МАТЕМАТИКА в примерах и задачах

4

МГВРК

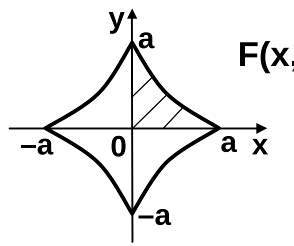
МАТЕМАТИКА

в примерах и задачах

Часть 4

$y' + p(x)y = q(x)$

под общ. ред.
Л. И. Майсеня



$F(x, y, y') = 0$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$y = ax + b$

МИНСК 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ВЫСШИЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

МАТЕМАТИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие
для учащихся колледжей

В шести частях

Под общей редакцией Л. И. Майсеня

ЧАСТЬ 4

Неопределенный интеграл
Определенный интеграл. Несобственные интегралы
Дифференциальные уравнения

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего образования, и учащихся учреждений, обеспечивающих получение среднего специального образования по специальностям электротехники, радиотехники и информатики

МИНСК 2007

УДК 51
ББК 22.1я7
М34

Рекомендовано к изданию кафедрой математики и Научно-методическим советом Учреждения образования «Минский государственный высший радиотехнический колледж» (протокол № 3 от 4.11.2007 г.)

Авторы:
Л. И. Майсеня, М. В. Ламчановская, Н. В. Михайлова

Рецензенты:
А. В. Метельский, д-р физ.-мат. наук, профессор БНТУ,
кафедра высшей математики БГУИР

Математика в примерах и задачах : учеб. пособие для
М34 учащихся колледжей : в 6 ч. / под общ. ред. Л. И. Майсеня. – Мн. : МГВРК, 2006 – .
ISBN 978-985-6754-70-1
Ч. 4 : Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Несобственные интегралы. Дифференциальные уравнения / Л. И. Майсеня, М. В. Ламчановская, Н. В. Михайлова. – 2007. – 248 с.
ISBN 978-985-6851-25-7

Пособие написано с целью реализации непрерывного образования в системе учебных заведений колледж–университет. Разработано в соответствии с типовой программой дисциплины «Высшая математика» для специальностей электро-, радиотехники и информатики высших учебных заведений. Содержатся необходимые теоретические сведения, примеры с подробными решениями и задания 3-х уровней сложности для самостоятельного решения.

УДК 51
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-6851-25-7 (ч. 4)
ISBN 978-985-6754-70-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Особенностью образовательной системы Республики Беларусь является становление и развитие учебных заведений различного типа, в том числе колледжей и высших колледжей. В условиях многоуровневого образования в системе учебных заведений колледж–университет актуальна реализация принципов непрерывности и преемственности в обучении.

Предлагаемое учебное пособие «Математика в примерах и задачах» в 6-ти частях призвано обеспечить процесс изучения математики в высших колледжах и колледжах технического профиля. Оно может быть использовано учащимися на практических занятиях, а также при самостоятельном изучении математики.

При создании настоящего пособия авторы ставили перед собой несколько целей: во-первых, дать значительное количество задач (типовых и оригинальных), которые бы достаточно полно отображали суть основных математических понятий; во-вторых, обеспечить необходимой теоретической информацией для их решений; в-третьих, по каждой теме привести решение основных типов задач; в-четвертых, предлагаемый для решения набор задач распределить по трем уровням сложности. Все эти цели и определили структуру учебного пособия, которое делится на главы, главы – на параграфы. В начале каждого параграфа содержится необходимый справочный материал, затем – решение нескольких задач и набор заданий трех уровней сложности.

Предлагаемая структура учебного пособия, по мнению авторов, делает возможным самостоятельное изучение математики. Его использование позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении – каждый учащийся может решать задания доступного ему уровня сложности.

Пособие разработано и прошло апробацию в УО «Минский государственный высший радиотехнический колледж» (МГВРК) в процессе обучения учащихся после базовой школы.

Характерной особенностью методического подхода к изучению математики в МГВРК является построение интегрированного курса математических дисциплин. Этим объясняется то обстоятельство, что определенные темы высшей математики введены в контекст элементарной математики. Поскольку на практике широко реализуется непрерывное образование в системе учебных заведений колледж–университет (в том числе МГВРК интегрирован с Белорусским государственным университетом информатики и радиоэлектроники), то при разработке данного учебного пособия авторы использовали (как и в реальном учебном процессе) в качестве типовых программу изучения математики в средних школах Беларуси и программу изучения высшей математики для высших учебных заведений по специальностям электро-, радиотехники и информатики.

Таким образом реализуются основы непрерывного продолжения обучения в университете. Кроме того, предлагаемое учебное пособие может быть использовано в колледжах при изучении математики по различным базовым и рабочим программам – менее или более полным.

«Математика в примерах и задачах. Часть 4» является непосредственным продолжением учебного пособия «Математика в примерах и задачах. Части 1–3». В этих изданиях принята единая нумерация глав. Предлагаемое пособие (четвертая часть) состоит из четырех глав (гл. 19–22). В отношении авторства отметим, что они подготовлены следующим образом:

М. В. Ламчановская – гл. 19 «Неопределенный интеграл», гл. 20 «Определенный интеграл», гл. 21 «Несобственные интегралы»;

Н. В. Михайлова – гл. 22 «Дифференциальные уравнения».

Научно-методическое редактирование осуществила Л. И. Майсеня, она является соавтором всего пособия.

Авторы благодарны рецензентам учебного пособия – доктору физ.-мат. наук, профессору А. В. Метельскому и сотрудникам кафедры высшей математики БГУИР, особенно зав. кафедрой, доктору физ.-мат. наук В. В. Цегельнику и профессору А. А. Карпуку, за очень внимательное прочтение рукописи и ряд ценных замечаний, устранение которых улучшило наше издание.

Надеемся, что предлагаемое издание будет содействовать активизации мыслительной деятельности учащихся и повышению эффективности учебного процесса при изучении математики.

19. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

19.1. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на некотором промежутке $X \subset \mathbf{R}$, если $F(x)$ дифференцируема на промежутке X и для всех $x \in X$ выполняется

$$F'(x) = f(x). \tag{19.1}$$

Если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$ на промежутке X, то любая другая ее первообразная имеет вид $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{19.2}$$

В равенстве (19.2) использован знак интеграла $\int$. Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ – ***подынтегральное выражение***, x – ***переменная интегрирования***.

Операция нахождения всех первообразных функции $f(x)$ называется интегрированием этой функции.

Всякая непрерывная на множестве X функция имеет на этом множестве первообразную, а значит, неопределенный интеграл.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых $y = F(x) + C$, $C \in \mathbf{R}$. График каждой первообразной называется интегральной кривой.

Таблица основных интегралов:

$$\int 0 \cdot dx = C;$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1), \tag{19.3}$$

в частности,

$$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C; \tag{19.4}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0); \tag{19.5}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a e + C \quad (a > 0,\ a \neq 1), \tag{19.6}$$

в частности,

$$\int e^x dx = e^x + C; \tag{19.7}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \tag{19.8}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \tag{19.9}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \tag{19.10}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \tag{19.11}$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C; \tag{19.12}$$

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \tag{19.13}$$

в частности,

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \tag{19.14}$$

в частности,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C; \qquad (19.15)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C. \qquad (19.16)$$

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a = const.$

2. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$

3. $(\int f(x)dx)' = f(x).$

4. $d\int f(x)dx = f(x)dx.$

5. $\int dF(x) = F(x) + C.$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$

то $\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ a \neq 0.$

Непосредственным интегрированием называют интегрирование с помощью таблицы неопределенных интегралов, первого и второго свойств неопределенного интеграла и тождественных преобразований подынтегральной функции.

Пример 1. Проверить, является ли функция $F(x) = -\frac{1}{7}\cos 7x + 5$ первообразной для функции $f(x) = \sin 7x.$

Решение. Найдем производную функции $F(x)$:

$$\left(-\frac{1}{7}\cos 7x + 5\right)' = -\frac{1}{7}\cdot(-\sin 7x)\cdot 7 = \sin 7x.$$

Согласно формуле (19.1) функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$.

Пример 2. Проверить, является ли функция $F(x) = x^2$ первообразной для функции $f(x) = 2x,$ найти неопределенный интеграл и нарисовать интегральные кривые из семейства первообразных для $C = 0,$ $C = 1,$ $C = -2,$ $C = 3.$

Решение. $(x^2)' = 2x.$ По формуле (19.2) неопределенный интеграл имеет вид: $\int 2xdx = x^2 + C.$ Построим интегральные кривые (рис. 19.1).

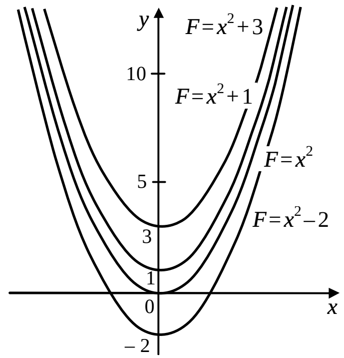


Рис. 19.1

Пример 3. Путем непосредственного интегрирования найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{5\sqrt[3]{x}+x^2-1}{x}dx;$ 2) $\int \frac{3^{2x}-5^x}{2^x}dx;$ 3) $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x};$

4) $\int \frac{dx}{x^2+9};$ 5) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx;$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$

Решение. 1) Используя первое и второе свойства неопределенного интеграла и формулы (19.3) и (19.5) таблицы интегралов, получаем:

$$\int \frac{5\sqrt[3]{x}+x^2-1}{x}dx = \int \frac{5x^{\frac{1}{3}}+x^2-1}{x}dx = \int\left(5x^{-\frac{2}{3}} + x - \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= 5\int x^{-\frac{2}{3}}dx + \int xdx - \int\frac{dx}{x} = \frac{5x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} - \ln|x| + C =$$

$$= 15x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + C = 15\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + C.$$

2) Используя второе свойство неопределенного интеграла и формулу (19.6) таблицы интегралов, имеем:

$$\int \frac{3^{2x}-5^x}{2^x}dx = \int \frac{9^x-5^x}{2^x}dx = \int \left(\left(\frac{9}{2}\right)^x - \left(\frac{5}{2}\right)^x \right) dx = \int \left(\frac{9}{2}\right)^x dx - \int \left(\frac{5}{2}\right)^x dx =$$

$$= \int (4,5)^x\,dx - \int (2,5)^x\,dx = (4,5)^x \frac{1}{\ln 4,5} - (2,5)^x \frac{1}{\ln 2,5} + C.$$

3) Применяя формулу $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и формулу (19.10) таблицы интегралов, получаем:

$$\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

4) С помощью формулы (19.13) таблицы интегралов находим:

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

5) Применяя формулу $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$, первое и второе свойства неопределенного интеграла, формулы (19.4) и (19.9) таблицы интегралов, получаем:

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x \right) dx = \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{1}{2}\cos x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

6) С помощью формулы (19.14) таблицы интегралов находим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 4. Используя интегрирование дифференциала, найти:

1) $\int d\left(\sqrt{x}\right)$; 2) $\int d(\ln \sin x)$; 3) $\int d(\sin 4x)$; 4) $\int d\left(3 - x + x^2\right)$.

Решение.

1) $\int d\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} + C.$

2) $\int d(\ln \sin x) = \ln \sin x + C.$

3) $\int d(\sin 4x) = \sin 4x + C.$

4) $\int d\left(3 - x + x^2\right) dx = -x + x^2 + C.$

Пример 5. Используя шестое свойство неопределенного интеграла, найти:

1) $\int \sin(x-2)\,dx$; 2) $\int e^{\frac{x}{2}}dx$; 3) $\int \dfrac{dx}{2-5x}$;

4) $\int (8x+1)^9\,dx$; 5) $\int \dfrac{dx}{(3x-1)^2+25}$; 6) $\int \operatorname{sh}(5x+3)\,dx.$

Решение. 1) По формуле (19.8) таблицы неопределенных интегралов получаем:

$$\int \sin(x-2)\,dx = -\cos(x-2) + C.$$

2) По формуле (19.7) таблицы неопределенных интегралов имеем:

$$\int e^{\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} + C = 2e^{\frac{x}{2}} + C.$$

3) Используем формулу (19.5) таблицы неопределенных интегралов. Тогда

$$\int \frac{dx}{2-5x} = -\frac{1}{5}\ln|2-5x| + C.$$

4) По формуле (19.3) таблицы неопределенных интегралов получаем:

$$\int (8x+1)^9\,dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{(8x+1)^{10}}{10} + C = \frac{(8x+1)^{10}}{80} + C.$$

5) По формуле (19.13) таблицы неопределенных интегралов имеем:

$$\int \frac{dx}{(3x-1)^2+25} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{5} + C = \frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{5} + C.$$

6) Используем формулу (19.12) таблицы неопределенных интегралов. Тогда

$$\int \operatorname{sh}(5x+3)\,dx = \frac{1}{5}\operatorname{ch}(5x+3) + C.$$

Задания

I уровень

1.1. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ и найдите неопределенный интеграл:

1) $F(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $F(x)=\ln\left|x^2-5x+8\right|,\ f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+8}$;

3) $F(x)=\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{3},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+13}$;

4) $F(x)=\dfrac{15\sqrt[5]{(1+3\sin x)^4}}{4},\ f(x)=\dfrac{9\cos x}{\sqrt[5]{1+3\sin x}}$;

5) $F(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x^2}{2},\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^4}}$.

1.2. Найдите совокупность всех первообразных функции $f(x)$ и нарисуйте интегральные кривые для заданных значений C:

1) $f(x)=3x^2,\ C=0,\ C=2,\ C=-3$;

2) $f(x)=\sin x,\ C=0,\ C=3,\ C=-1$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x+1},\ C=0,\ C=1,\ C=-2$.

1.3. Используя интегрирование дифференциала, найдите:

1) $\int d\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)$; 2) $\int d(\operatorname{tg}5x)$;

3) $\int d\left(2x^2+x+1\right)$; 4) $\int d(5x-6)^3$.

1.4. Найдите функцию $F(x)$, график которой проходит через точку M, если:

1) $F'(x)=2+\dfrac{1}{\cos^2 x},\ M(p;0)$; 2) $F'(x)=1+\dfrac{1}{\sin^2 x},\ M\left(-\dfrac{p}{2};0\right)$;

3) $F'(x)=3x^2-\dfrac{4}{x^2},\ M(2;16)$; 4) $F'(x)=2x+\dfrac{1}{x},\ M(1;-2)$.

II уровень

2.1. Найдите интеграл непосредственным интегрированием:

1) $\int\left(\sqrt{x}-1\right)^2dx$; 2) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 3) $\int\dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$;

4) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$; 5) $\int 2^x e^x dx$; 6) $\int\dfrac{(1-x)^3\,dx}{x\sqrt{x}}$;

7) $\int\dfrac{(1+x)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx$; 8) $\int\operatorname{tg}^2 x dx$; 9) $\int\dfrac{5-\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$;

10) $\int\dfrac{\sin 2x}{\cos x}dx$; 11) $\int\dfrac{dx}{x^2-16}$; 12) $\int\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-x^2\sin x+x^2e^x}{x^2}dx$.

2.2. Найдите неопределенный интеграл, используя свойства интеграла:

1) $\int(x-3)^{101}dx$; 2) $\int\operatorname{ch}\dfrac{x}{3}dx$; 3) $\int\sin(4x+3)dx$;

4) $\int\dfrac{dx}{9x+5}$; 5) $\int\dfrac{dx}{x^2-2x+5}$; 6) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$;

7) $\int\dfrac{dx}{\sin^2(3x-2)}$; 8) $\int\dfrac{dx}{x^2+4x+3}$; 9) $\int\cos(5-8x)dx$.

III уровень

3.1. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int\dfrac{3^{x+1}-2^{x-1}}{5^x}dx$; 2) $\int\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$; 3) $\int\dfrac{x^2}{x^2-4}dx$;

4) $\int\dfrac{\sqrt{x^2+x^{-2}+2}}{x}dx$; 5) $\int\operatorname{ctg}^2(3x+5)dx$; 6) $\int\dfrac{dx}{4x^2-12x+25}$;

7) $\int 4\sin^2(2x-7)dx$; 8) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{6x-9x^2}}$; 9) $\int\left(2\sqrt[3]{x}+\dfrac{3}{x}\right)^2dx$.

3.2. Представьте подынтегральное выражение в виде дифференциала некоторой функции и, используя свойства неопределенного интеграла, найдите интеграл:

1) $\int\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$; 2) $\int 3x^2e^{x^3+1}dx$; 3) $\int\dfrac{-2x}{\sin^2 x^2}dx$;

4) $\int \frac{5x^4}{3\sqrt[3]{(x^5-6)^2}}dx$; 5) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$; 6) $\int \frac{-9x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

19.2. Методы вычисления неопределенного интеграла

Приведем основные методы вычисления неопределенного интеграла.

1. Метод замены переменной

Его использование базируется на следующей «цепочке» равенств:

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \left| \begin{matrix} t=g(x) \\ dt=g'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(t)dt = F(t)+C,$$

где $F(t)$ первообразная функции $f(t)$. Далее необходимо подставить вместо t выражение $g(x)$.

2. Метод подстановки

Описывается равенством

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x=g(t) \\ dx=g'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f\left(g(t)\right)g'(t)dt.$$

Этот метод используют в том случае, если последний интеграл вычисляется проще чем заданный.

3. Метод поднесения под знак дифференциала

Для вычисления интеграла используют определение дифференциала:

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int f\left(g(x)\right)d\left(g(x)\right) = F\left(g(x)\right)+C.$$

Согласно этому методу не делают явно замену переменной, подразумевая, что $g(x)$ играет роль новой независимой переменной.

При использовании метода поднесения под знак дифференциала, метода замены переменной, метода подстановки удобно использовать простейшие преобразования дифференциала:

1) $dx = d(x+b)$ (b – произвольная постоянная величина);

2) $dx = \frac{1}{a}d(ax)$ (постоянная $a \neq 0$);

3) $dx = \frac{1}{a}d\left(ax+b\right)$ (постоянная $a \neq 0$).

Пример 1. Найти неопределенный интеграл:

1) $\int \sqrt{1-3x}dx$; 2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 3) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}$; 4) $\int \frac{x+\operatorname{arctg}^5 3x}{1+9x^2}dx$.

Решение. 1) *1-й способ*. Используем метод замены переменной. Положим $1-3x=t$. Тогда $x=\frac{1}{3}(1-t)$, $dx=-\frac{1}{3}dt$. Имеем:

$$\int \sqrt{1-3x}dx = \int \sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)dt = -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = -\frac{2}{9}\sqrt{t^3}+C =$$

$$= -\frac{2}{9}\sqrt{(1-3x)^3}+C.$$

Для вычисления интеграла использовали формулу (19.3) таблицы неопределенных интегралов.

2-й способ. Используем метод поднесения под знак дифференциала. Представим данный интеграл в следующем виде:

$$\int \sqrt{1-3x}dx = -\frac{1}{3}\int \sqrt{1-3x}\cdot(-3)\,dx.$$

Учитывая, что $-3dx = d\left(1-3x\right)$, по формуле (19.3) таблицы неопределенных интегралов получаем:

$$\int \sqrt{1-3x}d\left(1-3x\right) = -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{\frac{1}{2}}\,d\left(1-3x\right) = -\frac{1}{3}\frac{(1-3x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C =$$

$$= -\frac{2}{9}\sqrt{(1-3x)^3}+C.$$

2) Поскольку $d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, то $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Поднесение под дифференциал приводит далее к интегралу $2\int \sin\sqrt{x}d\left(\sqrt{x}\right) = -2\cos\sqrt{x}+C.$

Для вычисления интеграла использовали формулу (19.8) таблицы неопределенных интегралов.

3) Очевидно, что $d\left(x^3\right) = 3x^2dx$. Значит,

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{4-x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{4-(x^3)^2}}.$$

Применяя формулу (19.14) таблицы интегралов, получаем ответ:

$\frac{1}{3}\arcsin\frac{x^3}{2}+C.$

4) Используя второе свойство неопределенного интеграла, представим заданный интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int\frac{x+\operatorname{arctg}^5 3x}{1+9x^2}dx=\int\frac{xdx}{1+9x^2}+\int\frac{\operatorname{arctg}^5 3x}{1+9x^2}dx=I_1(x)+I_2(x).$$

Вычислим полученные интегралы отдельно. Так как $d(1+9x^2)=18xdx$, то, используя далее формулу (19.5) таблицы интегралов, получаем:

$$I_1(x)=\int\frac{xdx}{1+9x^2}=\frac{1}{18}\int\frac{18xdx}{1+9x^2}=\frac{1}{18}\int\frac{d(1+9x^2)}{1+9x^2}=\frac{1}{18}\ln\left(1+9x^2\right)+C.$$

Так как $d(\operatorname{arctg}3x)=\frac{3dx}{1+9x^2}$, то по формуле (19.3) таблицы интегралов имеем:

$$I_2=\int\frac{\operatorname{arctg}^5 3x}{1+9x^2}dx=\frac{1}{3}\int\operatorname{arctg}^5 3x\cdot\frac{3dx}{1+9x^2}=\frac{1}{3}\int\operatorname{arctg}^5 3x\,d\left(\operatorname{arctg}3x\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\operatorname{arctg}^6 3x}{6}+C=\frac{\operatorname{arctg}^6 3x}{18}+C.$$

Подставив найденные значения интегралов $I_1(x)$ и $I_2(x)$ в первоначальный интеграл, приходим к ответу: $\frac{1}{18}\ln(1+9x^2)+\frac{1}{18}\operatorname{arctg}^6 3x+C.$

Пример 2. Методом подстановки найти интеграл:

1) $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$; 2) $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^6}$; 3) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. 1) Используем метод подстановки. Положим $x=2\sin t$, тогда $dx=2\cos tdt$.

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\int\sqrt{4-\left(2\sin t\right)^2}\cdot 2\cos tdt=2\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cos tdt=$$

$$=2\int\sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)}\cos tdt=4\int\sqrt{\cos^2 t}\cos tdt=4\int\cos^2 tdt=4\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=2\int\left(1+\cos 2t\right)dt=2\int dt+2\int\cos 2tdt=2t+\int\cos 2td(2t)=$$

$$=2t+\sin 2t+C=2t+2\sin t\cos t+C.$$

Для вычисления последних интегралов использовали формулы (19.4) и (19.9) таблицы интегралов. Выразим переменную t через переменную x.

$\sin t=\frac{x}{2},\ \ t=\arcsin\frac{x}{2}.$ Тогда $\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2},$

$$\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

Получаем ответ: $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$

2) Применим подстановку $x=t-2$, тогда $dx=dt$, $t=x+2$. Таким образом,

$$\int\frac{x^2dx}{(x+2)^6}=\int\frac{(t-2)^2}{t^6}dt=\int\frac{t^2-4t+4}{t^6}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{4}{t^5}+\frac{4}{t^6}\right)dt=$$

$$=\int\left(t^{-4}-4t^{-5}+4t^{-6}\right)dt=\frac{t^{-3}}{-3}-\frac{4t^{-4}}{-4}+\frac{4t^{-5}}{-5}+C=$$

$$=-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t^4}-\frac{4}{5t^5}+C=-\frac{1}{3\left(x+2\right)^3}+\frac{1}{\left(x+2\right)^4}-\frac{4}{5\left(x+2\right)^5}+C.$$

Для вычисления интеграла использовали формулу (19.3) таблицы интегралов.

3) Применим подстановку $x=\operatorname{tg}t$, тогда $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$. Получаем:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{1}{\operatorname{tg}^2 t\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\frac{dt}{\cos^2 t}.$$

Используя тригонометрическое тождество $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, имеем:

$$\int\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}=\int\frac{dt}{\sin^2 t\cdot\frac{1}{\cos t}}=\int\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}=\int\frac{d\left(\sin t\right)}{\sin^2 t}=$$

$$=\int\left(\sin t\right)^{-2}d\sin t=\frac{\left(\sin t\right)^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{\sin t}+C.$$

Вернемся к переменной x, для чего выразим t через x из подстановки $x=\operatorname{tg}t$: $t=\operatorname{arctg}x$. Тогда

$\sin t=\sin\operatorname{arctg}x=\frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}x}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$ Таким образом,

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите неопределенный интеграл, используя метод замены переменной:

1) $\int 2^{\frac{3x-1}{5}}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{(3-7x)^5}$; 3) $\int \cos(8x+3)\,dx$;

4) $\int \frac{dx}{5x+8}$; 5) $\int \sqrt[11]{(3-2x)^3}\,dx$; 6) $\int\left((x+5)^4+\frac{1}{\sqrt{4x-1}}\right)dx$;

1.2. Найдите неопределенный интеграл, используя метод поднесения под знак дифференциала:

1) $\int \frac{dx}{4-49x^2}$; 2) $\int \frac{dx}{7-5x^2}$; 3) $\int \frac{dx}{9+25x^2}$;

4) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$; 6) $\int\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-x}+e^{3x}\right)dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2-9}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{14x^2+5}}$; 9) $\int\left(\frac{1}{\sin^2 2x}+\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$.

1.3. Найдите неопределенный интеграл, используя метод замены переменной или метод подстановки:

1) $\int \frac{x^3dx}{(x+2)^2}$ $(t=x+2)$; 2) $\int (x-1)\sqrt{x+2}\,dx$ $(t^2=x+2)$;

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x}}$ $(t^2=3-x)$; 4) $\int x(3x+1)^{17}\,dx$ $(t=3x+1)$;

5) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ $(x=\sin t)$; 6) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ $(x=t^2)$.

II уровень

2.1. Найдите неопределенный интеграл разными способами:

1) $\int \frac{e^{2x}}{6+e^{2x}}dx$; 2) $\int \frac{3+\ln 4x}{x}dx$; 3) $\int \sin^3 x\cos x dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[7]{\operatorname{tg}5x}}{\cos^2 5x}\,dx$; 5) $\int \frac{x^2dx}{(1+x^3)^5}$; 6) $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}dx$;

7) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$; 8) $\int \frac{3^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$; 9) $\int \frac{dx}{(2x-1)\ln(2x-1)}$.

2.2. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{\arcsin^2 4x-x}{\sqrt{1-16x^2}}dx$; 2) $\int xe^{x^2}dx$; 3) $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^7}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin^2 7x}}{\sqrt{1-49x^2}}dx$; 5) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$; 6) $\int x^2\sqrt[4]{x^3+8}\,dx$;

7) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arcctg} x}$; 8) $\int \frac{\cos 2xdx}{\sqrt{\sin^5 2x}}$; 9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{16-25\ln^2 3x}}$;

10) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$; 11) $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 12) $\int \frac{\sin 3x}{1+\cos 3x}dx$;

13) $\int \frac{x+\operatorname{arctg}3x}{1+9x^2}dx$; 14) $\int \frac{dx}{(3x-1)\sqrt[11]{\ln^4(3x-1)}}$.

2.3. Найдите неопределенный интеграл, предварительно преобразовав подынтегральное выражение:

1) $\int \frac{\sqrt{x}-3\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$; 2) $\int \frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sqrt[5]{3+\sin 2x}}dx$;

3) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 4) $\int \frac{5\sin x-3\sin 2x+e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$.

III уровень

3.1. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{dx}{\sin x}$; 2) $\int e^{3+\sin^2 3x}\sin 6xdx$; 3) $\int \operatorname{tg} x\ln\cos x\,dx$;

4) $\int \frac{xdx}{x^4+1}$; 5) $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$; 6) $\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^3}dx$;

7) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; 8) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{8-2\cos^2 x}}dx$; 9) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-4x^6}}$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(9+x)}$; 11) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{16-9\sin^4 x}}$; 12) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$;

13) $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$; 14) $\int \frac{dx}{(1+4x^2)\sqrt{25-9\,\mathrm{arctg}^2\,2x}}$.

3.2. Найдите неопределенный интеграл методом подстановки или методом замены переменной:

1) $\int \frac{x^5+1}{(x-1)^4}dx$ (указание: $x-1=t$);

2) $\int \sqrt{e^x-1}dx$ (указание: $\sqrt{e^x-1}=t$);

3) $\int \left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)dx$ (указание: $\sqrt[6]{x}=t$);

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (указание: $x=\frac{1}{t}$);

5) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$ (указание: $\sqrt[3]{x+1}=t$);

6) $\int \frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$ (указание: $x=2\sin t$).

19.3. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен ax^2+bx+c

Рассмотрим некоторые виды интегралов, содержащих квадратный трехчлен в подынтегральном выражении, и способы их вычисления. Всюду далее считаем $a,\ b,\ c \neq 0$.

Для вычисления интеграла вида

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \tag{19.17}$$

выделим полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Сделаем замену переменной $x+\frac{b}{2a}=t$. Тогда интеграл (19.17), в зависимости от знака выражения $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}$, сводится к одному из интегралов $\int \frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\mathrm{arctg}\frac{t}{k}+C$ или $\int \frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C.$

Вместо замены переменной (после выделения полного квадрата) можно использовать также метод поднесения под знак дифференциала.

Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{19.18}$$

также вычисляется выделением полного квадрата в квадратном трехчлене. Он сводится к интегралу

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm k^2}\right|+C, \text{ если } a>0,$$

или к интегралу

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{k}+C, \text{ если } a<0.$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx, \text{ где } M\neq 0. \tag{19.19}$$

В числителе подынтегральной функции выделяем производную $2ax+b$ квадратного трехчлена, записанного в знаменателе. Тогда интеграл (19.19) можно представить в виде суммы двух интегралов, один из которых сводится к интегралу $\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C$, а второй вычисляем как интеграл вида (19.17).

Интеграл вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ сводится к сумме интегралов $\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C$ и вида (19.18).

Интегралы вида $\int \frac{dx}{(px+q)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n=1,\,2)$ сводятся к рассмотренным выше интегралам с помощью подстановки $px+q=\frac{1}{t}$.

Интеграл вида $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ после выделения полного квадрата и замены $t = x + \frac{b}{2a}$ сводится к одному из интегралов $\int \sqrt{t^2+k^2}\,dt,$ $\int \sqrt{t^2-k^2}\,dt$ или $\int \sqrt{k^2-t^2}\,dt,$ которые могут быть вычислены методом интегрирования по частям (см. п. 19.4.) или с помощью тригонометрических подстановок (см. п. 19.7.), или как интеграл от дифференциального бинома (см. п. 19.8).

Пример 1. Найти неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{dx}{x^2-14x+58}$; 2) $\int \frac{dx}{2x^2+3x-1}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$.

Решение: 1) Выделим в знаменателе дроби полный квадрат:

$$\int \frac{dx}{x^2-14x+58} = \int \frac{dx}{x^2-2\cdot 7x+49-49+58} = \int \frac{dx}{(x-7)^2+9}.$$

Используем метод поднесения под знак дифференциала. Интеграл примет вид:

$$\int \frac{d(x-7)}{(x-7)^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-7}{3} + C.$$

Для вычисления последнего интеграла использовали формулу (19.13) таблицы интегралов.

2) Вынесем в знаменателе подынтегрального выражения множитель 2 за скобки и выделим полный квадрат, получим:

$$\int \frac{dx}{2x^2+3x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{16}}.$$

Заменим $x+\frac{3}{4}=t$ и $dx=dt.$ Интеграл примет вид:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-\frac{\sqrt{17}}{4}}{t+\frac{\sqrt{17}}{4}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{4t-\sqrt{17}}{4t+\sqrt{17}}\right| + C.$$

Для вычисления последнего интеграла использовали формулу (19.15) таблицы интегралов. Возвращаясь к переменной x, имеем:

$$\int \frac{dx}{2x^2+3x-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{4x+3-\sqrt{17}}{4x+3+\sqrt{17}}\right| + C.$$

3) Выделив в подкоренном выражении полный квадрат, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-9}}.$$

Используя метод поднесения под знак дифференциала и формулу (19.16) таблицы интегралов, имеем:

$$\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-9}} = \ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-5}\right| + C.$$

4) Выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(1+2x+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}}.$$

Применив метод поднесения под знак дифференциала и формулу (19.14) таблицы интегралов, получаем:

$$\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{(x-3)\,dx}{x^2-8x+20}$; 2) $\int \frac{6x-1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$; 3) $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+7}\,dx.$

Решение: 1) Найдем производную квадратного трехчлена, записанного в знаменателе дроби, $\left(x^2-8x+20\right)' = 2x-8.$

Выделим производную знаменателя в числителе дроби:

$$x-3=\frac{1}{2}\cdot 2x-3=\frac{1}{2}(2x-8+8)-3=\frac{1}{2}((2x-8)+8)-3=$$
$$=\frac{1}{2}(2x-8)+4-3=\frac{1}{2}(2x-8)+1.$$

Тогда $\int \frac{(x-3)\,dx}{x^2-8x+20} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-8)+1}{x^2-8x+20}\,dx.$

Используя второе свойство неопределенного интеграла, представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов

$$\frac{1}{2}\int \frac{(2x-8)\ dx}{x^2-8x+20} + \int \frac{dx}{x^2-8x+20}.$$

Выделим в знаменателе второго интеграла полный квадрат:

$$x^2-8x+20 = x^2-8x+16+4 = (x-4)^2+4.$$

Для вычисления полученных интегралов используем метод поднесения под знак дифференциала и формулы (19.5) и (19.13) таблицы интегралов:

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-8x+20\right)}{x^2-8x+20} + \int \frac{dx}{(x-4)^2+4} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-8x+20\right| +$$

$$+\int \frac{d(x-4)}{(x-4)^2+4} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-8x+20\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{2} + C.$$

2) Выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$$4x-x^2 = -\left(x^2-4x+4-4\right) = -(x-2)^2+4.$$

Заменив $x-2=t,\quad x=t+2,\quad dx=dt,$ получим:

$$\int \frac{6x-1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \int \frac{6x-1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,dx = \int \frac{6(t+2)-1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = \int \frac{6t+11}{\sqrt{4-t^2}}\,dt =$$

$$= \int \frac{6tdt}{\sqrt{4-t^2}} + 11\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = -3\int \frac{-2tdt}{\sqrt{4-t^2}} + 11\arcsin\frac{t}{2} = -3\int \frac{d\left(4-t^2\right)}{\sqrt{4-t^2}} +$$

$$+11\arcsin\frac{t}{2} = -3\int \left(4-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} d(4-t^2) + 11\arcsin\frac{t}{2} = -6\sqrt{4-t^2} +$$

$$+11\arcsin\frac{t}{2} + C = -6\sqrt{4x-x^2} + 11\arcsin\frac{x-2}{2} + C.$$

Для вычисления суммы интегралов использовали метод поднесения под знак дифференциала и формулы (19.3) и (19.14) таблицы интегралов.

3) Найдем производную квадратного трехчлена

$$\left(3x^2-6x+7\right)' = 6x-6.$$

Выделим ее в числителе дроби, чтобы получить дифференциал знаменателя:

$$\int \frac{(x-1)dx}{3x^2-6x+7} = \frac{1}{6}\int \frac{(6x-6)dx}{3x^2-6x+7} = \frac{1}{6}\int \frac{d\left(3x^2-6x+7\right)}{3x^2-6x+7} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(3x^2-6x+7\right) + C.$$

Для вычисления интеграла использовали метод поднесения под знак дифференциала и формулу (19.5) таблицы интегралов.

Пример 3. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}.$

Решение: Применим подстановку $x=\frac{1}{t},$ тогда $dx=-\frac{1}{t^2}dt.$ Получаем:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = -\int \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}+9}} = -\int \frac{tdt}{\sqrt{1+9t^2}} = -\frac{1}{18}\int \frac{18tdt}{\sqrt{1+9t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{18}\int \frac{d\left(1+9t^2\right)}{\sqrt{1+9t^2}} = -\frac{1}{9}\sqrt{1+9t^2} + C = -\frac{1}{9}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{dx}{x^2-4x+17}$; 2) $\int \frac{dx}{9x^2+6x+2}$; 3) $\int \frac{dx}{x^2-2x-48}$;

4) $\int \frac{dx}{x^2-3x-4}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x-15}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+6x-9x^2}}$; 9) $\int \frac{dx}{2x-x^2}$.

1.2. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+13}dx$; 2) $\int \frac{8x-1}{4x^2-12x+13}dx$; 3) $\int \frac{2x+13}{x^2+8x-9}dx$;

4) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx$; 5) $\int \frac{4x+5}{x^2+2x-3}dx$; 6) $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2+4x}}dx$;

7) $\int \frac{6x+3}{\sqrt{x^2+4x-12}}dx$; 8) $\int \frac{x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$; 9) $\int \frac{4x+1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$.

II уровень

2.1. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{7x-3}{x^2-8x+3}dx$; 2) $\int \frac{6x-5}{3x^2-2x-1}dx$;

3) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{9x^2-6x-2}}dx$; 4) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-3x-4x^2}}dx$.

2.2. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{20x^2-4x+1}}$;

3) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{8-2t-t^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

III уровень

3.1. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x-4\cos x+8}$; 2) $\int \frac{\ln x+1}{x\sqrt{7-6\ln x-\ln^2 x}}dx$;

3) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{5x^2+4x+1}}$; 4) $\int \frac{x\ dx}{x^4+2x^2+5}$.

19.4. Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u=u(x)$ и $n=n(x)$ имеют непрерывные производные $u'=u'(x)$ и $n'=n'(x)$. Тогда имеет место равенство

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (19.20)$$

Формула (19.20) задает ***метод интегрирования по частям***, согласно которому интегрирование выражения udv сводится к интегрированию выражения vdu Применение формулы (19.20) предполагает, что в правой части интеграл $\int vdu$ может быть

вычислен легче, чем исходный. Формула (19.20) может быть записана также в виде

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx.$$

Рациональность вычисления некоторых интегралов зависит от того, как выбраны функции $u(x)$ и $v'(x)$ в заданном интеграле.

Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно.

Рассмотрим следующие случаи:

1. Для вычисления интегралов вида $\int P_n(x)e^{ax}dx$, $\int P_n(x)\sin axdx$, $\int P_n(x)\cos axdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, в качестве функции $u(x)$ следует взять многочлен $P_n(x)$, а в качестве dv – одно из выражений $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$ соответственно. При этом формулу интегрирования по частям следует применять n раз.

2. Для интегралов вида $\int e^{ax}\cos bxdx$ и $\int e^{ax}\sin bxdx$ в качестве функции $u(x)$ можно взять e^{ax} или $\cos bx$ $(\sin bx)$. Формулу интегрирования по частям следует применить дважды, а затем из полученного равенства, как из уравнения, найти заданный интеграл.

3. Для интегралов вида $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\, x\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\, x\,dx$, $\int \sin\ln xdx$, $\int \cos\ln xdx$ в качестве $u(x)$ берут функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$, $\mathrm{arcctg} x$, $\sin\ln x$, $\cos\ln x$, а в качестве dv – выражение $P_n(x)dx$. Такой подход используют и тогда, когда $P_n(x)\equiv 1$.

Во многих случаях подынтегральная функция зависит не только от аргумента, но и от натурального индекса n. Методом интегрирования по частям удается привести интеграл к интегралу такой же формы, но с меньшим значением индекса. После нескольких таких шагов приходят к интегралу, который можно вычислить с помощью таблицы. Такой метод интегрирования называют ***рекуррентным методом***, а полученную формулу – ***рекуррентной формулой***.

Пример 1. Методом интегрирования по частям найти неопределенный интеграл:

1) $\int (5x+1)e^{x-1}dx;$ 2) $\int \ln x dx;$ 3) $\int \left(x^2-2x+3\right)\sin\frac{x}{2}dx.$

Решение. 1) Положим $u=5x+1$, $dv=e^{x-1}dx$. Тогда $du=5dx$, $v=e^{x-1}$. Используя формулу (19.20) интегрирования по частям, получаем:

$$\int(5x+1)e^{x-1}dx=(5x+1)e^{x-1}-\int e^{x-1}\cdot 5dx=(5x+1)e^{x-1}-5\int e^{x-1}d(x-1)=$$

$$=(5x+1)e^{x-1}-5e^{x-1}+C=(5x+1-5)e^{x-1}+C=(5x-4)e^{x-1}+C.$$

2) Применим формулу (19.20) интегрирования по частям:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x,\ dv=dx, \\ du=\frac{dx}{x},\ v=x\end{array}\right| = x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=$$

$$=x\ln x-\int dx = x\ln x - x + C.$$

3) Положим $u=x^2-2x+3$, $dv=\sin\frac{x}{2}dx$. Тогда $v=-2\cos\frac{x}{2}$, $du=(2x-2)dx=2(x-1)dx$. Применяя формулу (19.20), получаем:

$$\int\left(x^2-2x+3\right)\sin\frac x2 dx=-2\left(x^2-2x+3\right)\cos\frac x2-\int\left(-2\cos\frac x2\right)\cdot2(x-1)dx=$$

$$=-2\left(x^2-2x+3\right)\cos\frac x2+4\int(x-1)\cos\frac x2dx.$$

Применив формулу интегрирования по частям, понизили степень многочлена на единицу. Чтобы найти $\int(x-1)\cos\frac x2dx$, применим еще раз метод интегрирования по частям. Положим $u=x-1$, $dv=\cos\frac x2 dx$. Тогда $du=dx$, $v=2\sin\frac x2$. Получаем:

$$-2\left(x^2-2x+3\right)\cos\frac x2+4\left(2(x-1)\sin\frac x2-\int2\sin\frac x2dx\right)=$$

$$=-2\left(x^2-2x+3\right)\cos\frac x2+8(x-1)\sin\frac x2-8\int\sin\frac x2dx=$$

$$=-2\left(x^2-2x+3\right)\cos\frac x2+8(x-1)\sin\frac x2+16\cos\frac x2+C=$$

$$=-2\left(x^2-2x-5\right)\cos\frac x2+8(x-1)\sin\frac x2+C.$$

Пример 2. Методом интегрирования по частям найти неопределенный интеграл:

1) $\int\sqrt{4-x^2}dx;$ 2) $\int e^{2x}\cos3xdx.$

Решение. 1) Интеграл $\int\sqrt{4-x^2}dx$ уже был вычислен в параграфе 19.2. (см. пример 2, с. 15–16 данного пособия) методом подстановки. Рассмотрим второй способ его вычисления, используя метод интегрирования по частям:

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}u=\sqrt{4-x^2},\ dv=dx,\\ du=\frac{-xdx}{\sqrt{4-x^2}},\ v=x\end{array}\right|=x\sqrt{4-x^2}-\int x\cdot\frac{-xdx}{\sqrt{4-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{4-x^2}-\int\frac{-x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=x\sqrt{4-x^2}-\int\frac{\left(4-x^2\right)-4}{\sqrt{4-x^2}}dx=x\sqrt{4-x^2}-$$

$$-\int\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx+\int\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}dx=x\sqrt{4-x^2}-\int\sqrt{4-x^2}dx+4\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Вычислим последний интеграл, используя формулу (19.14) таблицы интегралов. Получим равенство

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=x\sqrt{4-x^2}-\int\sqrt{4-x^2}dx+4\arcsin\frac x2.$$

В правой части этого равенства получили исходный интеграл. Найдем его из уравнения: $2\int\sqrt{4-x^2}dx=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac x2$, откуда получаем ответ: $\int\sqrt{4-x^2}dx=\frac x2\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac x2+C.$

2) Используя формулу интегрирования по частям дважды, получаем:

$$\int e^{2x}\cos3xdx=\left|\begin{array}{l}u=e^{2x},\ dv=\cos3xdx,\\ du=2e^{2x}dx,\ v=\frac13\sin3x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x\cdot 2e^{2x}dx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3xdx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=e^{2x},\ dv=\sin 3xdx, \\ du=2e^{2x}dx,\ v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2e^{2x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx.$$

В результате получили равенство

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx,$$

из которого находим:

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x;$$

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x\right).$$

Приходим к ответу:

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{e^{2x}}{13}\left(3\sin 3x+2\cos 3x\right)+C.$$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл $\int x\sin^2 x\cos xdx.$

Решение. Используя формулу (19.20) интегрирования по частям, получаем:

$$\int x\sin^2 x\cos xdx=\left|\begin{array}{l} u=x,\ dv=\sin^2 x\cos xdx, \\ du=dx,\ v=\int\sin^2 x\cos xdx=\int\sin^2 xd(\sin x)=\frac{\sin^3 x}{3} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}x\sin^3 x-\frac{1}{3}\int\sin^3 xdx=\frac{1}{3}x\sin^3 x+\frac{1}{3}\int\sin^2 x\left(-\sin x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}x\sin^3 x+\frac{1}{3}\int\left(1-\cos^2 x\right)d\cos x=\frac{1}{3}x\sin^3 x+\frac{1}{3}\left(\cos x-\frac{\cos^3 x}{3}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3}x\sin^3 x+\frac{1}{3}\cos x-\frac{1}{9}\cos^3 x+C.$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{(x^2+16)^3}.$

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^3}=\frac{1}{16}\int\frac{16dx}{\left(x^2+16\right)^3}=\frac{1}{16}\int\frac{\left(x^2+16\right)-x^2}{\left(x^2+16\right)^3}dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^2}-\frac{1}{16}\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+16\right)^3}.$$

Последний интеграл вычислим, применяя формулу интегрирования по частям.

