 1}{9 + 1} + 3 = \frac{5 - 5i}{10} + 3 =$$
$$= \frac{5}{10} - \frac{5}{10}i + 3 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Тогда $\overline{z} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$.

Пример 4. Вычислить i^n для $n \in \mathbf{N}$.

Решение. При вычислении используем, что, согласно определению, $i^2 = -1$. Тогда

$i^1 = i$; $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$;

$i^2 = -1$; $i^6 = -1$;

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$; $i^7 = -i$;

$i^4 = (i^2)^2 = 1$; $i^8 = 1$.

Очевидно, что значения степени повторяются циклически:

$i^{4m+1} = i^{4^m} \cdot i = i$;

$i^{4m+2} = i^{4^m} \cdot i^2 = -1$;

$i^{4m+3} = i^{4^m} \cdot i^3 = -i$;

$i^{4m+4} = i^{4^m} \cdot i^4 = 1$,

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Пример 5. Найти множество точек, для которых $\operatorname{Re} z = 5$.

Решение. Поскольку $\operatorname{Re} z = x$, точки искомого множества лежат на прямой $x = 5$, параллельной мнимой оси (рис. 1.11).

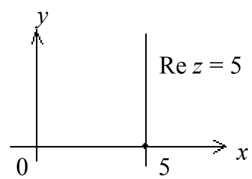


Рис. 1.11

Пример 6. Показать на координатной плоскости множество всех точек, которые находятся на расстоянии, равном 3, от точки $z_0 = 2 - i$.

Решение. Пусть $z = x + iy$ – одна из искомых точек. На плоскости ей соответствует точка с координатами (x, y). Точке z_0 соответствует точка плоскости с координатами $(2, -1)$. В качестве решения задачи подходят все точки, для которых

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 3, \text{ т. е. } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9.$$

Полученному уравнению соответствует множество точек окружности с центром в точке $(2, -1)$ и радиусом 3 (рис. 1.12).

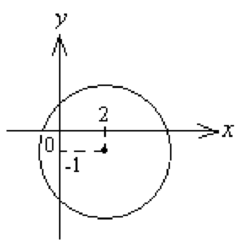


Рис. 1.12

Задания

I уровень

1.1. Укажите действительную и мнимую часть комплексного числа:

1) $-2-3i$; 2) $-i+\sqrt{5}$; 3) $-6i$; 4) $1+\sqrt{3}-(\sqrt{5}+1)i$.

1.2. Найдите сумму и произведение комплексных чисел:

1) $z_1 = 1 + 2\sqrt{6}i$ и $z_2 = 1 - 2\sqrt{6}i$;

2) $z_1 = 4 - 3i$ и $z_2 = 2 + i$;

3) $z_1 = 0{,}2 + 2i$ и $z_2 = -0{,}3 + 3i$.

1.3. Найдите разность и частное комплексных чисел:

1) $z_1 = 2 + 2i$ и $z_2 = 1 - i$;

2) $z_1 = 2\sqrt{5} + \sqrt{6}i$ и $z_2 = 2\sqrt{5} - \sqrt{6}i$;

3) $z_1 = 2i$ и $z_2 = 1 + i$.

1.4. Найдите действительную часть комплексного числа:

1) $(5-6i)(-10+8i)$; 2) $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$;

3) $\dfrac{4}{1-3i}$; 4) $\dfrac{(3+4i)(-1+3i)}{6-8i}$.

1.5. Найдите мнимую часть комплексного числа:

1) $(4-6i)\cdot 0{,}5i$; 2) $\dfrac{4-5i}{-2+7i}$; 3) $\dfrac{-4+6i}{(2+i)(3-2i)}$.

1.6. Выполните действия:

1) $i^3 \cdot i^{81}$; 2) $\dfrac{1}{i^3}$; 3) i^{235};

4) $\dfrac{1}{i^8} - \dfrac{2-i}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$; 5) $(1-6i)(1+2i)^2 - i^{12}$.

1.7. Определите, при каких действительных значениях x и y равны комплексные числа:

1) $z_1 = x^2 + 3y + i$ и $z_2 = xi + y$; 2) $4y + x^2 i = 4i + 2y + x$.

1.8. Проверьте справедливость равенства $z = \left(2 - \dfrac{z+1}{z+7}\right)^2$ при условии $z = 3 + 4i$.

II уровень

2.1. Укажите действительную и мнимую часть комплексного числа:

1) $(1-i)(1+i)\sqrt{3}$; 2) $\dfrac{2+2i}{i}+2$;

3) $\dfrac{6-4i}{(3-2i)(1-i)}+i^3$; 4) $\dfrac{(1+i)^2}{1-\sqrt{3}i}$;

5) $\dfrac{(4-i)^2-(5-2i)^2}{i^{11}}$.

2.2. Выполните действия:

1) $\dfrac{5+12i}{8-6i}+\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$; 2) $(3+i)^3-(3-i)^3$;

3) $\dfrac{(m+ni)(n+mi)}{n-mi}$; 4) $\dfrac{(1+i)^3}{1-i}+\dfrac{1}{i^{10}}$;

5) $\dfrac{(1+i)^3-(1-i)^3}{(1+i)^2-(1-i)^2}$; 6) $(1+i)^4-\dfrac{4-i}{2+i}$;

7) $(2i)^3+\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-2i}$.

2.3. Найдите число, сопряженное данному:

1) $(2+i)(3-i)$; 2) $(1-i)^4$;

3) $\dfrac{2+i}{3i-1}+(2i-1)^2$; 4) $\dfrac{\mathrm{Re}(1+2i)+(1-i)i}{\mathrm{Im}(1-i)}$.

2.4. Определите, при каких действительных значениях x и y равны комплексные числа:

1) $z_1=x^2+xyi-5+i$ и $z_2=xi+y^2+yi$;

2) $z_1=(x-i)^2+y^2$ и $z_2=12+yi+i$.

2.5. Найдите сумму $z+\bar{z}$, если $z=\dfrac{7-2i}{3+2i}+i$.

2.6. Изобразите множество точек z, удовлетворяющих условию:

1) $\mathrm{Im}\,z=-1$; 2) $-1\le \mathrm{Re}\,z<2$;

3) $\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z=1$; 4) $2\,\mathrm{Re}\,z\le \mathrm{Im}\,z$.

III уровень

3.1. Найдите мнимую часть комплексного числа:

1) $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{11}+4$; 2) $z=(1-2i)^6-(1+2i)^6$.

3.2. Найдите действительную часть комплексного числа:

1) $i^{81}+\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 2) $\dfrac{5i-2}{3i+1}+i+\dfrac{8i-3}{2-i}$.

3.3. Считая x и y действительными числами, решите уравнение:

1) $(-1+2i)x-(1-4i)y=2-i$;

2) $(2-7i)x+(4-3i)y=(-6+3i)x-6$;

3) $\dfrac{2+5i}{x-y}-\dfrac{1-3i}{x+y}=\dfrac{-7x+12i}{y^2-x^2}$.

3.4. Выполните действия:

1) $\dfrac{\mathrm{Re}(1-\sqrt{3})+\mathrm{Im}(-1+\sqrt{3}i)}{1-2i}$;

2) $(1-i)^{27}-(1+i)^{27}+\left(\mathrm{Re}(2+i)\right)^3$;

3) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{15}$;

4) $\left(\dfrac{i^{13}-i^{14}}{1+i^{15}}+i^{10}\right)^{12}$.

3.5. Найдите комплексное число из условия $(z+i)(1-2i)+(1-zi)(1-i)=1+i$.

3.6. Изобразите множество точек, удовлетворяющих заданным условиям:

1) $\begin{cases} 0 < \operatorname{Im} z \le \dfrac{3}{2}, \\ -0{,}5 \le \operatorname{Re} z \le 1; \end{cases}$ 2) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 0;$

3) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1.$

3.7. Определите, при каких действительных значениях k комплексное число $(1+ki)^2 - (2+ki)^3$ является:

1) чисто мнимым; 2) действительным.

3.8. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + i, \\ 2z_1 + iz_2 = -2 - i; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4iz_1 - 5z_2 = -4 + 14i, \\ 3z_1 + 2iz_2 = 7 + 3i. \end{cases}$

2. МНОГОЧЛЕНЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

2.1. Формулы сокращенного умножения. Бином Ньютона

Выражения, составленные из чисел и переменных, связанных действиями сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень с рациональным показателем, называются ***алгебраическими выражениями.***

При выполнении преобразований алгебраических выражений используются ***формулы сокращенного умножения***:

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ – квадрат суммы;

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ – квадрат разности;

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ – разность квадратов;

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ – куб суммы;

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ – куб разности;

$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$ – сумма кубов;

$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$ – разность кубов.

Формулы разности квадратов и разности кубов обобщаются на любой натуральный показатель:

$$a^n-b^n=(a-b)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right), \quad n\in\mathbf{N}.$$

Формула суммы кубов обобщается на любой нечетный показатель:

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\cdot\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n}\right), \quad n\in\mathbf{N}.$$

Формулы квадрата и куба суммы являются частными случаями ***формулы бинома Ньютона***:

$$(a+b)^n = a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots+ \\ +\frac{n(n-1)\ldots\left(n-(k-1)\right)}{1\cdot 2\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k+\ldots+b^n. \qquad (2.1)$$

Коэффициенты в формуле бинома Ньютона называются ***биномиальными коэффициентами.***

Биномиальные коэффициенты можно вычислять, используя схему, которая называется ***треугольником Паскаля***. Все строки начинаются и заканчиваются единицей, каждый внутренний элемент строки равен сумме двух соседних элементов в предыдущей строке, стоящих над искомым элементом:

	Показатель степени
1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	5
....	...

(2.2)

Числа в строке с определенным номером n, $n\in\mathbf{N}$, являются последовательными коэффициентами в формуле для данного n.

Формула бинома Ньютона обладает следующими свойствами:

1) в разложении двучлена $(a+b)^n$ по формуле Ньютона содержится $n+1$ член;

2) в разложении $(a+b)^n$ показатель степени a убывает от n до 0, а показатель степени b возрастает от 0 до n;

3) сумма показателей степеней a и b в каждом члене равна n;

4) биномиальные коэффициенты членов, равноудаленных от концов разложения, равны между собой;

5) сумма биномиальных коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна 2^n;

6) сумма биномиальных коэффициентов членов, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах, и равна 2^{n-1}.

Разложение $(a-b)^n$ выполняется по тем же правилам с учетом чередования знаков: «+», «–», «+», «–», «+» … и т. д.

Пример 1. Вычислить, используя формулы сокращенного умножения, значение выражения

$$\frac{33^2-23^2}{18\cdot 22-16\cdot 24}-\left(0{,}85^2-0{,}15^2\right)\cdot 10.$$

Решение. Используем формулу разности квадратов. Заданное выражение приобретает вид:

$$\frac{(33-23)(33+23)}{(20-2)\cdot(20+2)-(20-4)\cdot(20+4)}-(0{,}85-0{,}15)\cdot(0{,}85+0{,}15)\cdot 10=$$

$$=\frac{10\cdot 56}{400-4-400+16}-0{,}7\cdot 1\cdot 10=\frac{560}{14}-7=40-7=33.$$

Пример 2. Известно, что $a+b+c=12$ и $ab+ac+bc=22$. Квадратом какого натурального числа является значение $a^2+b^2+c^2$?

Решение. Так как $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, выражаем: $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$. Далее получаем: $a^2+b^2+c^2=12^2-2\cdot 22=100.$

Если обозначить искомое число через x, то $x^2=100$, т. е. $x=\pm 10$. Поскольку $x\in\mathbf{N}$, то в качестве ответа подходит $x=10$.

Пример 3. Вычислить значение выражения

$$\frac{3xy^4+3x^4y}{5xy^3-5x^3y}\text{ при } y=1{,}6,\ x=-1{,}4.$$

Решение. Упростим выражение, используя формулы суммы кубов и разности квадратов:

$$\frac{3xy^4+3x^4y}{5xy^3-5x^3y}=\frac{3xy\left(y^3+x^3\right)}{5xy\left(y^2-x^2\right)}=\frac{3(y+x)\left(y^2-xy+x^2\right)}{5(y+x)(y-x)}=$$

$$=\frac{3\left(y^2-xy+x^2\right)}{5(y-x)}.$$

При $y=1{,}6$ и $x=-1{,}4$ полученное выражение будет равно

$$\frac{3\cdot\left(1{,}6^2+1{,}6\cdot 1{,}4+1{,}4^2\right)}{5\cdot(1{,}6+1{,}4)}=\frac{2{,}56+(1{,}5+0{,}1)\cdot(1{,}5-0{,}1)+1{,}96}{5}=$$

$$=\frac{4{,}52+1{,}5^2-0{,}1^2}{5}=\frac{4{,}52+2{,}25-0{,}01}{5}=\frac{6{,}76}{5}=\frac{676}{500}=1+\frac{176\cdot 2}{500\cdot 2}=$$

$$=1+\frac{352}{1000}=1{,}352.$$

Пример 4. Разложить выражение $(2a-b)^5$ по формуле бинома Ньютона.

Решение. Используем формулу бинома Ньютона (2.1) и треугольник Паскаля (2.2) с учетом $n=5$.

Разложение будет иметь вид:

$$(2a+b)^5=(2a)^5-5(2a)^4b+10(2a)^3b^2-10(2a)^2b^3+5(2a)b^4-b^5=$$
$$=32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5.$$

Пример 5. Упростить выражение $\dfrac{a^{14}+a^{13}+\ldots+a+1}{a^4+a^3+a^2+a+1}$, используя формулы сокращенного умножения, а затем вычислить его значение для $a=2$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на $(a-1)$ и используем формулу (2.1). Получаем

$$\frac{(a-1)\left(a^{14}+a^{13}+\ldots+a+1\right)}{(a-1)\left(a^4+a^3+a^2+a+1\right)}=\frac{a^{15}-1}{a^5-1}.$$

Далее используем формулу разности кубов:

$$\frac{a^{15}-1}{a^5-1}=\frac{\left(a^5\right)^3-1}{a^5-1}=\frac{\left(a^5-1\right)\left(a^{10}+a^5+1\right)}{a^5-1}=a^{10}+a^5+1.$$

Если $a=2$, то

$$a^{10}+a^5+1=2^{10}+2^5+1=1024+32+1=1057.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите:

1) $\dfrac{(0{,}3)^2-(0{,}7)^2}{0{,}4}-4{,}8\cdot 5{,}2;$ 2) $\dfrac{4\cdot 0{,}1\cdot 3{,}99}{1-(0{,}97)^2}-0{,}725(8);$

3) $\dfrac{19^4}{\left(7\dfrac{1}{4}\right)^3+\left(11\dfrac{3}{4}\right)^3}\cdot\dfrac{1687}{16}.$

1.2. Упростите выражение:

1) $\dfrac{25}{a^2+5a+25}-\dfrac{2a}{5-a}-\dfrac{a^3+25a^2}{a^3-125};$

2) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\left(1-\dfrac{x}{x+y}\right)^{-1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{y}{x-y}\right);$

3) $\dfrac{x^2+(a+b)\cdot x+ab}{x^2-(a-c)\cdot x-ac}\cdot\dfrac{x^2-c^2}{x^2-a^2}$.

1.3. Известно, что $x_1+x_2=\dfrac{7}{5}$ и $x_1\cdot x_2=-\dfrac{1}{5}$. Найдите:

1) $\left(\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}\right)$; 2) $\left(x_1^3+x_2^3\right)$.

1.4. Докажите, что при $a,\ b\in\mathbf{N}$, дробь $\dfrac{(a+b)^4}{a^4+b^4}$ – неправильная.

1.5. Разложите по формуле бинома Ньютона:

1) $(x+y)^8$; 2) $(a+0{,}1\cdot b)^4$; 3) $\left(\sqrt{5}-1\right)^5$.

II уровень

2.1. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(1-2x)^{-2}}{\left(\left(\dfrac{4x^3-4x^2+x}{x+2}\right)^{-1}-\dfrac{2-x}{1-8x^3}\cdot\dfrac{4x^2+2x+1}{2x^2+x}\right)}-\dfrac{x-2}{5}$;

2) $\dfrac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\dfrac{x^2}{4-4x^{-1}+x^2}-\dfrac{4(2x+1)}{x^{-2}(1-2x)}$.

2.2. Известно, что $x_1+x_2=0{,}3$; $x_1\cdot x_2=2$, найдите:

1) $\left|\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}\right|$; 2) $x_1{}^6+x_2{}^6$.

2.3. Докажите, что $\dfrac{2\left(x^4+4x^2-12\right)-x^4-11x^2-30}{x^2-9}>0$, при любых $x\in\mathbf{R}$, $x\neq\pm3$.

2.4. Разложите по формуле бинома Ньютона и упростите полученное выражение:

1) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$; 2) $\left(\dfrac{1}{2}a-3b\right)^6$; 3) $\left(3+\dfrac{1}{3a}\right)^5$.

2.5. Вычислите:

1) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^7$; 2) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)^4$; 3) $\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^6$.

III уровень

3.1. Определите знак выражения при $a>1$:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}+\frac{32}{1+a^{32}}.$$

3.2. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x^{35}+x^{34}+\ldots+x+1}{x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1}$; 2) $\dfrac{a^{29}+a^{28}+\ldots+a+1}{a^9+a^8+\ldots+a+1}$.

3.3. Найдите значение выражения $a-\sqrt{a^2+2}$, если $a+\sqrt{a^2+2}=4$.

3.4. Вычислите значение выражения

$(a+1)\cdot\left(a^2+1\right)\cdot\left(a^4+1\right)\cdot\left(a^8+1\right)\cdot\left(a^{16}+1\right)$ при $a=2$.

3.5. Докажите, что

$x^4-2x^2y-2xy^2+x^2+y^2+y^4>0$ при любых x, y.

3.6. Упростите выражение $(1+2x)^7-(1-2x)^5$.

3.7. Найдите разность между коэффициентом и биномиальным коэффициентом при x^{-5} для выражения $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^9$.

2.2. Многочлены. Действия над многочленами

Выражение вида

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0, \qquad (2.3)$$

где a_n; a_{n-1}; ... ; a_1; $a_0\in\mathbf{R}$, $a_n\neq0$, называется ***многочленом n-й степени*** от одной переменной x, записанным в стандартном виде.

Числа a_n; a_{n-1}; ... ; a_1; a_0 называются ***коэффициентами*** данного многочлена, a_n – ***старшим коэффициентом***, a_0 – ***свободным членом***.

Если необходимо указать степень многочлена $P(x)$, то пишут $P_n(x)$.

Если $a_n = 1$, то $P(x)$ называется ***приведенным многочленом***.

Если кроме $n \in \mathbf{N}$ рассмотреть случай $n = 0$, то многочлен вида $P_0(x) = a_0 x^0 = a_0$ называется ***многочленом нулевой степени***, он есть число.

Каждое слагаемое вида $a_k x^k,\ k = \overline{0,\ n}$ многочлена (2.3) называется ***одночленом.***

Два многочлена, заданные в виде (2.3), называются ***равными***, если равны все их коэффициенты при соответствующих степенях переменной x.

Для всякого многочлена $P_n(x)$ и многочлена $Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ определены следующие операции:

1) ***умножение многочленов*** на число $c \in \mathbf{R}$:

$$cP_n(x) = ca_n x^n + ca_{n-1} x^{n-1} + \ldots + ca_1 x + ca_0;$$

2) ***сложение многочленов***:

$$P_n(x) \pm Q_n(x) = (a_n \pm b_n) x^n + \ldots + (a_1 \pm b_1) x + (a_0 \pm b_0);$$

3) ***умножение многочленов*** производят по следующему правилу: каждый член одного многочлена умножают на каждый член второго многочлена, полученные результаты складывают и приводят подобные;

4) ***деление многочленов*** (при условии, что степень делителя меньше или равна степени делимого) выполняется по правилу «деления углом».

Результат деления записывается в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ или } P(x) = Q(x)S(x) + R(x), \qquad (2.4)$$

где $S(x)$ – частное (многочлен); $R(x)$ – остаток (степень остатка меньше степени делителя).

Многочлен $P(x)$ делится ***нацело*** на $Q(x)$ $(Q(x) \neq 0)$, если $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x)$ или $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$.

Если $Q(x) = x - x_0$, где $x_0 \in \mathbf{R}$, то результат деления многочлена $P(x)$ на $(x - x_0)$, согласно формуле (2.4), можно записать в виде равенства

$$P_n(x) = (x - x_0) S_{n-1}(x) + R_0, \qquad (2.5)$$

где R_0 – число.

Коэффициенты многочлена

$$S_{n-1}(x) = c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \ldots + c_1 x + b_0$$

и остаток R_0 в равенстве (2.5) можно вычислить по ***схеме Горнера***:

$$\begin{aligned} &c_{n-1} = a_n;\ c_{n-2} = a_{n-1} + x_0 c_{n-1};\ c_{n-3} = a_{n-2} + x_0 c_{n-2};\ \ldots \\ &c_0 = a_1 + x_0 c_1;\ R_0 = a_0 + x_0 c_0. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

При вычислении коэффициентов (2.6) используют таблицу:

$x - x_0$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	. . .	a_1	a_0
x_0	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	. . .	c_0	R_0

Верхняя строка заполняется коэффициентами заданного многочлена (2.3), нижняя – числами, которые вычисляют по формулам (2.6).

Число x_0, $x_0 \in \mathbf{R}$ называется ***корнем многочлена*** $P(x)$, если $P(x_0) = 0$.

Число x_0 называется ***корнем кратности k*** многочлена $P_n(x)$, если

$$P_n(x) = (x - x_0)^k S_{n-k}(x) \text{ и } S_{n-k}(x_0) \neq 0.$$

Теорема 1 (*Безу*). *Число x_0 является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится нацело на $(x - x_0)$.*

Теорема 2. *Число R_0 является остатком от деления многочлена $P(x)$ на $(x - x_0)$ тогда и только тогда, когда $R_0 = P(x_0)$.*

Теорема 3. *Пусть $P(x)$ – приведенный многочлен с целыми коэффициентами. Если он имеет целые корни, то они содержатся среди целых делителей свободного члена.*

Представление многочлена $P(x)$ в виде произведения двух или нескольких многочленов (если это возможно) называется ***разложением*** $P(x)$ ***на множители.***

Общий вид разложения $P_n(x)$ на множители:

$$P_n(x) = A(x-x_1)^{n_1} \cdot (x-x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{n_k} \cdot \left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)^{r_1} \cdot \ldots \times$$
$$\times\left(a_mx^2+b_mx+c_m\right)^{r_m},$$

где A, a_1; …; a_m; b_1; …; b_m; c_1; …; $c_m \in \mathbf{R}$ (const);

x_1; x_2; …; x_k – корни многочлена $P_n(x)$;

n_1; n_2; ...; n_k; r_1 ... $r_m \in \mathbf{N}$;

$n_1 + n_2 + \ldots + n_r + 2r_1 + \ldots + 2r_m = n.$

Квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Основные методы разложения:

1) вынесение общего множителя за скобки;

2) метод группировки:

- непосредственно;
- с предварительными преобразованиями слагаемых;

3) использование формул сокращенного умножения;

4) использование формул разложения квадратного трехчлена на множители

$$ax^2+bx+c = \left[\begin{array}{l} a(x-x_1)(x-x_2), \text{если } D>0 \text{ и } x_1,\ x_2 - \text{корни}, \\ a(x-x_0)^2, \text{если } D=0 \text{ и } x_0 - \text{ корень}; \end{array}\right.$$

5) выделение полного квадрата и сведение к разности квадратов;

6) введение новой переменной;

7) поиск корней многочлена среди делителей свободного члена, использование теоремы Безу.

Многочлен может зависеть не только от одной переменной, но и от двух $(P_n(x;y))$; трех $(P_n(x;y;z))$ и т. д. Данные многочлены называются ***многочленами от нескольких переменных***. Тогда их ***одночленом*** называют выражение, представляющее собой произведение чисел и переменных в некоторых степенях. ***Степенью*** одночлена называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных. Старшая степень многочлена нескольких переменных определяется старшей степенью его одночлена.

Многочлен от двух переменных $P(x;y)$ называется ***симметрическим***, если при замене переменных x на y и y на x выражение $P(x;y)$ не меняется.

Над многочленами от нескольких переменных можно выполнять действия, аналогичные действиям над многочленами от одной переменной. Для разложения данных многочленов на множители применяются те же методы, что и для многочленов от одной переменной.

Пример 1. Представить многочлен в стандартном виде, определить его степень:

1) $(x-4)^3+3x^2(2-x)+2x^3$; 2) $-3x^2y(7y^2+3x-8)$

Решение. 1) Раскроем скобки и приведем подобные:

$$(x-4)^3+3x^2(2-x)+2x^3 = x^3-12x^2+48x-64+6x^2-3x^3+2x^3 =$$
$$=-6x^2+48x-64.$$

Данный многочлен является многочленом 2-й степени относительно x.

2) Умножим многочлен на одночлен

$$-3x^2y(7y^2+3x-8) = 3x^2y\cdot 7y^2-3x^2y\cdot 3x+3x^2y\cdot 8.$$

Приведем подобные и получаем многочлен

$$-21x^2y^3-9x^3y+24x^2y,$$

который является многочленом 5-й степени от двух переменных x, y (наибольшее суммарное значение показателей имеем в первом одночлене: 2 + 3 = 5).

Пример 2. Найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)=3x^4-x^3+2x^2-5x-7$ на многочлен $Q(x)=x^2+x-4$. Результат деления записать в виде равенства.

Решение. Воспользуемся правилом «деления углом»:

$$\begin{array}{r|l} -\ 3x^4-x^3+2x^2-5x-7 & x^2+x-4 \\ \underline{3x^4+3x^3-12x^2} \qquad\qquad & \overline{3x^2-4x+18} \\ -\ -4x^3+14x^2-5x-7 & \\ \underline{-4x^3-4x^2+16x} \qquad & \\ -\ 18x^2-21x-7 & \\ \underline{18x^2+18x-72} & \\ -39x+65 & \end{array}$$

Получаем:

$3x^2-4x+18$ – частное (целая часть);

$-39x+65$ – остаток (многочлен 1-й степени).

Тогда

$$\frac{3x^4-x^3+2x^2-5x-7}{x^2+x-4}=3x^2-4x+18-\frac{39x-65}{x^2+x-4}.$$

Пример 3. Проверить, делится ли многочлен $P(x)=x^3+4x^2-3$ нацело на $x-5$. Если нет, то найти значение остатка (не выполняя деления).

Решение. У данного многочлена $P(x)$ свободный член есть число $a_0=-3$. Поскольку число 5 не является делителем числа –3, то $x=5$ – не является корнем многочлена $P(x)$ (см. теорему 3). Значит, согласно теореме 1, $P(x)$ не разделится нацело на $x-5$.

Остаток находим по теореме 2.

$R=P(5)=5^3+4\cdot 5^2-3=222.$

Пример 4. Разложить многочлен на множители:

1) $7x^3+7x^2+14x$; 2) $-x^5+x^4-4x+4$;

3) x^3-11x^2+12; 4) $8x^9-x^6$;

5) $x^4-6x^3+9x^2+4x-12$; 6) $x^3+6x^2+11x+6$;

7) x^4-2x^2-8.

Решение. 1) Используем метод вынесения общего множителя за скобки:

$$7x^3+7x^2+14x=7x\left(x^2+x+2\right).$$

Поскольку у квадратного трехчлена $D<0$, то получен ответ.

2) Воспользуемся методом группировки:

$$-x^5+x^4-4x+4=\left(x^4-x^5\right)+(4-4x)=x^4\cdot(1-x)+4\cdot(1-x)=$$
$$=(1-x)\cdot\left(x^4+4\right).$$

Для дальнейшего разложения выделим полный квадрат и сведем $\left(x^4+4\right)$ к разности квадратов:

$$(1-x)\cdot\left(x^4+4\right)=(1-x)\cdot\left(\left(x^4+4x^2+4\right)-4x^2\right)=$$
$$=(1-x)\cdot\left(\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2\right)=(1-x)\cdot\left(\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2\right)=$$
$$=(1-x)\cdot\left(x^2+2-2x\right)\cdot\left(x^2+2+2x\right).$$

Поскольку дискриминанты квадратных трехчленов отрицательны, окончательно получаем разложение

$$-(x-1)\cdot\left(x^2+2-2x\right)\cdot\left(x^2+2+2x\right).$$

3) Вначале преобразуем данное выражение, а затем используем метод группировки и формулу разности квадратов:

$$x^3-11x^2+12=x^3-12x^2+x^2+12=\left(x^3+x^2\right)-12\cdot\left(x^2-1\right)=$$
$$=x^2\cdot(x+1)-12\cdot(x-1)\cdot(x+1)=(x+1)\cdot\left(x^2-12x+12\right).$$

Вычисляем корни полученного квадратного трехчлена:

$$x_1=\frac{12+4\sqrt{6}}{2}=6+2\sqrt{6},\quad x_2=\frac{12-4\sqrt{6}}{2}=6-2\sqrt{6}.$$

Поэтому $P(x)=(x+1)\cdot\left(x+6+2\sqrt{6}\right)\cdot\left(x+6-2\sqrt{6}\right).$

4) Вынесем общий множитель за скобки и воспользуемся формулой разности кубов:

$$8x^9-x^6=x^6\cdot\left(8x^3-1\right)=x^6\cdot(2x-1)\cdot\left(4x^2+2x+1\right).$$

Получили искомое разложение.

5) Для многочлена $P(x)=x^4-6x^3+9x^2+4x-12$ запишем целые делители свободного члена: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12$ (см. теорему 3). Подставим данные значения вместо $P(x)$, убеждаемся, что $x_0=-1$ является корнем, так как $P(-1)=1+6+9-4-12=0$.

Разделим заданный многочлен на $x+1$:

$$\begin{array}{l|l}
-\;x^4-6x^3+9x^2+4x-12 & x+1 \\
\quad \underline{x^4+x^3} & \overline{x^3-7x^2+16x-12} \\
\qquad -\;-7x^3+9x^2+4x-12 & \\
\qquad\quad \underline{-7x^3-7x^2} & \\
\qquad\qquad -\;16x^2+4x-12 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{16x^2+16x} & \\
\qquad\qquad\qquad -\;-12x-12 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-12x-12} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Получаем $P(x)=(x+1)\cdot\left(x^3-7x^2+16x-12\right).$

Для многочлена $x^3-7x^2+16x-12$ выполним аналогичные действия.

Проверкой делителей свободного члена находим корень 2.

Делим:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;\; -x^3-7x^2+16x-12 & x-2 \\
\underline{x^3-2x^2} \qquad\qquad & \overline{x^2-5x+6} \\
-\;\; -5x^2+16x-12 & \\
\underline{-5x^2+10x} \quad\;\; & \\
-\;\; 6x-12 & \\
\underline{6x-12} & \\
0 &
\end{array}
$$

Тогда $P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x^2-5x\ \ +6\right).$

Квадратный трехчлен x^2-5x+6 разлагаем на множители, используя формулы корней. Окончательно получаем:

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-2)\cdot(x-3)=(x-1)\cdot(x-2)^2\cdot(x-3).$

6) Для многочлена $x^3+6x^2+11x+6$ найдем целый корень среди делителей свободного члена $a_0=6;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6.$ Это число –1. Для дальнейшего разложения воспользуемся схемой Горнера:

	x^3	x^2	x^1	x^0
$x+1$	1	6	11	6
-1	1	5	6	0
	x^2	x^1	x^0	

Таким образом, $x^3+6x^2+11x+6=(x+1)\cdot\left(x^2+5x+6\right).$ Квадратный трехчлен x^2+5x+6 имеет корни $x_1=-2$ и $x_2=-3,$ а потому окончательно получаем:

$P(x)=(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3).$

7) Для разложения многочлена x^4-2x^2-8 воспользуемся методом введения новой переменной. Пусть $x^2=y.$ Тогда имеем $y^2-2y-8.$ Корни этого многочлена – числа 4 и –2. Поэтому $y^2-2y-8=(y-4)\cdot(y+2).$ Возвращаясь к старой переменной, имеем

$x^4-2x^2-8=\left(x^2-4\right)\cdot\left(x^2+2\right)=(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2).$

Пример 5. Найти a и b из заданного равенства и доказать, что $a+b=0$:

$$\frac{2}{7x^2-7x-140}=\frac{a}{7\cdot(x+4)}+\frac{b}{7\cdot(x-5)}.$$

Решение. Приведем правую часть заданного равенства к общему знаменателю:

$$\frac{2}{7x^2-7x-140}=\frac{a\cdot(x-5)+b\cdot(x+4)}{7\cdot(x+4)\cdot(x-5)} \text{ или}$$

$$\frac{2}{7x^2-7x-140}=\frac{ax-5a+bx+4b}{7x^2-7x-140}.$$

Поскольку знаменатели дробей равны, приравняем числители и сгруппируем в правой части коэффициенты при x. Многочлен в правой части запишем в стандартном виде:

$2=(a+b)\cdot x+(4b-5a).$

Из определения равенства многочленов получаем систему и решаем ее:

$$\begin{cases} a+b=0, \\ 4b-5a=2; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-b, \\ 4b+5b=2; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-b, \\ b=\dfrac{2}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\dfrac{2}{9}, \\ b=\dfrac{2}{9}. \end{cases}$$

Находим сумму

$a+b=-\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}=0.$

Доказательство завершено.

Задания

I уровень

1.1. Запишите многочлен в стандартном виде:

1) $(5x-4y)^3-(y+x)^2-x;$ 2) $\left(a^2-b^2\right)^2+\left(a^2+b^2\right)^2.$

1.2. Найдите значение многочлена при $x=x_0$:

1) $P(x)=3x^3+4x^2-2x+1,\ \ x_0=1;$

2) $P(x)=16x^4+0{,}2x-11,\ \ x_0=0{,}2.$

1.3. Выполните деление многочлена $P(x)$, результат запишите в виде равенства:

1) $P(x)=5x^3+3x^2-2x+1$ í à $(x-1);$

2) $P(x)=3x^4+2x^2-x+1$ í à $x.$

1.4. Найдите (если они существуют) целые корни многочлена:

1) $x^3+2x^2+x-4;$ 2) $x^4-x^3+x^2-2x-5.$

1.5. Разложите многочлен на множители:

1) $a^2-2ab+2a-4b$; 2) $72a^5x^4-54a^3x^5+36a^2x^6$;

3) $(2x+1)^3-8$; 4) $y^2-10y+25-4m^2$;

5) $(a-b)^2-(c+d)^2-a+b-c-d$.

II уровень

2.1. Выполните действия, запишите результат в стандартном виде, определите старшую степень многочлена:

1) $\left(-x^2-4x-1\right)\cdot\left(4x^2+x-3\right)$;

2) $\left(-2ax^2xy^4-8y^7\right)\cdot\left(5a^7x-2x^4+3y\right)$.

2.2. Не выполняя деления, проверьте, делится ли данный многочлен $P(x)=x^4+4x^3+x^2-2x+8$ на:

1) $x-1$; 2) $x+2$.

Если не делится, укажите остаток от деления.

2.3. Найдите частное и остаток от деления:

1) $\dfrac{3x^4+x^4-x+1}{x^2+3}$; 2) $\dfrac{7-x^4}{x^3+1}$.

2.4. Выполните действия и найдите значение выражения при $x=-1$:

$$\frac{3x^6+11x^3+x^5+4x^2-4}{x^3+4}-3x^3-2x^2+4.$$

2.5. Найдите коэффициенты A и B из равенства

$$\frac{2}{2x^2+5x-3}=\frac{A}{x-0{,}5}+\frac{B}{x+3}.$$

2.6. Разложите многочлен на множители:

1) $x^3-13x^2+35x+49$; 2) $4b^2-(x^2-b^2-1)^2$;

3) $-2\cdot(x-1)+(x-1)\cdot(x^2-x)$.

III уровень

3.1. Известно, что многочлен $P(x)=x-\lambda x^3-4x+1$ имеет целые корни. Найдите значение λ, при котором они существуют.

3.2. Сократите дробь $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}$.

3.3. Найдите:

1) наибольшее значение выражения $8ab-5a^2-5b^2$ и определите, при каких a и b оно достигается;

2) наименьшее значение многочлена

$2x^2+5x^2+3z^2-6xy-2xz+5yz$.

3.4. Найдите сумму всех целых значений n, при каждом из которых значение выражения:

1) $\dfrac{3n-5}{n+1}$ является целым числом;

2) $\dfrac{6n-9}{2n-1}$ является натуральным числом;

3) $\dfrac{3n^2-16n+23}{n-3}$ является натуральным числом.

3.5. Разложите на множители:

1) $x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3$; 2) p^4+324;

3) x^3-3x-2; 4) $63m^4n^3+27m^3n^4-45m^5n^7$;

5) $7-56a^6b^3$; 6) $x^3-3x^2-16x+48$;

7) $16x^4-1$; 8) $(a+b)^3+(a-b)^3-3a$.

2.3. Рациональные дроби

Рациональной дробью называется выражение вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \qquad (2.7)$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно и $Q_m(x)\neq 0$.

Если для рациональной дроби (2.7) выполняется $n\geq m$, то дробь называется ***неправильной***, если $n<m$ – дробь называется ***правильной***.

Среди рациональных дробей выделяют ***4 типа простейших дробей:***

I. $\dfrac{A}{x-x_0}$; $A,\ x_0 \in \mathbf{R}$;

II. $\dfrac{A}{(x-x_0)^k}$; $k \geq 2,\ k \in \mathbf{N},\ A,\ x_0 \in \mathbf{R}$;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+x+q}$; $A,\ B,\ p,\ q \in \mathbf{R}$ и у квадратного трехчлена $D<0$;

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+x+q)^r}$; $r \geq 2,\ r \in \mathbf{N},\ A, B,\ p,\ q \in \mathbf{R}$ и у квадратного трехчлена $D<0$.

Алгоритм разложения дроби (2.7) **на простейшие дроби:**

1. Если $n \geq m$, необходимо выделить целую часть делением многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен-частное (целая часть);

$\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь.

2. Разложить $Q_m(x)$ на множители:

$$Q_m(x) = (x-a)^k (x-b)^s \ldots (x^2+px+q)^r, \tag{2.8}$$

где $k,\ s,\ \ldots,\ r \in \mathbf{N}$.

3. Если разложение знаменателя имеет вид (2.8), то дробь $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \\ &+ \frac{B_s}{(x-b)^s} + \ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{C_r x + D_r}{(x^2+px+q)^r},\end{aligned} \tag{2.9}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k; B_1, B_2, \ldots, B_s; C_1, \ldots, C_r; D_1, D_r$ – неопределенные коэффициенты, которые необходимо найти.

4. Для нахождения коэффициентов привести правую часть равенства (2.9) к общему знаменателю, который будет равен знаменателю исходной дроби, т. е. $Q_m(x)$.

5. Приравнять числители дробей.

6. Вычислить значения неопределенных коэффициентов A_1; A_2; ... и т. д. Для вычисления данных коэффициентов используют следующие методы:

а) ***метод неопределенных коэффициентов***: многочлены в левой и правой части равенства записать в стандартном виде и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях числителя;

б) ***метод частных значений***: придать произвольные значения переменной x (удобнее использовать значения $x=a$; $x=b$ и т. д.) и получить равенства для исходных коэффициентов;

в) комбинирование методов а) и б).

7. Подставить полученные числовые значения коэффициентов в равенство (2.9), что и будет искомым разложением.

Пример 1. Разложить на простейшие дроби:

1) $\dfrac{x^4+2}{(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-4)}$; 2) $\dfrac{x^2-x+7}{(x+3)^2\cdot(x-4)}$;

3) $\dfrac{x^3}{x^3-8}$; 4) $\dfrac{x^2+9x+1}{x^4+6x^2+8}$;

5) $\dfrac{3-x}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)^2}$.

Решение. 1) Так как дробь $\dfrac{x^4+2}{(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-4)}$ неправильная, выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов. Получим

$$\frac{x^4+2}{(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-4)} = \frac{x^4+2}{x^3-2x^2-11x+12} =$$

$$= x+2+\frac{15x^2+10x-22}{(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-4)}.$$

Для правильной дроби запишем общий вид разложения:

$$\frac{15x^2+10x-22}{(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4} =$$

$$= \frac{A(x+3)\cdot(x-4)+B(x-1)\cdot(x-4)+C(x-1)\cdot(x+3)}{(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-4)}.$$

Так как равны знаменатели, то приравниваем числители:

$$15x^2+10x-22=A(x+3)\cdot(x-4)+B(x-1)\cdot(x-4)+C(x-1)\cdot(x+3).$$

Коэффициенты вычислим методом частных значений. Подставим в последнее выражение последовательно $x = 1$, $x = -3$, $x = 4$.

При $x=1$ получим

$15+10-22=A(1+3)\cdot(1-4)$;

$3=-12A$;

$A=-\frac{1}{4}$.

При $x=-3$ получим

$15\cdot 9-30-22=B\cdot(-3-1)\cdot(-3-7)$;

$83=28B$;

$B=\frac{83}{28}$.

При $x=4$, получим

$15\cdot 16+40-22=C(4-1)\cdot(4+3)$;

$258=21C$;

$C=\frac{258}{21}$.