Полагаем $u=x,\ \ du=dx.$

Если $dv=\frac{xdx}{\left(x^2+16\right)^3}=\frac{1}{2}\frac{d\left(x^2+16\right)}{\left(x^2+16\right)^3}=\frac{1}{2}\left(x^2+16\right)^{-3}d\left(x^2+16\right),$ то

$$v=\frac{1}{2}\int\left(x^2+16\right)^{-3}d\left(x^2+16\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+16\right)^{-2}}{-2}=-\frac{1}{4\left(x^2+16\right)^2}.$$

Тогда

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+16)^3}=-\frac{x}{4(x^2+16)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x^2+16)^2}.$$

Таким образом, получаем выражение интеграла $\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^3}$ через интеграл $\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^2}.$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^3}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^2}-\frac{1}{16}\left(-\frac{x}{4\left(x^2+16\right)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^2}+\frac{x}{64\left(x^2+16\right)^2}-\frac{1}{64}\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^2}=$$

$$=\frac{3}{64}\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^2}+\frac{x}{64\left(x^2+16\right)^2}.$$

Вычисляем $\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^2}$ аналогично первоначальному.

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^2}=\frac{1}{16}\int\frac{16dx}{\left(x^2+16\right)^2}=\frac{1}{16}\int\frac{\left(x^2+16\right)-x^2}{\left(x^2+16\right)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x^2+16}-\frac{1}{16}\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+16\right)^2}=\frac{1}{64}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}-\frac{1}{16}\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+16\right)^2}.$$

Для вычисления последнего интеграла применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+16)^2}=\left|\begin{array}{l} u=x,\ du=dx,\\ dv=\dfrac{xdx}{(x^2+16)^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d(x^2+16)}{(x^2+16)^2},\\ v=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{d(x^2+16)}{(x^2+16)^2}=\frac{1}{2}\int(x^2+16)^{-2}d(x^2+16)=\\ =\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+16)^{-1}}{-1}=-\dfrac{1}{2(x^2+16)}.\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{x}{2(x^2+16)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+16}=-\frac{x}{2(x^2+16)}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}.$$

Имеем:

$$\int\frac{dx}{(x^2+16)^2}=\frac{1}{64}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}-\frac{1}{16}\left(-\frac{x}{2(x^2+16)}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{64}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{x}{32(x^2+16)}-\frac{1}{128}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}=\frac{x}{32(x^2+16)}+\frac{1}{128}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}.$$

Получаем:

$$\int\frac{dx}{(x^2+16)^3}=\frac{x}{64(x^2+16)^2}+\frac{3}{64}\left(\frac{x}{32(x^2+16)}+\frac{1}{128}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\right)=$$

$$=\frac{x}{64(x^2+16)^2}+\frac{3x}{2048(x^2+16)}+\frac{3}{8192}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C.$$

Пример 5. Получить рекуррентную формулу для вычисления интеграла $\int\cos^n xdx,\ n\in\mathrm{N},\ n\geq 2.$ Используя ее, вычислить $\int\cos^5 xdx.$

Решение. Обозначим $I_n=\int\cos^n xdx.$

$$I_n=\int\cos^n xdx=\int\cos^{n-1}x\cos xdx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\cos^{n-1}x,\ dv=\cos xdx,\\ du=-(n-1)\cos^{n-2}x\sin xdx,\ v=\sin x\end{array}\right|=\cos^{n-1}x\sin x+$$

$$+\int(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 xdx=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx=$$

$$=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}xdx-(n-1)\int\cos^n xdx.$$

Мы получили:

$$I_n=\cos^{n-1}\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}xdx-(n-1)I_n.$$

Выражаем:

$$I_n=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

Это и есть рекуррентная формула, которая позволяет уменьшать показатель степени в подынтегральной функции до тех пор, пока не придем к интегралу $\int\cos xdx=\sin x+C$ или $\int dx=x+C$ в зависимости от того, является ли n числом четным или нечетным.

Используем ее для вычисления $I_5=\int\cos^5 xdx.$

$$I_5=\int\cos^5 xdx=\frac{1}{5}\cos^4 x\sin x+\frac{4}{5}\int\cos^3 xdx=$$

$$=\frac{1}{5}\cos^4 x\sin x+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^2 x\sin x+\frac{2}{3}\int\cos xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cos^4 x\sin x+\frac{4}{15}\cos^2 x\sin x+\frac{8}{15}\sin x+C.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите интеграл методом интегрирования по частям:

1) $\int(3x+2)e^x dx;$ 2) $\int(5-2x)\sin 3xdx;$ 3) $\int(x+5)\cos\frac{2x}{3}dx;$

4) $\int(x+4)\operatorname{sh}2xdx;$ 5) $\int(7x+3)\operatorname{ch}\frac{x}{3}dx;$ 6) $\int\frac{x}{e^x}dx.$

1.2. Найдите интеграл методом интегрирования по частям:

1) $\int(x^2-x+5)\cos 2xdx;$ 2) $\int(2x^2+3x-1)\sin(3x+2)dx;$

3) $\int(2+x-x^2)e^x dx;$ 4) $\int(3x^2+x+1)e^{3x-1}dx;$

5) $\int(x^2-3x-1)3^x dx;$ 6) $\int(x^2+5x+2)2^{3x}dx.$

1.3. Найдите интеграл методом интегрирования по частям:

1) $\int \mathrm{arctg}\, x dx$; 2) $\int \ln x dx$; 3) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$;

4) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$; 5) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{7x-1} dx$; 6) $\int \ln(x^2+9) dx$.

1.4. Найдите интеграл методом интегрирования по частям:

1) $\int e^{5x}\sin 2x dx$; 2) $\int e^{-x}\cos x dx$; 3) $\int e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{3} dx$;

4) $\int 5^x\cos 3x dx$; 5) $\int \sin\ln x dx$; 6) $\int \cos\ln x dx$;

7) $\int \sin\ln 5x dx$; 8) $\int e^{2x}\cos^2 x dx$; 9) $\int \sqrt{x^2-4} dx$.

II уровень

2.1. Найдите интеграл:

1) $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$; 2) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x} dx$;

3) $\int x\cos^2 x dx$; 4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$;

5) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx$; 6) $\int x\sin^2 x dx$;

7) $\int \arcsin(6x-5) dx$; 8) $\int \arccos(1-x) dx$;

9) $\int (3-2x-3x^2)\sin^2(2x-1) dx$; 10) $\int (x^3-2x^2+4)\cos^2(3x+2) dx$.

2.2. Найдите интеграл:

1) $\int x^3\ln x dx$; 2) $\int \frac{\ln x\ dx}{x^3}$; 3) $\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$;

4) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$; 5) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$; 6) $\int (x-2)\ln^2(x-2) dx$;

7) $\int (x+1)^2\ln^2(x+1) dx$; 8) $\int (x+2)^3\ln^2(x+2) dx$.

2.3. Найдите интеграл:

1) $\int x^3\mathrm{arctg}\, x dx$; 2) $\int x^2\arccos x dx$;

3) $\int x\arcsin x dx$; 4) $\int \arcsin^2 x dx$.

2.4. Найдите интеграл:

1) $\int (x+1)^2(x-3)^5 dx$; 2) $\int (2x+1)^2(3x-2)^3 dx$;

3) $\int (x^3-x^2+2x-1)\sqrt{2x+3} dx$; 4) $\int \frac{x^2-7x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$.

2.5. Найдите интеграл, комбинируя методы интегрирования по частям и замены переменной:

1) $\int e^{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int x\cos\sqrt{x} dx$; 3) $\int x^3 e^{x^2} dx$;

4) $\int e^x\ln(e^x+1) dx$; 5) $\int \frac{\ln(\mathrm{arctg}\, x) dx}{1+x^2}$; 6) $\int \sin x\ln\cos x dx$;

7) $\int \cos x\ln\sin x dx$; 8) $\int \sin 2x\ln\sin x dx$.

III уровень

3.1. Найдите интеграл:

1) $\int \sqrt{x^2+1} dx$; 2) $\int \sqrt{1-x^2} dx$; 3) $\int \sqrt{x^2-4} dx$;

4) $\int \sqrt{x^2+9} dx$; 5) $\int \sqrt{25-x^2} dx$; 6) $\int \sqrt{x^2-2x+2} dx$.

3.2. Получите рекуррентную формулу для вычисления интеграла и с ее помощью найдите интеграл для указанного n:

1) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n=2$; 2) $\int \sin^n x dx$, $n=4$;

3) $\int x^a\ln^n x dx$, $a\neq -1$, $n=3$; 4) $\int (a^2-x^2)^n dx$, $n=2$;

5) $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $n=4$; 6) $\int \sin^m x\cos^n x dx$, $n, m\in \mathbf{N}$;

7) $\int \ln^n x \ dx,\ n=3;$ 8) $\int x^n e^x dx,\ n=5;$

9) $\int e^{ax}\sin^n x dx,\ n=2;$ 10) $\int \frac{dx}{\sin^n x},\ n\in\mathbf{N},\ n=4;$

11) $\int \mathrm{tg}^n x dx,\ n=3;$ 12) $\int \mathrm{ctg}^n x dx,\ n=2;$

13) $\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx,\ n,\ m\in\mathbf{N},\ n=3,\ m=2.$

19.5. Рациональные функции. Интегрирование простейших дробей

Рациональной функцией или ***рациональной дробью*** называется функция вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены с рациональными коэффициентами степеней n и m соответственно. Если $n<m$, то дробь называется ***правильной***, если $n\ge m$, то – ***неправильной***.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=S_{n-m}(x)+\frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

где $S_{n-m}(x)$, $R_k(x)$ – многочлены, $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь, $k<m$.

Интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию многочлена $S(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$. Если выражение в знаменателе правильной дроби разлагается на множители, то ее можно представить в виде суммы простейших дробей (методы разложения на сумму простейших дробей смотрите в параграфе 2.3, часть 1, с. 47–54).

Среди правильных дробей различают четыре типа простейших дробей:

I $\frac{A}{x-a}$;

II $\frac{A}{(x-a)^k}$;

III $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

IV $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $k\ge 2$,

где $A,\ M,\ N,\ a,\ p,\ q$ – постоянные действительные числа, k – натуральное число, дискриминант $D=p^2-4q<0$.

Неопределенные интегралы от простейших дробей

1. $\int\frac{Adx}{x-a}=À\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$

2. $\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=\frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C,$

$k\in\mathbf{N},\ k\ge 2.$

3. Интегрирование простейшей дроби III типа производят соответственно способу вычисления интеграла (19.19), который описан в параграфе 19.3.

4. В числителе дроби IV типа выделим производную квадратного трехчлена x^2+px+q:

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}=\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}.$$

Тогда

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx+$$
$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Вычислим интегралы последней суммы отдельно.

Согласно формуле (19.3) таблицы интегралов, имеем:

$$\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\left(x^2+px+q\right)^{-k}d\left(x^2+px+q\right)=\frac{M}{2}\cdot\frac{\left(x^2+px+q\right)^{-k+1}}{-k+1}+C=$$

$$=\frac{M}{2(1-k)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+C.$$

Для вычисления второго интеграла выделим в знаменателе полный квадрат:

$\left(x^2+px+q\right)^k=\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k$. Сделаем замену переменной $t=x+\frac{p}{2}$. Обозначив $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$, получим:

$$\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}=$$

$$=\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}.$$

Последний интеграл, который обозначим I_k, вычисляется по рекуррентной формуле

$$I_{k+1}=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{k+1}}=\frac{1}{2ka^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^k}+\frac{2k-1}{2ka^2}I_k,\ k\in\mathbf{N},\qquad(19.21)$$

где $I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$

В частности,

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Интегралы вида $\int\frac{x^{2m+1}}{(a+bx^2)^n}dx$, где m – целое положительное число, вычисляются с помощью замены $a+bx^2=t$. Тогда

$$x^2=\frac{t-a}{b},\quad dt=2bxdx,$$

$$x^{2m+1}dx=x^{2m}xdx=\frac{1}{2}\left(x^2\right)^m2xdx=\frac{1}{2}\left(\frac{t-a}{b}\right)^mdt=\frac{1}{2b^m}\left(t-a\right)^mdt.$$

Эта замена приводит к интегралу $\frac{1}{2b^{m+1}}\int\frac{\left(t-a\right)^m}{t^n}dt.$

Пример 1. Найти интегралы:

1) $\int\frac{x^2-6x-4}{x^3+x^2-2x}dx;$ 2) $\int\frac{x^4+6x^3+10x^2-3x+4}{x^3+5x^2+4x}dx;$

3) $\int\frac{x^2+x-8}{\left(x-3\right)^2\left(x+1\right)}dx;$ 4) $\int\frac{x^2-3x-1}{x(x-1)^3}dx.$

Решение. 1) Разложим на множители знаменатель дроби:

$x^3+x^2-2x=x\left(x^2+x-2\right)=x\left(x-1\right)\left(x+2\right).$

Так как каждый множитель x, $x-1$ и $x+2$ входит в знаменатель в первой степени, то каждому из них соответствует простейшая дробь I типа. Тогда общий вид разложения на сумму простейших дробей будет иметь вид:

$$\frac{x^2-6x-4}{x\left(x-1\right)\left(x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{x^2-6x-4}{x\left(x-1\right)\left(x+2\right)}=\frac{A\left(x-1\right)\left(x+2\right)+Bx\left(x+2\right)+Cx\left(x-1\right)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Приравнивая числители, получаем:

$$x^2-6x-4=A\left(x-1\right)\left(x+2\right)+Bx\left(x+2\right)+Cx\left(x-1\right)=A\left(x^2+x-2\right)+$$

$$+B\left(x^2+2x\right)+C\left(x^2-x\right)=Ax^2+Ax-2A+Bx^2+2Bx+Cx^2-Cx=$$

$$=\left(A+B+C\right)x^2+\left(A+2B-C\right)x-2A.$$

Два многочлена равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. Приравняем эти коэффициенты:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B+C=1,\\ x^1 & A+2B-C=-6,\\ x^0 & -2A=-4.\end{array}$$

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} A+B+C=1; \\ A+2B-C=-6; \\ -2A=-4. \end{cases}$$

Решая ее, находим $A=2,\ \ B=-3,\ C=2$. Таким образом,

$$\frac{x^2-6x-4}{x^3+x^2-2x}=\frac{2}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+2}.$$

Значит,

$$\int\frac{x^2-6x-4}{x^3+x^2-2x}dx=2\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=2\ln|x|-3\ln|x-1|+2\ln|x+2|+C=\ln\left|\frac{x^2(x+2)^2}{(x-1)^3}\right|+C.$$

2) Подынтегральная функция является неправильной дробью. Путем деления числителя на знаменатель выделим целую часть рациональной дроби и правильную рациональную дробь:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^4+6x^3+10x^2-3x+4 \\ \underline{x^4+5x^3+4x^2} \end{array} & \begin{array}{c} x^3+5x^2+4x \\ \hline x+1 \end{array} \\ -\begin{array}{l} x^3+6x^2-3x+4 \\ \underline{x^3+5x^2+4x} \end{array} & \\ x^2-7x+4 & \end{array}$$

Тогда

$$\int\frac{x^4+6x^3+10x^2-3x+4}{x^3+5x^2+4x}dx=\int\left(x+1+\frac{x^2-7x+4}{x^3+5x^2+4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x^2-7x+4}{x^3+5x^2+4x}dx.$$

Разложим на множители знаменатель правильной дроби:

$$x^3+5x^2+4x=x(x+1)(x+4).$$

Имеем:

$$\frac{x^2-7x+4}{x(x+1)(x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+4},$$

откуда

$$x^2-7x+4=A(x+1)(x+4)+Bx(x+4)+Cx(x+1).$$

Найдем коэффициенты методом частных значений. В последнем равенстве, полагая последовательно $x=0,\quad x=-1,\quad x=-4,$ получаем

соответственно:

$4=4A,\ \ 12=-3B,\ \ 48=12C,$ т. е. $A=1,\ \ B=-4,\ \ C=4.$

Следовательно, $\dfrac{x^2-7x+4}{x(x+1)(x+4)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{4}{x+4}.$

Поэтому

$$\int\frac{x^2-7x+4}{x(x+1)(x+4)}dx=\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x+1}+4\int\frac{dx}{x+4}=\ln|x|-4\ln|x+1|+$$

$$+4\ln|x+4|+C=\ln\left|\frac{x(x+4)^4}{(x+1)^4}\right|+C.$$

3) Знаменатель подынтегрального выражения имеет корень $x=3$, кратности 2, и простой корень $x=-1$. Общий вид разложения на простейшие дроби подынтегральной функции в данном случае будет иметь вид:

$$\frac{x^2+x-8}{(x-3)^2(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Приведем правую часть этого равенства к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x^2+x-8=A(x-3)(x+1)+B(x+1)+C(x-3)^2,$$

$$x^2+x-8=(A+C)x^2+(-2A+B-6C)x-3A+B+9C.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получаем систему уравнений, решая которую, находим коэффициенты:

$$\begin{cases} A+C=1, \\ -2A+B-6C=1, \\ -3A+B+9C=-8; \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\frac{3}{2}, \\ B=1, \\ C=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом имеем разложение:

$$\frac{x^2+x-8}{(x-3)^2(x+1)}=\frac{\frac{3}{2}}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}.$$

Тогда

$$\int\frac{x^2+x-8}{(x-3)^2(x+1)}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-3}+\int\frac{dx}{(x-3)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$$

4) Знаменатель подынтегрального выражения имеет простой корень $x=0$, которому соответствует простейшая дробь I типа, и корень $x=1$ кратности 3, которому соответствует сумма трех простейших дробей I и II типов. Имеем:

$$\frac{x^2-3x-1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

Приведем правую часть этого равенства к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x^2-3x-1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx.$$

Найдем коэффициенты методом частных значений. Полагая $x=0$, получаем: $-1=-A$, $A=1$. При $x=1$ имеем: $D=-3$.

Найдем производную от обеих частей последнего равенства:

$$2x-3=3A(x-1)^2+B(x-1)^2+2Bx(x-1)+C(x-1)+Cx+D.$$

Полагая $x=1$, получаем: $-1=C+D, C=2$. При $x=0$ имеем: $-3=3A+B-C+D$, $B=-1$.

Таким образом,

$$\frac{x^2-3x-1}{x(x-1)^3}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{3}{(x-1)^3}.$$

Тогда

$$\int\frac{x^2-3x-1}{x(x-1)^3}dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}-3\int\frac{dx}{(x-1)^3}=$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{2(x-1)^2}+C.$$

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл:

1) $\displaystyle\int\frac{14x^2+x+5}{(x+1)(3x^2-x+2)}dx.$ 2) $\displaystyle\int\frac{x^2-7}{(x-2)(x^2-x+1)}dx;$

3) $\displaystyle\int\frac{3x^3+6x^2+11x+5}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}dx;$ 4) $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}.$

Решение. 1) Поскольку квадратный трехчлен $3x^2-x+2$ не имеет действительных корней, то приходим к следующему общему виду разложения подынтегральной функции на простейшие дроби:

$$\frac{14x^2+x+5}{(x+1)(3x^2-x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{3x^2-x+2}.$$

Приведение правой части к общему знаменателю и приравнивание числителей дает уравнение:

$$14x^2+x+5=A(3x^2-x+2)+(Bx+C)(x+1),\text{ т. е.}$$

$$14x^2+x+5=(3A+B)x^2+(-A+B+C)x+2A+C.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}3A+B=14,\\-A+B+C=1,\\2A+C=5.\end{cases}$$

Решая полученную систему, находим коэффициенты: $A=3$, $B=5$, $C=-1$.

Таким образом,

$$\frac{14x^2+x+5}{(x+1)(3x^2-x+2)}=\frac{3}{x+1}+\frac{5x-1}{3x^2-x+2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{14x^2+x+5}{(x+1)(3x^2-x+2)}dx=3\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{5x-1}{3x^2-x+2}dx=$$

$$=3\ln|x+1|+\int\frac{\frac{5}{6}(6x-1)-\frac{1}{6}}{3x^2-x+2}dx=$$

$$=3\ln|x+1|+\frac{5}{6}\int\frac{d(3x^2-x+2)}{3x^2-x+2}-\frac{1}{18}\int\frac{dx}{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}=$$

$$=3\ln|x+1|+\frac{5}{6}\ln|3x^2-x+2|-\frac{1}{18}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{36}}=$$

$$=3\ln|x+1|+\frac{5}{6}\ln|3x^2-x+2|-\frac{1}{3\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{23}}+C.$$

2) Имеем:

$$\frac{x^2-7}{(x-2)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

откуда

$$x^2-7=A(x^2-x+1)+(x-2)(Bx+C).$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов применим одновременно метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов. Подставляя $x=2$, находим: $-3=3A$, $A=-1$.

Для нахождения коэффициентов B и C достаточно приравнять коэффициенты при x^2 и x^0:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=1, \\ x^0 & A-2C=-7. \end{array}\Big\}$$

Из последней системы уравнений получаем: $B=2$, $C=3$.

Таким образом,

$$\frac{x^2-7}{(x-2)(x^2-x+1)}=\frac{-1}{x-2}+\frac{2x+3}{x^2+x+1}.$$

Тогда

$$\int\frac{x^2-7}{(x-2)(x^2-x+1)}dx=-\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{2x+3}{x^2+x+1}dx=-\ln|x-2|+$$

$$+\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}+2\int\frac{dx}{x^2+x+1}dx=-\ln|x-2|+\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+$$

$$+2\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=-\ln|x-2|+\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

3) Поскольку квадратные трехчлены x^2+1 и x^2+2x+2 не имеют действительных корней, то приходим к следующему общему виду разложения подынтегральной функции на сумму простейших дробей:

$$\frac{3x^3+6x^2+11x+5}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Приводим правую часть этого равенства к общему знаменателю и приравниваем числители. Получаем уравнение

$$3x^3+6x^2+11x+5=(Ax+B)\left(x^2+2x+2\right)+(Cx+D)\left(x^2+1\right);$$

$$3x^3+6x^2+11x+5=(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+$$

$$+(2A+2B+C)x+2B+D.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+C=3, \\ 2A+B+D=6, \\ 2A+2B+C=11, \\ 2B+D=5. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим коэффициенты: $A=2$, $B=3$, $C=1$, $D=-1$. Таким образом,

$$\frac{3x^3+6x^2+11x+5}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{2x+3}{x^2+1}+\frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{3x^2+6x^2+11x+5}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+2\right)}dx=\int\frac{2x+3}{x^2+1}dx+\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=\int\frac{2xdx}{x^2+1}+3\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2}-2\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+3\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2}-2\operatorname{arctg}(x+1)=$$

$$=\ln\left|x^2+1\right|+3\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|-2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

4) В данном случае при разложении подынтегральной функции на простейшие дроби в качестве слагаемых будем иметь простейшие дроби I, III и IV типов:

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}.$$

Отсюда получаем:

$$x=A(x^2+x+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+x+1)+(Dx+E)(x+1).$$

Полагая $x=-1$, получаем: $A=-1$. Приведем подобные члены в правой части этого равенства:

$$x=(A+B)x^4+(2A+2B+C)x^3+(3A+2B+2C+D)x^2+$$

$$+(2A+B+2C+D+E)x+(A+C+E).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим систему уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A+B=0, \\ x^3 & 2A+2B+C=0, \\ x^2 & 3A+2B+2C+D=0, \\ x^1 & 2A+B+2C+D+E=1, \\ x^0 & A+C+E=0. \end{array}$$

Из нее находим $B=1$, $C=0$, $D=1$, $E=1$.

Следовательно,

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{-1}{x+1}+\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}=-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{xdx}{x^2+x+1}+\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2}=$$

$$=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-$$

$$-\frac{1}{2(x^2+x+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2(x^2+x+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}.$$

Для нахождения последнего интеграла сделаем замену переменной $x+\frac{1}{2}=t$ и применим рекуррентную формулу (19.21) для случая $k=1,\ a^2=\frac{3}{4}$:

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{2t}{3\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{2}{3}I_1,$$

где $I_1=\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}.$

Тогда получаем:

$$I_2=\frac{2t}{3\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}=\frac{2x+1}{3\left(x^2+x+1\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Приходим к ответу:

$$\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\left(x^2+x+1\right)}+\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=$$

$$-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}+C.$$

Пример 3. Вычислить интегралы:

1) $\int\frac{x^4-4x^3+6x^2-3x+4}{x^3-3x^2+3x-1}dx;$ 2) $\int\frac{2x^9}{(2+x^2)^4}dx.$

Решение. 1) Подынтегральная функция является неправильной дробью. Выделим целую часть дроби, разделив ее числитель на знаменатель по правилу деления многочленов:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4-4x^3+6x^2-3x+4 & x^3-3x^2+3x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-3x^3+3x^2-x} & x-1 \\
-\,-x^3+3x^2-2x+4 & \\
\underline{-x^3+3x^2-3x+1} & \\
x+3 &
\end{array}$$

Тогда

$$\int\frac{x^4-4x^3+6x^2-3x+4}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\int\left(x-1+\frac{x+3}{x^3-3x^2+3x-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+$$

$$+\int\frac{(x+3)dx}{(x-1)^3}=\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{(x-1)+4}{(x-1)^3}dx=\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+4\int\frac{dx}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}+C.$$

2) Сделаем замену $2+x^2=t$. Тогда $dt=2xdx$, $x^2=t-2$, $2x^9dx=x^8\cdot 2xdx=(x^2)^4\cdot 2xdx=(t-2)^4dt$. Получаем интеграл

$$\int\frac{2x^9}{(2+x^2)^4}dx=\int\frac{(t-2)^4\,dt}{t^4}=\int\frac{t^4-8t^3+24t^2-32t+16}{t^4}\,dt=$$

$$=\int\left(1-\frac{8}{t}+\frac{24}{t^2}-\frac{32}{t^3}+\frac{16}{t^4}\right)dt=t-8\ln|t|-\frac{24}{t}+\frac{16}{t^2}-\frac{16}{3t^3}+C=$$

$$=t-8\ln|t|-8\left(\frac{3}{t}-\frac{2}{t^2}+\frac{2}{3t^3}\right)+C=t-8\ln|t|-\frac{8(9t^2-6t+2)}{3t^3}+C.$$

Возвращаемся к старой переменной, подставим $t = 2 + x^2$ и получаем:

$$\int \frac{2x^9}{(2+x^2)^4}dx = 2 + x^2 - 8\ln\left|2+x^2\right| - \frac{8(9x^4+30x^2+22)}{3(2+x^2)^3} + C.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите интеграл от простейшей дроби:

1) $\int \frac{dx}{x-7}$; 2) $\int \frac{dx}{2x+3}$; 3) $\int \frac{6dx}{1-3x}$;

4) $\int \frac{dx}{(x+2)^2}$; 5) $\int \frac{dx}{(2x-1)^3}$; 6) $\int \frac{dx}{(4-5x)^6}$;

7) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$; 8) $\int \frac{xdx}{x^2+10x+34}$; 9) $\int \frac{4x-1}{x^2-2x+5}dx$;

10) $\int \frac{2-3x}{x^2+4x+29}dx$; 11) $\int \frac{5x+3}{x^2+3x+4}dx$; 12) $\int \frac{x+4}{3x^2-x+1}dx$.

1.2. Найдите интеграл от простейшей дроби IV типа:

1) $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$; 3) $\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}dx$; 4) $\int \frac{3x-2}{(x^2+4)^2}dx$.

1.3. Найдите интеграл от простейших дробей:

1) $\int \left(\frac{5}{(x+3)^4} - \frac{2}{x^2-2x+2}\right)dx$; 2) $\int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+2)^3}\right)dx$;

3) $\int \left(\frac{4x}{x^2+25} - \frac{1}{(x-4)^3}\right)dx$; 4) $\int \left(\frac{6x+1}{x^2+8x+20} + \frac{3}{2(x-2)^2}\right)dx$.

II уровень

2.1. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{5x+1}{x^2+x-2}dx$; 2) $\int \frac{4x^2-x-6}{x^3+x^2-2x}dx$;

3) $\int \frac{3x+2}{(x-1)(x^2-5x+6)}dx$; 4) $\int \frac{x^4+2x^2+x+1}{x^2(x+1)}dx$.

5) $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx$; 6) $\int \frac{3x^2-x+2}{(x+1)^2(x-2)}dx$;

7) $\int \frac{x^2-5x+5}{(x-1)^3(x-2)}dx$; 8) $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}$;

9) $\int \frac{x+4}{(x+2)(x+1)^2}dx$; 10) $\int \frac{x^5-11x^3-19x^2-5x+4}{x^2-3x+4}dx$;

2.2. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{x^3+x+3}{(x+3)(x^2+9)}dx$; 2) $\int \frac{xdx}{x^3+1}$;

3) $\int \frac{dx}{(x^2-3x+5)(x^2+2x+3)}$; 4) $\int \frac{2x^3+x^2-2x-2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$;

5) $\int \frac{3x^2-2x+4}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}dx$; 6) $\int \frac{dx}{1-x^4}$;

7) $\int \frac{x^4+3x^2-3x-11}{(x-1)(x^2+4)}dx$; 8) $\int \frac{3x^3+7x+1}{x^4+5x^2+6}dx$;

9) $\int \frac{x+3}{x^4+6x^2+9}dx$; 10) $\int \frac{x^4-x^3+3x^2+2x-7}{x^4+5x^2+4}dx$.

III уровень

3.1. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{xdx}{(1+x)(1+x^2)^2}$; 2) $\int \frac{2x^5-3x^4+11x^3-18x^2+16x-32}{x^2(x^2+4)^2}dx$;

3) $\int \frac{x^5}{(1+x^2)^4}dx$; 4) $\int \frac{32x^7}{(3+2x^2)^4}dx$.

19.6. Интегрирование тригонометрических выражений

Для вычисления интегралов вида $\int \sin(ax+b)\cos(cx+d)dx$, $\int \cos(ax+b)\cos(cx+d)dx$, $\int \sin(ax+b)\sin(cx+d)dx$, где a, b, c, d –

действительные числа, применяют следующие тригонометрические формулы:

$$\begin{aligned}
&\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b)),\\
&\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b)),\\
&\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a-b)+\sin(a+b)),
\end{aligned} \qquad (19.22)$$

с помощью которых произведение тригонометрических функций переводится в сумму.

Вычисление интеграла вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx \qquad (19.23)$$

зависит от показателей степеней m и n.

Рассмотрим следующие случаи:

1. Если в формуле (19.23) m – нечетное положительное число, т. е. $m = 2k+1$, $k \in \mathbf{N}$, то подынтегральное выражение преобразуется следующим образом:

$$\sin^m x = \sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \sin x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x.$$

Делают это с целью поднесения под знак дифференциала.

Тогда

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \ \sin x dx =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x(-\sin x)dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x).$$

Получаем интеграл от степенной функции относительно $\cos x$.

В случае $m = 1$ сразу имеем:

$$\int \sin x \cos^n x dx = -\int \cos^n x d(\cos x), \ \forall n \in \mathrm{R}.$$

Аналогично поступают, если в формуле (19.23) n – нечетное положительное число, т. е. отдельно множитель $\cos x$ можно поднести под знак дифференциала.

2. Если в формуле (19.23) $m+n = -2k$, $k \in \mathbf{N}$, то:

1) подынтегральная функция представляет собой дробь, в числителе которой находится степень синуса, а в знаменателе – степень косинуса или наоборот (степень числителя меньше степени знаменателя), причем показатели степени или оба четные

или оба нечетные;

2) подынтегральная функция представляет собой дробь, числитель которой постоянная величина, а знаменатель – произведение степеней синуса и косинуса одинаковой четности.

В этих случаях применяют подстановки $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$, которые преобразуют подынтегральную функцию в степенную функцию относительно $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$.

При этом, если применяют подстановку $t = \operatorname{tg} x$, то используются формулы:

$$\begin{aligned}
&\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};\\
&x = \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.
\end{aligned} \qquad (19.24)$$

Если применяют подстановку $t = \operatorname{ctg} x$, то используются формулы:

$$\begin{aligned}
&\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \cos x = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\\
&x = \operatorname{arcctg} t; \quad dx = -\frac{dt}{1+t^2}.
\end{aligned} \qquad (19.25)$$

Для дроби первого вида, если в числителе находится степень $\sin x$, то рациональнее применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$, если в числителе находится степень $\cos x$, то – подстановку $\operatorname{ctg} x$. В случае, если $m+n = -2k$, $k \in \mathbf{N}$, числа m и n могут быть не целыми.

3. Если $m+n = 0$ (m, n – целые числа), то подынтегральное выражение имеет один из видов $\frac{\sin^m x}{\cos^m x}$ или $\frac{\cos^n x}{\sin^n x}$ и тогда интеграл приводится к виду $\int \operatorname{tg}^m x dx$ или $\int \operatorname{ctg}^n x dx$. Для вычисления следует применить соответственно подстановки $\operatorname{tg} x = t$ и $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ или $\operatorname{ctg} x = t$, $dx = -\frac{dt}{1+t^2}$, которые приводят к интегралам $\int \frac{t^m}{1+t^2} dt$ или $\int \frac{t^n}{1+t^2} dt$ соответственно. Выполняя деле-

ние (в первом случае t^m делим на $1+t^2$, а во втором t^n – на $1+t^2$), придем к выражению, которое непосредственно интегрируется.

Для вычисления интегралов вида $\int \mathrm{tg}^m x dx$ и $\int \mathrm{ctg}^m x dx$, $m \in \mathbf{N}$, можно использовать также формулы:

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1, \qquad (19.26)$$

последовательно понижая степень тангенса или котангенса. С помощью формул (19.26) можно вычислять интегралы вида

$$\int \mathrm{tg}^m x \frac{1}{\cos^{2n} x} dx, \quad \int \mathrm{ctg}^m x \frac{1}{\sin^{2n} x} dx,$$

где n – целое положительное число, и интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n} x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^{2m} x},$$

где m, n – целые положительные числа.

4. Интегралы вида $\int \sin^{2n} x dx$ и $\int \cos^{2n} x dx$, $n \in \mathbf{N}$ вычисляются с помощью тригонометрических формул понижения степени:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x). \end{aligned} \qquad (19.27)$$

Интеграл вида

$$\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx, \qquad (19.28)$$

где m, $n \in \mathbf{N}$, вычисляется с помощью формул (19.27) и формулы

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad (19.29)$$

5. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная функция, аргументами которой являются $\sin x$ и $\cos x$, т. е. над синусом и косинусом проводятся только рациональные операции (сложение и вычитание, умножение на постоянные величины, возведение в целые степени как положительные, так и отрицательные, деление), вычисляется с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. При этом

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \qquad (19.30)$$

$$x = 2\mathrm{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким способом удобно вычислять интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$, $\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$, а также $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$, где числа a, b одновременно не равны нулю.

Вместе с тем, универсальная подстановка $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ часто приводит к громоздким вычислениям, поэтому ее следует применять в тех случаях, когда невозможно найти более удобный способ.

Частные подстановки

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\sin x$, т. е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подынтегральное выражение приводится к рациональной функции подстановкой $t = \cos x$.

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\cos x$, т. е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подынтегральное выражение приводится к рациональной функции подстановкой $t = \sin x$.

3. Если $R(\sin x, \cos x)$ – четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, т. е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то подынтегральное выражение приводится к рациональной функции подстановкой $t = \mathrm{tg}\, x$.

4. Интеграл $\int R(\mathrm{tg}\, x) dx$ приводится к рациональной функции с помощью подстановки $t = \mathrm{tg}\, x$.

5. Интеграл $\int R(\mathrm{ctg}\, x) dx$ приводится к рациональной функции с помощью подстановки $t = \mathrm{ctg}\, x$.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл:

1) $\int \sin 2x \cos 4x dx$; 2) $\int \sin 4x \cos 2x dx.$

Решение. 1) Заменяя произведение $\sin 2x \cos 4x$ по формуле (19.22), получаем:

$$\frac{1}{2}\int (\sin(-2x)+\sin 6x)dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x - \sin 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C.$$

2) Интеграл $\int \sin 4x \cos 2x dx$ также можно вычислить, преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму. Используем иной способ:

$$\int \sin 4x \cos 2x dx = \int 2\sin 2x \cos 2x \cos 2x dx = 2\int \cos^2 2x \sin 2x dx =$$

$$= -\int \cos^2 2x\left(-2\sin 2x\right)dx = \int \cos^2 2x d(\cos 2x) = \frac{1}{3}\cos^3 2x + C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл:

1) $\int \sin^5 2x dx$; 2) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$; 3) $\int \frac{\cos^3 \frac{x}{3}}{\sin^6 \frac{x}{3}} dx.$

Решение. 1) Показатель степени синуса – нечетное натуральное число. Поэтому в подынтегральной функции выделим первую степень синуса:

$$\sin^5 2x = \sin 2x \cdot \sin^4 2x = \sin 2x(\sin^2 2x)^2 = \sin 2x(1-\cos^2 2x)^2 =$$

$$= \sin 2x(1-2\cos^2 2x + \cos^4 2x).$$

Получаем:

$$\int \sin^5 2x dx = \int (1-2\cos^2 2x + \cos^4 2x)\sin 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-2\cos^2 2x + \cos^4 2x)(-2\sin 2x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(1-2\cos^2 2x + \cos^4 2x\right) d\left(\cos 2x\right).$$

Интегрируя как степенную функцию относительно $\cos 2x$, получаем:

$$\int \sin^5 2x dx = -\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \frac{2\cos^3 2x}{3} + \frac{\cos^5 2x}{5}\right) + C =$$

$$= -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^3 2x}{3} - \frac{\cos^5 2x}{10} + C.$$

2) В подынтегральной функции выделим степень косинуса:

$$\sin^4 x \cos^3 x = \sin^4 x \cos^2 x \cos x = \sin^4 x(1-\sin^2 x)\cos x =$$

$$= (\sin^4 x - \sin^6 x)\cos x.$$

Получим:

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int (\sin^4 x - \sin^6 x)\cos x dx = \int (\sin^4 x - \sin^6 x) d\left(\sin x\right).$$

Интегрируя как степенную функцию относительно $\sin x$, получаем:

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

3) Поскольку $\cos^3 \frac{x}{3} = \cos^2 \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{x}{3} = \left(1-\sin^2 \frac{x}{3}\right)\cos \frac{x}{3}$, то имеем:

$$\int \frac{\cos^3 \frac{x}{3}}{\sin^6 \frac{x}{3}} dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 \frac{x}{3}\right)\cos \frac{x}{3}}{\sin^6 \frac{x}{3}} dx = 3\int \frac{\left(1-\sin^2 \frac{x}{3}\right)\frac{1}{3}\cos \frac{x}{3}}{\sin^6 \frac{x}{3}} dx =$$

$$= 3\int \frac{1-\sin^2 \frac{x}{3}}{\sin^6 \frac{x}{3}} d\left(\sin \frac{x}{3}\right).$$

Применим подстановку $\sin \frac{x}{3} = t.$

$$3\int \frac{1-t^2}{t^6} dt = 3\int \left(t^{-6} - t^{-4}\right) dt = 3\left(\frac{t^{-5}}{-5} - \frac{t^{-3}}{-3}\right) + C = -\frac{3}{5t^5} + \frac{1}{t^3} + C.$$

Возвращаемся к старой переменной. Заменяем t на $\sin \frac{x}{3}$ и получаем:

$$\int \frac{\cos^3 \frac{x}{3}}{\sin^6 \frac{x}{3}} dx = -\frac{3}{5\sin^5 \frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin^3 \frac{x}{3}} + C.$$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$; 2) $\int \frac{\cos^3 3x}{\sin^7 3x} dx$;

3) $\int \frac{dx}{\cos^6 2x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

Решение. 1) Показатель степени синуса $m=4$, показатель степени косинуса $n=-6$, $m+n=-2$ – четное отрицательное число. Так как в числителе находится степень синуса, то применим подстановку $t=\operatorname{tg} x$ и используем формулы (19.24). Получаем:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^6}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^3}}\frac{dt}{1+t^2} = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5}+C.$$

Заменив t на $\operatorname{tg} x$, окончательно получаем:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C.$$

2) Показатель степени синуса $m=-7$, показатель степени косинуса $n=3$, $m+n=-\ 4$ – четное отрицательное число. Так как в числителе находится степень косинуса, то удобнее применить подстановку

$$t=\operatorname{ctg} 3x,\quad x=\frac{1}{3}\operatorname{arcctg} t,\quad dx=-\frac{dt}{3(1+t^2)}.$$

Используя формулы (19.25), получаем:

$$\int \frac{\cos^3 3x}{\sin^7 3x}dx = \int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^7}\frac{dt}{3(1+t^2)} = -\frac{1}{3}\int \frac{\frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{7}{2}}}}\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int t^3\left(1+t^2\right)dt = -\frac{1}{3}\int \left(t^3+t^5\right)dt = -\frac{1}{3}\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^6}{6}\right)+C = -\frac{t^4}{12}-\frac{t^6}{18}+C.$$

Заменив t на $\operatorname{ctg} x$, получаем:

$$\int \frac{\cos^3 3x}{\sin^7 3x}dx = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{12}-\frac{\operatorname{ctg}^6 x}{18}+C.$$

3) *1-й способ*. Показатель степени синуса $m=0$, показатель степени косинуса $n=-6$, $m+n=-6$ – четное отрицательное число. Применим подстановку $t=\operatorname{tg} 2x$, тогда $x=\frac{\operatorname{arctg} t}{2}$, $dx=\frac{dt}{2(1+t^2)}$. Используя формулы (19.24), получаем:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 2x} = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^6}\frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{1}{(1+t^2)^3}}\frac{dt}{(1+t^2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+t^2)^2 dt = \frac{1}{2}\int \left(1+2t^2+t^4\right)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)+C =$$

$$= \frac{t}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{10}+C.$$

Заменяем t на $\operatorname{tg} x$ и получаем:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 2x} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{10}+C.$$

2-й способ. Преобразуем подынтегральное выражение и применим формулы (19.26):

$$\frac{dx}{\cos^6 2x} = \frac{1}{\cos^2 2x}\,\frac{1}{\cos^2 2x}\,\frac{dx}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2 2x)(1+\operatorname{tg}^2 2x)\frac{d(2x)}{\cos^2 2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2 2x\right)^2 d\left(\operatorname{tg} 2x\right) = \frac{1}{2}\left(1+2\operatorname{tg}^2 2x+\operatorname{tg}^4 2x\right)d\left(\operatorname{tg} 2x\right).$$

Интегрируя как степенную функцию относительно $\operatorname{tg} 2x$, получаем:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 2x} = \frac{1}{2}\int (1+2\operatorname{tg}^2 2x+\operatorname{tg}^4 2x)d\left(\operatorname{tg} 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg} 2x+\frac{2\operatorname{tg}^3 2x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 2x}{5}\right)+C = \frac{\operatorname{tg} 2x}{2}+\frac{\operatorname{tg}^3 2x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 2x}{10}+C.$$

4) Имеем $m=-5$, $n=-3$, $m+n=-8$ – четное отрицательное число. Применим подстановку $t=\operatorname{tg} x$ и формулы (19.24), получаем:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} = \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^5}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{\frac{t^3}{(1+t^2)^4}}\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^3}{t^3}\,dt = \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^3}\,dt = \int \left(t^{-3}+\frac{2}{t}+3t+t^3\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2t^2}+2\ln|t|+\frac{3t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+C = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+2\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{3\operatorname{tg}^2 x}{2}+\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C.$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл:

1) $\int \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos^7 x}}dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}}{\cos^4 x}dx$.

Решение. 1) Показатель степени синуса $m=\frac{1}{3}$, показатель степени косинуса $n=-\frac{7}{3}$, $m+n=-2$ – четное отрицательное число. Применив подстановку $t=\operatorname{tg}x$ и формулы (19.24), получаем:

$$\int\sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos^7 x}}dx=\int\left(\frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^7}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{1}{6}}}}{\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{7}{6}}}}\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C.$$

Возвращаемся к старой переменной. Заменяя t на $\operatorname{tg}x$, получаем:

$$\int\sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos^7 x}}dx=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+C.$$

2) Преобразуем подынтегральную функцию к виду

$$\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}}{\cos^4 x}=\frac{\sin^{\frac{5}{2}}x}{\cos^{\frac{5}{2}}x}\frac{1}{\cos^4 x}=\frac{\sin^{\frac{5}{2}}x}{\cos^{\frac{13}{2}}x}.$$

Имеем $m=\frac{5}{2}$, $n=-\frac{13}{2}$, $m+n=-4$ – четное отрицательное число. Применив подстановку $t=\operatorname{tg}x$ и формулы (19.24), получаем:

$$\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin^{\frac{5}{2}}}{\cos^{\frac{13}{2}}}dx=\int\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^{\frac{13}{2}}}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{\frac{t^{\frac{5}{2}}}{(1+t^2)^{\frac{5}{4}}}}{\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{13}{4}}}}\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int t^{\frac{5}{2}}(1+t^2)dt=\int\left(t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{9}{2}}\right)dt=\frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+\frac{t^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}}+C=\frac{2t^{\frac{7}{2}}}{7}+\frac{2t^{\frac{11}{2}}}{11}+C=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}^{\frac{7}{2}}x}{7}+\frac{2\operatorname{tg}^{\frac{11}{2}}x}{11}+C=2\sqrt{\operatorname{tg}x}\left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{7}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{11}\right)+C.$$

Пример 5. Найти неопределенный интеграл:

1) $\int\operatorname{tg}^6 xdx;$ 2) $\int\sin^4 5x\cos^4 5xdx.$

Решение. 1) *1-й способ*. Применяя подстановку $t=\operatorname{tg}x$ и формулы (19.24), получаем:

$$\int\operatorname{tg}^6 xdx=\int\frac{t^6dt}{1+t^2}=\int\left(t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-\operatorname{arctg}t+C.$$

Заменяем t на $\operatorname{tg}x$:

$$\int\operatorname{tg}^6 xdx=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)+C=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg}x-x+C.$$

2-й способ. Представив подынтегральную функцию в виде $\operatorname{tg}^6 x=\operatorname{tg}^4 x\cdot\operatorname{tg}^2 x$ и применив формулу (19.26), получаем:

$$\operatorname{tg}^4 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=\operatorname{tg}^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^4 x=\operatorname{tg}^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 x.$$

Еще два раза применим формулу (19.26):

$$\operatorname{tg}^4 x\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=\operatorname{tg}^4 x\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\frac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{tg}^2 x=$$

$$=\operatorname{tg}^4 x\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-1=\left(\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x+1\right)\frac{1}{\cos^2 x}-1.$$

Учитывая, что $d(\operatorname{tg}x)=\frac{dx}{\cos^2 x}$, получим интеграл от рациональной функции относительно $\operatorname{tg}x$

$$\int\operatorname{tg}^6 xdx=\int\left(\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x+1\right)\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=$$

$$=\int\left(\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x+1\right)d(\operatorname{tg}x)-x=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg}x-x+C.$$

2) Имеем интеграл вида (19.23). Используя формулу (19.29), получаем:

$$\int\sin^4 5x\cos^4 5xdx=\int(\sin 5x\cos 5x)^4dx=\int\left(\frac{\sin 10x}{2}\right)^4dx=\frac{1}{16}\int\sin^4 10xdx.$$

Далее, понижая степень по формуле (19.27), имеем:

$$\frac{1}{16}\int\left(\frac{1-\cos 20x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{64}\int(1-\cos 20x)^2dx=$$

$$=\frac{1}{64}\int\left(1-2\cos 20x+\cos^2 20x\right)dx=\frac{1}{64}\int\left(1-2\cos 20x+\frac{1+\cos 40x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{128}\int(3-2\cos 20x+\cos 40x)\,dx=$$
$$=\frac{3}{128}\int dx-\frac{1}{64}\int\cos 20x dx+\frac{1}{128}\int\cos 40x dx=$$
$$=\frac{3}{128}x-\frac{1}{1280}\int\cos 20x d(20x)+\frac{1}{5120}\int\cos 40x d(40x)=$$
$$=\frac{3}{128}x-\frac{1}{1280}\sin 20x+\frac{1}{5120}\sin 40x+C.$$

Пример 6. Найти неопределенный интеграл:

1) $\int\frac{3\operatorname{tg}x+2}{5\cos^2 x+3\sin 2x+9\sin^2 x}dx$;   2) $\int\frac{4+5\cos x}{\sin x(7+3\sin x)}dx$.

Решение. 1) Запишем подынтегральную функцию

$$R\ (\sin x,\ \cos x)=\frac{3\operatorname{tg}x+2}{5\cos^2 x+3\sin 2x+9\sin^2 x}=$$
$$=\frac{3\operatorname{tg}x+2}{5\cos^2 x+6\sin x\cos x+9\sin^2 x}.$$

Так как подынтегральная функция является четной по $\sin x$ и $\cos x$, т. е. $R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x)$, то применим подстановку $t=\operatorname{tg}x$. Вначале умножим и поделим знаменатель подынтегрального выражения на $\cos^2 x$, получаем:

$$\int\frac{3\operatorname{tg}x+2}{5\cos^2 x+6\sin x\cos x+9\sin^2 x}dx=\int\frac{3\operatorname{tg}x+2}{5+6tgx+9tg^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=$$
$$=\int\frac{(3\operatorname{tg}x+2)d(\operatorname{tg}x)}{5+6\operatorname{tg}x+9\operatorname{tg}^2 x}=\left|t=\operatorname{tg}x\right|=\int\frac{(3t+2)dt}{9t^2+6t+5}=$$
$$=\left|d(9t^2+6t+5)=(18t+6)dt\right|=\frac{1}{6}\int\frac{(18t+6)+6}{9t^2+6t+5}\ dt=$$
$$=\frac{1}{6}\int\frac{(18t+6)dt}{9t^2+6t+5}+\int\frac{dt}{9t^2+6t+5}=\frac{1}{6}\int\frac{d(9t^2+6t+5)}{9t^2+6t+5}+\int\frac{dt}{9t^2+6t+1+4}=$$
$$=\frac{1}{6}\ln\left|9t^2+6t+5\right|+\int\frac{dt}{(3t+1)^2+4}=\frac{1}{6}\ln\left|9t^2+6t+5\right|+\frac{1}{3}\int\frac{d(3t+1)}{(3t+1)^2+4}=$$
$$=\frac{1}{6}\ln\left|9t^2+6t+5\right|+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{2}+C.$$

Возвращаемся к заданной переменной, заменяем t на $\operatorname{tg}x$ и приходим к ответу: $\frac{1}{6}\ln\left|\ 9\operatorname{tg}^2 x+6\operatorname{tg}x+5\ \right|+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}x+1}{2}+C.$

2) Поскольку подынтегральная функция не является нечетной ни по $\sin x$, ни по $\cos x$, то применим универсальную тригонометрическую подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и формулы (19.30). Получаем:

$$\int\frac{4+5\cos x}{\sin x(7+3\sin x)}dx=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x=2\operatorname{arctg}t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{array}\right|=$$
$$=\int\frac{4+\frac{5(1-t^2)}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(7+\frac{6t}{1+t^2}\right)}\ \frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{9-t^2}{t\left(7t^2+6t+7\right)}dt.$$

Разложив подынтегральную функцию на сумму простейших дробей, сводим заданный интеграл к разности двух интегралов, которые вычисляем:

$$\int\frac{\frac{9}{7}}{t}dt-\int\frac{10t+\frac{54}{7}}{7t^2+6t+7}dt=\frac{9}{7}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{7}\int\frac{70t+54}{7t^2+6t+7}dt=$$
$$=\left|d(7t^2+6t+7)=(14t+6)dt\right|=$$
$$=\frac{9}{7}\ln|t|-\frac{1}{7}\int\frac{(70t+30)dt}{7t^2+6t+7}-\frac{1}{7}\int\frac{24dt}{7t^2+6t+7}=$$
$$=\frac{9}{7}\ln|t|-\frac{5}{7}\int\frac{(14t+6)dt}{7t^2+6t+7}-24\int\frac{dt}{49t^2+42t+49}=$$
$$=\frac{9}{7}\ln|\,t|-\frac{5}{7}\int\frac{d(7t^2+6t+7)}{7t^2+6t+7}-\frac{24}{7}\int\frac{d(7t+3)}{(7t+3)^2+40}=$$
$$=\frac{9}{7}\ln|\,t|-\frac{5}{7}\ln\left|7t^2+6t+7\right|-\frac{24}{7\cdot 2\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{7t+3}{2\sqrt{10}}+C=$$
$$=\frac{9}{7}\ln|\,t|-\frac{5}{7}\ln\left|7t^2+6t+7\right|-\frac{12}{7\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{7t+3}{2\sqrt{10}}+C.$$

Заменяя t на $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, приходим к ответу:

$$\frac{9}{7}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{5}{7}\ln\left|7\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+6tg\frac{x}{2}+7\right|-\frac{12}{7\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{7\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}{2\sqrt{10}}+C.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите неопределенный интеграл, преобразовав произведение тригонометрических функций в сумму:

1) $\int \sin 3x \cos 3x dx$; 2) $\int \sin 3x \cos 5x dx$;

3) $\int \sin\frac{x}{3}\sin\frac{x}{2}dx$; 4) $\int \cos 4x \cos 6x dx$.

1.2. Найдите неопределенный интеграл, применяя подстановку $t=\sin x$ или $t=\cos x$:

1) $\int \sin^5 x\cos x dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; 3) $\int \operatorname{ctg} x dx$;

4) $\int \operatorname{tg} x dx$; 5) $\int \sin^3 x dx$; 6) $\int \cos^3 x dx$;

7) $\int \cos^7 3x \sin 3x dx$; 8) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{(\sin 2x - 3)^7}}dx$; 9) $\int \sqrt[5]{\sin 3x}\cos 3x dx$.

1.3. Найдите неопределенный интеграл, используя формулы понижения степени:

1) $\int \cos^2 x dx$; 2) $\int \sin^2 2x dx$; 3) $\int \cos^4 x dx$.

1.4. Найдите неопределенный интеграл, используя универсальную тригонометрическую подстановку:

1) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$; 2) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; 4) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

1.5. Найдите неопределенный интеграл, используя подстановку $t=\operatorname{tg} x$:

1) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}$; 2) $\int \frac{dx}{16\sin^2 x-\cos^2 x}$;

3) $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$; 4) $\int \frac{\operatorname{tg} x+3}{\operatorname{tg}^2 x+6\operatorname{tg} x+7}dx$.

II уровень

2.1. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \sin 3x \cos 4x \sin 7x dx$; 2) $\int \sin\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2}dx$.

2.2. Найдите неопределенный интеграл, применяя подстановку $t=\sin x$ или $t=\cos x$.

1) $\int \cos^5 x dx$; 2) $\int \sin^5 2x dx$; 3) $\int \sin^7 x dx$;

4) $\int \cos^4 x\sin^3 x dx$; 5) $\int \sin^2 x\cos^5 x dx$; 6) $\int \sin^3 2x\cos^2 2x dx$;

7) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$; 8) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$; 9) $\int \frac{\cos^9 x}{\sin x}dx$;

10) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[7]{\cos^4 x}}dx$; 11) $\int \frac{\sin^5 2x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$; 12) $\int \cos^7 x\sqrt[5]{\sin^3 x}dx$.

2.3. Найдите неопределенный интеграл, применяя подстановку $t=\operatorname{tg} x$ или $t=\operatorname{ctg} x$:

1) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^8 x}dx$; 2) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx$; 3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sin^4\frac{x}{2}}$; 5) $\int \frac{dx}{\cos^4 2x}$; 6) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$;

7) $\int \sqrt{\frac{\cos x}{\sin^5 x}}dx$; 8) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x}dx$; 9) $\int \sqrt[3]{\frac{\sin 3x}{\cos^7 3x}}dx$;

10) $\int \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}}dx$; 11) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^6 x}dx$; 12) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^4 x}dx$.

2.4. Найдите неопределенный интеграл, применяя подстановку $t=\operatorname{tg} x$ или $t=\operatorname{ctg} x$:

1) $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^5 x}$; 2) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sin^4 2x\cos^6 2x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^9 x}$.

2.5. Найдите неопределенный интеграл, применяя подстановку $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$:

1) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; 2) $\int \operatorname{tg}^3 2x dx$; 3) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$; 4) $\int \operatorname{ctg}^6 x \frac{1}{\sin^4 x} dx$;

5) $\int \operatorname{tg}^6 x dx$; 6) $\int \operatorname{tg}^5 3x dx$; 7) $\int \operatorname{tg}^7 x dx$; 8) $\int \operatorname{tg}^5 x \frac{1}{\cos^4 x} dx$.

2.6. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int 2^4 \cos^8 x dx$; 2) $\int \sin^6 x dx$; 3) $\int \sin^6 x\cos^6 x dx$;

4) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$; 5) $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$; 6) $\int 2^8 \sin^4 x\cos^4 x dx$.

III уровень

3.1. Найдите неопределенный интеграл, используя универсальную тригонометрическую подстановку:

1) $\int \frac{\sin x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$; 2) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; 3) $\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$;

4) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$; 5) $\int \frac{dx}{\cos^7 x}$; 6) $\int \frac{\cos x}{3+5\cos x} dx$;

7) $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x} dx$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^3 2x}$; 9) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$;

10) $\int \frac{dx}{\cos x\ (1-\sin x)}$; 11) $\int \frac{dx}{\sin^7 x}$; 12) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x+\sin x}$;

13) $\int \frac{4\sin x-5\cos x-5}{\cos x+1} dx$; 14) $\int \frac{5+9\sin x}{\cos x(2+3\sin x)} dx$.

3.2. Найдите неопределенный интеграл, используя подстановку $t = \operatorname{tg} x$:

1) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+5\sin^2 x}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$;

3) $\int \frac{2\operatorname{tg} x+2}{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1} dx$; 4) $\int \frac{4tgx-2}{7\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x} dx$;

5) $\int \frac{dx}{(4\operatorname{tg} x-1)\sin 2x}$; 6) $\int \frac{3+2\operatorname{tg} x}{(\sin x+2\cos x)^2} dx$;

7) $\int \frac{4-7\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x-2} dx$; 8) $\int \frac{5\operatorname{tg} x+2}{3\sin^2 x+2\sin 2x+2} dx$;

9) $\int \frac{2\operatorname{tg} x-1}{\cos^2 x-\sin 2x+1} dx$; 10) $\int \frac{7\operatorname{tg} x-1}{3\sin^2 x-\sin 2x-4\cos 2x} dx$.

19.7. Интегрирование иррациональных функций

Основной метод вычисления интеграла от иррациональной функции – метод рационализации (т. е. сведение к рациональной функции), для чего делают определенную подстановку.

Алгебраическая подстановка

Интеграл вида

$$\int R\left(x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\ \ldots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx, \qquad (19.31)$$

где $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$ – целые ненулевые числа, с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,\quad m = \text{ÍÎÊ}(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n),$$

приводится к интегралу от рациональной функции.

Частные случаи интеграла (19.31):

1. Если $c = 0$, $d = 1$, то интеграл имеет вид:

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{p_1}{q_1}},\ \ldots\ (ax+b)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx,$$

и преобразуется в интеграл от рациональной функции с помощью подстановки $(ax+b) = t^m$, где $m = НОК(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n)$.

2. Если $b = c = 0$, $a = d = 1$, то интеграл (19.31) имеет вид:

$$\int R\left(x,\ x^{\frac{p_1}{q_1}},\ x^{\frac{p_2}{q_2}},\ \ldots,\ x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx,$$

и сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^m$, где $m = НОК(q_1,\ q_2,\ ...,\ q_n)$.

Тригонометрическая подстановка

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx,$$

где R – некоторая рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, могут быть вычислены с помощью тригонометрических подстановок, которые приводят его к интегралу от рациональной функции.

В квадратном трехчлене выделим полный квадрат $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ и применим подстановку $y = x + \dfrac{b}{2a}$. В результате под корнем получим одно из 3-х выражений: $\sqrt{k^2-y^2}$, $\sqrt{k^2+y^2}$ или $\sqrt{y^2-k^2}$.

Если имеем $\sqrt{k^2-y^2}$, то для уничтожения иррациональности применим подстановку $y = k\sin t$, в результате которой $dy = k\cos t dt$, $\sqrt{k^2-y^2} = k\cos t$. Аналогично можно использовать подстановку $y = k\cos t$.

Если имеем $\sqrt{k^2+y^2}$, то для уничтожения иррациональности применяется подстановка $y = k\,\mathrm{tg}t$, в результате которой имеем: $dy = \dfrac{k}{\cos^2 t}dt$, $\sqrt{k^2+y^2} = \dfrac{k}{\cos t}$.

Если под интегралом есть выражение $\sqrt{y^2-k^2}$, то подставляем $y = \dfrac{k}{\cos t}$, т. е. $dy = \dfrac{k\,\mathrm{tg}t}{\cos t}dt$, $\sqrt{y^2-k^2} = k\,\mathrm{tg}t$.

Далее интеграл вычисляют как интеграл от тригонометрической функции и возвращаются к старой переменной, выражая последовательно t через y и x.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл:

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}-3}{\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[3]{x^2}}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{3x+2}}{(3x+2)^2-\sqrt{3x+2}}dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{6\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x+2}}dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x-2}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx.$

Решение. 1) Поскольку интеграл имеет вид: $R\left(x^{\frac{1}{6}},\ x^{\frac{5}{6}},\ x^{\frac{2}{3}}\right)dx$, а $НОК(3;\ 6) = 6$, то применим подстановку $x = t^6$. Тогда

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}-3}{\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[3]{x^2}}\ dx = \left|\begin{matrix} x=t^6,\ t=\sqrt[6]{x}, \\ dx = 6t^5dt \end{matrix}\right| = \int \frac{(t-3)\ \ 6t^5dt}{t^5+2t^4} = 6\int \frac{(t-3)t^5dt}{t^4(t+2)} =$$

$$= 6\int \frac{t^2-3t}{t+2}dt = 6\int\left(t-5+\frac{10}{t+2}\right)dt = 3t^2-30t+60\ln\ |t+2|+C =$$

$$= 3\sqrt[3]{x}-30\sqrt[6]{x}+60\ln\left|\sqrt[6]{x}+2\right|+C.$$

2) Интеграл имеет вид: $\displaystyle\int R\left((3x+2)^2,\ (3x+2)^{\frac{1}{2}}\right)dx$, поэтому применим подстановку $t^2 = 3x+2$. Тогда имеем:

$$\int \frac{1+\sqrt{3x+2}}{(3x+2)^2-\sqrt{3x+2}}dx = \left|\begin{matrix} t^2=3x+2, \\ t=\sqrt{3x+2}, \\ x=\dfrac{t^2-2}{3}, \\ dx=\dfrac{2}{3}tdt \end{matrix}\right| = \int \frac{1+t}{t^4-t}\cdot\frac{2}{3}tdt = \frac{2}{3}\int\frac{(1+t)tdt}{t(t^3-1)} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{t+1}{t^3-1}dt = \frac{2}{3}\int \frac{t+1}{(t-1)(t^2+t+1)}dt = \frac{4}{9}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{2}{9}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}\ dt =$$

$$= \frac{4}{9}\ln|t-1| - \frac{2}{9}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} = \frac{4}{9}\ln|t-1| - \frac{2}{9}\ln\left|t^2+t+1\right|+C =$$

$$= \frac{4}{9}\ln\left|\sqrt{3x+2}-1\right| - \frac{2}{9}\ln\left|3x+3+\sqrt{3x+2}\right|+C.$$

3) Интеграл имеет вид: $R\left(x, \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)dx.$

Применим подстановку $\dfrac{x+1}{x+2} = t^2$, $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$, $x = \dfrac{1-2t^2}{t^2-1}$,

$$dx=\frac{2tdt}{(t^2-1)^2},\quad x+1=\frac{1-2t^2}{t^2-1}+1=\frac{-t^2}{t^2-1}.$$

Получаем: $\displaystyle\int\frac{12t^2(t^2-1)^2\,dt}{t^4(t^2-1)^2}=12\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{12}{t}+C=-12\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}+C.$

4) Интеграл имеет вид: $R\left(\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)dx.$

Применим подстановку $\dfrac{x+2}{x-2}=t^2,\ t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}},\ x+2=t^2(x-2),$

$$x(t^2-1)=2+2t^2,\quad x=\frac{2(1+t^2)}{t^2-1},\quad dx=\frac{-8tdt}{(t^2-1)^2}.$$

Получаем интеграл

$$\int\frac{x+2}{x-2}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx=\int\sqrt{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^3}dx=\int t^3\frac{-8t}{(t^2-1)^2}dt=-8\int\frac{t^4}{(t^2-1)^2}dt.$$

Для вычисления последнего интеграла вместо разложения на простейшие дроби применим формулу интегрирования по частям. Положим:

$$u=t^3,\ du=3t^2dt,\ dv=\frac{tdt}{(t^2-1)^2},$$

$$v=\int\frac{tdt}{(t^2-1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-1)}{(t^2-1)^2}=-\frac{1}{2}\ \frac{1}{t^2-1}.$$

Получаем:

$$-8\int\frac{t^4dt}{(t^2-1)^2}=-8\left(\frac{-t^3}{2(t^2-1)}+\frac{3}{2}\int\frac{t^2dt}{t^2-1}\right)=\frac{4t^3}{(t^2-1)}-12\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\ dt=$$

$$=\frac{4t^3}{t^2-1}-12\int dt-12\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{4t^3}{t^2-1}-12t-6\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

Заменяем t на $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$, тогда имеем:

$$\frac{4\sqrt{\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^3}}{\dfrac{x+2}{x-2}-1}-12\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}-6\ln\left|\frac{\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}-1}{\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}+1}\right|+C=(x-2)\frac{x+2}{x-2}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}-$$

$$-12\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}-6\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}\right|+C=(x+2)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}-12\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}-$$

$$-6\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}\right|+C=(x-10)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}-6\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}\right|+C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл:

1) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$; 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+5)^5}}$.

Решение. 1) Положим $x=3\sin t$.

Тогда $dx=3\cos t dt,\ t=\arcsin\dfrac{x}{3}$.

Интеграл примет вид:

$$\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{9\sin^2 t}\cdot 3\cos t dt=\int\frac{9\cos^2 t}{9\sin^2 t}dt=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\int dt=-\mathrm{ctg}t-t+C.$$

Возвращаемся к заданной переменной, заменяем t на $\arcsin\dfrac{x}{3}$.

Тогда $\mathrm{ctg}\,t=\dfrac{\cos t}{\sin t}=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\arcsin\dfrac{x}{3}}}{\sin\arcsin\dfrac{x}{3}}=\dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}}{\dfrac{x}{3}}=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}.$

Приходим к ответу: $-\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}-\arcsin\dfrac{x}{3}+C.$

2) Применим подстановку $x=\dfrac{2}{\cos t}$.

Тогда $dx=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt,\ t=\arccos\dfrac{2}{x}$.

Получаем интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}}=\int\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{4}{\cos^2 t}-4\right)^3}}\cdot\frac{2\sin tdt}{\cos^2 t}=\int\frac{2\sin tdt}{\sqrt{4^3\left(\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^3}\cos^2 t}=$$

$$=\int\frac{2\sin t dt}{2^3\sqrt{\left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^3}\cos^2 t}=\frac{1}{4}\int\frac{\sin t dt}{\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}\cos^2 t}=\frac{1}{4}\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\sin^{-2} t d\sin t=\frac{1}{4}\ \frac{\sin^{-1} t}{-1}+C=-\frac{1}{4\sin t}+C.$$

Заменяя t на $\arccos\frac{2}{x}$, получаем:

$$\sin t=\sin\arccos\frac{2}{x}=\sqrt{1-\cos^2\arccos\frac{2}{x}}=\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}.$$

Приходим к ответу: $-\dfrac{x}{4\sqrt{x^2-4}}+C.$

3) *1-й способ*. Применим подстановку $x=\operatorname{tg} t$.

Тогда $dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$, $t=\operatorname{arctg} x$.

Интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{1}{\operatorname{tg} t\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{dt}{\frac{\sin t}{\cos t}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\cdot\cos^2 t}=\int\frac{dt}{\sin t}=$$

$$=\left|z=\operatorname{tg}\frac{t}{2},\ t=2\operatorname{arctg} z,\ dt=\frac{2dz}{1+z^2},\ \sin t=\frac{2z}{1+z^2}\right|=$$

$$=\int\frac{2dz}{(1+z^2)\cdot\frac{2z}{1+z^2}}=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C.$$

Заменяем t на $\operatorname{arctg} x$ и применяем формулу $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$.

$$\sin t=\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}=\frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg} x}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\cos t=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg} x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

Приходим к ответу:

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C=-\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\right|+C=$$

$$=-\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1}{x}\right|+C.$$

2-й способ. Применим подстановку $x=\dfrac{1}{t}$. Тогда $dx=-\dfrac{dt}{t^2}$, $t=\dfrac{1}{x}$.

Получаем интеграл

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\cdot\frac{-dt}{t^2}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|=$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C=-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C.$$

4) Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене $x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+4$. Положим $x+1=y$, тогда $dx=dy$, получаем интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+5)^5}}=\int\frac{dy}{\sqrt{(4+y^2)^5}}$, для вычисления которого применим тригонометрическую подстановку $y=2\operatorname{tg} t$, $dy=\dfrac{2dt}{\cos^2 t}$, $t=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2}$.

Тогда имеем:

$$\int\frac{1}{\sqrt{(4+4\operatorname{tg}^2 t)^5}}\cdot\frac{2dt}{\cos^2 t}=\int\frac{2dt}{2^5\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 t)^5}\cos^2 t}=\int\frac{dt}{2^4\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^5}\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{dt}{\frac{1}{\cos^5 t}\cos^2 t}=\frac{1}{16}\int\cos^3 t dt=\frac{1}{16}\int\cos^2 t\cos t dt=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 t)d\sin t=\frac{\sin t}{16}-\frac{\sin^3 t}{48}+C.$$

Заменяем $t=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2}=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2}$:

$$\sin t=\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}=\frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}}}=\frac{\frac{x+1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}=\frac{x+1}{\sqrt{4+(x+1)^2}}=$$

$$=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Приходим к ответу:

$$\frac{x+1}{16\sqrt{x^2+2x+5}}-\frac{1}{48}\left(\frac{(x+1)}{\sqrt{(x^2+2x+5)}}\right)^3+C.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите неопределенной интеграл:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}}$; 2) $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $\int\frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+9)\sqrt{x}}$;

4) $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-2}}dx$; 5) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+5}$; 6) $\int\frac{x^2dx}{(3x+2)\sqrt{3x+2}}$;

7) $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x-4}}$; 8) $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+9}}$; 9) $\int\frac{dx}{\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x}}$;

10) $\int\frac{x+1}{\sqrt{2x+3}}dx$; 11) $\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$; 12) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{(x+2)^3}}$.

II уровень

2.1. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int\frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x-1}}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}+\sqrt{2x+3}}$;

4) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$; 5) $\int\sqrt{\frac{4-x}{x-12}}dx$; 6) $\int\frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}dx$;

7) $\int\frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[3]{x^2}}dx$; 8) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$; 9) $\int\frac{2\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+1}{x+\sqrt[3]{x^4}-2\sqrt{x^3}}dx$;

10) $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$; 11) $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{3x-1}}$; 12) $\int\frac{\sqrt{x+2}+3}{(x+2)^2-\sqrt{x+2}}dx$;

13) $\int\frac{\sqrt{3x-16}}{x}dx$; 14) $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{x}$; 15) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}$;

16) $\int\frac{\sqrt[3]{2x+1}}{1+\sqrt[3]{2x+1}}dx$; 17) $\int\sqrt{\frac{1-x}{x-5}}dx$; 18) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}-\sqrt[4]{3-2x}}$;

19) $\int\frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$; 20) $\int\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt{x-1}-\sqrt[6]{x-1}}{(x-1)(\sqrt[3]{x-1}+1)}dx$.

2.2. Найдите неопределенный интеграл, преобразовав подынтегральную функцию к виду (19.31):

1) $\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1+x)^2}$; 2) $\int\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{1-x}\right)^3}}{x+\sqrt{\frac{x}{1-x}}}dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^3(2-x)}}$; 4) $\int\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}$;

5) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$; 6) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$;

7) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$; 8) $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}$;

9) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-3)^4}}$; 10) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3(x+1)^5}}$.

2.3. Найдите интеграл, избавившись от иррациональности в числителе или знаменателе дроби:

1) $\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$; 2) $\int\sqrt{\frac{5+2x}{5-2x}}dx$; 3) $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$;

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}$; 5) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$.

2.4. Найдите интеграл (после подстановки вместо разложения на простейшие дроби примените метод интегрирования по частям):

1) $\int\sqrt{\frac{5-4x}{4+9x}}dx$; 2) $\int\sqrt{\frac{2-x}{9-25x}}dx$;

3) $\int \frac{x+1}{x-1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx;$ 4) $\int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3}dx.$

III уровень

3.1. Найдите интеграл, применяя тригонометрические подстановки:

1) $\int \sqrt{16-x^2}\,dx;$ 2) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx;$ 3) $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx;$

4) $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}};$ 5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-5}}dx;$ 6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}};$

7) $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}};$ 8) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx;$ 9) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}dx;$

10) $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+2)^3}}dx;$ 11) $\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{x^4}dx;$ 12) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(7-x^2)^3}};$

13) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx;$ 14) $\int \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^6}dx;$ 15) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}};$

16) $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx;$ 17) $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx;$ 18) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx;$

19) $\int \frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4+x^2}};$ 20) $\int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}};$

21) $\int \frac{dx}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}};$ 22) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}.$

3.2. Найдите интеграл, выделив предварительно в подкоренном выражении полный квадрат:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+5)^3}};$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+6x+8)^3}};$

3) $\int \sqrt{x^2-2x+17}\,dx;$ 4) $\int \sqrt{10x-21-x^2}\,dx;$

5) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2-2x+2}};$ 6) $\int \frac{(x+4)}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+2x+5}}dx;$

7) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx;$ 8) $\int \sqrt{x-x^2}\,dx;$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(8+2x-x^2)^2}};$ 10) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2-10x+29}}.$

19.8. Интегралы от дифференциальных биномов

Дифференциальным биномом называется выражение вида

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx, \qquad (19.32)$$

где m, n, p – рациональные числа; a, b – действительные числа, отличные от нуля.

Если $p\in \mathbf{N}$, то можно использовать формулу бинома Ньютона, и этим сводим интеграл к интегралу от степенной функции. В общем случае интегралы от дифференциальных биномов, т. е. $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, можно привести к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях:

1) если p – целое число, $m=\frac{r_1}{s_1}$, $n=\frac{r_2}{s_2}$, $r_1, r_2\in \mathbf{Z}$, $s_2, s_2\in \mathbf{N}$, то применяется подстановка $x=t^s$, где $s=НОК(s_1, s_2)$;

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, $p=\frac{r}{s}$, $r\in \mathbf{Z}$, $s\in \mathbf{N}$, то применяется подстановка $a+bx^n=t^s$;

3) если $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число, $p=\frac{r}{s}$, $r\in \mathbf{Z}$, $s\in \mathbf{N}$, то применяется подстановка $\frac{a+bx^n}{x^n}=ax^{-n}+b=t^s$.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл:

1) $\int \sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})^2dx;$ 2) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx;$

3) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^3\sqrt{x}}dx$; 4) $\int \sqrt{x(2+9x^3)}dx.$

Решение. 1) Запишем подынтегральную функцию в виде дифференциального бинома (19.32)

$$x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Тогда $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$, $p=2$, т. е. p – целое число. Следовательно, имеем первый случай интегрируемости дифференциального бинома. Так как $НОК(3,\,2)=6$, то применим подстановку $x=t^6$. Тогда $dx=6t^5dt$, $t=\sqrt[6]{x}$.

Вычисляем:

$$\int x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx=\int t^2(1+t^3)^2\cdot 6t^5dt=6\int t^7(1+2t^3+t^6)dt=$$

$$=6\int\left(t^7+2t^{10}+t^{13}\right)dt=6\left(\frac{t^8}{8}+\frac{2t^{11}}{11}+\frac{t^{14}}{14}\right)+C=$$

$$=\frac{3t^8}{4}+\frac{12t^{11}}{11}+\frac{3t^{14}}{7}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{12}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+C.$$

2) Запишем подынтегральную функцию в виде дифференциального бинома (19.32)

$$x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$$

Тогда $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{6}$, $p=\frac{1}{3}$, $s=3$, $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}=3$ – целое число.

Следовательно, здесь мы имеем второй случай интегрируемости дифференциального бинома. Используем подстановку $1+x^{\frac{1}{6}}=t^3$.

Тогда $x=(t^3-1)^6$, $dx=6(t^3-1)^5\cdot 3t^2dt=18t^2(t^3-1)^5dt$.

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int\left((t^3-1)^6\right)^{-\frac{1}{2}}(t^3)^{\frac{1}{3}}18t^2(t^3-1)^5dt=18\int(t^3-1)^2t^3dt=$$

$$=18\int(t^6-2t^3+1)t^3dt=18\int(t^9-2t^6+t^3)dt=18\left(\frac{t^{10}}{10}-\frac{2t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right)+C,$$

где $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}$.

Получаем ответ:

$$\frac{9\sqrt[3]{(1+\sqrt[6]{x})^{10}}}{5}-\frac{36\sqrt[3]{(1+\sqrt[6]{x})^{7}}}{7}+\frac{9\sqrt[3]{(1+\sqrt[6]{x})^{4}}}{2}+C.$$

3) Запишем подынтегральную функцию в виде (19.32)

$$x^{-\frac{7}{2}}\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$$

Тогда $m=-\frac{7}{2}$, $n=\frac{3}{4}$, $p=\frac{1}{3}$, $s=3$.

$\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{7}{2}+1}{\frac{3}{4}}=-\frac{10}{3}$, $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{10}{3}+\frac{1}{3}=-3$ – целое число. Следовательно, имеем третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Используем подстановку $\frac{1+x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}=t^3$.

Тогда $1+x^{\frac{3}{4}}=t^3x^{\frac{3}{4}}$, $x^{\frac{3}{4}}(t^3-1)=1$, $x^{\frac{3}{4}}=\frac{1}{t^3-1}=(t^3-1)^{-1}$,

$x=(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}$, $dx=-\frac{4}{3}(t^3-1)^{-\frac{7}{3}}3t^2dt=-4t^2(t^3-1)^{-\frac{7}{3}}dt$.

$1+x^{\frac{3}{4}}=t^3x^{\frac{3}{4}}=t^3(t^3-1)^{-1}$.

Переходя в подынтегральном выражении к переменной t, получаем:

$$\int x^{-\frac{7}{2}}\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int\left((t^3-1)^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{7}{2}}\left(t^3(t^3-1)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}(-4)t^2(t^3-1)^{-\frac{7}{3}}dt=$$

$$=\int(-4)\ t^2t(t^3-1)^{\frac{14}{3}}(t^3-1)^{-\frac{1}{3}}(t^3-1)^{-\frac{7}{3}}dt=-4\int t^3(t^3-1)^2dt=$$

$$=-4\int t^3(t^6-2t^3+1)dt=-4\int(t^9-2t^6+t^3)dt=$$

$$=-4\left(\frac{t^{10}}{10}-\frac{2t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right)+C=-\frac{2t^{10}}{5}+\frac{8t^7}{7}-t^4+C.$$

Заменяем t на $\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}}}=\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt[4]{x}}$ и получаем ответ:

$$-\frac{2\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^{10}}}{5x^2\sqrt{x}}+\frac{8\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^{7}}}{x\sqrt[4]{x^3}}-\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^{4}}}{x}+C.$$

4) Запишем подынтегральную функцию в виде дифференциального бинома (19.32)

$x^{\frac{1}{2}}(2+9x^3)^{\frac{1}{2}}$.

Тогда $m=\frac{1}{2},\ \ n=3,\ \ p=\frac{1}{2},\ \ s=2.$

$\frac{m+1}{n}=\frac{\frac{1}{2}+1}{3}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2},\ \ \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ – целое число. Следовательно, имеем третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Используем подстановку: $\frac{2+9x^3}{x^3}=t^2$. Тогда

$$2+9x^3=t^2x^3,\ \ x^3(t^2-9)=2,\ \ x^3=\frac{2}{t^2-9}=2\left(t^2-9\right)^{-1},$$

$$x=\sqrt[3]{2}(t^2-9)^{-\frac{1}{3}},\ \ dx=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{3}\right)(t^2-9)^{-\frac{4}{3}}2tdt=-\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}t(t^2-9)^{-\frac{4}{3}}dt.$$

$$2+9x^3=2t^2(t^2-9)^{-1}.$$

Интеграл преобразуется к виду

$$\int x^{\frac{1}{2}}(2+9x^3)^{\frac{1}{2}}dx=\int\left(\sqrt[3]{2}(t^2-9)^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}(2t^2(t^2-9)^{-1})^{\frac{1}{2}}\frac{-2\sqrt[3]{2}t}{3}(t^2-9)^{-\frac{4}{3}}dt=$$

$$=\int\left(-\frac{4}{3}\right)t^2(t^2-9)^{-\frac{1}{6}}(t^2-9)^{-\frac{1}{2}}(t^2-9)^{-\frac{4}{3}}dt=\int\left(-\frac{4}{3}\right)t^2(t^2-9)^{-2}dt=$$

$$=-\frac{4}{3}\int\frac{t^2}{(t^2-9)^2}dt.$$

Последний интеграл можно вычислить двумя способами: либо разложить подынтегральную рациональную дробь на сумму простейших дробей либо применить формулу интегрирования по частям.

Вычислим 2-м способом.

Положим $u=t,\ \ dv=\frac{tdt}{(t^2-9)^2}$.

Тогда

$$du=dt,\ \ v=\int\frac{tdt}{(t^2-9)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2-9)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-9)}{(t^2-9)^2}=-\frac{1}{2(t^2-9)}.$$

Получим:

$$-\frac{4}{3}\left(-\frac{t}{2(t^2-9)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t^2-9)}\right)=\frac{2t}{3(t^2-9)}-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2-9}=\frac{2t}{3(t^2-9)}-\frac{1}{9}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C.$$

Заменяем t на $\sqrt{\frac{2+9x^3}{x^3}}$ и окончательно получаем:

$$\frac{2\sqrt{\frac{2+9x^3}{x^3}}}{3\left(\frac{2+9x^3}{x^3}-9\right)}-\frac{1}{9}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{2+9x^3}{x^3}}-3}{\sqrt{\frac{2+9x^3}{x^3}}+3}\right|+C=$$

$$\frac{\sqrt{x^3(2+9x^3)}}{3}-\frac{1}{9}\ln\left(9x^3+1-3\sqrt{x^3(2+9x^3)}\right)+C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int\sqrt{x^2-25}dx$ разными способами.

Решение. *1-й способ.* Для вычисления интеграла используем формулу интегрирования по частям. Положим $u=\sqrt{x^2-25},\ \ dv=dx.$ Тогда $du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-25}},\ \ v=x.$

Имеем:

$$\int\sqrt{x^2-25}dx=x\sqrt{x^2-25}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-25}}=x\sqrt{x^2-25}-\int\frac{(x^2-25)+25}{\sqrt{x^2-25}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2-25}-\int\sqrt{x^2-25}dx-25\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}=$$

$$=x\sqrt{x^2-25}-\int\sqrt{x^2-25}dx-25\ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right|.$$

В правой части этого равенства получили исходный интеграл. Найдем его из уравнения

$$\int\sqrt{x^2-25}dx=x\sqrt{x^2-25}-\int\sqrt{x^2-25}dx-25\ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right|.$$

$$\int\sqrt{x^2-25}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-25}-\frac{25}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right|+C.$$

2-й способ. Для вычисления интеграла применим тригонометрическую подстановку $x=\frac{5}{\cos t}$.

Тогда $dx = \frac{5\sin t}{\cos^2 t}dt,\ \ t = \arccos\frac{5}{x}.$

Интеграл примет вид:

$$\int\sqrt{x^2-25}dx = \int\sqrt{\frac{25}{\cos^2 t}-25}\,\frac{5\sin t}{\cos^2 t}dt = \int\frac{25\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \int\frac{25\sin t}{\cos t}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = 25\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = 25\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^4 t}dt =$$

$$= 25\int\frac{\sin^2 t d\sin t}{(\cos^2 t)^2} = 25\int\frac{\sin^2 t d\sin t}{(1-\sin^2 t)^2} = \left|\sin t = y\right| = 25\int\frac{y^2dy}{(1-y^2)^2}.$$

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью. Разложим ее на сумму простейших дробей:

$$\frac{y^2}{(1-y^2)^2} = \frac{y^2}{(1-y)^2(1+y)^2} = \frac{A}{1-y}+\frac{B}{(1-y)^2}+\frac{C}{1+y}+\frac{D}{(1+y)^2}.$$

$$A(1-y)(1+y)^2+B(1+y)^2+C(1+y)(1-y)^2+D(1-y)^2 = y^2. \qquad (19.33)$$

Полагая $y=1,$ получаем $4B=1,\ \ B=\frac{1}{4}.$

Полагая $y=-1,$ получаем $4D=1,\ \ D=\frac{1}{4}.$

Находим производную от обеих частей равенства (19.33):

$$-A(1+y)^2+2A(1-y)(1+y)+2B(1+y)+C(1-y)^2-2C(1+y)(1-y)-$$
$$-2D(1-y)=2y.$$

Полагая $y=1,$ получим $-4A+4B=2,\ \ A=-\frac{1}{4}.$

Полагая $y=-1,$ получим $4C-4D=-2,\ \ C=-\frac{1}{4}.$

Тогда разложение данной дроби на простейшие имеет вид:

$$\frac{-\frac{1}{4}}{1-y}+\frac{\frac{1}{4}}{(1-y)^2}-\frac{\frac{1}{4}}{1+y}+\frac{\frac{1}{4}}{(1+y)^2}.$$

Приходим к интегралу

$$\frac{25}{4}\left(\int\left(\frac{-1}{1-y}+\frac{1}{(1-y)^2}-\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}\right)dy\right)=$$

$$=\frac{25}{4}\left(\ln\left|1-y\right|+\frac{1}{1-y}-\ln\left|1+y\right|-\frac{1}{1+y}\right)+C=$$

$$=\frac{25}{4}\left(\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+\frac{2y}{1-y^2}\right)+C=-\frac{25}{4}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|+\frac{25y}{2(1-y^2)}+C.$$

Возвращаемся к заданной переменной, заменяем y на $\sin t,$ где $t=\arccos\frac{5}{x}.$ Тогда

$$y=\sin\arccos\frac{5}{x}=\sqrt{1-\cos^2\arccos\frac{5}{x}}=\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}.$$

Получаем:

$$-\frac{25}{4}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}+1}{\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}-1}\right|+\frac{\frac{25\sqrt{x^2-25}}{x}}{2\left(1-\frac{x^2-25}{x^2}\right)}+C=-\frac{25}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-25}+x}{\sqrt{x^2-25}-x}\right|+$$

$$+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-25}+C=-\frac{25}{4}\ln\left|\frac{(\sqrt{x^2-25}+x)^2}{x^2-25-x^2}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-25}+C=$$

$$=-\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-25}+x}{5}\right)^2+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-25}+C=$$

$$=-\frac{25}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-25}+x\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-25}+\frac{25}{2}\ln 5+C.$$

Присоединяя $\frac{25}{2}\ln 5$ к произвольной постоянной C, получаем:

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-25}-\frac{25}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-25}+x\right|+C.$$

3-й способ. Запишем подынтегральное выражение в виде дифференциального бинома (19.32)

$$x^0(-25+x^2)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Тогда $m=0,\ \ n=2,\ \ p=\frac{1}{2},\ \ s=2,\ \ \frac{m+1}{n}=\frac{1}{2},\ \ \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ – целое число. Следовательно, имеем третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Используем подстановку $\frac{x^2-25}{x^2}=t^2.$ Тогда

$$t=\frac{\sqrt{x^2-25}}{x},\quad x^2-25=x^2t^2,\quad x^2(1-t^2)=25,\quad x^2=\frac{25}{1-t^2}=25(1-t^2)^{-1},$$

$x = 5(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$, $dx = 5\left(-\frac{1}{2}\right)(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2t)\ dt = 5t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}dt$.

$x^2 - 25 = x^2 \cdot t^2 = 25t^2(1-t^2)^{-1}$.

Интеграл преобразуется к виду

$$\int \left(25t^2(1-t^2)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} 5t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} dt = 25\int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2} = 25\int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2}.$$

Для вычисления последнего интеграла применим формулу (19.20) интегрирования по частям.

Положим $u = t$, $dv = \frac{tdt}{(t^2-1)^2}$. Тогда $du = dt$, $v = -\frac{1}{2(t^2-1)}$. Получаем:

$$25\left(-\frac{t}{2(t^2-1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-1}\right) = -\frac{25t}{2(t^2-1)} - \frac{25}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C.$$

Подставляем $t = \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}$ и после преобразований получаем ответ:

$$\frac{-\dfrac{25\sqrt{x^2-25}}{x}}{2\left(\left(\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x}\right)^2 - 1\right)} - \frac{25}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-25}+x}{\sqrt{x^2-25}-x}\right| + C =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-25} - \frac{25}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-25}+x\right| + C.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите интеграл от дифференциального бинома:

1) $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2 dx$; 2) $\int \sqrt[3]{x}(1+\sqrt[6]{x})^3 dx$;

3) $\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[4]{x^3}} dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[12]{x}-1\right)}$.

1.2. Найдите интеграл от дифференциального бинома:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$; 2) $\int \sqrt[3]{x\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}dx$.

1.3. Найдите интеграл от дифференциального бинома:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(3+4x^2)^3}}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$.

II уровень

2.1. Найдите интеграл от дифференциального бинома:

1) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(4+x^2)^3}}$; 3) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;

4) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$; 5) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(2-3x^2)^3}}$; 6) $\int \sqrt[4]{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^3} dx$;

7) $\int \frac{\sqrt{x^4-9}}{x}dx$; 8) $\int \frac{\sqrt{9+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; 9) $\int \frac{x^4}{\sqrt{(3-x^2)^3}} dx$;

10) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$; 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$; 12) $\int \frac{\sqrt{x^2-36}}{x^4}dx$.

III уровень

3.1. Найдите интеграл от дифференциального бинома:

1) $\int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^4}}{x^2\sqrt[20]{x^7}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 3) $\int \sqrt{121-x^2}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)}}{x^2\sqrt[8]{x}}dx$; 5) $\int \frac{\sqrt{1-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx$; 6) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\sqrt[3]{x}}dx$;

7) $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$; 8) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}dx$; 9) $\int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}dx$.

3.2. Найдите интеграл разными способами:

1) $\int \sqrt{1-x^2}dx$; 2) $\int \sqrt{x^2+4}dx$; 3) $\int \sqrt{x^2-9}dx$.

20. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

20.1. Понятие определенного интеграла и его свойства

Пусть на отрезке $[a; b]$, (всюду $a < b$) определена непрерывная ограниченная функция $f(x)$. Произвольным образом разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков точками $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$. Полученные отрезки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … $[x_{n-1}, x_n]$ будем называть частичными. Длину k-го частичного отрезка $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1, n}$, обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку c_k, $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$ (рис. 20.1) и вычислим значение функции в этой точке, т. е. $f(c_k)$.