Таким образом,

$$\frac{x^4+2}{(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-4)}=x+2+\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{8}{23}}{x+3}+\frac{\frac{86}{7}}{x-4}=$$

$$=x+2-\frac{1}{4\cdot(x-1)}+\frac{83}{28\cdot(x+3)}+\frac{86}{7\cdot(x-4)}.$$

2) Запишем общий вид разложения на простейшие дроби соответственно виду множителя знаменателя:

$$\frac{x^2-x+7}{(x+3)^2\cdot(x-4)}=\frac{A_0}{x+3}+\frac{A_1}{(x+3)^2}+\frac{B}{x-4}=$$

$$=\frac{A_1\cdot(x-4)+A_0\cdot(x+3)\cdot(x-4)+B\cdot(x+3)^2}{(x+3)^2\cdot(x-4)}.$$

Найдем коэффициенты A_0, A_1, B_1 методом неопределенных коэффициентов:

$$x^2-x+7=(A_0+B)\cdot x^2+(A_1-A_0+6B)\cdot x+(9B-12A_0-4A_1).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. Получаем

$x^2:\quad A_0+B=1,$

$x:\quad A_1-A_0+6B=-1,$

$x^0:\quad 9B-12A_0-4A_1=7.$

Пришли к системе уравнений:

$$\begin{cases} A_0+B=1, \\ A_1+7B=0, \\ 9b-12A_0-4A_1=7. \end{cases}$$

Решаем ее:

$$\begin{cases} A_0=1-B, \\ A_1=-7B, \\ 9B-12(1-B)+4\cdot 7B=7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0=\frac{30}{49}, \\ A_1=-\frac{19}{7}; \\ B=\frac{19}{49}. \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$\frac{x^2-x+7}{(x+3)^2(x-4)}=\frac{\frac{30}{49}}{x+3}-\frac{\frac{19}{7}}{(x+3)^2}+\frac{\frac{19}{49}}{x-4} \text{ или}$$

$$\frac{x^2-x+7}{(x+3)^2(x-4)}=\frac{30}{49(x+3)}-\frac{19}{7(x+3)^2}+\frac{19}{49(x-4)}.$$

3) Выделим целую часть дроби $\frac{x^3}{x^3-8}$, так как она неправильная:

$$\frac{x^3}{x^3-8}=1+\frac{8}{x^3-8}.$$

Знаменатель полученной правильной дроби $\frac{8}{x^3-8}$ разложим на множители и запишем общий вид разложения:

$$\frac{8}{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+c}{x^2+2x+4}=$$

$$=\frac{A\cdot(x^2+2x+4)+(x-2)\cdot(Bx+c)}{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}.$$

Вычислим коэффициенты, используя метод неопределенных коэффициентов и метод частных значений:

подставим $x=2$:

$$8 = A\cdot\left(x^2+2x+4\right)+(x-2)\cdot(Bx+c);$$

получим

$$8 = A\cdot(4+4+4);$$

$$8 = 12A;$$

$$A=\frac{2}{3}.$$

Запишем многочлен в стандартном виде и используем равенство многочленов:

$$8 = x^2\cdot(A+B)+x\cdot(A-2B+c)+(4A-2C);$$

$$\left.\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x & 2A-2B+C=0, \\ x^0 & 4A-2C=8. \end{array}\right\}$$

При $A=\dfrac{2}{3}$ система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}+B=0, \\ 2\cdot\dfrac{2}{3}-2B+C=0, \\ 4\dfrac{2}{3}-2C=8. \end{cases}$$

Из нее находим:

$$A=\frac{2}{3},\ B=-\frac{2}{3},\ C=-\frac{8}{3}.$$

Поэтому

$$\frac{x^3}{x^3-8}=1+\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}}{x^2+2x+4}=1+\frac{2}{3\cdot(x-2)}-\frac{2x+8}{3\cdot\left(x^2+2x+4\right)}.$$

4) Разлагаем знаменатель дроби $\dfrac{x^2+9x+1}{x^4+6x^2+8}$ на множители:

$$\frac{x^2+9x+1}{x^4+6x^2+8}=\frac{x^2+9x+1}{\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2+4\right)}.$$

Записываем общий вид разложения

$$\frac{x^2+9x+1}{\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2+4\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=$$

$$=\frac{(Ax+B)\cdot\left(x^2+4\right)+(Cx+D)\cdot\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2+4\right)};$$

$$x^2+9x+1=(A+C)\cdot x^3+(B+D)\cdot x^2+(4A+2B)\cdot x+(4B+2D).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях и решаем систему:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+c=0, \\ x^2 & B+D=1, \\ x & 4A+2C=9, \\ x^0 & 4B+2D=1, \end{array} \quad \begin{cases} A=-C, \\ B=1-D, \\ 4(1-D)+2D=1, \\ 4(-C)+2C=9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{9}{2}, \\ B=-\dfrac{1}{2}, \\ D=\dfrac{3}{2}, \\ C=-\dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Получаем

$$\frac{x^2+9x+1}{x^4+6x^2+8}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}{x^2+2}+\frac{-\frac{9}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+4}=\frac{9x-1}{2\cdot\left(x^2+2\right)}-\frac{9x-3}{2\cdot\left(x^2+4\right)}.$$

5) Знаменатель дроби уже разложен на множители. Записываем общий вид разложения на сумму простейших дробей:

$$\frac{3-x}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{A\cdot\left(x^2+x+1\right)^2+(B_1x+C_1)\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)+(B_2x+C_2)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)};$$

$$3-x=A\cdot\left(x^2+x+1\right)^2+(B_1x+C_1)\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)+(B_2x+C_2)\cdot(x-1).$$

При $x=1$ получаем $2=3A;\ A=\dfrac{2}{3}.$

$$3-x=(A+B_1)\cdot x^4+(2A+C_1)\cdot x^3+(3A+B_2)\cdot x^2+$$
$$+(2A-B_1+C_2-B_2)\cdot x+(A-C_1-C_2).$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{c|l} x^4 & A+B_1=0, \\ x^3 & 2A+C_1=0, \\ x^2 & 3A+B_2=0, \\ x^1 & 2A-B_1+C_2-B_2=1, \\ x^0 & A-C_1-C_2=3. \end{array}\right\}$$

При $A=\dfrac{2}{3}$ система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}+B_1=0, \\ 2\cdot\dfrac{2}{3}+C_1=0, \\ 3\cdot\dfrac{2}{3}+B_2=0, \\ 2\cdot\dfrac{2}{3}-B_1+C_2-B_2=1, \\ \dfrac{2}{3}-C_1-C_2=5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{2}{3}, \\ B_1=-\dfrac{2}{3}, \\ C_1=-\dfrac{4}{3}, \\ B_2=-2,- \\ C_2=-3.- \end{cases}$$

Поэтому получаем:

$$\frac{3-x}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)}=\frac{2}{3\cdot(x-1)}-\frac{2x+4}{3\cdot\left(x^2+x+1\right)}-\frac{2x+3}{\left(x_2+x+1\right)^2}.$$

Задания

I уровень

1.1. Запишите общий вид разложения дроби на сумму простейших:

1) $\dfrac{2x}{(x+1)\cdot(x-2)}$; 2) $\dfrac{x^2-3}{(x-4)^2\cdot(x+3)}$;

3) $\dfrac{x^3+x-2}{(x-4)^2\cdot\left(x^2-4\right)}$; 4) $\dfrac{2x+1}{x^3-1}$.

1.2. Разложите на сумму простейших дробей первого типа:

1) $\dfrac{x^2-4x-2}{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}$; 2) $\dfrac{x+3}{(x-4)\cdot(5-x)}$; 3) $\dfrac{4-x}{x\cdot\left(3x^2-27\right)}$.

1.3. Разложите на сумму простейших дробей:

1) $\dfrac{x-1}{(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)}$; 2) $\dfrac{x^2+5}{(x+1)^2\cdot(x-2)}$; 3) $\dfrac{2x+3}{(x-3)^2\cdot(x+1)^2}$.

1.4. Вычислите:

1) $\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot8}+\ldots+\dfrac{1}{98\cdot100}$;

2) $\dfrac{1}{5\cdot8}+\dfrac{1}{8\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot14}+\ldots+\dfrac{1}{23\cdot26}$.

1.5. Найдите коэффициенты A, B, C, D из равенства

$$\frac{7-6x^4}{2x^2+8}=A+Bx^2+\frac{Cx+D}{2x^2+8}.$$

II уровень

2.1. Запишите общий вид разложения дроби на сумму простейших:

1) $\dfrac{x^2-x+1}{\left(x^2+x+5\right)^2\cdot(x-1)^3}$; 2) $\dfrac{2x^2-5}{x^4-6x^3-2x^2-30x-35}$;

3) $\dfrac{2x+1}{\left(x^4+64\right)^2}$; 4) $\dfrac{x^2+2x}{x^4+x^2+1}$.

2.2. Разложите на сумму простейших дробей:

1) $\dfrac{4}{\left(x^3-8\right)\cdot(x+1)}$; 2) $\dfrac{1+x}{\left(x^4-16\right)\cdot\left(x^2+1\right)}$;

3) $\dfrac{x^2-3}{x^6+x^3+8}$; 4) $\dfrac{x^2-x-1}{\left(x^2+3\right)\cdot\left(x^4+5x^2+6\right)}$.

2.3. Разложите на сумму простейших дробей:

1) $\dfrac{x^5-x+3}{\left(x^2+2x+7\right)\cdot(x+2)^2}$; 2) $\dfrac{x^6}{\left(x^2+5\right)\cdot\left(x^2+2\right)^2}$;

3) $\dfrac{1-x^5}{(x+3)\cdot\left(x^3-x^2+12x-252\right)}$. 4) $\dfrac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}$.

III уровень

3.1. Запишите общий вид разложения на сумму простейших дробей:

1) $\dfrac{3x^2-4}{x^8+x^4+1}$; 2) $\dfrac{x^4-4}{x^8+8}\cdot\dfrac{x^4+2x^2+4}{x^4-2x^3+4x^2-4x+4}$.

3.2. Вычислите:

$$\frac{1}{4\cdot7\cdot10}+\frac{1}{7\cdot10\cdot13}+\frac{1}{10\cdot13\cdot16}+\frac{1}{13\cdot16\cdot19}.$$

3.3. Упростите:

$$\frac{1}{x(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+12)}+$$
$$+\frac{1}{(x+12)(x+16)}+\frac{1}{(x+16)(x+20)}.$$

3.4. Докажите, что

$$\frac{1}{6\cdot8}+\frac{1}{8\cdot10}+\frac{1}{10\cdot12}+\ldots+\frac{1}{(2n+4)\cdot(2n+6)}=\frac{n}{12\cdot(n+3)}$$

двумя способами:

1) методом математической индукции;

2) методом разложения на простейшие дроби.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

3.1. Уравнения высших степеней

Уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{3.1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, называется ***уравнением n-й степени.***

Если $n = 1$, уравнение $a_1 x + a_0 = 0$ называется ***линейным.***

Если $n = 2$, уравнение $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ называется ***квадратным.***

Если $a_0 = 0$, уравнение называется ***однородным***.

Основными методами решения уравнений типа (3.1) при $n \geq 3$ являются:

1) метод разложения многочлена в левой части уравнения (3.1) на множители и сведение к равносильной совокупности уравнений;

2) метод замены переменной, в результате применения которого уравнение (3.1) заменяется равносильным уравнением, степень которого ниже, чем n;

3) поиск корней среди делителей свободного члена.

Рассмотрим некоторые виды уравнений (3.1) и их решения.

Уравнения вида $ax^{n+2} + bx^{n+1} + cx^n = 0$ решаются вынесением общего множителя x^n за скобки:

$$x^n\left(ax^2 + bx + c\right) = 0$$

и сведением к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^n = 0, \\ ax^2 + bx + c = 0. \end{array}\right.$$

Уравнение вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \quad a \neq 0, \quad n \geq 2, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{3.2}$$

решается заменой $y = x^n$. Получаем уравнение $ay^2 + by + c = 0$, которое решается, как квадратное. Находим его корни (если такие существуют) и возвращаемся к старой переменной.

При $n = 2$ уравнение (3.2) имеет вид:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ – ***биквадратное уравнение***.

Уравнение

$$\left(x + \alpha\right)^4 + \left(x + \beta\right)^4 = c, \tag{3.3}$$

где $\alpha, \beta, c \in \mathbf{R}$, сводится к биквадратному уравнению заменой $y = \dfrac{\left(x + \alpha\right) + \left(x + \beta\right)}{2}$.

Уравнение

$$\left(x - \alpha\right)\cdot\left(x - \beta\right)\cdot\left(x - \gamma\right)\cdot\left(x - \delta\right) = A, \tag{3.4}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и A таковы, что $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ и $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, сводится к биквадратному уравнению заменой

$$y = \frac{x - \alpha + x - \beta + x - \gamma + x - \delta}{4}.$$

или при $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ к уравнению

$$\left(x^2 + x\cdot\left(\alpha + \beta\right) + \alpha\beta\right)\cdot\left(x^2 + x\cdot\left(\gamma + \delta\right) + \gamma\delta\right) = A$$

заменой

$$x^2 + x\left(\alpha + \beta\right) + \alpha\beta = y.$$

Уравнение

$$\left(ax^2 + b_1 x + c\right)\cdot\left(ax^2 + b_2 x + c\right) = Ax^2, \tag{3.5}$$

где $c \neq 0$ и $A \neq 0$, делением на x^2 (так как $x = 0$ – не является корнем) сводится к равносильному ему уравнению:

$$\left(ax + \frac{c}{x} + b_1\right)\cdot\left(ax + \frac{c}{x} + b_2\right) - A = 0,$$

далее заменой $y = ax + \dfrac{c}{x}$ оно сводится к квадратному уравнению.

Уравнение

$$\left(x - \alpha\right)\cdot\left(x - \beta\right)\cdot\left(x - \gamma\right)\cdot\left(x - \delta\right) = Ax^2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и A таковы, что $\alpha\beta = \gamma\delta \neq 0$, сводится к уравнению вида (3.5) после попарного перемножения выражений в скобках:

$$\left(x^2 - x\cdot\left(\alpha + \beta\right) + \alpha\beta\right)\cdot\left(x^2 - x\cdot\left(\gamma + \delta\right) + \gamma\delta\right) = Ax^2.$$

Уравнения вида

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \qquad (3.6)$$

где $a \neq 0$, называются ***симметрическими уравнениями третьей степени.***

Так как

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = a \cdot \left(x^3 + 1\right) + bx \cdot (x + 1) =$$
$$= (x + 1) \cdot \left(ax^2 + (b - a) \cdot x + 1\right),$$

то уравнение (3.5) равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ ax^2 + (b - a)x + a = 0. \end{array}\right.$$

Уравнения вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \qquad (3.7)$$

где $a \neq 0$, называются ***симметрическими уравнениями четвертой степени***.

Так как $x = 0$ не является корнем уравнения (3.7), то деление обеих частей уравнения (3.7) на x^2 приводит его к уравнению

$$ax^2 + \frac{a}{x^2} + bx + \frac{b}{x} + c = 0 \text{ или}$$

$$a \cdot \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) + b \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Далее заменяем $y = x + \dfrac{1}{x}$ и сводим его к квадратному уравнению.

Пример 1. Решить уравнение $2x^8 - 3x^7 + x^6 = 0$.

Решение. Выносим общий множитель за скобки:

$$x^6 \cdot \left(2x^2 - 3x + 1\right) = 0.$$

Получаем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^6 = 0, \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Ее решение дает три корня:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \dfrac{1}{2}, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\left(x^2 + 2x - 1\right)^2 - 7 \cdot \left(x^2 + 2x - 1\right) + 12 = 0.$$

Решение. Заменяем $x^2 + 2x - 1 = y$ и приходим к уравнению

$$y^2 - 7y + 12 = 0.$$

Последнее уравнение имеет корни:

$$\left[\begin{array}{l} y = 4, \\ y = 3. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к переменной *x*:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 1 = 4, \\ x^2 + 2x - 1 = 3. \end{array}\right.$$

Решаем полученные квадратные уравнения и приходим к ответу:

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 \pm \sqrt{6}, \\ x = -1 \pm \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Пример 3. Решить уравнение $(x + 4)^4 + (x + 2)^4 = 2$.

Решение. Задано уравнение вида (3.3). Заменяем $y = \dfrac{x + 4 + x + 2}{2} = x + 3$, т. е. $x = y - 3$. Подставим это значение в заданное уравнение:

$$(y - 3 + 4)^4 + (y - 3 + 2)^4 = 2.$$

После упрощения имеем:

$$(y + 1)^4 + (y - 1)^4 = 2.$$

Дополним до полного квадрата суммы:

$$\left((y + 1)^2 + (y - 1)^2\right)^2 - 2(y + 1)^2 \cdot (y - 1)^2 = 2.$$

После упрощения уравнение приобретает вид:

$$y^4 + 6y^2 = 0, \text{ т. е. } y^2\left(y^2 + 6\right) = 0.$$

Его решением является лишь $y = 0$.

Возвращаясь к переменной *x*, получим $x + 3 = 0$, что приводит к ответу: $x = -3$.

Пример 4. Решить уравнение $\left(x^2 - 5x - 5\right) \cdot (x - 3) \cdot (x - 2) = 12$.

Решение. Имеем уравнение вида (3.4).

Так как $-3 - 2 = -5$, то перемножим выражения во 2-й и 3-й скобках. Получим:

$$\left(x^2-5x-5\right)\cdot\left(x^2-5x+6\right)=12.$$

Заменяем $x^2-5x-5=y$.

Поскольку $x^2-5x+6=\left(x^2-5x-5\right)+11$, приходим к уравнению

$$y(y+11)=12.$$

Решая его как квадратное, получим корни:

$$\left[\begin{array}{l} y=-12, \\ y=1. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x-5=-12, \\ x^2-5x-5=1. \end{array}\right.$$

Первое квадратное уравнение полученной совокупности не имеет корней, так как $D<0$, а второе имеет корни $\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=6, \end{array}\right.$ что и будет ответом.

Пример 5. Решить уравнение $\left(x^2+2x-1\right)\cdot\left(x^2-3x-1\right)=-4x^2$.

Решение. Имеем уравнение вида (3.5). Поскольку $x=0$ не является его корнем (в чем можно убедиться подстановкой), то делим его почленно на x^2. Получаем

$$\left(x-\frac{1}{x}+2\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}-3\right)=-4.$$

Введем замену $x-\dfrac{1}{x}=y$, которая приводит к уравнению

$$(y+2)\cdot(y-3)=-4, \text{ т. е. } y^2-y-2=0.$$

Находим корни $\left[\begin{array}{l} y=-1, \\ y=2, \end{array}\right.$ и возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{x}=2, \\ x-\dfrac{1}{x}=-1. \end{array}\right.$$

Решаем полученную совокупность дробно-рациональных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-2x-1}{x}=0, \\ \dfrac{x^2+x-1}{x}=0, \end{array}\right. \text{ т. е. } \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=0, \\ x^2+x-1=0. \end{array}\right.$$

Получаем в совокупности 4 корня:

$$\left[\begin{array}{l} x=1\pm\sqrt{2}, \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Пример 6. Решить уравнение $x^3+6x^2+16x+16=0$.

Решение. Это уравнение 3-й степени. Разложим на множители многочлен в правой части. Для этого рассмотрим делители свободного члена 16:

$\pm1; \pm2; \pm4; \pm8; \pm16.$

Подстановкой находим, что $x_0=-2$ – корень этого многочлена. Следовательно, многочлен разделится нацело на $x=2$.

Воспользуемся правилом «деления углом»:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+6x^2+16x+16 & x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} & \overline{x^2+4x+8} \\ -\,4x^2+16x+16 & \\ \underline{4x^2+8x} & \\ -\,8x+16 & \\ \underline{8x+16} & \\ 0 & \end{array}$$

Данное уравнение равносильно уравнению

$$(x+2)\cdot\left(x^2+4x+8\right)=0,$$

решение которого сводится к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ x^2+4x+8. \end{array}\right.$$

Квадратное уравнение не имеет корней, а поэтому получаем единственный корень $x=-2$.

Пример 7. Решить уравнение $2x^4+3x^3-x^2+3x+2=0$.

Решение. Данное уравнение является симметрическим уравнением 4-й степени вида (3.7). Поскольку $x=0$ не является его корнем, то делим это уравнение почленно на x^2. Приходим к уравнению

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

Заменяем

$$x+\frac{1}{x}=y,$$
соответственно,
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2 \text{ и } x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$
Приходим к уравнению вида
$$2\left(y^2-2\right)+3y-1=0, \text{ т. е. } 2y^2+3y-5=0.$$
Находим корни:
$$\left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=-\dfrac{5}{2}, \end{array}\right.$$
и возвращаемся к переменной x:
$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=1, \\ x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$
После упрощения получаем:
$$\left[\begin{array}{l} x^2-x+1=0, \\ 2x^2+5x+2=0. \end{array}\right.$$
При этом первое уравнение последней совокупности не имеет корней, а второе имеет два корня:
$$\left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-\dfrac{1}{2}, \end{array}\right.$$
что и является ответом.

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $3x^4+3x^3-7x^2-7x=0$; 2) $\left(x^2-5x+2\right)\cdot\left(x^2-5x-1\right)=28$;
3) $x^8+3x^4-4=0$; 4) $x^6-7x^3-8=0$;
5) $x^3-3x^2+6x-8=0$; 6) $x^4-16-x^3+4x=0$;
7) $5x^7+3x^6-x^5=0$; 8) $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$;

9) $2x^3+5x^2+5x+2=0$; 10) $\left(x^2-x-2\right)^2+\left(x^2-x-2\right)-2=0$;
11) $\left(x+1\right)^2\cdot\left(x^2+2x\right)=12$; 12) $\left(x^2+3x+1\right)\cdot\left(x^2+3x+3\right)+1=0$.

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $3x^3+4x-7=0$; 2) $\left(3x^2-3x+5\right)^2=\left(2x^2+6x-3\right)^2$;
3) $2x^3-9x^2+12x-5=0$; 4) $\left(x-2\right)\cdot\left(x-3\right)^2\cdot\left(x-4\right)=20$;
5) $x^4-1+\left(x^2-1\right)^2=0$; 6) $3x^4+2x^3+5x^2+2x+3=0$;
7) $x^4-7x^2-6{,}25=0$; 8) $3x\cdot\left(x-1\right)\cdot\left(x+2\right)\cdot\left(x-3\right)=48$;
9) $x^3+10x^2+35x+42=0$; 10) $\left(x+2\right)^4+2x^2+8x-16=0$;
11) $\left(x+0{,}5\right)\cdot\left(x^2-9\right)=\left(2x+1\right)\cdot\left(x+3\right)^2$;
12) $4\left(x^2+10x-5\right)^2-4\left(x+5\right)^2+121=0$.

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $9+4\sqrt{10}x^2-x^4=0$; 2) $5x^3-x^2-36=0$;
3) $\left(x^3+x^2-12\right)^2+\left(x^4-16\right)^4=0$; 4) $\dfrac{2x^3+3x^2-4x-1}{5x^{49}-3x^{11}-2}=0$;
5) $\dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{\sqrt{x^2+2x-1}}=0$; 6) $\left(x+3\right)^4+\left(x+5\right)^4=16$;
7) $\left(x^2-\sqrt{5}x\right)\cdot\left(2x^3+5\sqrt{3}x^2-3{,}125x\right)=0$;
8) $\left(2x^2-3x+1\right)\cdot\left(2x^2+5x+1\right)=9x^2$;
9) $4\left(x+5\right)\cdot\left(x+6\right)\cdot\left(x+10\right)\cdot\left(x+12\right)-3x^2=0$;
10) $\left(x^2+x-21\right)^2+\left(x^2+6x+4\right)^2=25\left(x+5\right)^2$;
11) $x(x+1)+(x+1)(x+2)+\ldots+(x+6)(x+7)+(x+7)(x+8)=$ $=1\cdot2+2\cdot3+\ldots+5\cdot6+6\cdot7$;
12) $\sqrt{x^2-5x+6}+y^2+9x^2-6xy=0$.

3.2. Дробно-рациональные уравнения

Стандартный вид дробно-рационального уравнения:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \tag{3.8}$$

где $P(x), Q(x)$ – многочлены.

Область допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения: $Q(x) \neq 0$. Решение уравнений (3.8) сводится к решению системы

$$\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Дробно-рациональные уравнения вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)},$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ – многочлены, можно решать, используя основное свойство пропорции:

$$\begin{cases} P(x)\cdot S(x) = R(x)\cdot Q(x), \\ Q(x) \neq 0, \\ S(x) \neq 0. \end{cases}$$

К основному методу решения дробно-рациональных уравнений относится также метод замены переменной.

Некоторые специальные приемы будут рассмотрены далее на примерах.

Пример 1. Решить уравнение $\dfrac{x}{x - x^2} = 3.$

Решение. Сводим заданное уравнение к стандартному виду (3.8):

$$\frac{x}{x - x^2} - 3 = 0, \text{ т. е. } \frac{3x^2 - 2x}{x - x^2} = 0.$$

Его решением будет решение системы

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = 0, \\ x - x^2 \neq 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \\ \ldots, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Значит, решением заданного уравнения является $x = \dfrac{2}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{4}{x + 4}$.

Решение. Применим основное свойство пропорции с учетом ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} x(x+4) = 4(x^2 - 1), \\ x^2 - 1 \neq 0, \\ x + 4 \neq 0. \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x - 4 = 0, \\ x \neq \pm 1, \\ x \neq -4. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -\dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \\ \ldots, \\ x \neq \pm 1, \\ x \neq -4. \end{cases}$$

Оба корня являются решениями, так как подходят по ОДЗ. В ответе имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3}, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Пример 3. Решить уравнение $x^2 + \dfrac{16}{x^2} - x - \dfrac{4}{x} = 12.$

Решение. Группируем слагаемые

$$\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) - \left(x + \frac{4}{x}\right) - 12 = 0.$$

Заменяем

$x + \dfrac{4}{x} = y,$ откуда

$\left(x+\frac{4}{x}\right)^2=y^2$, т. е. $x^2+2x\frac{4}{x}+\frac{16}{x^2}=y^2$ и $x^2+\frac{16}{x^2}=y^2-8.$

Получаем уравнение $y^2-8-y-12=0$, или, то же самое, $y^2-y-20=0.$

Полученное уравнение имеет корни: $\left[\begin{array}{l} y=5, \\ y=-4. \end{array}\right.$

Возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{4}{x}=5, \\ x+\frac{4}{x}=-4. \end{array}\right.$$

В результате приходим к совокупности 2-х квадратных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x+4=0, \\ x^2+4x+4=0, \end{array}\right.$$

которые решаем на ОДЗ: $x\neq 0.$ Приходим к ответу

$$\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=4, \\ x=-2\pm 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Пример 4. Решить уравнение $x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=7.$

Решение. Выделим в левой части уравнения полный квадрат суммы:

$$x^2+2x\frac{3x}{x-3}+\left(\frac{3x}{x-3}\right)^2=7+2x\frac{3x}{x-3}.$$

Получаем уравнение, которое приобретает вид

$$\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-6\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2=7.$$

Заменяем $\frac{x^2}{x-3}=y$ и приходим к уравнению

$$y^2-6y-7=0.$$

Решая его, найдем корни:

$$\left[\begin{array}{l} y=7, \\ y=-1. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x-3}=7, \\ \frac{x^2}{x-3}=-1. \end{array}\right.$$

Решаем полученные уравнения по свойству пропорции (с учетом ОДЗ):

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2=7(x-3), \\ x^2=-(x-3), \end{array}\right. \\ x\neq 3. \end{cases}$$

Приходим к ответу $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$

Пример 5. Решить уравнение $\frac{2}{(x-2)^2}-(x-2)^2-2=0.$

Решение. Введем замену: $\frac{1}{(x-2)^2}=y.$

Тогда $(x-2)^2=\frac{1}{y}$ и получим уравнение $2y-\frac{1}{y}-2=0.$

Решаем его:

$\frac{2y^2-2y-1}{y}=0$, т. е. $\begin{cases} 2y^2-2y-1=0, \\ y\neq 0. \end{cases}$

Решая квадратное уравнение, находим корни:

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{array}\right. \\ x\neq 2. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение:

$$\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\begin{cases} x\neq 2, \\ (x-2)^2=\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{3}}}=\pm\sqrt{\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{1-3}}=\pm\sqrt{\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{-2}}=\pm\sqrt{\sqrt{3}-1}.$$

Второе уравнение не имеет решения, так как $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<0.$

Получили ответ: $x=\pm\sqrt{\sqrt{3}-1}.$

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $3\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0;$ 2) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2}{x}=4;$

3) $\dfrac{3}{9-x}+2=x;$ 4) $\dfrac{-5}{4-x^2}-\dfrac{x}{x-2}=0;$

5) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{3(x-2)}{x}-4=0;$ 6) $\dfrac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-7)}{\sqrt{20-19x-x^{11}}}=0;$

7) $\dfrac{\left(x^2-7x+10\right)\sqrt{16-2x}}{32-4x}=0;$ 8) $\dfrac{x^3-8}{2x-4}=12x-18.$

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $\dfrac{-4}{2x^2-5x-3}=\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{3}{3-x};$ 2) $\dfrac{x}{x-4}+x^{-1}-\dfrac{2}{4-x}=0;$

3) $(x+3)^2-\dfrac{1}{x^2+6x}=0;$ 4) $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}=\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}+1;$

5) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6};$ 6) $\dfrac{3x^2+11x+6}{8+10x-3x^2}=\dfrac{x+3}{4-x};$

7) $\dfrac{x-6\sqrt{x}+5}{2-2\sqrt{x}}=\dfrac{x}{5};$ 8) $\dfrac{7-2x-5x^2}{3x^{202}-4x^{101}+1}=0.$

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $\dfrac{-x^2-3\sqrt{2}x-4}{x^2-\left(4-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{32}}=0;$ 2) $9x^2+\dfrac{1}{x^2}-10\left(3x+\dfrac{1}{x}\right)+30=0;$

3) $x^2+\dfrac{36x^2}{(x+6)^2}=1;$ 4) $\dfrac{4x^2+3x+2}{3x^2+1}=\dfrac{3x^2+3x+6}{2x^2+5};$

5) $\dfrac{1-(1{,}5x)^{-1}}{(3x-2)^{-1}}=(3x)^{-1}+5x^{-1};$ 6) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\dfrac{13}{3}=0;$

7) $\dfrac{x^2}{x+5}+\dfrac{5x}{x^2-5}-6=0;$ 8) $\dfrac{x^2+ax+a^2}{x^2-ax+a^2}=\dfrac{a^2}{x^2}.$

3.2. Найдите квадрат суммы корней $x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{4a^2}{(a-1)^2}$ при $a>1.$

3.3. Определите при каких значениях a уравнение имеет действительные корни:

$$(a-2)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2-a\frac{x^2+1}{x^2}+3a=0.$$

3.3. Уравнения с модулем

Модулем (***абсолютной величиной***) ***числа*** $x\in\mathbf{R}$ называется неотрицательное число:

$$|x|=\left[\begin{array}{l} x,\ \text{если}\ x\geq 0, \\ -x,\ \text{если}\ x<0. \end{array}\right. \tag{3.9}$$

Геометрическая интерпретация модуля: $|x-a|$ – это расстояние от точки a до точки x на координатной оси, в частности, $|x|$ – это расстояние от точки 0 до точки x.

Свойства модуля:

1) $|x| \geq 0$; 2) $|-x| = |x|$; 3) $|xy| = |x||y|$;

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y \neq 0$; 5) $|x|^2 = x^2$; 6) $\sqrt{x^2} = |x|$;

7) $|x| \geq x$; 8) $|x+y| \leq |x|+|y|$; 9) $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$.

Пусть $f(x)$ – некоторое алгебраическое выражение. Тогда, используя определение модуля (3.9) при соответствующих предположениях, можно раскрыть знак абсолютной величины данного выражения:

$$|f(x)| = \left[\begin{array}{l} f(x) \text{ для всех } x, \text{ при которых } f(x) \geq 0, \\ -f(x) \text{ для всех } x, \text{ при которых } f(x) < 0. \end{array}\right.$$

Уравнение, содержащее выражение с неизвестной x под знаком модуля, называется ***уравнением с модулем.*** Рассмотрим основные типы уравнений с модулем и методы их решения.

I тип: уравнение вида

$$|f(x)| = a, \tag{3.10}$$

где a – число, $a \in \mathbf{R}$; $f(x)$ – некоторое выражение с неизвестной x.

1. Если $a < 0$, уравнение (3.10) решений не имеет.

2. Если $a = 0$, уравнение (3.10) равносильно уравнению $f(x) = 0$.

3. Если $a > 0$, уравнение (3.10) равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$

II тип: уравнение вида

$|f(x)| = g(x)$,

где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x.

Решать это уравнение можно несколькими способами.

1-й способ – используя определения модуля:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

2-й способ – используя подход к решению, как к уравнениям I типа с дополнительным условием на знак выражения $g(x)$:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. 1-й или 2-й способ решения таких уравнений выбирают в зависимости от того, какое из неравенств $f(x) \geq 0$ или $g(x) \geq 0$ решается легче.

3-й способ – метод интервалов. Необходимо:

1) найти те значения x, для которых $f(x) = 0$;

2) нанести полученные значения x на числовую ось;

3) определить знаки $f(x)$ для каждого из полученных интервалов;

4) нарисовать кривую знаков;

5) решить уравнение на каждом промежутке в отдельности, раскрывая модуль согласно рисунку;

6) для каждого конкретного промежутка проверить, принадлежат ли полученные корни этому промежутку;

7) в ответе указать совокупность всех полученных корней.

III тип: уравнения, содержащие несколько модулей. Если их два, то это уравнение вида

$$A|f(x)| + B|g(x)| + h(x) = 0, \tag{3.11}$$

где $A, B \in \mathbf{R}$, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x.

1-й способ – можно использовать определение модуля и рассматривать 4 случая возможных знаков $f(x)$, $g(x)$. Этот способ, как правило, не является рациональным.

2-й способ – метод интервалов. Необходимо нарисовать столько числовых осей и кривых знаков, сколько модулей в уравнении. Для уравнения (3.11) рисуют две оси, располагая их одна под другой (одна ось для $f(x)$, вторая – для $g(x)$). Для каждого выражения $f(x)$ и $g(x)$ следует изобразить кривую знаков на соответствующей оси. Затем раскрывают модули, используя рисунок, и решают уравнение отдельно на каждом промежутке. Подходят только те корни, которые принадлежат рассматриваемому промежутку. В ответе необходимо указать совокупность полученных корней.

IV тип: уравнение вида

$$A|f(x)| = B|g(x)|, \quad (3.12)$$

где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x; $A,\ B > 0,\ \ A,\ B \in \mathbf{R}$.

1-й способ – решение уравнения (3.12) сводится к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} Af(x) = Bg(x), \\ Af(x) = -Bg(x). \end{array}\right.$$

2-й способ – метод интервалов (не рационально).

3-й способ – после возведения уравнения в квадрат и использования свойства модуля $|a|^2 = a^2$, уравнение сводится к равносильному:

$$A^2(f(x))^2 = B^2(g(x))^2.$$

Полученное уравнение решается в зависимости от его типа.

V тип: уравнения, решаемые заменой переменной, например:

$$af^2(x) + b|f(x)| + c = 0,$$

где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x; $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$.

По свойству модуля оно записывается в виде

$$a|f(x)|^2 + b|f(x)| + c = 0.$$

Вводят замену $|f(x)| = y$ и решают полученное квадратное уравнение относительно неизвестной y. Затем необходимо вернуться к старой переменной. В случае 2-х различных корней y_1, y_2 квадратного уравнения это будет совокупность уравнений I типа:

$$\left[\begin{array}{l} |f(x)| = y_1, \\ |f(x)| = y_2, \end{array}\right.$$

если корень y_0 единственный, то остается решить уравнение $|f(x)| = y_0$.

Необходимо помнить, что в случае отрицательного значения y_1, y_2, y_0 уравнение с модулем не имеет решений.

Пример 1. Решить уравнение $\left|\dfrac{x-3}{x^2-6x+9}\right| = 1.$

Решение. Это уравнение I типа. Его ОДЗ: $x \neq 3$.

Уравнение записывается в виде $\left|\dfrac{x-3}{(x-3)^2}\right| = 1.$

На ОДЗ можно сократить и получаем

$$\left|\frac{1}{x-3}\right| = 1, \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x-3} = 1, \\ \dfrac{1}{x-3} = -1, \end{array}\right. \text{ т. е. } \left[\begin{array}{l} 1 = x-3, \\ 1 = -(x-3). \end{array}\right.$$

Получаем корни $\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 2, \end{array}\right.$ которые подходят по ОДЗ.

Пример 2. Решить уравнение $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| = \dfrac{1}{x+1}.$

Решение. Это уравнение II типа. Его ОДЗ: $x \neq \pm 1$. Оно имеет решение, если $\dfrac{1}{x+1} > 0$, т. е. при $x > -1$. Таким образом, для $x \in (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{1}{x+1}, \\ \dfrac{x+2}{x-1} = -\dfrac{1}{x+1}. \end{array}\right. \quad (3.13)$$

Решим отдельно полученные дробно-рациональные уравнения. Первое уравнение сводится к виду

$$\frac{(x+2)\cdot(x+1)-(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)} = 0, \text{ откуда } x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Это квадратное уравнение решений не имеет, так как $D < 0$.

Из второго уравнения совокупности (3.13) получаем

$$\frac{(x+2)\cdot(x+1)+(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)} = 0, \text{ т. е. } x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет корни:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3}, \\ x = \dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3}, \end{array}\right.$$

т. е. первый корень не принадлежит множеству $x \in (-1;1) \cup (1;+\infty)$, на котором решали уравнение, следовательно, ответом является только $x = -2 + \sqrt{3}$.

Пример 3. Решить уравнение $|5-2x| = x^2 + 2x - 4$.

Решение. Имеем уравнение II типа, которое решим по определению модуля:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5-2x \ge 0,\\ 5-2x = x^2+2x-4,\end{cases}\\ \begin{cases}5-2x<0,\\ 5-2x = -x^2-2x+4.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (3.14)$$

Решаем первую систему совокупности (3.14):

$$\begin{cases}x \le \dfrac{5}{2},\\ x^2+4x-9=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x \le \dfrac{5}{2},\\ \left[\begin{array}{l}x = -2+2\sqrt{13},\\ x=-2-2\sqrt{13}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Значение $x = -2+2\sqrt{13}$ не подходит по условию $x \le \dfrac{5}{2}$. Следовательно, корнем является $x = -2-2\sqrt{13}$.

Решаем вторую систему совокупности (3.14):

$$\begin{cases}x > 5/2,\\ x^2+1=0 - \text{уравнение решений не имеет.}\end{cases}$$

Получили ответ $x = -2-2\sqrt{13}$.

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{1}{|x|} - \sqrt{x^2-4x+4} = -2$.

Решение. Поскольку $x^2-4x+4 = (x-2)^2$, то уравнение записывается в виде

$$\frac{1}{|x|} - |x-2| = -2.$$

Это уравнение относится к III типу уравнений.

Его ОДЗ: $x \ne 0$. Решим методом интервалов.

Нулями выражений, стоящих под модулем, являются $x=0$ и $x=2$. Эти значения разбивают числовую ось на три промежутка (рис. 3.1).

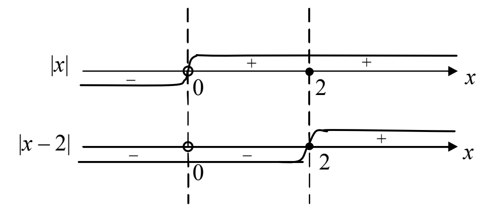


Рис. 3.1

Раскрыв модули на каждом из полученных промежутков, с учетом их знаков, получим совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{ll}\text{I} & \begin{cases}x<0,\\ -\dfrac{1}{x} + (x-2) = -2,\end{cases}\\ \text{II} & \begin{cases}0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{x} + (x-2) = -2,\end{cases}\\ \text{III} & \begin{cases}x>2,\\ \dfrac{1}{x} - (x-2) = -2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим отдельно системы:

I. $\begin{cases}x<0,\\ -\dfrac{1}{x}+x-2=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x<0,\\ -\dfrac{1}{x}+x=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x<0,\\ \dfrac{x^2-1}{x}=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x<0,\\ x=1 - \text{не корень},\\ x=-1 - \text{корень}.\end{cases}$

II. $\begin{cases}0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{x}+x-2=-2.\end{cases}$ $\begin{cases}0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{x}+x=0,\end{cases}$ $\begin{cases}0<x\le 2,\\ 1+x^2=0 - \text{нет решений}.\end{cases}$

III. $\begin{cases} x > 2, \\ \dfrac{1}{x} - x - 2 = -2, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ \dfrac{1}{x} - x = -4, \end{cases}$

$\begin{cases} x > 2, \\ x^2 - 4x - 1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{5} \text{ – корень}, \\ x = 2 - \sqrt{5} \text{ – не корень}. \end{array} \right. \end{cases}$

Решением данного уравнения являются значения $x = -1$ и $x = 2 + \sqrt{5}$.

Пример 5. Решить уравнение $2|x - 1| - |2x + 1| = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$2|x - 1| = |2x + 1|$.

Оно относится к IV типу. Возведем обе его части в квадрат:

$4(x - 1)^2 = (2x + 1)^2$. После упрощения имеем:

$4x^2 - 8x + 4 = 4x^2 + 4x + 1$, т. е. $-12x = -3$.

Получаем $x = \dfrac{1}{4}$ – корень.

Пример 6. Решить уравнение $\left| \dfrac{4}{\left| \frac{1}{3}x^2 + x \right|} \right| = 2 + \dfrac{3}{4}\left| \dfrac{1}{2}x^2 + x \right|$.

Решение. ОДЗ: $\dfrac{1}{3}x^2 + x \neq 0$, т. е. $x \neq 0, x \neq -3$.