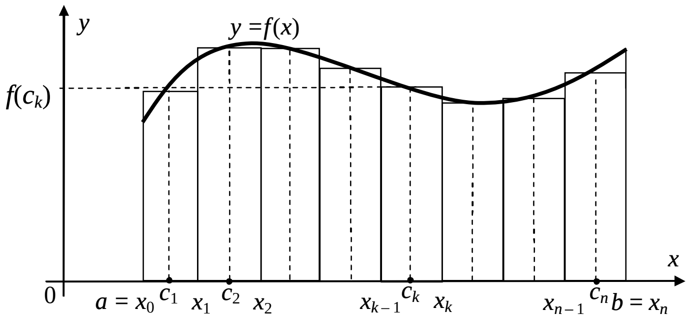


Рис. 20.1

Для каждого k, $k = \overline{1, n}$, найдем произведение $f(c_k)\Delta x_k$ и составим сумму:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \quad (20.1)$$

Сумма (20.1) называется ***интегральной суммой*** функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Обозначим через $\Delta = \max \Delta x_k$, $k = \overline{1, n}$, длину наибольшего частичного отрезка.

Будем рассматривать всевозможные разбиения отрезка $[a; b]$ при условии, что $n \to \infty$ и $\Delta \to 0$.

Определение. Если существует предел интегральной суммы (20.1) при $\Delta \to 0$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек c_k на каждом частичном отрезке, то этот предел называется ***определенным интегралом*** функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \quad (20.2)$$

Числа a и b в формуле (20.2) называются соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования***. Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, x – ***переменной интегрирования***, отрезок $[a; b]$ – ***отрезком интегрирования***.

Функция $f(x)$, для которой существует интеграл (20.2), называется ***интегрируемой на отрезке***.

Классы интегрируемых функций:

1) непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция интегрируема;

2) ограниченная на отрезке $[a; b]$ функция, имеющая лишь конечное число точек разрыва, интегрируема;

3) монотонная ограниченная функция интегрируема.

Если $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a; b]$, то фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$, называется ***криволинейной трапецией*** (рис. 20.1).

Геометрический смысл определенного интеграла: определенный интеграл (20.2) от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

Физический смысл определенного интеграла: пусть материальная точка M движется вдоль числовой оси со скоростью $V(t)$, $V(t) \ge 0$. Тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определенному интегралу от скорости:

$$S=\int_a^b V(t)dt.$$

Свойства определенного интеграла

1) $\int_a^b dx=b-a;$

2) $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx,\ c=const;$

3) $\int_a^b \left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx,$

равенства 2 и 3 в совокупности называются ***свойством линейности***;

4) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx;$

5) $\int_a^a f(x)dx=0;$

6) значение интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt;$$

7) ***свойство аддитивности***: при любом взаимном расположении чисел a, b, c имеет место формула:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;$$

8) если $f_1(x)\le f_2(x)$ при $x\in[a;\ b]$, то $\int_a^b f_1(x)dx\le\int_a^b f_2(x)dx;$

9) если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, то верна оценка

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a);$$

10) $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx;$

11) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то существует точка $c\in[a;\ b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a);$$

12) если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0;$$

13) если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx;$$

14) если $f(x)$ – периодическая функция периода T, то при любом $a\in\mathbf{R}$ верно равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

Предполагается, что все интегралы, приведенные в свойствах 1–14, существуют.

Пример 1. Вычислить по определению интеграл $I=\int_0^b x^2dx.$

Решение. Функция $f(x)=x^2$ интегрируема на отрезке $[0;\ b]$, поскольку она непрерывна. Разобьем отрезок $[0;\ b]$ на n частей точками $x_0=0,\ x_1=h,\ x_2=2h,\ \mathbf{K},\ x_n=b=nh,$ где $h=\frac{b}{n}=\Delta x_k,\ k=\overline{1,\ n}.$

В качестве точек c_k возьмем крайние правые точки каждого частичного отрезка $[x_{k-1},\ x_k]$, т. е.

$c_k = kh, \;\; k = \overline{1, n}.$

Вычислим значения функции $f(c_k) = c_k^2 = k^2h^2 = k^2 \dfrac{b^2}{n^2}.$

Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Тогда получаем:

$$\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Имеем:

$$I = \int_0^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{b^3}{3}.$$

Пример 2. Доказать, что функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, \text{ если } x - \text{иррациональное число,} \end{cases}$$

не интегрируема на отрезке [0; 1].

Решение. Разобьем отрезок [0; 1] произвольным образом на n частичных отрезков. При составлении интегральной суммы выберем в качестве точек c_k рациональные числа. Тогда $f(c_k) = 1.$

Получаем:

$$S_{n_1} = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = 1 - 0 = 1.$$

Затем составим интегральную сумму, выбрав в качестве точек c_k иррациональны числа. Тогда $f(c_k) = 0.$ Получаем:

$$S_{n_2} = \sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right)\Delta x_k = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_k = 0.$$

Таким образом, интегральные суммы могут принимать как значение, равное 1, так и значение, равное 0. Следовательно, предел интегральных сумм не существует, т. е. функция Дирихле не интегрируема на отрезке [0; 1], хотя и ограничена на всей числовой прямой.

Пример 3. Сравнить интегралы $\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx$ и $\int_0^1 x^3 dx.$

Решение. Так как $\sqrt[3]{x} > x^3$ при $0 < x < 1$ (рис. 20.2), то по свойству сравнения определенных интегралов (см. 8-е свойство) имеем:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx > \int_0^1 x^3 dx.$$

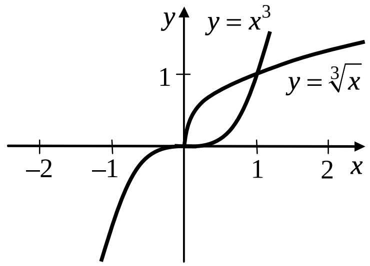


Рис. 20.2

Пример 4. Доказать неравенство $0 \le \int_0^p \dfrac{\sin x dx}{x^2+5} < \dfrac{p}{5}.$

Решение. Так как $0 \le \dfrac{\sin x}{x^2+5} < \dfrac{1}{5}$ при $0 < x < p$, то по 9-му свойству определенных интегралов имеем:

$$0 \le \int_0^p \frac{\sin x dx}{x^2+5} < \frac{p}{5}.$$

Пример 5. Оценить интеграл $\int_0^{\frac{p}{2}} e^{\cos^2 x}dx.$

Решение. Так как $0 \le \cos^2 x \le 1$ при $0 < x < \dfrac{p}{2}$, то $1 \le e^{\cos^2 x} \le e.$

Тогда по 8-му свойству определенных интегралов получаем:

$$\frac{p}{2} \le \int_0^{\frac{p}{2}} e^{\cos^2 x}dx \le \frac{ep}{2}.$$

Пример 6. Вычислить определенный интеграл:

1) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^2 \sin x}{x^4+1}dx;$ 2) $\int\limits_{0}^{4p} \sin^3 xdx;$ 3) $\int\limits_{-3}^{3}(x^2+1)dx.$

Решение. 1) Так как подынтегральная функция $\frac{x^2 \sin x}{x^4+1}$ является нечетной, а отрезок интегрирования симметричен относительно начала координат, то $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^2 \sin x}{x^4+1}dx = 0.$

2) Функция $\sin^3 x$ является периодической с периодом $2p$. Используем 7-е и 14-е свойства интеграла:

$$\int\limits_{0}^{4p} \sin^3 xdx = \int\limits_{0}^{2p} \sin^3 xdx + \int\limits_{2p}^{4p} \sin^3 xdx = 2\int\limits_{0}^{2p} \sin^3 xdx = 2\int\limits_{-p}^{p} \sin^3 xdx = 0.$$

Последний интеграл равен нулю в силу нечетности функции $\sin^3 x$.

3) Функция x^2+1 является четной, а отрезок интегрирования симметричен относительно начала координат, поэтому

$$\int\limits_{-3}^{3}\left(x^2+1\right)dx = 2\int\limits_{0}^{3}\left(x^2+1\right)dx = 2\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^3 = 2\left(\frac{3^3}{3}+3\right) = 2(9+3) = 24.$$

Задания

I уровень

1.1. Составьте интегральные суммы и, перейдя к пределу, найдите интеграл. При составлении интегральных сумм значение функции вычислите:

1) в правом конце каждого частичного отрезка;

2) в левом конце каждого частичного отрезка:

1) $\int\limits_{0}^{3}\left(x+2\right)dx;$ 2) $\int\limits_{0}^{1} x^3dx;$ 3) $\int\limits_{0}^{1} e^x dx.$

У к а з а н и я. Воспользуйтесь равенствами:

1. $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}.$

2. $1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

3. Сумма n членов геометрической прогрессии равна $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$

II уровень

2.1. Сравните интегралы:

1) $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}dx$ и $\int\limits_{0}^{1} x^2dx;$ 2) $\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{0}\cos^3 xdx$ и $\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{0}\cos^5 xdx;$

3) $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}}\sin xdx$ и $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}}\sin^3 xdx;$ 4) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} x^2dx$ и $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} x^3dx;$

5) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{x}$ и $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{x^2};$ 6) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ и $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$

7) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{x};$ 8) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sin x}{x}dx$ и $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sin x}{x^2}dx.$

2.2. Вычислите интеграл, используя свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_{-p}^{p}\sin 5xdx;$ 2) $\int\limits_{-p}^{p}\sin^7 2xdx;$ 3) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\arcsin x}{x^2+1}dx;$

4) $\int\limits_{-\frac{p}{4}}^{\frac{p}{4}}\mathrm{tg}^3 xdx;$ 5) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2\sin x}{\sqrt{1+x^2}}dx;$ 6) $\int\limits_{-4}^{4} x^3\sqrt{2+3x^2}dx;$

7) $\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\sin^2 x\ln\frac{3+x}{3-x}dx;$ 8) $\int\limits_{-p}^{p}\sin 2x\cos 4xdx;$ 9) $\int\limits_{-3}^{3}\mathrm{arctg}xdx.$

III уровень

3.1. Докажите неравенство:

1) $0 \le \int\limits_0^p \frac{\sin x dx}{\sqrt{x^2+4}} < \frac{p}{2}$; 2) $1 \le \int\limits_0^1 e^{x^3} dx \le e$;

3) $\frac{2p}{\sqrt{10}} \le \int\limits_0^{2p} \frac{dx}{\sqrt{7+3\sin x}} \le p$; 4) $\frac{p}{8} \le \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{4-\cos^2 x} \le \frac{p}{6}$.

3.2. Оцените интеграл:

1) $\int\limits_0^1 e^{x^2} dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$;

3) $\int\limits_0^{2p} \frac{dx}{\sqrt[3]{6+2\cos x}}$; 4) $\int\limits_0^{p} \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

20.2. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования по частям и замены переменной

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – ее первообразная на этом отрезке, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \qquad (20.3)$$

Формула (20.3) называется ***формулой Ньютона-Лейбница***.

Интегрирование по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – непрерывные функции, которые имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du(x). \qquad (20.4)$$

Замена переменной в определенном интеграле

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция, а функция $x = j(t)$ и ее производная $j'(t)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, где $a = j(a)$, $b = j(b)$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(j(t))j'(t)dt. \qquad (20.5)$$

Вместе с заменой переменной в определенном интеграле заменяются пределы интегрирования.

Пример 1. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^{\frac{p}{6}} \cos x dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$;

3) $\int\limits_2^3 \frac{x^3+2x+3}{x-1} dx$; 4) $\int\limits_1^2 \frac{3x+2}{x^2(x+1)} dx$.

Решение. 1) Применим формулу Ньютона-Лейбница (20.3):

$$\int\limits_0^{\frac{p}{6}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{p}{6}} = \sin\frac{p}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

2) Подынтегральная функция $\frac{1}{4+x^2}$ является четной. Поэтому

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2} = 2\int\limits_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = 2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{p}{4} - 0 = \frac{p}{4}.$$

3) Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Выделим целую часть, разделив ее числитель на знаменатель по правилу деления многочленов:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+2x-1 & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & \overline{x^2+x+3} \\ -\,x^2+2x-1 & \\ \underline{x^2-x} & \\ -\,3x-1 & \\ \underline{3x-3} & \\ 2 & \end{array}$$

Тогда

$$\int_2^3 \frac{x^3+2x-1}{x-1}dx = \int_2^3\left(x^2+x+3+\frac{2}{x-1}\right)dx =$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x+2\ln|x-1|\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$=\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+3\cdot 3+2\ln|3-1|-\left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+3\cdot 2+2\ln|\ 2-1\ |\right)=$$

$$=9+\frac{9}{2}+9+2\ln 2-\frac{8}{3}-2-6-2\ln 1=11\frac{5}{6}+2\ln 2.$$

4) Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью. Разложим ее на сумму простейших дробей:

$$\frac{3x+2}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}.$$

Найдем коэффициенты A, B, C из равенства

$$3x+2=Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2.$$

Полагая $x=0$, получаем $B=2$. При $x=-1$, получаем $C=-1$. Полагая $x=1$, получаем $5=2A+2B+C$. Далее находим: $2A=5-2B-C$, $2A=2$, т. е. $A=1$.

Тогда

$$\int_1^2\frac{3x+2}{x^2(x+1)}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\ln|x|-\frac{2}{x}-\ln|x+1|\right)\Bigg|_1^2=\ln 2-1-$$

$$-\ln 3-\left(\ln 1-2-\ln 2\right)=\ln 2-1-\ln 3+2+\ln 2=1+2\ln 2-\ln 3=1+\ln\frac{4}{3}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям:

1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x-3)\cos\frac{2x-1}{3}dx;$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\,dx;$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{arctg}\,x dx;$ 4) $\displaystyle\int_0^{2p}e^{2x}\sin x dx.$

Решение. 1) По формуле (20.4) имеем:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x-3)\cos\frac{2x-1}{3}dx=\left|\begin{array}{l} u=x-3,\ du=dx,\\ dv=\cos\dfrac{2x-1}{3}dx,\\ v=\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{2x-1}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{3}{2}(x-3)\sin\frac{2x-1}{3}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}-\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sin\frac{2x-1}{3}dx=\frac{3}{2}\left(-\sin 1+2\frac{1}{2}\sin 0\right)+$$

$$+\frac{9}{4}\cos\frac{2x-1}{3}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=-\frac{3}{2}\sin 1+\frac{9}{4}\left(\cos 1-\cos 0\right)=-\frac{3}{2}\sin 1+\frac{9}{4}\cos 1-\frac{9}{4}.$$

2) Используем формулу (20.4):

$$\int_0^1\arccos x dx=\left|\begin{array}{l} u=\arccos x,\ du=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\\ dv=dx,\ v=x\end{array}\right|=x\arccos x\Big|_0^1+$$

$$+\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=1.$$

3) Подынтегральная функция является четной, поэтому

$$\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{arctg}\,xdx=2\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,xdx.$$

Применим формулу (20.4) интегрирования по частям. Пусть $u=\mathrm{arctg}\,x$, $dv=xdx$, $du=\dfrac{dx}{1+x^2}$, $v=\dfrac{x^2}{2}$.

Получим:

$$2\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,xdx=x^2\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^2}=1\cdot\mathrm{arctg}1-0-\int_0^1\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{p}{4}-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{p}{4}-\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{p}{4}-x\Big|_0^1+\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1=$$

$$=\frac{p}{4}-1+\mathrm{arctg}1-\mathrm{arctg}\,0=\frac{p}{4}-1+\frac{p}{4}=\frac{p}{2}-1.$$

4) Используем формулу (20.4) интегрирования по частям дважды:

$$\int\limits_0^{2p} e^{2x}\sin xdx = \left|\begin{matrix} u=e^{2x}, & dv=\sin xdx, \\ du=2e^{2x}dx, & v=-\cos x\end{matrix}\right| = -e^{2x}\cos x\Big|_0^{2p} + 2\int\limits_0^{2p} e^{2x}\cos xdx =$$

$$= -e^{4p}\cos 2p + e^0\cos 0 + 2\int\limits_0^{2p} e^{2x}\cos xdx = 1-e^{4p} + 2\int\limits_0^{2p} e^{2x}\cos xdx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u=e^{2x}, & dv=\cos xdx, \\ du=2e^{2x}dx, & v=\sin x\end{matrix}\right| = 1-e^{4p} + 2\left(e^{2x}\sin x\Big|_0^{2p} - 2\int\limits_0^{2p} e^{2x}\sin xdx \right) =$$

$$= 1-e^{4p} + 2\left(e^{4p}\sin 2p - e^0\sin 0 - 2\int\limits_0^{2p} e^{2x}\sin xdx \right) = 1-e^{4p} - 4\int\limits_0^{2p} e^{2x}\sin xdx.$$

Таким образом, получили равенство

$$\int\limits_0^{2p} e^{2x}\sin xdx = 1-e^{4p} - 4\int\limits_0^{2p} e^{2x}\sin xdx.$$

Из него находим:

$$5\int\limits_0^{2p} e^{2x}\sin xdx = 1-e^{4p}.$$

$$\int\limits_0^{2p} e^{2x}\sin xdx = \frac{1}{5}\left(1-e^{4p}\right).$$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл, используя формулу замены переменной:

1) $\int\limits_1^9 \frac{\sqrt{x}dx}{2+\sqrt{x}};$ 2) $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}dx;$ 3) $\int\limits_{\frac{\sqrt{7}}{2}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}};$

4) $\int\limits_0^6 \sqrt{6x-x^2}dx;$ 5) $\int\limits_1^{e^2} \frac{2+\ln x}{x}dx;$ 6) $\int\limits_0^5 \frac{e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}dx.$

Решение. 1) Сделаем подстановку $x=t^2$ $(t>0)$, тогда $dx=2tdt$.

Определим новые пределы интегрирования. Для этого в равенство замены переменной поочередно подставим $x=1$ (заданный нижний предел интегрирования) и $x=9$ (заданный верхний предел): если $x=1$, то $t^2=1$, $t=1$; если $x=9$, то $t^2=9$, $t=3$.

Используем формулу (20.5) замены переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_1^9 \frac{\sqrt{x}dx}{2+\sqrt{x}} = \int\limits_1^3 \frac{t\cdot 2tdt}{2+t} = 2\int\limits_1^3 \frac{t^2}{t+2}dt.$$

Получили интеграл от неправильной рациональной дроби. Выделим целую часть в подынтегральном выражении:

$$2\int\limits_1^3 \left(t-2+\frac{4}{t+2}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2}-2t+4\ln|t+2|\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= 2\left(\frac{9}{2}-6+4\ln 5-\left(\frac{1}{2}-2+4\ln 3\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{9}{2}-6-\frac{1}{2}+2+4\ln 5-4\ln 3\right) = 8\ln\frac{5}{3}.$$

2) *1-й способ*. Используем метод подстановки. Положим $x=4\sin t$, тогда $dx=4\cos tdt$.

Найдем новые пределы интегрирования: если $x=0$, то $t=0$; если $x=4$, то $t=\frac{p}{2}$.

Следовательно,

$$\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{16-16\sin^2 t}\cdot 4\cos tdt = 16\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt =$$

$$= 16\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 tdt = 16\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 8\int\limits_0^{\frac{p}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= 8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{p}{2}} = 8\cdot\frac{p}{2} = 4p.$$

2-й способ. Используем формулу (20.4) интегрирования по частям.

Положим $u=\sqrt{16-x^2}$, $dv=dx$, тогда $du=\frac{-xdx}{\sqrt{16-x^2}}$, $v=x$.

Получаем:

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx = x\sqrt{16-x^2}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{-x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = -\int_0^4 \frac{(16-x^2)-16}{\sqrt{16-x^2}}dx =$$

$$= -\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx + 16\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = -\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx + 16\arcsin\frac{x}{4}\Big|_0^4 =$$

$$= -\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx + 16(\arcsin 1 - \arcsin 0) = -\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx + 8p.$$

Найдем искомый интеграл из полученного равенства

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2} = -\int_0^4 \sqrt{16-x^2} + 8p.$$

Выражаем:

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2} = 4p.$$

3) Применим подстановку $x^2 = \cos^2 t + 4\sin^2 t.$

Тогда $2xdx = -2\cos t\sin tdt + 8\sin t\cos tdt,$ т. е. $2xdx = 6\sin t\cos tdt,$ $xdx = 3\sin t\cos tdt.$

$x^2 - 1 = \cos^2 t + 4\sin^2 t - 1 = \cos^2 t - 1 + 4\sin^2 t = -\sin^2 t + 4\sin^2 t = 3\sin^2 t.$

$4 - x^2 = 4 - \cos^2 t - 4\sin^2 t = 4(1-\sin^2 t) - \cos^2 t = 4\cos^2 t - \cos^2 t = 3\cos^2 t.$

$\sqrt{(x^2-1)(4-x^2)} = \sqrt{3\sin^2 t \cdot 3\cos^2 t} = 3\sin t\cos t.$

Таким образом, подынтегральное выражение примет вид:

$$\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}} = \frac{3\sin t\cos tdt}{3\sin t\cos t} = dt.$$

Определим новые пределы интегрирования: если $x = \frac{\sqrt{7}}{2},$ то $\frac{7}{4} = \cos^2 t + 4\sin^2 t,$ т. е. $\frac{7}{4} = 1 - \sin^2 t + 4\sin^2 t,$ $3\sin^2 t = \frac{3}{4},$ $\sin^2 t = \frac{1}{4},$ $\sin t = \frac{1}{2}.$ Находим $t = \frac{p}{6};$

если $x = \sqrt{\frac{5}{2}},$ то $\frac{5}{2} = \cos^2 t + 4\sin^2 t,$ т. е. $\frac{5}{2} = 1 - \sin^2 t + 4\sin^2 t,$ $3\sin^2 t = \frac{3}{2},$ $\sin^2 t = \frac{1}{2},$ $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ Находим $t = \frac{p}{4}.$

Получаем:

$$\int_{\frac{\sqrt{7}}{2}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}} = \int_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{4}} dt = t\Big|_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{4}} = \frac{p}{4} - \frac{p}{6} = \frac{p}{12}.$$

4) В подкоренном выражении выделим полный квадрат:

$6x - x^2 = 9 - (x^2 - 6x + 9) = 9 - (x-3)^2.$

Применим подстановку $x - 3 = 3\sin t,$ $x = 3 + 3\sin t,$ $dx = 3\cos tdt.$

Определим новые пределы интегрирования: если $x = 0,$ то $-3 = 3\sin t,$ $\sin t = -1,$ $t = -\frac{p}{2};$ если $x = 6,$ то $6 - 3 = 3\sin t,$ $\sin t = 1,$ $t = \frac{p}{2}.$

Получаем:

$$\int_0^6 \sqrt{6x-x^2}dx = \int_0^6 \sqrt{9-(x-3)^2}dx = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos tdt =$$

$$= 9\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \cos^2 tdt = 9\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{9}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sin p - \left(-\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sin(-p)\right)\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right) = \frac{9p}{2}.$$

5) *1-й способ*. Используем метод замены переменной. Положим $2 + \ln x = t.$ Тогда $dt = \frac{dx}{x}.$

Находим новые пределы интегрирования, используя равенство замены переменной: если $x = 1,$ то $t = 2 + \ln 1 = 2;$ если $x = e^2,$ то $t = 2 + \ln e^2 = 4.$

Получим:

$$\int_1^{e^2} \frac{2+\ln x}{x}dx = \int_2^4 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_2^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 6.$$

2-й способ. Используем метод поднесения под знак дифференциала:

$$\int_1^{e^2}\frac{2+\ln x}{x}dx=\int_1^{e^2}(2+\ln x)\,d(2+\ln x)=\left.\frac{(2+\ln x)^2}{2}\right|_1^{e^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(2+\ln e^2\right)^2-\left(2+\ln 1\right)^2\right)=\frac{1}{2}(16-4)=6.$$

Заметим, что в случае использования метода поднесения под знак дифференциала не нужно изменять пределы интегрирования, а поэтому, как правило, он является более рациональным.

6) Применим подстановку:

$$\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}=t,\ \text{тогда}\ \frac{5-x}{5+x}=t^2.$$

Выразим переменную x через t:

$$5-x=t^2(5+x),\quad x(t^2+1)=5-5t^2,\quad x=\frac{5-5t^2}{t^2+1}=\frac{5(1-t^2)}{t^2+1},$$

$$dx=5\cdot\frac{-2t(t^2+1)-2t(1-t^2)}{(t^2+1)^2}dt=\frac{-20tdt}{(t^2+1)^2}.$$

$$(5+x)\sqrt{25-x^2}=(5+x)\sqrt{(5-x)(5+x)}=(5+x)^2\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}.$$

$$5+x=5+\frac{5(1-t^2)}{t^2+1}=\frac{5(t^2+1+1-t^2)}{t^2+1}=\frac{10}{t^2+1}.$$

Определим новые пределы интегрирования: если $x=0$, то $t=1$; если $x=5$, то $t=0$.

Используя формулу (20.5) замены переменной в определенном интеграле, получаем:

$$\int_0^5\frac{e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}dx=\int_0^5\frac{e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}}{(5+x)^2\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}dx=\int_1^0\frac{e^t}{\frac{100t}{(t^2+1)^2}}\cdot\frac{-20tdt}{(t^2+1)^2}=$$

$$-\frac{1}{5}\int_1^0 e^t dt=-\frac{1}{5}e^t\Big|_1^0=-\frac{1}{5}\left(e^0-e^1\right)=-\frac{1}{5}(1-e)=\frac{e-1}{5}.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница:

1) $\int_{p/4}^{p/3}\left(\sin x+\sin^2 x\right)dx$; 2) $\int_{\ln 3}^{\ln 5}e^x dx$; 3) $\int_1^2\frac{3-2\sqrt{x}+8x-x^2}{x}dx.$

4) $\int_0^4\left(\sqrt{x}+2^x\right)dx$; 5) $\int_3^4\frac{dx}{25-x^2}$; 6) $\int_{p/6}^{p/3}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$;

7) $\int_1^e\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$; 8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{dx}{1+x^2}$; 9) $\int_0^p\left(\cos^3 x-\frac{3}{4}\cos x\right)dx.$

II уровень

2.1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$; 2) $\int_{-2}^{-1}\frac{tg(x+2)}{\cos^2(x+2)}dx$; 3) $\int_p^{2p}\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$;

4) $\int_{\frac{1}{p}}^{\frac{2}{p}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$; 5) $\int_p^{2p}\frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; 6) $\int_0^{\frac{p}{3}}\cos^3 x\sin 2x dx$;

7) $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$; 8) $\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x^2-x}$; 9) $\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx$;

10) $\int_3^5\frac{x^2+3}{x-2}dx$; 11) $\int_0^{\frac{p}{4}}\sin 5x\cos 3x dx$; 12) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$

2.2. Вычислите определенный интеграл, используя формулу замены переменной:

1) $\int_{-1}^7\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; 2) $\int_1^4\frac{dx}{3+2\sqrt{x}}$; 3) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\operatorname{arctg}2x+x}{1+x^2}dx$;

4) $\int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{12}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$; 5) $\int\limits_{2}^{33} \frac{xdx}{\sqrt[5]{x-1}}$; 6) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arccos x)^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

7) $\int\limits_{3}^{8} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}(x+2)}dx$; 8) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{9}} \frac{dx}{(9x+1)\sqrt{x}}$; 9) $\int\limits_{e-1}^{e^2-1} \frac{1+\ln(x+1)}{x+1}dx$.

2.3. Вычислите определенный интеграл, используя формулу интегрирования по частям:

1) $\int\limits_{-1}^{0} xe^{-x}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} x^3\sin x dx$;

3) $\int\limits_{1}^{e^2} \sqrt{x}\ln^2 x dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\frac{p}{4}} x\,\mathrm{tg}^2 x dx$;

5) $\int\limits_{\frac{p}{3}}^{\frac{p}{2}} \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$; 6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

7) $\int\limits_{0}^{1} (\arcsin x)^2 dx$; 8) $\int\limits_{0}^{p} (2x^2+2x+5)\cos 2x dx$;

9) $\int\limits_{2}^{3} (x-1)^2\ln^2(x-1)dx$; 10) $\int\limits_{-2}^{0} (x^2+5x+6)\sin 3x dx$.

III уровень

3.1. Вычислите определенный интеграл методом замены переменной:

1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; 2) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

3) $\int\limits_{\frac{p}{2}}^{p} 2^8\sin^2 x\cos^6 x dx$; 4) $\int\limits_{1}^{64} \frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[3]{x^2}}dx$;

5) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$; 6) $\int\limits_{2}^{\frac{11}{8}} \frac{18\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x-1}}dx$;

7) $\int\limits_{0}^{p} 2^4\sin^4 x\cos^4 x dx$; 8) $\int\limits_{1}^{2} x(1-x)^{17}dx$;

9) $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{4\sin x-5\cos x-5}{\cos x+1}dx$; 10) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}dx$;

11) $\int\limits_{10}^{16} \sqrt{\frac{7-x}{x-19}}dx$; 12) $\int\limits_{0}^{\frac{p}{4}} \frac{4\mathrm{tg}x-2}{2-\sin 2x+6\cos^2 x}dx$;

13) $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}dx$; 14) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{9-x^2}dx$;

15) $\int\limits_{0}^{1} e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$; 16) $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$;

17) $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$; 18) $\int\limits_{2\mathrm{arctg}1}^{2\mathrm{arctg}3} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$;

19) $\int\limits_{2}^{65} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x-1}+1\right)}dx$;

20) $\int\limits_{-\frac{p}{4}}^{0} \frac{7\mathrm{tg}\,x-1}{3\sin^2 x-2\sin x\cos x-4\cos 2x}dx$.

3.2. Вычислите определенный интеграл, используя указанную замену переменной:

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(2+x^4)}$, $x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t-1}}$; 2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$, $x=\cos t$;

3) $\displaystyle\int_0^p \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$, $x=p-t$; 4) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$, $t=\sqrt{e^x-1}$.

3.3. Вычислите интеграл разными способами:

1) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^2+4}\,dx$; 3) $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{x^2-16}\,dx$.

20.3. Геометрические и физические приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$ $(f(x)\ge 0)$, слева и справа, соответственно, прямыми $x=a$ и $x=b$, снизу – отрезком $[a;\ b]$ оси Ox (рис. 20.3), выражается формулой

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (20.6)$$

Если $f(x)\le 0$ при $x\in[a;\ b]$ (рис. 20.4), то

$$S=-\int_a^b f(x)dx. \qquad (20.7)$$

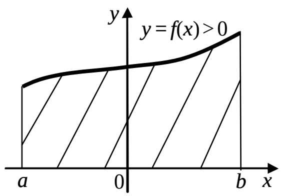


Рис. 20.3

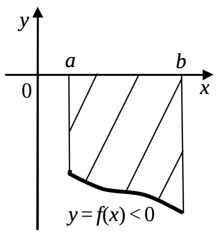


Рис. 20.4

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ и кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, где $f_1(x)\le f_2(x)$ для $x\in[a;\ b]$ (рис. 20.5), выражается формулой

$$S=\int_a^b \big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx. \qquad (20.8)$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, кривой $x=g(y)$ $(g(y)\ge 0)$ и отрезком $[c;\ d]$ оси Oy (рис. 20.6), выражается формулой

$$S=\int_c^d g(y)dy. \qquad (20.9)$$

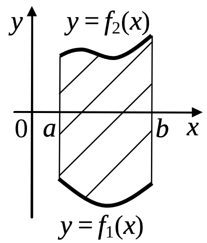


Рис. 20.5

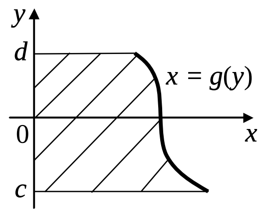


Рис. 20.6

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$ и кривыми $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$, где $g_1(y)\le g_2(y)$ для $y\in[c;\ d]$ (рис. 20.7), выражается формулой

$$S=\int_c^d \big(g_2(y)-g_1(y)\big)dy. \qquad (20.10)$$

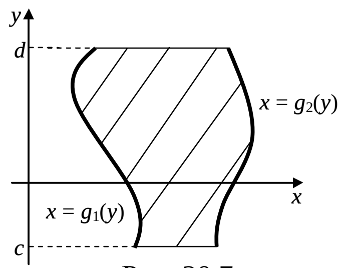


Рис. 20.7

Если криволинейная трапеция ограничена сверху кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \psi(t) \ge 0, \; t \in [\alpha, \; \beta],$$

прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a;\, b]$ оси Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt, \qquad (20.11)$$

где α и β определяются из равенств $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ $(\varphi_1 < \varphi_2)$ (рис. 20.8), причем $\rho(\varphi) \ge 0$ для $\varphi \in [\varphi_1, \, \varphi_2]$, выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (20.12)$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной двумя лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$ для $\varphi \in [\varphi_1, \, \varphi_2]$ (рис. 20.9), выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)\right) d\varphi. \qquad (20.13)$$

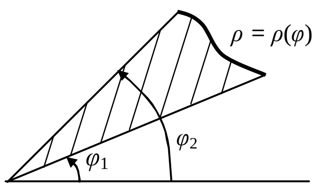


Рис. 20.8

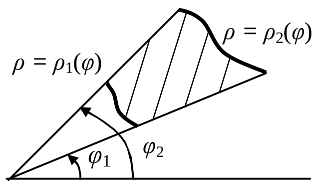


Рис. 20.9

2. Длина дуги кривой

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a;\; b]$, то длина дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, где $x \in [a;\, b]$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (20.14)$$

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$ на отрезке $[c;\, d]$ и функция $x = g(y)$ имеет непрерывную производную для $y \in [c;\, d]$, то длина дуги определяется по формуле

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy. \qquad (20.15)$$

Если кривая задана параметрически на плоскости xOy уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha;\; \beta]$,

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – дифференцируемые функции на $[\alpha;\; \beta]$, причем $\varphi'(t) \ne 0$, и $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, то длина дуги этой кривой, заключенной между двумя точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt. \qquad (20.16)$$

Если кривая задана в пространстве параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \; t \in [\alpha;\; \beta], \\ z = \chi(t), \end{cases}$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\; \beta]$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2 + \left(\chi'(t)\right)^2}\, dt. \qquad (20.17)$$

Если кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1;\; \varphi_2]$, в полярной системе координат, где $\rho = \rho(\varphi)$ – функция, которая имеет непрерывную производную при $\varphi \in [\varphi_1;\; \varphi_2]$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_{j_1}^{j_2} \sqrt{r^2(j) + \left(r'(j)\right)^2}\, dj. \qquad (20.18)$$

3. Объем тела

Если известна площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, причем $S(x)$ является непрерывной функцией на отрезке $[a; b]$, то объем тела, заключенного между плоскостями $x = a$ и $x = b$, перпендикулярными к оси Ox (рис. 20.10), вычисляется по формуле

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx. \qquad (20.19)$$

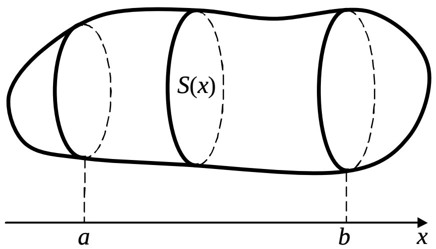


Рис. 20.10

4. Объем и площадь поверхности тела вращения

Если тело ограничивает поверхность, полученную вращением кривой $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, вокруг оси Ox (рис. 20.11), то его объем вычисляется по формуле

$$V = p\int\limits_a^b f^2(x)dx, \qquad (20.20)$$

а площадь поверхности – по формуле

$$S = 2p\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx. \qquad (20.21)$$

Если тело ограничено поверхностью, которая образована вращением кривой $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, вокруг оси Oy, то его объем вычисляется по формуле

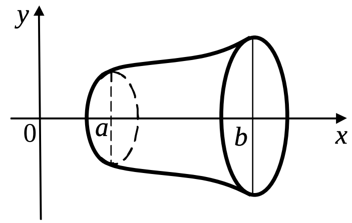
$$V = 2p\int\limits_a^b xf(x)dx. \qquad (20.22)$$

Если тело ограничено поверхностью, полученной вращением кривой $x = g(y)$, $y \in [c; d]$, вокруг оси Oy (рис. 20.12), то его объем вычисляется по формуле

$$V = p\int\limits_c^d g^2(y)dy, \qquad (20.23)$$

а площадь поверхности – по формуле

$$S = 2p\int\limits_c^d g(y)\sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\, dy. \qquad (20.24)$$



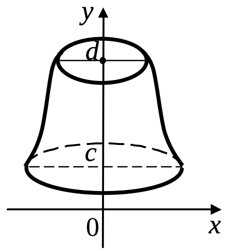


Рис. 20.11 Рис. 20.12

Если плоская фигура, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$; $x = b$; $0 \le f_1(x) \le f_2(x)$ для $x \in [a; b]$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = p\int\limits_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx. \qquad (20.25)$$

Если плоская фигура, ограниченная кривыми $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$, $0 \le g_1(y) \le g_2(y)$ для $y \in [c; d]$, вращается вокруг оси Oy, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = p\int_c^d \left(g_2^2(y) - g_1^2(y)\right)dy. \qquad (20.26)$$

Если кривая, заданная параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = j\,(t), \\ y = y\,(t), \end{cases}$ $t \in [a;\ b]$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = p\int_a^b y^{\,2}(t)j\,'(t)dt, \qquad (20.27)$$

а площадь поверхности вращения – по формуле

$$S = 2p\int_a^b y\,(t)\sqrt{(j\,'(t))^2 + (y\,'(t))^2}\,dt. \qquad (20.28)$$

Если тело получено вращением сектора, ограниченного кривой $r = r(j)$ и лучами $j = j_1$, $j = j_2$, вокруг полярной оси, то его объем вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3}p\int_{j_1}^{j_2} r^3(j)\sin j\; dj\,, \qquad (20.29)$$

а площадь поверхности – по формуле

$$S = 2p\int_{j_1}^{j_2} r(j)\sin j\,\sqrt{r^2(j) + (r'(j))^2}\,dj\,. \qquad (20.30)$$

5. Физические приложения определенного интеграла

Путь, пройденный телом со скоростью $V = V(t)$ за промежуток времени $[t_1;\ t_2]$ $(V(t) \ge 0)$ вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt. \qquad (20.31)$$

Если материальная точка движется по оси Ox из точки $x = a$ до точки $x = b$ под действием направленной вдоль оси Ox переменной силы $F(x)$, которая задается непрерывной функцией, то *работа, произведенная силой F по перемещению точки*, вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)dx. \qquad (20.32)$$

Давление жидкости на погруженную в нее в горизонтальном положении пластинку на глубину h от поверхности жидкости вычисляется по закону Паскаля: $P = r\,ghS$, где g – ускорение свободного падения: $g = 9{,}8$ ì /с^2, S – площадь пластинки, r – плотность жидкости. Если пластинка погружена в жидкость в вертикальном положении, то сила давления жидкости на единицу площади изменяется с глубиной погружения. *Давление жидкости на вертикальную пластинку*, ограниченную линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 20.13), вычисляется по формуле

$$P = r\,g\int_a^b xf(x)dx. \qquad (20.33)$$

Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ (рис. 20.14), вычисляется по формуле

$$P = r\,g\int_a^b x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \qquad (20.34)$$

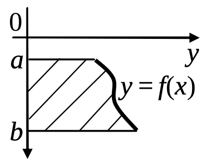


Рис. 20.13

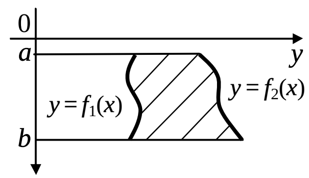


Рис. 20.14

Масса неоднородного стержня, расположенного на отрезке $[a;\ b]$ оси Ox, имеющего линейную плотность $r\,(x)$, где $r\,(x)$ – непрерывная на $[a;\ b]$ функция, вычисляется по формуле

$$m = \int_a^b r\,(x)dx. \qquad (20.35)$$

Если дуга плоской кривой задана уравнением $y = f(x)$, где $x \in [a;\, b]$, и имеет плотность $r = r(x)$, $x \in [a;\, b]$, то *статистические моменты* M_x и M_y этой дуги относительно координатных осей *Ox* и *Oy* вычисляются, соответственно, по формулам:

$$M_x = \int_a^b r(x) f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$
$$M_y = \int_a^b r(x) x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{20.36}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = j(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, имеет однородную плотность $r = 1$, то формулы имеют вид:

$$M_x = \int_a^b y(t)\sqrt{(j'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt,$$
$$M_y = \int_a^b j(t)\sqrt{(j'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \tag{20.37}$$

Моменты инерции дуги плоской кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;\, b]$, имеющей плотность $r = r(x)$, вычисляются по формулам:

$$I_x = \int_a^b r(x) f^2(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$
$$I_y = \int_a^b r(x) x^2\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{20.38}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = j(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, $r = 1$, то формулы имеют вид:

$$I_x = \int_a^b y^2(t)\sqrt{(j'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt,$$
$$I_y = \int_a^b j^2(t)\sqrt{(j'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \tag{20.39}$$

Координаты центра масс дуги плоской кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;\, b]$, имеющей плотность $r = r(x)$, вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b r(x) x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{M},$$
$$y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b r(x) f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{M}, \tag{20.40}$$

где M – масса дуги: $M = \int_a^b r(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = j(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, $r = 1$, то формулы имеют вид:

$$x_c = \frac{M_y}{M},\quad y_c = \frac{M_x}{M}, \tag{20.41}$$

где M – масса дуги: $M = \int_a^b \sqrt{(j'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$

Пример 1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 2x + 2$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$;

2) $y = \cos x$, $x = -\frac{p}{6}$, $x = \frac{13p}{6}$, $y = 0$;

3) $y = 3 - x^2$, $y = 2x$;

4) $x = y^2$, $x = 2 - y^2$.

Решение. 1) Построим график функции $y = x^2 - 2x + 2$, т. е. $y = (x-1)^2 + 1$. Проведем прямые $x = 0$, $x = 3$ и $y = 0$. Заштрихуем искомую фигуру (рис. 20.15).

Площадь данной фигуры находим по формуле (20.6)

$$S = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right)\Bigg|_0^3 = 9 - 9 + 6 = 6.$$

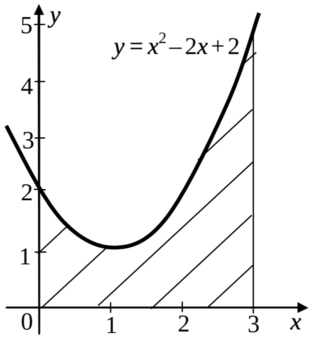


Рис. 20.15

2) Фигура имеет вид, изображенный на рис. 20.16.

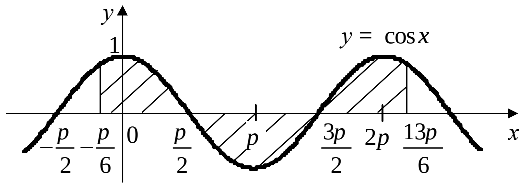


Рис. 20.16

Так как на отрезке $\left[-\frac{p}{6};\ \frac{13p}{6}\right]$ функция принимает значения разных знаков, то разобьем отрезок интегрирования на такие части, где функция принимает значения одного знака. Для нахождения площади фигуры воспользуемся формулами (20.6) и (20.7):

$$S=\int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{3p}{2}}\cos x dx+\int_{\frac{3p}{2}}^{\frac{13p}{6}}\cos x dx=$$

$$=\sin x\left|_{-\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}}\right.-\sin x\left|_{\frac{p}{2}}^{\frac{3p}{2}}\right.+\sin x\left|_{\frac{3p}{2}}^{\frac{13p}{6}}\right.=1+\frac{1}{2}+1+1+\frac{1}{2}+1=5.$$

3) Построим графики функций $y=3-x^2$ и $y=2x$, заштрихуем искомую фигуру (рис. 20.17). Найдем пределы интегрирования, т. е. абсциссы точек пересечения графиков функций. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} y=3-x^2, \\ y=2x. \end{cases}$

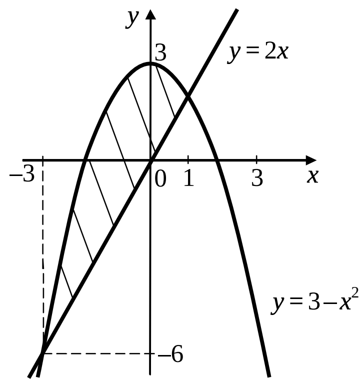


Рис. 20.17

Имеем $2x=3-x^2$, $x^2+2x-3=0$, $x_1=a=-3$, $x_2=b=1$.

Площадь данной фигуры находим по формуле (20.8)

$$S=\int_{-3}^{1}(3-x^2-2x)dx=\left(3x-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-3}^{1}=\left(3-\frac{1}{3}-1\right)-\left(-9+9-9\right)=$$

$$=2-\frac{1}{3}+9=10\frac{2}{3}.$$

4) Построим графики функции $x=y^2$ и $x=2-y^2$ с независимой переменной y. Они образуют плоскую фигуру (рис. 20.18). Найдем ординаты точек пересечения графиков данных функций. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} x=2-y^2, \\ x=y^2. \end{cases}$

Имеем $y^2=2-y^2$, $2y^2=2$, $y^2=1$, $y_1=c=-1$, $y_2=d=1$.

Площадь данной фигуры находим по формуле (20.10)

$$S=\int_{-1}^{1}(2-y^2-y^2)dy=\int_{-1}^{1}(2-2y^2)dy=\left(2y-\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=2-\frac{2}{3}-\left(-2+\frac{2}{3}\right)=2-\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}.$$

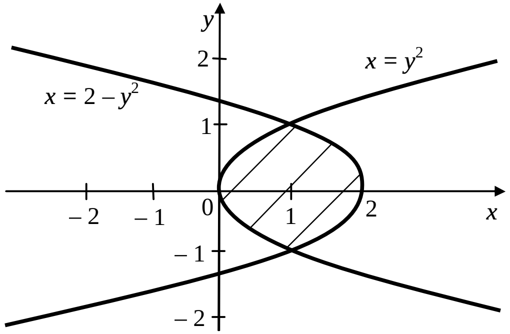


Рис. 20.18

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

2) первой аркой циклоиды $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2p$, и прямой $y=0$;

3) кардиоидой $r=3(1+\cos j)$, $0\le j\le 2p$.

Решение. 1) Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \quad -p\le t\le p.$$

Эллипс – симметричная кривая. В основу вычисления положим площадь фигуры, лежащей в первой координатной четверти, образованной эллипсом и координатными осями (рис. 20.19). Она проектируется на отрезок [0; 2] оси *Ox*. Найдем пределы интегрирования: если $x=0$, то $t=\dfrac{p}{2}$; если $x=2$, то $t=0$. Поэтому воспользуемся формулой (20.11) для вычисления площади фигуры

$$S=4\int_{\frac{p}{2}}^{0} b\sin t(a\cos t)'dt=4\int_{\frac{p}{2}}^{0} b\sin t(a\sin t)dt=-4ab\int_{\frac{p}{2}}^{0}\sin^2 t dt=$$

$$=4ab\int_{0}^{\frac{p}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=2ab\int_{0}^{\frac{p}{2}}(1-\cos 2t)dt=2ab\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{p}{2}}=2ab\frac{p}{2}=p\,ab.$$

2) Фигура, ограниченная аркой циклоиды и осью *Ox*, изображена на рис. 20.20.

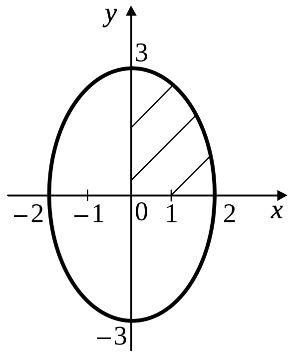


Рис. 20.19

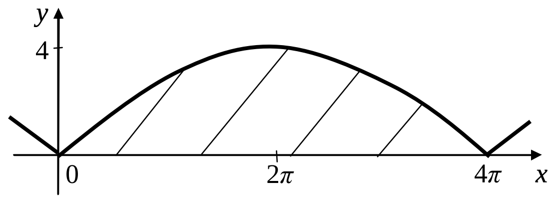


Рис. 20.20

Найдем пределы интегрирования: если $x=0$, то $t=0$; если $x=4p$, то $t=2p$.

Найдем площадь фигуры по формуле (20.11)

$$S=\int_0^{2p}2(1-\cos t)(2(t-\sin t))'dt=4\int_0^{2p}(1-\cos t)^2dt=4\int_0^{2p}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$=4\int_0^{2p}(1-2\cos t)dt+4\int_0^{2p}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=4(t-2\sin t)\Big|_0^{2p}+2\int_0^{2p}\left(1+\cos 2t\right)dt=$$

$$=8p+2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2p}=8p+\left(2t+\sin 2t\right)\Big|_0^{2p}=8p+4p=12p.$$

3) Кардиоида образует фигуру, симметричную относительно оси *Ox* (рис. 20.21).

Используя симметрию, найдем площадь фигуры по формуле (20.12)

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{p}(3(1+\cos j))^2dj=9\int_0^{p}(1+2\cos j+\cos^2 j)dj=$$

$$=9\int\limits_0^p\left(1+2\cos j+\frac{1+\cos 2j}{2}\right)dj=\frac{9}{2}\int\limits_0^p(2+4\cos j+1+\cos 2j)\,dj=$$

$$=\frac{9}{2}\int\limits_0^p(3+4\cos j+\cos 2j)\,dj=\frac{9}{2}\left(3j+4\sin j+\frac{\sin 2j}{2}\right)\Bigg|_0^p=\frac{9}{2}\cdot 3p=\frac{27p}{2}.$$

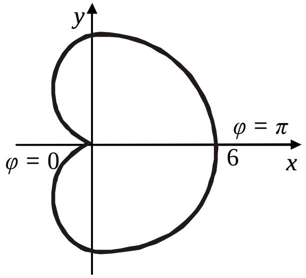


Рис. 20.21

Пример 3. Вычислить длину дуги кривой:

1) $y=\ln x$ от точки с абсциссой 1 до точки с абсциссой $\sqrt{8}$;

2) $y=e^x$ от точки $x=0$ до точки $x=4$;

3) $x=2y^2$ от точки $y=0$ до $y=1$.

Решение. 1) Применим формулу (20.14). Для $y=\ln x$ имеем $y'=\dfrac{1}{x}$. Получаем:

$$l=\int\limits_1^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx=\int\limits_1^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\int\limits_1^{\sqrt{8}}x^{-1}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Подынтегральное выражение является дифференциальным биномом. Поскольку $m=-1$, $n=2$, $p=\dfrac{1}{2}$, $s=2$ и $\dfrac{m+1}{n}=0$ – целое число, то используем подстановку $1+x^2=t^2$. Тогда $t=\sqrt{1+x^2}$, $x^2=t^2-1$, $x=\sqrt{t^2-1}$, $dx=\dfrac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}$. Если $x=1$, то $t=\sqrt{2}$, если $x=\sqrt{8}$, то $t=3$.

Получим:

$$l=\int\limits_{\sqrt{2}}^{3}\left(\sqrt{t^2-1}\right)^{-1}t\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}=\int\limits_{\sqrt{2}}^{3}\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int\limits_{\sqrt{2}}^{3}\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int\limits_{\sqrt{2}}^{3}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{3}=3+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=3-\sqrt{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=3-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln 2-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=3-\sqrt{2}-\ln\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=3-\sqrt{2}-\ln\left(2-\sqrt{2}\right).$$

2) Применим формулу (20.14). Для функции $y=e^x$ имеем $y'=e^x$, поэтому

$$l=\int\limits_0^4\sqrt{1+e^{2x}}dx.$$

Используем подстановку $1+e^{2x}=t^2$. Тогда $t=\sqrt{1+e^{2x}}$, $e^{2x}=t^2-1$, $2x=\ln(t^2-1)$, $x=\dfrac{1}{2}\ln(t^2-1)$, $dx=\dfrac{tdt}{t^2-1}$.

Находим новые пределы интегрирования: если $x=0$, то $t=\sqrt{2}$; если $x=4$, то $t=\sqrt{1+e^8}$.

Получаем:

$$l=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^8}}t\frac{tdt}{t^2-1}=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^8}}\frac{t^2dt}{t^2-1}=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^8}}=\sqrt{1+e^8}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^8}-1}{\sqrt{1+e^8}+1}-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{1+e^8}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^8}-1}{\sqrt{1+e^8}+1}-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1).$$

3) Применим формулу (20.15). Для функции $x=2y^2$ имеем $x'=4y$, тогда $l=\int\limits_0^1\sqrt{1+16y^2}dy$.

Вычислим интеграл методом интегрирования по частям:

$$l=\left|\begin{array}{l}u=\sqrt{1+16y^2},\ du=\dfrac{32ydy}{2\sqrt{1+16y^2}}=\dfrac{16ydy}{\sqrt{1+16y^2}},\\ dv=dy,\ v=y\end{array}\right|=y\sqrt{1+16y^2}\Big|_0^1-$$

$$-\int\limits_0^1\frac{16y^2dy}{\sqrt{1+16y^2}}=\sqrt{17}-\int\limits_0^1\frac{(16y^2+1)-1}{\sqrt{1+16y^2}}dy=\sqrt{17}-\int\limits_0^1\sqrt{1+16y^2}dy+\int\limits_0^1\frac{dy}{\sqrt{1+16y^2}}=$$

$$=\sqrt{17}-\int_0^1\sqrt{1+16y^2}\,dy+\frac{1}{4}\int\frac{d(4y)}{\sqrt{1+(4y)^2}}=\sqrt{17}-l+\frac{1}{4}\ln\left|4y+\sqrt{1+16y^2}\right|\Bigg|_0^1.$$

Найдем длину дуги l из полученного равенства:

$$l=\sqrt{17}-l+\frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17}).$$

Выражаем:

$$l=\frac{\sqrt{17}+\frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})}{2}=\frac{\sqrt{17}}{2}+\frac{1}{8}\ln\left(4+\sqrt{17}\right).$$

Пример 4. Найти длину:

1) астроиды $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $t\in[0;\ 2\pi]$;

2) дуги розы $r=a\sin\varphi$;

3) первого витка спирали Архимеда $r=a\varphi$;

4) дуги логарифмической спирали $r=a^{\varphi}$ $(a>0,\ a\neq 1)$ между точками $A\left(a^{\frac{\pi}{4}},\ \frac{\pi}{4}\right)$ и $B\left(a^{\frac{3\pi}{2}},\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. 1) Применим формулу (20.16). Астроида – симметричная кривая (рис. 20.22).

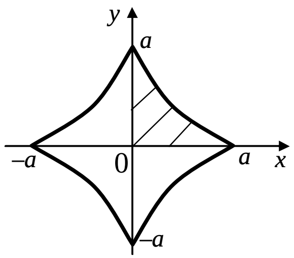


Рис. 20.22

Вычислим длину дуги, лежащей в первой координатной четверти. Тогда для $x=0$ имеем $t=\frac{\pi}{2}$, для $x=a$ имеем $t=0$. Вычисляем производные:

$$x'=3a\cos^2 t\sin t,\quad y'=3a\sin^2 t\cos t.$$

Получаем:

$$l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{9a^2}{4}\cdot 4\cos^2 t\sin^2 t}\,dt=$$

$$=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 2t}\ \ dt=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=-3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=3a\ \left(1-(-1)\right)=6a.$$

2) Кривая, определяемая уравнением $r=a\sin\varphi$, имеет один лепесток (рис. 20.23).

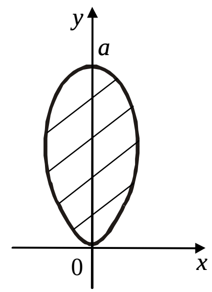


Рис. 20.23

Длину дуги лепестка получим, если φ изменяется от 0 до π. Применим формулу (20.18). Вычислим производную: $r'=a\cos\varphi$.

Получаем: $l=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}\ d\varphi=2a\int_0^{\pi}d\varphi=2a\varphi\Big|_0^{\pi}=2a\pi$.

3) Длину первого витка спирали Архимеда (рис. 20.24) получим, если φ изменяется от 0 до 2π. Применим формулу (20.18). Поскольку $r'=a$, то получаем:

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi=\left|\begin{array}{l}u=\sqrt{1+\varphi^2},\ dv=d\varphi,\\ du=\dfrac{\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}},\ v=\varphi\end{array}\right|=$$

$$= a\left(j\sqrt{1+j^2}\,\Big|_0^{2p} - \int_0^{2p} \frac{j^2 dj}{\sqrt{1+j^2}} \right) = a\left(2p\sqrt{1+4p^2} - \int_0^{2p} \frac{j^2+1-1}{\sqrt{1+j^2}} dj \right) =$$

$$= a\left(2p\sqrt{1+4p^2} - \int_0^{2p} \sqrt{1+j^2}\, dj + \int_0^{2p} \frac{dj}{\sqrt{1+j^2}} \right) =$$

$$= a\left(2p\sqrt{1+4p^2} - \frac{l}{a} + \ln\left(j + \sqrt{1+j^2} \right)\Big|_0^{2p} \right) =$$

$$= a\left(2p\sqrt{1+4p^2} - \frac{l}{a} + \ln\left(2p + \sqrt{1+4p^2} \right) \right).$$

Найдем длину дуги l из полученного равенства

$$l = 2pa\sqrt{1+4p^2} - l + a\ln\left(2p + \sqrt{1+4p^2} \right).$$

Выражаем:

$$l = ap\sqrt{1+4p^2} + \frac{a}{2}\ln\left(2p + \sqrt{1+4p^2} \right).$$

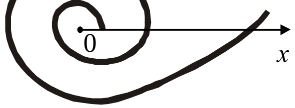


Рис. 20.24

4) Логарифмическая спираль $r = a^j$ изображена на рис. 20.25. Применим формулу (20.18). Точку $A\left(a^{\frac{p}{4}}, \frac{p}{4} \right)$ получим, если $j = \frac{p}{4}$, точку $B\left(à^{\frac{3p}{2}}, \frac{3p}{2} \right)$ получим, если $j = \frac{3p}{2}$. Поэтому имеем:

$$l = \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{2}} \sqrt{a^{2j} + a^{2j}\ln^2 a}\, dj = \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{2}} a^j \sqrt{1+\ln^2 a}\, dj = \sqrt{1+\ln^2 a}\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{2}} a^j\, dj =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a} a^j \Big|_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{2}} = \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}\left(a^{\frac{3p}{2}} - a^{\frac{p}{4}} \right).$$

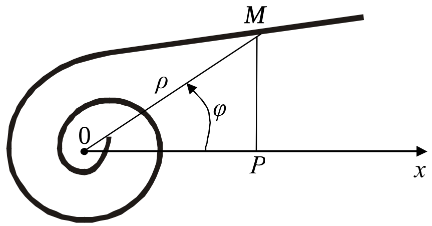


Рис. 20.25

Пример 5. Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ и плоскостью $z = h$.

Решение. Если эллиптический параболоид $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ пересечь плоскостью $z = const$, то в его сечении получим эллипс $\frac{x^2}{za^2} + \frac{y^2}{zb^2} = 1$, т. е. $\frac{x^2}{(\sqrt{z}a)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{z}b)^2} = 1$. Площадь эллипса найдена в примере 2 (см. с. 115). Имеем $S = p\sqrt{z}a\sqrt{z}b = p\,abz$, $0 \le z \le h$. Для вычисления объема тела применим формулу (20.19): $V = \int_0^h p\,abzdz = \frac{p\,abz^2}{2}\Big|_0^h = p\,abh^2$.

Пример 6. Используя определенный интеграл, получить формулу объема шара двумя способами.

Решение. 1-й способ. Поместим центр шара в начало координат (рис. 20.26). Пересечем шар плоскостью, перпендикулярной оси Ox. Вычислим площадь круга, полученного в сечении. Обозначим его радиус через r. Тогда $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Площадь круга является функцией переменной x и равна $S = p\,r^2 = p\,(R^2 - x^2)$, причем x изменяется от $-R$ до R. Для вычисления объема шара применим формулу (20.19):

$$V = \int_{-R}^{R} S(x)dx = \int_{-R}^{R} p\,(R^2 - x^2)dx = p\int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx =$$

$$= p\left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{-R}^{R} = p\left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right) = \frac{4}{3}p\,R^3.$$

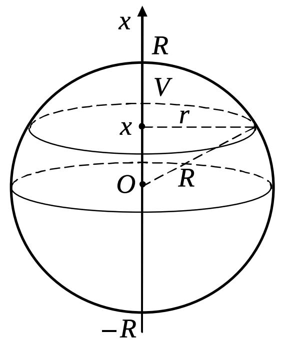


Рис. 20.26

2-й способ. Вычислим объем шара, рассматривая его как тело вращения. Пусть окружность $x^2+y^2=R^2$ вращается вокруг оси Ox, она образует сферическую поверхность, которая является границей шара. Для вычисления объема шара применим формулу (20.20). Поскольку $y^2=R^2-x^2$, где $x\in[-R;\ R]$, то получаем формулу объема шара:

$$V=p\int_{-R}^{R}y^2dx=p\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=p\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=$$

$$=p\left(R^3-\frac{R^3}{3}-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)\right)=\frac{4}{3}pR^3.$$

Пример 7. Используя определенный интеграл, получить формулу площади поверхности сферы.

Решение. Вычислим площадь поверхности сферы по формуле (20.21). Так как $y^2=R^2-x^2$ (рис. 20.26), то

$$2y\cdot y'=-2x,\quad y'=-\frac{x}{y},\quad \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}=\sqrt{\frac{R^2}{y^2}}=\frac{R}{y}.$$

Тогда $y\cdot\sqrt{1+y'^2}=y\cdot\frac{R}{y}=R.$

Получаем формулу площади поверхности сферы:

$$S=2p\int_{-R}^{R}y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2p\int_{-R}^{R}Rdx=2p\,Rx\Big|_{-R}^{R}=2p\,R\big(R-(-R)\big)=4p\,R^2.$$

Пример 8. Найти объем тела:

1) образованного вращением вокруг оси Ox параболы $y^2=x$ и ограниченного плоскостью $x=4$;

2) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=2x$, вокруг оси Oy.

Решение. 1) Для вычисления объема тела (рис. 20.27) применим формулу (20.20):

$$V=p\int_0^4y^2dx=p\int_0^4xdx=\frac{p\,x^2}{2}\Bigg|_0^4=8p.$$

Площадь боковой поверхности вычислим по формуле (20.21). Выразив y через x, получим $y=\sqrt{x}$.

Находим:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \text{и}\ \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}=\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}.$$

Тогда

$$S=2p\int_0^4\sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx=p\int_0^4\sqrt{1+4x}dx=\frac{p}{4}\int_0^4(1+4x)^{\frac{1}{2}}d(1+4x)=$$

$$=\frac{p}{4}\frac{(1+4x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{p}{6}\sqrt{(1+4x)^3}\Big|_0^4=\frac{p}{6}\left(\sqrt{17^3}-1\right)=\frac{p}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

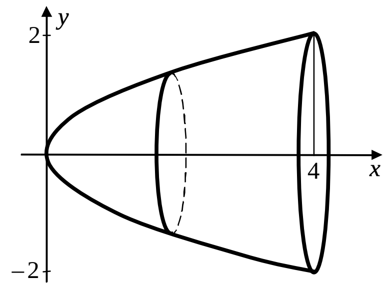


Рис. 20.27

2) Построим графики функций $y = x^2$ и $y = 2x$, заштрихуем образованную ими плоскую фигуру (рис. 20.28). Найдем пределы интегрирования, т. е. ординаты точек пересечения графиков функций. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x. \end{cases}$

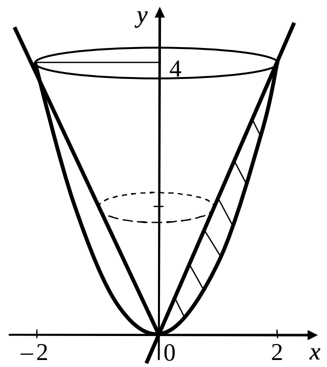


Рис. 20.28

Имеем: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, тогда $y_1 = 0$, $y_2 = 4$. Представив заданные функции как функции переменной y, получим: $x = \sqrt{y}$, $x = \dfrac{y}{2}$, где $y \in [0; 4]$.

Объем тела, полученного вращением плоской фигуры вокруг оси Oy, вычислим по формуле (20.26):

$$V = \pi \int_0^4 \left(\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \right) dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4} \right) dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12} \right) \Bigg|_0^4 =$$

$$= \pi \left(8 - \frac{16}{3} \right) = \frac{8\pi}{3}.$$

Пример 9. Найти объем и площадь поверхности тела, образованного вращением:

1) одной арки циклоиды

$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$, вокруг оси Ox;

2) кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

Решение. 1) Объем тела и площадь поверхности вычислим по формулам (20.27) и (20.28).

Находим: $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a \sin t$.

Тогда

$$V = \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 \, dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - (1 - \sin^2 t)\cos t \right) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - 4\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t + \sin^2 t \cos t \right) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3;$$

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} 2\sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 \frac{t}{2} - 1 \right) d\left(\cos \frac{t}{2} \right) = 16\pi a^2 \left(\frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3} - \cos \frac{t}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$=16p\,a^2\left(-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{64}{3}p\,a^2.$$

2) Объем тела, образованного вращением кардиоиды вокруг полярной оси, вычислим по формулам (20.29) и (20.30) и учтем, что кардиоида – фигура, симметричная относительно полярной оси (поэтому $j_1=0,\ \ j_2=p$ – пределы интегрирования).

Вычисляем $r'=-a\sin j$. Тогда

$$V=\frac{2}{3}p\int_0^p a^3(1+\cos j)^3\sin j\,dj=-\frac{2}{3}p\,a^3\int_0^p(1+\cos j)^3\,d(1+\cos j)=$$

$$=-\frac{p\,a^3(1+\cos j)^4}{6}\Bigg|_0^p=\frac{8p\,a^3}{3};$$

$$S=2p\int_0^p a(1+\cos j)\sin j\sqrt{(a(1+\cos j))^2+(-a\sin j)^2}\,dj=$$

$$=2p\,a^2\int_0^p(1+\cos j)\sin j\sqrt{1+2\cos j+\cos^2 j+\sin^2 j}\,dj=$$

$$=2p\,a^2\int_0^p 2\sin^2\frac{j}{2}\,2\sin\frac{j}{2}\cos\frac{j}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{j}{2}}\,dj=16p\,a^2\int_0^p\sin^4\frac{j}{2}\cos\frac{j}{2}\,dj=$$

$$=32p\,a^2\int_0^p\sin^4\frac{j}{2}\,d\sin\frac{j}{2}=\frac{32p\,a^2}{5}\sin^5\frac{j}{2}\Bigg|_0^p=\frac{32p\,a^2}{5}.$$

Пример 10. Найти силу давления жидкости на пластину, вертикально погруженную в жидкость, если пластина имеет форму полукруга радиусом *R*, диаметр которого находится на поверхности воды (рис. 20.29).

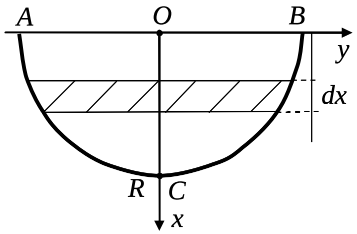


Рис. 20.29

Решение. Давление жидкости на полукруг *ABC* численно равно удвоенному давлению испытываемому четвертью круга *OBC*. Уравнение дуги *BC* имеет вид: $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$. Тогда по формуле (20.33) находим искомое давление

$$P=2r\,g\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\,dx=-r\,g\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,d(R^2-x^2)=$$

$$=-\frac{2r\,g}{3}\sqrt{(R^2-x^2)^3}\Bigg|_0^R=\frac{2r\,g}{3}R^3.$$

Пример 11. Найти координаты центра масс однородной дуги $(r=1)$ астроиды $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,$ расположенной в первой четверти.

Решение. Координаты x_c и y_c находим по формулам (20.41). Имеем $x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t,\ \ y'(t)=3a\sin^2 t\cos t$. Так как $x=0$ при $t=\frac{p}{2},\ \ x=a$ при $t=0$, то по формулам (20.37) получаем:

$$M_x=\int_0^{\frac{p}{2}}a\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=3a^2\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^4 t\cos t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=3a^2\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=$$

$$=3a^2\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^4 t\,d\sin t=\frac{3a^2\sin^5 t}{5}\Bigg|_0^{\frac{p}{2}}=\frac{3a^2}{5};$$

$$M_y=\int_0^{\frac{p}{2}}a\cos^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$= 3a^2 \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \cos^4 t \sin t dt = -3a^2 \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \cos^4 t d\cos t = \frac{-3a^2 \cos^5 t}{5} \Bigg|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{3a^2}{5};$$

$$M = \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{p}{2}} 3a \sin t \cos t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 3a \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sin t \cos t dt =$$

$$= 3a \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sin t d\sin t = \frac{3a \sin^2 t}{2} \Bigg|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{3a}{2}.$$

Тогда $x_c = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\frac{3a^2}{5}}{\frac{3a}{2}} = \dfrac{2a}{5}$; $y_c = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{\frac{3a^2}{5}}{\frac{3a}{2}} = \dfrac{2a}{5}$.

Следовательно, центр масс имеет координаты $C\left(\dfrac{2}{5}a, \dfrac{2}{5}a\right)$.

Пример 12. Скорость автомобиля при торможении меняется по закону $V(t) = 30 - 5t$ (м/с). Определить, какой путь (м) пройдет автомобиль от начала торможения до полной остановки.

Решение. Путь, пройденный автомобилем, вычислим по формуле (20.31). Найдем время от начала торможения $t_1 = 0$ до остановки t_2. Из равенства $30 - 5t = 0$, находим $t_2 = 6$. Поэтому

$$S = \int\limits_0^6 (30 - 5t)\ dt = \left(30t - \frac{5t^2}{2}\right)\Bigg|_0^6 = 180 - 90 = 90 \text{ (м)}.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \dfrac{1}{x}$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 4$, $y = 0$;

2) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$;

3) $y = -x^2 + 6x - 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

4) $y = \operatorname{tg} x$, $x = 0$, $x = \dfrac{p}{4}$, $y = 0$;

5) $x = -y^2 + 12y - 32$, $y = 2$, $y = 6$, $x = 0$.

1.2. Вычислите объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг указанных осей координат:

1) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ вокруг осей Ox и Oy;

2) $y = \sin x$, $x \in [0; p]$, $y = 0$ вокруг оси Ox;

3) $y = x - 1$, $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$ вокруг оси Ox;

4) $y = e^x$, $x = -2$, $x = 2$ вокруг оси Ox;

5) $xy = 10$, $x = 1$, $x = 10$, $y = 0$ вокруг осей Ox и Oy.

1.3. Вычислите длину дуги кривой:

1) $y = \ln \sin x$ от точки $x = \dfrac{p}{6}$ до точки $x = \dfrac{2p}{3}$;

2) $y = 2x$ от точки $x = 1$ до точки $x = 3$.

1.4. Скорость движения автобуса задается формулой $V = 3t + 10$ (м/с). Определите, какой путь пройдет автобус за 10 с от начала движения.

1.5. Найдите, какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 20 см, если сила в 10 Н растягивает пружину на 5 см (упругая сила по закону Гука равна $F(x) = kx$).

1.6. Найдите площадь поверхности вращения, если вращается кривая:

1) дуга синусоиды $y = \sin x$, $0 \le x \le p$ вокруг оси Ox;

2) окружность $r = 2\sin j$ вокруг полярной оси.

II уровень

2.1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^3, \quad x = -1, \quad x = 3, \quad y = 0;$ 2) $y = 4x^2 - 8x, \quad x = 4, \quad y = 0;$

3) $xy = 4, \quad x + y - 5 = 0;$ 4) $y = x^3, \quad y = x, \quad y = 2x;$

5) $y = x^2 - 4, \quad y = -x^2 + 6x - 4;$ 6) $2y = x^2, \quad 2y = -x^2 + 8;$

7) кардиоидой $r = a(1 - \cos j);$ 8) $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 2;$

9) $y^2 = 5 - x, \quad x = 1;$ 10) $y = \arcsin x, \quad p\,x = 2y;$

11) $y = (x+3)^2, \quad y = -\frac{3}{2}x + 9;$ 12) астроидой $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

13) эллипсом $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 5\sin t; \end{cases}$ 14) эллипсом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$

15) $x - y - 1 = 0, \quad x = y^2 - 1;$ 16) $y^2 = 6x, \quad x^2 = 6y;$

17) лемнискатой Бернулли $r^2 = 2a^2\cos 2j;$

18) $y = \sin x, \quad y = 3\sin x, \quad x = 0, \quad x = \frac{3p}{4};$

19) одним лепестком трехлепестковой розы $r = a\sin 3j;$

20) одним лепестком четырехлепестковой розы $r = a\sin 2j;$

21) спиралью Архимеда $r = aj$ и радиус-векторами $j = \frac{p}{4}$ и $j = \frac{2p}{3}.$

2.2. Вычислите длину дуги кривой:

1) окружности $x^2 + y^2 = 25;$

2) кардиоиды $r = a(1 + \cos j);$

3) $r = \sqrt{2}\sin j;$

4) $r = 3\cos j, \quad 0 \le j \le \frac{p}{12};$

5) астроиды $\begin{cases} x = 2\cos^3 \frac{t}{4}, \\ y = 2\sin^3 \frac{t}{4}; \end{cases}$

6) эллипса $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2p;$

7) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ от $t = 0$ до $t = \frac{p}{2};$

8) $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \end{cases}$ от $t = 0$ до $t = 1;$

9) полукубической параболы $2y^2 = x^3$ от точки $x = 0$ до точки $x = 2;$

10) $y = x^2$ от вершины до точки с абсциссой $x = 2;$

11) циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2p;$

12) $y = \ln x$ от точки $x = 1$ до точки $x = \sqrt{15}.$

2.3. Вычислите объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг указанных осей координат:

1) $y = x^2, \quad y = 2x$ вокруг осей *Ox* и *Oy*;

2) $y = -x^2 + 4x, \quad y = 0$ вокруг оси *Oy*;

3) $y = xe^x, \quad x = 1, \quad y = 0$ вокруг оси *Ox*;

4) лемнискаты Бернулли $r^2 = a^2\cos 2j$ вокруг полярной оси;

5) астроиды $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases}$ вокруг оси *Ox*;

6) одной арки циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2p,$ вокруг оси *Ox*.

2.4. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $x^2 + y^2 = 4,\ \ z = 1,\ \ z = 4;$ 2) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = z,\ \ z = 6;$

3) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} - z^2 = 1,\ \ z = 0,\ \ z = 2;$

2.5. Найдите площадь поверхности вращения, если вращается кривая:

1) дуга параболы $y^2 = 2x,\ \ x \in [0;\ 4]$, вокруг оси Ox;

2) одна арка циклоиды $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ вокруг оси Oy;

3) эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox;

4) дуга линии $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases}$ $t \in \left[0;\ \dfrac{p}{2}\right]$, вокруг оси Ox;

5) астроида $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ вокруг оси Ox;

6) кардиоида $\begin{cases} x = 2R\cos t - R\cos 2t, \\ y = 2R\sin t - R\sin 2t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2p$, вокруг ее оси;

7) кардиоида $r = 4(1 + \cos j\,)$ вокруг полярной оси.

III уровень

3.1. Вычислите площадь фигур, на которые парабола $y^2 = 5x$ разбивает круг $x^2 + y^2 \le 36$.

3.2. Найдите площадь общей части круга $r \le a$ и плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 - \cos j\,)$.

3.3. Найдите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ и прямой $y = \dfrac{1}{2}$.

3.4. Найдите длину дуги спирали Архимеда $r = 2j$, находящейся внутри окружности $r = 2p$.

3.5. Найдите объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2,\ \ y = 4$ вокруг прямой $x = 2;$

б) $y = x^3,\ \ x = 0,\ \ x = 1,\ \ y = 4$ вокруг прямой $x = 3.$

21. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

21.1. Несобственный интеграл первого рода

Несобственный интеграл первого рода – это обобщение интеграла на случай бесконечных промежутков числовой оси: на полупрямые $[a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, и на прямую $(-\infty;\ +\infty)$.

Полагаем, что для любого числа $b \in \mathbf{R}$, $a \le b$, существует определенный интеграл $\hat{O}(b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Результат нахождения предела функции $\Phi(b)$ при $b \to +\infty$ назовем ***несобственным интегралом первого рода***:

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx. \qquad (21.1)$$

Несобственный интеграл первого рода называется ***сходящимся***, если предел (21.1) существует. Если предел (21.1) не существует, то несобственный интеграл называется ***расходящимся***. При этом за ним закрепляется значение ∞, если функция $\Phi(b)$ бесконечно большая на бесконечности, и не задается никакого значения, если предел функции $\Phi(b)$ при $b \to +\infty$ не определен.

Если для функции $f(x)$, $x \in [a;\ +\infty)$ можно найти первообразную $F(x)$ на каждом конечном отрезке $[a;\ b] \subset [a;\ +\infty]$, то справедлива *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}. \qquad (21.2)$$

Аналогично определяется понятие несобственного интеграла первого рода на промежутках $(-\infty;\ b]$, $(-\infty;\ +\infty)$.

Равенство

$$\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^b f(x)dx \qquad (21.3)$$

(при условии, что предел существует) определяет ***сходящийся несобственный интеграл*** на промежутке $(-\infty;\ b]$. Соответственно, ***расходящийся интеграл*** – если предел в левой части равенства (21.3) не существует. Если $F(x)$ – первообразная $f(x)$ на каждом конечном отрезке $[a;\ b]$, то для данного случая справедлива *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a) = F(x)\Big|_{-\infty}^b.$$

Несобственный интеграл на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$ рассматривают как сумму несобственных интегралов на лучах $(-\infty,\ c]$ и $[c;\ +\infty)$, где c – произвольная фиксированная точка на числовой оси:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (21.4)$$

Первый интеграл в правой части равенства (21.4) определяют в смысле формулы (21.3), а второй – в смысле формулы (21.1).

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если сходятся оба интеграла в правой части равенства (21.4), и ***расходящимся***, если хотя бы один интеграл в правой части равенства (21.4) расходящийся.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$ можно задать также равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

где величины a и b стремятся к бесконечности независимо друг от друга. Для вычисления несобственного интеграла на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$ используют *формулу Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(x) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

где $F(x)$ – первообразная функция $f(x)$.

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ***сходится в смысле главного значения***, если существует конечный предел $\lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx.$ Этот предел называется ***главным значением несобственного интеграла от функции f(x) в смысле Коши*** и обозначается:

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx. \qquad (21.5)$$

З а м е ч а н и е 1. Для интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ следует различать сходимость, определяемую равенством (21.4), от сходимости в смысле главного значения (см. далее решение примера 4, с. 144–145).

Свойства несобственных интегралов

1. Если сходится интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx,$ то сходится и интеграл $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$ где $c>a,$ и наоборот. При этом выполняется $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{a}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$

2. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{A}^{+\infty} f(x)dx=0.$

3. Свойство линейности: если сходятся интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx,$ то при произвольных постоянных $a, b\in\mathbf{R}$ сходится

также интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}\big(a\,f(x)+b\,g(x)\big)dx$ и справедлива формула

$$\int\limits_{a}^{+\infty}\big(a\,f(x)+b\,g(x)\big)dx=a\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx+b\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx.$$

4. Если для любого $x\in[a;\,+\infty)$ справедливо неравенство $f(x)\le g(x)$ и интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx,$ $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходятся, то $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx\le\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx.$

5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на промежутке $[a;\,+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty}(u(x)v(x)),$ то из сходимости одного из интегралов $\int\limits_{a}^{+\infty} u(x)v'(x)dx,$ $\int\limits_{a}^{+\infty} v(x)u'(x)dx$ вытекает сходимость другого интеграла и справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} u(x)v'(x)dx=\lim_{x\to+\infty}u(x)v(x)-u(a)v(a)-\int\limits_{a}^{+\infty} v(x)u'(x)dx. \qquad (21.6)$$

6. Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\,+\infty)$;

2) на промежутке $[\alpha;\,+\infty)$ определена строго монотонная функция $x=g(t),$ множеством значений которой является полупрямая $[a;\,+\infty),$ и $g(\alpha)=a;$

3) функция $g(t)$ имеет непрерывную производную на промежутке $[\alpha;\,+\infty).$

Тогда из сходимости одного из интегралов $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx,$

$\int\limits_a^{+\infty} f(g(t))g'(t)dt$ вытекает сходимость другого интеграла, и справедлива формула замены переменной

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(g(t))g'(t)dt. \qquad (21.7)$$

Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода от неотрицательных функций

1. ***Признак сравнения***

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a;\ +\infty)$, интегрируемые на любом конечном промежутке $[a;\ b]$, и для них выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x),\ \ x \in [a;\ +\infty)$.

Тогда:

1) из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$;

2) из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$

2. ***Предельный признак сравнения***

Пусть на промежутке $[a;\ +\infty)$ определены две положительные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на любом конечном промежутке $[a;\ b]$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = M > 0,$ то несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ вместе сходятся или вместе расходятся.

3. Пусть неотрицательная функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;\ +\infty),\ \ a > 0$. Если на этом промежутке для нее справедливо неравенство $f(x) \le \dfrac{c}{x^p}$, где c, p – определенные постоянные величины, причем $p > 1$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Если справедливо неравенство $f(x) \ge \dfrac{c}{x^p}$, где $p \le 1$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

4. Пусть неотрицательная функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;\ +\infty),\ \ a > 0$. Если при $p > 1$ существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)x^p = c,\ \ 0 \le c < +\infty$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Если при $p \le 1$ выполняется $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)x^p = c,\ \ 0 < c \le +\infty$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Сходимость несобственных интегралов первого рода от знакопеременных функций

Если $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся***.

1. Если несобственный интеграл первого рода сходится абсолютно, то он сходится.

2. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ абсолютно сходящийся, а функ-

ция $g(x)$ ограничена на промежутке $[a;\ +\infty)$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ также сходится абсолютно.

З а м е ч а н и е 1. Если несобственный интеграл первого рода от знакопеременной функции не сходится абсолютно, то это еще не означает, что он расходится. Для исследования на сходимость данного интеграла необходимо использовать другие признаки, в частности, ***признак Абеля-Дирихле***: пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на промежутке $[a;\ +\infty)$, причем функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, имеет непрерывную производную $g'(x)$, а функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную $F(x)$ при $x \in [a;\ +\infty)$. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

З а м е ч а н и е 2. Всюду далее будем исследовать интегралы на сходимость в смысле определений (21.1), (21.3) и (21.4). В смысле главного значения необходимо исследовать только те примеры, в которых это требуется по условию.

Пример 1. Исследовать на сходимость интегралы:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{0} e^{3x}dx; \qquad 2)\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}; \qquad 3)\ \int\limits_0^{+\infty}\sin x dx; \qquad 4)\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}.$$

В случае сходимости вычислить их.

Решение. 1) По определению (21.3) несобственного интеграла имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{3x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 e^{3x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_a^0\right) = \frac{1}{3} - \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{3}e^{3a} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3},$$

значит, интеграл сходится.

2) По определению (21.1) несобственного интеграла имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\ln b - \ln 1 = +\infty - 0 = +\infty.$$

Интеграл расходится, так как первообразная $F(x) = \ln x$ является бесконечно большой функцией на бесконечности.

3) Интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin x dx$ расходится, так как функция

$$\Phi(b) = \int\limits_0^b \sin x dx = \cos b - 1, \quad b > 0,$$

не стремится ни к какому пределу при $b \to +\infty$.

4) Вычисляем:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}} = \frac{1}{8}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{d(4x^2)}{\sqrt{(4x^2)^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{8}\lim_{b\to+\infty}\ln\left(4x^2+\sqrt{16x^4-1}\right)\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{8}\lim_{b\to+\infty}\ln\left(4b^2+\sqrt{16b^2-1}\right) -$$

$$-\frac{1}{8}\ln(4+\sqrt{15}) = \infty - \frac{1}{8}\ln(4+\sqrt{15}) = \infty.$$

Интеграл расходится.

Пример 2. Исследовать, при каких значениях p сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $a > 0$.

Решение. По определению (21.1) имеем:

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b x^{-p}dx = \begin{cases}\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^b, & \text{åñëè } p \neq -1\\ \lim\limits_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_a^b, & \text{åñëè } p = 1\end{cases} =$$

$$= \begin{cases}\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{1}{1-p}\left(\dfrac{1}{b^{p-1}}-\dfrac{1}{a^{p-1}}\right), & \text{åñëè } p \neq -1\\ \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b - \ln a), & \text{åñëè } p = 1\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & \text{åñëè } p > 1;\\ \infty, & \text{åñëè } p \le 1.\end{cases}$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}(a > 0)$ сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \le 1$.

Пример 3. Вычислить несобственный интеграл первого рода:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{p\,(x^2+4x+5)}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt[5]{(9+x^2)^7}}$; 3) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

4) $\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{4dx}{(x^2-1)^2}$; 5) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx.$

Решение. 1) Выделим в знаменателе подынтегрального выражения полный квадрат и представим заданный интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{p\,(x^2+4x+5)}=\frac{1}{p}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\frac{1}{p}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+1}+\frac{1}{p}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{p}\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+1}+\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\frac{1}{p}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(x+2)\Big|_{a}^{0}+$$

$$+\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(x+2)\Big|_{0}^{b}=\frac{1}{p}\operatorname{arctg}2-\frac{1}{p}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(a+2)+$$

$$+\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(b+2)-\frac{1}{p}\operatorname{arctg}2=-\frac{1}{p}\cdot\left(-\frac{p}{2}\right)+\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{2}=2.$$

2) Используем метод поднесения под знак дифференциала. Для этого, выделив производную квадратного трехчлена в числителе, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt[5]{(9+x^2)^7}}=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{a}^{0}\frac{2xdx}{\sqrt[5]{(9+x^2)^7}}=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{a}^{0}(9+x^2)^{-\frac{7}{5}}d(9+x^2)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\frac{(9+x^2)^{-\frac{2}{5}}}{-\frac{2}{5}}\Bigg|_{a}^{0}=-\frac{5}{4}\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(9+x^2)^2}}\Bigg|_{a}^{0}=$$

$$=-\frac{5}{4\sqrt[5]{81}}+\frac{5}{4}\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(9+a^2)^2}}=-\frac{5}{4\sqrt[5]{81}}+0=-\frac{5}{4\sqrt[5]{81}}.$$

3) Вычисляем:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{d(\ln x)}{1+\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\ln x\Big|_{1}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\ln b-\operatorname{arctg}\ln 1=\frac{p}{2}-0=\frac{p}{2}.$$

4) Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{4}{(x^2-1)^2}=\frac{4}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}.$$

Далее приводим дроби к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$4=A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x-1)^2(x+1)+D(x-1)^2. \qquad (21.8)$$

Неизвестные коэффициенты найдем с помощью метода частных значений:

$x=1,\ 4=4B,\ B=1.$

$x=-1,\ 4=4D,\ D=1.$

Вычислим производную от обеих частей равенства (21.8):

$0=A(x+1)^2+2A(x-1)(x+1)+2B(x+1)+C(x-1)^2+$

$+2C(x-1)(x+1)+2D(x-1).$

Тогда для $x=1$ получаем: $4A+4B=0,\ A=-B,\ A=-1.$

Для $x=-1$ имеем: $4C-4D=0,\ C=D,\ C=1.$

В итоге получаем:

$$\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{4dx}{(x^2-1)^2}=\int\limits_{3}^{+\infty}\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{3}^{b}\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_{3}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_{3}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\right|-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b-1}-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b+1}-\left(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\ln\lim_{b\to+\infty}\left|\frac{b+1}{b-1}\right|-0-0-\ln 2+\frac{3}{4}=$$

$$=\ln\lim_{b\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{b}}-\ln 2+\frac{3}{4}=\ln 1+\frac{3}{4}-\ln 2=\frac{3}{4}-\ln 2.$$

5) Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, \ dv = e^x dx, \\ du = dx, \ v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} xe^x\Big|_a^0 - \lim_{a\to-\infty}\int e^x dx = 0 - \lim_{a\to-\infty} ae^a - \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 =$$

$$= -\lim_{a\to-\infty} ae^a - 1 + \lim_{a\to-\infty} e^a = -\lim_{a\to-\infty} ae^a - 1.$$

Для вычисления предела используем правило Лопиталя (по переменной a):

$$-\lim_{a\to-\infty} ae^a - 1 = -\lim_{a\to-\infty}\frac{a}{e^{-a}} - 1 = -\lim_{a\to-\infty}\frac{(a)'}{(e^{-a})'} - 1 = -\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{-e^{-a}} - 1 = 0 - 1 = 1.$$

Пример 4. Найти главное значение несобственного интеграла:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{16+x^2}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx.$

Решение. 1) Найдем главное значение данного интеграла по определению (21.5):

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{16+x^2} = \lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a}\frac{dx}{16+x^2} = \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\text{arctg}\frac{x}{4}\Big|_{-a}^{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to+\infty}\left(\text{arctg}\frac{a}{4} - \text{arctg}\left(-\frac{a}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}\lim_{a\to+\infty}\left(\text{arctg}\frac{a}{4} + \text{arctg}\frac{a}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to+\infty} 2\,\text{arctg}\frac{a}{4} = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{p}{2} = \frac{p}{4}.$$

Заметим, что вычисление интеграла по формуле (21.4) также дает $\frac{p}{4}$ (просьба убедиться самостоятельно), т. е. он сходится и в обычном смысле.

2) Найдем главное значение данного интеграла по определению (21.5):

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx = \lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a}\frac{1+x}{1+x^2}dx = \lim_{a\to+\infty}\left(\int\limits_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}\frac{2xdx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left(\text{arctg}\,x\Big|_{-a}^{a} + \frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}\right) =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left(\text{arctg}\,a - \text{arctg}(-a) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-a}^{a}\right) =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left(2\,\text{arctg}\,a + \frac{1}{2}\ln(1+a^2) - \frac{1}{2}\ln(1+a^2)\right) = \lim_{a\to+\infty} 2\text{arctg}\,a = 2\cdot\frac{p}{2} = p.$$

Можно убедиться, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$ является расходящимся в обычном смысле.

Пример 5. Исследовать интеграл на сходимость, используя признак сравнения:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x}$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x+3}{\sqrt[4]{x^3}}dx.$

Решение. 1) При $x\in[1;\,+\infty)$, функция $\frac{1}{x^2+x} > 0$, причем $\frac{1}{x^2+x} < \frac{1}{x^2} = g(x)$. Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, так как

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b} + 1 = 1.$$

Поэтому, согласно признаку сравнения, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x}$ сходится.

2) Функция $\frac{x+3}{\sqrt[4]{x^3}} > 0$ при $x\in[1;\,+\infty)$, причем $\frac{x+3}{\sqrt[4]{x^3}} > \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = g(x).$

Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$ расходится, так как

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b} x^{-\frac{3}{4}}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}\Bigg|_1^b = 4\lim_{b\to+\infty}\sqrt[4]{x}\Big|_1^b = \infty - 4 = \infty.$$

Поэтому, согласно признаку сравнения, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x+3}{\sqrt[4]{x^3}}dx$ расходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы по предельному признаку сравнения:

1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{7+2x+2x^7}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2x-1}dx$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x}}dx.$

Решение. 1) Функция $f(x)=\frac{1}{7+2x+2x^7}>0$ при $x\in[1;\ +\infty)$. Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{1}{x^7}$, интеграл от которой сходится (пример 2, с. 141 данного пособия).

Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^7}{7+2x+2x^7}=\frac{1}{2}\neq 0$. Поэтому, согласно предельному признаку сравнения заключаем, что $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{7+2x+2x^7}$ также сходится.

2) Функция $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2x-1}>0$ при $x\in[1;\ +\infty)$. Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, интеграл от которой расходится (пример 2, с. 141).

Находим:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x-1}=\frac{1}{2}\neq 0.$ Поэтому, согласно предельному признаку сравнения, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2x-1}dx$ расходится.

3) Функция $f(x)=\frac{\ln\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}<0$ при $x\in[1;+\infty)$. Поэтому исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{-\ln\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}dx$, который будет сходиться или расходиться одновременно с заданным интегралом. Используем эквивалентность бесконечно малых функций: $\ln(1+x)\sim x$, $x\to 0$, $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$, $x\to 0$. Сделаем следующие преобразования:

$\ln\cos\frac{1}{x^2}=\ln\left(1+\left(\cos\frac{1}{x^2}-1\right)\right)\sim\cos\frac{1}{x^2}-1,\quad x\to+\infty;\quad 1-\cos\frac{1}{x^2}\sim\frac{1}{2x^4},$

$x\to+\infty$. Поэтому имеем $\frac{-\ln\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}\sim\frac{1}{2\sqrt{x}x^4}$, $x\to+\infty$. Так как известно, что несобственный интеграл от функции $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{9}{2}}}$ сходится на промежутке $[1;\ +\infty)$ (пример 2, с. 141 данного пособия), то сходится также интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{-\ln\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}dx$, а вместе с ним и заданный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}dx.$

Пример 7. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$, где $p>0.$

Решение. Используем признак Абеля-Дирихле. Функция $f(x)=\sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$, $x\in[1;\ +\infty)$, функция $g(x)=\frac{1}{x^p}$ монотонно убывает и имеет непрерывную производную. Кроме того, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$. Таким образом, все условия признака Абеля-Дирихле выполняются, а значит интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ сходится.

Пример 8. Исследовать интеграл на абсолютную сходимость:

1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{1+x^2}dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$

Решение. 1) Так как $\left|\sin 3x\right| \le 1$ для любого $x \in [0;\ +\infty)$, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left|\sin 3x\right|}{1+x^2}\,dx \le \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_0^a\right) = \lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg} a = \frac{p}{2}.$$

Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{1+x^2}\,dx$ сходится абсолютно.

2) Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится в силу признака Абеля-Дирихле (см. пример 7, с. 147). Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\left|\sin x\right|}{x}\,dx.$ Так как $\left|\sin x\right| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, то для любого $b>1$ имеем:

$$\int_1^{b} \frac{\left|\sin x\right|}{x}\,dx \ge \int_1^{b} \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{b}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{b}\frac{\cos 2x}{x}\,dx. \qquad (21.9)$$

Осуществив предельный переход в неравенстве (21.9) при $b \to +\infty$, получаем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left|\sin x\right|}{x}\,dx \ge \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится в силу признака Абеля-Дирихле, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится (пример 2, с. 141 данного пособия). Приходим к выводу, что в результате предельного перехода в неравенстве (21.9) получим $\int_1^{+\infty} \frac{\left|\sin x\right|}{x}\,dx = +\infty.$ Таким образом, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, однако он не сходится абсолютно.

Задания

I уровень

1.1. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$;

4) $\int_{-\infty}^{0} e^{5x}dx$; 5) $\int_0^{+\infty} 3^{-5x}dx$; 6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9+x^2}$.

II уровень

2.1. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$; 2) $\int_1^{+\infty} \cos x dx$; 3) $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{4x^4-1}}$;

4) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 5) $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{25x^4-1}}$; 6) $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{p}}\,\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx$;

7) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+5)^4}}$; 8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}$; 9) $\int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}$;

10) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5}$; 11) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx$; 12) $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{16dx}{p\,(4x^2+4x+5)}$;

13) $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$; 14) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$; 15) $\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$;

16) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; 17) $\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2-4x}$; 18) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$;

19) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$; 20) $\int_0^{+\infty} \frac{3-x}{x^2+4}\,dx$; 21) $\int_0^{+\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$;

22) $\int\limits_{\frac{2}{p}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$; 23) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$; 24) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

2.2. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл первого рода:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$; 2) $\int\limits_{\frac{p}{2}}^{+\infty} \frac{3+\sin x}{x^3}dx$; 3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x+3\sqrt{x+2}}{x^3+\sqrt[4]{x^2+2}}dx$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos xdx$; 5) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}\sin 4xdx$; 6) $\int\limits_{-3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$;

7) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^7+1}}$; 8) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{1+x\sqrt[3]{x}}dx$; 9) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$;

10) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+\sin^2 x}$; 11) $\int\limits_{\frac{p}{3}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$; 12) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt[3]{x+2}}dx$.

2.3. Исследуйте на абсолютную сходимость несобственный интеграл первого рода:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{4+x^2}dx$;

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2}dx$; 4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\arcsin x}{x}dx$.

III уровень

3.1. Используя формулу интегрирования по частям, вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

1) $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{0} x2^{x}dx$; 3) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos xdx$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin 2xdx$; 5) $\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin xdx$; 6) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}$.

3.2. Найдите главное значение несобственного интеграла и определите, сходится ли интеграл в обычном смысле:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} xdx$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9+x^2}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin xdx$; 5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x}dx}{1+e^{2x}}$; 6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{1+x^2}dx$.

3.3. Докажите сходимость несобственных интегралов Френеля $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x^2dx$ и $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x^2dx$.

У к а з а н и е. Выполните замену $x=\sqrt{t}$.

3.4. Исследуйте интеграл на сходимость:

1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$ (у к а з а н и е: $t=x-\frac{1}{x}$);

2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin\frac{1}{x}dx$ (у к а з а н и е: $t=\frac{1}{x}$);

3) $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$ (у к а з а н и е: $t=\ln x$);

4) $\int\limits_{1}^{+\infty} x^{x}e^{-x^2}dx$ (у к а з а н и е: сравните $g(x)=e^{-x^2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}$ с $f(x)=e^{-x^2}$);

5) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (у к а з а н и е: сравните e^{-x^2} и e^{-2x+1}).

21.2. Несобственный интеграл второго рода

Пусть функция $f(x)$ является непрерывной на промежутке $[a;\, b)$ и неограниченной в окрестности точки $x=b$, т. е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty.$ Тогда точка b называется ***особой точкой*** и говорят, что функция $f(x)$ ***имеет особенность в точке b***. Для любого $e>0$ $(e<b-a)$ функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;\ b-e]$, т. е. существует интеграл

$$I(e)=\int\limits_a^{b-e} f(x)dx. \qquad (21.10)$$

Результат вычисления предела функции $I(e)$ при $e\to+0$ называется ***несобственным интегралом второго рода***:

$$\lim_{e\to+0} I(e)=\lim_{e\to+0}\int\limits_a^{b-e} f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (21.11)$$

Несобственный интеграл второго рода (21.11) называется ***сходящимся***, если предел (21.11) существует. Если функция $I(e)$ является бесконечно большой, то несобственный интеграл считают равным бесконечности. Если предел (21.11) не существует, то интеграл не принимает никакого значения. В последних двух случаях несобственный интеграл второго рода называется ***расходящимся***.

Если для функции $f(x)$, определенной на полуинтервале $[a,\, b)$, известна ее первообразная $F(x)$, то для вычисления интеграла (21.11) используется формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{e\to+0} F(b-e)-F(a). \qquad (21.12)$$

Формула интегрирования по частям для несобственного интеграла второго рода

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на промежутке $[a,\, b)$, а также существует $\lim\limits_{e\to+0} u(b-e)v(b-e)$, то из сходимости одного из интегралов $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx,$ $\int\limits_a^b u'(x)v(x)dx$ вытекает сходимость другого, и справедлива формула

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx=\lim_{e\to+0} u(b-e)v(b-e)-u(a)v(a)-\int\limits_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Формула замены переменной в несобственном интеграле второго рода

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,\, b)$, функция $x=g(t)$ определена на полуинтервале $[\alpha;\ \beta)$, $-\infty<\alpha<\beta<+\infty$, и имеет на нем непрерывную производную, причем $g(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta} g(t)=b,$ то справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt,$ при этом интегралы в ней оба сходятся или оба расходятся.

Аналогично определяется несобственный интеграл второго рода, если $x=a$ – особая точка функции $f(x)$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{e\to+0}\int\limits_{a+e}^b f(x)dx. \qquad (21.13)$$

Если особая точка $x=c$ функции $f(x)$ является внутренней точкой отрезка $[a;\, b]$ (функция $f(x)$ имеет в этой точке разрыв второго рода), то несобственный интеграл второго рода функции $f(x)$ по отрезку $[a;\, b]$ определяется равенством:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{e_1\to+0}\int\limits_a^{c-e_1} f(x)dx+\lim_{e_2\to+0}\int\limits_{c+e_2}^b f(x)dx. \qquad (21.14)$$

З а м е ч а н и е 1. Следует различать сходимость, определенную равенством (21.14), и сходимость в смысле главного значения (21.15), которая определяется следующим образом: пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;\, b]$ с особой точкой $c\in(a;\, b)$ и интегрируема на любом отрезке, принадлежащем полуинтервалам $[a;\, c)$ и $(c;\, b]$. Если для $e>0$ такого, что $e<\min\{c-a,\ b-c\}$ существует

$$\lim_{e\to+0}\left(\int\limits_a^{c-e} f(x)dx+\int\limits_{c+e}^b f(x)dx\right)=\text{V.p.}\int\limits_a^b f(x)dx, \qquad (21.15)$$

то он называется **главным значением несобственного интеграла второго рода**, а функция $f(x)$ – **интегрируемой по Коши**.

Всюду далее будем рассматривать сходимость, определенную равенством (21.14).

Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода от неотрицательных функций

1. ***Признак сравнения***

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a; b)$ и для них выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x), \quad x \in [a; b)$.

Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ вытекает расходимость интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$.

2. ***Предельный признак сравнения***

Пусть на промежутке $[a; b)$ определены положительные функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = M, \quad M > 0$. Тогда оба интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ вместе сходятся или оба вместе расходятся.

3. Пусть неотрицательная функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; b)$ и для x, близких к b, удовлетворяет условию $f(x) \le \frac{A}{(b-x)^p}, \quad A > 0$. Тогда при $p < 1$ несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. Если для x, близких к b, выполняется неравенство $f(x) \ge \frac{A}{(b-x)^p}, \quad A > 0$, тогда при $p \ge 1$ интеграл от этой функции на промежутке $[a; b)$ расходится.

Сходимость интегралов второго рода от знакопеременных функций

Если интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся***.

1. Если несобственный интеграл второго рода сходится абсолютно, то он сходится.

2. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ абсолютно сходящийся, а функция $g(x)$ ограничена на промежутке $[a; b)$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ также сходится абсолютно.

З а м е ч а н и е 2. Если несобственный интеграл второго рода от знакопеременной функции не сходится абсолютно, то это еще не означает, что он расходится. Для исследования на сходимость данного интеграла необходимо использовать другие признаки.

Пример 1. Исследовать интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p = const, \quad p > 0$, на сходимость и в случае сходимости вычислить его.

Решение. Подынтегральная функция неограничена в окрестности точки $x = 0$. Обозначим $I(e) = \int\limits_e^1 \frac{dx}{x^p}$, где $0 < e < 1$.

Вычислим этот интеграл

$$\int\limits_e^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(1-e^{1-p}), \text{ åñëè } p \ne 1, \\ -\ln e, \text{ åñëè } p = 1. \end{cases}$$

Заключаем, что конечный предел $\lim\limits_{e\to+0} I(e)$ существует при $p < 1$ и не существует при $p \ge 1$.

Мы получили следующий результат:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & \text{åñëè } p<1 \text{ (ñõî äèòñÿ)}, \\ +\infty, & \text{åñëè } p\ge 1 \text{ (ðàñõî äèòñÿ)}. \end{cases} \qquad (21.16)$$

Аналогично можно показать, что для функций $y=\dfrac{1}{(b-x)^p}$, $x\in[a;\ b)$, и $y=\dfrac{1}{(x-a)^p}$, $x\in(a;\ b]$, интегралы $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ и $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ сходятся при $p<1$ и расходятся при $p\ge 1$.

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$; 2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(2x-1)}{2x-1}dx$; 3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$; 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{2p}{3}} \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}$.

Решение. 1) Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=3$ – правом конце промежутка интегрирования. Для вычисления интеграла используем формулы (21.11) и (21.12):

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}} = \lim_{e\to+0}\int_1^{3-e} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}} = -\lim_{e\to+0}\int_1^{3-e}(3-x)^{-\frac{2}{3}}d(3-x) =$$

$$=-\lim_{e\to+0}\left.\frac{(3-x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|_1^{3-e} = -3\lim_{e\to+0}\left.\sqrt[3]{3-x}\right|_1^{3-e} = -3(\lim_{e\to+0}\sqrt[3]{e}-\sqrt[3]{2}) = 3\sqrt[3]{2}.$$

2) Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=\dfrac{1}{2}$ – в левом конце промежутка. Согласно формуле (21.13) и формуле Ньютона-Лейбница, имеем:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(2x-1)}{2x-1}dx = \lim_{e\to+0}\int_{\frac{1}{2}+e}^1 \frac{1}{2}\ln(2x-1)d\ln(2x-1) = \frac{1}{2}\lim_{e\to+0}\left.\frac{\ln^2(2x-1)}{2}\right|_{\frac{1}{2}+e}^1 =$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{e\to0}(\ln^2 1-\ln^2(1+2e-1)) = -\frac{1}{4}\lim_{e\to0}\ln 2e = +\infty.$$

Интеграл расходится.

3) Подынтегральная функция имеет две особые точки: $x=1$, $x=3$ – концы промежутка интегрирования.

Тогда

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} =$$

$$=\lim_{e_1\to+0}\int_{1+e_1}^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} + \lim_{e_2\to+0}\int_2^{3-e_2}\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \lim_{e_1\to+0}\int_{1+e_1}^2 \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} +$$

$$+\lim_{e_2\to+0}\int_2^{3-e_2}\frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{e_1\to+0}\left.\arcsin(x-2)\right|_{1+e_1}^2 + \lim_{e_2\to+0}\left.\arcsin(x-2)\right|_2^{3-e_2} =$$

$$=\arcsin 0 - \lim_{e_1\to+0}\arcsin(e_1-1) + \lim_{e_2\to+0}\arcsin(1-e_2) - \arcsin 0 =$$

$$=-\arcsin(-1)+\arcsin 1 = 2\arcsin 1 = 2\cdot\frac{p}{2} = p.$$

4) Подынтегральная функция имеет особенность во внутренней точке $x=\dfrac{p}{2}$ промежутка интегрирования. Для вычисления интеграла используем формулу (21.14) и формулу Ньютона-Лейбница. Получим:

$$\int_0^{\frac{2p}{3}} \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}} = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}} + \int_{\frac{p}{2}}^0 \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}} =$$

$$=\lim_{e_1\to+0}\int_0^{\frac{p}{2}-e_1}\frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}} + \lim_{e_2\to0}\int_{\frac{p}{2}+e_2}^{\frac{2p}{3}}\frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}} =$$

$$=-\lim_{e_1\to+0}\int_0^{\frac{p}{2}-e_1}(\cos x)^{-\frac{2}{5}}d(\cos x) - \lim_{e_2\to+0}\int_{\frac{p}{2}+e_2}^{\frac{2p}{3}}(\cos x)^{-\frac{2}{5}}d(\cos x) =$$

$$=-\lim_{e_1\to+0}\left(\left.\frac{\cos^{\frac{3}{5}} x}{\frac{3}{5}}\right|_0^{\frac{p}{2}-e_1}\right) - \lim_{e_2\to+0}\left(\left.\frac{\cos^{\frac{3}{5}} x}{\frac{3}{5}}\right|_{\frac{p}{2}+e_2}^{\frac{2p}{3}}\right) =$$

$$=-\lim_{e_1\to+0}\left(\frac{5\sqrt[5]{\cos^3 x}}{3}\Bigg|_0^{\frac{p}{2}-e_1}\right)-\lim_{e_2\to+0}\left(\frac{5\sqrt[5]{\cos^3 x}}{3}\Bigg|_{\frac{p}{2}+e_2}^{\frac{2p}{3}}\right)=$$

$$=-\lim_{e_1\to+0}\frac{5\sqrt[5]{\cos^3\left(\frac{p}{2}-e_1\right)}}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{8}}+\lim_{e_2\to+0}\frac{5\sqrt[5]{\cos^3\left(\frac{p}{2}+e_2\right)}}{3}=$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\sqrt[5]{\frac{1}{8}}.$$

Пример 3. Исследовать интеграл на сходимость:

1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\ln x}$; 2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin^2 x dx}{x^2\sqrt[4]{x^2+x}}$; 3) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[7]{x^4}}dx.$

Решение. 1) Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=1$. Сравним функцию $\frac{1}{\ln x}$ с функцией $\frac{1}{(x-1)^p}$. По правилу Лопиталя вычислим предел

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{(x-1)^p}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{p(x-1)^{p-1}}=\lim_{x\to1}\frac{1}{xp(x-1)^{p-1}}.$$

Если $p=1$, то $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$. Это означает, что функции $\frac{1}{\ln x}$ и $\frac{1}{x-1}$ эквивалентны при $x\to1$. Поскольку расходится интеграл $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{x-1}$ (пример 1, с. 155–156), то расходится также интеграл $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\ln x}$.

2) Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Так как $\sin x\sim x$, $\sin^2 x\sim x^2$, $x^2\sqrt[4]{x^2+x}=x^{\frac{9}{4}}\sqrt[4]{x+1}\sim x^{\frac{9}{4}}$ при $x\to0$, то справедлива эквивалентность $\frac{\sin^2 x}{x^2\sqrt[4]{x^2+x}}\sim x^{\frac{1}{4}}$ при $x\to0$. Поэтому из

сходимости интеграла $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}}$ (пример 1, с. 141) следует сходимость интеграла $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin^2 x}{x^2\sqrt[4]{x^2+x}}dx.$

3) Подынтегральная функция $f(x)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[7]{x^4}}$ является знакопеременной функцией на промежутке (0; 1]. Исследуем интеграл на абсолютную сходимость. Так как $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le1$ для любого $x\in(0;\,1]$, то

$$\int_0^1\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[7]{x^4}}\right|dx\le\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[7]{x^4}}=\int_0^1\frac{dx}{x^{\frac{4}{7}}}.$$

Поскольку показатель $p=\frac{4}{7}<1$, то согласно формуле (21.16) интеграл сходится.

Отсюда следует, что заданный интеграл сходится абсолютно.

Пример 4. Найти главное значение несобственного интеграла $\displaystyle\int_1^5\frac{dx}{x-2}$.

Решение. Интеграл от функции $y=\frac{1}{x-2}$ на отрезке [1; 5] расходится (пример 1, с. 155–156). Однако он сходится в смысле главного значения.

$$\text{V.p.}\int_1^5\frac{dx}{x-2}=\lim_{e\to+0}\left(\int_1^{2-e}\frac{dx}{x-2}+\int_{2+e}^5\frac{dx}{x-2}\right)=$$

$$\lim_{e\to+0}\ln|x-2|\Big|_1^{2-e}+\lim_{e\to+0}\ln|x-2|\Big|_{2+e}^5=$$

$$=\lim_{e\to+0}\ln e-\ln1+\ln3-\lim_{e\to+0}\ln e=\ln3.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите несобственный интеграл второго рода или установите его расходимость:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}}$; 3) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 4) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$;

5) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x-2}$; 6) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[7]{1-x}}$; 7) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$; 8) $\int\limits_0^{\frac{2}{5}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-5x)}}{2-5x}dx$.

1.2. Исследуйте несобственный интеграл второго рода на сходимость:

1) $\int\limits_3^4 \frac{\cos x}{x-3}dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 4) $\int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} \mathrm{tg}\, x\, dx$.

II уровень

2.1. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

1) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$; 2) $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{p}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[7]{(1-\sin 3x)^6}}dx$;

4) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$; 5) $\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$; 6) $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

7) $\int\limits_{-1}^1 \frac{5x^2-3}{\sqrt[4]{x^3}}dx$; 8) $\int\limits_3^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$; 9) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$;

10) $\int\limits_{\frac{p}{2}}^{p} \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; 11) $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$; 12) $\int\limits_0^{\frac{p}{4}} \mathrm{ctg}\, x\, dx$;

13) $\int\limits_{-3}^3 \frac{xdx}{x^2-1}$; 14) $\int\limits_3^7 \frac{dx}{(x-5)^2}$; 15) $\int\limits_{\frac{3p}{4}}^{p} \frac{dx}{1+\cos x}$.

2.2. Исследуйте несобственный интеграл второго рода на сходимость:

1) $\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sin\frac{x}{2}}dx$; 3) $\int\limits_0^p \frac{1-\cos x}{x^4}dx$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x})}{e^{\sin x}-1}dx$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[4]{x^3})}{e^{tgx}-1}dx$;

7) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$; 8) $\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{1-\cos 2x}$; 9) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

III уровень

3.1. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$; 2) $\int\limits_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{2e^{1-\frac{2}{p}\arcsin x}}{p\sqrt{1-x^2}}dx$;

4) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$; 5) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

3.2. Найдите главное значение несобственного интеграла второго рода:

1) $\int\limits_{-1}^3 \frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x-2}$; 3) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^2 \frac{dx}{x\ln x}$;

4) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$; 5) $\int\limits_4^6 \frac{dx}{(x-5)^2}$; 6) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^5}$.

3.3. Исследуйте несобственный интеграл на сходимость:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$; 2) $\int\limits_0^{\frac{2}{\sqrt{p}}} \sin\frac{1}{x^2}\frac{dx}{x^3}$;

3) $\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \ln\sin x dx$; 4) $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}}$.

3.4. Вычислите несобственный интеграл второго рода, используя формулу интегрирования по частям:

1) $\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \ln\sin x dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{1}{\ln 2}} \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^3}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx$;

5) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\int\limits_0^{\frac{p}{2}} x \operatorname{ctg} x\, dx$; 6) $\int\limits_0^{p} x\ln\sin x dx$.

22. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

22.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Пусть x – независимая переменная, $y(x)$ – функция от переменной x, заданная на некотором промежутке.

Дифференциальным уравнением (обыкновенным дифференциальным уравнением) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, функцию $y(x)$ и ее производные.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в него.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид:

$$F(x,\ y,\ y')=0, \tag{22.1}$$

где F – некоторое выражение относительно x, искомой функции $y(x)$ и ее производной, заданное в области $D\subset \mathbf{R}^2$.

Если дифференциальное уравнение разрешено относительно производной функции, то его общий вид:

$$y' = f(x,\ y), \tag{22.2}$$

где f – некоторое выражение относительно x и y, $(x,\ y)\in D\subset \mathbf{R}^2$. В таком случае говорят, что дифференциальное уравнение записано в *нормальном виде*.

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y=y(x)$, которая обращает это уравнение в тождество.

Поиск решения дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*, а график этого решения – *интегральной кривой*.

Начальным условием (*условием Коши*) называется условие $y(x_0)=y_0$ $\left(x_0,\ y_0\in \mathbf{R}\right)$, которым задается дополнительное требование на решение $y(x)$ дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения (22.2) в области $D\ni (x,\ y)$ называется функция $y=j\,(x,\ C)$, удовлетворяющая условиям:

1) $j\,(x, C)$ является решением данного дифференциального уравнения при любом значении произвольной постоянной C;

2) для любого начального условия $y(x_0)=y_0$, такого, что $(x_0,\ y_0)\in D$, существует единственное значение $C=C_0$, при котором решение $y=j\,(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию.

Общее решение $\Phi(x,\ y, C)=0$, заданное в неявном виде, называется ***общим интегралом дифференциального уравнения***.

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, полученное из общего при конкретном значении $C=C_0$.

Задачей Коши называется задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию $y\left(x_0\right)=y_0$. Геометрически общему решению на координатной плоскости соответствует семейство интегральных кривых $y=j\,(x,\ C)$, зависящее от числового параметра C, а частному решению – определенная интегральная кривая, проходящая через точку $(x_0,\ y_0)$.

Теорема Коши. Если функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в области D, то решение дифференциального уравнения (22.2) при начальном условии $y(x_0)=y_0$, $(x_0,\ y_0)\in D$ существует и единственно.

Решение дифференциального уравнения, во всех точках которого не выполняется условие единственности, называется ***особым решением***. Особое решение не может быть получено из общего решения дифференциального уравнения ни при каком значении произвольной постоянной C.

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0, \tag{22.3}$$

где f_1, f_2 – функции переменной x, g_1, g_2 – функции переменной y, называется ***уравнением с разделяющимися переменными***.

Для решения уравнения (22.3) предполагают $f_2(x)\neq 0$ и $g_1(y)\neq 0$. Почленным делением уравнения (22.3) на $f_2(x)\cdot g_1(y)$ его сводят к уравнению

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy, \qquad (22.4)$$

которое в левой части содержит выражение только от переменной x, а в правой – только от переменной y (этим объясняется название данного типа дифференциальных уравнений). Далее интегрируют равенство (22.4) (слева – по переменной x, а справа – по y) и получают общее решение.

Ограничения $f_2(x)\neq 0$, $g_1(y)\neq 0$ могут привести к потере решений, поэтому следует решить уравнения $f_2(x)=0$ и $g_1(y)=0$ и установить подстановкой в заданное дифференциальное уравнение, являются ли они решением дифференциального уравнения. Затем необходимо определить, входят ли они в общее решение (или являются особыми).

Пример 1. Доказать, что функция $y=\frac{2}{3x}+\frac{x^2}{3}$ является решением дифференциального уравнения $(2y-xy')x=2$.

Решение. Продифференцируем функцию: $y'=-\frac{2}{3x^2}+\frac{2x}{3}$. Подставим ее в заданное дифференциальное уравнение:

$$\left(2\left(\frac{2}{3x}+\frac{x^2}{3}\right)-x\left(-\frac{2}{3x^2}+\frac{2x}{3}\right)\right)x=2;\quad \left(\frac{4}{3x}+\frac{2x^2}{3}+\frac{2}{3x}-\frac{2x^2}{3}\right)x=2.$$

В итоге получаем тождество

$$\frac{2}{x}\cdot x=2 \text{ или } 2=2.$$

Это доказывает, что функция $y=\frac{2}{3x}+\frac{x^2}{3}$ является решением заданного дифференциального уравнения.

Пример 2. Доказать, что равенство $(1+y^2)(1+x^2)=C$ является общим интегралом дифференциального уравнения $(x+xy^2)dx+(y+yx^2)dy=0$.

Решение. Вычислим производную неявной функции $F(x,\ y)=(1+y^2)(1+x^2)-C$ по формуле $y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$:

поскольку $F'_x=2x(1+y^2)$, $F'_y=2y(1+x^2)$, то

$$y'_x=-\frac{2x(1+y^2)}{2y(1+x^2)}=-\frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}.$$

Подставим y'_x и $dy=y'_xdx$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$(x+xy^2)dx+(y+yx^2)\left(-\frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}\right)dx=(x+xy^2-x-xy^2)dx=0.$$

Получили тождество $0=0$, что и доказывает требуемое.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $\sqrt{x^2+4}\,y'=x$; 2) $ydx+(1+x^2)dy=0$; 3) $y'+\cos y=1$.

Решение. 1) Используем то, что $y'=\frac{dy}{dx}$, и запишем исходное дифференциальное уравнение в виде

$$\sqrt{x^2+4}\frac{dy}{dx}=x \text{ или } \sqrt{x^2+4}dy=xdx.$$

Так как $\sqrt{x^2+4}\neq 0$ для всех $x\in\mathbf{R}$, то преобразуем уравнение к виду $dy=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$.

Интегрируем последнее равенство: $\int dy=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$. Получаем $y=\sqrt{x^2+4}+C$ – общее решение заданного дифференциального уравнения.

2) Предполагаем, что $y\neq 0$, а так как $1+x^2\neq 0$ для всех $x\in\mathbf{R}$, то преобразуем заданное дифференциальное уравнение к виду $-\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{y}$.

Интегрируем последнее равенство: $-\int\frac{dx}{1+x^2}=\int\frac{dy}{y}$.

Получаем:

$-\operatorname{arctg} x=\ln|y|+\ln C,\ \ C>0.$

Произвольную константу записали в форме $\ln C$ для удобства дальнейших преобразований:

$\ln C|y|=-\operatorname{arctg} x.$ $C|y|=e^{-\operatorname{arctg} x}$, т. е. $y=Ce^{-\operatorname{arctg} x}$.

Заметим, что преобразования аналитических выражений производятся с точностью до константы C.

Таким образом, $y = Ce^{-\operatorname{arctg} x}$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

Проверяем, является ли решением $y = 0$. Подставляем в заданное дифференциальное уравнение и видим, что $y = 0$ является решением дифференциального уравнения. Однако оно не является особым, так как получается из общего решения при $C = 0$.

Приходим к ответу:

$y = Ce^{-\operatorname{arctg} x}$ – общее решение, $C = const$.

3) Используя то, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \cos y.$$

Предполагаем, что $1 - \cos y \neq 0$ и преобразуем уравнение к виду $\dfrac{dy}{1-\cos y} = dx$. Используя формулу тригонометрии $2\sin^2\dfrac{a}{2} = 1 - \cos a$, интегрируем последнее равенство: $\displaystyle\int \frac{dy}{1-\cos y} = \int dx$, $\displaystyle\int \frac{dy}{2\sin^2\frac{y}{2}} = \int dx$.

Имеем:

$$-\operatorname{ctg}\frac{y}{2} = x + C \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg}\frac{y}{2} = C - x.$$

Таким образом, получаем $y = 2\operatorname{arcctg}(C - x) + 2p\,n,\ \ n \in \mathbf{Z}$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

Проверяем, дает ли равенство $1 - \cos y = 0$ особые решения. Получаем, $y = 2p\,k,\ \ k \in \mathbf{Z}$ – это есть особые решения исходного дифференциального уравнения. Таким образом, решение заданного дифференциального уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} y = 2\operatorname{arcctg}(C - x) + 2p\,n, \\ y = 2p\,k, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 4. Известно, что решением некоторого дифференциального уравнения является семейство парабол $y = x^2 + Cx$. Определить это дифференциальное уравнение.

Решение. Дифференцируя равенство $y = x^2 + Cx$, имеем

$$y' = 2x + C. \tag{22.5}$$

Выразим C из уравнения параболы: $C = \dfrac{y - x^2}{x}$, $x \neq 0$. Подставив найденное значение C в уравнение (22.5), получим $y' = 2x + \dfrac{y - x^2}{x}$, т. е.

$$y' - \frac{1}{x}y = x. \tag{22.6}$$

Заданное семейство парабол является решением дифференциального уравнения (22.6).

Пример 5. Доказать, что $x^2 - 4x + 2y + y^2 = C$ является общим интегралом дифференциального уравнения $(x-2)dx + (y+1)dy = 0$. Определить частные интегралы, если известно, что интегральные кривые проходят соответственно через точки (0, – 1) и (2, 0), построить эти кривые.

Решение. Вычислим производную неявной функции по формуле

$y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$, где $F(x,\ y) = x^2 - 4x + 2y + y^2 - C$.

Тогда $y'_x = -\dfrac{2x-4}{2y+2} = -\dfrac{x-2}{y+1}$. Подставим y'_x и $dy = y'_x dx$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$(x-2)dx + (y+1)\left(-\frac{x-2}{y+1}\right)dx = 0 \quad \text{или}$$

$$(x-2)dx - (x-2)dx = 0.$$

Получили тождество $0 = 0$. Это доказывает, что заданная неявно функция является общим интегралом исходного дифференциального уравнения. Для нахождения частных интегралов и проходящих через заданные точки интегральных кривых подставляем координаты этих точек в общий интеграл и определяем соответствующие константы.

Для точки (0, – 1) получаем: $-2 + 1 = C_1$ или $C_1 = -1$. Для точки (2, 0) получаем: $4 - 8 = C_2$ или $C_2 = -4$. Тогда частными интегралами будут:

$$x^2 - 4x + 2y + y^2 + 1 = 0 \ \text{ и } \ x^2 - 4x + 2y + y^2 + 4 = 0.$$

Интегральными кривыми являются концентрические окружности с центром в точке $(2,\ -1)$ и радиусами 2 и 1 соответственно. Это видно, если в полученных частных интегралах выделить полный квадрат по x и по y:

$(x-2)^2+(y+1)^2=4,$

$(x-2)^2+(y+1)^2=1.$

Графики интегральных кривых изображены на рис. 22.1.

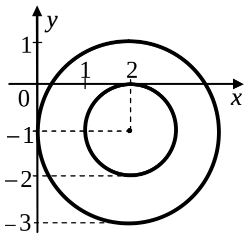


Рис. 22.1

Пример 6. Найти частное решение дифференциального уравнения:

1) $2xdx-(1+x^2)dy=0,\quad y(0)=0;$ 2) $\dfrac{y}{y'}=\ln y,\quad y(2)=1;$

3) $y'=2e^x\sin x,\quad y(0)=1.$

Решение. 1) Разделив уравнение на $1+x^2\neq 0,$ получим:

$$dy=\frac{2x}{1+x^2}dx.$$

Интегрируем левую и правую части:

$$y=\int\frac{2x}{1+x^2}dx;\quad y=\ln(1+x^2)+\ln C.$$

Получаем $y=\ln C(1+x^2)$ – общее решение исходного дифференциального уравнения. Подставляем начальное условие $y(0)=0$ и находим константу C:

$0=\ln C$ или $C=1.$

Нашли частное решение $y=\ln(1+x^2).$

2) Преобразуя заданное уравнение с учетом того, что $y'=\dfrac{dy}{dx},$ получаем $dx=\dfrac{\ln y}{y}dy.$ Далее интегрируем:

$$\int dx=\int\frac{\ln y}{y}dy \text{ или } x=\frac{\ln^2 y}{2}+C$$ – это общий интеграл исходного уравнения.

Используем начальное условие: в полученное решение подставляем $x=2$ и $y=1.$ Находим константу C:

$2=\dfrac{\ln^2 1}{2}+C,$ т. е. $C=2.$ Значит, $x=\dfrac{\ln^2 y}{2}+2,$ откуда получаем:

$2(x-2)=\ln^2 y$ – искомое частное решение (частный интеграл).

3) С учетом равенства $y'=\dfrac{dy}{dx}$ получаем $dy=2e^x\sin xdx.$ Интегрируем: $\int dy=2\int e^x\sin xdx$ или $y=2\int e^x\sin xdx+C.$ Вычисляем последний интеграл, дважды интегрируя по частям:

$$\int e^x\sin xdx=\left|\begin{matrix}u=e^x,\ du=e^xdx\\ dv=\sin xdx,\ v=-\cos x\end{matrix}\right|=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=e^x,\ du=e^xdx,\\ dv=\cos xdx,\ v=\sin x\end{matrix}\right|=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin xdx.$$

Отсюда получаем $2\int e^x\sin xdx=e^x(\sin x-\cos x).$

Таким образом, $y=e^x(\sin x-\cos x)+C$ – общее решение исходного дифференциального уравнения. Подставляя в него $x=0,\ y=1,$ находим C: $1=e^0(\sin 0-\cos 0)+C,$ т. е. $C=2.$ Частным решением является $y=e^x(\sin x-\cos x)+2.$

Задания

I уровень

1.1. Докажите, что данная функция является решением соответствующего дифференциального уравнения:

1) $y=\cos x+4x,\quad y'=4-\sin x;$

2) $y=x^2\ln x^3,\quad xy'=3x^2-2y;$

3) $y=\dfrac{(1-x)^3}{3}+(1-x)^2,\quad \dfrac{3y'}{x-3}+\dfrac{3y}{(1-x)^2}=7-4x;$

4) $y=e^{-x},\quad y'-e^xy^2+2y=0.$

1.2. Решите уравнение:

1) $y'=3\sqrt[3]{y^2};$ 2) $y'=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y;$ 3) $(y-3)dx+(x-3)dy=0;$

4) $y' = \dfrac{8}{x^2 - 16}$; 5) $y' = y^2 \sin x$; 6) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

1.3. Найдите частное решение уравнения:

1) $y' = 8x^3$, $y(0) = 0$; 2) $\sqrt{1 - x^2}\,dy - 2x\,dx = 0$, $y(0) = -2$;

3) $y' + \sin x = 0$, $y(p) = 1$; 4) $4(x+1)dx + (y-1)dy = 0$, $y(0) = 1$.

II уровень

2.1. Докажите, что заданная неявно функция является решением соответствующего дифференциального уравнения:

1) $y^2 - x^2 - y = 0$, $y'(x^2 + y^2) - 2xy = 0$;

2) $2x^2 + y^2 - 1 = 0$, $2x + yy' = 0$;

3) $y(\ln x + x) + y = 1$, $xy' - y^2 \ln x + y = 0$;

4) $y = |x|^m$, $xy' = my$.

2.2. Решите уравнение:

1) $y(1 + x^2)y' + x(1 + y^2) = 0$; 2) $e^x dx - (1 + e^x)y\,dy = 0$;

3) $y' = (x+2)^2 - 1$; 4) $y' = 2e^x \cos x$.

2.3. Решите задачу Коши:

1) $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$, $y(1) = 0$; 2) $\left(x^2 - 1\right)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$;

3) $xy' = \dfrac{2y}{\ln x}$, $y(e) = 1$; 4) $\left(xy^2 + y\right)dx - x\,dy = 0$, $y(1) = 1$.

5) $(y-3)dx + (x+4)dy = 0$, $y(-3) = 4$;

2.4. Докажите, что параметрически заданная функция $\begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$ является решением уравнения $(1 + xy)y' + y^2 = 0$.

2.5. Докажите, что соотношение $y(x-1) = C$ является общим решением (общим интегралом) дифференциального уравнения $(x-1)y' + y = 0$. Определите частные решения (частные

интегралы), если интегральные кривые проходят через точки (0, 0), (0, – 1) и (2, 1), постройте эти кривые.

III уровень

3.1. Постройте интегральные кривые дифференциального уравнения:

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2|xy|}{xy}$; 2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y}{3|x - y|}$;

3) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y + |y|}{x + |x|}$; 4) $\dfrac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{åñëè } y \neq x, \\ 1, & \text{åñëè } y = x. \end{cases}$

3.2. Составьте дифференциальное уравнение заданных семейств кривых:

1) $x^2 + y^2 - Cy = 0$; 2) $y = C\sin x + \cos x$;

3) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{C} = 1$; 4) $y + Ce^{\frac{x}{y-x}} = x$.

3.3. Составьте дифференциальное уравнение семейства окружностей с общим центром $O(3, 1)$.

3.4. Составьте дифференциальное уравнение семейства парабол, которые проходят через точку (1, 0) и для которых ось абсцисс является осью симметрии.

3.5. Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 2 м от начала отсчета пути и имела скорость 30 м/с. Найдите пройденный путь и скорость точки через 10 с после начала движения.

22.2. Однородные дифференциальные уравнения. Уравнения, сводящиеся к однородным

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy = 0 \tag{22.7}$$

называют ***однородным***, если обе функции f_1 и f_2 являются однородными функциями одной и той же степени *n*, т. е. для параметра *t* выполняются: $f_1(tx,\ ty)=t^n f_1(x,\ y)$, $f_2(tx,\ ty)=t^n f_2(x,\ y)$.

Однородное уравнение может быть сведено к виду

$$y'=j\left(\frac{y}{x}\right), \tag{22.8}$$

где j – некоторое выражение относительно $\dfrac{y}{x}$.

Для решения однородного уравнения его сводят вначале к виду (22.8), а затем заменяют $\dfrac{y}{x}=z$, где $z=z(x)$. Этой заменой дифференциальное уравнение (22.8) приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Иногда целесообразнее сделать замену $\dfrac{x}{y}=z$, где $z=z(y)$.

Дифференциальное уравнение вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{22.9}$$

при определенных значениях $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ сводится к однородному уравнению. Рассмотрим три возможных случая коэффициентов:

1. Если $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$, то делают замену переменных:

$$\begin{cases}x=u+a\,,\\ y=v+b\,,\ v=v(u),\end{cases} \tag{22.10}$$

где числа a и b находят как решение системы уравнений

$$\begin{cases}a_1a\ +b_1b\ +c_1=0,\\ a_2a\ +b_2b\ +c_2=0.\end{cases} \tag{22.11}$$

Этой заменой дифференциальное уравнение (22.9) сводится к уравнению

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right).$$

Далее его решают как однородное.

2. Если $k=\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$, то уравнение (22.9) записывают в виде

$$y'=f\left(\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),\ k\in\mathbf{R},$$

и затем заменяют $z=a_2x+b_2y$, где $z=z(x)$. Эта замена приводит к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

3. Если $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=k,\ k\in\mathbf{R}$, то имеем

$$y'=f\left(\frac{k(a_2x+b_2y+c_2)}{a_2x+b_2y+c_2}\right),$$

т. е. $dy=f(k)dx$. Далее интегрируют.

Пример 1. Решить уравнение:

1) $(x+2y)dx-xdy=0$; 2) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$;

3) $\left(y+x\sin\dfrac{x}{y}\right)dy-y\sin\dfrac{x}{y}dx=0.$

Решение. 1) $f_1(x,\ y)=x+2y$, $f_2(x,\ y)=-x$. Так как

$f_1(tx,\ ty)=t(x+2y)$, $f_2(tx,\ ty)=t(-x)$,

то f_1 и f_2 – однородные функции первой степени.

Делаем замену. Очевидно, что делением на $x\ (x\neq 0)$, уравнение сводится к виду $\left(1+2\dfrac{y}{x}\right)dx-dy=0$, т. е. $\dfrac{dy}{dx}=1+2\dfrac{y}{x}$ или $y'=1+2\dfrac{y}{x}$.

Заменяем $\dfrac{y}{x}=z$, где $z=z(x)$, откуда $y=x\cdot z$ и $y'=z+xz'$. Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, получаем: $z+xz'=1+2z$, т. е. $x\dfrac{dz}{dx}=1+z.$

Разделяем переменные (при условии $1+z\neq 0$): $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{1+z}$. Интегрируем: $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dz}{1+z}$ или $\ln|x|=\ln|1+z|+\ln C$. Отсюда $\dfrac{x}{1+z}=C.$

Возвращаемся к старым переменным, подставляем вместо *z* выражение $\frac{y}{x}$. Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения имеет вид: $\frac{x^2}{x+y}=C$.

Рассмотрим отдельно возможные решения $x=0$ и $1+z=0$, которые мы исключали. В последнем случае имеем $1+\frac{y}{x}=0$, т. е. $y=-x$. Подставляем $x=0$ и $y=-x$ в заданное дифференциальное уравнение и убеждаемся, что они также являются его решениями. При этом решение $x=0$ содержится в формуле общего интеграла при $C=0$. Решение $y=-x$ не содержится в полученной формуле общего интеграла.

Поэтому окончательное решение: $\left[\begin{array}{l}\frac{x^2}{x+y}=C,\\ y=-x.\end{array}\right.$

2) Разделив дифференциальное уравнение на x $(x\neq 0)$, получаем: $y'=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$ – это однородное дифференциальное уравнение. После замены $\frac{y}{x}=z$, где $z=z(x)$, имеем $z+xz'=\sqrt{1-z^2}+z$.

Далее приводим подобные и разделяем переменные, считая $1-z^2\neq 0$, т. е. $z\neq\pm 1$. Получаем $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{dx}{x}$. Интегрируем и получаем $\arcsin z=\ln|x|+C$.

Возвращаемся к старым переменным, получаем общее решение:

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|+C.$$

Анализируем, являются ли решениями $x=0$ и $z=\pm 1$, т. е. $y=\pm x$. Подставляем $x=0$, $y=x$, $y=-x$ в заданное дифференциальное уравнение и убеждаемся, что $x=0$ не является решением заданного дифференциального уравнения, а $y=x$, $y=-x$ являются решениями, которые не входят в полученное общее решение. Приходим к решению исходного дифференциального уравнения:

$$\left[\begin{array}{l}\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|+C,\\ y=\pm x.\end{array}\right.$$

3) Запишем заданное уравнение в виде

$$\left(y+x\sin\frac{x}{y}\right)-y\sin\frac{x}{y}\frac{dx}{dy}=0.$$

Делим его на y $(y\neq 0)$:

$$\left(1+\frac{x}{y}\sin\frac{x}{y}\right)-\sin\frac{x}{y}x'=0. \qquad (22.12)$$

Делаем замену $\frac{x}{y}=z$, где $z=z(y)$, т. е. $x=yz$ и $x'=z+yz'$. После подстановки в уравнение (22.12) получаем:

$(1+z\sin z)-\sin z(z+yz')=0$, т. е.

$(1+z\sin z)dy-\sin z(ydz+zdy)=0$.

После упрощения имеем $dy-y\sin zdz=0$.

Делим переменные: $\frac{dy}{y}=\sin zdz$.

Интегрирование дает:

$\ln|y|=-\cos z+C$ или $\ln|y|+\cos z=C$.

Возвращаемся к старым переменным, используя $z=\frac{x}{y}$. Тогда общий интеграл имеет вид: $\ln|y|+\cos\frac{x}{y}=C$.