Преобразуем данное уравнение к виду

$$\left| \frac{4}{\left| \frac{1}{3}x^2 + x \right|} \right| = 2 + 3\frac{\left| \frac{1}{3}x^2 + x \right|}{4}.$$

Заменяем $\dfrac{4}{\left| \frac{1}{3}x^2 + x \right|} = y$.

Уравнение приобретает вид

$y = 2 + 3\dfrac{1}{y}$.

Решаем его как дробно-рациональное и получаем:

$y^2 - 2y - 3 = 0$.

Последнее квадратное уравнение имеет корни:

$\left[\begin{array}{l} y = 3, \\ y = -1. \end{array} \right.$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{4}{\left| \frac{1}{3}x^2 + x \right|} = 3, \\ \dfrac{4}{\left| \frac{1}{3}x^2 + x \right|} = -1. \end{array} \right.$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет, так как слева положительное выражение, а справа – отрицательное.

Первое уравнение совокупности сводится к I типу уравнений с модулем и равносильно совокупности при условии $x \neq 0$:

$\left| \dfrac{1}{3}x^2 + x \right| = \dfrac{4}{3}$;

$|x^2 + 3x| = 4$.

Приходим к совокупности

$\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x = -4, \\ x^2 + 3x = 4, \end{array} \right.$ т. е. $\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x + = 4, \\ x^2 + 3x - 4 = 0. \end{array} \right.$

Решение имеет только второе уравнение совокупности, его корни:

$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -4. \end{array} \right.$

Оба они подходят по ОДЗ.

Пришли к ответу: $x = 1, x = -4$.

Пример 7. Решить уравнение $\dfrac{|x^3 - 27| + |x^2 - 9|}{\sqrt{x + 3}} = 0$.

Решение. ОДЗ: $x > -3$.

С учетом ОДЗ данное уравнение равносильно уравнению:

$|x^3 - 27| + |x^2 - 9| = 0$.

Используя свойства модуля (имеем сумму двух неотрицательных величин), получаем:

$$\begin{cases} x^3-27=0, \\ x^2-9=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3=27, \\ x^2=9, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3, \\ \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-3, \end{array}\right. \end{cases}$$

т. е. $x=3$ – решение полученной системы, оно подходит по ОДЗ.

Получили ответ: $x=3$.

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $|1-x|-7=0;$ 2) $|3-x|+3=0;$

3) $\sqrt{(x-5)^2}-3=0;$ 4) $|-x^2-4|=5;$

5) $|x-5|=2x+5;$ 6) $|x-3|=-x;$

7) $|x-2|-|x+6|=0;$ 8) $|x^3|-x^2=-2;$

9) $\sqrt{9x^2+30x+25}=2-x;$ 10) $|2+|3+x||-5=0;$

11) $\dfrac{7}{|x-2|}=3;$ 12) $\sqrt{x+1}\cdot(|x+2|-4)=0;$

13) $\dfrac{|2-x|-3}{2x^2-9x-5}=0;$ 14) $(x-4)^2-5|x-4|-14=0.$

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $|2-x|+|3x-6|+|x|=4;$ 2) $\dfrac{(|x-6|-4)\cdot(|2x+3|-7)\cdot|x|}{\sqrt{2-x}}=0;$

3) $||x+4|-2x|=3x-1;$ 4) $\left|(2x-1)^4+3(2x-1)^2\right|-10=0;$

5) $\left(\dfrac{x+4}{2}\right)^2+\left|2+\dfrac{x}{2}\right|=2;$ 6) $\dfrac{x|x-1|}{|x-2|}=-\dfrac{2}{3};$

7) $\left|\dfrac{x-2}{x^3}\right|=x|2-x|;$ 8) $\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+8x+16}}{|x|}=|1-x|;$

9) $|x^2+2|x|+3|=2;$ 10) $\left|\dfrac{x+1}{2x-4}\right|-2\left|\dfrac{2x-4}{x+1}\right|=-1;$

11) $|x^2-5|=5-x^2;$ 12) $\sqrt{36x^2+12x^3+x^4}=|x+6|.$

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sqrt{8-x}\cdot(|x^2-9|-8x)}{\sqrt{x}+1}=0;$ 2) $|2x^2-3x+4|=|3x-2|+2x^2+2;$

3) $|||3-x^2|-2x\cdot|-4|=5;$ 4) $\left|\dfrac{x^2-5x-14}{x^2-2x-8}\right|=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-5x-14};$

5) $|x^2-4x+3|=-(4+2\sqrt{3})x;$ 6) $\dfrac{|x-1|+|x+3|-4}{\sqrt{7-x^2}}=0.$

3.2. Найти количество натуральных корней уравнения

$$|4x-x^2-12|+|x-6|=x^2-5x+18.$$

3.3. Решите уравнение:

$$f(x)=f(-|x|),\ \text{если}\ f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}.$$

3.4. Найдите все значения a, при которых уравнение $a-x=-2\cdot||x|-a|$ имеет единственный корень.

3.5. Для каждого значения a найдите множество решений:

$$|a-2|\cdot x^2-(a+1)\cdot x+2+3a=0.$$

3.6. Определите, при каком значении a уравнение имеет ровно три решения:

1) $|x^2-2x-3|=a;$ 2) $|x^2+2ax+9|=7.$

3.4. Системы и совокупности уравнений

Пусть даны два уравнения с двумя неизвестными $f(x,y)=0$ и $g(x,y)=0$, где $f(x,y)$, $g(x,y)$ – некоторые выражения с переменными x и y. Если ставится задача найти все общие решения данных уравнений, то говорят, что задана ***система уравнений***:

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Решить систему (3.15) – значит найти все пары чисел (x,y), которые являются решением каждого уравнения, или доказать, что таких пар чисел не существует.

Аналогично определяется понятие системы с тремя и более неизвестными.

Системы, все уравнения которых однородные, называются ***однородными*** системами уравнений.

Система называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение и ***несовместной***, если таких решений не существует.

Две системы уравнений ***эквивалентны*** (*равносильны*), если они имеют одни и те же решения или обе не имеют решений.

Над уравнениями системы можно выполнять следующие действия, преобразующие данную систему в эквивалентную ей:

1) менять порядок следования уравнений;

2) умножать на число $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$, любое уравнение;

3) умножать на число $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$, одно уравнение системы и прибавлять его к другому уравнению.

Несколько уравнений образуют ***совокупность уравнений***

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x;y)=0, \\ f_2(x;y)=0, \end{array}\right.$$

если ставится задача найти все те решения, которые удовлетворяют хотя бы одному уравнению совокупности и входят в область определения остальных уравнений.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \qquad (3.16)$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{R}$.

Геометрически каждому уравнению системы (3.16) соответствует прямая линия на плоскости:

$l_1 : a_1x+b_1y=c_1$ и $l_2 : a_2x+b_2y=c_2$.

Справедливы утверждения:

1) если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то система (3.16) имеет единственное решение (геометрически – прямые l_1, l_2 пересекаются в определенной точке);

2) если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то система (3.16) не имеет решений (прямые l_1, l_2 параллельны);

3) если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то система (3.16) имеет бесконечно много решений (прямые l_1 и l_2 – совпадают).

Основными методами решения систем уравнений (3.15) являются:

1) метод подстановки;
2) метод исключения неизвестной;
3) метод сложения;
4) метод умножения (деления) уравнений;
5) метод замены переменных;
6) графический метод.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} 3x-4y^2=-7, \\ 6x-5y^2=1. \end{cases}$

Решение. Решим методом сложения. Для этого первое уравнение системы умножим на (-2) и прибавим ко второму:

$$\begin{cases} 3x-4y^2=-7, \ \big| \cdot(-2) \\ 6x-5y^2=1, \end{cases}$$

откуда следует

$$\begin{cases} -6x+8y^2=14, \\ 6x-5y^2=1. \end{cases}$$

Получаем

$3y^2=15$, т. е. $y^2=5$.

Следовательно,

$$|y|=\sqrt{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{5}, \\ y=\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Заданная система сводится к решению совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-4y^2=-7,\\ y=-\sqrt{5},\end{cases}\\ \begin{cases}3x-4y^2=-7,\\ y=\sqrt{5}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ее решением являются пары чисел: $\left(\frac{13}{3};\sqrt{5}\right)$; $\left(\frac{13}{3};-\sqrt{5}\right)$.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases}\frac{x}{2y}+\frac{y}{2x}=1,\\ 3y-x=4.\end{cases}$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 0,\\ y\neq 0.\end{cases}$

Заменим в первом уравнении системы $\frac{x}{y}=t$, тогда $\frac{y}{x}=\frac{1}{t}\mid t\neq 0$.

Получим дробно-рациональное уравнение:

$\frac{1}{2}t+\frac{1}{2t}=1.$

Решаем его

$\frac{t^2-1-2t}{2t}=0;\ \ t^2-2t+1=0;\ \ (t-1)^2=0;\ \ t=1.$

Возвращаемся к переменным x, y:

$\begin{cases}\frac{x}{y}=1,\\ 3y-x=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x=y,\\ 3x-x=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\ y=2\end{cases}$ – подходит по ОДЗ.

Получили ответ $(2;2)$.

Пример 3. Решить систему $\begin{cases}x+y+xy=7,\\ x^2+y^2+xy=-5.\end{cases}$

Решение. Данная система относится к ***симметрическим системам*** (неизвестные x, y входят одинаково). Решение таких систем производят стандартной заменой переменных $\begin{cases}x+y=m,\\ xy=n.\end{cases}$

$$\begin{cases}m+n=7,\\ m^2-n=-5.\end{cases}\qquad(3.17)$$

Далее используем метод сложения:

$m^2+m=2$, т. е. $m^2+m-2=0.$

Получаем корни этого квадратного уравнения:

$\left[\begin{array}{l}m=1,\\ m=-2.\end{array}\right.$

С учетом системы (3.17) имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=1,\\ n=6,\end{cases}\\ \begin{cases}m=-2,\\ n=9.\end{cases}\end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменным x, y, получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=1,\\ xy=6,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-2,\\ xy=9.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим записанные системы отдельно:

$$1)\ \begin{cases}x=1-y,\\ (1-y)y=6,\end{cases}\qquad(3.18)$$

$y-y^2-6=0,$

$y^2-y+6=0,$

$\left[\begin{array}{l}y=3,\\ y=-2.\end{array}\right.$

Возвращаясь к системе (3.18), получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2,\\ y=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x=3,\\ y=-2,\end{cases}\end{array}\right.$$

т. е. имеем два решения $(-2;3)$ и $(3;2)$.

$$2)\ \begin{cases}x=-2-y,\\ (-2-y)y=9.\end{cases}\qquad(3.19)$$

$-2y-y^2-9=0,$

$y^2+2y+9=0.$

Поскольку для последнего квадратного уравнения $D<0$, система (3.19) не имеет решения.

Получили ответ $(-2;3)$; $(3;-2)$.

Пример 4. Решить систему графически:

$$1)\ \begin{cases} x^2+(y-2)^2=4, \\ y=1; \end{cases} \qquad (3.20)$$

$$2)\ \begin{cases} xy=1, \\ x=-y. \end{cases}$$

Решение. 1) Исходя из геометрического смысла, $x^2+(y-2)^2=4$ – уравнение окружности с центром $O'(0;2)$ и радиусом $R=2$; $y=1$ – прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(0;1)$.

Построим эти линии (рис. 3.2).

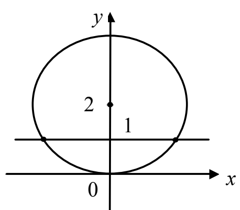


Рис. 3.2

Графики имеют две точки пересечения, т. е. система имеет два решения, которые найдем из системы (3.20):

$$\begin{cases} y=1, \\ \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3}, \\ x=-\sqrt{3}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Получили ответ $(\sqrt{3};1)$, $(-\sqrt{3};1)$.

2) Уравнение $xy=1$ может быть записано в виде $y=\dfrac{1}{x}$ и является уравнением гиперболы .

Уравнение $x=-y$ может быть записано в виде $y=-x$ – это биссектриса II и IV координатных углов.

Выполним построение (рис. 3.3).

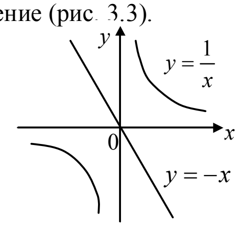


Рис. 3.3

Графики не имеют точек пересечения и, следовательно, система решений не имеет.

Пример 5. Решить систему $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=0, \\ 4x^2+7xy+5y^2=25. \end{cases}$

Решение. Система содержит однородное уравнение.

Так как $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$, получим:

$$\begin{cases} (x-y)^2=0, \\ 4x^2+7xy+5y^2=25, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ 4x^2+7x\cdot x+5x^2=25. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем x:

$$16x^2=25; \qquad x^2=\frac{25}{16}; \qquad |x|=\frac{5}{4}.$$

Получаем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{5}{4}, \\ y=\dfrac{5}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{5}{4}, \\ y=-\dfrac{5}{4}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Приходим к ответу $\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)$ и $\left(-\dfrac{5}{4};-\dfrac{5}{4}\right)$.

Задания

I уровень

1.1. Решите систему:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(x^2-y^2)=5xy, \\ y-x=-0{,}25xy; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=5, \\ x^2+xy-y^2=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y^2=7, \\ xy^2=5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x+0{,}5y}{0{,}3} = 13, \\ x-0{,}9y = 2{,}1. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 12x-27y=-147, \\ \dfrac{x+y}{x+2y-28} = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{y-1} - \dfrac{y-x}{2x} = 2, \\ x-y=4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+z=1, \\ x+3y+2z=3. \end{cases}$

1.2. Решите систему графически:

1) $\begin{cases} x=y, \\ x^2+(y-3)^2=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-5y=3, \\ xy=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-2)^2+(y+1)^2=25, \\ (x+1)^2+(y-2)^2=16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+2x+y-1=0, \\ x^2-8x+y^2-8y+7=0. \end{cases}$

II уровень

2.1. Решите систему:

1) $\begin{cases} x^3+y^3=5(x+y), \\ 2x^2-xy+2y^2=15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2=6-y^2, \\ x^4+y^4=3(x^2+y^2); \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{y^2}=-\dfrac{1}{10}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{y-1}-2\dfrac{y-1}{2x+1}=1, \\ 5-y=3+x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x+2y)^2-(y-2x)^2=168, \\ (x+2y)^2+(y-2x)^2=12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2y+y^2x=20, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x+xy+y=9; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x^2+5xy+3y^2=0, \\ x^3-y^3=x-y. \end{cases}$

2.2. Определите, при каких значениях a система имеет единственное решение:

1) $\begin{cases} x+y=-3, \\ (x-3)^2+(y-4)^2=a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y+ax^2=2x^2-4, \\ 2x-y=3. \end{cases}$

III уровень

3.1. Решите систему:

1) $\begin{cases} x^2-\sqrt{2yz}=-16, \\ y^2-32=8xz^4\sqrt{16-\sqrt{2yz}}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (13x^4y^2-6x^2-6y)x\sqrt{y}=356, \\ (5x^4y^2-6x^2-6y)x\sqrt{y}=100. \end{cases}$

3.2. Определите, при каких значениях a система

$$\begin{cases} 5x-2ay=3, \\ 4x+4ay=5+ax: \end{cases}$$

1) имеет хотя бы одно решение;
2) не имеет решений.
Определите геометрический смысл результата исследования.

3.3. Определите, при каких значениях a система

$$\begin{cases} x^2+4y^2-4xy-2x+4y+a+2=0, \\ x^2+4y^2+4xy-6x-12y+8-a=0, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение. Решите систему.

3.4. Найдите значения a и b, при которых корни уравнения

$$4x^2+a^2x-|b|x+|a-1|=0$$

удовлетворяют условиям: $\begin{cases} x_1^3+x_2^3=5, \\ x_1^2x_2^2=25. \end{cases}$

3.5. Решите систему $\begin{cases} xy+yz=-3, \\ yz+zx=4, \\ zx=yz=5. \end{cases}$

3.6. Решите систему графически $\begin{cases} x^2+2x+y^2-4y-4=0, \\ |x-4|=3a. \end{cases}$

3.7. Определите, при каких значениях a система

$$\begin{cases} ay^2-\sqrt{x^2+5}=4, \\ y-x-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+5}}=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3.5. Алгебраические неравенства с одной переменной

Неравенством с одной переменной x называют соотношения вида:

$$\begin{aligned} &1)\ f(x)<g(x);\\ &2)\ f(x)>g(x);\\ &3)\ f(x)\le g(x);\\ &4)\ f(x)\ge g(x), \end{aligned} \tag{3.21}$$

где $f(x), g(x)$ – некоторые выражения, зависящие от переменной x, при условии, что ставится задача нахождения всех тех значений x $(x \in \mathbf{R})$, при которых эти неравенства верны.

Неравенства 1) и 2) называются ***строгими***, а 3) и 4) – ***нестрогими***.

Решением неравенств типа (3.21) называют такое значение переменной x, при котором оно обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти множество всех его решений или доказать, что неравенство решений не имеет.

Два неравенства называются ***равносильными***, если они имеют одно и то же множество решений.

Свойства равносильности неравенств:

1) неравенства $f(x)<g(x)$ и $g(x)>f(x)$ – равносильны;

2) неравенства $f(x)<g(x)$ и $f(x)-g(x)<0$ – равносильны;

3) если $m>0$, то неравенства $f(x)<g(x)$ и $mf(x)<mg(x)$ – равносильны;

4) если $m<0$, то $f(x)<g(x)$ и $mf(x)>mg(x)$ – равносильны;

5) неравенства $f(x)<g(x)$ и $f(x)+h(x)<g(x)+h(x)$ – равносильны;

6) неравенства $f(x)<g(x)$ и $(f(x))^{2n+1}<(g(x))^{2n+1}$ – равносильны;

7) неравенство

$$f(x)<g(x), \tag{3.22}$$

где $f(x)\ge 0, g(x)\ge 0$,

равносильно неравенству

$$(f(x))^{2n}<(g(x))^{2n},\ n\in\mathbf{N}. \tag{3.23}$$

Аналогичные свойства имеют место для всех остальных неравенств.

Неравенство вида

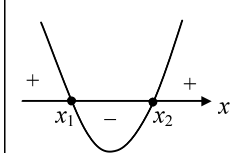
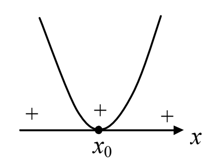
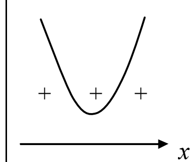
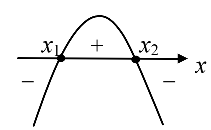
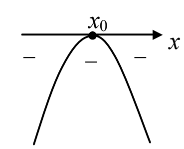
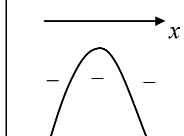
$ax+b<cx+d$ $(\le; >;\ \ge)$,

где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, называется ***линейным неравенством***.

Неравенство вида $ax^2+bx+c>0$ $(\ge; <;\ \le)$ называется ***квадратным неравенством***.

В основе решения квадратного неравенства лежит графический метод. В зависимости от знака коэффициента a и дискриминанта D возможен один из шести случаев расположения графика функций $y=ax^2+bx+c$ (табл. 3.1).

Таблица 3.1

a	D		
	$D>0$ x_1, x_2 – корни	$D=0$ x_0 – корень	$D<0$ нет корней
$a>0$			
$a<0$			

Решение квадратного неравенства находят по расположению соответствующего графика функции относительно оси Ox.

Неравенство

$$P_n(x)>0\ (\ge; <; \le), \tag{3.24}$$

где $P(x)$ – многочлен степени $n>2$, называется ***неравенством высшей степени***.

Основной метод решения неравенств типа (3.24) – ***метод интервалов***. Он состоит в следующем:

1. Многочлен $P(x)$ необходимо разложить на множители. Допустим, получено неравенство

$$A\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)\cdot\left(ax^2+bx+c\right)>0,$$

где $A, x_1, x_2, ..., x_k, a, b, c\in\mathbf{R}$, квадратный трехчлен имеет $D<0$.

2. Коэффициент A и квадратный трехчлен следует «отбросить» (поделить на них). Если $A<0$ или $a<0$, то знак неравенства при этом изменяется на противоположный.

Допустим, что приходим к неравенству вида

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)<0, \qquad (3.25)$$

где корни $x_1, x_2, ..., x_k$ расположены в порядке возрастания.

3. Корни $x_1, x_2, ..., x_k$ наносят на числовую ось. Справа от самого большого корня x_k ставят знак «+» над промежутком, далее идет чередование знаков.

4. Необходимо нарисовать кривую знаков.

5. Штрихуют те промежутки, которые отвечают смыслу неравенства (т. е. для неравенства (3.25) это множество тех значений x, для которых кривая знаков находится под осью Ox).

6. Записывают ответ в виде промежутка, объединения промежутков (если их несколько) или множества из отдельных точек.

Если в результате преобразований неравенство приняло вид

$$(x-x_1)^{n_1}\cdot(x-x_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{n_k}>0,$$

где $n_1, n_2, ..., n_k\in\mathbf{N}$ и $x_1, x_2, ..., x_k$ расположены в порядке возрастания, то для решения используют ***обобщенный метод интервалов***, который состоит в следующем:

1. Корни $x_1, x_2, ..., x_k$ наносят на числовую ось.

2. Справа от самого большого корня x_k ставят над промежутком знак «+»:

а) если n_k – *нечетное число*, то при «переходе» через корень x_k *знак изменится на противоположный* (т. е. следующий промежуток отметим знаком «–»);

б) если n_k – *четное число*, то при «переходе» через корень x_k *знак не изменится*;

в) аналогично при «переходе» через остальные корни.

3. Необходимо нарисовать кривую знаков.

4. Штрихуют те промежутки, которые соответствуют смыслу неравенства.

5. Ответ записывают в виде промежутка, объединения промежутков (если их несколько) или множества из отдельных точек.

Метод интервалов – частный случай обобщенного метода интервалов.

Неравенство типа

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \ (\geq; <; \leq), \qquad (3.26)$$

где $P(x), Q(x)$ – некоторые многочлены, называется ***дробно-рациональным*** неравенством.

Его запись (3.26) называется ***стандартным видом дробно-рационального неравенства***.

Основными методами решения данных неравенств являются:

- метод интервалов (или обобщенный метод интервалов);
- метод замены переменной.

При решении строгих неравенств типа (3.26) вначале их записывают в виде

$$P(x)\cdot Q(x)>0 \ (<0),$$

а затем используют метод интервалов или обобщенный метод интервалов.

Решение нестрогих неравенств

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0 \quad (\leq 0)$$

сводится к решению системы

$$\begin{cases} P(x)\cdot Q(x)\geq 0, \ (\leq 0), \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

В любом случае, при изображении нулей знаменателя на числовой оси, точки, представляющие их, выкалываются.

Неравенства вида $g(x)\leq f(x)\leq \upsilon(x)$ называются ***двойными*** неравенствами, они равносильны системе:

$$\begin{cases} f(x)\geq g(x), \\ f(x)\leq \upsilon(x). \end{cases}$$

Решением системы неравенств называют такие значения переменной, при которых ***каждое*** из заданных неравенств обращается в верное числовое неравенство.

При ***решении совокупности*** неравенств полученные решения каждого неравенства объединяются.

З а м е ч а н и е. Решать неравенство вида

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} < \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \quad (\le; >; \ge)$$

по основному свойству пропорции нельзя, так как в общем случае выражения являются знакопеременными. Вначале их следует привести к стандартному виду (3.26).

Пример 1. Решить неравенство $(x-1)^2 \cdot (x-2)^2 \ge (x-1)^2 \cdot (6-2x)$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству:

$(x-1)^2 \cdot (x^2-2) - (x-1)^2 \cdot (6-2x) \ge 0$.

Преобразуем его разложив на множители:

$(x-1)^2 \cdot (x^2-2-6+2x) \ge 0$;

$(x-1)^2 \cdot (x^2+2x-8) \ge 0$;

$(x+4) \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2) \ge 0$.

Используем обобщенный метод интервалов (рис. 3.4).

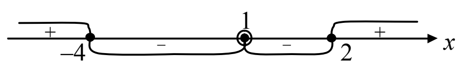


Рис. 3.4

Заметим, что $x=1$ – двукратный корень, при переходе через данное значение знак не меняется. Поскольку неравенство нестрогое, в качестве решения подходят также те значения, при которых многочлен обращается в 0, т. е. $x=1$.

Получаем ответ $x \in (-\infty; -4] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{x^3-1+(x-1)^2}{\sqrt{x^2-4}} < 0$.

Решение. ОДЗ: $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

С учетом ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству:

$x^3-1+(x-1)^2 < 0$;

$(x-1) \cdot (x^2+x+1) + (x-1)^2 < 0$;

$(x-1) \cdot (x^2+x) < 0$;

$(x+1) \cdot x \cdot (x-1) < 0$.

Методом интервалов решаем последнее неравенство (рис. 3.5), учитывая ОДЗ.

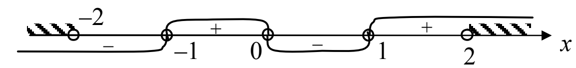


Рис. 3.5

Получаем решение $x \in (-\infty; -2)$.

Пример 3. Найти наибольшее решение системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x^2} \le 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}} \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Заданная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x^4-1 \le 0, \\ x \ne 0, \\ x \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x^2-1) \cdot (x^2+1) \le 0, \\ x \ne 0, \\ x \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1) \cdot (x-1) \le 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Решением (рис. 3.6) является промежуток: $(0; 1]$. Наибольшее значение на данном промежутке $x=1$.

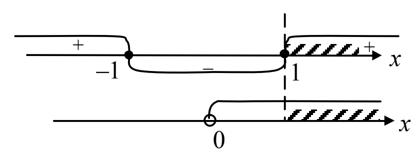


Рис. 3.6

Пример 4. Решить совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2-x}{2x+5} > 4, \\ x^2+3x-4 \le 0. \end{array}\right.$$

Решение. Решим каждое неравенство заданной совокупности отдельно:

$$\frac{2-x}{2x+5}>4, \qquad \frac{2-x}{2x+5}-4>0,$$

$$\frac{-9x-18}{2x+5}>0, \qquad \frac{x+2}{x+\frac{5}{2}}<0.$$

Приходим к неравенству $\left(x+\frac{5}{2}\right)\cdot(x+2)<0.$

Используя метод интервалов (рис. 3.7), получаем $x\in\left(-\frac{5}{2};-2\right).$

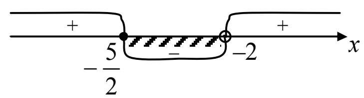


Рис. 3.7

Решаем второе неравенство заданной совокупности. Находим корни квадратного трехчлена, разлагаем на множители и получаем $(x+4)\cdot(x-1)\le 0.$

Используя метод интервалов (рис. 3.8), имеем: $x\in[-4;1].$

Рис. 3.8

Объединяя полученные решения двух неравенств совокупности (рис. 3.9), приходим к ответу: $x\in[-4;1].$

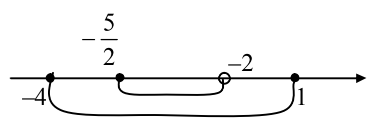


Рис. 3.9

Задания

I уровень

1.1. Решите неравенство:

1) $\frac{9}{x}\ge\frac{x}{9};$ 2) $\frac{23}{1-x}\ge\frac{3}{4};$ 3) $\frac{3}{5+x}<\frac{2x}{x-1};$

4) $\frac{1}{7-28x^2}\le\frac{4}{5};$ 5) $x-5+\frac{6}{x}<0;$ 6) $\frac{x^2}{(x+1)^2}>1;$

7) $\frac{x^2-6x+10}{x^2-8x+15}\le 0;$ 8) $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}\ge\frac{2x-1}{x^3+1}.$

1.2. Решите систему и совокупность неравенств:

1) $\begin{cases}x^2-9<0,\\ x^2-x-6\ge 0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\left(x^2-3x-2\right)\cdot\left(x^2-3x+1\right)<10,\\ x^2\le 4;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{2x+4}{3}>x-5,\\ 3x-\frac{2x-5}{3}>6-0{,}2x;\end{cases}$ 4) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-7>0,\\ 2x+19>0,\end{cases}\\ \begin{cases}3x-5\ge 0,\\ 2x-16\le 0;\end{cases}\end{array}\right.$

5) $\begin{cases}x^2>25,\\ x^2+6x\le 27;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\frac{3}{2x-5}<\frac{5}{7-x},\\ x^4+3x^3<4x^2;\end{cases}$

7) $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x^2}>4,\\ \frac{x}{20}-\frac{5}{x}\le 0;\end{array}\right.$ 8) $\begin{cases}\frac{4}{6-x}>\frac{6}{x},\\ 9-4x^2\ge 0.\end{cases}$

II уровень

2.1. Решите неравенство:

1) $\frac{x(x-2)}{\left(x^2-2x+1\right)\cdot(x-3)^2}\ge 0;$ 2) $\frac{(x-3)^3\cdot(x-2)}{(x+1)^4\cdot(x+5)}>0;$

3) $\left(x^2-4x+4\right)\cdot\left(3x^2-2x-1\right)\le 0;$ 4) $1\le\frac{5x^2-3x+1}{x^2+2}\le 3;$

5) $\frac{\left(x^2+2x+1\right)\cdot\left(x^2-6x+9\right)}{x-3}\ge 0;$ 6) $5-x<x^2\le 16;$

7) $\frac{x^2(x-2)\cdot(x-3)^4\cdot(5-x)^5}{(2-x)^3}<0;$ 8) $5x-20\le -x^2\le 8x;$

9) $\dfrac{(x-5)^2\cdot\sqrt{x^2-3x+2}}{-x^2+4x-4}>0;$ 10) $216x^6+19x^3\le 1;$

11) $\left(x^2+7x-8\right)^2+\left(x^3+2x-3\right)^2\le 0;$

12) $\left(6-x-x^2\right)^2+\left(x^3+x^2-7x+2\right)\le 0.$

2.2. Решите систему и совокупность неравенств:

1) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1\le 0,\\ x-2>0,\end{cases}\\ \begin{cases}4x-4>0,\\ 2x-3<0,\end{cases}\\ \begin{cases}4x+2\ge 5x-3,\\ 2-3x<7-2x;\end{cases}\end{array}\right.$ 2) $\begin{cases}(x-0{,}5)^2\cdot(3x+9)>(x+3)\cdot\left(4x^2-1\right),\\ \dfrac{5x+1}{x^2-3x-4}\le -1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+1}{1-x^2}\le 1,\\ \dfrac{(2x+6)\sqrt{x}}{(-5-x)^3\cdot(10-x)^2}>0;\end{cases}$ 4) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2x^2}\ge\dfrac{2}{2x^2+32},\\ \dfrac{4}{4x^2+2x-2}+\dfrac{1}{3+2x-x^2}<0.\end{array}\right.$

2.3. Найдите сумму целочисленных решений неравенства:

1) $\dfrac{x+2}{\sqrt{10-3x-x^2}}\le 0;$ 2) $\left(x^2-16\right)\sqrt{3-x}\le 0.$

2.4. Найдите количество целых решений неравенства

$$-\frac{3}{x^2+2}\le\frac{1}{1-2x}\le\frac{1}{x^2},$$

принадлежащих промежутку $(-4;\,5]$.

III уровень

3.1. Найдите сумму всех натуральных решений неравенства:

1) $\dfrac{x^3-x^2+5x}{x^2-x-6}\cdot\dfrac{x^3}{\sqrt{5-x}}\ge 0;$ 2) $\dfrac{x^3-2x^2-2x+1}{(|3+x|-4)^4\cdot\sqrt{9-x^2}}>0;$

3) $\dfrac{y^2-x^2+6x-7}{x+5}<y^2,$ где $y=\sqrt{3-x}.$

3.2. Найдите все значения a, при которых неравенство имеет единственное решение:

$$\left(x^2+8x+17\right)\cdot\left(y^2-4y+a\right)\le 18.$$

3.3. Определите, при каких значениях параметра a всякое решение неравенства $6x^2+x-1<0$ будет одновременно решением неравенства $ax^2-(1-3a)x+a^2>0.$

3.4. Решите систему неравенств в зависимости от параметра a:

$$\begin{cases}x^2+(a-2)x-a<0,\\ x^2-(3-a)x+a+1\le 0.\end{cases}$$

3.5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство выполняется для любых x:

$$\frac{2x^2+ax-1-a}{x^2-2x+4}>-2.$$

3.6. Определите, при каких значениях a решением системы неравенств является любое действительное число:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+(a-1)x-3}{x^2-x+4}<2,\\ \dfrac{x^2+(a-1)x-3}{x^2-x+4}>-5.\end{cases}$$

3.6. Неравенства с модулем

I тип: неравенство содержит некоторое выражение $f(x)$ под модулем и число вне модуля:

$$|f(x)|<a,\ \text{где } a\in\mathbf{R}. \qquad (3.27)$$

Решение зависит от знака числа a.

1. Если $a\le 0$, то неравенство (3.27) не имеет решений.

2. Если $a>0$, то неравенство (3.27) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}f(x)>-a,\\ f(x)<a.\end{cases}$$

$$\left|f(x)\right| \le a, \text{ где } a \in \mathbf{R}. \qquad (3.28)$$

1. Если $a < 0$, то неравенство (3.28) не имеет решений.

2. Если $a = 0$, то неравенство (3.28) равносильно уравнению $f(x) = 0$.

3. Если $a > 0$, то неравенство (3.28) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \ge -a, \\ f(x) \le a. \end{cases}$$

$$\left|f(x)\right| > a, \text{ где } a \in \mathbf{R}. \qquad (3.29)$$

1. Если $a < 0$, то решением неравенства (3.29) является множество всех значений x из ОДЗ выражения $f(x)$.

2. Если $a = 0$, то решением неравенства (3.29) является множество всех значений x из ОДЗ выражения $f(x)$ таких, что $f(x) \ne 0$.

3. Если $a > 0$, то неравенство (3.29) равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned} &f(x) < -a, \\ &f(x) > a. \end{aligned}\right.$$

$$\left|f(x)\right| \ge a, \text{ где } a \in \mathbf{R}. \qquad (3.30)$$

1. Если $a \le 0$, то решением неравенства (3.30) является множество всех значений x из ОДЗ выражения $f(x)$.

2. Если $a > 0$, то неравенство (3.30) равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned} &f(x) \le -a, \\ &f(x) \ge a. \end{aligned}\right.$$

II тип: неравенство, которое содержит выражение с переменной под знаком модуля и вне его:

$$\left|f(x)\right| > g(x), \qquad (3.31)$$

где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые выражения с переменной x.

Для решения неравенств типа (3.31) можно использовать следующие способы.

1-й способ: используя определение модуля, получаем равносильную совокупность систем:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ &\begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x). \end{cases} \end{aligned}\right.$$

2-й способ: решаем аналогично решению неравенства (3.29) при дополнительном ограничении на знак выражения $g(x)$:

1. Если

$$g(x) < 0, \qquad (3.32)$$

то решением является множество всех значений x из ОДЗ выражения $f(x)$, которые удовлетворяют условию (3.32).

2. Если

$$g(x) = 0,$$

то решением является множество всех значений x, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) \ne 0. \end{cases}$$

3. Если $g(x) > 0$, решение определяется системой

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ \left[\begin{aligned} &f(x) < -g(x), \\ &f(x) > g(x). \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Ответом в решении неравенства (3.31) является объединение всех решений, полученных на этапах 1–3.

3-й способ: метод интервалов.

Для решения необходимо:

1) найти значения x, для которых $f(x) = 0$;

2) найденные значения x нанести на числовую ось;

3) определить знак выражения $f(x)$ на всех полученных промежутках;

4) нарисовать кривую знаков;

5) раскрыть модуль, пользуясь рисунком, и получить соответствующее неравенство, которое следует решить вместе с условием принадлежности переменной x определенному промежутку;

6) в ответе неравенства указать совокупность полученных решений.

III тип: неравенство содержит несколько модулей и решается двумя способами:

1-й способ: можно использовать определение модуля и решать совокупность систем неравенств. Этот способ, как правило, не является рациональным.

2-й способ: использовать метод интервалов. Необходимо нарисовать столько числовых осей и кривых знаков, сколько модулей содержится в неравенстве. Для каждого промежутка следует решать полученное после раскрытия модулей неравенство при условии, что переменная x принадлежит конкретному промежутку. В ответе указывают объединение всех полученных решений.

IV тип: неравенство вида

$$A|f(x)| > B|g(x)|, \text{ где } A, B > 0,\ A, B \in \mathbf{R}. \qquad (3.33)$$

решается двумя способами:

1-й способ: метод интервалов.

2-й способ: согласно теореме равносильности (см. свойства равносильности неравенств (3.22) и (3.23)) неравенство (3.33) можно возводить в квадрат:

$$A^2|f(x)|^2 > B^2|g(x)|^2.$$

Решение неравенства (3.33) сводится к решению неравенства

$$A^2(f(x))^2 > B^2(g(x))^2.$$

Аналогично решают неравенства IV типа (3.33), если они заданы со знаками $\geq, <, \leq$.

V тип: неравенства, решаемые заменой переменной.

В таком случае выражение с модулем обозначают новой переменной. Неравенство с новой переменной решают до конца (т. е. до возможного получения промежутков решения для новой переменной). Затем возвращаются к старой переменной и решают полученные неравенства с модулем как неравенства I типа.

Пример 1. Решить неравенства:

1) $|x-2| \leq 5$; 2) $|x^2-2x-6| > 9$;

3) $|x-1| \leq \dfrac{1}{x-1}$; 4) $x^2 - 8|x| + 7 \geq 0$;

5) $\left|\dfrac{x+5}{x-3}\right| > 1 - \dfrac{2}{|x-3|}$; 6) $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| + 5\left|\dfrac{x}{x-1}\right| \leq 6$.

Решение. 1) Решаем как неравенство I типа:

$$|x-2| \leq 5;\ \begin{cases} x-2 \leq 5, \\ x-2 \geq -5; \end{cases} \begin{cases} x \leq 7, \\ x \geq -3. \end{cases}$$

Получаем ответ: $x \in [-3; 7]$.

2) Решаем как неравенство I типа:

$$|x^2-2x-6| > 9;\ \left[\begin{array}{l} x^2-2x-6 > 9, \\ x^2-3x-6 < -9; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2-2x-15 > 0, \\ x^2-2x+3 < 0. \end{array}\right.$$

Второе неравенство совокупности не имеет решения (соответствующая парабола лежит над осью Ox). Первое неравенство сводится к виду

$$(x+3)(x-5) > 0.$$

Его решение: $x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$, это и есть ответ.

3) Решаем как неравенство II типа. Оно имеет решение, если $x-1 > 0$. Поэтому получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 \leq \dfrac{1}{x-1}, \\ x-1 \geq -\dfrac{1}{x-1}; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1-\dfrac{1}{x-1} \leq 0, \\ x-1+\dfrac{1}{x-1} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 > 0, \\ \dfrac{(x-1)^2-1}{x-1} \leq 0, \\ \dfrac{(x-1)^2+1}{x-1} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ \dfrac{x^2-2x}{x-1} \leq 0, \\ \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 > 0, \\ x(x-2) \leq 0, \\ x^2-2x+2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ 0 \leq x \leq 2, \\ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Получаем ответ: $x \in (1; 2]$.

4) Заданное неравенство может быть записано в виде

$$|x|^2 - 8|x| + 7 \geq 0.$$

Заменим переменную $y = |x|$. Решаем неравенство

$$y^2 - 8y + 7 \geq 0.$$

Его решение $\left[\begin{array}{l} y \leq 1, \\ y \geq 7. \end{array}\right.$

Возвращаемся к переменной x и решаем совокупность $\left[\begin{array}{l} |x| \leq 1, \\ |x| \geq 7. \end{array}\right.$

Получаем $\left[\begin{array}{l} -1 \le x \le 1, \\ x \le -7, \\ x \ge 7, \end{array}\right.$

т. е. приходим к ответу $x \in (-\infty; -7] \cup [-1; 1] \cup [7; +\infty)$.

5) Для решения неравенства $\left|\dfrac{x+5}{x-3}\right| > 1 - \dfrac{2}{|x-3|}$ используем метод интервалов. Запишем неравенство в виде

$$\frac{|x+5|}{|x-3|} > 1 - \frac{2}{|x-3|}.$$

Построим числовые прямые и определим знаки выражений, стоящих под модулем (рис. 3.10).

ОДЗ: $x \ne 3$.

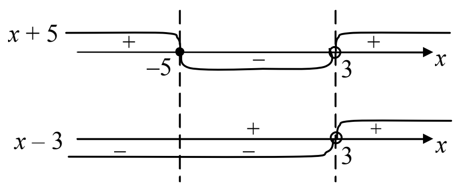


Рис. 3.10

а) рассмотрим неравенство на 1-м промежутке. Получаем систему

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -5], \\ \dfrac{x+5}{x-3} > 1 + \dfrac{2}{x-3}. \end{cases} \quad (3.34)$$

Решаем неравенство

$$\frac{x+5}{x-3} - 1 - \frac{2}{x-3} > 0;$$

$$\frac{x+5-x+3-2}{x-3} > 0;$$

$$\frac{6}{x-3} > 0.$$

Получаем $x > 3$.

Система (3.34) сводится к системе

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -5], \\ x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

На данном промежутке решений нет.

б) $\begin{cases} x \in (-5; 3), \\ -\dfrac{x+5}{x-3} > 1 + \dfrac{2}{x-3}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \in (-5; 3), \\ \dfrac{2(x-2)}{x-3} < 0; \end{cases}$

$-\dfrac{x+5}{x-3} - 1 - \dfrac{2}{x-3} > 0;$ $\quad \dfrac{-2x-4}{x-3} > 0;$ $\dfrac{x+2}{x-3} < 0.$

Если $x \in (-5; 3)$, , то $x - 3 < 0$. С учетом рассматриваемого промежутка имеем:

$$\begin{cases} x \in (-5; 3), \\ x - 3 < 0, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

Получаем $x \in (2; 3)$.

в) $\begin{cases} x \in (3; +\infty), \\ \dfrac{x+5}{x-3} > 1 - \dfrac{2}{x-3}; \end{cases}$

$$\frac{x+5}{x-3} - 1 + \frac{2}{x-3} > 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{10}{x-3} > 0, \\ x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

Решением является промежуток: $x \in (3; +\infty)$.

Объединим полученные решения и приходим к ответу: $x \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

6) $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| + 5\left|\dfrac{x}{x-1}\right| \le 6.$

ОДЗ: $\begin{cases} x \ne 0, \\ x \ne 1. \end{cases}$

Введем новую переменную:

$\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = y$, тогда $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{y}$ и приходим к неравенству вида

$$y + \frac{5}{y} \le 6.$$

Решаем его

$\dfrac{y^2+5-6y}{y} \le 0;$ $\quad \dfrac{(y-1)\cdot(y+6)}{y} \le 0;$ $\quad \begin{cases} (y+6)\cdot y\cdot(y-1) \le 0, \\ y \ne 0. \end{cases}$

Используем метод интервалов (рис. 3.11).

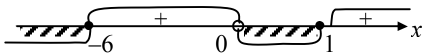


Рис. 3.11

$y\in(-\infty;\,-6]\cup(0;1]$. Запишем полученное решение в виде совокупности: $\left[\begin{array}{l} y\le -6,\\ 0<y\le 1.\end{array}\right.$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \left|\dfrac{x-1}{x}\right| < -6 \text{ – данное неравенство решений не имеет,}\\ 0<\left|\dfrac{x-1}{x}\right|\le 1 \text{ – неравенство равносильно системе :}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{x-1}{x}\right|>0,\\ \left|\dfrac{x-1}{x}\right|\le 1;\end{array}\right. \qquad (3.35)$$

$\left|\dfrac{x-1}{x}\right|>0$ – выполняется при любых $x\in\mathbf{R}\setminus\{0;1\}$.

С учетом ОДЗ второе неравенство системы (3.35) равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{x}\le 1,\\ \dfrac{x-1}{x}\ge -1,\\ x\ne 0,\\ x\ne 1;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-1-x}{x}\le 0,\\ \dfrac{x-1+x}{x}\ge 0,\\ x\ne 0,\\ x\ne 1;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{x}\le 0,\\ \dfrac{2x-1}{x}\ge 0,\\ x\ne 0,\\ x\ne 1;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x>0,\\ \dfrac{2\left(x-\dfrac12\right)}{x}\ge 0,\\ x\ne 1;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x>0,\\ x-\dfrac12\ge 0,\\ x\ne 1;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x\ge \dfrac12,\\ x\ne 1.\end{array}\right.$$

Получаем ответ: $x\in\left[\dfrac12;1\right)\cup(1;+\infty)$.

Задания

I уровень

1.1. Решите неравенство:

1) $|2+x|+2\ge 0$;
2) $|3-x|+1<0$;
3) $|3-x|\le 2$;
4) $|2x-1|>5$;
5) $|2(x-2)|\le x^2-4$;
6) $|0{,}5x-0{,}3|>|5-x|$;
7) $2\le|7-2x|<5$;
8) $|x+4|-2x\ge 3$;
9) $|x-1|+|2-x|>3$;
10) $|2x-5|-4\le|7-2x|$.

1.2. Решите систему или совокупность неравенств:

1) $\left\{\begin{array}{l} 3-|x+4|\ge 0,\\ |x-1|-|x+4|<0;\end{array}\right.$
2) $\left[\begin{array}{l} |x-1|<6,\\ 3-|2-x|>4-x.\end{array}\right.$

II уровень

2.1. Решите неравенство:

1) $\left|\dfrac{3-2x}{x-4}\right|\ge 1$;
2) $|x^2+6x+8|\le -x^2-6x-8$;
3) $\sqrt{x^2-6x+9}+x<|12-4x|$;
4) $\dfrac{\sqrt{9-x^2}\cdot\left(x^2-|x|-12\right)}{x-3}\ge 0$;
5) $\left(|x-3|-6\right)\cdot\left(|7-x|+4\right)<0$;
6) $\left|\dfrac{x+7}{x-3}\right|>\dfrac{1}{x+3}$;
7) $|2-|3+x||-5\le 0$;
8) $4-||2x+4|-8|<0$;
9) $|x-2|-\sqrt{x^2}\ge|4-3x|$;
10) $|x^2-4|+|x-2|>5-x$.

2.2. Решите систему или совокупность неравенств:

1) $\left\{\begin{array}{l} |x-2|<\dfrac{3}{|x-1|-3},\\ |x^2-1|-|4-x^2|\ge 5;\end{array}\right.$
2) $\left\{\begin{array}{l} x^2-|4x+2|>-5,\\ |x^2-1|>x^2+7;\end{array}\right.$
3) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{|x-5|}{\sqrt{x^2+2x+1}}\le 1,\\ |x-3|-|1-x|+|x+4|>0;\end{array}\right.$
4) $\left[\begin{array}{l} \sqrt{5-x}\,(1-|x|)\ge 0,\\ \dfrac{1}{3-|5-x|}>\dfrac34.\end{array}\right.$

III уровень

3.1. Решите неравенство:

1) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{4-x^2}\right|\le 3;$ 2) $\left|1-\left|x^2-4x-4\right|\right|>1;$

3) $0<\left|2|x-2|+5\right|\le 10;$ 4) $\sqrt{x-3}\cdot\left|3-\dfrac{x^2+5x-4}{x^2+6}\right|>0;$

5) $\dfrac{|4-x|-2}{1+|x+2|}<|x|;$ 6) $\dfrac{x^4-5\sqrt{x^4-2x^2+4}-2x^2+4}{|5-0{,}5x|}\ge 0;$

7) $|x-1|\le\dfrac{|x|^2-2|x|-3}{\sqrt{(5-x)^2}};$ 8) $\dfrac{(x-0{,}3)\cdot\left(|x-1|-|-x|\right)}{(2x-4)^2}\le 0;$

9) $\sqrt{9x-x^2-8}\cdot\left(4-\left|x^2-3x-4\right|\right)\le 0.$

3.2. Определите, при каких значениях параметра *a* неравенство выполняется при всех $x\in\mathbf{R}$:

$$x^2-|x-a|+|x-2|+4>0.$$

3.3. Определите множество решений неравенства в зависимости от параметра *a:*

$$\left|x^2-7x-8\right|\ge 4-a^2.$$

3.4. Решите уравнение

$\left[\dfrac{x+1}{x}\right]=\dfrac{x-1}{5}$, где $\left[\dfrac{x+1}{4}\right]-$ целая часть числа.

4. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

4.1. Функция, ее свойства и график

Пусть X и Y некоторые числовые множества $X \subseteq \mathbf{R}$; $Y \subseteq \mathbf{R}$.

Если каждому $x \in X$ по некоторому правилу f ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что ***задана функция***. Обозначается

$y = f(x)$,

где x – аргумент или независимая переменная функции; y – значение функции или зависимая переменная.

Множество X значений независимой переменной называется ***областью определения функции*** и обозначается $D(y)$ или $D(f)$.

Множество всех значений зависимой переменной Y называется ***множеством значений функции*** и обозначается $E(y)$ или $E(f)$.

Частное значение функции $y = f(x)$ при заданном частном значении аргумента $x = x_0$ $(x_0 \in D(y))$ обозначается $f(x_0)$.

Отметим особенности отыскания области определения некоторых функций:

1) область определения $D(y)$ дробно-рациональной функции

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – некоторые многочлены, определяется условием:

$$Q(x) \neq 0;$$

2) если аналитическое выражение функции содержит квадратный корень, т. е. задана функция $y = \sqrt{f(x)}$, то

$$D(y):\ f(x) \geq 0.$$

В случае задания функции формулой $y = f(x)$ ее область определения $D(y)$ – это ОДЗ выражения $f(x)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x;\ y)$, где $x \in D(y)$, $y = f(x)$.

Способы задания числовой функции:

1) ***табличный*** – указываются значения переменной x и соответствующие им значения переменной y, составляется таблица (можно использовать для записи наблюдений);

x	…	…	…
$f(x)$	…	…	…

2) ***аналитический*** – указывается область определения функции $D(y)$ и задается формула, по которой каждому значению $x \in D(y)$ ставится в соответствие $y \in E(y)$;

3) ***графический*** – задается график функции.

Свойства функции:

1. ***Четность и нечетность функции.***

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если:

1) $D(y)$ – симметричное множество относительно $x = 0$;

2) для любого $x \in D(y)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если:

1) $D(y)$ – симметричное множество относительно $x = 0$;

2) для любого $x \in D(y)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Если функция $f(x)$ является четной или нечетной, то говорят, что ***она обладает свойством четности***.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной – относительно начала координат.

Свойства четных (нечетных) функций:

1) если f и g – четные функции на множестве X, то функции $f + g,\ f - g,\ f \cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ – четные функции на X;

2) если f и g – нечетные функции на множестве X, то функции $f + g,\ f - g$ – нечетные функции на X;

$f \cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ – четные функции на X.

2. ***Периодичность функции.***

Функция $y = f(x)$ с областью определения $D(y)$ называется ***периодической,*** если существует такое число $T \neq 0$, что для любого значения $x \in D(y)$ выполняются условия:

1) $x \pm T \in D(y)$;

2) $f(x-T) = f(x+T) = f(x)$.

Число T называется ***периодом функции***.

Числа $k \cdot T$, где $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ также будут периодами функции.

Наименьший из положительных периодов, если он существует, называется ***основным периодом***.

Значения периодической функции повторяются через период T. Следовательно, для построения графика данной функции достаточно построить часть графика на любом из промежутков длины T (из $D(y)$), а затем произвести параллельный перенос данной части графика вдоль оси Ox на $\pm Ò, \ \pm 2Ò, \ldots$.

Если функция $f(x)$ – периодическая и имеет период T, то функция $Af(kx+b)$, где A, k и $b \in \mathbf{R}$ $(k \neq 0)$, также периодична, причем ее период равен $\dfrac{T}{|k|}$.

Справедливы утверждения:

1) если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – периодические функции с общим периодом T, то функции $f_1(x) \pm f_2(x)$ – также периодические, с тем же периодом T;

2) для того, чтобы периодические функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ с периодами T_1 и T_2 имели общий период T (число T должно нацело делиться на T_1 и T_2), необходимо и достаточно, чтобы отношение $\dfrac{T_1}{T_2}$ было числом рациональным.

3. ***Монотонность функции.***

Пусть x_1, x_2 – произвольные значения из области $D(y)$ функции $f(x)$ такие, что $x_1 < x_2$.

Если при данном условии выполняется:

$f_1(x) < f_2(x)$, то функция называется ***возрастающей***;

$f_1(x) > f_2(x)$ – ***убывающей***;

$f_1(x) \leq f_2(x)$ – ***неубывающей***;

$f_1(x) \geq f_2(x)$ – ***невозрастающей***.

Возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие функции называются ***монотонными*** функциями (возрастающие и убывающие – строго монотонными).

Функция $y = f(x)$ называется ***кусочно-монотонной*** на множестве X, если данное множество можно разделить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция монотонна.

4. ***Промежутки знакопостоянства функции. Нули функции.***

Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т. е. $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$), называются ***промежутками знакопостоянства***.

Значения аргумента $x \in D(y)$, при которых функция $f(x) = 0$, называются ***нулями функции***. Нули функции – это точки пересечения графика функции с осью Ox.

Пример 1. Найти область определения функции
$y = \sqrt{2x^2 - 6x} - \dfrac{1}{\big|1 - |x-2|\big|}$.

Решение. $D(y)$:

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x \geq 0, \\ \big|1 - |x-2|\big| \neq 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Найдем соответствующее $D(y)$ множество точек.

Неравенство $2x^2 - 6x \geq 0$ равносильно неравенству $2x(x-3) \geq 0$.

Решая его, получаем (рис. 4.1):
$x \in (-\infty;\ 0] \cup [3;\ +\infty)$.

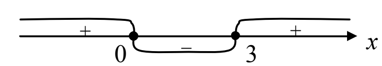


Рис. 4.1

Условие $\big|1 - |x-2|\big| \neq 0$ означает, что $1 - |x-2| \neq 0$, т. е. $|x-2| \neq 1$.

Приходим к заключению, что
$x - 2 \neq 1, x - 2 \neq -1$. Получаем $x \neq 3, x \neq 1$.

Таким образом, система (4.1) равносильна системе

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ 0] \cup [3;\ +\infty), \\ x \neq 3, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Следовательно, $D(y) = (-\infty;\ 0] \cup (3;\ +\infty)$.

Пример 2. Найти множество значений функции

$y = \sqrt{-x^2 + 4x - 4}$.

Решение. Найдем область определения функции

$D(y): -x^2 + 4x - 4 \geq 0;$

$x^2 - 4x + 4 \leq 0;$

$(x-2)^2 \leq 0.$

Последнее условие выполняется только для $x = 2$. Вычисляем значение функции в этой точке: $y(2) = 0$.

Следовательно, $E(y) = \{0\}$.

Пример 3. Исследовать функцию на четность:

1) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$; 2) $y = \dfrac{x^4 - 3x^2}{|x-2|}$; 3) $y = x|x| - 4x^7$.

Решение. 1) Замечаем, что функция $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ имеет $D(y) = \mathbf{R}$. Следовательно, функция определена на симметричном множестве.

Рассмотрим ее значение для $-x$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^4}{x^2+1} = f(x).$$

Поскольку выполняются оба условия четности функции, заключаем, что функция $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ – четная.

2) Функция $y = \dfrac{x^4 - 3x^2}{|x-2|}$ имеет $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Так как $D(y)$ не является симметричным множеством, второе условие проверять нет необходимости. Эта функция не обладает свойством четности.

3) Очевидно, что функция $y = x|x| - 4x^7$ имеет $D(y) = \mathbf{R}$, т. е. определена на симметричном множестве и для нее справедливо равенство:

$$f(-x) = -x|-x| - 4(-x)^7 = -\left(x|x| - 4x^7\right) = -f(x).$$

Оба условия нечетности функции выполняются, а потому данная функция является нечетной.

Пример 4. Пусть $f(x) = x^2$, где $x \in (-1;\ 1]$. Причем, функция имеет период 2. Построить ее график.

Решение. Построим график данной функции на $x \in (-1;\ 1]$ (рис. 4.2).

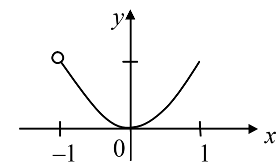


Рис. 4.2

Исходя из определения периодической функции, должно выполняться условие: $f(x + 2k) = f(x)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Строим ее график, продолжая по периоду (рис. 4.3).

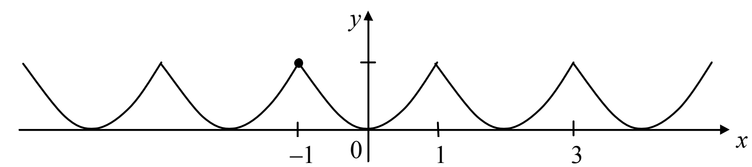


Рис. 4.3

Пример 5. Используя определение монотонной функции, найти значения a, при которых функция $f(x) = (a^2 - 4)x + a - 1$, где $x \in \mathbf{R}$, монотонно возрастает.

Решение. Пусть $x_2 > x_1$, $(\forall x_1, x_2 \in D(y))$. Функция монотонно возрастает, если выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$ или $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Это означает, что

$$f(x_2) - f(x_1) = (a^2 - 4)x_2 + a - 1 - (a^2 - 4)x_1 - a + 1 = (a^2 - 4)(x_2 - x_1) > 0.$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, последнее неравенство выполняется, если $a^2 - 4 > 0$, т. е. $a \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

Таким образом, функция возрастает для $a \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

Пример 6. Дана функция

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x < -1, \\ x^2, & \text{если } -1 \le x < 2, \\ x+2, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

Определить промежутки знакопостоянства функции, нули функции. Построить график данной функции.

Решение. Так как на каждом из данных промежутков аналитические выражения, задающие функцию, определены в каждой точке, следовательно, $D(y) = \mathbf{R}$.

1. Исследуем функцию при $x < -1$. На данном промежутке функция принимает значение, равное 1, т. е. она знакоположительна и нулей функции нет.

2. Пусть $-1 \le x < 2$.

При таком условии функция задается формулой $y = x^2$ и $x^2 > 0$ $\forall x \in [-1; 2)$. Функция знакоположительна. Здесь она имеет нуль $x = 0$.

3. Пусть $x \ge 2$.

Очевидно, что при этом условии $y > 0$, так как $y = x + 2$. Нулей функции на этом промежутке нет.

Построим график:

- если $x < -1$, строим часть прямой линии $y = 1$;
- если $-1 \le x < 2$ – часть параболы $y = x^2$;
- если $x \ge 2$ – часть прямой $y = x + 2$.

Получили график заданной функции (рис. 4.4).

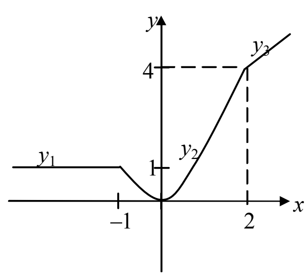


Рис. 4.4

Таким образом, функция знакоположительна $\forall x \in \mathbf{R}, x \ne 0$; имеет нуль $x = 0$.

Задания

I уровень

1.1. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{x-2} - \dfrac{1}{x-5}$; 2) $y = \dfrac{x^2}{|x|\sqrt{x-4}}$;

3) $y = \sqrt{(2-x)\sqrt{x+1}}$; 4) $y = \sqrt{14 + 5x - x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{0{,}5x^2 - x - 17{,}5}}$.

1.2. Исследуйте функцию на свойство четности:

1) $y = \dfrac{x - 2x^3}{1 + 2x^2}$; 2) $y = \dfrac{-x^2 + 1}{2 + x^2}$;

3) $y = \dfrac{x^3 + |x| - 1}{x^2}$; 4) $y = \dfrac{5 - x}{x^2 - x}$.

1.3. Найдите множество значений функции:

1) $y = \dfrac{1}{x-5}$; 2) $y = 1 - 2x - x^2$;

3) $y = \sqrt{2x^2 - 8x + 9}$; 4) $y = |x - 3| + 7$.

1.4. Определите промежутки монотонности, нули, промежутки знакопостоянства функции $f(x)$:

1) $y = 8 - (x+2)^3$; 2) $y = \sqrt{1-x}$;

3) $y = \dfrac{x-1}{x+4}$; 4) $y = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

1.5. Задана функция $y = f(x)$, $x \in [a; b)$. Продолжите ее на всю числовую ось, как периодическую с периодом T:

1) $y = x^2 + 1$, где $x \in [0; 2)$, $T = 2$;

2) $y = |x - 2|$, где $x \in [-1; 5)$, $T = 6$.

II уровень

2.1. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\dfrac{7}{x^2} - \dfrac{1}{2}} + \dfrac{1}{|x^2 - 4|}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{-x-1}{|4-x|+2}} - \sqrt{2-x}$;

3) $y=\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{5-x}}}{|x+2|-3}$; 4) $y=\sqrt{-x^2+8x-16}+\dfrac{1}{|x+2|-6}$.

2.2. Найдите множество значений функции:

1) $y=\dfrac{3x}{x-4}$; 2) $y=\sqrt{9x^2+12x-7}$;

3) $y=\dfrac{25}{x^2-4x+5}$; 4) $y=\sqrt{-x^4+x^2-0{,}25}$.

2.3. Задайте функцию аналитически:

1) линейную, если $f(-2)=4,\ f(2)=12$;

2) квадратичную, если $f(0)=5,\ f(-1)=3,\ f(3)=-7$;

3) обратную пропорциональную зависимость, если $f(4)=1$.

2.4. Исследуйте функцию на четность:

1) $y=\left(1-x^2\right)^3+2+3x^2$; 2) $y=\sqrt[3]{(x-7)^2}-\sqrt[3]{(x+7)^2}$;

3) $y=|x-1|+\left|x^2+1\right|-7$; 4) $y=\dfrac{(|x|+1)^2}{\sqrt{x^2+5x+6}}$.

2.5. Докажите, что функция:

1) $y=\dfrac{3}{2x+1}$ убывает на $x\in(-\infty;\ -0{,}5)$;

2) $y=-5x^2+6x+19$ возрастает на $x\in(-\infty;\ 0{,}6)$.

2.6. Исследуйте функцию на монотонность:

1) $y=\sqrt{x-1}+x^2$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

2.7. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{x^3-8}{|x-2|}$; 2) $y=\begin{cases}x^2+2x+3, x\le -2,\\ -x^2-2x+3, x>-2;\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-4}, x<4,\\ 5, x\ge 4;\end{cases}$ 4) $y=2|x+3|-|x|$.

Опишите свойства функции, используя график.

2.8. Пусть $f(x)=\begin{cases}|x|, \text{ при } x\in[-1;2),\\ 2, \text{ при } x\in[2;3].\end{cases}$ Известно, что функция $f(x)$ имеет период $T=4$. Постройте ее график.

2.9. Задана функция $y=\sqrt{x}+2$, если $x\in(0;4)$:

1) достройте ее график по четности и продолжите на всю числовую ось с периодом $T=8$;

2) достройте ее график по нечетности и продолжите его на всю числовую ось с периодом $T=8$.

III уровень

3.1. Исследуйте функцию на четность. Найдите ее нули:

1) $y=\dfrac{|x-5|}{1-x}+\dfrac{x+1}{|5-x|}$; 2) $y=\sqrt{x^4-5x^2+4}+\dfrac{x^3}{x^4-16}$.

3.2. Найдите нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки монотонности:

$$y=\begin{cases}2, & \text{при } x<-5,\\ \left|x^2-4|x|+3\right|, & \text{при } -5\le x<6,\\ 2-(x+1)^2, & \text{при } x\ge 6.\end{cases}$$

Постройте график.

3.3. Дана функция $y=\dfrac{a^2+2}{x+4}$. Найдите промежуток, на котором она убывает.

3.4. Определите, при каком значении a функция $f(x)=\left(a^2-9\right)x-6a,\ x\in(-\infty;\ +\infty)$ является периодической.

3.5. Найдите функцию $f(x)$, если:

1) $f(x+1)=x^2+2x+2$; 2) $f(x-2)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x$.

3.6. Определите, при каком значении аргумента значение функции $y = \dfrac{4-x}{|x-5|-2|x+1|}$ равно -1.

3.7. Определите, при каких значениях x график функции $y=-x^2-2x+9$ расположен выше графика функции $y=(3-2x)\cdot(x+1)$.

4.2. Обратная функция. Функция, заданная неявно и параметрически

Функция $y=f(x)$, где $x\in D(f)$, называется ***обратимой*** на множестве $D(f)$, если каждому значению y из множества значений функции $E(f)$ соответствует единственное значение $x\in D(f)$.

Если $y=f(x)$ – обратимая функция, то на множестве $E(f)$ определена функция g, которая каждому значению $y\in E(f)$ ставит в соответствие $x\in D(f)$ такое, что $y=f(x)$, т. е. определена $x=g(y)$. Поэтому $x=g(f(x))$.

Функция g называется ***обратной функцией*** к f.

Функции f и g называются ***взаимно-обратными*** функциями. Графики взаимно-обратных функций f и g симметричны относительно прямой $y=x$.

Если функции f и g взаимно-обратны, то $D(f)=E(g)$ и $E(f)=D(g)$.

Для нахождения обратной функции из равенства $y=f(x)$ выражают x через y (если это возможно), а затем переобозначают переменные (через x – независимую переменную, через y – зависимую).

Пусть y является функцией переменной u, а переменная u, в свою очередь, является функцией от переменной x, т. е. $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$. Тогда функция $y=f(\varphi(x))$ называется ***сложной функцией*** (или ***функцией от функции***), если область определения функции f содержит множество значений функции φ. Переменная u в этом случае называется ***промежуточной переменной***.

Всякую линию на координатной плоскости, которая не имеет разрывов, называют ***кривой линией***.

График функции $y=f(x)$, который не имеет разрывов, является кривой линией. Однако не всякая кривая линия является графиком функции (график функции задается при условии, что каждому значению x соответствует ***единственное*** значение y).

Говорят, что функция $y=f(x)$, $x\in D(f)$, задана неявно уравнением

$$F(x,\,y)=0, \tag{4.2}$$

где F – некоторое выражение от переменных x, y при условии $F(x,\,f(x))=0$, $x\in D(f)$.

Функцию, заданную явно уравнением $y=f(x)$, можно привести к виду (4.2):

$$y-f(x)=0, \tag{4.3}$$

(в равенстве (4.3) $F(x,y)=y-f(x)$). Однако не всякую функцию, заданную неявно, можно задать в виде $y=f(x)$. Уравнение (4.2) не всегда однозначно разрешимо относительно переменной y или вообще не разрешимо. Оно задает часто кривую линию, но не график функции.

Для нахождения точки, лежащей на линии, которая задается уравнением (4.2), необходимо придать переменной x некоторое числовое значение, а затем из уравнения (4.2) найти соответствующее значение y (возможно, несколько значений y). Для построения соответствующей кривой придают переменной x некоторое количество числовых значений, получают множество точек, принадлежащих искомой линии (4.2). Эти точки следует соединить непрерывной линией.

Уравнения вида

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \end{cases} \quad \alpha\le t\le\beta,\ \ \alpha,\beta\in\mathbf{R} \tag{4.4}$$

называют ***параметрическими уравнениями*** линии, где t – параметр или вспомогательная переменная, а $f(t)$ и $g(t)$ – функции параметра t.

Каждому значению параметра t из заданного промежутка

$[\alpha, \beta]$ соответствуют определенные значения x и y (вычисляемые по формулам (4.4)), которые и определяют положение точки $(x; y)$ в системе координат Oxy.

Для построения линии, заданной параметрическими уравнениями, выбирают достаточное количество значений параметра $t = t_k$, где $k = \overline{1, n}$, вычисляют соответствующие значения x_k, y_k. Затем на координатной плоскости отмечают точки $M_1(x_1; y_1)$; $M_2(x_2; y_2) \ldots M_n(x_n; y_n)$, которые потом соединяют непрерывной линией.

Чтобы от уравнений (4.4) перейти к уравнению типа $y = y(x)$, необходимо исключить параметр t из уравнений системы (4.4).

Пример 1. Найти функцию, обратную данной (если она существует), и построить графики данной функции и ей обратной в одной системе координат:

1) $y = \dfrac{3x-5}{x}$; 2) $y = |x|$.

Решение. 1) Функция $y = \dfrac{3x-5}{x}$ монотонна, поэтому для нее существует обратная функция. Выразим x через y:

$$xy = 3x - 5, \quad xy - 3x = -5, \quad x(y-3) = -5,$$

т. е. $x = -\dfrac{5}{y-3}$.

Обозначим независимую переменную через x, а зависимую – через y:

$$y = -\frac{5}{x-3}.$$

Обратная к заданной функции f есть функция f^{-1}, и она имеет вид:

$$f^{-1} = -\frac{5}{x-3},$$

где $D(f^{-1}) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty) = E(f)$,

а $E(f^{-1}) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = D(f)$.

Строим графики функции f и f^{-1} (рис. 4.5).

2) Так как функция $y = |x|$ не является монотонной на промежутке $x \in (-\infty; +\infty)$, то обратной функции f^{-1} для нее не существует.

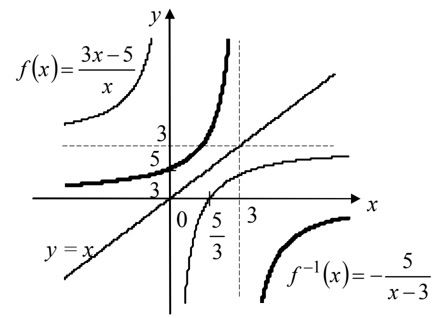


Рис. 4.5

Пример 2. Из уравнения окружности $x^2 + y^2 = 4$ выразить явно y через x.

Решение. Из уравнения $x^2 + y^2 = 4$ выразим $y^2 = 4 - x^2$, откуда получаем совокупность двух функций $\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{4 - x^2}, \\ y = -\sqrt{4 - x^2}. \end{array}\right.$

Графиком первой функции в совокупности является полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости системы Oxy, при условии, что $x \in [-2; 2]$. Графиком второй функции – полуокружность в нижней полуплоскости при условии, что $x \in [-2; 2]$.

Пример 3. Построить кривую, заданную параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = 4(1-t), \\ y = 2\sqrt{t}, \end{cases} \quad t \in [0; +\infty).$$

Решение. Для построения кривой выберем достаточное количество значений параметра t_k и вычислим соответствующие значения $(x_k; y_k)$. Данные занесем в таблицу:

t	$t_1 = 0$	$t_2 = 1$	$t_3 = 2$	$t_4 = 3$	$t_5 = 4$
x	4	0	–4	–8	–12
y	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4

Построим точки $(x_k; y_k)$ в системе координат Oxy и соединим их плавной линией (рис. 4.6).

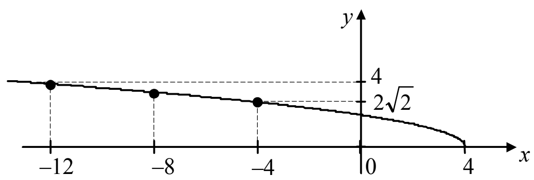


Рис. 4.6

Задания

I уровень

1.1. Найдите функцию, обратную данной, если она существует:

1) $y=-3x+6$; 2) $y=x^5$; 3) $y=|x-1|$;

4) $y=-5x-1$; 5) $y=|1-x|+2$; 6) $y=x^2+1, x\geq 0$.

1.2. Докажите, что пары функций являются взаимно-обратными:

1) $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$, если $x\in[0;+\infty)$;

2) $y=2x-4$ и $x=\dfrac{1}{2}y+2$;

3) $y=\sqrt[3]{2x}$ и $y=8x^3$;

4) $y=|3-x|$ и $y=3-x$, если $x\in(-\infty;3]$.

1.3. Постройте график функции и ей обратной (если она существует) в одной системе координат:

1) $y=x^2$, если $x\in[-\infty;0)$; 2) $y=2x+1$;

3) $y=\sqrt{x-1}$; 4) $y=|2x+3|$, если $x\in\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

1.4. Найдите точку (точки), принадлежащую кривой для заданного значения x_0:

1) $x^2-2y^2+4x-5=0$, $x_0=3$;

2) $2x^2+y^2-8x=0$, $x_0=-5$;

3) $y^2-3x^2+4=0$, $x_0=1$.

1.5. Запишите функцию (функции) в явном виде:

1) $3x-5y+7=0$; 2) $(x-1)^2+y^2=9$;

3) $\dfrac{x-2y}{x+y}=3$; 4) $x^2+2x+y-8=0$.

1.6. Найдите соответствующие точки кривой, заданной параметрически, если указаны значения параметра t: $t_1=0$; $t_2=1$; $t_3=-1$; $t_4=2$; $t_5=-2$:

1) $\begin{cases}x=t-2,\\ y=2-t;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=4-t,\\ y=t^3-4;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x=t,\\ y=\dfrac{1}{t^2+1}.\end{cases}$

II уровень

2.1. Найдите функцию, обратную данной, и постройте их графики в одной системе координат:

1) $y=x^2-1$; 2) $y=\dfrac{7}{4-x}$;

3) $y=\dfrac{2x-5}{-x}$; 4) $y=-\dfrac{7}{2-3x}$;

5) $y=\begin{cases}x-1, & \text{åñëè } x<0,\\ x^2+1, & \text{åñëè } x\geq 0;\end{cases}$ 6) $y=\begin{cases}5-x, x\leq 0,\\ \dfrac{1}{x}, x>0.\end{cases}$

2.2. Определите, обратима ли функция

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\in(-2;\ 0],\\ x+2, & x\in(0;\ 3].\end{cases}$$

2.3. Найдите точки пересечения графиков функции $y=(x+2)^2$, где $x\geq -2$, и обратной ей функции.

2.4. Пусть графиком функции является полуокружность с центром $O(0;\,0)$ и радиусом, равным 5, расположенная в нижней координатной полуплоскости. Определите, существует ли функция, обратная данной.

2.5. Пусть задана функция

$$y=\begin{cases}x^2, & \text{если } x\ge -2,\\ 4-x, & \text{если } x<2.\end{cases}$$

Найдите промежутки, на которых данная функция обратима.

2.6. Выразите явно y через x из уравнения и постройте данную линию:

1) $y^2-4xy+3x^2=0$;

2) $(x-2)^2+y^2=4$, если $y\ge 0$;

3) $y^2-4x-2=0$, если $y\le 0$;

4) $x^2+2x+y^2-4x-14=0$, если $\begin{cases}x>-1,\\ y\le 2.\end{cases}$

2.7. Постройте линию, заданную параметрически уравнениями:

1) $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t,\end{cases}$ $t\in[0;\pi]$;

2) $\begin{cases}x=2-t,\\ y=4t+5,\end{cases}$ $t\in\mathbf{R}$;

3) $\begin{cases}x=t^3,\\ y=1-t^2,\end{cases}$ $t\in\mathbf{R}$;

4) $\begin{cases}x=t,\\ y=\dfrac{1}{4}t^2,\end{cases}$ $t\in(-\infty;0]$.

III уровень

3.1. Найдите функцию, обратную данной, и постройте их графики в одной системе координат:

1) $y=\dfrac{1-x}{x+1}$;

2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

3) $y=\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$;

4) $y=5+\sqrt{4-3x}$;

5) $y=\dfrac{x}{1+4x^2}$, $x\in[1;+\infty)$;

6) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2}, & \text{при } x<-2,\\ \sqrt{x+2}, & \text{при } x\ge -2.\end{cases}$

3.2. Докажите, что функция $f(x)=\dfrac{2-x}{2+x}$ обратна сама себе.

3.3. Найдите $|a-d|$, если функция $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ обратна функции $y=\dfrac{1-x}{2x-3}$.

4.3. Преобразования графиков

Приведем графики некоторых функций:

1) $y=x$ – прямая линия (рис. 4.7);

2) $y=x^2$ – квадратичная парабола (рис. 4.8);

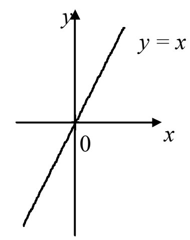


Рис. 4.7

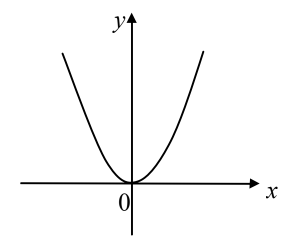


Рис. 4.8

3) $y=x^3$ – кубическая парабола (рис. 4.9);

4) $y=\dfrac{1}{x}$ – гипербола (рис. 4.10);

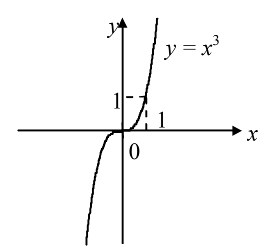


Рис. 4.9

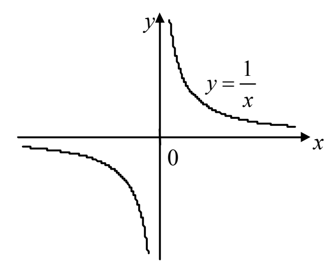


Рис. 4.10

5) $y = \sqrt{x}$ – график квадратного корня (рис. 4.11).

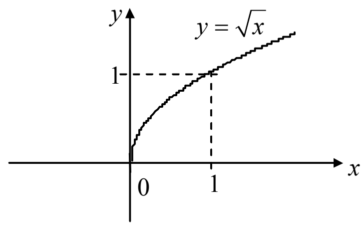


Рис. 4.11

Правила преобразования графиков:

Пусть дана функция $y = f(x)$.

1. Для построения графика функции $y = -f(x)$ исходный график функции $y = f(x)$ симметрично отображаем относительно оси Ox (рис. 4.12).

2. Для функции $y = f(-x)$ заданный график симметрично отображаем относительно оси Oy (рис. 4.13).

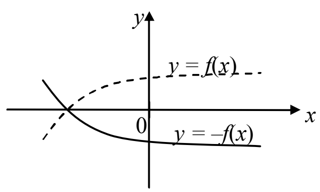


Рис. 4.12

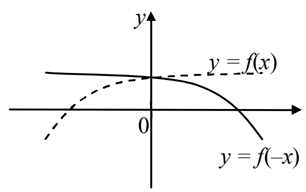


Рис. 4.13

3. Для функции $y = f(x) + b$ этот график получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на $|b|$ масштабных единиц вдоль оси Oy вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$ (рис. 4.14).

4. Для функции $y = f(x + a)$ этот график получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на $|a|$ масштабных единиц вдоль оси Ox вправо, если $a < 0$, и влево, если $a > 0$ (рис. 4.15).

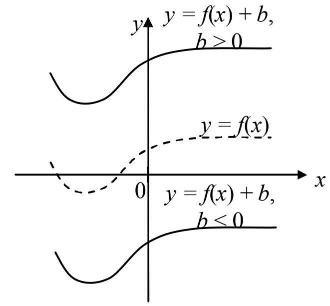


Рис. 4.14

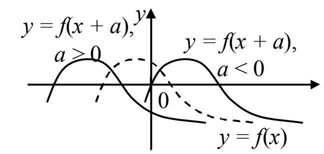


Рис. 4.15

5. Для функции $y = kf(x)$, где $k > 0$, график функции $y = f(x)$ «растянут» в k раз вдоль оси Oy (от оси Ox), если $k > 1$; «сжат» в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Oy (к оси Ox), если $0 < k < 1$ (рис. 4.16).

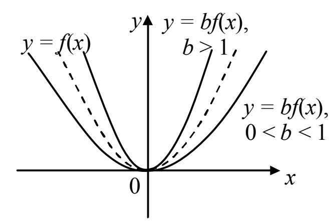


Рис. 4.16

6. Для функции $y = f(mx)$, где $m > 0$, график $y = f(x)$ «растянут» вдоль оси Ox (от оси Oy) в $\frac{1}{m}$ раз при $0 < m < 1$; «сжат» вдоль Ox (к оси Oy) в m раз, при $m > 1$ (рис. 4.17).

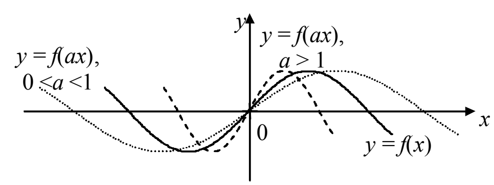


Рис. 4.17

7. Для функции $y = |f(x)|$ сохраняется та часть графика функции $y = f(x)$, которая находится над осью Ox и на оси Ox, а та часть, которая находится под осью Ox, отображается симметрично оси Ox в верхнюю полуплоскость (рис. 4.18).

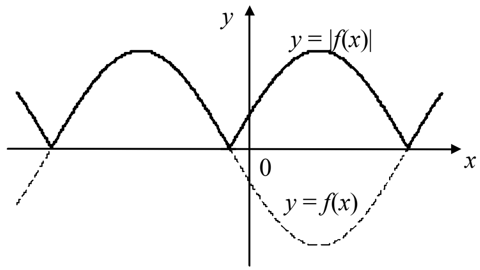


Рис. 4.18

8. Для функции $y = f(|x|)$ часть графика функции $y = f(x)$, соответствующая отрицательному значению x, отбрасывается, а неотрицательному – сохраняется и дополняется симметричной ей относительно оси Oy частью (рис. 4.19).

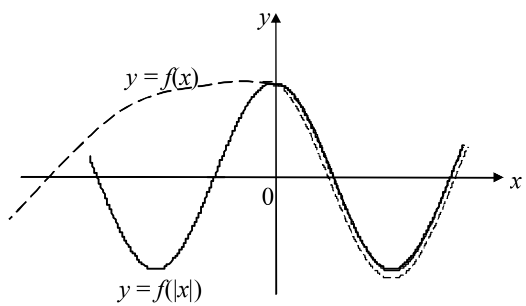


Рис. 4.19

Пример 1. Построить график функции $y = -x^2 - 2x - 3$.

Решение. Преобразуем заданную функцию:

$$-x^2 - 2x - 3 = -(x^2 + 2x) - 3 = -(x^2 + 2x + 1 - 1) - 3 =$$
$$= -(x^2 + 2x + 1) + 1 - 3 = -(x + 1)^2 - 2.$$

Получили $y = -(x+1)^2 - 2$.

Для построения графика полученной функции используем следующие преобразования:

1) строим график функции $y = x^2$;

2) график функции $y = (x+1)^2$ получаем из графика функции $y = x^2$ путем движения его на единицу влево по оси Ox;

3) график функции $y = -(x+1)^2$ получаем из предыдущего симметричным отображением относительно оси Ox;

4) график заданной функции получаем из графика функции $y = -(x+1)^2$ параллельным переносом на две единицы вниз по оси Oy (рис. 4.20).