Пример 2. Решить задачу Коши:

1) $(y^2-x^2)dx-2xydy=0$, $y(1)=1$.

2) $(y-2x)dx+(x+2y)dy=0$, $y(1)=3$.

Решение. 1) Это однородное уравнение. Разделив заданное уравнение на x^2, $x\neq 0$, получаем:

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)dx-2\frac{y}{x}dy=0.$$

Делаем замену $\frac{y}{x}=z$, $dy=xdz+zdx$ где $z=z(x)$:

$(z^2-1)dx-2z(xdz+zdx)=0$

или, приведя подобные,

$-(z^2+1)dx-2zxdz=0$.

Разделяем переменные:

$$\frac{2z}{z^2+1}dz = -\frac{dx}{x}, \quad (z^2+1 \neq 0).$$

Интегрируем последнее уравнение:

$$\ln(z^2+1) = -\ln|x| + \ln C,$$

т. е., используя свойства логарифма, имеем $z^2+1 = \dfrac{C}{|x|}$.

Возвращаясь к старым переменным, получаем: $\dfrac{y^2}{x^2}+1 = \dfrac{C}{|x|}$ – общий интеграл исходного уравнения.

Подставляем в него начальные условия $x=1$, $y=1$ и находим C:

$\dfrac{1}{1}+1 = \dfrac{C}{1}$ или $C=2$.

Значит, решением задачи Коши является

$$\frac{y^2}{x^2}+1 = \frac{2}{|x|}.$$

2) Это уравнение однородное. Разделив его на x $(x \neq 0)$, получаем:

$$\left(\frac{y}{x}-2\right)dx + \left(1+2\frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

Делаем замену $\dfrac{y}{x} = z$, где $z = z(x)$, $y = xz$, $dy = xdz + zdx$:

$$(z-2)dx + (1+2z)(xdz+zdx) = 0.$$

Приводим подобные:

$(z-2+z+2z^2)dx + x(1+2z)dz = 0$ или

$$2(z^2+z-1)dx + x(1+2z)dz = 0.$$

Разделяем переменные, считая $z^2+z-1 \neq 0$:

$$\frac{1+2z}{z^2+z-1}dz + \frac{2dx}{x} = 0. \qquad (22.13)$$

Далее интегрируем уравнение (22.13) и получаем:

$$\ln\left|z^2+\ z-1\right| + 2\ln|x| = \ln C.$$

Используем свойства логарифма и получаем: $(z^2+z-1)x^2 = C$.

Возвращаемся к старым переменным:

$\left(\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{y}{x}-1\right)x^2 = C$ или $y^2+xy-x^2 = C$.

Отсюда получаем:

$y^2+xy-x^2 = C$ – общий интеграл заданного уравнения. Подставив в него начальные условия: $x=1$, $y=3$, получим $C=11$.

Решение задачи Коши: $y^2+xy-x^2 = 11$.

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения:

1) $y' = \dfrac{-2x+4y-6}{x+y-3}$; 2) $y' = \dfrac{2x+y+1}{4x+2y-3}$; 3) $y' = \dfrac{2x+y+1}{4x+2y+2}$.

Решение. 1) Это уравнение не является однородным, но сводится к однородному дифференциальному уравнению. Так как $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, т. е. $\dfrac{-2}{1} \neq \dfrac{4}{1}$, сделаем замену переменных по формуле (22.10):

$$\begin{cases} x = u+a \\ y = v+b, \ v = v(u). \end{cases} \qquad (22.14)$$

Числа a и b найдем из системы уравнений (22.11):

$\begin{cases} -2a+4b-6=0, \\ a+b-3=0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} a=1, \\ b=2. \end{cases}$

Тогда система уравнений (22.14) примет вид $\begin{cases} x = u+1, \\ y = v+2. \end{cases}$

Подставив эту замену в заданное уравнение, получим:

$\dfrac{dv}{du} = \dfrac{-2(u+1)+4(v+2)-6}{u+1+v+2-3}$ или

$\dfrac{dv}{du} = \dfrac{-2u+4v}{u+v}$ – однородное дифференциальное уравнение.

Сделаем замену переменных: $\dfrac{v}{u} = z$, где $z = z(u)$; $v = uz$, $dv = udz + zdu$. Подставив ее в последнее уравнение, получим:

$\dfrac{udz+zdu}{du} = \dfrac{-2u+4uz}{u+uz}$ или

$$(-2+4z)du = (1+z)(udz+zdu),$$

$$(-2+4z)du = u(1+z)dz + (z+z^2)du,$$

$$-u(1+z)dz = (z^2-3z+2)du.$$

Разделим переменные, полагая $z^2-3z+2 \neq 0$, получим:

$$\frac{1+z}{z^2-3z+2}\ dz = -\frac{du}{u}.$$

Преобразуем дробное выражение $\frac{1+z}{z^2-3z+2}$, представив его в виде суммы простейших дробей: $\frac{1+z}{z^2-3z+2}=\frac{3}{z-2}-\frac{2}{z-1}$.

Тогда получаем:

$$\left(\frac{3}{z-2}-\frac{2}{z-1}\right)dz=-\frac{du}{u}.$$

Интегрируем последнее уравнение:

$$3\ln|z-2|-2\ln|z-1|=-\ln|u|+\ln C_1,$$

$$\ln\frac{|z-2|^3}{(z-1)^2}+\ln|u|=\ln C_1,$$

$$\frac{u(z-2)^3}{(z-1)^2}=C.$$

Возвращаемся к старым переменным:

$$\frac{(x-1)\left(\frac{y-2}{x-1}-2\right)^3}{\left(\frac{y-2}{x-1}-1\right)^2}=C.$$

После упрощения получаем: $(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$ – общий интеграл заданного дифференциального уравнения.

Кроме того, решением исходного дифференциального уравнения будет $z^2-3z+2=0$ или $y=2x$ и $y=x+1$.

Решение $y=2x$ входит в общий интеграл при $C = 0$. Таким образом, искомое решение дифференциального уравнения

$$\left[\begin{array}{l}(y-2x)^3=C(y-x-1)^2,\\ y=x+1.\end{array}\right.$$

2) Так как $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, то заданное уравнение приводится к уравнению $y'=\frac{2x+y+1}{2(2x+y)-3}$.

Заменяем $z=2x+y$, где $z=z(x)$, $y=z-2x$, $y'=z'-2$.

Получим: $z'-2=\frac{z+1}{2z-3}$.

Разделяем переменные:

$\frac{dz}{dx}=\frac{5(z-1)}{2z-3}$ или $\frac{2z-3}{z-1}dz=5dx$, (считаем $z\neq 1$), т. е.

$$\left(2-\frac{1}{z-1}\right)dz=5dx.$$

Интегрируем:

$$2z-\ln|z-1|=5x+C.$$

Возвращаемся к старым переменным и получаем общий интеграл:

$$2y-\ln|2x+y-1|-x=C.$$

Кроме того, решением исходного дифференциального уравнения будет $z=1$ или $2x+y=1$, т. е. $y=1-2x$. Таким образом, искомое решение дифференциального уравнения:

$$\left[\begin{array}{l}2y-\ln|2x+y-1|-x=C,\\ y=1-2x.\end{array}\right.$$

3) Так как $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, т. е. $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, то заданное уравнение сводится к уравнению

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y+1}{2(2x+y+1)}.$$

После сокращения имеем $2dy=dx$. Интегрируем и получаем общее решение исходного дифференциального уравнения: $2y=x+C$.

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $(x^2-y^2)dy+2xydx=0$; 2) $2xdy-(x+2y)dx=0$;

3) $(y^4-2x^3y)dx+(x^4-2xy^3)dy=0$.

1.2. Решите задачу Коши:

1) $y'=\frac{x-y}{x-2y}$, $y(1)=1$; 2) $xy'=y-2x$, $y(1)=0$;

3) $y'=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, $y(1)=0$.

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $y' = \dfrac{x+y-1}{2x+2y-4}$; 2) $y' = \dfrac{3x+2y+1}{6x+4y+2}$;

3) $y' = \dfrac{y+2}{2x+y-4}$; 4) $y' = \dfrac{-7x+3y-7}{3x-7y-3}$.

2.2. Решите задачу Коши:

1) $(x+y-1)dx-(5x-7y+1)dy=0,\ y(0)=1$;

2) $(x+y+1)dx-(2x+2y-1)dy=0,\ y(0)=1$;

3) $(x+2y+1)dy-(2x-y+1)dx=0,\ y(0)=1$.

III уровень

3.1. Напишите уравнение кривой, проходящей через точку (– 1; – 1) так, что расстояние от начала координат до любой касательной к этой кривой равно абсциссе точки касания.

3.2. Докажите, что интегральные кривые уравнения $y' = \dfrac{y^2-2\sqrt{5x^4+x^2y^2+y^4}}{2x^2}$ пересекают прямую $y=2x$ под углом $j = \dfrac{p}{4}$.

22.3. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{22.15}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – заданные непрерывные функции, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***. Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение (22.15) имеет вид:

$$y' + p(x)y = 0 \tag{22.16}$$

и называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением***. Если $q(x)\neq 0$, то уравнение (22.15) называют ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением***.

Однородное уравнение (22.16) решают, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Его общее решение имеет вид

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

где C – произвольная постоянная.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (22.15) можно найти одним из следующих методов.

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа):

1) находим общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y = Ce^{-\int p(x)dx}$, $C = const$, $C\in \mathbf{R}$;

2) общее решение линейного неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{22.17}$$

где $C = C(x)$ – некоторая функция, которую необходимо найти;

3) подставляем функцию (22.17) в уравнение (22.15) и находим функцию $C(x)$:

$$C(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

где C – произвольная постоянная;

4) общее решение уравнения (22.15) записываем в виде

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)\ e^{\int p(x)dx}dx\right). \tag{22.18}$$

Метод Бернулли:

1) ищем общее решение дифференциального уравнения (22.15) в виде

$$y = u\cdot v, \tag{22.19}$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – некоторые функции, которые надо найти;

2) подставляем функцию (22.19) и ее производную в уравнение (22.15), получаем:

$u'v+uv'+p(x)uv=q(x)$ или

$$u(v'+vp(x))+u'v=q(x); \tag{22.20}$$

3) функцию $v(x)$ подбираем как частное решение (при $C=0$) дифференциального уравнения

$$v'+vp(x)=0; \qquad (22.21)$$

4) при условии (22.21) решаем уравнение (22.20), которое приобретает вид

$u'v=q(x)$

как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (находим его общее решение);

5) общее решение исходного уравнения (22.15) записываем как произведение найденных функций $u(x)$ и $v(x)$, т. е. в виде (22.19).

З а м е ч а н и е. При решении дифференциальных уравнений методами Лагранжа и Бернулли реализуем «пошагово» описанные алгоритмы.

Уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x)y^m, \qquad (22.22)$$

где $m\in \mathbf{R}$, называется ***уравнением Бернулли***.

Если $m=0$, то это линейное дифференциальное уравнение, если $m=1$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Если $m\neq 0;\ 1$, то при решении таких уравнений также применяют метод Лагранжа или метод Бернулли.

Пример 1. Решить уравнение двумя способами:

1) $xy'-4y=2x^4$; 2) $y'-\dfrac{y}{x}=-2x^3$.

Решение. 1) Преобразуем уравнение (полагая $x\neq 0$) к виду линейного неоднородного дифференциального уравнения

$y'-\dfrac{4}{x}y=2x^3$.

1-й способ. Решим методом Лагранжа. Найдем общее решение соответствующего ему однородного уравнения $y'-\dfrac{4}{x}y=0,\ \dfrac{dy}{y}=\dfrac{4dx}{x}$.

Интегрируем и получаем:

$\ln|y|=4\ln|x|+\ln C$

или $y=Cx^4$, где $C=const$.

Общее решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$y=Cx^4, \qquad (22.23)$$

где $C=C(x)$ – функция от переменной x.

Найдем $C(x)$. Для этого дифференцируем (22.23):

$y'=C'x^4+4Cx^3$.

Подставляем функцию (22.23) и ее производную в исходное дифференциальное уравнение:

$x(C'x^4+4Cx^3)-4Cx^4=2x^4$.

Упрощаем полученное уравнение и решаем относительно C'. Получаем: $C'=\dfrac{2}{x}$.

Далее интегрируем:

$C(x)=\int\dfrac{2}{x}dx+C,\ \ C(x)=2\ln|x|+C;\ \ C(x)=\ln x^2+C$. Подставляем найденное выражение вместо C в равенство (22.23). Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $y=(\ln x^2+C)x^4$.

2-й способ. Ищем общее решение исходного уравнения в виде (22.19). После подстановки получим:

$$u\left(v'-v\cdot\frac{4}{x}\right)+u'v=2x^3. \qquad (22.25)$$

Подбираем функцию v как частное решение (при $C=0$) уравнения

$v'-\dfrac{4v}{x}=0$, т. е. $\dfrac{dv}{v}=\dfrac{4dx}{x}$.

Вследствие интегрирования имеем:

$\ln|v|=4\ln|x|,\ \ v=x^4$.

Подставляем найденную функцию v в (22.25), получаем:

$u'x^4=2x^3$.

Находим общее решение последнего уравнения, разделяя переменные:

$du=\dfrac{2}{x}dx$.

Интегрируем и получаем:

$u=2\ln|x|+C$ или $u=\ln x^2+C$, где $C=const$.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид (в соответствии с (22.19)):

$y=(\ln x^2+C)x^4$.

Вывод: в данном примере решение методом Бернулли (*2-й способ*) оказалось более рациональным, так как быстрее привело к ответу.

2) *1-й способ*. Решим уравнение методом Лагранжа. Находим общее решение соответствующего ему однородного уравнения

$y' - \frac{y}{x} = 0$, т. е. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$.

Интегрирование дает:

$\ln|y| = \ln|x| + \ln C$ или $y = Cx$, $C = const$.

Общее решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$y = Cx, \qquad (22.26)$$

где $C = C(x)$.

Дифференцируем функцию (22.26):

$y' = C'x + C$.

Подставляем функцию (22.26) и ее производную в исходное дифференциальное уравнение:

$C'x + C - \frac{Cx}{x} = -2x^3$, $C'x = -2x^3$, $C' = -2x^2$. Интегрирование последнего равенства дает нам $C(x) = -\frac{2x^3}{3} + C$, где $C = const$.

Подставляем найденное выражение вместо $C(x)$ в (22.26). Получаем общее решение заданного уравнения:

$y = \left(-\frac{2}{3}x^3 + C\right)x$, т. е. $y = Cx - \frac{2}{3}x^4$.

2-й способ. Ищем общее решение в виде $y = uv$ (метод Бернулли), где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции, которые надо найти. Вычисляем производную $y' = u'v + uv'$ и подставляем ее вместе с функцией $y = uv$ в исходное уравнение. Получаем:

$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -2x^3$, т. е.

$$u\left(v' - \frac{v}{x}\right) + u'v = -2x^3. \qquad (22.27)$$

Согласно методу, полагаем $v' - \frac{v}{x} = 0$. Из этого уравнения (как из дифференциального уравнения с разделяющимися переменными) найдем функцию $v(x)$. Интегрируем равенство $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$ и находим $\ln|v| = \ln|x|$ (константу C полагаем равной нулю).

Из последнего уравнения имеем: $v = x$. Возвращаемся к уравнению (22.27). С учетом равенства нулю выражения в скобках и найденной функции $v(x)$ оно имеет вид:

$u'x = -2x^3$ или $du = -2x^2 dx$.

Интегрируем последнее равенство. Получаем:

$u = \int -2x^2 dx = -\frac{2}{3}x^3 + C$,

где $C = const$.

Тогда общее решение $y = u \cdot v$ исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$y = \left(-\frac{2}{3}x^3 + C\right)x$, т. е. приходим к ответу:

$y = Cx - \frac{2}{3}x^4$.

Вывод: более рациональным оказался метод Лагранжа (*1-й способ*), так как быстрее привел к общему решению исходного дифференциального уравнения.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

1) $y' + y = x + 1$, $y(0) = 1$; 2) $y' - 3y = e^x$, $y(0) = 0$.

Решение. 1. Найдем общее решение методом Лагранжа. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$y' + y = 0$.

Решаем его как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, т. е.

$\frac{dy}{y} = -dx$.

Его решением является $y = Ce^{-x}$, где $C = const$.

Ищем общее решение заданного дифференциального уравнения в виде

$$y = Ce^{-x}, \qquad (22.28)$$

где $C = C(x)$ – некоторая функция.

Найдем функцию $C(x)$. Дифференцируем выражение (22.28):

$y' = C'e^{-x} - Ce^{-x}$.

Подставляем найденную производную и функцию (22.28) в заданное уравнение, получаем:

$C'e^{-x} - Ce^{-x} + Ce^{-x} = x + 1$, т. е.

$C'e^{-x} = x+1$ или $C'(x) = e^{x}(x+1)$.

Тогда $C(x) = \int e^{x}(x+1)dx + C$. Интегрируя по частям, получим:

$C(x) = xe^{x} + C$,

где $C = const$.

Найденное выражение $C(x)$ подставляем в равенство (22.28), получаем: $y = x + Ce^{-x}$.

Найдем частное решение, используя начальное условие. Если $x = 0$ и $y = 1$, то $C = 1$. Значит, частное решение имеет вид: $y = x + e^{-x}$.

2) Найдем общее решение методом Бернулли, т. е. в виде $y = u \cdot v$.

После подстановки производной $y' = u'v + uv'$ и самой функции $y = uv$ в исходное дифференциальное уравнение получаем:

$u'v + uv' - 3uv = e^{x}$, т. е.

$$u\left(v' - 3v\right) + u'v = e^{x}. \tag{22.29}$$

Полагаем $v' - 3v = 0$. Интегрируем это уравнение как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и находим $v(x)$:

$\frac{dv}{dx} = 3v, \ \frac{dv}{v} = 3dx,$

$\ln|v| = 3x$ (полагаем $C = 0$) или $v = e^{3x}$.

Возвращаемся к дифференциальному уравнению (22.29):

$u'e^{3x} = e^{x}, \ u' = e^{-2x}, \ \frac{du}{dx} = e^{-2x}.$

Имеем уравнение $du = e^{-2x}dx$, которое интегрируем, и получаем:

$u = \int e^{-2x}dx = -\frac{e^{-2x}}{2} + C,$

где $C = const$.

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \left(-\frac{e^{-2x}}{2} + C\right)e^{3x} \text{ или } y = Ce^{3x} - \frac{e^{x}}{2}.$$

Найдем частное решение, используя начальное условие. Если $x = 0$ и $y = 0$, то $C = \frac{1}{2}$. Значит, частное решение имеет вид: $y = \frac{e^{3x} - e^{x}}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение:

1) $xy' + y = \frac{y^2 \ln x}{5}$; 2) $y'x^2 \cos y + y = xy'$.

Решение. 1) Это уравнение Бернулли. Будем искать общее решение методом Бернулли, т. е. в виде $y = u \cdot v$.

После подстановки получим:

$$x\left(u'v + uv'\right) + uv = \frac{u^2v^2 \ln x}{5}.$$

После упрощения имеем:

$$u(xv' + v) + u'vx = \frac{u^2v^2 \ln x}{5}. \tag{22.30}$$

Полагая $xv' + v = 0$, находим функцию $v = v(x)$:

$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \ \ln|v| = -\ln|x|,$

$v = \frac{1}{x}$ (полагаем $C = 0$).

Подставляем найденную функцию $v = \frac{1}{x}$ в дифференциальное уравнение (22.30):

$u' \cdot \frac{1}{x} \cdot x = \frac{u^2 \cdot \frac{1}{x^2} \ln x}{5}$ или $\frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{5x^2}dx.$

Интегрируем последнее уравнение:

$-\frac{1}{u} = \int \frac{\ln x}{5x^2}dx + \tilde{N}.$

После интегрирования по частям получаем:

$-\frac{1}{u} = -\frac{1}{5x}\left(\ln x + 1\right) + C$, откуда $u = \frac{5x}{\ln x + 1 + 5xC}$.

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \frac{5}{\ln x + 5Cx + 1}.$$

2) Запишем заданное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}x^2 \cos y + y = x\frac{dy}{dx}.$$

Это уравнение не является линейным дифференциальным уравнением вида (22.15) или уравнением Бернулли вида (22.22). Умножим заданное уравнение на $\frac{dx}{dy}$, получим: $x^2\cos y + y\frac{dx}{dy} = x$.

Разделим его на y ($y \neq 0$) и получим уравнение Бернулли

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{x^2}{y}\cos y, \tag{22.31}$$

решением которого является функция $x = x(y)$. Ищем общее решение последнего дифференциального уравнения в виде $x = u\cdot v$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$. Находим производную $x' = u'v + uv'$ и подставляем ее вместе с функцией в уравнение (22.31):

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = -\frac{u^2v^2}{y}\cos y \quad \text{или}$$

$$u\left(v' - \frac{v}{y}\right) + u'v = -\frac{u^2v^2}{y}\cos y. \tag{22.32}$$

Найдем $v(y)$, решая уравнение

$v' - \frac{v}{y} = 0$, т. е. $\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$.

Интегрирование дает:

$\ln|v| = \ln|y|$, т. е. $v = y$ (полагаем $C = 0$).

Подставляем найденную функцию v в уравнение (22.32):

$u'y = -\frac{u^2y^2}{y}\cos y$, $\frac{du}{u^2} = -\cos y dy$. Интегрируя последнее уравнение, получим:

$-\frac{1}{u} = -\sin y + C$ или $u = \frac{1}{C + \sin y}$.

Получаем общее решение (общий интеграл) заданного дифференциального уравнения:

$$x = \frac{y}{C + \sin y} \quad \text{или} \quad y = x(C + \sin y).$$

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $y' + 2y = 3x$; 2) $y' - 3y = e^{2x}$; 3) $xy' + y = -4x$; 4) $y' - 4xy = 3x$.

1.2. Решите задачу Коши:

1) $y' + 2y = e^{3x}$, $y(0) = 0$; 2) $y'\cos x - y\sin x = 1$, $y(0) = 1$;

3) $xy' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = 0$; 4) $y' - 2xy = 2x^4$, $y(0) = 1$.

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $y' + 2\operatorname{tg} x \cdot y = \operatorname{ctg}^2 x$; 2) $y' + y\cos x = 2e^{-\sin x}$;

3) $y' + y\operatorname{tg} x = -\frac{3}{\cos x}$; 4) $xy' + y = \frac{y^2\ln x}{2}$.

2.2. Решите задачу Коши:

1) $y' = \frac{y}{x + \ln y}$, $y(0) = 1$;

2) $(y^2 - 3x)y' - y = 0$, $y\left(\frac{6}{5}\right) = 1$;

3) $(y')^2 + 2(y^2 - 1)y' - 4y^2 = 0$, $y(0) = 1$;

4) $y'\sin 2x - 2y = 2\cos x$, $y\left(\frac{p}{4}\right) = \sqrt{2}$.

III уровень

3.1. Составьте уравнение кривой $y = y(x)$, проходящей через точку $A(a, a)$ и обладающей свойством: если в любой точке $N(x, y)$ кривой с ординатой, равной $|BN|$ (рис. 22.2) провести касательную до пересечения с осью ординат в точке C, то площадь трапеции $OCNB$ будет постоянной и равна a^2.

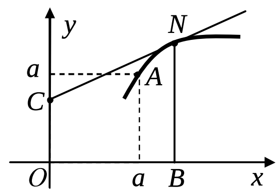


Рис. 22.2

3.2. Составьте уравнение кривой $y = y(x)$, проходящей через точку $O(0,\ 0)$ и обладающей свойством: середина отрезка ее нормали, заключенного между любой точкой кривой и осью абсцисс, лежит на параболе $y^2 = \frac{x}{2}.$

22.4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = 0 \qquad (22.33)$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u = u(x,\ y),$ т. е.

$$du = P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy. \qquad (22.34)$$

Тогда уравнение (22.33) равносильно уравнению $du = 0,$ общий интеграл которого определяется формулой

$$u(x,\ y) = C, \qquad (22.35)$$

где C – произвольная постоянная.

Для того чтобы дифференциальное уравнение (22.33) было уравнением в полных дифференциалах, ***необходимо*** и ***достаточно***, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (22.36)$$

при условии, что P'_y и Q'_x – непрерывны.

При решении уравнения (22.33) следует сделать следующее:

1) проверить выполнение равенства (22.36);

2) если равенство (22.36) выполняется, следует определить функцию $u = u(x,\ y)$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,\ y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,\ y); \end{cases} \qquad (22.37)$$

3) общий интеграл уравнения (22.33) получают в виде (22.35).

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение:

1) $(3x+5y)dx + (5x-3y)dy = 0;$ 2) $(e^x - y)dx + (y - x + 1)dy = 0.$

Решение. 1) Это уравнение вида (22.33), где $P(x,y) = 3x+5y,$ $Q(x,y) = 5x-3y.$ Проверим выполнение условия (22.36):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 5,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 5,\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Значит, заданное уравнение – в полных дифференциалах. Определим функцию $u(x,\ y)$ из системы уравнений (22.37)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x+5y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 5x-3y. \end{cases} \qquad (22.38)$$

Интегрируем первое уравнение по x, считая y постоянной величиной:

$$u(x,y) = \int (3x+5y)\,dx = \frac{3x^2}{2} + 5xy + C(y), \qquad (22.39)$$

где в качестве произвольной постоянной относительно переменной x выступает функция $C = C(y),$ которую нужно найти. Для этого функцию (22.39) дифференцируем по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x + C'(y).$$

Правую часть полученного равенства приравниваем к правой части второго уравнения системы (22.38):

$$5x + C'(y) = 5x - 3y,$$

откуда получаем $C'(y) = -3y.$

Интегрируем последнее равенство:

$$C(y) = \int (-3y)\ dy = -\frac{3y^2}{2} + C_1,$$

где $C_1 = const.$

Подставляем найденную функцию $C(y)$ в (22.39):

$$u(x,y) = \frac{3x^2}{2} + 5xy - \frac{3y^2}{2} + C_1.$$

Согласно формуле (22.35), получаем:

$$\frac{3}{2}\left(x^2 - y^2\right) + 5xy + C_1 = C_2,$$

где $C_2 = const,$ т. е.

$\frac{3}{2}\left(x^2 - y^2\right) + 5xy = C,$ $(C = const)$ – общий интеграл заданного дифференциального уравнения.

2) В заданном примере имеем $\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1.$ Значит, это уравнение в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x, y)$ из системы уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=e^x-y,\\ \frac{\partial u}{\partial y}=y-x+1.\end{cases} \tag{22.40}$$

Интегрируем первое уравнение системы:

$u(x,\ y)=\int(e^x-y)dx+C(y),$ т. е.

$u\left(x,y\right)=e^x-xy+C\left(y\right),$ где $C(y)$ – функция от y, которую надо найти. Дифференцируем последнее равенство по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(e^x-xy+C(y))',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x+C'\left(y\right).$$

Используя полученное равенство и второе равенство системы (22.40), приравниваем их правые части:

$-x+C'(y)=y-x+1$ или $dC=(y+1)dy.$

Интегрированием получаем далее

$$C(y)=\int\left(y+1\right)dy=\frac{y^2}{2}+y+C_1,$$

где $C_1=const.$

Тогда $u(x,\ y)=e^x-xy+\frac{y^2}{2}+y+C_1.$

Общий интеграл заданного дифференциального уравнения:

$$e^x-xy+\frac{y^2}{2}+y=C.$$

Пример 2. Решить задачу Коши:

1) $(\sin x-2xy)dx-(x^2+\cos y)dy=0,\quad y\left(0\right)=\frac{p}{2};$

2) $(2y-e^{-2x})dx+(2x+e^y)dy=0,\quad y\left(0\right)=0.$

Решение. 1) В заданном примере $\frac{\partial P}{\partial y}=-2x,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x.$ Значит, это уравнение в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x, y)$ из

системы уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\sin x-2xy,\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-x^2-\cos y.\end{cases} \tag{22.41}$$

Интегрируем первое уравнение системы:

$$u(x,y)=\int\left(\sin x-2xy\right)dx+C\left(y\right).$$

Получаем:

$$u(x,y)=-\cos x-x^2y+C(y),$$

где $C(y)$ – функция от y, которую надо найти. Дифференцируем последнее равенство по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2+C'(y).$$

Используем полученное равенство и второе равенство системы (22.41), приравниваем их правые части:

$-x^2+C'(y)=-x^2-\cos y$ или $dC=-\cos y dy.$

Интегрированием получаем:

$$C(y)=-\sin y+C_1,$$

где $C_1=const.$

Тогда общий интеграл заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\cos x+\sin y+x^2y=C,$$

где $C=const.$

Используем начальное условие $x=0,\quad y=\frac{p}{2}$ и находим константу C:

$\cos 0+\sin\frac{p}{2}+0\cdot\frac{p}{2}=C$ или $C=2.$

Поэтому решением задачи Коши является

$$\cos x+\sin y+x^2y=2.$$

2) Проверяем условие (22.36): $\frac{\partial P}{\partial y}=2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2,$ значит, заданное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Находим функцию $u(x, y)$ из системы уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=2y-e^{-2x},\\ \frac{\partial u}{\partial y}=2x+e^y.\end{cases} \tag{22.42}$$

Интегрируем первое уравнение системы:

$$u(x, y) = \int (2y - e^{-2x})dx + C(y).$$

Получаем:

$$u(x, y) = 2xy + \frac{e^{-2x}}{2} + C(y),$$

где $C(y)$ – неизвестная функция от y, которую надо найти. Дифференцируем последнее равенство по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + C'(y).$$

Используя полученное равенство и второе равенство системы (22.42), приравниваем правые части:

$2x + e^y = 2x + C'(y)$ или $dC = e^y dy$.

Интегрированием получаем:

$C(y) = e^y + C_1$, где $C_1 = const$.

Тогда общий интеграл заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$2xy + \dfrac{1}{2e^{2x}} + e^y = C$, где $C = const$.

Используя начальное условие $x = 0, \quad y = 0$, находим константу C:

$\dfrac{1}{2e^0} + e^0 = C$ или $C = \dfrac{3}{2}$.

Тогда решением задачи Коши является:

$2xy + \dfrac{1}{2e^{2x}} + e^y = \dfrac{3}{2}$ или $4xy + e^{-2x} + 2e^y = 3$.

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $(x^2 - y^3)dx - 3xy^2 dy = 0$; 2) $(\sqrt{x} - 3xy^2)dx - (3x^2 y + y^2 - 2)dy = 0$;

3) $(4x + e^{-x} y)dx - e^{-x} dy = 0$; 4) $(3x - \cos 2x)dx + (\sin y - e^{4y})dy = 0$.

1.2. Решите задачу Коши:

1) $(2x^3 + 3x^2 y + 7y^2)dx + (x^3 + 14xy + 4y^3)dy = 0, \quad y(2) = 0$;

2) $(y^2 + 6xy - 3x^2)dx + (3x^2 + 2xy)dy = 0, \quad y(1) = 1$;

3) $(2xy - \ln y)dx - \left(\dfrac{x}{y} - x^2 + 5\right)dy = 0, \quad y(0) = -1.$

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $\left(\dfrac{x}{y^2} + 1\right)dx - \dfrac{x^2}{y^3}dy = 0$; 2) $(x^2 - xy)dx - \left(xy + \dfrac{3}{2}\sqrt{y}\right)dy = 0$;

3) $\left(x + \dfrac{y}{x^2 - y^2}\right)dx + \left(y - \dfrac{x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0.$

2.2. Решите задачу Коши:

1) $3x(y + x)^2 dx + x^2(3y + 2x)dy = 0, \quad y(1) = 2$;

2) $\sqrt{x - y^2}\,dx - 2y(1 + \sqrt{x - y^2})dy = 0, \quad y(1) = 1$;

3) $(y\cos x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin x)dy = 0, \quad y\left(\dfrac{p}{2}\right) = 1.$

III уровень

3.1. Определите тип дифференциального уравнения и решите его:

1) $y'(2\sqrt{xy} - x) + y = 0$; 2) $(1 + e^x)yy' = e^x$;

3) $xy' + x + x(\ln y - \ln x) = 0$; 4) $\sin x dy = y \ln y dx$;

5) $\sqrt{x}dx + \sqrt{y}dy + \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$; 6) $xy' + x + x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x} = 0.$

22.5. Понятие дифференциальных уравнений высших порядков. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальным уравнением n-го порядка, $n \in \mathbf{N}$, называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (22.43)$$

Если уравнение (22.43) можно разрешить относительно старшей производной, то дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \qquad (22.44)$$

Решением дифференциального уравнения n-го порядка является всякая n раз дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество. Задача нахождения решения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, называется ***задачей Коши***.

Общим решением уравнения (22.43) называется функция

$$y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n), \qquad (22.45)$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Типы уравнений, допускающие понижение порядка

Уравнение вида

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \qquad (22.46)$$

или разрешенное относительно n-й производной

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (22.47)$$

решается последовательным интегрированием n раз.

Уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (22.48)$$

не содержащее явно искомой функции y и первых $(k-1)$-х ее производных, $k \in \mathbf{N}$, решают с помощью замены $z = y^{(k)}$, где $z = z(x)$. Таким образом, порядок исходного уравнения (22.48) понижается на k единиц.

Приходят к уравнению

$$F(x, z, ..., z^{(n-k)}) = 0.$$

Полученное уравнение решают далее в зависимости от его типа.

Уравнение вида

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (22.49)$$

не содержащее явно независимой переменной x, решают с помощью замены

$y' = z$, где $z = z(y)$, $y = y(x)$.

Этой заменой порядок исходного уравнения понижается на единицу, поскольку $y'' = z'_y y'_x = z'_y z$ (функцию $z(y)$ дифференцировали по x как сложную). Аналогично выражают y''' и т. д.

Уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (22.50)$$

называется ***однородным*** относительно искомой функции y и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$, если функция F однородна относительно $y, y', ..., y^{(n)}$, т. е.

$$F(x, l\,y, l\,y', ..., l\,y^{(n)}) = l^m F(x, y, y', ..., y^{(n)}),$$

где m – степень однородности, $m \in \mathbf{N}$;

l – произвольное число.

Для решения используется замена $z = \dfrac{y'}{y}$, где $z = z(x)$, понижающая порядок исходного уравнения на единицу.

Пример 1. Найти общее решение уравнения:

1) $y''' = -\sin 2x$; 2) $xy'' + 2y' = 0$;

3) $yy'' - 2(y')^2 = 0$; 4) $x^2 yy'' - (y - xy')^2 = 0$.

Решение. 1) Заданное уравнение имеет 3-й порядок. Это дифференциальное уравнение типа (22.47). Проинтегрируем последовательно три раза:

$$y'' = \int(-\sin 2x)\,dx = \frac{\cos 2x}{2} + C_1,$$

$$y' = \int\left(\frac{\cos 2x}{2} + C_1\right)dx = \frac{\sin 2x}{4} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int\left(\frac{\sin 2x}{4} + C_1 x + C_2\right)dx = -\frac{\cos 2x}{8} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Полученная функция $y = y(x)$ и есть общее решение исходного уравнения.

2) Это уравнение 2-го порядка, не содержащее явно искомой функции y, т. е. типа (22.48). Делаем замену $y' = z$, где $z = z(x)$. Дифференцируем замену еще раз, получаем $y'' = z'$. Подставляем выражения y' и y'' в исходное уравнение:

$$xz' + 2z = 0. \qquad (22.51)$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2dx}{x}, \quad z \neq 0, \quad x \neq 0.$$

В результате интегрирования имеем: $\ln|z| = -2\ln|x| + \ln C_1$, откуда $z = C_1 x^{-2}$ – общее решение уравнения (22.51).

Возвращаемся к старым переменным:

$y' = C_1 x^{-2}$ – уравнение первого порядка. Интегрируем его:

$$\int dy = \int C_1 x^{-2} dx.$$

Получаем $y = C_1 x^{-1} + C_2$ – общее решение исходного уравнения.

3) Это уравнение 2-го порядка, не содержащее явно независимой переменной x, т. е. типа (22.49). Делаем замену $y' = z$, где $z = z(y)$, $y = y(x)$. Дифференцируем замену по x как сложную функцию, получаем: $y'' = z'_y y'_x = z'z$. Подставляем выражения для y' и y'' в исходное уравнение:

$$yz'z - 2z^2 = 0. \tag{22.52}$$

Уравнение (22.52) – это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{dz}{dy} yz = 2z^2 \text{ или } \frac{dz}{z} = \frac{2dy}{y}, \quad z \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Далее интегрируя, имеем:

$\ln|z| = 2\ln|y| + \ln C_1$, откуда

$z = C_1 y^2$ – общее решение уравнения (22.52).

Возвращаемся к старым переменным, получаем $y' = C_1 y^2$ – уравнение с разделяющимися переменными. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2 \text{ или } \frac{dy}{y^2} = C_1 dx.$$

Интегрируем:

$-\dfrac{1}{y} = C_1 x + C_2$ или $y = \dfrac{1}{C_1 x + C_2}$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

4) Это уравнение 2-го порядка, однородное относительно y, y' и y'', так как

$$x^2 l\, y\, l\, y'' - (l\, y - x\, l\, y')^2 = l^2 (x^2 yy'' - (y - xy')^2),$$

где l – произвольное число.

Это уравнение типа (22.50). Делаем замену $z = \dfrac{y'}{y}$, где $z = z(x)$, отсюда получаем:

$$y' = zy. \tag{22.53}$$

Дифференцируем это равенство еще раз:

$y'' = z'y + zy'$.

С учетом (22.53) получаем:

$y'' = z'y + z^2 y, \quad y'' = y(z' + z^2)$.

Подставляем выражения для y' и y'' в исходное уравнение:

$x^2 yy(z' + z^2) - (y - xzy)^2 = 0$.

Делим его на y^2 $(y \neq 0)$:

$x^2 (z' + z^2) - (xz - 1)^2 = 0$.

После упрощения имеем уравнение

$x^2 z' - 1 + 2xz = 0$.

Делим его почленно на x^2 $(x \neq 0)$:

$$z' + \frac{2z}{x} = \frac{1}{x^2}. \tag{22.54}$$

Получили линейное уравнение 1-го порядка. Решаем его, например, методом Бернулли:

$z = uv, \quad z' = u'v + uv'$.

Тогда (22.54) примет вид:

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = \frac{1}{x^2}, \text{ т. е. } u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Полагаем $v' + \dfrac{2v}{x} = 0$, откуда $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{2dx}{x}$.

Интегрирование приводит к равенству

$\ln|v| = -2\ln|x|$.

Тогда имеем:

$v = \dfrac{1}{x^2}$ – искомая функция v.

Далее имеем:

$\dfrac{u'}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, т. е. $du = dx$, что означает $u = x + C_1$.

Отсюда $z = (x + C_1) x^{-2}$.

Возвращаемся к старым переменным:

$$\frac{y'}{y}=\left(x+C_1\right)x^{-2} \text{ или } \frac{dy}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}\right)dx.$$

Интегрируем:

$\ln|y|=\ln|x|-\frac{C_1}{x}+\ln C_2$, используя свойства логарифма, получаем:

$$\ln\left(\frac{y}{C_2 x}\right)=\frac{-C_1}{x} \text{ или } \frac{y}{C_2 x}=e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

Таким образом, $y=C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$ – общее решение исходного уравнения.

Пример 2. Найти частное решение уравнения:

1) $y''-2y'=0,\ \ y(0)=\frac{3}{2},\ \ y'(0)=1;$

2) $3yy''=2(y')^2,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=2;$

3) $y^{IV}=x\ln x,\ \ y(1)=1,\ \ y'(1)=0,\ \ y''(1)=-1,\ \ y'''(1)=0.$

Решение. 1) Заданное уравнение имеет 2-й порядок. Делаем замену $z=y',\ \ z=z(x)$. Тогда $y''=z'$, и заданное уравнение принимает вид:

$$z'-2z=0.$$

Получили дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{dz}{z}=2dx,\ \ \ln|z|=2x+\ln C_1 \text{ или } z=C_1e^{2x}.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим: $y'=C_1e^{2x}$.

Определим константу C_1 из начального условия $y'(0)=1$. Тогда $1=C_1e^0$ или $C_1=1$. Таким образом, $y'=e^{2x}$. Интегрируем и получаем:

$$y=\int e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}+C_2.$$

Определяем C_2 из 2-го начального условия: $y(0)=\frac{3}{2}$, т. е. $C_2=1$.

Частным решением исходного дифференциального уравнения является функция $y=\frac{e^{2x}}{2}+1$.

2) Это уравнение 2-го порядка, не содержащее явно переменную x. Делаем замену $y'=z,\ \ z=z(y),\ \ y=y(x)$. Тогда $y''=z'z$, и заданное уравнение примет вид $3yz'z=2z^2$. Получили уравнение 1-го порядка с

разделяющимися переменными. Интегрируем его:

$\frac{dz}{z}=\frac{2dy}{3y}$, имеем:

$$\ln|z|=\frac{2}{3}\ln|y|+\ln C_1 \text{ или } z=C_1y^{\frac{2}{3}}.$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$y'=C_1y^{\frac{2}{3}}.$$

Определяем C_1, используя 2-е начальное условие:

$2=C_1\cdot 1$, отсюда $C_1=2$.

Получаем $y'=2y^{\frac{2}{3}}$ – уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Его решение:

$$3y^{\frac{1}{3}}=2x+C_2 \text{ или } y=\frac{1}{27}\left(2x+C_2\right)^3.$$

Определяем константу C_2, используя первое начальное условие:

$1=\frac{1}{27}C_2^3$, откуда $C_2=3$.

Тогда частным решением заданного уравнения является функция $y=\frac{1}{27}\left(2x+3\right)^3$.

3) Это дифференциальное уравнение 4-го порядка типа (22.47). Проинтегрируем его последовательно четыре раза:

$$y'''=\int x\ln x dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C_1.$$

Определим константу C_1 из начального условия $y'''(1)=0$. Тогда $0=-\frac{1}{4}+C_1$ или $C_1=\frac{1}{4}$.

Интегрируем еще раз:

$$y''=\int\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\right)dx=\frac{x^3\ln x}{6}-\frac{5x^3}{36}+\frac{x}{4}+C_2.$$

Определяем C_2 из начального условия $y''(1)=-1$:

$$-1=-\frac{5}{36}+\frac{1}{4}+C_2 \text{ или } C_2=-\frac{10}{9}.$$

Интегрируем далее:

$$y' = \int\left(\frac{x^3\ln x}{6} - \frac{5x^3}{36} + \frac{x}{4} - \frac{10}{9}\right)dx = \frac{x^4\ln x}{24} - \frac{13x^4}{288} + \frac{x^2}{8} - \frac{10x}{9} + C_3.$$

Из начального условия $y'(1) = 0$ находим C_3:

$$0 = -\frac{13}{288} + \frac{1}{8} - \frac{10}{9} + C_3 \text{ или } C_3 = \frac{33}{32}.$$

Интегрируем в 4-й раз:

$$y = \int\left(\frac{x^4\ln x}{24} - \frac{13x^4}{288} + \frac{x^2}{8} - \frac{10x}{9} + \frac{33}{32}\right)dx = \frac{x^5\ln x}{120} - \frac{77x^5}{7200} + \frac{x^3}{24} -$$
$$-\frac{5x^2}{9} + \frac{33x}{32} + C_4.$$

Находим константу C_4 из начального условия $y(1) = 1$:

$$1 = -\frac{77}{7200} + \frac{1}{24} - \frac{5}{9} + \frac{33}{32} + C_4 \text{ или } C_4 = \frac{114}{225}.$$

Тогда частным решением заданного дифференциального уравнения является функция

$$y = \frac{x^5\ln x}{120} - \frac{77x^5}{7200} + \frac{x^3}{24} - \frac{5x^2}{9} + \frac{33x}{32} + \frac{114}{225}.$$

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $y^{IV} = 6x$; 2) $y''' = \cos 3x + 2$; 3) $(y'')^2 = y'$; 4) $y'' + 3x^2y' = 0$.

1.2. Решите задачу Коши:

1) $\sin^3 x y'' = \cos x$, $y\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{2}$, $y'\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{2}$;

2) $y'' = 2e^y$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$;

3) $y''y^3 = 1$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$;

4) $2\sqrt{y}y'' = y'$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 1$.

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $y'' = 2\cos x\sin^2 x - \cos^3 x$; 2) $(y'')^2 + (y')^2 = 4$;

3) $yy'' = (y')^2$; 4) $xy'' - y' = x\sin\frac{y'}{x}$;

5) $xy'' - y' = x^2\sin x$; 6) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 3x^2$.

2.2. Решите задачу Коши:

1) $e^x y''' = -x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$;

2) $y''' + (y'')^2 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = 1$;

3) $y''y^3 = 1$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$;

4) $y''(3y + 1) - 3y'^2 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

III уровень

3.1. Решите задачу Коши:

1) $y''' - 3y'y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{9}{2}$;

2) $1 - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{2y''}{y} = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

3) $y^4 - y^3y'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \sqrt{2}$;

4) $(y'' + xy')e^{\frac{x^2}{2}} = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

5) $yy'' - (y')^2 = y^2\ln y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

3.2. Найдите дифференциальное уравнение семейства окружностей $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 4$.

3.3. Составьте дифференциальное уравнение семейства плоских кривых $x^2 + y^2 + C_1x + C_2y + C_3 = 0$.

3.4. Покажите, что функция $y = y(x)$, параметрически заданная системой уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\ln t + \frac{3}{4t^2}, \\ y = \frac{1}{4}t + \frac{3}{4t^3},\ t > 0, \end{cases}$$

является решением уравнения $(y'')^2 - 2y'y'' + 3 = 0$.