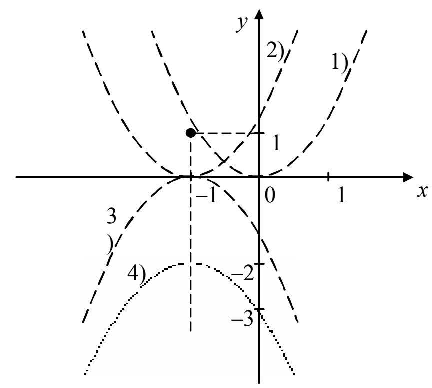


Рис. 4.20

Пример 2. Построить график функции $y = \sqrt{8 - 4x}$.

Решение. Вначале преобразуем формулу, задающую функцию: $y = 2\sqrt{2 - x}$.

Шаги построения (рис. 4.21):

1) $y = \sqrt{x}$;

2) $y = \sqrt{-x}$ – отображение симметрично оси Oy в левую полуплоскость;

3) $y = \sqrt{-(x-2)}$ – смещение вдоль оси Ox вправо на две единицы;

4) $y = 2\sqrt{2 - x}$ – увеличение коэффициента роста в два раза.

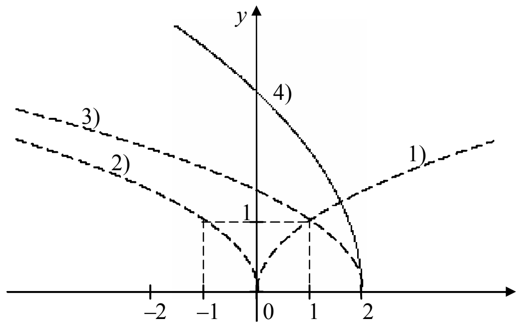


Рис. 4.21

Пример 3. Построить график функции $y=\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$ и найти наибольшее значение функции, если $x\in\left[-4;-\dfrac{3}{2}\right]$.

Решение. $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

Преобразуем функцию

$$y=\left|\frac{(x+1)+1}{x+1}\right|=\left|1+\frac{1}{x+1}\right|.$$

Данный график может быть получен из графика функции $y=\dfrac{1}{x}$ следующими преобразованиями (рис. 4.22):

1) $y=\dfrac{1}{x+1}$ – смещение вдоль оси Ox на единицу влево;

2) $y=1+\dfrac{1}{x+1}$ – смещение вдоль оси Oy вверх на единицу;

3) $y=\left|1+\dfrac{1}{x+1}\right|$ – отображение той части графика y_3, которая расположена ниже оси Ox, в верхнюю полуплоскость (рис. 4.22). Заметим, что такие же преобразования необходимо применить к асимптотам функции $x=0$ (вертикальной) и $y=0$ (горизонтальной).

Анализ графика показывает, что наибольшее значение на $\left[-4;-\dfrac{3}{2}\right]$ функция достигает в точке $x=-\dfrac{3}{2}$. Вычисляем его:

$$y_{наиб}=\left|\frac{-\frac{3}{2}+2}{-\frac{3}{2}+1}\right|=1.$$

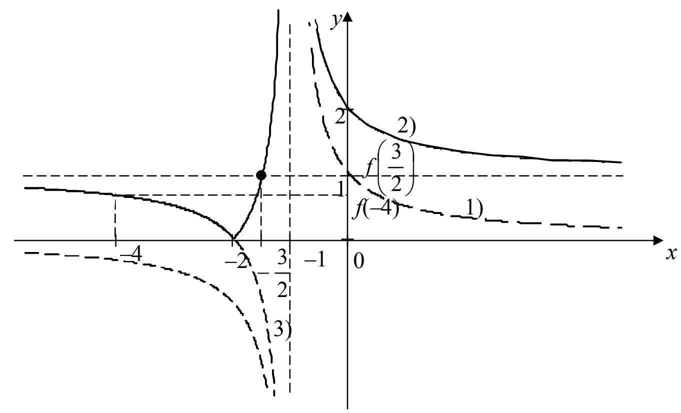


Рис. 4.22

Пример 4. Определить, при каком значении a уравнение имеет ровно 3 решения:

$\left|x^2-2x-3\right|=a.$

Решение. Решим задачу графически.

Построим графики функций $y=\left|x^2-2x-3\right|$ и $y=a$ и исследуем, при каком значении a они имеют ровно 3 общие точки.

Строим график функции $y=x^2-2x-3$.

Поскольку $x^2-2x-3=(x^2-2x+1)-4=(x-1)^2-4$, то $y=(x-1)^2-4$ – это парабола, вершина которой смещена в точку $O'(1;-4)$.

Для построения графика функции $y=\left|x^2-2x-3\right|$ сохраняем ту часть графика параболы, которая находится над осью Ox и на оси Ox, а ту часть графика, которая находится под осью Ox, отображаем симметрично оси Ox в верхнюю полуплоскость.

$y=a$ – прямая, параллельная оси Ox (рис. 4.23).

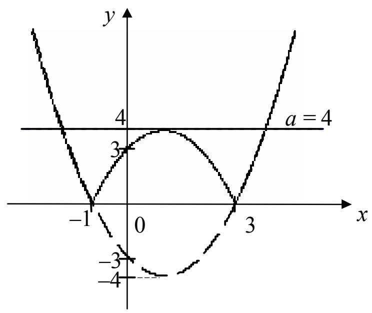


Рис. 4.23

По построению видно, что ровно 3 решения будет тогда и только тогда, когда $a = 4$.

Задания

I уровень

1.1. Постройте график функции:

1) $y = -x^2 - 4x + 2$; 2) $y = \dfrac{2x-1}{x}$; 3) $y = 2\sqrt{x+4}$;

4) $y = \dfrac{1}{3}(x-2)^3 + 4$; 5) $y = -\left|\dfrac{1}{x} + 4\right|$; 6) $y = 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$;

7) $y = \dfrac{-2}{x+3} - 1$; 8) $y = (x-2)^2 - 2x$; 9) $y = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$.

II уровень

2.1. Постройте график функции:

1) $y = -3 - \sqrt{-x}$; 2) $y = \left|\dfrac{2x}{2x+2}\right| - 1$;

3) $y = -|1-x| + 3$; 4) $y = |x^2 - 4x + 3| - 2$;

5) $4 - \sqrt{1-2x}$; 6) $y = \dfrac{5x}{3-4x} - 2$;

7) $y = 2 - \dfrac{1}{2}|x+5|$; 8) $y = \dfrac{x^2 - |x| - 2}{x-1}$.

2.2. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 4, \text{ åñëè } \tilde{o} \ge 0, \\ 4, \text{ åñëè } -4 \le \tilde{o} < 4, \\ |x+8|, \text{ åñëè } \tilde{o} < -4; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1}, \text{ åñëè } \tilde{o} \ge 1, \\ \sqrt{-\tilde{o}+1}, \text{ åñëè } \tilde{o} < 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2}, \text{ åñëè } \tilde{o} \le -2, \\ \tilde{o} - 2\acute{o}, \text{ åñëè } -2 \le \tilde{o} \le 4, \\ \dfrac{4(\tilde{o}+1)}{\tilde{o}}, \text{ åñëè } \tilde{o} > 4; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} \dfrac{2-x}{x+2}, \text{ åñëè } \tilde{o} \le 0, \\ 3\tilde{o} - 5\acute{o} - 15, \text{ åñëè } \tilde{o} > 0. \end{cases}$

2.3. Определите, при каком значении a система имеет ровно одно решение:

1) $\begin{cases} y^2 + 2y + 6 = 6x - x^2, \\ y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 8x + 16} - y + 5 = 0, \\ (x-4)^2 + y^2 + 2y - a = 0. \end{cases}$

2.4. Определите, при каких значениях a система имеет ровно два решения:

1) $\begin{cases} x - a = 0, \\ y^2 + x^2 + 4x = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = |2x+1| + a, \\ y = 2 - x - x^2. \end{cases}$

В ответе запишите сумму полученных значений.

III уровень

3.1. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x^2-1}{1+x^2}\right)^2}}$; 2) $y = \left|3\sqrt{|x|-1} - 3\right|$;

3) $y = -\dfrac{|x^2 - 2x + 1|}{x-1} - |2-x|$; 4) $5y + \dfrac{1}{|x|} = 0$.

3.2. Определите, при каком значении b система $\begin{cases} y = |x| - b, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

имеет:

1) одно единственное решение;
2) ровно три решения;
3) более трех решений;
4) не имеет решений.

3.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3 - 2\left|x^3\right|$, если $x \in [-2;\ 2]$. Выполните построение.

4.4. Неравенства с двумя переменными и их системы

Неравенством с двумя переменными *x и y* называется неравенство вида

$F(x;\ y) > 0$ (или знак $\geq, <, \leq$),

где $F(x;\ y)$ – некоторое выражение с данными переменными.

Решением неравенства с двумя переменными называют упорядоченную пару чисел $(x;\ y)$, при которой это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти множество всех его решений. Решением неравенства с двумя переменными является некоторое множество точек координатной плоскости.

Основным методом решений данных неравенств является *графический*. Он заключается в том, что строят линии границ (если неравенство строгое, линии строят пунктиром). Уравнение границы получают, если в заданном неравенстве заменяют знак неравенства на знак равенства. Все линии в совокупности разбивают координатную плоскость на части. Искомое множество точек, которое соответствует заданному неравенству или системе неравенств, можно определить, если взять контрольную точку внутри каждой области.

Системы, содержащие неравенства с двумя переменными, вида

$$\begin{cases} F_1(x;\ y) > 0, \\ F_2(x;\ y) \leq 0, \\ F_3(x;\ y) \geq 0 \end{cases}$$

называются ***системами неравенств с двумя переменными***. Решением данных систем является пересечение решений всех неравенств, входящих в систему.

Совокупность неравенств с двумя переменными имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} F_1(x;\ y) \geq 0, \\ F_2(x;\ y) > 0, \\ \ldots \\ F_n(x;\ y) < 0. \end{array}\right.$$

Решением совокупности является объединение всех решений неравенств.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 4, \\ x^2 > y. \end{cases}$

Решение. Построим в системе *Oxy* соответствующие линии (рис. 4.24):

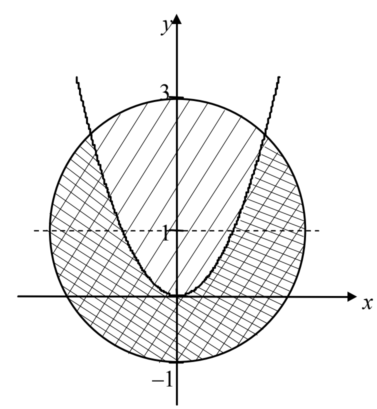


Рис. 4.24

Уравнение $x^2 + (y-1)^2 = 4$ задает окружность с центром в точке $O'(0;\ 1)$ и $R = 2$.

Уравнение $y = x^2$ определяет параболу с вершиной в точке $O(0;\ 0)$.

Найдем решения каждого из неравенств, входящих в систему. Первому неравенству соответствует область внутри окружности и сама окружность (в справедливости этого убеждаемся, если подставим в неравенство координаты любой точки из этой области). Второму неравенству соответствует область, расположенная под параболой.

Решение системы – пересечение двух указанных областей (на рис. 4.24 показано наложением двух штриховок).

Задания

I уровень

1.1. Решите графически:

1) $x^2+y^2\ge 4$; 2) $x+y-5<0$;

3) $y>x^2$; 4) $4<x^2+y^2\le 25$;

5) $\begin{cases} x+y\le 1, \\ y\ge 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-2x+3>0, \\ y-2x+1\le 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2\le 16, \\ y=x^2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y\ge x^2+1, \\ y<|x|-2. \end{cases}$

II уровень

2.1. Решите графически:

1) $\begin{cases} (x-2)^2+(y+4)^2\le 16, \\ y+|x-2|<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y\le\sqrt{2-x}, \\ x\ge y-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y<\dfrac{1}{x+2}, \\ 2-y\ge 0. \end{cases}$

2.2. Найдите количество целочисленных решений системы:

1) $\begin{cases} xy\le 4, \\ y>x^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -|x|\le y, \\ 2x^2-y\ge 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -\left|x^2+2x+1\right|<y, \\ x^2-(y-1)^2\ge 0, \\ x-y\ge 4. \end{cases}$

2.3. Найдите все целочисленные решения системы:

1) $\begin{cases} (2-x)^2+(y-2)^2\le 25, \\ x^2+y^2>4, \\ x=-y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-x+7>0, \\ x\le 0, \\ y>0, \\ -x^2+2\le 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}\ge 0, \\ x^2+y^2-5>0. \end{cases}$

2.4. Решите неравенство. В ответе укажите количество решений с двумя целочисленными координатами:

$$x^2+y^2-4(x-|y|)\le 0.$$

III уровень

3.1. Найдите количество целочисленных решений системы:

1) $\begin{cases} |x|-|y|=x-y, \\ y^2+2(x-4)<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2\le 16, \\ |y|\ge\left|x^2\right|. \end{cases}$

3.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет решение:

1) $\begin{cases} x^2+y^2-4y<5, \\ y=ax^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+(2-5a)x+a^2+2x<0, \\ x^2+a^2=25. \end{cases}$

3.3. Определите, при каких значениях a неравенство $4>|x-a|+(x+1)^2$ имеет положительные решения.

3.4. Определите, при каких значениях a система имеет единственное решение:

1) $\begin{cases} y-5x\ge 3a+12, \\ x+y\ge -2a+5, \\ 3y-x\le 4a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x|+3|y|\le 24, \\ y\ge a; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2|x|+|y|\le 6, \\ x\ge b. \end{cases}$

3.5. В зависимости от значения a определите число решений системы

$$\begin{cases} 3x\ge a+y, \\ 3y\ge a+y, \\ a\left(x^2+y^2\right)\le 4. \end{cases}$$

3.6. Решите графически:

1) $(x-8)\cdot(y+3)\ge 0$; 2) $x^2-9y^2<0$.

5. СТЕПЕНИ И КОРНИ

5.1. Корень *n*-й степени

Для всякого числа $a \in \mathbf{R}$ определена степень с натуральным показателем a^n, $n \in \mathbf{N}$.

Число $b \in \mathbf{R}$ называется ***корнем n-й степени***, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, из числа a, если $b^n = a$, обозначают $\sqrt[n]{a}$.

Нахождение корня n-й степени из данного числа a называют ***извлечением корня n-й степени*** из числа a. Число a, из которого извлекается корень n-й степени, называют ***подкоренным выражением***, а число n – ***показателем корня***.

Если $n = 2k+1$, $(k \in \mathbf{N})$, то $\sqrt[2k+1]{a}$ определен для всех $a \in \mathbf{R}$ и принимает любые действительные значения.

Если $n = 2k$, $(k \in \mathbf{N})$, то $\sqrt[2k]{a}$ определен для всех $a \geq 0$ ($a \in \mathbf{R}$). В курсе элементарной математики рассматривают ***арифметическое значение корня,*** т. е. число $\sqrt[2k]{a} \geq 0$.

Свойства корней

Пусть a, $b \in \mathbf{R}$, тогда:

1) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$;

2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \begin{cases} a, \ \text{åñëè} \quad n = 2k+1, \\ a \geq 0, \ \text{åñëè} \quad n = 2k; \end{cases}$

3) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \ \text{åñëè} \quad n = 2k+1, \\ |a|, \ \text{åñëè} \quad n = 2k; \end{cases}$

4) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \ \text{åñëè} \quad n = 2k+1, \\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}, \ \text{åñëè} \quad n = 2k, \ a \cdot b \geq 0; \end{cases}$

5) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \ \text{åñëè} \quad n = 2k+1, \ b \neq 0, \\ \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}, \ \text{åñëè} \quad n = 2k, \ a \cdot b \geq 0, \ b \neq 0; \end{cases}$

6) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in \mathbf{R}$, где $a \geq 0$ в случае $n = 2k$;

7) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$, $k \in \mathbf{N}$, где $a^m \geq 0$ в случае $n = 2k$;

8) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, где $a \geq 0$ в случае $n = 2k$.

Пример 1. Вычислить $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Решение. *1-й способ.* Выделим полные квадраты подкоренных выражений:

$$7+4\sqrt{3} = 4+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+3 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2;$$

$$7-4\sqrt{3} = 4-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+3 = \left(2-\sqrt{3}\right)^2.$$

Тогда получим

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \left|2+\sqrt{3}\right| + \left|2-\sqrt{3}\right| = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4.$$

2-й способ. Обозначим вычисляемое выражение через a, т. е. $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = a$. Заметим, что $a > 0$.

Возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$$a^2 = \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 = 7+4\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)} +$$

$$+7-4\sqrt{3} = 14+2\sqrt{49-16\cdot 3} = 14+2 = 16.$$

Тогда $a = \pm 4$.

Поскольку исходное выражение положительно, в ответе получаем $a = 4$.

Пример 2. Упростить выражение $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 + 3\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2}{a-b}$.

Решение. *1-й способ.* Используем формулы квадрата разности и суммы, а также свойства корней. Получаем:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 + 3\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2}{a-b} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} + 3\sqrt[3]{a^2} + 6\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{b^2}}{a-b} = \frac{4\sqrt[3]{a^2} + 4\sqrt[3]{ab} + 4\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{b}\right)^3} =$$

$$= \frac{4\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)} = \frac{4}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}.$$

2-й способ. При упрощении иррациональных выражений часто бывает эффективным ***метод рационализации***, основанный на замене переменных.

Введем такую замену переменных, чтобы корни извлеклись: $a = x^3$, $b = y^3$.

Заданное выражение приобретает вид

$$\frac{(x-y)^2+3(x+y)^2}{x^3-y^3}.$$

Упрощаем его, используя формулы сокращенного умножения:

$$\frac{(x-y)^2+3(x+y)^2}{x^3-y^3} = \frac{x^2-2xy+y^2+3\left(x^2+2xy+y^2\right)}{(x-y)\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)} =$$

$$= \frac{x^2-2xy+y^2+3x^2+6xy+3y^2}{(x-y)\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)} = \frac{4x^2+4xy+4y^2}{(x-y)\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)} =$$

$$= \frac{4\left(x^2+xy+y^2\right)}{(x-y)\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)} = \frac{4}{x-y}.$$

Возвращаясь к старым переменным, приходим к ответу $\frac{4}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

Пример 3. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}}$.

Решение. 1) Умножим числитель и знаменатель дважды на сопряженные выражения и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{3}}{\left(\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2-3} =$$

$$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{10+2\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\left(5+\sqrt{35}\right)} = \frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(5-\sqrt{35}\right)}{2\left(5+\sqrt{35}\right)\cdot\left(5-\sqrt{35}\right)} =$$

$$= \frac{\left(5-\sqrt{35}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2(25-35)} = \frac{\left(5-\sqrt{35}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{-20} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{35}-5\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{20}.$$

2) Домножим числитель и знаменатель на неполный квадрат разности и воспользуемся формулой суммы кубов:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3}} = \frac{\left(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{7\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{7\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{7\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3} = \frac{\left(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{7\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{10}.$$

3) Умножим числитель и знаменатель дважды на сопряженные выражения:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}\right)} = \frac{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^2-\left(\sqrt[4]{3}\right)^2} = \frac{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2-3} = \frac{\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{-1} =$$

$$= \left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right).$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите значения корней:

1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt[6]{64}$; 4) $\sqrt[5]{243}$;

5) $\sqrt[3]{216}$; 6) $\sqrt[4]{2401}$; 7) $\sqrt[3]{-0{,}125}$; 8) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$;

9) $\sqrt[3]{-0{,}343}$; 10) $\sqrt[3]{\frac{27\cdot 125}{8}}$; 11) $\sqrt[4]{\frac{81}{625\cdot 2401}}$; 12) $\sqrt{\sqrt{16}}$;

13) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$; 14) $\sqrt{\sqrt[5]{1024}}$; 15) $\sqrt[3]{-64\cdot\sqrt{729}}$.

1.2. Сравните числа:

1) $\sqrt[4]{4}$ и $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{99}}$ и $\sqrt[10]{10}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ и $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2$;

4) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{6}-1$; 5) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[6]{40}$; 6) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[8]{500}$;

7) $\sqrt[5]{-5}$ и $\sqrt[3]{-3}$; 8) $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}$ и 1; 9) $\sqrt[5]{\dfrac{1990}{1992}}$ и $\sqrt[5]{\dfrac{1989}{1991}}$;

10) $\sqrt{5\sqrt{3}}$ и $\sqrt{6\sqrt{2}}$; 11) 3 и $\sqrt{5}$; 12) $\sqrt[4]{26}$ и $\sqrt{5}$;

13) $-\sqrt[4]{4}$ и $-\sqrt[3]{3}$; 14) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ и $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$.

1.3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 3) $\dfrac{2}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}$; 4) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}$;

5) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{9}}$; 6) $\dfrac{-1}{\sqrt[6]{16}}$; 7) $\dfrac{4}{1+\sqrt{5}}$; 8) $\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$;

9) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 10) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}+5}$; 11) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3+2\sqrt{3}}}$.

1.4. Упростите выражение:

1) $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=0$;

2) $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=-115$;

3) $\sqrt{\left|12\sqrt{5}-29\right|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}=-6$;

4) $\sqrt[3]{\dfrac{23}{64}+\sqrt{\dfrac{5}{48^2-32^2}}}=\dfrac{3}{4}$;

5) $\left(5-3\sqrt{2}\right)\sqrt{43+5\sqrt{72}}=7$;

6) $\sqrt{\left(\sqrt{97}+4\right)\sqrt{113-8\sqrt{97}}}=2$;

7) $\dfrac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}=1$;

8) $\sqrt[4]{626+\sqrt{6}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}}=5$;

9) $\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}=1$;

10) $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt[3]{6}\right)^6}\cdot\left(1+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}\right)=5$;

11) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{12}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt[4]{12}}\cdot\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}=-2$;

12) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\dfrac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{7\pi}{4}=2$;

13) $\dfrac{\left(5^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{0,25}=28$;

14) $\dfrac{3\left(15^{\frac{1}{2}}-7^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{7}\right)}{3+\left(\dfrac{9}{13}\right)}=6,5$;

15) $\dfrac{\left(3^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\right)72^{\frac{1}{2}}}{3\left(2\sqrt{6}-16^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(64^{\frac{1}{3}}+1\right)}=0,2$.

II уровень

2.1. Упростите выражение:

1) $\left(4\sqrt{5}-4-\sqrt{55}+\sqrt{11}\right)\cdot\left(4\sqrt{5}+4+\sqrt{55}+\sqrt{11}\right)=20$;

2) $\dfrac{\left(5\sqrt{3}+\sqrt{50}\right)\cdot\left(5-\sqrt{24}\right)}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}=1$;

3) $\dfrac{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{24}+3+\sqrt{16}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{12}+2\sqrt{2}}=2,5$;

4) $\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{11}\right)\cdot\left(\sqrt{33}+\sqrt{15}-\sqrt{22}-\sqrt{10}\right)}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}=-1,2$;

5) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}}{3-\sqrt{3}}+\dfrac{1+3^{-0,5}}{3^{-0,25}}\right)^2\cdot\left(4-\dfrac{6}{\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

6) $\left(\dfrac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\dfrac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^{2}=8;$

7) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{-2}\right)^{-6}\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)^{3}}+\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-2}\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)^{2}}=-1;$

8) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=1;$

9) $\sqrt{3-\sqrt{3-4\sqrt{12-2\sqrt{27+8\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}}}.$

2.2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}};$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1};$ 3) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}};$

4) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}};$ 5) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}};$ 6) $\dfrac{2}{\sqrt{2+3\sqrt{2}}};$

7) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}};$ 8) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}};$ 9) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2};$

10) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}};$ 11) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}};$ 12) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}.$

2.3. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{\left(a+\sqrt[3]{a^{2}b}\right):\left(b+\sqrt[3]{ab^{2}}\right)-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{3}=\dfrac{a}{b^{2}};$

2) $\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^{2}}}{\sqrt[3]{a}+a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{2}+3\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^{2}\right);$

3) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}:\left(\dfrac{\sqrt{x+y-2\sqrt{xy}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1};$

4) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{xy^{3}}-\sqrt[4]{x^{3}y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\sqrt{1+2\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\dfrac{x}{y}}.$

III уровень

3.1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}};$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{25}};$ 3) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}};$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}};$ 5) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{11}};$ 6) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3}-1};$

7) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{8}-1};$ 8) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}};$ 9) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{7}-\sqrt[8]{5}};$

10) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7}};$ 11) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{5}};$ 12) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{5}};$

13) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{13}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}}.$

3.2. Упростите выражение:

1) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4;$ 2) $\dfrac{\sqrt{8+3\sqrt{7}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}};$

3) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\sqrt[3]{\dfrac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}};$ 4) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{10+7\sqrt{2}}{10-7\sqrt{2}}};$

5) $\dfrac{\left(\sqrt{20}-\sqrt[3]{16}\right)\cdot\left(\sqrt{45}+\sqrt[3]{54}\right)}{2\left(7-\sqrt[3]{54}\right)-\left(\sqrt[3]{2}-3\right)^{2}};$ 6) $\sqrt{8+\sqrt{8}+\sqrt{20}+\sqrt{40}};$

7) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}};$ 8) $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

9) $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}};$

10) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$

5.2. Степень с произвольным действительным показателем

Во множестве **R** определена степень a^x с действительным показателем.

В выражении a^x число a называют ***основанием степени***, число x – ***показателем степени***. Нахождение значения степени называют ***возведением в степень***.

Степень с действительным показателем

Пусть $a \in$ **R**, тогда:

1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{ðàç}}$, $n \in \mathbf{N}$;

2) $a^0 = 1,\ a \neq 0$;

3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\ n \in \mathbf{N},\ a \neq 0$;

4) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ n \in \mathbf{N},\ n \geq 2$ и $a \geq 0$, если $n = 2k,\ k \in \mathbf{N}$;

5) $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m,\ n \in \mathbf{N},\ n \geq 2,\ m \in \mathbf{N}$ и если $n = 2k,\ k \in \mathbf{N}$, то $a \geq 0$;

6) $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}},\ a \neq 0,\ n \in \mathbf{N},\ n \geq 2,\ m \in \mathbf{N}$ и если $n = 2k,\ k \in \mathbf{N}$, $a > 0$;

7) a^k, где $k \in \mathbf{I}$, определяется следующим образом.

Пусть иррациональное число k записано в виде десятичной дроби, $u(k_n)$ – последовательность его десятичных приближений с недостатком (или с избытком). Для любого действительного числа $a > 0$ степень a^k с иррациональным показателем определяется равенством

$$a^k = \lim_{n \to \infty} a^{k_n}.$$

На множестве **R** не определены отрицательная и нулевая степень числа 0, а также $a^{\frac{1}{n}}$, если $a < 0\quad n = 2k,\quad k \in \mathbf{N}$.

Свойства степеней

Допустим, что $a, b, c \in$ **R** и это такие числа, что все степени

имеют смысл. Тогда:

1) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$;

2) $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$;

3) $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$;

4) $a^c \cdot b^c = \left(a \cdot b\right)^c$;

5) $\dfrac{a^c}{b^c} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^c$;

6) если $a > 1$ и $x < y$, то $a^x < a^y$,
если $0 < a < 1$ и $x < y$, то $a^x > a^y$;

7) если $0 < a < b$ и $x > 0$, то $a^x < b^x$,
если $0 < a < b$ и $x < 0$, то $a^x > b^x$.

Пример 1. Вычислить $\dfrac{(2e)^6 \cdot e^3 - 32e^8 \cdot e^0}{(8e)^3 \cdot e^6 + 2^0 \cdot 256e^9}$.

Решение. Используем свойства степеней

$$\frac{(2e)^6 \cdot e^3 - 32e^8 \cdot e^0}{(8e)^3 \cdot e^6 + 2^0 \cdot 128 \cdot e^9} = \frac{2^6 \cdot e^6 \cdot e^3 - 2^5 \cdot e^8 \cdot 1}{\left(2^2\right)^3 \cdot e^3 \cdot e^6 + 1 \cdot 2^7 \cdot e^9} = \frac{2^6 \cdot e^{6+3} - 2^5 \cdot e^8}{2^6 \cdot e^{3+6} + 2^7 \cdot e^9} =$$

$$= \frac{2^6 \cdot e^9 - 2^5 \cdot e^8}{2^6 \cdot e^9 + 2^7 \cdot e^9} = \frac{2^5 \cdot e^8 (2e - 1)}{2^6 \cdot e^9 (1 + 2)} = \frac{2e - 1}{6e}.$$

Пришли к ответу: $\dfrac{2e-1}{6e}$.

Задания

I уровень

1.1. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{5\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5}}$;

2) $\left(\sqrt{3} : \sqrt[5]{3}\right)^2$;

3) $\sqrt{5^2\sqrt{5}}$;

4) $\left(\sqrt[6]{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\right)^2$;

5) $\left(\sqrt[3]{4\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}\right)^{\frac{1}{6}}$; 6) $\sqrt[4]{125\sqrt[3]{625\sqrt{5}}} : \sqrt[5]{\sqrt[3]{5}}$;

7) $\sqrt{3\sqrt[3]{9\sqrt{27\sqrt{3}}}}$; 8) $\sqrt{2\sqrt[4]{2\sqrt[8]{2}}}$;

9) $\sqrt[4]{729 : \sqrt[3]{243 : \sqrt{27}}}$; 10) $\sqrt[5]{5\sqrt[5]{25\sqrt[5]{125\sqrt[5]{625}}}}$;

11) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}$; 12) $\left(\frac{y}{x}\sqrt[4]{x^2y^4}\right)^3 : \left(\frac{x}{y}\sqrt[6]{\frac{y}{x}}\right)^2$;

13) $xy\sqrt[4]{x^2y^2}$; 14) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^{-5}} \cdot \sqrt{a\sqrt{a}}$.

1.2. Выполните действия:

1) $\frac{(-2)^8 \cdot 5^3}{5^4 \cdot 2^{10} \cdot 10}$; 2) $\left(2\frac{10}{27}\right)^7 \cdot (0,75)^{-5}$; 3) $\frac{42^{20}}{21^{10} \cdot 6^{15}}$;

4) $\frac{2^3 + 2^{-3}}{4^3 + 1}$; 5) $(-16)^3 : \left(4^{-2}\right)^{-3}$; 6) $\left(27^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{\frac{2}{5}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

7) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4^{-2}\right) : \left(\left(\frac{5}{6}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)$; 8) $\left(\left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^8 + \left(\frac{3}{2}\right)^0\right)^{-2}$;

9) $\dfrac{\left(\frac{1}{18}\right)^5 \cdot 64 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}$.

1.3. Найдите x из уравнения:

1) $x^{0,2} = \sqrt{2}$; 2) $x\sqrt[3]{x} = 27$; 3) $x^{-3,2} = 7\sqrt[3]{7}$;

4) $x^{\frac{3}{2}} = 27$; 5) $x^{-0,4} = \sqrt[3]{9}$; 6) $x\sqrt{x} = \sqrt{3}$.

1.4. Упростите выражение

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y}\right) \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x + y} - \frac{2y}{x - y}.$$

II уровень

2.1. Вычислите:

1) $\frac{234^{-4} - 117^{-2}}{234^{-2}\left(468^{-2} - 1\right)}$;

2) $\left(7^{0,25} - 0,25^{0,25}\right) : \left(\frac{7^{-0,75}}{4} - \frac{0,25^{1,25}}{7}\right)$;

3) $\left(\left(3 - \sqrt{5}\right)^{-1} + 0,2 \cdot 5^{0,5}\left(1 + 5^{0,5}\right)^{-1}\right)\left(5 - 5^{-0,5}\right)$;

4) $\left(20 \cdot 2^4 - 12 \cdot 2^3 - 48 \cdot 2^2\right)^2 : (-8)^3$;

5) $\frac{7^{30} \cdot 5^{18} - 3^{12} \cdot 5^{18} \cdot 7^{30}}{32^{24} \cdot 3^{12} - 3^{-6} \cdot 15^{24} + 5^6 \cdot 21^{24}}$;

6) $\frac{2187 \cdot 729 + 243 \cdot 81 \cdot 27}{3^2 \cdot 9^2 \cdot 243 + 18 \cdot 54 \cdot 162 \cdot 9}$.

2.2. Упростите выражение:

1) $\left(\left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)^{-1} + \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^{-1}\right)^{-2} : \frac{a - b}{4\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}$;

2) $\dfrac{\left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(a^{-\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)} - 2a + \frac{4a^2}{a - b}$;

3) $\dfrac{\left((k+m)^{-\frac{1}{2}} + (k-m)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} + \left((k+m)^{-\frac{1}{2}} - (k-m)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{\left((k+m)^{-\frac{1}{2}} + (k-m)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} - \left((k+m)^{-\frac{1}{2}} - (k-m)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}$.

III уровень

3.1. Вычислите:

1) $6^{45} - \left(2^8 \cdot 3^9 - 1\right) \cdot \left(3^{36} \cdot 2^{37} + 3^{18} \cdot 2^{21} + 3^9 \cdot 2^{13} + 2^5\right)$;

2) $128^6 - 126 \cdot 127 \cdot 128 \cdot 129 \cdot 130 + 2^{16}$;

3) $\left(1+7^{7}+7^{12}\right)^{-1}+\left(1+7^{-7}+7^{5}\right)^{-1}+\left(1+7^{-12}+7^{-5}\right)^{-1}$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{3^{1-n}}\,(75)^{0,5}}{\left(3^{n}\cdot 5^{-2,5}\right)^{-0,25}}\right)^{2,(6)}$, $n\in\mathbf{Z}$;

5) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}\right)^{1-n}}\left(49\sqrt{3}\right)^{0,5}}{\left(3^{0,5n}\cdot 7^{-2,5}\right)^{-0,25}}\right)^{\frac{8}{3}}$, $n\in\mathbf{Z}$.

3.2. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-2ab^{\frac{1}{3}}+(ab)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a^{2}}-\sqrt[3]{ab}}+\dfrac{\left(a^{2}b\right)^{\frac{1}{3}}\left(ab^{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^{2}}-\sqrt[3]{ab}}$ при $\grave{a}=2\sqrt{2}$;

2) $\dfrac{2a^{-2}-\dfrac{a^{-3}}{2}}{a^{-2,5}-\dfrac{1}{2}a^{-3}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-a^{-2}}{a^{1}+a^{1,5}+a^{-2}}=3\sqrt{a},\ a>0,\ a\neq\dfrac{1}{4}.$

5.3. Степенная функция

Функция $y=x^{\alpha}$, где x – переменная величина, α – заданное число, называется ***степенной функцией***.

Если $\alpha=1$, то $y=x$ – линейная функция, ее график – прямая линия (см. параграф 4.3, рис. 4.7).

Если $\alpha=2$, то $y=x^{2}$ – квадратичная функция, ее график – парабола (см. параграф 4.3, рис. 4.8).

Если $\alpha=3$, то $y=x^{3}$, ее график – кубическая парабола (см. параграф 4.3, рис. 4.9).

Степенная функция $y=\sqrt[3]{x}$.

Это обратная функция для $y=x^{3}$.

1. *Область определения:* $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$.
2. *Множество значений:* $E(y)=(-\infty;\ +\infty)$.

3. *Четность и нечетность:* функция нечетная.
4. *Периодичность функции:* непериодическая.
5. *Нули функции:* $x = 0$ – единственный нуль.
6. *Наибольшее и наименьшее значения функции:* наибольшего и наименьшего значений функция не имеет.
7. *Промежутки возрастания и убывания:* функция является возрастающей на всей области определения.
8. *График функции* симметричен графику кубической параболы относительно прямой $y = x$ и изображен на рис. 5.1.

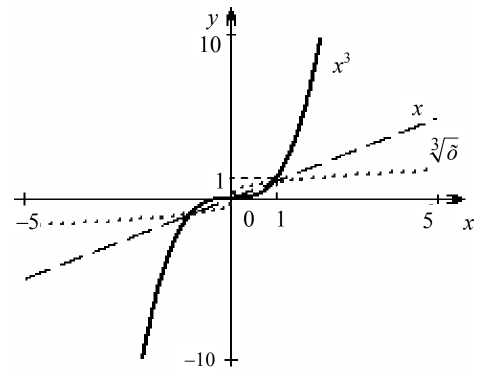


Рис. 5.1

Степенная функция $y=x^{2n}$, $n\in\mathbf{N}$.

1. *Область определения:* $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$.
2. *Множество значений:* $E(y)=\left[0;\ +\infty\right)$.
3. *Четность и нечетность:* функция четная.
4. *Периодичность функции:* непериодическая.
5. *Нули функции:* единственный нуль $x = 0$.
6. *Наибольшее и наименьшее значения функции:* принимает наименьшее значение для $x = 0$, оно равно 0.
7. *Промежутки возрастания и убывания:* функция является убывающей на промежутке $\left(-\infty;\ 0\right]$ и возрастающей на промежутке $\left[0;\ +\infty\right)$.
8. *График функции* (для каждого $n\in\mathbf{N}$) «похож» на график квадратичной параболы $y=x^{2}$ (графики функций $y=x^{2}$, $y=x^{4}$ изображены на рис. 5.2).

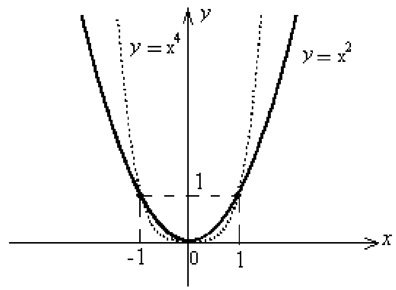


Рис. 5.2

Степенная функция $y = x^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

1. *Область определения:* $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$.
2. *Множество значений:* $E(y) = (-\infty;\ +\infty)$.
3. *Четность и нечетность:* функция нечетная.
4. *Периодичность функции:* непериодическая.
5. *Нули функции:* $x = 0$ – единственный нуль.
6. *Наибольшее и наименьшее значения:* наибольшего и наименьшего значений функция не имеет при любом $n \in \mathbf{N}$.
7. *Промежутки возрастания и убывания:* функция является возрастающей на всей области определения.
8. *График функции* (для каждого $n \in \mathbf{N}$) «похож» на график кубической параболы (графики функций $y = x^3$, $y = x^5$ изображены на рис. 5.3).

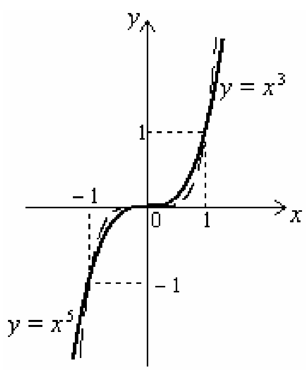


Рис. 5.3

Степенная функция $y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in \mathbf{N}$.

1. *Область определения:* $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
2. *Множество значений:* $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
3. *Четность и нечетность:* функция нечетная.
4. *Периодичность функции:* непериодическая.
5. *Нули функции:* нулей не имеет.
6. *Наибольшее и наименьшее значения функции:* наибольшего и наименьшего значений функция не имеет при любом $n \in \mathbf{N}$.
7. *Промежутки возрастания и убывания:* функция является убывающей в области определения.
8. *Асимптоты:* $x = 0$ (ось Oy) – вертикальная асимптота;
$y = 0$ (ось Ox) – горизонтальная асимптота.
9. *График функции* (для любого n) «похож» на график гиперболы (графики функций $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^3}$ изображены на рис. 5.4).

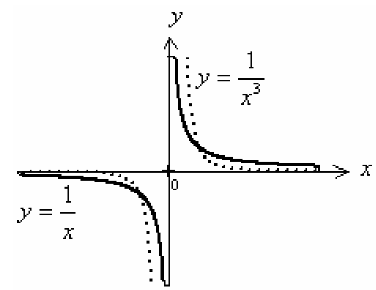


Рис. 5.4

Степенная функция $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$, $n \in \mathbf{N}$.

1. *Область определения:* $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
2. *Множество значений:* $E(y) = (0;\ +\infty)$.
3. *Четность и нечетность:* функция четная.
4. *Периодичность функции:* непериодическая.
5. *Наибольшее и наименьшее значения функции:* наибольшего и наименьшего значений функция не имеет при любом $n \in \mathbf{N}$.

6. *Промежутки возрастания и убывания:* функция является возрастающей на $(-\infty;\ 0)$ и убывающей на $(0;\ +\infty)$.

7. *Асимптоты:* $x = 0$ (ось Oy) – вертикальная асимптота;
$y = 0$ (ось Ox) – горизонтальная асимптота.

8. *Графиками функций* являются квадратичные гиперболы (рис. 5.5).

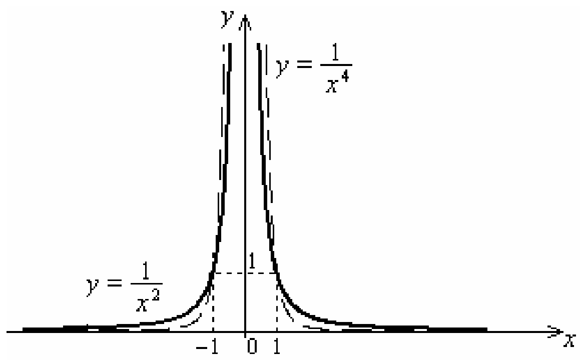


Рис. 5.5

Степенная функция $y = x^{\frac{1}{2n}}, n \in \mathbf{N}$.

1. *Область определения:* $D(y) = [0;\ +\infty)$.

2. *Множество значений:* $E(y) = [0;\ +\infty)$.

3. *Четность и нечетность:* функция не обладает свойством четности и нечетности.

4. *Периодичность функции:* непериодическая.

5. *Нули функции:* $x = 0$ – единственный нуль.

6. *Наибольшее и наименьшее значения функции:* наименьшее значение, равное 0, функция принимает в точке $x = 0$; наибольшего значения не имеет.

7. *Промежутки возрастания и убывания:* функция является возрастающей на всей области определения.

8. Каждая такая функция при определенном показателе является обратной для функции $y = x^{2n}$ при условии $x \geq 0$.

9. *График функции* «похож» на график функции $y = \sqrt{x}$ при любом n и изображен на рис. 5.6.

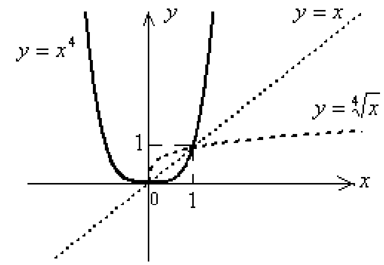


Рис. 5.6

Степенная функция $y = x^{\frac{1}{2n-1}}, n \in \mathbf{N}$.

1. *Область определения:* $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$.

2. *Множество значений:* $E(y) = (-\infty;\ +\infty)$.

3. *Четность и нечетность:* функция нечетная.

4. *Периодичность функции:* непериодическая.

5. *Нули функции:* $x = 0$ – единственный нуль.

6. *Наибольшее и наименьшее значения функции:* наибольшего и наименьшего значений функция не имеет при любом $n \in \mathbf{N}$.

7. *Промежутки возрастания и убывания:* функция является возрастающей на всей области определения.

8. *График функции* изображен на рис. 5.7.

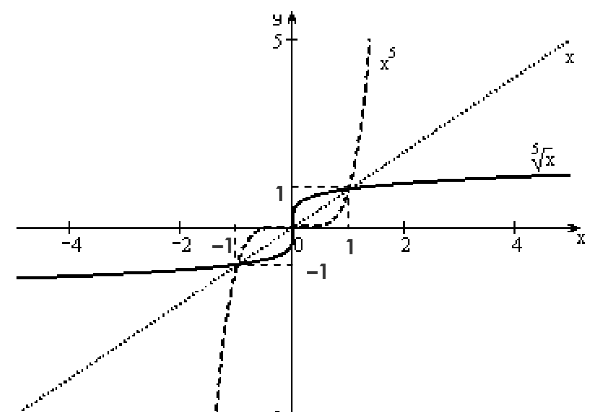


Рис. 5.7

Пример 1. Построить график функции:

1) $y=\left(|x|-1\right)^5-2$; 2) $y=\sqrt[4]{4-x}-2$.

Решение. 1) Для построения графика данной функции используем правила преобразования графиков:

а) строим график функции $y=x^5$ (он показан на рис. 5.7);

б) график функции $y=(x-1)^5-2$ получаем из графика функции $y=x^5$ путем параллельного переноса его на одну единицу вправо по оси *Ox* и на две единицы вниз по оси *Oy*;

в) график исходной функции получаем из графика функции $y=(x-1)^5-2$: оставляем ту часть графика, которая находится справа от оси *Oy* и на оси *Oy*, другую – отбрасываем (на рис. 5.8 она показана пунктиром). Оставшуюся часть графика дополняем симметричной ей относительно оси *Oy* (рис. 5.8).

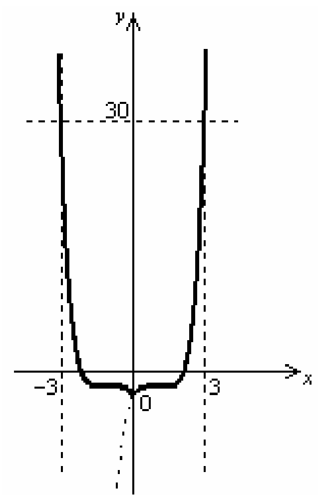


Рис. 5.8

2) Преобразуем функцию к виду $y=\sqrt[4]{-(x-4)}-2$. Заметим, что $D(y)=\left(-\infty;\ 4\right]$. График этой функции получаем путем следующих преобразований:

а) строим график функции $y=\sqrt[4]{x}$;

б) график $y=\sqrt[4]{-x}$ получаем из предыдущего симметричным отображением относительно оси *Oy*;

в) график функции $y=\sqrt[4]{-(x-4)}$ получаем из предыдущего смещением на 4 единицы вправо по оси *Ox*;

г) график заданной функции получаем из графика функции $y=\sqrt[4]{-(x-4)}$ параллельным переносом его на две единицы вниз по оси *Oy* (рис. 5.9).

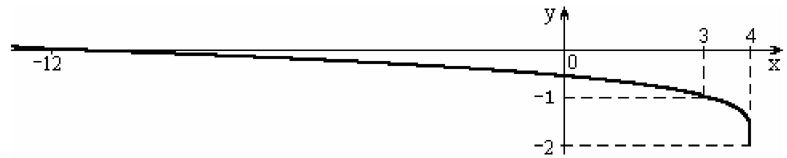


Рис. 5.9

Задания

I уровень

1.1. Определите, принадлежит ли точка $M\left(x;\ y\right)$ графику функции $y=f(x)$:

1) $y=\left(\dfrac{x+3}{2}\right)^5-11,\ M(1;\ 21)$; 2) $y=\dfrac{3x^4+2x-8}{4},\ M(-2;\ 17)$;

3) $y=\sqrt[4]{x+7},\ M(-3;\ \sqrt{2})$; 4) $y=\sqrt[6]{13-x},\ M(-5;\ 3)$.

1.2. Найдите область определения функции:

1) $y=\dfrac{x^3}{x^6-2x^5+x^3}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x+2}}{x^2-9}$;

3) $y=\dfrac{x^7+3x+5}{\sqrt[5]{x^2+5x+6}}$; 4) $y=\dfrac{\sqrt[8]{x^2+2}}{\sqrt[4]{x^2-16}}$.

1.3. Постройте график функции и определите область ее значений:

1) $y=x^5+3$; 2) $y=\sqrt[3]{x-2}$; 3) $y=\sqrt[3]{27x-8}$; 4) $y=x^{\frac{1}{7}}-4$.

II уровень

2.1. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt[8]{\dfrac{x^2+7x+12}{3-2x-x^2}}$; 2) $y=\dfrac{x^5+3}{\sqrt[3]{|x|(x+1)}}$; 3) $y=\sqrt[8]{(x-3)\sqrt[4]{x}}$;

4) $y=\dfrac{\sqrt[10]{x^{18}+6x^{11}+7}}{x^2+4x-5}$; 5) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+x-20}}+\sqrt[6]{x^2+5x-14}+\dfrac{3}{\sqrt[5]{x-2}}$.

2.2. Постройте график функции:

1) $y=(x-3)^4+2$; 2) $y=\sqrt[4]{(x+3)}-1$;

3) $y=\left|(x-2)^7\right|$; 4) $y=\sqrt[4]{|x+3|}$.

III уровень

3.1. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt[8]{2-x|x|}$; 2) $y=\sqrt[6]{\dfrac{-x^2+6x-8}{x^2+5x+6}\sqrt{x-3}}$;

3) $y=\sqrt[8]{\left|\dfrac{x+2}{x-3}\right|-1}$; 4) $y=\sqrt[12]{\dfrac{\sqrt{6+7x-3x^2}}{-3x^2+2x+8}}$.

3.2. Найдите функцию, обратную данной. Укажите область определения и область значений обеих функций. Постройте графики данной функции и обратной в одной системе координат:

1) $y=(x+2)^3$; 2) $y=\sqrt[4]{x+2}$.

3.3. Найдите множество значений функции:

1) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$; 2) $y=\dfrac{x^4+4x^2-5}{4-4x^2}$.

5.4. Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную под знаком корня или под дробным показателем. (В этом параграфе термин «корень» будет соответствовать операции извлечения корня с определенным показателем, в отличие от термина «решение»).

Основной метод решения таких уравнений – возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень, чтобы корни исчезли. Иногда приходится возводить в степень несколько раз. При этом следует анализировать, какие корни надо оставлять в левой части уравнения, а какие корни перенести в правую часть (если корней несколько). От этого часто зависит рациональность решения.

Поскольку корни нечетной степени определены для любых по знаку подкоренных выражений и принимают любые по знаку значения, то возведение уравнения в нечетную степень является равносильным преобразованием (т. е. мы не теряем решений и не получаем посторонних).

Корни с четным показателем $\sqrt[2n]{f(x)}$, $n\in\mathbf{N}$, определены для $f(x)\ge 0$. Возведение уравнения, содержащего такие корни, в четную степень может изменить ОДЗ уравнения и привести к посторонним решениям. В таком случае итоговым моментом в решении уравнения является проверка полученных решений подстановкой в заданное уравнение. Проверка решения по ОДЗ такого уравнения недостаточна.

ОДЗ иррационального уравнения следует находить в том случае, если предполагается, что она состоит только из нескольких чисел или может быть пустым множеством. Если ОДЗ состоит из одного, двух и т. д. чисел, то уравнение можно не решать, а эти числа проверять (являются ли они решением) подстановкой в заданное уравнение.

Если ОДЗ есть пустое множество, то уравнение не имеет решений.

При решении иррациональных уравнений используют также метод замены переменной и другие методы.

Если имеется уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)}=c$, где $c<0$, то оно не имеет решений, так как корни с четным показателем понимаем в арифметическом смысле, т. е. как неотрицательные.

Некоторые типы иррациональных уравнений

Пусть далее $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x, $n\in\mathbf{N}$.

I тип: уравнение вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x). \qquad (5.1)$$

Возведение в $(2n+1)$-ю степень приводит к равносильному уравнению $f(x) = (g(x))^{2n+1}$.

Уравнение

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{g(x)} \qquad (5.2)$$

после возведения в $(2n+1)$-ю степень сводится к равносильному уравнению $f(x) = g(x)$.

Уравнение

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x), \ n \in \mathbf{N} \qquad (5.3)$$

после возведения в степень $2n$ приводит к уравнению-следствию

$$f(x) = (g(x))^{2n}. \qquad (5.4)$$

Найденные корни уравнения (5.4) проверяют подстановкой в уравнение (5.3) и отбирают те из них, которые удовлетворяют уравнению (5.3).

Уравнение

$$\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)} \qquad (5.5)$$

после возведения в степень $2n$ сводится к уравнению-следствию

$$f(x) = g(x). \qquad (5.6)$$

Корни уравнения (5.6) необходимо проверить подстановкой в уравнение (5.5).

II тип: уравнение вида

$$a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{g(x)} = h(x), \qquad (5.7)$$

где $a, \ b \in \mathbf{R}$.

1-й способ. Необходимо возвести уравнение (5.7) в квадрат. В определенных случаях следует один из корней перенести в правую часть уравнения. После упрощения полученное уравнение возводят в квадрат еще раз.

2-й способ. Умножение уравнения (5.7) на сопряженное выражение

$$a^2 f(x) - b^2 g(x) = h(x)\left(a\sqrt{f(x)} - b\sqrt{g(x)}\right).$$

Отдельно проверяют, имеет ли решение уравнение $h(x) = 0$. Затем для $h(x) \neq 0$ рассматривают систему

$$\begin{cases} a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{g(x)} = h(x), \\ a\sqrt{f(x)} - b\sqrt{g(x)} = \dfrac{a^2 f(x) - b^2 g(x)}{h(x)}. \end{cases}$$

Сложение уравнений этой системы приводит к уравнению вида (5.3).

3-й способ. Замена переменных

$\sqrt{f(x)} = u, \ \sqrt{g(x)} = v$

и переход к системе уравнений относительно u, v.

Уравнение

$$a\sqrt[3]{f(x)} + b\sqrt[3]{g(x)} = h(x), \qquad (5.8)$$

где $a, \ b \ \in \ \mathbf{R}$, возведением в куб обеих частей сводится к уравнению

$$a^3 f(x) + b^3 g(x) + 3ab\sqrt[3]{f(x)g(x)}\left(a\sqrt[3]{f(x)} + b\sqrt[3]{g(x)}\right) = (h(x))^3. \qquad (5.9)$$

Выражение в скобках (в левой части уравнения (5.9)) заменяют на $h(x)$, используя заданное уравнение. В итоге заданное уравнение (5.8) приводится к уравнению-следствию, которое снова возводят в куб.

Полученные таким образом решения необходимо проверить подстановкой в уравнение (5.8).

III тип: уравнения, решаемые заменой переменной.

В результате замены может уменьшиться степень выражений, стоящих под корнями, что приведет к уменьшению степени рационального уравнения после избавления от корней.

Если уравнение имеет вид

$$F\left(\sqrt[n]{f(x)}\right) = 0, \ \ n = 2, \ 3, \ \ldots, \qquad (5.10)$$

где F – некоторое алгебраическое выражение относительно $\sqrt[n]{f(x)}$, то заменой $y = \sqrt[n]{f(x)}$ оно сводится к уравнению

$$F(y) = 0. \qquad (5.11)$$

После решения уравнения (5.11) возвращаются к старой переменной и находят решения уравнения (5.10).

IV тип: уравнения, решаемые исходя из арифметического смысла корней с четными показателями. В частности, решение уравнения

$$a\sqrt[2n]{f(x)} + b\sqrt[2n]{g(x)} = 0, \qquad (5.12)$$

где $a > 0$, $b > 0$, сводится к решению системы

$$\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{cases}$$

V тип: уравнения, решаемые функциональными методами и методами, основанными на ограниченности входящих в уравнение функций.

Решение уравнений основывается на следующих утверждениях.

1. Если $f(x) \ge a$ и $g(x) \le a$ для всех $x \in X$, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$$

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает для $x \in X$, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не больше одного решения на промежутке X. Если один корень подобрать, то других корней нет.

3. Если $f(x)$ – возрастающая функция, то уравнение $f\left(f(x)\right)=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$.

4. Если $f(x)$ – возрастающая (убывающая) функция, то уравнение $f(x)=f(y)$ равносильно уравнению $x=y$.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+3}=\sqrt{3x-5}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x-4+2\sqrt{(x-4)\cdot(x+3)}+x+3=3x-5.$$

Приводим подобные. При этом в левой части уравнения записываем корень, остальные слагаемые – в правой части:

$$2\sqrt{x^2-3x+2}=x-4.$$

Возводим полученное уравнение в квадрат еще раз:

$$4(x^2-x-12)=x^2-8x+16,$$

$$3x^2+4x-64=0.$$

Решая последнее квадратное уравнение, находим корни $x_1=-\dfrac{16}{3}$, $x_2=4$, которые теперь необходимо проверить. Делаем проверку корней подстановкой в исходное уравнение. Первый корень не подходит.

Приходим к ответу: $x=4$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2x-5}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб:

$$x-2+3\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2\cdot(x-3)}+3\cdot\sqrt[3]{(x-2)\cdot(x-3)^2}+x-3=2x-5,$$

$$3\cdot\sqrt[3]{(x-2)\cdot(x-3)}\left(\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}\right)=0.$$

Воспользовавшись исходным уравнением, заменим выражение $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}$ выражением $\sqrt[3]{2x-5}$. Получаем:

$$\sqrt[3]{(x-2)\cdot(x-3)}\cdot\sqrt[3]{2x-5}=0.$$

Решаем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}(x-2)\cdot(x-3)=0, \\ 2x-5=0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=2, \\ x=3, \\ x+2,5.\end{array}\right.$$

В результате замены выражения могут появиться посторонние корни, так как такое преобразование не является равносильным. Поэтому необходимо произвести проверку. Подставляем найденные значения и убеждаемся, что они являются корнями исходного уравнения.

Приходим к ответу: $x_1=2;\ x_2=2,5;\ x_3=3.$

Пример 3. Решить уравнение $x^2+3x+4\cdot\sqrt{x^2+3x-24}=36.$

Решение. Возведение уравнения в квадрат приводит к уравнению четвертой степени и громоздкому решению.

Нетрудно заметить, что в данном уравнении можно произвести замену. Но перед этим преобразуем уравнение следующим образом:

$$x^2+3x-24+4\sqrt{x^2+3x-24}+24-36=0,$$

$$\left(x^2+3x-24\right)+4\sqrt{x^2+3x-24}-12=0.$$

Заменив $\sqrt{x^2+3x-24}=y$, получаем квадратное уравнение

$$y^2+4y-12=0.$$

Решая его, находим корни $y_1=-6$, $y_2=2$.

Возвращаемся к исходной неизвестной:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+3x-24}=-6, \\ \sqrt{x^2+3x-24}=2.\end{array}\right.$$

Первое уравнение решений не имеет, так как его левая часть неотрицательна, а правая – отрицательна. Второе уравнение возводим в квадрат. Получаем:

$x^2+3x-24=4,$ т. е. $x^2+3x-28=0.$

Его корни $x_1=-7,$ $x_2=4.$ С помощью проверки убеждаемся, что оба корня подходят, т. е. приходим к ответу: $x_1=-7,$ $x_2=4.$

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+x+6}-\sqrt{2x^2+x-1}=1.$

Решение. *1-й способ.* Перенесем второй корень вправо:

$\sqrt{2x^2+x+6}=1+\sqrt{2x^2+x-1}.$

Возводим обе части в квадрат:

$2x^2+x+6=1+2\sqrt{2x^2+x-1}+2x^2+x-1,$

$2\sqrt{2x^2+x-1}=6,$

$\sqrt{2x^2+x-1}=3.$

Еще раз возводим в квадрат и получаем квадратное уравнение, решая которое и получаем корни $x_1=-\frac{5}{2},$ $x_2=2.$ Делаем проверку корней подстановкой в исходное уравнение. Оба корня подходят.

2-й способ. Введем замену $\sqrt{2x^2+x-1}=y,$ тогда $2x^2+x-1=y^2,$ $2x^2+x+6=y^2+7.$ Таким образом получили более простое уравнение

$\sqrt{y^2+7}-y=1,$ т. е. $\sqrt{y^2+7}=1+y.$

Возведем его в квадрат:

$y^2+7=1+2y+y^2,$ $2y-6=0,$ $2(y-3)=0,$ $y=3.$

Возвращаемся к исходной неизвестной:

$\sqrt{2x^2+x-1}=3.$

Возводим обе части уравнения в квадрат:

$2x^2+x-1=9,$ $2x^2+x-10=0,$ откуда $x_1=-\frac{5}{2},$ $x_2=2.$

При помощи проверки убеждаемся, что оба корня подходят.

3-й способ. Домножим обе части уравнения на выражение, сопряженное левой части исходного уравнения. Получим:

$$\left(\sqrt{2x^2+x+6}-\sqrt{2x^2+x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{2x^2+x-1}\right)=$$

$$=1\cdot\left(\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{2x^2+x-1}\right),$$

$$2x^2+x+6-(2x^2+x-1)=\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{2x^2+x-1},$$

$$2x^2+x+6-2x^2-x+1)=\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{2x^2+x-1},$$

$$\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{2x^2+x-1}=7.$$

Сложим последнее уравнение с исходным. Получим:

$2\sqrt{2x^2+x+6}=8,$ т. е. $\sqrt{2x^2+x+6}=4.$

Последнее уравнение возводим в квадрат. Получаем квадратное уравнение

$2x^2+x+6=16,$ $2x^2+x-10=0.$

Решая его, находим корни $x_1=-\frac{5}{2},$ $x_2=2.$

Приходим к ответу: $x_1=-\frac{5}{2},$ $x_2=2.$

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2.$

Решение. Пусть $\sqrt[4]{1-x}=a,$ $\sqrt[4]{15+x}=b.$ Тогда $1-x=a^4,$ $15+x=b^4$ и $a^4+b^4=1-x+15+x=16,$ $a+b=2$ по условию.

Получили систему

$$\begin{cases}a^4+b^4=16,\\ a+b=2.\end{cases}$$

Решаем ее методом подстановки:

$$\begin{cases}b=2-a,\\ a^4-16+(2-a)^4=0.\end{cases}$$

Второе уравнение решим отдельно

$$(a^2-4)\cdot(a^2+4)+(2-a)^4=0;$$

$$(a-2)\cdot\left((a+2)\cdot(a^2+4)+(a-2)^3\right)=0;$$

$$(a-2)\cdot\left(2a^3-4a^2+16a\right)=0;$$

$$2a(a-2)\cdot\left(a^2-2a+16\right)=0.$$

Получаем корни:

$$\left[\begin{array}{l}a=0,\\ a=2.\end{array}\right.$$

Возвращаемся к системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=0,\\ a=2,\end{array}\right.\\ b=2-a.\end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} a_1 = 0,\ a_2 = 2, \\ b_1 = 2,\ b_2 = 0. \end{cases}$$

Переходим к заданным неизвестным:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[4]{1-x} = 0, \\ \sqrt[4]{15+x} = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[4]{1-x} = 2, \\ \sqrt[4]{15+x} = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая последнюю совокупность, находим корни $x = 1$ и $x = -15$. С помощью проверки убеждаемся, что оба корня подходят.

Получили ответ: $x = 1$, $x = -15$.

При решении иррациональных уравнений, как правило, нахождение ОДЗ является бесполезным, так как проверка решений по ОДЗ недостаточна. Но существует ряд примеров, в которых нахождение ОДЗ является тем методом, который приводит к успеху. Покажем это на следующем примере.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{1-x^2} - \sqrt{8+x^2} + \sqrt{x^2+2x-3} + 3 = 0.$$

Решение. Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} 1-x^2 \ge 0, \\ x^2+2x-3 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-1 \le 0, \\ x^2+2x-3 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)\cdot(x+1) \le 0, \\ (x-1)\cdot(x+3) \ge 0. \end{cases}$$

Решаем последнюю систему неравенств графически (рис. 5.10).

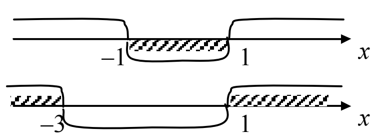


Рис. 5.10

Получили, что ОДЗ состоит из единственной точки $x = 1$.

Остается подставить значение $x = 1$ в уравнение и выяснить, является ли оно решением:

$$\sqrt{0} - \sqrt{9} + \sqrt{0} + 3 = 0.$$

Получили, что $x = 1$ – решение.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{x+2} = -x^2 + 14x - 46$.

Решение. Используем графический способ. Строим графики функций $y = \sqrt{x+2}$, $y = -x^2 + 14x - 46$ (рис. 5.11).

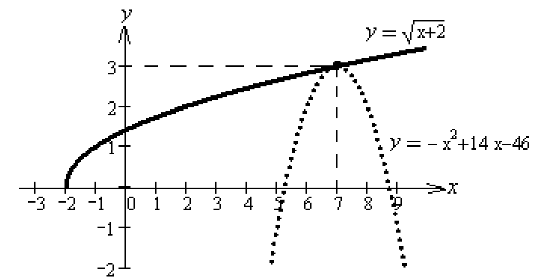


Рис. 5.11

Из рисунка видно, что графики пересекаются в единственной точке $x = 7$. Следовательно, уравнение имеет единственное решение. Проверяем $x = 7$ подстановкой в заданное уравнение и убеждаемся, что это точное значение решения уравнения.

Получили ответ: $x = 7$.

Задания

I уровень

1.1. Определите, имеет ли уравнение корни:

1) $\sqrt{-x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = -3$; 3) $\sqrt{x^3} = 1$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 5$;

5) $\left(\sqrt{-x}\right)^2 = 2$; 6) $\sqrt[3]{-x} = 3$; 7) $\sqrt[5]{x} = -1$; 8) $\sqrt[4]{-x^2} = 2$;

9) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = -2$; 10) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{x+1}} = -3$.

1.2. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-1} = 2$; 2) $\sqrt{2-x} = 3$; 3) $\sqrt{x^2-3} = 1$;

4) $\sqrt{-x} = 5$; 5) $\sqrt{x^2+5x+2} = 4$; 6) $\sqrt{3x^2-x^3-2} = 0$;

7) $\left(\sqrt{3-x}\right)^2 = 3$; 8) $\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 3$; 9) $\sqrt{x^2} = 5$;

10) $\sqrt[4]{x^2}=2$; 11) $\sqrt[3]{x}=-2$; 12) $\sqrt[3]{-27x}=6$;

13) $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+5}$; 14) $\sqrt[3]{x+2}-1=0$; 15) $\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{-6-2x}$;

16) $3-\sqrt[5]{-x^2}=2$; 17) $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x-2}=0$; 18) $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{x}=0$;

19) $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-10}=0$; 20) $\sqrt[4]{x^2-x-6}+\sqrt[8]{x^2-5x+6}=0$;

21) $\sqrt{x-3}\sqrt{x-2}=1$; 22) $\sqrt[4]{7-x}=\sqrt[4]{2(1-x)}$.

1.3. Решите уравнение:

1) $(x^2-10)\sqrt{x+3}=0$; 2) $\sqrt{5-\left|1-x^2\right|}=2$;

3) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}=3$; 4) $\sqrt{-x^2}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{3}$;

5) $3-\sqrt[3]{x}=2\sqrt[3]{x^2}$; 6) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$;

7) $\sqrt{x+2}=2+\sqrt{x-6}$; 8) $\sqrt{10+\sqrt{x-x^2}}=3$;

9) $\sqrt[4]{2-x}=\sqrt{2-x}-20$; 10) $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12$.

1.4. Решите уравнение графически:

1) $\sqrt{x-3}=2$; 2) $\sqrt{x+2}=x-4$;

3) $\sqrt[3]{x+4}=2$; 4) $\sqrt[3]{x+4}=\dfrac{5}{3}x-4$.

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$;

2) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$;

3) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$;

4) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$;

5) $\sqrt{\dfrac{x}{x^2+x-1}}+2\sqrt{\dfrac{x^2+x-1}{x}}=3$;

6) $\sqrt{2x^2+5x+3}-\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{2(x^2-1)}$;

7) $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}+2\sqrt{3x-2}=3x$;

8) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+2}=x+1$;

9) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$;

10) $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$;

11) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$;

12) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$;

13) $\sqrt{x^2-5x+6}+y^2+9x^2-6xy=0$;

14) $\sqrt{1-2x+x^2}-\left|3-4x\right|=0$;

15) $\sqrt{x^3+x^2-x}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$;

16) $\sqrt{x^2-4x-5}+\sqrt{x^2-5x-6}+\sqrt{x^{15}+6x+7}=0$.

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $\sqrt{1+x}\left(\left|2-\sqrt{1-2x+x^2}\right|-4\right)=0$;

2) $\dfrac{\left(\left|5-x\right|+6x-\sqrt{x^2-2x+1}\right)\sqrt{x-1}}{\sqrt{36-x^2}}=0$;

3) $2x-5+2\sqrt{x^2-5x}+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}=48$;

4) $\sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x+4}}+\sqrt{\dfrac{x^{99}+3x+4}{x^2+3x+5}}=0$;

5) $\sqrt{4-x+4\sqrt{-x}}=4-\sqrt{4-x-4\sqrt{x}}$;

6) $\dfrac{x-2}{2}+x^2=\sqrt{\dfrac{(x-2)^2}{4}+x^4}$;

7) $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{629-x}=8$;

8) $\sqrt{26+2\sqrt{11-x^2-2x}}-\sqrt{13-\sqrt{158+x^2+2x}}=\sqrt{13+9\sqrt{2}}$;

9) $\sqrt[4]{x(2-x)}+\sqrt[3]{x^4(2-x)^7(x+3)^5}+\sqrt[6]{(x-2)(x+1)x^2}+\sqrt[5]{(x+2)(x+6)}=2$.

3.2. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-a}=x$; 2) $\sqrt{x+3}=a$.

6. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

6.1. Показательная функция, гиперболические функции

Показательной функцией называется функция

$y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Основные свойства показательной функции

1. *Область определения*: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. *Множество значений*: $E(y) = (0; +\infty)$.
3. *Четность и нечетность*: не обладает свойством четности.
4. *Периодичность*: непериодическая.
5. *Нули функции*: нулей не имеет.
6. *Промежутки знакопостоянства*: функция положительна для $x \in (-\infty; +\infty)$.
7. *Наибольшее и наименьшее значения*: наибольшего и наименьшего значений функция не имеет.
8. *Промежутки возрастания и убывания*: если $a > 1$, функция возрастает для всех $x \in (-\infty; +\infty)$; если $0 < a < 1$, – убывает для $x \in (-\infty; +\infty)$.
9. *Точки пересечения с осями координат*: пересекает ось Oy в точке $y = 1$, ось Ox не пересекает.
10. *Асимптоты*: прямая $y = 0$ (ось Ox) является горизонтальной асимптотой.
11. *График функции* для $a > 1$ изображен на рис. 6.1, для $0 < a < 1$ – на рис. 6.2.

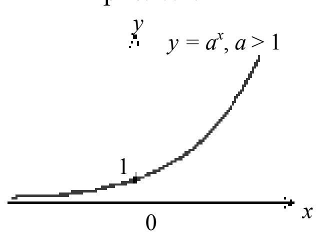


Рис. 6.1

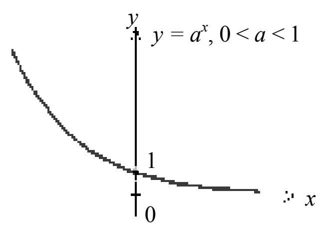


Рис. 6.2

Из свойств функции следует: неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ равносильно неравенствам:

1) $x_1 > x_2$, если $a > 1$,

2) $x_1 < x_2$, если $0 < a < 1$.

Показательная функция с основанием e, где e – иррациональное число $e = 2{,}718281\ldots$, называется ***экспонентой***, пишут $y = e^x$ или $y = \exp x$.

Через показательные выражения с основанием e определяются ***гиперболические функции***.

Гиперболическим синусом называется функция

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Основные свойства гиперболического синуса

1. *Область определения*: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. *Множество значений*: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
3. *Четность и нечетность*: нечетная.
4. *Периодичность*: непериодическая.
5. *Нули функции*: $x = 0$.
6. *Промежутки знакопостоянства*: функция отрицательна для $x \in (-\infty; 0)$, положительна – для $x \in (0; +\infty)$.
7. *Наибольшее и наименьшее значения*: наибольшего и наименьшего значений функция не имеет.
8. *Промежутки возрастания и убывания*: функция возрастает для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.
9. *Точки пересечения с осями координат*: $(0; 0)$.
10. *Асимптоты*: асимптот не имеет.
11. *График функции* изображен на рис. 6.3.

Гиперболическим косинусом называется функция

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Основные свойства гиперболического косинуса

1. *Область определения*: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. *Множество значений*: $E(y) = [1; +\infty)$.
3. *Четность и нечетность*: четная.
4. *Периодичность*: непериодическая.

5. *Нули функции*: нулей не имеет.

6. *Промежутки знакопостоянства*: функция положительна для $x \in (-\infty; +\infty)$.

7. *Наибольшее и наименьшее значения*: наименьшее значение, равное 1, функция принимает при $x = 0$.

8. *Промежутки возрастания и убывания*: функция убывает при $x \in (-\infty; 0)$, возрастает при $x \in (0; +\infty)$.

9. *Точки пересечения с осями координат*: пересекает ось *Oy* в точке $y = 1$, ось *Ox* не пересекает.

10. *Асимптоты*: асимптот не имеет.

11. *График функции* изображен на рис. 6.4.

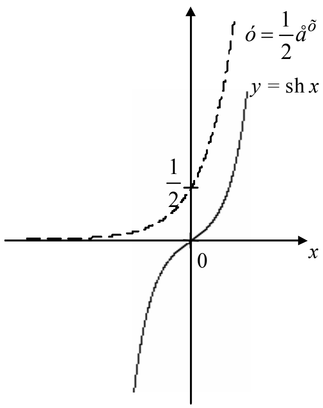


Рис. 6.3

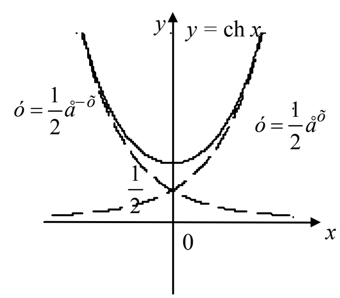


Рис. 6.4

Гиперболические тангенс и котангенс определяются через отношение гиперболических синуса и косинуса.

Гиперболическим тангенсом называется функция

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \text{ т. е. } \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Основные свойства гиперболического тангенса

1. *Область определения*: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. *Множество значений*: $E(y) = (-1; 1)$.
3. *Четность и нечетность*: нечетная.
4. *Периодичность*: непериодическая.
5. *Нули функции*: $x = 0$.

6. *Промежутки знакопостоянства*: функция отрицательна для $x \in (-\infty; 0)$, положительна для $x \in (0; +\infty)$.

7. *Наибольшее и наименьшее значения*: наибольшего и наименьшего значений функция не имеет.

8. *Промежутки возрастания и убывания*: функция возрастает для $x \in (-\infty; +\infty)$.

9. *Точки пересечения с осями координат*: $(0; 0)$.

10. *Асимптоты*: имеет горизонтальные асимптоты $y = -1$ и $y = 1$.

11. *График функции* изображен на рис. 6.5.

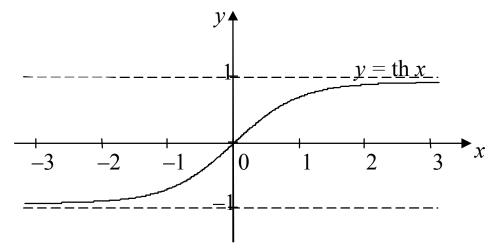


Рис. 6.5

Гиперболический котангенсом называется функция

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \text{ т. е. } \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Основные свойства гиперболического котангенса

1. *Область определения*: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. *Множество значений*: $E(y) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
3. *Четность и нечетность*: нечетная.
4. *Периодичность*: непериодическая.
5. *Нули функции*: нулей не имеет.
6. *Промежутки знакопостоянства*: функция отрицательна для $x \in (-\infty; 0)$, положительна для $x \in (0; +\infty)$.
7. *Наибольшее и наименьшее значения*: наибольшего и наименьшего значений функция не имеет.
8. *Промежутки возрастания и убывания*: функция убывает для $x \in D(y)$.
9. *Точки пересечения с осями координат*: нет.

10. *Асимптоты*: имеет горизонтальные асимптоты $y=-1$ и $y=1$.

11. *График функции* изображен на рис. 6.6.

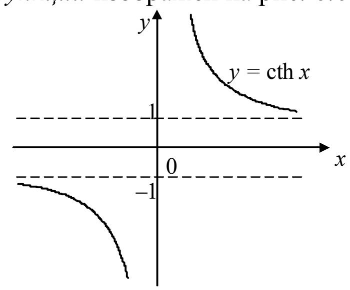


Рис. 6.6

Пример 1. Сравнить числа:

1) 25^{23} и 125^{12}; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^8$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right)^5$;

3) $\left(\sqrt[5]{e^3}\right)^{10}$ и $\left(\sqrt[3]{e^2}\right)^{12}$.

Решение. 1) Преобразуем числа к одному основанию:

$25^{23}=\left(5^2\right)^{23}=5^{46}$,

$125^{12}=\left(5^3\right)^{12}=5^{36}$.

Так как $5>1$, $46>36$ и функция $y=x^5$ монотонно возрастает, то $5^{46}>5^{36}$, следовательно, $25^{23}>125^{12}$.

2) Преобразуем числа:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^8=\left(\frac{1}{\sqrt{3^3}}\right)^8=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}\cdot 8}=\left(\frac{1}{3}\right)^{12};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{243}}\right)^6=\left(\frac{1}{\sqrt{3^5}}\right)^6=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}\cdot 6}=\left(\frac{1}{3}\right)^{15}.$$

Так как $0<\frac{1}{3}<1$, $12<15$ и функция $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ монотонно убывает, то $\left(\frac{1}{3}\right)^{12}>\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$, следовательно, $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^8>\left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right)^5$.

3) Преобразуем числа:

$$\left(\sqrt[5]{e^3}\right)^{10}=\left(e^{\frac{3}{5}}\right)^{10}=e^6,\qquad \left(\sqrt[3]{e^2}\right)^{12}=\left(e^{\frac{2}{3}}\right)^{12}=e^8.$$

Так как $e>1$, $6<8$ и функция $y=e^x$ монотонно возрастает, то $e^6<e^8$, тогда и $\left(\sqrt[5]{e^3}\right)^{10}<\left(\sqrt[3]{e^2}\right)^{12}$.

Пример 2. Построить график функции:

1) $y=\left|\operatorname{ch}(x+3)-4\right|$; 2) $y=\operatorname{th}|x|-2$.

Решение. 1) Строим график функции $y=\operatorname{ch} x$.

График функции $y=\operatorname{ch}(x+3)-4$ получаем из предыдущего путем смещения его на 3 единицы влево по оси Ox и на 4 единицы вниз по оси Oy.

Для построения графика заданной функции оставляем ту часть графика функции $y=\operatorname{ch}(x+3)-4$, которая лежит над осью Ox и на оси Ox. Ту часть графика, которая расположена ниже оси Ox, отображаем в верхнюю полуплоскость симметрично относительно оси Ox (рис. 6.7).

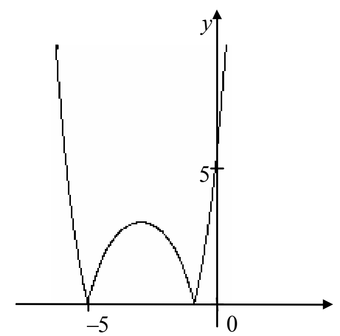


Рис. 6.7

2) Строим график функции $y=\operatorname{th} x$ (см. рис. 6.5).

График функции $y=\operatorname{th} x-2$ получаем из предыдущего путем смещения его на 2 единицы вниз вдоль оси Oy.

Для построения графика заданной функции оставляем ту часть графика функции $y=\operatorname{th} x-2$, которая лежит правее оси Oy и на оси Oy. Часть графика, которая лежит левее оси Oy, отбрасываем, а оставшуюся часть отображаем в левую полуплоскость симметрично оси Oy (рис. 6.8).

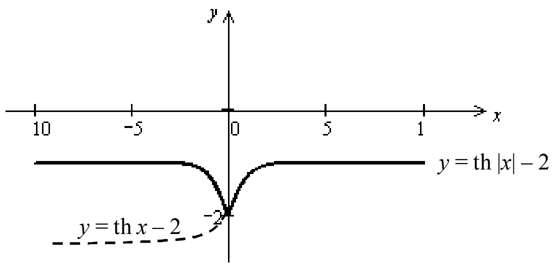


Рис. 6.8

Пример 3. Доказать тождество $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

Решение. $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} =$

$= \frac{(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})}{4} =$

$= \frac{2e^x \cdot 2e^{-x}}{4} = e^x \cdot e^{-x} = 1.$

Задания

I уровень

1.1. Найдите область определения функции:

1) $y = 3^{\sqrt{x}}$; 2) $y = \frac{2}{5^{-\frac{1}{x}}}$; 3) $y = 7^{\sqrt[3]{x}}$; 4) $y = e^{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-2}}}$;

5) $y = \sqrt[x]{3}$; 6) $y = \sqrt[x+1]{e}$; 7) $y = \sqrt[\frac{15}{x-1}]{2}$.

1.2. Вычислите значение функции $y = 2^x$ в точке:

1) –2; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 1; 6) 2.

1.3. Вычислите значение функции $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ в точке:

1) –2; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1; 6) 2.

1.4. Вычислите $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, если:
1) $y = \mathrm{sh}\ x$; 2) $y = \mathrm{ch}\ x$; 3) $y = \mathrm{th}\ x$; 4) $y = \mathrm{cth}\ x$.

1.5. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 3^x$. Опишите их взаимное расположение.

1.6. Постройте график функции:

1) $y = 5^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $y = 3^{x-2}$;

4) $y = 0{,}5^x - 3$; 5) $y = -2^x$; 6) $y = \mathrm{sh}(x+2)$;
7) $y = \mathrm{ch}\ x - 2$; 8) $y = -\mathrm{th}\ x$; 9) $y = \mathrm{cth}\ 2x$.

1.7. Исследуйте функцию на монотонность:

1) $y = 3^{x+2}$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$; 3) $y = 49^{-x}$;

4) $y = \left(\frac{1}{25}\right)^{-x+1}$; 5) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$; 6) $y = (\sqrt{5} - 2)^x$;

7) $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$; 8) $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$.

1.8. Сравните числа:

1) 2^4 и 2^3; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^7$;

3) 5^7 и $5^{4\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{7}}$;

5) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^2$ и $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{3}}$; 6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{4}}$;

7) $e^{1,3}$ и $e^{2,1}$; 8) $e^{-2,1}$ и $e^{-1,9}$;

9) $6^{-\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{1}{6}\right)^3$; 10) e^5 и π^5;

11) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$; 12) $5^{-2,3}$ и $\pi^{-2,3}$;

13) $e^{-\frac{1}{7}}$ и $3^{-\frac{1}{7}}$; 14) $\left(\sqrt{5}\right)^{3}$ и $5^{-\frac{3}{2}}$;

15) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2}$ и $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{-3}$; 16) 225^{-5} и $\left(\frac{1}{125}\right)^{6}$;

17) $\left(\frac{6}{\pi}\right)^{\sqrt{7}-3}$ и 1; 18) $(0{,}08)^{0,2}$ и $(0{,}008)^{0,2}$.

II уровень

2.1. Найдите область определения функции:

1) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt[3]{\frac{x-3}{x+5}}}$; 2) $y=\frac{-3}{2^{\sqrt[6]{x^2-3x+5}}}$.

2.2. Постройте график и найдите область значений функции:

1) $y=5^{-x}+3$; 2) $y=5^{|x|}$;

3) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+2$; 4) $y=2^{4-x}+3$;

5) $y=-6^{x}+4$; 6) $y=\frac{8^{x+3}-12}{4}$;

7) $y=-e^{3-x}$; 8) $y=\mathrm{sh}(3-x)+1$;

9) $y=|\mathrm{cth}\ x+1|$; 10) $y=|\mathrm{th}(x-1)|$.

2.3. Решите уравнение графически:

1) $2^{x+1}=(x+1)^2$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}=x^2+6x+11$.

III уровень

3.1. Постройте график функции:

1) $y=\left|2^{x+2}-3\right|$; 2) $y=\left|0{,}5^{|x-1|}-3\right|$;

3) $y=\mathrm{sh}|x-2|+2$; 4) $y=|\mathrm{ch}(4-2x)+3|$.

3.2. Докажите тождество:

1) $\mathrm{th}\ x\cdot\mathrm{cth}\ x=1,\ x\neq 0$; 2) $1-\mathrm{th}^2x=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$;

3) $\mathrm{cth}^2x-1=\frac{1}{\mathrm{sh}^2x},\ x\neq 0$; 4) $\mathrm{sh}\ 2x=2\mathrm{sh}\ x\cdot\mathrm{ch}\ x$;

5) $\mathrm{th}\ 2x=\frac{2\mathrm{th}\ x}{1+\mathrm{th}^2x}$; 6) $\mathrm{sh}^2x=\frac{\mathrm{ch}\ 2x-1}{2}$;

7) $\mathrm{ch}\ 2x=\mathrm{sh}^2x+\mathrm{ch}^2x=1+2\mathrm{sh}^2x=2\mathrm{ch}^2x-1$;

8) $\mathrm{sh}\ x\cdot\mathrm{ch}\ y=\frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}(x+y)+\mathrm{sh}(x-y)\right)$;

9) $\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}\ x\cdot\mathrm{ch}\ y+\mathrm{ch}\ x\cdot\mathrm{sh}\ y$;

10) $\mathrm{ch}(x-y)=\mathrm{ch}\ x\cdot\mathrm{ch}\ y-\mathrm{sh}\ x\cdot\mathrm{sh}\ y$;

11) $\mathrm{sh}\ x+\mathrm{sh}\ y=2\mathrm{sh}\frac{x+y}{2}\cdot\mathrm{ch}\frac{x-y}{2}$;

12) $\mathrm{ch}\ x-\mathrm{ch}\ y=2\mathrm{sh}\frac{x+y}{2}\cdot\mathrm{sh}\frac{x-y}{2}$.

3.3. Решите уравнение графически:

1) $|\mathrm{th}(x+3)-2|=a$; 2) $\mathrm{ctg}|x-2|=a$.

6.2. Понятие логарифма и его свойства

Логарифмом числа b ($b>0$) ***по основанию a*** ($a>0$, $a\neq 1$) называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b:

$$a^{\log_a b}=b. \qquad (6.1)$$

Формулу (6.1) называют ***основным логарифмическим тождеством***.

Логарифм числа b по основанию 10 называется ***десятичным логарифмом*** и обозначается $\lg b$.

Логарифм по основанию e (e = 2,71828…) называется ***натуральным логарифмом*** и обозначается $\ln b$.

Свойства логарифмов

Пусть $a, b, c > 0, a \neq 1$. Тогда:

1) $\log_a 1 = 0$;
2) $\log_a a = 1$;
3) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;
4) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;
5) $\log_a b^k = k \log_a b,\ k \in \mathbf{R}$;
6) $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b,\ m \in \mathbf{R},\ m \neq 0$;
7) $\log_a b = \log_{a^k} b^k,\ k \in \mathbf{R},\ k \neq 0$;
8) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ c \neq 1$;
9) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a},\ b \neq 1$;
10) $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$;
11) $\log_a b = \log_a c$ тогда и только тогда, когда $b = c$;
12) $\log_a b > \log_a c$, где $a > 1$, тогда и только тогда, когда $b > c$;
13) $\log_a b > \log_a c$, где $0 < a < 1$, тогда и только тогда, когда $b < c$.

Обобщенные свойства логарифмов

Пусть $a > 0, a \neq 1$ и $f(x), g(x)$ – выражения с переменной. Тогда:

3*) $\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|$, где $f(x) \cdot g(x) > 0$;

4*) $\log_a \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|$, где $f(x) \cdot g(x) > 0$;

5*) $\log_a (f(x))^{2n} = 2n \cdot \log_a |f(x)|$, где $f(x) \neq 0$;

6*) $\log_{(f(x))^{2n}} b = \frac{1}{2n} \cdot \log_{|f(x)|} b$, где $\begin{cases} f(x) \neq 0, \\ f(x) \neq \pm 1,\ n \in \mathbf{N}. \end{cases}$

З а м е ч а н и е 1. Следует различать произведение логарифмов $\log_a b \cdot \log_c d$ и повторный логарифм $\log_a \log_c d = \log_a (\log_c d)$, $c \neq 1$.

З а м е ч а н и е 2. Степень логарифма может быть записана двумя способами:

$(\log_a b)^k$ или $\log_a^k b$.

Логарифмированием называется операция нахождения логарифма числа или выражения.

Потенцированием называют действие, обратное логарифмированию, т. е. потенцирование – это операция нахождения числа (выражения) по его логарифму. При выполнении этих операций пользуются свойствами логарифмов.

Пример 1. Упростить выражение $\dfrac{36^{\frac{1}{\log_5 6}} + 6^{\log_5 3} - 3^{\log_5 6}}{\log_2 \log_3 81 + 7^{\frac{\log_5 3}{\log_5 7}}}$.

Решение. Преобразуем каждое слагаемое отдельно. При этом сделаем ссылку на конкретные свойства логарифмов, приведенные выше.

$36^{\frac{1}{\log_5 6}} = |\text{используем свойство 9}| = 6^{2\log_6 5} = |\text{по свойству 5}| = 6^{\log_6 5^2} = |\text{по основному логарифмическому тождеству}| = 5^2 = 25.$

$6^{\log_5 3} = |\text{по свойству 10}| = 3^{\log_5 6}$,

тогда $6^{\log_5 3} - 3^{\log_5 6} = 3^{\log_5 6} - 3^{\log_5 6} = 0$.

$\log_2 \log_3 81 = \log_2 \log_3 3^4 = |\text{по свойству 5}| = \log_2 (4 \cdot \log_3 3) = |\text{по свойству 2}| = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2\log_2 2 = 2.$

$7^{\frac{\log_5 3}{\log_5 7}} = |\text{по свойству 8}| = 7^{\log_7 3} = 3.$

Таким образом:

$$\frac{36^{\frac{1}{\log_5 6}} + 6^{\log_5 3} - 3^{\log_5 6}}{\log_2 \log_3 81 + 7^{\frac{\log_5 3}{\log_5 7}}} = \frac{25 + 0}{2 + 3} = \frac{25}{5} = 5.$$

З а м е ч а н и е 3. Решение этого примера при одновременном преобразовании всех слагаемых (что и следует делать) выглядит так:

$$\frac{36^{\frac{1}{\log_5 6}} + 6^{\log_5 3} - 3^{\log_5 6}}{\log_2 \log_3 81 + 7^{\frac{\log_5 3}{\log_5 7}}} = \frac{6^{2\log_6 5} + 3^{\log_5 6} - 3^{\log_5 6}}{\log_2 4 + 7^{\log_7 3}} = \frac{6^{\log_6 25} + 0}{2 + 3} = \frac{25}{5} = 5.$$

Пример 2. Вычислить $\dfrac{3\log_2 28}{\log_{32} 2} - \dfrac{5\log_2 7}{\log_8 2} + \dfrac{\log_4 27 - \log_2 3}{\log_4 45 + \log_4 0{,}2}$.

Решение. Для преобразования первого и второго слагаемых используем формулу изменения основания логарифма (свойство 9), а затем свойства 3 и 5.

$$\frac{3\log_2 28}{\log_{32} 2} = 3 \cdot \log_2 32 \cdot \log_2 28 = 3 \cdot \log_2 2^5 \cdot \log_2 (4 \cdot 7) =$$

= |по свойствам 5 и 2| =

$$= 15(\log_2 4 + \log_2 7) = 15(\log_2 2^2 + \log_2 7) = 15(2 + \log_2 7) = 30 + 15\log_2 7.$$

$$\frac{5\log_2 7}{\log_8 2} = 5\log_2 8 \cdot \log_2 7 = 5\log_2 2^3 \cdot \log_2 7 = 15\log_2 7.$$

Для преобразования третьего слагаемого используем свойства 3–5:

$$\frac{\log_4 27 - \log_2 3}{\log_4 45 + \log_4 0{,}2} = \frac{\log_{2^2} 3^3 - \log_2 3}{\log_{2^2}\left(3^2 \cdot 5\right) + \log_{2^2} 5^{-1}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log_2 3 - \log_2 3}{\frac{1}{2}\left(\log_2 3^2 + \log_2 5\right) - \frac{1}{2}\log_2 5} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(3\log_2 3 - 2\log_2 3\right)}{\frac{1}{2}\left(2\log_2 3 + \log_2 5 - \log_2 5\right)} = \frac{\log_2 3}{2\log_2 3} = \frac{1}{2}.$$

Тогда получаем:

$$\frac{3\log_2 28}{\log_{32} 2} - \frac{5\log_2 7}{\log_8 2} + \frac{\log_4 27 - \log_2 3}{\log_4 45 + \log_4 0{,}2} =$$

$$= 30 + 15\log_2 7 - 15\log_2 7 + \frac{1}{2} = 30{,}5.$$

З а м е ч а н и е 4. Подробное описание решения и преобразование всех слагаемых отдельно приведено исходя из соображений доступности объяснений. Целесообразно делать преобразования всего выражения сразу, аналогично тому, как сделано в замечании 1.

Пример 3. Прологарифмировать по основанию 10 выражение

$$x = \frac{\sqrt[5]{a+b} \cdot (a-b)^3 \cdot c^4}{n^2}.$$

Решение. Замечаем, что сделать это можно, если $(a+b)\cdot(a-b) > 0$, $c \neq 0$, $n \neq 0$. Тогда

$$\lg \frac{\sqrt[5]{a+b} \cdot (a-b)^3 \cdot c^4}{n^2} = \lg\left((a+b)^{\frac{1}{5}} \cdot (a-b)^3 \cdot c^4\right) - \lg n^2 =$$

$$= \lg|a+b|^{\frac{1}{5}} + \lg|a-b|^3 + \lg|c|^4 - 2\lg|n| =$$

$$= \frac{1}{5}\lg|a+b| + 3\lg|a-b| + 4\lg|c| - 2\lg|n|.$$

Пример 4. Выполнить потенцирование выражения

$$\ln x = (a-b)\ln c - (a+b)\ln m + \frac{3}{5}\ln k.$$

Решение. Используем свойства логарифмов 3–5 («справа–налево»):

$$\ln x = \ln c^{a-b} - \ln m^{a+b} + \ln k^{\frac{3}{5}} = \ln \frac{c^{a-b} \cdot k^{\frac{3}{5}}}{m^{a+b}}.$$

Получаем ответ: $x = \dfrac{c^{a-b} \cdot k^{\frac{3}{5}}}{m^{a+b}}$.

Пример 5. Выразить $\lg 12$ через $\lg 3 = a$ и $\lg 5 = b$.

Решение. $\lg 12 = \lg(3 \cdot 4) = \lg 3 + \lg 4 = a + \lg 2^2 = a + 2\lg 2 =$

$$= a + 2\lg\frac{10}{5} = a + 2(\lg 10 - \lg 5) = a + 2(1 - \lg 5) =$$

$$= a + 2(1-b) = a + 2 - 2b = a - 2b + 2.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите число, логарифм которого по основанию 2 равен:

1) –2; 2) –1; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{1}{16}$; 6) 0;

7) $\frac{1}{64}$; 8) $\frac{1}{8}$; 9) $\frac{1}{4}$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) 1; 12) 2.

1.2. Найдите логарифм числа 729 по основанию:

1) 9; 2) 3; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{9}$.

1.3. Найдите логарифм числа по основанию 3:

1) 1; 2) 3; 3) 9; 4) 27;

5) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{81}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $\sqrt[3]{3}$;

9) $\sqrt[3]{9}$; 10) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 11) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$; 12) $\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$.

1.4. Найдите число b, если:

1) $\log_2 b = 2$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} b = 3$; 3) $\log_5 b = -2$;

4) $\log_5 b = -2$; 5) $\log_{0,1} b = -4$; 6) $\lg b = \frac{1}{2}$;

7) $\ln b = -0{,}5$; 8) $\log_{3\sqrt{2}} b = 4$; 9) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} b = -2$.

1.5. Найдите число a, если:

1) $\log_a 25 = 1$; 2) $\log_a 13 = -1$; 3) $\log_a 125 = 3$;

4) $\log_{\frac{1}{a}} 12 = \frac{1}{2}$; 5) $\log_{\frac{1}{a}} e = -\frac{1}{3}$; 6) $\log_{\sqrt[3]{a}} 10 = -1$.

1.6. Вычислите значение логарифма:

1) $\log_4 64$; 2) $\log_9 1$; 3) $\log_3 \frac{1}{27}$;

4) $\log_{25} 0{,}04$; 5) $\log_{\sqrt{2}} 0{,}25$; 6) $\log_{2\sqrt[3]{4}} 32$;

7) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; 8) $\log_{\frac{1}{25}} 5$; 9) $\log_{2^{-3}} 8$;

10) $\log_e \sqrt[3]{e^2}$; 11) $\log_{\sqrt[5]{e^3}} \frac{1}{e^3}$; 12) $\log_9 81^{-3}$.

1.7. Упростите выражение:

1) $3^{\log_3 7}$; 2) $16^{\log_4 5}$; 3) $5^{\log_{25} 9}$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 3}$;

5) $7^{\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{6}}$; 6) $49^{\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{6}}$; 7) $\left(\frac{1}{e}\right)^{\log_{e^2} 3}$; 8) $(e)^{\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{e}}} 25}$.

1.8. Вычислите:

1) $\lg 4 + \lg 25$; 2) $\log_4 100 - \log_4 25$; 3) $\lg 2 + \frac{1}{\log_5 10}$;

4) $\log_3 21 - \frac{\log_6 7}{\log_6 3}$; 5) $\ln 225 - \ln 25$.

1.9. Прологарифмируйте выражение по основанию a:

1) $c^2 \cdot d^{-3} \cdot 100$, если $a = 10$; 2) $\frac{n^{-5} \cdot m^{\frac{1}{5}}}{10}$, если $a = 10$;

3) $\frac{\sqrt[5]{n^3} \cdot m^{\sqrt{2}+1}}{k^5}$, если $a = 10$; 4) $\frac{\sqrt[3]{100\sqrt{10a\sqrt[3]{0{,}1a^2}}}}{10\sqrt{0{,}1a}}$, если $a = 10$;

5) $\frac{e^{-6} \cdot \sqrt[7]{e^5}}{e^2\sqrt{e}}$, если $a = e$; 6) $\frac{27 \cdot \sqrt[5]{81x}}{9x^2}$, если $a = 3$;

7) $\frac{(x+3) \cdot \sqrt{x^2 - 2}}{26x^4}$, если $a = e$.

1.10. Выполните потенцирование:

1) $\ln x = \frac{1}{2}\ln(b+3) - 3\ln b + 5\ln(2b+1)$;

2) $\lg x = -\frac{1}{3}\lg(3c-5) - 5\lg a + 3\lg b$;

3) $\log_5 x = \log_5(m^2 - p^2) - \frac{1}{2}\log_5(m+p) + \frac{1}{2}\log_5 \frac{m+p}{m-p}$.

II уровень

2.1. Вычислите:

1) $\log_{3,8} 10 \cdot \lg \sqrt[5]{3{,}8}$; 2) $\sqrt[4]{36^{\log_6 5} - 5^{\log_5 9}}$;

3) $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$; 4) $3^{\frac{\log_4 7}{\log_2 3}}$;

5) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{1}{125}} \frac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{5}$; 6) $7^{\frac{\lg\left(\log_{1+\sqrt{2}}\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}{\lg 7}}$;

7) $\lg 5 \cdot \lg 20 + \lg^2 2$; 8) $12^{\sqrt{\log_{12} 13}} - 13^{\sqrt{\log_{13} 12}}$;

9) $16^{\frac{\log_4 45 + 2\log_4 \frac{1}{3}}{\log_4 75 - \log_4 3}} + 2^{\frac{\log_4 8}{\log_4 2}}$; 10) $\dfrac{\lg^2 5 - 5\lg 5 \cdot \lg 2 - 3\lg^2 2}{2(\lg 5 - 3\lg 2)}$;

11) $\left(\sqrt[7]{\dfrac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3} + \frac{6}{5}\log_3 5} \cdot 5^{\frac{3}{5}}$;

12) $(0,2)^{\log_5 0,5} + \log_{\sqrt{3}} \dfrac{9}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{7 + 2\sqrt{10}}$;

13) $\dfrac{\log_2^2 14 + \log_2 14 \cdot \log_2 7 - 2\log_2^2 7}{\log_2 14 + 2\log_2 7}$;

14) $2^{\frac{1}{2\log_5 2}} \cdot 5^{\log_5^2 2} - \sqrt{5} \cdot 2^{\log_5 2} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_3 25}$;

15) $(\log_3 2 + \log_2 81 + 4) \cdot (\log_3 2 - 2\log_{18} 2)\log_2 3 - \log_3 2$;

16) $\sqrt{1 + 2^{\frac{\lg a}{\lg \sqrt{2}}} - a^{1 + \frac{1}{\lg 4a^2}}} - 1,\ 0 < a < 1$.

2.2. Докажите неравенство:

1) $\lg^2 7 + \lg^2 29 > 2 + \lg 4$; 2) $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

2.3. Известно, что $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$. Выразите через a и b заданный логарифм:

1) $\log_5 72$; 2) $\log_5 12$; 3) $\log_5 15$; 4) $\log_5 30$.

III уровень

3.1. Вычислите:

1) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \ldots \cdot \log_{26} 27$; 2) $a^{\frac{\lg \lg a}{\lg a}} - \lg a$;

3) $\dfrac{1}{a+b}\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg 2}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$; 4) $8^{\log_{\sqrt{8}}\left(12 - 6 + 3 - \frac{3}{2} + \ldots\right)}$.

3.2. Упростите выражение до числа:

$$x - \left(2x^{\frac{\log_2 x + 1}{2\log_4 x}} + 16^{\frac{1}{4\log_{x^2} 2}} + 4\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.3. Докажите, что

$$\frac{\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n + \lg(n+1)}{n+1} > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n}{n}.$$

6.3. Логарифмическая функция

Логарифмической функцией называется функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Свойства логарифмической функции

1. *Область определения:* $D(y) = (0;\ +\infty)$.
2. *Множество значений:* $E(y) = (-\infty;\ +\infty)$.
3. *Четность и нечетность:* функция не обладает свойством четности.
4. *Периодичность функции:* непериодическая.
5. *Нули:* функция обращается в нуль при $x = 1$.
6. *Промежутки знакопостоянства:* если $a > 1$, то функция положительна для $x \in (1;\ +\infty)$, отрицательна для $x \in (0;\ 1)$; если $0 < a < 1$, то функция положительна для $x \in (0;\ 1)$, отрицательна для $x \in (1;\ +\infty)$.
7. *Наибольшее и наименьшее значения:* наибольшего и наименьшего значений функция не имеет.
8. *Промежутки возрастания и убывания:* если $0 < a < 1$, функция убывает для $x \in (0;\ +\infty)$; если $a > 1$, возрастает для $x \in (0;\ +\infty)$.
9. *Асимптоты:* прямая $x = 0$ (ось Oy) – вертикальная асимптота.
10. *График функции* для $a > 1$ изображен на рис. 6.9, а для $0 < a < 1$ на рис. 6.10.

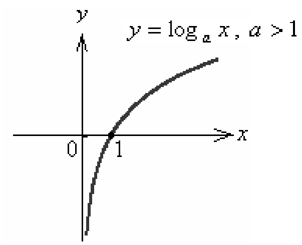


Рис. 6.9

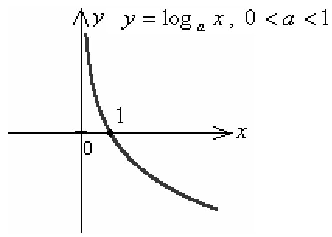


Рис. 6.10

Из свойств функции следует: $\log_a b > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 1, \\ b > 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < b < 1. \end{cases}$$

Функция $y = \log_a x$, если $a > 1$, является обратной для функции $y = a^x$, при $a > 1$.

Функция $y = \log_a x$, если $0 < a < 1$, является обратной для функции $y = a^x$, при $0 < a < 1$.

Пример 1. Определить знак числа:

1) $\log_7 35$; 2) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{7}$; 3) $\log_5 \frac{2}{7}$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} 19$.

Решение. 1) Поскольку основание логарифма больше 1 ($a = 7$) и значение, стоящее под знаком логарифма, больше 1 ($b = 35$), то из свойств логарифмической функции $\log_7 35 > 0$.

2) Для основания логарифма имеем $0 < \frac{2}{3} < 1$, и для выражения, стоящего под знаком логарифма, выполняется $0 < \frac{3}{7} < 1$. Поэтому $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{7} > 0$.

3) Так как основание логарифма 5 и $5 > 1$, а выражение, стоящее под знаком логарифма, равно $\frac{2}{7}$ и $0 < \frac{2}{7} < 1$, то $\log_5 \frac{2}{7} < 0$.

4) Для основания логарифма выполняется $0 < \frac{1}{5} < 1$, а под знаком логарифма число 19 ($19 > 1$). Поэтому $\log_{\frac{1}{5}} 19 < 0$.

Пример 2. Сравнить числа:

1) $\log_{11} 110$ и $\log_{13} 180$; 2) $\log_2 3$ и $\log_3 7$;

3) $\ln 9 + 2\log_3 e$ и 3.

Решение. 1) Используем тот факт, что логарифмические функции с основанием 11 и 13 монотонно возрастают. Поэтому

$\log_{11} 110 < \log_{11} 121 = \log_{11} 11^2 = 2$,

$\log_{13} 180 > \log_{13} 169 = \log_{13} 13^2 = 2$.

Тогда

$\log_{11} 110 < \log_{13} 180$.

2) Рассмотрим числа $3\log_2 3$ и $3\log_3 7$. Так как

$3\log_2 3 = \log_2 3^3 = \log_2 27 < \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$ и

$3\log_3 7 = \log_3 7^3 = \log_3 343 > \log_3 243 = \log_3 3^5 = 5$, то

$3\log_2 3 < 3\log_3 7$, следовательно, $\log_2 3 < \log_3 7$.

3) Известно, что $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ или $a + b \geq 2\sqrt{ab}$,

если $a \geq 0$, $b \geq 0$.

В нашем случае $\ln 3 > 0, \log_3 e > 0$, тогда

$$\ln 9 + 2\log_3 e \geq 2\sqrt{\ln 9 \cdot 2\log_3 e} = 2\sqrt{\ln 3^2 \cdot \frac{2}{\ln 3}} = 2\sqrt{2\ln 3 \cdot \frac{2}{\ln 3}} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{4} = 4,$$

т. е. $\ln 9 + 2\log_3 e > 3$.

Пример 3. Установить, между какими последовательными целыми числами находится число $\log_7 256$.

Решение. Поскольку логарифмическая функция с основанием 7 монотонно возрастает, то

$\log_7 49 < \log_7 256 < \log_7 343$,

$\log_7 7^2 < \log_7 256 < \log_7 7^3$,

$\log_7 7^2 < \log_7 256 < \log_7 7^3$,

$2\log_7 7 < \log_7 256 < 3\log_7 7$,

$2 < \log_7 256 < 3$.

Пример 4. Найти функцию, обратную функции $y=3^{x-2}-2$. Построить графики обеих функций в одной системе координат.

Решение. Найдем функцию, обратную данной:

$x=3^{y-2}-2,$

$3^{y-2}=x+2,$

$\log_3 3^{y-2}=\log_3(x+2),$

$(y-2)\log_3 3=\log_3(x+2),$

$y-2=\log_3(x+2),$

$y=\log_3(x+2)+2.$

Построим графики функций:

а) строим график функции $y=3^{x-2}-2$: график функции $y=3^x$ переносим параллельно на две единицы вправо по оси *Ox* и на две единицы вниз по оси *Oy*;

б) график обратной функции $y=\log_3(x+2)+2$ симметричен графику данной функции относительно прямой $y=x$ (рис. 6.11).

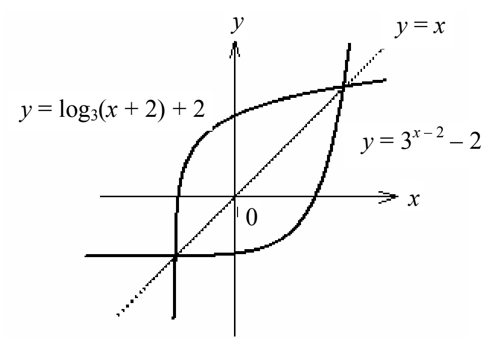


Рис. 6.11

Задания

I уровень

1.1. Найдите область определения функции:

1) $y=\log_5(-3x)$; 2) $y=\log_3(x+1)$;

3) $y=\log_{0,5}\dfrac{x+3}{x-5}$; 4) $y=\log_7|x+3|$;

5) $y=\log_3(3x^2+1)$; 6) $y=\log_{0,4}x^2$;

7) $y=\log_{0,3}\big((x-2)\cdot(x+5)\big)$; 8) $y=\log_3(x-2)+\log_5(x+5)$;

9) $y=\log_{0,1}\big(5x-x^2-6\big)$; 10) $y=\log_6(9-x^2)$;

11) $y=\log_{12}\sqrt{x+7}$; 12) $y=\log_2\sqrt[3]{x-5}$.

1.2. Постройте график функции:

1) $y=\log_2 x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$;

3) $y=\log_{0,5}(x+3)$; 4) $y=\log_3 x-2$;

5) $y=\log_{0,25}(x-2)+3$; 6) $y=-\log_{\frac{1}{5}} x$;

7) $y=\log_3 2x$; 8) $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$.

1.3. Определите знак числа:

1) $\log_3 2$; 2) $\log_2 0{,}3$; 3) $\log_{0,2} 2$;

4) $\log_5 0{,}5$; 5) $\lg 12$; 6) $\lg 0{,}6$;

7) $\log_{\frac{1}{5}} 6$; 8) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{5}$; 9) $\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{3}$;

10) $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}$; 11) $\ln\sqrt{3}$; 12) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 9$.

1.4. Определите, между какими последовательными целыми числами заключается логарифм:

1) $\log_2 3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 6$; 3) $\log_3 7$;

4) $\log_2 10$; 5) $\lg 50$; 6) $\log_2 0{,}3$;

7) $\log_{0,5} 25$; 8) $\ln 3$; 9) $\ln\dfrac{1}{6}$;

10) $\lg 245$; 11) $\lg 0{,}03$; 12) $\log_5 0{,}75$.

1.5. Сравните числа:

1) $\log_3 4$ и $\log_3 6$; 2) $\log_{0,5} 3$ и $\log_{0,5} 5$;

3) $\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{6}$ и $\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{7}$; 4) $\lg\sqrt[3]{10}$ и $\lg\sqrt{5}$;

5) $\lg 2{,}05$ и $\lg\dfrac{1}{2{,}05}$; 6) $\ln 0{,}3$ и $\ln 0{,}5$.

II уровень

2.1. Найдите область определения функции:

1) $y=\log_5\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+2}}$; 2) $y=\log_{0,7}\left(\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-1\right)$;

3) $y=\log_2\left|\dfrac{x^2-5x+8}{x^2+6x+9}\right|$; 4) $y=\log_x\left(-x^2+5x+6\right)$;

5) $y=\ln\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x-1}$; 6) $y=\log_{x^2}\dfrac{x^3-8}{x^4-16}$.

2.2. Постройте график функции:

1) $y=\log_2|x+3|-2$; 2) $y=\log_{0,5}|x|+3$;

3) $y=|\log_3(x+2)-1|$; 4) $y=\log_{0,2}|x^2-x|$;

5) $y=\log_{0,3}(9-x^2)$.

2.3. Сравните числа:

1) $\log_3 2$ и $\log_2 3$; 2) $\log_{0,5}\dfrac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}}0{,}5$;

3) $\log_{18}36$ и $\log_{24}72$; 4) $\log_2 5$ и $\log_5 7$;

5) $\log_3 7$ и $\log_7 26$; 6) $\log_5 2$ и $\log_2 12$;

7) $11^{\log_9 3}$ и $6^{\log_4 2}$; 8) $3^{\log_{25}5}$ и $2^{\log_{27}3}$.

2.4. Найдите функцию, обратную данной. Укажите область определения и область значений обратной функции. Постройте графики данной функции и обратной в одной системе координат:

1) $y=2^{x+1}-3$; 2) $y=\log_2 x+3$;

3) $y=\log_{0,2}x-2$; 4) $y=0{,}5^{x-3}+1$;

5) $y=e^{x-1}+2$; 6) $y=\lg(x+1)-3$.

III уровень

3.1. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{\lg\left(2-\sqrt{x-1}\right)}$; 2) $y=\log_{x+5}\dfrac{3x+2}{2x-1}$;

3) $y=\sqrt{\log_{x-2}\left(x^2-8x+15\right)}$; 4) $y=\sqrt[4]{\log_{0,5}\log_3\dfrac{x+1}{x-1}}$.

3.2. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{\ln x}{|\ln x|}$; 2) $y=\left|\log_{\frac{1}{3}}x-1\right|+\log_{\frac{1}{3}}x$;

3) $y=\dfrac{\sqrt{\log_2^2 x}}{\log_{0,5}x}$; 4) $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}-x\right)+\log_3\sqrt{9x^2-6x+1}$.

3.3. Сравните числа:

1) $\log_{18}36$ и $\log_{24}72$; 2) $3^{\sqrt{\log_5 3}}$ и $5^{\sqrt{\log_3 5}}$;

3) $\log_4 26$ и $\log_6 17$; 4) $\log_{135}675$ и $\log_{45}75$;

5) $7\log_{1978}1970+1$ и $8\log_{1978}1971$.

3.4. Определите, при каких значениях m областью определения функции $y=\sqrt[8]{\ln e+\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(mx^2+4x+m\right)}$ является вся числовая ось.

3.5. Представьте функцию $y=x\ln|x|+\dfrac{x-1}{x+1}$ в виде суммы четной и нечетной функций.

6.4. Показательные уравнения, показательно-степенные уравнения

Показательным уравнением называется уравнение, которое содержит неизвестную величину в показателе степени при постоянном основании a ($a>0$).

Типы показательных уравнений и способы их решения

Всюду далее $f(x)$, $g(x)$ – некоторые выражения с неизвестной величиной x.

I тип: уравнение вида

$$a^{f(x)}=b,\ \text{где } a>0,\ a\neq 1, \tag{6.2}$$

имеет решение, если $b > 0$. Его решают логарифмированием по основанию a:

$$\log_a a^{f(x)} = \log_a b.$$

Тогда

$$f(x) = \log_a b. \qquad (6.3)$$

Решение уравнения (6.3) производят соответственно типу этого уравнения.

II тип: уравнение вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ \text{где}\ a > 0, \qquad (6.4)$$

по свойству равенства степеней равносильно уравнению

$$f(x) = g(x).$$

Последнее уравнение решают в зависимости от его типа.

III тип: уравнение вида

$$F\left(a^{f(x)}\right) = 0, \qquad (6.5)$$

где F – некоторое выражение относительно $a^{f(x)}$.

Производят замену переменной $y = a^{f(x)}$ и решают уравнение $F(y) = 0$.

Если $y_1, y_2, ..., y_n$, $(n \in \mathbf{N})$ – корни уравнения, то после возвращения к старой переменной решение уравнения (6.5) сводится к решению равносильной ему совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} a^{f(x)} = y_1, \\ a^{f(x)} = y_2, \\ ..., \\ a^{f(x)} = y_n. \end{array}\right.$$

IV тип: уравнения, решаемые графическим методом.

Для таких уравнений строят соответствующие графики для левой и правой частей уравнения. Определяют, для каких значений x графики имеют общую ординату. Используют также иные функциональные свойства, в частности, монотонность функции (возрастание, убывание).

Показательно-степенным уравнением называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится и в основании степени, и в показателе. Такие уравнения принято решать при условии, что основания степени положительны (ОДЗ уравнения).

Типы показательно-степенных уравнений и способы их решения

Всюду далее $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x, $f(x) > 0$.

I тип: уравнение вида

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(f(x)\right)^{h(x)}. \qquad (6.6)$$

Решение уравнения (6.6) на ОДЗ сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} g(x) = h(x), \\ f(x) = 1. \end{array}\right.$$

II тип: уравнение вида

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(h(x)\right)^{g(x)}. \qquad (6.7)$$

Решение уравнения (6.7) на ОДЗ сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = h(x), \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$$

Пример 1. Решить уравнение $3^{x-5} = 7$.

Решение. *1-й способ.* Имеем уравнение I типа (формула (6.2)). Решаем логарифмированием по основанию 3. Получаем:

$\log_3 3^{x-5} = \log_3 7$, т. е. $(x-5)\log_3 3 = \log_3 7$.

Приходим к линейному уравнению

$x - 5 = \log_3 7$,

откуда $x = \log_3 7 + 5$.

2-й способ. Преобразуем правую часть при помощи основного логарифмического тождества: $3^{x-5} = 3^{\log_3 7}$.

Получили уравнение II типа (формула (6.4)), которое решаем по свойству равенства степеней:

$x - 5 = \log_3 7,\ x = \log_3 7 + 5.$

Пришли к ответу: $x = \log_3 7 + 5$.

Пример 2. Решить уравнение $27^{x-\frac{2}{3}} - 9^{x-1} = 2\cdot 3^{2x-1} - 2\cdot 3^{3x-1}$.

Решение. Выполним необходимые преобразования, сведем показательные выражения к одному и тому же основанию 3:

$3^{3\left(x-\frac{2}{3}\right)} - 3^{2(x-1)} = 2\cdot 3^{2x-1} - 2\cdot 3^{3x-1}$,

$$3^{3x-2}-3^{2x-2}-2\cdot 3^{2x-1}+2\cdot 3^{3x-1}=0,$$
$$3^{3x-2}+2\cdot 3^{3x-1}-3^{2x-2}-2\cdot 3^{2x-1}=0,$$
$$3^{3x}\left(3^{-2}+2\cdot 3^{-1}\right)=3^{2x}\left(3^{-2}+2\cdot 3^{-1}\right),$$
$$3^{3x}=3^{2x}.$$

По свойству степеней: $3x=2x, 3x-2x=0.$

Получаем ответ: $x=0.$

Пример 3. Решить уравнение $4^x+2\cdot 2^x-48=0.$

Решение. Преобразуем уравнение

$$2^{2x}+2\cdot 2^x-48=0,$$
$$\left(2^x\right)^2+2\cdot 2^x-48=0.$$

Имеем квадратное уравнение относительно 2^x. Решаем при помощи замены $2^x=y.$ Получаем:

$$y^2+2y-48=0.$$

Корнями последнего уравнения являются значения $y_1=-6,$ $y_2=8.$

Возвращаясь к неизвестной x, имеем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}2^x=-6,\\ 2^x=8.\end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности решений не имеет. Решаем второе уравнение:

$2^x=8,$ т. е. $2^x=2^3.$

Получили ответ: $x=3.$

Пример 4. Решить уравнение $3\cdot 16^x-5\cdot 36^x+2\cdot 81^x=0.$

Решение. Выполним необходимые преобразования:

$$3\cdot 4^{2x}-5\cdot(4\cdot 9)^x+2\cdot 9^{2x}=0,$$
$$3\cdot 4^{2x}-5\cdot 4^x\cdot 9^x+2\cdot 9^{2x}=0.$$

Имеем однородное уравнение. Разделим обе части уравнения на 9^{2x} $(9^{2x}\neq 0)$. Получим:

$$3\cdot\frac{4^{2x}}{9^{2x}}-5\cdot\frac{4^x\cdot 9^x}{9^{2x}}+2\cdot\frac{9^{2x}}{9^{2x}}=0,$$
$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x}+2=0,$$

т. е. получили квадратное уравнение относительно $\left(\frac{4}{9}\right)^x$. Вводим замену $\left(\frac{4}{9}\right)^x=y.$ Тогда

$$3y^2-5y+2=0,$$

откуда $y_1=\frac{2}{3},\ y_2=1.$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{4}{9}\right)^x=1;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{4}{9}\right)^0;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}2x=1,\\ x=0;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2},\\ x=0.\end{array}\right.$$

Получили ответ: $x=0, x=\frac{1}{2}.$

Пример 5. Решить уравнение $1+3^{\frac{x}{2}}=2^x.$

Решение. *1-й способ*. Подбором убеждаемся, что $x=2$– корень уравнения. Функции $y=1+3^{\frac{x}{2}}$ (т. е. $y=\left(\sqrt{3}\right)^x+1$) и $y=2^x$ монотонно возрастают (рис. 6.12). Они имеют единственную общую точку.

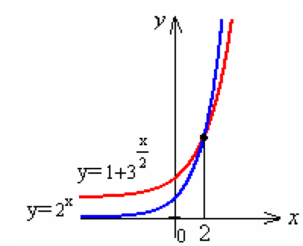


Рис. 6.12

2-й способ. Разделим обе части уравнения на 2^x. Получим:

$$\frac{1}{2^x}+\frac{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x}{2^x}=1 \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x=1.$$

Заменим $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$. Получим $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^x+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^x=1$.

При $x = 2$ получим основное тригонометрическое тождество, т. е. $x = 2$ является корнем исходного уравнения.

Получили ответ: $x = 2$.

Пример 6. Решить уравнение $10\cdot\sqrt[x]{4}-29\cdot\sqrt[x]{10}+10\cdot\sqrt[x]{25}=0$.

Решение. ОДЗ: $x = 2, 3, \ldots, n, \ldots$.

Перепишем уравнение в виде

$$10\cdot4^{\frac{1}{x}}-29\cdot10^{\frac{1}{x}}+10\cdot25^{\frac{1}{x}}=0.$$

Разделим обе части уравнения на $25^{\frac{1}{x}}$ (так как $25^{\frac{1}{x}}\neq0$). Получим:

$$10\cdot\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^2-29\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}+10=0.$$

Вводим замену $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=y$.

Получаем квадратное уравнение $10y^2-29y+10=0$, откуда $y_1=\frac{2}{5}$, $y_2=\frac{5}{2}$.

Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{2}{5},\\ \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{2};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{2}{5}\right)^1,\\ \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}=1,\\ \frac{1}{x}=-1;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-1.\end{array}\right.$$

Но ни один из корней не подходит по ОДЗ. Следовательно, уравнение корней не имеет.

Пример 7. Решить уравнение $|x-2|^{x^2-5x+6}=1$.

Решение. ОДЗ: $x\neq2$.

$$|x-2|^{x^2-5x+6}=|x-2|^0.$$

Решением является совокупность

$$\left[\begin{array}{l}x^2-5x+6=0,\\ |x-2|=1;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}(x-2)(x-3)=0,\\ x-2=1,\\ x-2=-1;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=2,\ x=3,\\ x=3,\\ x=1.\end{array}\right.$$

Корень $x = 2$ не подходит по ОДЗ.

Получили ответ: $x = 1$, $x = 3$.

Задания

I уровень

1.1. Установите, имеет ли уравнение корни:

1) $7^x=49$; 2) $3^{x^2}=3^{-9}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=7$;

4) $6^{\sqrt{x-2}}=6^{\sqrt{2-x}}$; 5) $\frac{1}{3^{\sqrt{x}}}=3^{-2}$; 6) $5^{x-2}=0$;

7) $2^{x+3}=-\frac{1}{2}$; 8) $5^{4x}=-5$; 9) $\sqrt[x]{3}=9$;

10) $\sqrt[x+2]{2}^{\,\frac{10}{x+2}}=4$.

1.2. Определите, сколько корней имеет уравнение $3^x=5^x$. Как это можно установить графически?

1.3. Решите уравнение:

1) $4^x=8$; 2) $2\cdot4^x=16$; 3) $3^{x+3}=81$;

4) $10^{x^2+4x+4}=1$; 5) $\left(\frac{5}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{25}{4}\right)^x=\frac{125}{8}$; 6) $9^{|x-2|}=81$;

7) $6^{x+2}+2\cdot6^{x+1}=288$; 8) $7^{2x}-8\cdot7^x+7=0$; 9) $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}}$;

10) $3^x+\frac{6}{3^x}=5$.

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $3^{x-2}=5^{x^2-5x+6}$; 2) $9^x-4\cdot3^x+3=0$;

3) $2^{3x}+8\cdot2^x-6\cdot2^{2x}=0$; 4) $15\cdot2^{x+1}+15\cdot2^{-x+2}=135$;

5) $4\cdot 9^x+12^x-3\cdot 16^x=0$;

6) $9^x+6^x=2\cdot 4^x$;

7) $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}$;

8) $4^{x+2\sqrt{x^2-3}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-3}}=6$;

9) $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{2\lg x+2}=0$;

10) $18^{2x}\cdot 2^{-2x}\cdot 3^{x+1}=3^{x-1}$;

11) $8^x-4^x=2^x$;

12) $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}=\frac{\sqrt[4]{5^{3x-1}}}{\sqrt{3}}$;

13) $9^{\sqrt{x^2+4x+4}}=\sqrt{3}$;

14) $8^x+18^x=2\cdot 27^x$;

15) $5^x=3$;

16) $2^{x-3}=3^{3-x}$.

2.2. Найдите значение выражения $\left(2+\sqrt{3}\right)^x-\left(2-\sqrt{3}\right)^x$, если $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-x}=18$.

2.3. Решите уравнение:

1) $(x+5)^{x^2-x-1}=(x+5)^{2x+3}$;

2) $(7-x)^{x^2-7x+10}=(7-x)^{4x-14}$;

3) $|x|^{x^2-x-2}=1$;

4) $|5x-30|^{x^2}=|30-5x|^{15-14x}$;

5) $|3x-15|^{54-3x}=|15-3x|^{x^2}$.

2.4. Решите уравнение:

1) $x^x=x$;

2) $x^{\lg x}=1$;

3) $x^{3\lg x}=10x^2$;

4) $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$;

5) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$;

6) $x^{\lg^3 x-5\lg x}=0{,}0001$.

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$;

2) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^x+\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^x=18$;

3) $\left(\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)^x=\left(\sqrt{10}\right)^x$;

4) $\sqrt{2^x\cdot\sqrt[3]{4^x\cdot(0{,}125)^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2}$;

5) $3\cdot\sqrt{4^x+4-2^{x+2}}=3\cdot 2^{x+1}-2^{2x}-2$;

6) $\sqrt[x]{27^{2x-1}}=\sqrt{9^{2x-1}}$;

7) $\left(\sqrt{26}+5\right)^{x+4}=\left(\sqrt{26}+5\right)^{\frac{x+4}{x-6}}$;

8) $6\sqrt[x]{9}-13\sqrt[x]{6}+6\sqrt[x]{4}=0$;

9) $\sqrt[x]{5^{5\sqrt{x}}}=5^{\sqrt{x}-4}$;

10) $3^{2x^2+6x-9}+4\cdot 15^{x^2+3x-5}=3\cdot 5^{2x^2+6x-9}$;

11) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\frac{101}{10\left(2-\sqrt{3}\right)}$;

12) $\sqrt{9^x-5\cdot 3^x+4}+\sqrt{9^x-7\cdot 3^x+6}+\sqrt{3^{21x}+5\cdot 3^x-6}=0$;

13) $\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}+\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x+$

$+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}-\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x=2^{1+\frac{x}{4}}$;

14) $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8$;

15) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^{\sin x}=\frac{10}{3}$;

16) $26^x-\left(6+\sqrt{10}\right)\cdot\left(6-\sqrt{10}\right)^x-\left(6-\sqrt{10}\right)\cdot\left(6+\sqrt{10}\right)^x+26=0$.

3.2. Найдите сумму корней уравнения:

1) $\left(|x|-1\right)\log_{|x|}\left(x^2+12\right)=4$;

2) $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$.

6.5. Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком логарифма или в его основании.

При решении логарифмических уравнений обязательно учитывается ОДЗ логарифма. Если ОДЗ найти сложно, то можно только выписать условия, а затем проверить полученные корни подстановкой в ОДЗ (можно проверять подстановкой в уравнение, не выписывая ОДЗ).

Типы уравнений и способы их решения

Всюду далее $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с переменной (число).

I тип: уравнение вида

$$\log_{f(x)} g(x) = c, \tag{6.8}$$

где $c \in \mathbf{R}$.

ОДЗ: $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$

На указанной ОДЗ уравнение (6.8) решают по определению логарифма:

$g(x) = f(x)^c$.

II тип: уравнение вида

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x), \tag{6.9}$$

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$

На основании равенства логарифмов, уравнение (6.9) сводится к равносильному ему (на указанной ОДЗ) уравнению:

$g(x) = h(x)$.

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{h(x)} g(x), \tag{6.10}$$

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Данное уравнение на ОДЗ равносильно совокупности уравнений:

$\left[\begin{array}{l} g(x) = 1, \\ f(x) = h(x). \end{array}\right.$

III тип: уравнения, решаемые заменой переменной

$$F\left(\log_{f(x)} g(x)\right) = 0, \tag{6.11}$$

где F – некоторое выражение относительно $\log_{f(x)} g(x)$.

Необходимо определить ОДЗ уравнения, учитывая все условия существования логарифма и выражения F.

Далее заменяют $y = \log_{f(x)} g(x)$ и решают уравнение $F(y) = 0$.

Если $y_1, y_2, ..., y_n$ – корни последнего уравнения, то, после возвращения к старой переменной, необходимо решить совокупность

$\left[\begin{array}{l} \log_{f(x)} g(x) = y_1, \\ \log_{f(x)} g(x) = y_2, \\ ..., \\ \log_{f(x)} g(x) = y_n. \end{array}\right.$

Полученные корни проверяют по ОДЗ.

З а м е ч а н и е. Если вместо какого-либо выражения $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ уравнения (6.8)–(6.11) содержат число, то соответствующее условие не записывают в ОДЗ.

Пример 1. Решить уравнение $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2\left(x^2 - 25\right) = 0$.

Решение. Находим ОДЗ:

$\begin{cases} \frac{x-5}{x+5} > 0, \\ x^2 - 25 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+5)\cdot(x-5) > 0, \\ (x+5)\cdot(x-5) > 0. \end{cases}$

Решение системы:

$x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

Преобразуем уравнение к виду

$\log_2\left(\frac{x-5}{x+5}\left(x^2 - 25\right)\right) = 0$.

Получили уравнение I типа, которое решается по определению логарифма:

$\frac{x-5}{x+5} \cdot \left(x^2 - 25\right) = 2^0$, $\frac{x-5}{x+5} \cdot (x+5) \cdot (x-5) = 1$,

$\frac{(x-5)^2 \cdot (x+5)}{x+5} - 1 = 0$, $\frac{(x-5)^2 \cdot (x+5) - (x-5)}{x+5} = 0$,

$(x+5) \cdot \left((x-5)^2 - 1\right) = 0$, $(x-5)^2 - 1 = 0$,

$$(x-5-1)\cdot(x-5+1)=0, \quad (x-4)\cdot(x-6)=0,$$

откуда $x_1=4, x_2=6$.

Из полученных значений корень $x = 4$ не подходит по ОДЗ.

Получаем ответ: $x = 6$.

Пример 2. Решить уравнение $\log_{x^2+5x+7}\log_{x^2-4}3x=0$.

Решение. Записываем условия, определяющие ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_{x^2-4}3x>0, \\ x>0, \\ x^2-4>0, \\ x^2-4\neq 1, \\ x^2+5x+7>0, \\ x^2+5x+7\neq 1. \end{cases}$$

Заданное уравнение относится к I типу. Получаем:

$\log_{x^2-4}3x=\left(x^2+5x+7\right)^0$, $\log_{x^2-4}3x=1$.

Снова используем определение логарифма:

$3x=x^2-4$, т. е. $x^2-3x-4=0$, откуда $x_1=-1, x_2=4$.

Полученные корни проверяем подстановкой в условия, определяющие ОДЗ уравнения. Убеждаемся, что корень $x_2=4$ подходит, а корень $x_1=-1$ не подходит по ОДЗ.

Получаем ответ: $x=4$.

Пример 3. Решить уравнение $\log_{x^2-4}(x^3+6)=\log_{x^2-4}(4x^2-x)$.

Решение. Записываем условия, определяющие ОДЗ:

$$\begin{cases} x^3+6>0, \\ 4x^2-x>0, \\ x^2-4>0, \\ x^2-4\neq 1. \end{cases}$$

Данное уравнение относится ко II типу, т. е. решается по свойству равенства логарифмов. Получаем:

$x^3+6=4x^2-x$, т. е. $x^3-4x^2+x+6=0$.

Раскладываем левую часть на множители:

$(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)=0$, откуда получаем $x_1=-1, x_2=2, x_3=3$.

Подставляем найденные значения в ОДЗ, находим, что уравнение имеет только один корень $x = 3$.

В ответе имеем: $x = 3$.

Пример 4. Решить уравнение

$\log_x(5x-9)=\log_{\sqrt{2x-1}}(5x-9)$.

Решение. Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ 2x-1>0, \\ 2x-1\neq 1, \\ 5x-9>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x>\dfrac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ x>\dfrac{9}{5}, \end{cases} \text{ т. е. } x\in\left(\frac{9}{5};+\infty\right).$$

Данное уравнение относится ко II типу. Решаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} 5x-9=1, \\ x=\sqrt{2x-1}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 5x=10, \\ x^2=2x-1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x^2-2x+1=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1. \end{array}\right.$$

По ОДЗ подходит только корень $x = 2$, так как $1\notin\left(\dfrac{9}{5};+\infty\right)$.

Получаем ответ: $x = 2$.

Пример 5. Решить уравнение $\lg^2 x^3-10\lg x+1=0$.

Решение. ОДЗ: $x>0$. Преобразуем уравнение:

$$\left(\lg x^3\right)^2-10\lg x+1=0,$$

$$\left(3\lg x\right)^2-10\lg x+1=0,$$

$$9\lg^2 x-10\lg x+1=0.$$

Имеем квадратное уравнение относительно $\lg x$ (уравнение III типа). Заменяем $\lg x=y$:

$$9y^2-10y+1=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим корни $y_1=\dfrac{1}{9}$, $y_2=1$. Возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x=\dfrac{1}{9}, \\ \lg x=1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=10^{\frac{1}{9}}, \\ x=10; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[9]{10}, \\ x=10. \end{array}\right.$$

Оба корня подходят по ОДЗ, получаем ответ: $x=\sqrt[9]{10}, x=10$.

Пример 6. Решить уравнение $\log_{2+\sqrt{5}}(x^2+x-1)=\log_{\sqrt{5}-2}(x+3)$.

Решение. Запишем условия ОДЗ: $\begin{cases} x^2+x-1>0, \\ x+3>0. \end{cases}$

Воспользуемся тем, что

$\sqrt{5}-2=\dfrac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}+2)}=\dfrac{5-4}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$. Тогда

$$\log_{2+\sqrt{5}}(x^2+x-1)=\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)^{-1}}(x+3),$$

$$\log_{2+\sqrt{5}}(x^2+x-1)=-\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}(x+3),$$

$$\log_{2+\sqrt{5}}(x^2+x-1)+\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}(x+3)=0,$$

$$\log_{2+\sqrt{5}}\left((x^2+x-1)(x+3)\right)=0.$$

Решаем полученное уравнение как уравнение I типа:

$$(x^2+x-1)(x+3)=1,$$

$$x^3+x^2-x+3x^2+3x-3-1=0,$$

$$x^3+4x^2+2x-4=0.$$

Среди целых делителей свободного члена находим корень $x=-2$. Он подходит по ОДЗ.

Пришли к ответу: $x=-2$.

Пример 7. Решить уравнение $\log_2^2(-x)-5\log_2 x^2+16=0$.

Решение. ОДЗ: $-x>0$, т. е. $x\in\left(-\infty;0\right)$.

Воспользуемся свойствами модуля: $-x=|x|$, если $x<0$, и $x^2=|x|^2$. Тогда уравнение перепишется в виде

$$\log_2^2|x|-5\log_2|x|^2+16=0,$$

$$\log_2^2|x|-10\log_2|x|+16=0.$$

Заменяем $\log_2|x|=y$ и приходим к квадратному уравнению

$$y^2-10y+16=0,$$

корнями которого являются числа $y_1=2$, $y_2=8$.

Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2|x|=2,\\ \log_2|x|=8;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}|x|=4,\\ |x|=256.\end{array}\right.$$

Раскрываем модуль, используя ОДЗ:

$$\left[\begin{array}{l}-x=4,\\ -x=256;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=-256.\end{array}\right.$$

Получаем ответ: $x=-4$, $x=-256$.

Пример 8. Решить уравнение $\log_5(x^2+4x+29)=-x^2-4x-2$.

Решение. ОДЗ: $x^2+4x+29>0$, т. е. $x\in\mathbf{R}$.

Рассмотрим левую часть уравнения:

$$\log_5(x^2+4x+4+25)=\log_5((x+2)^2+25)\geq\log_5 25=\log_5 5^2=2.$$

Преобразуем правую часть. Получим:

$$-x^2-4x-2=-(x^2+4x+4)+4-2=2-(x+2)^2\leq 2.$$

Используя функциональный метод решения, заключаем, что решением исходного уравнения является решение системы

$\begin{cases}\log_2(x^2+4x+29)=2,\\ -x^2-4x-2=2,\end{cases}$ т. е. $x=-2$.

Получаем ответ: $x=-2$.

Пример 9. Найти сумму корней уравнения $x^2\log_{|x|}\left(|x|+6\right)=12$.

Решение. Для данного уравнения характерно следующее: если x – корень уравнения, то и $(-x)$ тоже корень уравнения. Поэтому если уравнение имеет корни, то их сумма будет равна нулю. Подстановкой находим корни $x=\pm 2$.

Получаем ответ: 0.

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $\log_2(x^2-1)=3$;	2) $\log_{0,1}(2x^2+x)=-1$;
3) $\log_x(x+6)=2$;	4) $\log_{x+2}6=2$;
5) $\lg(3x^2+2x)=\lg(2x+12)$;	6) $\log_{x+2}(x^2+2)=\log_{x+2}(x+4)$;
7) $\log_{x+1}(x+2)=\log_{3-x}(x+2)$;	8) $\log_9 x+2\log_3 x=5$;
9) $\log_2^2 x+2\log_2 x=-1$;	10) $\log_3^2 x-\log_9 x^2=6$;
11) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$;	12) $\log_{x+3}\left(\dfrac{3x-11}{1-x}\right)=1$;
13) $\log_3 x=1+\log_x 9$.	

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $\log_{\log_5 x} 4 = 2;$

2) $\log_{x^2+x+2}(\log_{x^2-4} 3x) = 0;$

3) $\log_{x^2+6x+8} \log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) = 0;$

4) $\frac{1}{2}\log_5(x+5) + \log_5\sqrt{x-3} = \frac{1}{2}\log_5(2x+1);$

5) $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20);$

6) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{2+x}{10} - \log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{x+1} = 0;$

7) $\log_{\frac{5+x}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{x+1}} 3;$

8) $\log_x^3 10 - \log_x^2 10 - 6\log_x 10 = 0;$

9) $\log_3 \log_8 \log_2(x-1) = \log_3 2 - 1;$

10) $\log_{x^3+x}(x^2-4) = \log_{4x^2-6}(x^2-4);$

11) $\lg\frac{1}{x}\lg\frac{x}{10} = \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{8};$

12) $\frac{1}{\sqrt{2x-2}} = (2x-2)^{\log_{\frac{1}{36}}(12-x-x^2)};$

13) $\log_{\frac{1}{2}}^2(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) - 8 = 0;$

14) $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = \frac{1}{2};$

15) $\log_4 \log_2 \frac{x}{2} - \log_4 \log_4 x = 0;$

16) $\log_{5x}\frac{5}{x} + \log_5^2 x = 1;$

17) $\log_x(125 \cdot x) \cdot \log_{25}^2 x = 1;$

18) $\lg^4(x-1)^2 + \lg^2(x-1)^3 = 25;$

19) $\log_x\left(5\sqrt{5}\right) - 1{,}25 = \log_x^2\sqrt{5};$

20) $\lg^2 x^2 = \lg|x| = 2;$

21) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $\log_2\left(9-2^x\right) = 10^{\lg(x-3)};$

2) $\log_x \log_9\left(3^x - 9\right) = 1;$

3) $\log_{0,5}\left(2 + \log_5\left(3^x - 2\right)\right) = -2;$

4) $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3\log_{0,5} x + 5\right) = 2;$

5) $\log_3\left(3^x - 1\right)\log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x+2} - 9\right) = -3;$

6) $\log_3\left(2^x - 1\right) + \log_3\left(2^x - 3\right) = 1;$

7) $\log_3^2\left(4^x - 3\right) + \log_3\left(4^x - 3\right) - 2 = 0;$

8) $x\log_2 x^2 + 1 = 2x + \log_2 x.$

3.2. Решите уравнение:

1) $\log_{1+x^2}\left(\sqrt[4]{x} + x^2 + 2x + 1\right) = \log_{1+x^2}\left(\sqrt[4]{x} - x^3 + 4x + 1\right);$

2) $\log_{(x^2-6)}(x^2 - 11x + 19) = \log_{(x^2-11)}\left(x^2 - 11x + 19\right);$

3) $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}\left(6x^2 + 23x + 21\right) = 4;$

4) $\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}\left(x^2 + 4x - 2\right) = \log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}\left(x^2 + 4x - 3\right);$

5) $\log_{2\sqrt{3+\sqrt{5}}}\left(x^2 - 6x + 4\right) - \log_{2+\sqrt{5}}\left(x^2 - 6x + 1\right) = 0;$

6) $x\log_2\left(x^2\right) + 1 = 2x + 2\log_4 x;$

7) $\sqrt{4 + 2\log_2\left(1 - \frac{8x}{(2x+1)^2}\right)} = \log_2\frac{2x+1}{2x-1} + 2\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$

8) $\left|\log_2(4x+9)\right| = \log_2\left(1 + |x+2|\right) + \log_2\left(1 - |x+2|\right);$

9) $\log_{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2}\dfrac{5x+1}{x-2}+\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|=\dfrac{3}{2}.$

6.6. Показательные неравенства

Показательным неравенством называется неравенство, в котором неизвестная содержится только в показателе степени при постоянном основании a, $a > 0$, $a \neq 1$.

Типы неравенств и способы их решения

Всюду далее $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с переменной.

I тип: неравенство вида

$$a^{f(x)} > b, \qquad (6.12)$$

где $b \in \mathbf{R}$.

Если $b \le 0$, то решением неравенства (6.12) является множество всех x из ОДЗ выражения $f(x)$.

Если $b > 0$, логарифмированием по основанию a неравенство (6.12) сводится к равносильному неравенству. При этом существенно учитывается величина основания a:

1) если $0 < a < 1$, то в результате логарифмирования получают неравенство

$f(x) < \log_a b;$

2) если $a > 1$, то после логарифмирования приходят к неравенству

$f(x) > \log_a b.$

Далее решают в зависимости от вида выражения $f(x)$.

Если исходное неравенство имело знак < или ≥, или ≤, то аналогично знак неравенства меняется на противоположный в случае $0 < a < 1$ и не изменяется в случае $a > 1$.

II тип: неравенство вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}. \qquad (6.13)$$

Для решения неравенства (6.13) (или аналогичных ему со знаками ≥, <, ≤) используют монотонность логарифма:

1) если $0 < a < 1$, то неравенство (6.13) равносильно неравенству

$f(x) < g(x),$

которое решают в зависимости от вида выражений $f(x)$ и $g(x)$;

2) если $a > 1$, то неравенство (6.13) равносильно неравенству

$f(x) > g(x).$

III тип: неравенство вида

$$F\left(a^{f(x)}\right) > 0, \qquad (6.14)$$

где F – некоторое выражение относительно $a^{f(x)}$.

Вводят замену переменной $y = a^{f(x)}$ и решают относительно переменной y неравенство

$F(y) > 0.$

Найденные в качестве решения промежутки (если такие существуют) записывают в виде неравенств относительно y и затем возвращаются к переменной x. Остается решить полученные показательные неравенства.

Если переменная содержится и в основании степени, и в показателе, то такое неравенство называется ***показательно-степенным***. Поскольку изменение знака неравенства зависит от величины основания, то для показательно-степенных неравенств рассматривают два случая, т. е. решают совокупность систем неравенств.

Показательно-степенные неравенства решают при условии, что основание степени положительно.

В частности, аналогом показательного неравенства (6.13) является следующее показательно-степенное неравенство

$$f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}. \qquad (6.15)$$

Его решение сводится к решению совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < f(x) < 1,\\ g(x) < h(x),\end{cases}\\ \begin{cases}f(x) > 1,\\ g(x) > h(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

Пример 1. Решить неравенство $8 \cdot 2^{x+5} > 5$ и в ответе указать меньшее целое решение.

Решение. Преобразуем неравенство к виду

$2^3 \cdot 2^{x+5} > 5$, т. е. $2^{3+x+5} > 5$, $2^{x+8} > 5$.

Получили неравенство I типа. Решаем логарифмированием по основанию 2. Поскольку основание степени – число 2 и $2 > 1$, то знак неравенства сохраняется:

$$\log_2 2^{x+8} > \log_2 5, \quad x+8 > \log_2 5, \quad x > \log_2 5 - 8.$$

Получили $x \in (\log_2 5 - 8; +\infty)$. Определим, между какими последовательными целыми числами находится число $\log_2 5 - 8$. Используя монотонность логарифма, имеем:

$$\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8, \text{ т. е. } 2 < \log_2 5 < 3.$$

Тогда $2 - 8 < \log_2 5 - 8 < 3 - 8$.

Следовательно,

$$-6 < \log_2 5 - 8 < -5.$$

Число –5 – меньшее целое решение, которое принадлежит промежутку $x \in (\log_2 5 - 8; +\infty)$.

Получаем ответ: $x = -5$.

Пример 2. Решить неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+8} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-7x}$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+8} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{7x-2}.$$

Получили неравенство II типа. Поскольку основание степени число $\frac{2}{3}$ и $0 < \frac{2}{3} < 1$, то знак неравенства изменится на противоположный. Получаем неравенство:

$$x + 8 \ge 7x - 2, \text{ т. е. } 6x \le 10 \text{ и } x \le \frac{5}{3}.$$

Получили ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$.

Пример 3. Найти сумму целых решений неравенства

$$4 \cdot 4^x - 29 \cdot 10^x + 25 \cdot 25^x \le 0.$$

Решение. Преобразуем неравенство к виду

$$4 \cdot 2^{2x} - 29 \cdot 2^x \cdot 5^x + 25 \cdot 5^{2x} \le 0.$$

Разделив обе части неравенства на 5^{2x} $(5^{2x} > 0)$, получим:

$$4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 29 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 25 \le 0.$$

Получили квадратное неравенство относительно $\left(\frac{2}{5}\right)^x$ (неравен-

ство III типа). Заменяем $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y$ и решаем квадратное неравенство

$$4y^2 - 29y + 25 \le 0, \; 4(y-1) \cdot \left(y - \frac{25}{4}\right) \le 0.$$

Его решением является $y \in \left[1; \frac{25}{4}\right]$, т. е. $\begin{cases} y \ge 1, \\ y \le \frac{25}{4}. \end{cases}$

Возвращаемся к исходной неизвестной величине:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^x \ge 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x \le \frac{25}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^x \ge \left(\frac{2}{5}\right)^0, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x \le \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 0, \\ x \ge -2. \end{cases}$$

Получаем множество решений: $x \in [-2; 0]$.

Целыми решениями являются числа: $x = -2$, $x = -1$ и $x = 0$.

Их сумма равна: $-2 + (-1) + 0 = -3$.

Получаем ответ: –3.

Задания

I уровень

1.1. Определите, для каких значений неизвестного выполняется неравенство:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3x+1} > 0$;
2) $7^{\frac{1}{x+1}} \ge 0$;
3) $3^x < 0$;
4) $6^{-\sqrt{x}} > 0$;
5) $\frac{3}{5^{\sqrt{x^2+7}}} \le 0$;
6) $e^{\sqrt[4]{3+x^6}} > 0$;
7) $\sqrt[x]{2} \ge 0$;
8) $5^{\frac{2}{x}} + 3 > 0$;
9) $4^{\sqrt[x]{3}} + 2^{\sqrt[x]{3}} + 2 \le 0$;
10) $\sqrt[\frac{12}{x}]{3} > 0$;
11) $e^{-\sqrt[x]{2}} + e^{-\sqrt[\frac{x}{2}]{3}} > 0$;
12) $\sqrt[\frac{6}{x-1}]{e} + \sqrt[\frac{x}{3}]{\pi} \ge 0$.

1.2. Определите, принадлежит ли $x = -2$ множеству решений неравенства:

1) $\dfrac{2}{3^{x^2-1}} < \dfrac{1}{3^{x+1}}$; 2) $5^{\sqrt{x-2}} \geq 25$;

3) $x^2 - 5x + 2 > 3^{\sqrt{x-2}-1}$; 4) $2^x - \dfrac{1}{2^x} < 3^{x+1}$.

1.3. Решите неравенство:

1) $3^{x-1} > 0$; 2) $5^{x^2-x+1} \leq 0$;

3) $\dfrac{1}{5^{\sqrt{x-7}}} < 0$; 4) $7^{x^2} + 7^x + 3 \geq 0$;

5) $2^x > 4$; 6) $\left(\sqrt{3}\right)^x \leq \dfrac{1}{9}$;

7) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \dfrac{1}{4}$; 8) $512 - 2^x \geq 0$;

9) $25^{-x} > 0{,}2$; 10) $343 \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^x$;

11) $\sqrt[8]{e^x} < e^3$; 12) $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{x+3} \geq \left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{x+2}$;

13) $\left(\dfrac{e}{2}\right)^{x^2} \leq \left(\dfrac{e}{2}\right)^9$; 14) $\left(\dfrac{e}{3}\right)^{x^2} \leq \left(\dfrac{e}{3}\right)^4$;

15) $9^{x^2} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$; 16) $0{,}5^x < 8^{x^2}$;

17) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[7]{e^3}}\right)^{-x} < \exp e$; 18) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right) < 0{,}1$;

19) $\sqrt[x]{5} \leq 125$; 20) $0{,}25 < \sqrt[\frac{2}{x}]{2}$;

21) $\dfrac{1}{81} > \sqrt[\frac{x}{6}]{\dfrac{1}{3}}$; 22) $0{,}04 < \sqrt[\frac{5}{x}]{5}$;

23) $2^{\frac{2x-1}{x}} < 4$; 24) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-2x} < 4^3$;

25) $6^x > 13$; 26) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > \dfrac{1}{4}$;

27) $e^x \leq \pi$; 28) $(0{,}8)^{\frac{x^2-3x}{x}} - 0{,}64 > 0$;

29) $2 \cdot 8^{4-5x} < \left(\dfrac{1}{16}\right)^{x+2}$; 30) $3^{x+2} + 3^{x-1} \leq 28$;

31) $5 \cdot 5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 5 < 0$; 32) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} - 3 > 0$.

1.4. Решите неравенство графически:

1) $3^x > 3$; 2) $2^x \geq 3 - x$; 3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x < x^2 + 1$.

II уровень

2.1. Решите неравенство:

1) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$; 2) $2^x + 2^{2x+} - 3 \cdot 2^{2x+1} > -3$;

3) $\dfrac{1}{3^x + 5} \leq \dfrac{1}{3^{x+1} - 1}$; 4) $36^x - 2 \cdot 18^x + 8 \cdot 9^x > 0$;

5) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} \leq 10^{-3}\left(10^{3-x}\right)^2$; 6) $2^{2x+2} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} > 0$;

7) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$; 8) $\left(\sqrt{2}\right)^{3x} + \left(2\sqrt{2}\right)^x \geq 2 \cdot 4^x$;

9) $6^x - 2^x \leq 32$; 10) $\dfrac{1}{5} \cdot 5^{2x} \cdot 7^{3x+2} \leq \dfrac{25}{7} \cdot 7^{2x} \cdot 5^{3x}$;

11) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_9\left(\frac{1}{x^2}+6+9x^2\right)} \geq \dfrac{1}{x}$; 12) $\dfrac{125^x - 5^{2x+1} + 2 \cdot 5^x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0$;

13) $3\left(\sqrt[x]{3}\right)^2 - 2\sqrt[x]{3} - 1 \geq 0$; 14) $5\sqrt[x]{0{,}16} + 3\sqrt[x]{0{,}4} - 2 \leq 0$.

III уровень

3.1. Решите неравенство:

1) $5^{\log_5(x-7)} < 4$; 2) $25^{\log_{0,1}\log_5\left(-\frac{1}{x}\right)} < 1$;

3) $5^{\lg\left(\frac{1}{x}\right)} > 0{,}2^{2\lg 2}$; 4) $0{,}3^{\frac{6\log_2 x - 3}{\log_2 x}} \leq \sqrt[3]{0{,}027^{2\log_2 x - 1}}$;

5) $0,2^{\log_2^2(-x)+3} \le 5^{2\log_2 x^2}$; 6) $x^{\sqrt{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$;

7) $x^{\lg x} \le 100x$; 8) $x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} > 1000$;

9) $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{\log_3 x - 2} > 9$; 10) $x^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} \le 2,5$;

11) $(x-3)^{x^2-5x+6} \ge 1$; 12) $x^{0,5\log_{0,2} x - 3} \le 0,2^{3-2,5\log_{0,2} x}$.

3.2. Решите неравенство:

1) $\left(\sqrt{14-6\sqrt{5}}\right)^{x-\sqrt{x}} > \left(3-\sqrt{5}\right)^{x+\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{2}^{\left||x+3|+1\right|} < 64$;

3) $\sqrt{2^{x^2+2x-10}} \ge \left(\sqrt{33+\sqrt{128}}-1\right)^x$; 4) $\dfrac{1}{7^{\frac{1}{x}+2}} < 4$;

5) $3^{-|x-5|} \cdot \log_2\left(10x - x^2 - 23\right) \ge 1$; 6) $\dfrac{1}{5^{\frac{1}{x}+3}} \le 2$.

6.7. Логарифмические неравенства

Логарифмическим неравенством называется такое неравенство, в котором неизвестная величина содержится или под знаком логарифма, или в его основании.

Особенностью решения логарифмических неравенств является учет ОДЗ входящих в него логарифмов. В отличие от логарифмических уравнений, условия, определяющие ОДЗ, целесообразно записывать вместе с решением в одной системе, так как в ходе решения некоторые условия на ОДЗ учитываются сразу. Необходимо внимательно следить за величиной основания логарифма, так как при положительном основании логарифма, которое меньше единицы, знак неравенства меняется на противоположный.

Типы неравенств и способы их решения

Всюду далее $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с переменной.

I тип: неравенство вида

$$\log_a f(x) > b, \tag{6.16}$$

где $a > 0$.

1. Если $0 < a < 1$, то неравенство (6.16) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^b. \end{cases} \tag{6.17}$$

2. Если $a > 1$, то неравенство (6.16) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) > a^b. \end{cases}$$

Заметим, что в этом случае первое неравенство системы (6.17) можно не решать, так как во втором неравенстве $a^b > 0$.

$$\log_{h(x)} f(x) > b. \tag{6.18}$$

Решение неравенства (6.18) сводится к решению совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < \left(h(x)\right)^b, \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) > \left(h(x)\right)^b. \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство $f(x) > 0$ во второй системе можно не решать, так как оно справедливо при выполнении двух других неравенств этой системы.

II тип: неравенство вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x). \tag{6.19}$$

1. Если $0 < a < 1$, то неравенство (6.19) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \tag{6.20}$$

Неравенство $g(x) > 0$ в системе (6.20) можно не решать, так как оно выполняется при условии выполнения двух других неравенств этой системы.

2. Если $a > 1$, то неравенство (6.19) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \tag{6.21}$$

Неравенство $f(x)>0$ в системе (6.21) можно не решать.

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x). \qquad (6.22)$$

Поскольку в основании содержится переменная величина, то в общем случае решение неравенства (6.22) зависит от величины основания по сравнению с числом 1. Поэтому решаем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<h(x)<1,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g(x),\end{cases}\\ \begin{cases}h(x)>1,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)>g(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

III тип: неравенство вида

$$F(\log_a f(x))>0, \qquad (6.23)$$

где F – некоторое выражение относительно $\log_a f(x)$.

Необходимо заменить $y=\log_a f(x)$ и решить неравенство $F(y)>0$. Полученные в качестве решения последнего неравенства промежутки записывают в виде неравенств относительно y, а затем возвращаются к старой переменной.

Аналогично решают неравенства I – III типов, в которых вместо знака > использованы знаки ≥, <, ≤.

Пример 1. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)>-2.$

Решение. Имеем неравенство I типа. Так как основание логарифма меньше числа 1, то решение неравенства сводится к решению системы

$$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x^2-x-2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2};\end{cases} \quad \begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x^2-x-2<2^2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x^2-x-6<0;\end{cases} \quad \begin{cases}(x+1)(x-2)>0,\\ (x+2)(x-3)<0.\end{cases}$$

Используем далее метод интервалов (рис. 6.13).

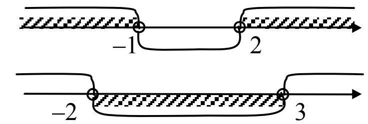


Рис. 6.13

Получаем ответ: $x\in(-2;-1)\cup(2;3)$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_x \dfrac{x+3}{x-1}>1.$

Решение. Данное неравенство относится к I типу. Поэтому решаем совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{x+3}{x-1}>0,\\ \dfrac{x+3}{x-1}<x^1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ \dfrac{x+3}{x-1}>0,\\ \dfrac{x+3}{x-1}>x^1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система решений не имеет. Решаем вторую систему

$$\begin{cases}x>1,\\ \dfrac{x+3}{x-1}>0,\\ \dfrac{x+3}{x-1}>1.\end{cases}$$

Второе неравенство этой системы не решаем, так как оно справедливо, если выполняется последнее неравенство. Получаем:

$$\begin{cases}x>1,\\ \dfrac{x+3}{x-1}>0,\\ \dfrac{x^2-2x-3}{x-1}<0;\end{cases} \quad \begin{cases}x>1,\\ \dfrac{x+3}{x-1}>0,\\ \dfrac{(x+1)(x-3)}{x-1}<0.\end{cases}$$

Используем метод интервалов (рис. 6.14).

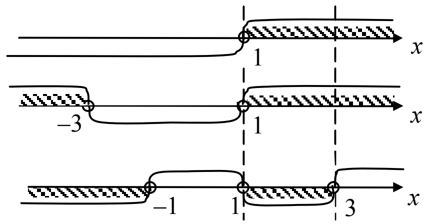


Рис. 6.14

Получаем ответ: $x \in (1; 3)$.

Пример 3. Решить неравенство $\lg(3x-7) \le \lg(x+1)$.

Решение. Это неравенство II типа, причем основание логарифма больше числа 1. Поэтому решаем систему

$$\begin{cases} 3x-7>0, \\ x+1>0, \\ 3x-7 \le x+1. \end{cases}$$

Получаем $\begin{cases} 3x>7, \\ x>-1, \\ 2x \le 8; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x>\dfrac{7}{3}, \\ x>-1, \\ x \le 4. \end{cases}$

Подводя итог, приходим к ответу: $x \in \left(\dfrac{7}{3}; 4\right]$.

Пример 4. Решить неравенство $\log_2^3 x + \log_2^2 x - 4\log_2 x - 4 \ge 0$.

Решение. Имеем неравенство III типа.

Заменяем $\log_2 x = y$ и решаем кубическое неравенство

$y^3 + y^2 - 4y - 4 \ge 0$.

Разлагаем левую часть неравенства на множители:

$y^2(y+1) - 4(y+1) \ge 0$,

$(y^2-4)\cdot(y+1) \ge 0$,

$(y+2)\cdot(y+1)\cdot(y-2) \ge 0$.

Используем далее метод интервалов (рис. 6.15).

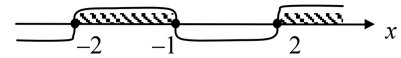


Рис. 6.15

Получили решение $y \in [-2; -1] \cup [2; +\infty)$. Записываем его в виде:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \ge -2, \\ y \le -1, \end{cases} \\ y \ge 2. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к неизвестной x и с учетом ОДЗ заданного неравенства имеем:

$$\begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x \ge -2, \\ \log_2 x \le -1, \end{cases} \\ \log_2 x \ge 2; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2^{-2}, \\ x \le 2^{-1}, \end{cases} \\ x \ge 2^2; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{4}, \\ x \le \dfrac{1}{2}, \end{cases} \\ x \ge 4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Получаем ответ: $x \in \left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right] \cup [4; +\infty)$.

Задания

I уровень

1.1. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x > 6$; 2) $\log_3 x \ge 2$;

3) $\log_2 x \le 3$; 4) $\log_{0,25} x < -2$;

5) $\lg x \ge 0{,}5$; 6) $\ln x < 3$;

7) $\log_5(x+3) \le 2$; 8) $\log_{0,16}(2-x) \le -0{,}5$;

9) $\log_4(x-11)^2 > 7$; 10) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x+1) < -4$;

11) $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{x} \ge 3$; 12) $\log_{\pi} \dfrac{2}{x-3} < 1$;

13) $\lg \dfrac{x+2}{x-3} \le 1$; 14) $\ln(x^2+5x+7) < 0$;

15) $\lg(2x-3) > \lg(x+1)$; 16) $\log_5(75-3x) < \log_5(x+3)$;

17) $\log_{\sqrt{7}}|x+2|<6;$

18) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}|x-3|\geq -2;$

19) $\log_{0,001}|x^2+1|\leq -\frac{1}{3};$

20) $\log_2\left|\frac{x+1}{x-1}\right|>-1;$

21) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right)\geq -4;$

22) $\ln|x+2|>\ln(x+2);$

23) $\log_{\frac{1}{3}}\left(-x^2+3x+13\right)>-2;$

24) $\ln\left(x^2-80\exp 2\right)\geq 2;$

25) $\log_{0,25}\frac{x^2+1}{x-3}>-0,5;$

26) $\log_{81}|x-1|\geq\frac{1}{4};$

27) $\log_3^2 x-9\leq 0;$

28) $\log_{0,1}^2 x-100>0;$

29) $\log_{0,5}^2(x+1)-25<0;$

30) $\log_2^2(x-3)-81\geq 0;$

31) $\log_2^2 x-\log_2 x\leq 6;$

32) $2\log_{0,5}^2 x-5\log_{0,5} x-3>0;$

33) $\log_x 5<1;$

34) $\log_x 36\geq 2;$

35) $\log_x(x-1)>2;$

36) $\log_{3x-2} x\leq 1;$

37) $\lg|x|>\lg|x+3|;$

38) $\log_{0,3}(2x-4)\geq\log_{0,3}(x+1);$

39) $\log_{0,1}(5x+2)\leq\log_{0,1}(7x+3);$

40) $\log_{\frac{2}{3}}\left(x^2+2x+1\right)\geq\log_{\frac{2}{3}}\left(4x^2+7x+3\right);$

41) $\log_7 x+\log_7(x+2)<\log_7(x+6);$

42) $\log_{0,3}(x+27)-\log_{0,3}(16-2x)\geq\log_{0,3} x;$

43) $\log_9(x^2+14x+49)\leq 2\log_3(x+1);$

44) $\log_{0,49}(x^2+12x+36)\leq\log_{0,7}|x-3|.$

II уровень

2.1. Решите неравенство:

1) $|4-\log_2 x|>2;$

2) $\dfrac{\log_2(4x-5)}{\log_2\log_5\frac{13}{4}}>0;$

3) $x\lg x-\dfrac{2}{\log_x 10}<0;$

4) $\log_{(x^2+1)} x^2\leq 0;$

5) $\log_{1+x}(5-|x|)\leq 0;$

6) $\log_{0,5}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0;$

7) $\dfrac{\lg^2 x-3\lg x+3}{\lg x-1}>1;$

8) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}>0;$

9) $\log_3\log_2\log_4 x<0;$

10) $\dfrac{\log_2 x}{\log_2 x-2}<\dfrac{2}{\log_2 x+6};$

11) $\log_2 x\leq\dfrac{2}{\log_2 x-1};$

12) $\dfrac{3x^2-2x-1}{\log_3(x-1)}\leq 0;$

13) $\dfrac{\left(\log_{x-1}(5-x)\right)^2}{x^2-8x+15}\geq 0;$

14) $\log_3 x\log_5\frac{x}{5}-\log_5\frac{25}{x^3}\leq\log_3 x^2-2;$

15) $\log_3 x\log_4 x<\log_3 x^3+\log_4 x^4-12;$

16) $\log_4^2\left(6x-x^2+4\right)+3\log_{0,25}\left(6x-x^2+4\right)<-2;$

17) $\log_{\frac{1}{3}}(x+27)+\log_3(16-2x)>\log_{\frac{1}{3}} x;$

18) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+18\right)-2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)<0;$

19) $\log_3\left((x+2)\cdot(x+4)\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7.$

III уровень

3.1. Решите неравенство:

1) $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\left(x^2+4x+11+4\sqrt{3}\right)<2;$

2) $\log_{8x-12x^2} 8^{-x}>0;$

3) $\log_{0,5}\left(\log_2^2 x-3\log_2 x+4\right)>-1;$

4) $\dfrac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2}\leq 0;$

5) $\log_2\left(3^x-1\right)+\log_2\left(3^x-2\right)>1;$

6) $\left(4^{-x}+3\cdot 2^x\right)^{\log_7 x+\log_x 7-2}\leq 1;$

7) $\log_{\frac{x}{3}} 27\geq\left(1+\dfrac{2}{1-\log_3 x}\right)\log_{\frac{x}{27}} 9;$

8) $\log_2 x^x-3\log_2\frac{x}{2}\geq x;$

9) $\log_2\left(2^x-1\right)\log_{0,5}\left(2^{x+1}-2\right)>2;$

10) $\log_x\log_3\left(9^x-6\right)\geq 1.$

Содержание

Учебное издание

МАТЕМАТИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие
для учащихся колледжей

В шести частях

ЧАСТЬ 1

Майсеня Людмила Иосифовна
Махнач Светлана Борисовна
Радюк Дарья Ивановна
Романовская Наталия Ивановна

Алгебраические уравнения
и неравенства. Функции. Логарифмы

Зав. ред.-издат. отд. О. П. Козельская
Редактор Г. Л. Говор
Корректор Н. Г. Михайлова
Компьютерная верстка Н. М. Олейник, А. П. Пучек

План изданий 2006 г. (поз. 23)

Изд. лиц. № 02330/0131735 от 17.02.2004.
Подписано в печать 29.12.2006. Формат $60\times84^1/_{16}$.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 13,14. Уч.-изд. л. 10,84. Тираж 500 экз. Заказ 309.

Издатель и полиграфическое исполнение Учреждение образования
«Минский государственный высший радиотехнический колледж»
220005, г. Минск, пр-т Независимости, 62.

ISBN 978-985-6754-71-8