22.6. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+a_1(x)y'+a_0(x)y=0. \qquad (22.55)$$

Общим решением этого уравнения является функция

$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$,

где y_1, y_2, ..., y_n – линейно-независимые частные решения уравнения (22.55), C_1, C_2, ..., C_n – произвольные постоянные.

Совокупность n линейно-независимых на (a, b) решений уравнения (22.55) называется ***фундаментальной системой решений***.

Частным случаем уравнения (22.55) является линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+...+a_1y'+a_0y=0, \qquad (22.56)$$

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ – действительные числа.

Для нахождения частных решений уравнения (22.56) составляют ***характеристическое уравнение***

$$l^n+a_{n-1}l^{n-1}+...+a_1l+a_0=0 \qquad (22.57)$$

путем замены в уравнении (22.56) производных определенного порядка на соответствующие степени параметра l: $y^{(k)}$ на l^k, где $k=0,\ 1,\ ...,\ n$.

Каждому корню уравнения (22.57) соответствует определенное частное решение дифференциального уравнения. Вид частного решения зависит от типа корня уравнения (22.57). Возможны следующие четыре случая, которые определяет ***правило частных решений***:

1. Если l_0 – действительный корень кратности 1 (простой корень), то ему соответствует решение вида $y=e^{l_0x}$.

2. Если l_1 – действительный корень кратности k, то ему соответствует k частных решений:

$y_1=e^{l_1x}$, $y_2=xe^{l_1x}$, ..., $y_k=x^{k-1}e^{l_1x}$.

3. Если $l_{2,3}=a\pm ib$ – пара комплексно-сопряженных корней, то им соответствует два частных решения:

$y_1=e^{ax}\cos bx$, $y_2=e^{ax}\sin bx$.

4. Если $l_{4,5}=a\pm ib$ – пара k-кратных комплексно-сопряженных корней, то им соответствуют $2k$ частных решения:

$y_1=e^{ax}\cos bx$, $y_2=xe^{ax}\cos bx, ...,$ $y_k=x^{k-1}e^{ax}\cos bx$,

$y_{k+1}=e^{ax}\sin bx$, $y_{k+2}=xe^{ax}\sin bx$, ..., $y_{2k}=x^{k-1}e^{ax}\sin bx$.

Поскольку характеристическое уравнение (22.57) имеет n корней, считая их кратность, то для дифференциального уравнения (22.56) по правилу частных решений можно указать n решений $y_1, y_2, ..., y_n$. Эти решения образуют фундаментальную систему решений.

Тогда общее решение уравнения (22.56) определяется формулой

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x)$,

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Пример 1. Найти общее решение уравнения:

1) $y''-25y=0$; 2) $y''-25y'=0$;

3) $y''-4y'+4y=0$; 4) $y''-2y'+2y=0$.

Решение. 1) Составим характеристическое уравнение

$l^2-25=0$.

Решая его, получаем: $l_1=5$, $l_2=-5$ – два действительных простых корня. Им соответствуют частные решения $y_1=e^{5x}$, $y_2=e^{-5x}$. Общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$y=C_1e^{-5x}+C_2e^{5x}$,

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

2) Составим характеристическое уравнение

$l^2-25l=0$.

Решая его, получаем: $l_1=0$, $l_2=25$ – два действительных простых корня. Им соответствуют частные решения $y_1=1$, $y_2=e^{25x}$. Общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$y=C_1+C_2e^{25x}$,

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

3) Характеристическое уравнение имеет вид:

$l^2-4l+4=0$ или $(l-2)^2=0$.

Отсюда $l=2$ – корень кратности 2.

Тогда решения $y_1=e^{2x}$ и $y_2=xe^{2x}$ образуют фундаментальную систему решений исходного дифференциального уравнения, а общее решение имеет вид:

$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$,

где C_1,C_2 – произвольные постоянные.

4) Характеристическое уравнение заданного дифференциального уравнения

$l^2-2l+2=0$.

Его корни: $l_1=1+i$, $l_2=1-i$ – простые комплексно-сопряженные. Тогда этой паре корней характеристического уравнения соответствуют два линейно-независимых частных решения заданного дифференциального уравнения:

$y_1=e^x\cos x$, $y_2=e^x\sin x$.

Получаем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$,

где C_1,C_2 – произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y'''-3y''+2y'=0$; 2) $y'''+3y''+4y'+2y=0$;

3) $y^{IV}-4y'''+5y''=0$; 4) $y^{VI}+3y^{IV}+3y''+y=0$.

Решение. 1) Запишем характеристическое уравнение заданного дифференциального уравнения

$l^3-3l^2+2l=0$.

Его корнями будут $l_1=0$, $l_2=1$, $l_3=2$, т. е. корни характеристического уравнения действительные и различные. Им соответствуют три линейно-независимых частных решения:

$y_1=1$, $y_2=e^x$, $y_3=e^{2x}$.

Общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид: $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{2x}$,

где C_1,C_2, C_3 – произвольные постоянные.

2) Составим характеристи ческое уравнение заданного дифференциального уравнения

$l^3+3l^2+4l+2=0$.

Его корни: $l_1=-1$, $l_2=-1+i$, $l_3=-1-i$. Им соответствуют три

линейно-независимых частных решения:

$y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{-x}\cos x$, $y_3=e^{-x}\sin x$.

Общее решение имеет вид:

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-x}\cos x+C_3e^{-x}\sin x$,

где C_1,C_2,C_3 – произвольные постоянные.

3) Характеристическое уравнение имеет вид:

$l^4-4l^3+5l^2=0$.

Его корни: $l_{1,2}=0$ (корень кратности 2), $l_3=2+i$, $l_4=2-i$. Им соответствуют четыре линейно-независимых частных решения вида

$y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=e^{2x}\cos x$, $y_4=e^{2x}\sin x$.

Общее решение имеет вид:

$y=C_1+C_2x+C_3e^{2x}\cos x+C_4e^{2x}\sin x$,

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

4) Запишем характеристическое уравнение заданного дифференциального уравнения

$l^6+3l^4+3l^2+1=0$.

Преобразуем это уравнение к виду

$(l^2+1)^3=0$.

Отсюда, очевидно, что корни характеристического уравнения $l_1=i$, $l_2=-i$ – комплексно-сопряженные кратности 3. Тогда им соответствуют шесть линейно-независимых частных решений вида

$y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$, $y_3=x\cos x$, $y_4=x\sin x$, $y_5=x^2\cos x$, $y_6=x^2\sin x$.

Общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3x\cos x+C_4x\sin x+C_5x^2\cos x+C_6x^2\sin x$,

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 – произвольные постоянные.

Пример 3. Решить задачу Коши:

1) $y''-6y'+9y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=9$;

2) $y^V+4y'''=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$, $y''(0)=4$, $y'''(0)=8$, $y^{IV}(0)=16$.

Решение. 1) Характеристическое уравнение имеет вид:

$l^2-6l+9=0$ или $(l-3)^2=0$.

Его корень $l=3$ – корень кратности 2. Тогда решения $y_1=e^{3x}$, $y_2=xe^{3x}$ образуют фундаментальную систему решений. Общее решение имеет вид:

$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

Чтобы найти константы C_1 и C_2, дифференцируем найденное общее решение:

$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x}$.

Затем подставляем начальные условия в выражения для y и y' и решаем систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 2 = C_1 e^0, \\ 9 = 3C_1 e^0 + C_2 e^0. \end{cases}$$

Получаем $C_1 = 2$, $C_2 = 3$. Тогда решение задачи Коши:

$y = 2e^{3x} + 3xe^{3x}$.

2) Характеристическое уравнение

$l^5 + 4l^3 = 0$ или $l^3(l^2 + 4) = 0$.

Его корни: $l_{1,2,3} = 0$ – корень кратности 3, $l_4 = 2i$, $l_5 = -2i$. Им соответствуют пять линейно-независимых решений:

$y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = \cos 2x$, $y_5 = \sin 2x$.

Общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x$.

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 продифференцируем полученное общее решение последовательно четыре раза:

$y' = C_2 + 2C_3 x - 2C_4 \sin 2x + 2C_5 \cos 2x$;

$y'' = 2C_3 - 4C_4 \cos 2x - 4C_5 \sin 2x$;

$y''' = 8C_4 \sin 2x - 8C_5 \cos 2x$;

$y^{IV} = 16C_4 \cos 2x + 16C_5 \sin 2x$.

Подставляя в выражения для y^{IV}, y''', y'', y', y начальные условия, находим константы:

$C_5 = -1$, $C_4 = 1$, $C_3 = 4$, $C_2 = 5$, $C_1 = 1$.

Тогда решение задачи Коши:

$y = 1 + 5x + 4x^2 + \cos 2x - \sin 2x$.

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $2y'' - 5y' + 2y = 0$; 2) $y'' + 16y = 0$;

3) $y'' - 4y = 0$; 4) $y^{IV} + 2y''' + 2y'' = 0$.

1.2. Решите задачу Коши:

1) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

2) $y''' - 5y'' + 6y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 4$;

3) $y''' + 9y' = 0$, $y\left(\frac{p}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{p}{2}\right) = 1$, $y''\left(\frac{p}{2}\right) = 1$;

4) $y^{IV} - 16y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 3$, $y'''(1) = 4$.

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $y''' + 2y'' + 9y' = 0$; 2) $y''' + 8y = 0$;

3) $y^{IV} - 8y' = 0$; 4) $y^{IV} - 4y''' + 4y'' - y' = 0$.

2.2. Решите задачу Коши:

1) $y''' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$;

2) $y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$, $y\left(\frac{p}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{p}{2}\right) = 2$, $y''\left(\frac{p}{2}\right) = 3$, $y'''\left(\frac{p}{2}\right) = 4$.

3) $y^{V} - 8y^{IV} + 16y''' = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 1$, $y^{IV}(0) = 1$.

III уровень

3.1. Составьте линейное дифференциальное уравнение по его фундаментальной системе решений:

1) e^{-x}, xe^{-x}; 2) 1, x, x^2, $\cos x$, $\sin x$;

3) 1, x, x^2; 4) $e^{-x}\cos x$, $e^{-x}\sin x$.

3.2. Докажите, что функции $y_1 = e^{\sqrt{2}x}(\cos\sqrt{2}x + i\sin\sqrt{2}x)$, $y_2 = e^{-\sqrt{2}x}(\cos\sqrt{2}x - i\sin\sqrt{2}x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' - 4iy = 0$. Проверьте:

1) являются ли решениями данного уравнения функции $u_1 = \operatorname{Re} y_1$, $u_2 = \operatorname{Re} y_2$, $v_1 = \operatorname{Im} y_1$, $v_2 = \operatorname{Im} y_2$;
2) имеет ли данное уравнение действительные решения.

22.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad (22.58)$$

где $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots, f(x)$ – непрерывные функции на некотором промежутке (a, b).

Если $f(x) \equiv 0$ в уравнении (22.58), то получаем ***соответствующее однородное дифференциальное уравнение***

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \qquad (22.59)$$

Общее решение уравнения (22.58) определяется формулой

$$y = y_0 + y_ч, \qquad (22.60)$$

где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_ч$ – частное решение неоднородного уравнения.

Для решения дифференциального уравнения (22.58) используют **метод Лагранжа** (метод вариации произвольных постоянных). Для его реализации необходимо сделать следующее:

1. Записать соответствующее однородное дифференциальное уравнение.

2. Найти фундаментальную систему частных решений

$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x)$

соответствующего однородного дифференциального уравнения.

3. Найти общее решение однородного уравнения в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (22.61)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – константы.

4. Решение заданного неоднородного дифференциального уравнения искать в виде (22.61), но считать, что $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x), \ldots, C_n = C_n(x)$ – функциональные коэффициенты, которые надо найти.

5. Для нахождения коэффициентов $C_k (k = \overline{1,n})$ решения уравнения (22.61) необходимо записать систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \qquad (22.62)$$

6. Решить систему (22.62) относительно $C_1', \ldots, C_n'$ и получить $C_1'(x) = j_1(x), \mathbf{K}, C_n'(x) = j_n(x)$.

7. Проинтегрировать полученные равенства для $C_k'(x)$, $k = \overline{1,n}$ и найти

$C_1(x) = \int j_1(x)dx + C_1,\ \ldots,\ C_n(x) = \int j_n(x)dx + C_n,$

где $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

8. Подставить полученные выражения вместо $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в записанное решение (22.61). Это и есть общее решение заданного дифференциального уравнения (22.58).

Согласно методу Лагранжа, сразу находим общее решение (22.60) заданного дифференциального уравнения (22.58) (без нахождения отдельно его частного решения $y_ч$).

Для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений (22.58) с постоянными коэффициентами и правой частью $f(x)$ специального вида используют **метод Эйлера** (метод неопределенных коэффициентов). Этот метод применим, если функция $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right), \qquad (22.63)$$

где $a, b \in \mathbf{R}$, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно.

Для реализации метода необходимо сделать следующее:

1. Решить соответствующее однородное дифференциальное уравнение (22.59), используя характеристическое уравнение:

$$l^n + a_{n-1}l^{n-1} + \ldots + a_1 l + a_0 = 0. \qquad (22.64)$$

Общее решение дифференциального уравнения (22.59) записать в виде

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (22.65)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – частные решения уравнения (22.59), полученные в соответствии с типом корней характеристического уравнения (22.64).

2. Записать контрольное число $s = a + bi$, где a, b – числа, которые заданы в (22.63). Определить, имеется ли число s среди корней уравнения (22.64). Если имеется, то какова кратность k этого корня.

3. Если $s = a + bi$ не содержится среди корней характеристического уравнения (22.64), то записать искомое частное решение $y_ч$ дифференциального уравнения (22.58) в виде

$$y_ч = e^{ax}(\overline{P}_r(x)\cos bx + \overline{Q}_r(x)\sin bx). \tag{22.66}$$

Если среди корней характеристического уравнения (22.64) имеется корень $s = a + bi$, кратность которого k, то искомое частное решение $y_ч$ дифференциального уравнения (22.58) записать в виде

$$y_ч = x^k e^{ax}(\overline{P}_r(x)\cos bx + \overline{Q}_r(x)\sin bx), \tag{22.67}$$

где в равенствах (22.66) и (22.67) $\overline{P}_r(x)$, $\overline{Q}_r(x)$ – многочлены степени r, $r = \max(n, m)$ – бóльшая степень заданных многочленов в (22.63). Многочлены $\overline{P}_r(x)$ и $\overline{Q}_r(x)$ необходимо записать в стандартном виде с буквенными коэффициентами.

4. Коэффициенты многочленов $\overline{P}_r(x)$, $\overline{Q}_r(x)$ найти методом неопределенных коэффициентов. Для этого необходимо вычислить производные $y'_ч$, $y''_ч$, $\mathbf{K}$, $y_ч^{(n)}$ функции (22.66) или (22.67) и подставить в левую часть уравнения (22.58). Далее надо привести подобные относительно $\cos bx$ и $\sin bx$, а затем приравнять многочлены при одноименных тригонометрических функциях. Используя равенство многочленов, записывают систему уравнений относительно искомых числовых коэффициентов.

5. Найденные значения числовых коэффициентов необходимо подставить в многочлены $\overline{P}_r$ и $\overline{Q}_r$ частного решения $y_ч$, записанного в виде функции (22.66) или (22.67).

6. Записать общее решение заданного дифференциального уравнения (22.58) в виде (22.60), где решение y_0 имеет вид (22.65), а $y_ч$ – решение вида, записанного в предыдущем 5-м «шаге».

З а м е ч а н и е 1. Форма записи (22.66) или (22.67) сохраняется и в случаях, когда в исходном уравнении (22.58) $P_n(x) = a$ или $Q_m(x) = b$, где a, b – числа. Тогда $\overline{P}_r(x) = A$, $\overline{Q}_r(x) = B$, где A, B – числа, которые надо найти.

З а м е ч а н и е 2. Если правая часть уравнения (22.58) есть сумма различных функций специального вида, то для нахождения $y_ч$ используют ***теорему о наложении решений***: если в уравнении (22.58) правая часть имеет вид:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x),$$

где $k \in \mathbf{N}$, а $y_{ч_1}, y_{ч_2}, \ldots, y_{ч_k}$ – частные решения уравнений

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f_1(x),$$
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f_2(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f_k(x),$$

соответственно, то функция

$$y_ч = y_{ч_1} + y_{ч_2} + \ldots + y_{ч_k}$$

является решением заданного уравнения.

3. Если в правой части $f(x)$ уравнения (22.58) присутствует только одно слагаемое с тригонометрической функцией (т. е. $P_n \cos bx$ или $Q_m \sin bx$), то общее решение и в этом случае записывают в виде (22.66) или (22.67), т. е. с двумя тригонометрическими функциями.

Пример 1. Решить уравнение методом Лагранжа:

1) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$; 2) $y'' - 4y = 4x$; 3) $y''' + 4y'' + y' - 6y = e^x$.

Решение. 1) Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Найдем решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$.

Его характеристическое уравнение $l^2 + 1 = 0$, корни которого $l_1 = -i$, $l_2 = i$ – комплексно-сопряженные, простые. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Общее решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \tag{22.68}$$

где $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ – функции, которые надо найти.

Для нахождения $C_1(x)$, $C_2(x)$ решим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ C_1'(\cos x)' + C_2'(\sin x)' = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Используем, например, метод Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

Тогда решениями системы будут:

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ C_2' = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1' = -1, \\ C_2' = \operatorname{ctg} x. \end{cases}$$

Интегрируя полученные равенства, получаем:

$$\begin{cases} C_1(x) = -x + C_1, \\ C_2(x) = \ln|\sin x| + C_2, \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Подставляем найденные значения функций в (22.68) и получаем общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|.$$

2) Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Найдем решение соответствующего однородного уравнения: $y'' - 4y = 0$. Его характеристическое уравнение $l^2 - 4 = 0$, корни которого $l_1 = 2$, $l_2 = -2$ – простые, действительные. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Общее решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, \qquad (22.69)$$

где $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ – функции, которые надо найти.

Для нахождения $C_1(x)$, $C_2(x)$ решим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1' e^{2x} + C_2' e^{-2x} = 0, \\ C_1'(e^{2x})' + C_2'(e^{-2x})' = 4x. \end{cases}$$

Используем метод Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^0 - 2e^0 = -4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ 4x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4xe^{-2x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 4x \end{vmatrix} = 4xe^{2x}.$$

Тогда решение системы:

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ C_2' = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1' = xe^{-2x}, \\ C_2' = -xe^{2x}. \end{cases}$$

Интегрируем полученные равенства:

$$C_1(x) = \int xe^{-2x}dx = \begin{vmatrix} u = x, \ du = dx \\ dv = e^{-2x}dx, \ v = -\dfrac{e^{-2x}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{xe^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2}dx =$$

$$= -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int -xe^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x, \ du = dx, \\ dv = e^{2x}dx, \ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{vmatrix} = -\left(\frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx\right) =$$

$$= -\frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C_2.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{xe^{-2x}}{2} - \dfrac{e^{-2x}}{4} + C_1, \\ C_2(x) = -\dfrac{xe^{2x}}{2} + \dfrac{e^{2x}}{4} + C_2, \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Подставляем найденные значения функций в (22.69) и получаем общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = \left(-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C_1\right)e^{2x} + \left(-\frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C_2\right)e^{-2x}.$$

После упрощения приходим к ответу:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - x.$$

3) Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка. Найдем решение соответствующего однородного уравнения

$$y''' + 4y'' + y' - 6y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $l^3 + 4l^2 + l - 6 = 0$, корни которого $l_1 = 1$, $l_2 = -2$, $l_3 = -3$ – действительные, простые. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$, где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Общее решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}, \qquad (22.70)$$

где $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, $C_3 = C_3(x)$ – функции, которые надо найти. Для нахождения $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ решаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-2x} + C_3'e^{-3x} = 0, \\ C_1'e^x - 2C_2'e^{-2x} - 3C_3'e^{-3x} = 0, \\ C_1'e^x + 4C_2'e^{-2x} + 9C_3'e^{-3x} = e^x. \end{cases}$$

По методу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} & e^{-3x} \\ e^x & -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \\ e^x & 4e^{-2x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} & e^{-3x} \\ 0 & -3e^{-2x} & -4e^{-3x} \\ 0 & 3e^{-2x} & 8e^{-3x} \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} -3e^{-2x} & -4e^{-3x} \\ 3e^{-2x} & 8e^{-3x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^x(-24e^{-5x} + 12e^{-5x}) = e^x(-12e^{-5x}) = -12e^{-4x},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} & e^{-3x} \\ 0 & -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \\ e^x & 4e^{-2x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = e^x(-3e^{-5x} + 2e^{-5x}) = -e^{-4x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{-3x} \\ e^x & 0 & -3e^{-3x} \\ e^x & e^x & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^x \begin{vmatrix} e^x & e^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^x(-3e^{-2x} - e^{-2x}) = 4e^{-x},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} & 0 \\ e^x & -2e^{-2x} & 0 \\ e^x & 4e^{-2x} & e^x \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^x(-2e^{-x} - e^{-x}) = -3.$$

Тогда решение системы:

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ C_2' = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \\ C_3' = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{12}, \\ C_2' = -\dfrac{e^{3x}}{3}, \\ C_3' = \dfrac{e^{4x}}{4}. \end{cases}$$

Интегрируя полученные равенства, получаем:

$$\begin{cases} C_1(x) = \dfrac{x}{12} + C_1, \\ C_2(x) = -\dfrac{e^{3x}}{9} + C_2, \\ C_3(x) = \dfrac{e^{4x}}{16} + C_3, \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Подставляем найденные значения функций в (22.70) и получаем общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = \left(\frac{x}{12} + C_1\right)e^x + \left(-\frac{e^{3x}}{9} + C_2\right) e^{-2x} + \left(\frac{e^{4x}}{16} + C_3\right) e^{-3x}.$$

После упрощения приходим к ответу:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} + \left(\frac{x}{12} - \frac{7}{144}\right) e^x.$$

Пример 2. Решить задачу Коши:

1) $y'' + 9y = \mathrm{ctg}\,3x$, $y\left(\dfrac{p}{6}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{p}{6}\right) = -\dfrac{8}{3}$;

2) $y''' + 4y' = x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \dfrac{15}{8}$, $y''(0) = 4$.

Решение. 1) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 9y = 0$. Его характеристическое уравнение $l^2 + 9 = 0$, корни которого $l_1 = 3i$, $l_2 = -3i$ – комплексно-сопряженные, простые. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0 = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$, C_1, $C_2 = const$. Общее решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x,$$

где $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ – функции, для нахождения которых составляем систему

$$\begin{cases} C_1'\cos 3x + C_2'\sin 3x = 0, \\ -3C_1'\sin 3x + 3C_2'\cos 3x = \mathrm{ctg}\,3x. \end{cases}$$

Решаем ее методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \mathrm{ctg}\, 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = -\cos 3x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\sin 3x & \mathrm{ctg} 3x \end{vmatrix} = \frac{\cos^2 3x}{\sin 3x}.$$

Получаем решение системы:

$$\begin{cases} C_1' = -\dfrac{\cos 3x}{3}, \\ C_2' = \dfrac{\cos^2 3x}{3\sin 3x}. \end{cases}$$

Интегрируем полученные равенства:

$$C_1(x) = \int -\frac{\cos 3x}{3} dx = -\frac{\sin 3x}{9} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos^2 3x}{3\sin 3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1-\sin^2 3x}{\sin 3x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sin 3x} - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx = \frac{1}{9} \ln \left| \mathrm{tg} \frac{3x}{2} \right| + \frac{\cos 3x}{9} + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = \left(C_1 - \frac{\sin 3x}{9} \right) \cos 3x + \left(\frac{1}{9} \ln \left| \mathrm{tg} \frac{3x}{2} \right| + \frac{\cos 3x}{9} + C_2 \right) \sin 3x.$$

После упрощения получаем:

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{9} \ln \left| \mathrm{tg} \frac{3x}{2} \right| \sin 3x.$$

Далее решаем задачу Коши. Дифференцируем полученное общее решение:

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x +$$

$$+ \frac{1}{9} \left(\frac{1}{\left| \mathrm{tg} \frac{3x}{2} \right|} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{3x}{2}} \cdot \frac{3}{2} \sin 3x + \ln \left| \mathrm{tg} \frac{3x}{2} \right| \cdot 3\cos 3x \right).$$

Подставляем начальные условия $y\left(\frac{p}{6}\right) = 0$, $y'\left(\frac{p}{6}\right) = -\frac{8}{3}$ в выражения для y и y' и определяем константы C_1 и C_2:

$$0 = C_1 \cos \frac{3p}{6} + C_2 \sin \frac{3p}{6} + \frac{1}{9} \ln \left| \mathrm{tg} \frac{3p}{12} \right| \sin \frac{3p}{6},$$

$$-\frac{8}{3} = -3C_1 \sin \frac{3p}{6} + 3C_2 \cos \frac{3p}{6} +$$

$$+ \frac{1}{9} \left(\frac{1}{\left| \mathrm{tg} \frac{3p}{12} \right|} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{3p}{12}} \cdot \frac{3}{2} \sin \frac{3p}{6} + \ln \left| \mathrm{tg} \frac{3p}{12} \right| \cdot 3\cos \frac{3p}{6} \right).$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем решение задачи Коши:

$$y = \cos 3x + \frac{1}{9} \ln \left| \mathrm{tg} \frac{3x}{2} \right| \sin 3x.$$

2) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 3-го порядка. Найдем его общее решение методом Лагранжа. Соответствующее однородное уравнение имеет вид: $y''' + 4y' = 0$. Его характеристическое уравнение $l^3 + 4l = 0$, где $l_1 = 0$, $l_2 = 2i$, $l_3 = -2i$ – корни. Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения: $y_0 = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$.

Общее решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x,$$

где $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, $C_3 = C_3(x)$ – искомые функциональные коэффициенты.

Составляем систему

$$\begin{cases} C_1' + C_2' \cos 2x + C_3' \sin 2x = 0, \\ -2C_2' \sin 2x + 2C_3' \cos 2x = 0, \\ -4C_2' \cos 2x - 4C_3' \sin 2x = x^2. \end{cases}$$

Решаем ее методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ 0 & -4\cos 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix} = 8\sin^2 2x + 8\cos^2 2x = 8,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ x^2 & -4\cos 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix} = x^2 (2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x) = 2x^2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin 2x \\ 0 & 0 & 2\cos 2x \\ 0 & x^2 & -4\sin 2x \end{vmatrix} = -2x^2\cos 2x,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & 0 \\ 0 & -2\sin 2x & 0 \\ 0 & -4\cos 2x & x^2 \end{vmatrix} = -2x^2\sin 2x.$$

Тогда решение системы:

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{2x^2}{8}, \\ C_2' = -\dfrac{x^2\cos 2x}{4}, \\ C_3' = -\dfrac{x^2\sin 2x}{4}. \end{cases}$$

Интегрируем эти равенства:

$$C_1(x) = \frac{x^3}{12} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int -\frac{x^2\cos 2x}{4}\, dx = \frac{\sin 2x}{16} - \frac{x\cos 2x}{8} - \frac{x^2\sin 2x}{8} + C_2,$$

$$C_3(x) = \int -\frac{x^2\sin 2x}{4} dx = \frac{x^2\cos 2x}{8} - \frac{x\sin 2x}{8} - \frac{\cos 2x}{16} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные (при интегрировании C_2' и C_3' применялся метод интегрирования по частям).

Подставляя выражения для C_1, C_2, C_3 в общее решение, получаем:

$$y = \frac{x^3}{12} + C_1 + \left(\frac{\sin 2x}{16} - \frac{x\cos 2x}{8} - \frac{x^2\sin 2x}{8} + C_2\right)\cos 2x +$$

$$+\left(\frac{x^2\cos 2x}{8} - \frac{x\sin 2x}{8} - \frac{\cos 2x}{16} + C_3\right)\sin 2x$$

или после упрощения:

$$y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x - \frac{x}{8} + \frac{x^3}{12}.$$

Дифференцируем полученное общее решение дважды:

$$y' = -2C_2\sin 2x + 2C_3\cos 2x - \frac{1}{8} + \frac{x^2}{4},$$

$$y'' = -4C_2\cos 2x - 4C_3\sin 2x + \frac{x}{2}.$$

Подставляем в выражения для y, y', y'' заданные начальные условия и находим C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2, \\ \dfrac{15}{8} = 2C_3 - \dfrac{1}{8}, \\ 4 = -4C_2. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 3,\ C_2 = -1,\ C_3 = 1.$

Получили решение задачи Коши:

$$y = 3 - \cos 2x + \sin 2x - \frac{x}{8} + \frac{x^3}{12}.$$

Пример 3. Решить уравнение:

1) $y'' - 3y' = e^{-3x}(x+2)^2$; 2) $y^{IV} + 2y'' + y = 2\cos x + 3\sin x$;

3) $y''' + y'' + 4y' + 4y = e^{-x}(\cos 2x + x\sin 2x)$.

Решение. 1) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Для его решения используем метод Эйлера.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y'' - 3y' = 0$. Его характеристическое уравнение $l^2 - 3l = 0$, корни которого $l_1 = 0$, $l_2 = 3$ – действительные, простые.

Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения:

$y_0 = C_1 + C_2e^{3x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Запишем контрольное число $s = -3$ (так как $a = -3$, $b = 0$). Контрольное число не содержится среди корней характеристического уравнения. Тогда искомое частное решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_ч = e^{-3x}(Ax^2 + Bx + C),$$

где A, B, C – неопределенные коэффициенты, которые надо найти.

Вычислим производные $y_ч', y_ч''$:

$$y_ч' = -3e^{-3x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{-3x}(2Ax + B),$$

$$y_ч'' = 9e^{-3x}(Ax^2 + Bx + C) - 3e^{-3x}(2Ax + B) - 3e^{-3x}(2Ax + B) + 2Ae^{-3x}.$$

Подставляем полученные выражения $y_ч'$ и $y_ч''$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$9e^{-3x}(Ax^2 + Bx + C) - 6e^{-3x}(2Ax + B) + 2Ae^{-3x} -$$

$$-3(-3e^{-3x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{-3x}(2Ax + B)) = e^{-3x}(x+2)^2.$$

Сокращаем на e^{-3x} и группируем относительно степеней x:

$$(9A+9A)x^2+(9B-12A+9B-6A)x+9C-6B+2A+9C-3B=$$
$$=x^2+4x+4.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{matrix} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{matrix}\begin{cases} 18A=1, \\ 18B-18A=4, \\ 18C-9B+2A=4. \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений и находим A, B, C:

$$A=\frac{1}{18},\ B=\frac{5}{18},\ C=\frac{115}{324}.$$

Подставляем найденные коэффициенты в частное решение:

$$y_ч=e^{-3x}\left(\frac{1}{18}x^2+\frac{5}{18}x+\frac{115}{324}\right) \text{ или}$$

$$y_ч=\frac{e^{-3x}}{18}\left(x^2+5x+\frac{115}{18}\right).$$

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y=C_1+C_2e^{3x}+\frac{e^{-3x}}{18}\left(x^2+5x+\frac{115}{18}\right).$$

2) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Используем метод Эйлера для нахождения его общего решения. Соответствующее однородное уравнение – $y^{IV}+2y''+y=0$. Его характеристическое уравнение

$$l^4+2l^2+1=0 \text{ или } (l^2+1)^2=0,$$

корни которого $l_{1,2}=\pm i$ кратности 2 (комплексно-сопряженные).

Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_0=C_1\cos x+C_2x\cos x+C_3\sin x+C_4x\sin x,$$

где C_1,C_2,C_3,C_4 – произвольные постоянные.

Запишем контрольное число $s=i$, так как $a=0$, $b=1$. Контрольное число s содержится среди корней характеристического уравнения кратности 2. Поэтому искомое частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y_ч=x^2(A\cos x+B\sin x),$$

где A, B – коэффициенты, которые надо найти.

Дифференцируем $y_ч$ дважды:

$$y_ч'=2x(A\cos x+B\sin x)+x^2(-A\sin x+B\cos x),$$
$$y_ч''=2(A\cos x+B\sin x)+2x(-A\sin x+B\cos x)+$$
$$+2x(-A\sin x+B\cos x)+x^2(-A\cos x-B\sin x).$$

Упростим $y_ч''$:

$$y_ч''=(2-x^2)(A\cos x+B\sin x)+4x(-A\sin x+B\cos x).$$

Далее получим:

$$y_ч'''=-2x(A\cos x+B\sin x)+(2-x^2)(-A\sin x+B\cos x)+$$
$$+4(-A\sin x+B\cos x)+4x(-A\cos x-B\sin x).$$

Упростим это выражение:

$$y_ч'''=-6x(A\cos x+B\sin x)+(6-x^2)(-A\sin x+B\cos x).$$

Дифференцируем еще раз:

$$y_ч^{IV}=-6(A\cos x+B\sin x)-6x(-A\sin x+B\cos x)-$$
$$-2x(-A\sin x+B\cos x)+(6-x^2)(-A\cos x-B\sin x).$$

Упрощаем это выражение:

$$y_ч^{IV}=(x^2-12)(A\cos x+B\sin x)-8x(-A\sin x+B\cos x).$$

Подставляем выражения для $y_ч^{IV}$, $y_ч''$ и $y_ч$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$(x^2-12)(A\cos x+B\sin x)-8x(-A\sin x+B\cos x)+$$
$$+2(2-x^2)(A\cos x+B\sin x)+8x(-A\sin x+B\cos x)+$$
$$+x^2(A\cos x+B\sin x)=2\cos x+3\sin x.$$

Группируем относительно $\cos x$ и $\sin x$:

$$(Ax^2-12A-8Bx+4A-2Ax^2+8Bx+Ax^2)\cos x+$$
$$+(Bx^2-12B+8Ax+4B-2Bx^2-8Ax+Bx^2)\sin x=2\cos x+3\sin x.$$

После преобразований в скобках получим:

$$-8A\cos x-8B\sin x=2\cos x+3\sin x.$$

Приравниваем коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях и получаем систему

$$\begin{matrix} \cos x: \\ \sin x: \end{matrix}\begin{cases} -8A=2, \\ -8B=3, \end{cases}$$

решение которой: $A=-\frac{1}{4}$, $B=-\frac{3}{8}$.

Подставляем найденные коэффициенты в частное решение $y_ч$:

$$y_ч=x^2\left(-\frac{1}{4}\cos x-\frac{3}{8}\sin x\right).$$

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = C_1\cos x + C_2 x\cos x + C_3\sin x + C_4 x\sin x + x^2\left(-\frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{8}\sin x\right)$$

или $y = \left(C_1 + C_2 x - \dfrac{x^2}{4}\right)\cos x + \left(C_3 + C_4 x - \dfrac{3x^2}{8}\right)\sin x.$

3) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 3-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Соответствующее однородное уравнение – $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0.$ Его характеристическое уравнение

$$l^3 + l^2 + 4l + 4 = 0 \text{ или } (l+1)(l^2+4) = 0.$$

Получаем корни характеристического уравнения $l_1 = -1,$ $l_{2,3} = \pm 2i.$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Запишем контрольное число $s = -1 + 2i,$ так как $a = -1,$ $b = 2.$ Контрольное число не содержится среди корней характеристического уравнения. Тогда искомое частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y_ч = e^{-x}((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x),$$

где *A*, *B*, *C*, *D* – коэффициенты, которые надо найти. Дифференцируем трижды $y_ч$:

$$y'_ч = -e^{-x}((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x) +$$
$$+ e^{-x}(A\cos 2x - 2(Ax+B)\sin 2x + C\sin 2x + 2(Cx+D)\cos 2x).$$

Упростим это выражение:

$$y'_ч = e^{-x}((-Ax+2Cx-B+A+2D)\cos 2x + (-Cx-2Ax-D-2B+C)\sin 2x).$$

Далее дифференцируем:

$$y''_ч = -e^{-x}((-Ax+2Cx-B+A+2D)\cos 2x + (-Cx-2Ax-D-$$
$$-2B+C)\sin 2x) + e^{-x}((-A+2C)\cos 2x - 2(-Ax+2Cx-B+$$
$$+A+2D)\sin 2x + (-C-2A)\sin 2x + 2(-Cx-2Ax-D-2B+C)\cos 2x).$$

Упростим это выражение:

$$y''_ч = e^{-x}((-3Ax-4Cx-2A-3B+4C-4D)\cos 2x + (4Ax-3Cx-4A+$$
$$+4B-2C-3D)\sin 2x.$$
$$y'''_ч = -e^{-x}((-3Ax-4Cx-2A-3B+4C-4D)\cos 2x + (4Ax-3Cx-4A+$$

$$+4B-2C-3D)\sin 2x) + e^{-x}((-3A-4C)\cos 2x - 2(-3Ax-4Cx-2A-$$
$$-3B+4C-4D)\sin 2x + (4A-3C)\sin 2x + 2(4Ax-3Cx-4A+4B-$$
$$-2C-3D)\cos 2x).$$

Упростим это выражение:

$$y'''_ч = e^{-x}((11Ax-2Cx-9A+11B-12C-2D)\cos 2x + (2Ax+$$
$$+11Cx+12A+2B-9C+11D)\sin 2x).$$

Подставляя выражения для $y_ч$, $y'_ч$, $y''_ч$, $y'''_ч$ в заданное дифференциальное уравнение, группируем и, приравнивая коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях, имеем:

$$\begin{array}{r|l} x\cos 2x: & 11A-2C-3A-4C-4A+8C+4A=0, \\ x\sin 2x: & 2A+11C+4A-3C-8A-4C+4C=1, \\ \cos 2x: & -9A+11B-12C-2D-2A-3B+4C-4D-4B+4A+8D+4B=1, \\ \sin 2x: & 12A+2B-9C+11D-4A+4B-2C-3D-4D-8B+4C+4D=0. \end{array}$$

Упрощая выражения, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 8A+2C=0, \\ -2A+8C=1, \\ -7A+8B-8C+2D=1, \\ 8A-2B-7C+8D=0. \end{cases}$$

Решаем ее и находим:

$$A = -\frac{1}{34},\ C = \frac{4}{34},\ B = \frac{50}{289},\ D = \frac{203}{1156}.$$

Подставляем найденные коэффициенты в $y_{\div}$

$$y_ч = e^{-x}\left(\left(\frac{50}{289} - \frac{x}{34}\right)\cos 2x + \left(\frac{4x}{34} + \frac{203}{1156}\right)\sin 2x\right).$$

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x +$$
$$+ e^{-x}\left(\left(\frac{50}{289} - \frac{x}{34}\right)\cos 2x + \left(\frac{4x}{34} + \frac{203}{1156}\right)\sin 2x\right).$$

Пример 4. Решить уравнения:

1) $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$; 2) $y'' + 25y = \cos 5x$; 3) $y'' - y = 2x + e^x$.

Решение. 1) Это линейное неоднородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью вида

$$f(x) = e^{2x}(0\cdot\cos 0x + b\cdot\sin 0x),$$

где b – число, $a = 2,$ $b = 0.$

Соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $l^2 - 2l - 3 = 0$, корни которого $l_1 = -1$, $l_2 = 3$ – действительные, простые.

Тогда общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Запишем контрольное число $s = 2$. Оно не является корнем характеристического уравнения.

Тогда частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y_ч = Ae^{2x},$$

где A – коэффициент, который надо найти.

Дифференцируем $y_ч$ дважды:

$$y'_ч = 2Ae^{2x}, \quad y''_ч = 4Ae^{2x}.$$

Подставляем $y_ч, y'_ч, y''_ч$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$4Ae^{2x} - 2 \cdot 2Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = e^{2x},$$

получаем $A = -\frac{1}{3}$.

Затем подставляем этот коэффициент в выражение для $y_ч$:

$$y_ч = -\frac{e^{2x}}{3}.$$

Общее решение заданного дифференциального уравнения запишем в виде

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{e^{2x}}{3}.$$

2) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью вида

$$f(x) = e^{0x}(1 \cdot \cos 5x + 0 \cdot \sin 5x), \text{ где } a = 0, \ b = 5.$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$y'' + 25y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $l^2 + 25 = 0$, корни которого $l_{1,2} = \pm 5i$ – простые комплексно-сопряженные.

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x.$$

Контрольное число $s = 5i$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, кратности 1. Поэтому частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y_ч = x(A\cos 5x + B\sin 5x),$$

где A, B – коэффициенты, которые надо найти.

Дифференцируем $y_ч$ дважды:

$$y'_ч = (A\cos 5x + B\sin 5x) + x(-5A\sin 5x + 5B\cos 5x),$$

$$y''_ч = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x - 5A\sin 5x + 5B\cos 5x +$$

$$+x(-25A\cos 5x - 25B\sin 5x).$$

Упрощаем $y''_ч$:

$$y''_ч = -10A\sin 5x + 10B\cos 5x + x(-25A\cos 5x - 25B\sin 5x).$$

Подставляем $y''_ч$, $y_ч$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$-10A\sin 5x + 10B\cos 5x + x(-25A\cos 5x - 25B\sin 5x) +$$

$$+25x(A\cos 5x + B\sin 5x) = \cos 5x.$$

Группируя относительно $\sin 5x$, а также $\cos 5x$ и приравнивая коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях, получим систему

$$\begin{cases} 10B = 1, \\ -10A = 0, \end{cases}$$

из которой находим $A = 0$, $B = \frac{1}{10}$.

Тогда частное решение:

$$y_ч = \frac{x}{10}\sin 5x,$$

а общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x + \frac{x}{10}\sin 5x \text{ или}$$

$$y = C_1 \cos 5x + \left(C_2 + \frac{x}{10}\right)\sin 5x.$$

3) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и специальной правой частью вида $f_1(x) + f_2(x) = 2x + e^x$. Для нахождения его общего решения воспользуемся методом Эйлера и теоремой о наложении решений.

Соответствующее однородное уравнение для заданного дифференциального уравнения $y'' - y = 0$. Его характеристическое уравнение $l^2 - 1 = 0$, корни которого $l_{1,2} = \pm 1$ – простые действительные.

Общее решение однородного уравнения:

$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$

Частное решение заданного дифференциального уравнения будем искать в виде

$y_ч = y_{ч_1} + y_{ч_2},$

где $y_{ч_1}$ – частное решение дифференциального уравнения:

$$y'' - y = 2x; \tag{22.71}$$

$y_{ч_2}$ – частное решение дифференциального уравнения:

$$y'' - y = e^x. \tag{22.72}$$

Контрольные числа этих дифференциальных уравнений $s_1 = 0$ и $s_2 = 1$, соответственно. Заметим, что $s_1 = 0$ не является корнем характеристического уравнения, значит, частное решение $y_{ч_1}$ ищем в виде

$y_{ч_1} = Ax + B,$

где A, B – коэффициенты, которые надо найти.

Дифференцируем $y_{ч_1}$:

$y'_{ч_1} = A, \quad y''_{ч_1} = 0.$

Подставляя в дифференциальное уравнение (22.71) $y''_{ч_1}$ и $y_{ч_1}$, получим:

$-Ax - B = 2x,$ откуда находим $A = -2, \quad B = 0.$

Тогда $y_{ч_1} = -2x.$

Аналогично, так как $s_2 = 1$ – простой корень характеристического уравнения, то частное решение (22.72) ищем в виде

$y_{ч_2} = Cxe^x,$

где C – коэффициент, который надо найти.

Дифференцируем $y_{ч_2}$:

$y'_{ч_2} = Ce^x + Cxe^x, \quad y''_{ч_2} = 2Ce^x + Cxe^x.$

Подставляем $y''_{ч_2}$ и $y_{ч_2}$ в (22.72):

$2Ce^x + Cxe^x - Cxe^x = e^x$ или $2Ce^x = e^x.$

Отсюда получаем, что $C = \frac{1}{2}.$ Тогда $y_{ч_2} = \frac{xe^x}{2}.$

Записываем частное решение заданного дифференциального уравнения: $y_ч = -2x + \frac{xe^x}{2}.$ Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - 2x + \frac{xe^x}{2}.$

Пример 5. Решить задачу Коши:

$y''' - y' = \sin x, \quad y(0) = 2{,}5, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1{,}5.$

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и специальной правой частью вида

$f(x) = e^{0x}(0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x),$

где $a = 0, \quad b = 1, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = 1.$

Соответствующее однородное дифференциальное уравнение $y''' - y' = 0.$ Его характеристическое уравнение: $l^3 - l = 0,$ корни которого $l_1 = 0, \quad l_{2,3} = \pm 1$ – действительные, простые. Тогда общее решение однородного уравнения:

$y_0 = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x.$

Контрольное число $s = i$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$y_ч = A\cos x + B\sin x,$

где A, B – неизвестные коэффициенты.

Дифференцируем $y_ч$ трижды:

$y'_ч = -A\sin x + B\cos x, \quad y''_ч = -A\cos x - B\sin x, \quad y'''_ч = A\sin x - B\cos x.$

Подставляем $y'''_ч$ и $y'_ч$ в заданное дифференциальное уравнение:

$A\sin x - B\cos x - (-A\sin x + B\cos x) = \sin x.$

Приравниваем коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях, получаем систему

$\begin{cases} 2A = 1, \\ -2B = 0, \end{cases}$ из которой находим $A = \frac{1}{2}, \ B = 0.$

Тогда получаем:

$y_ч = \frac{\cos x}{2}.$

Общее решение заданного дифференциального уравнения:

$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x + \frac{\cos x}{2}.$

Дифференцируем общее решение:

$$\begin{cases} y' = -C_2 e^{-x} + C_3 e^x - \dfrac{\sin x}{2}, \\ y'' = C_2 e^{-x} + C_3 e^x - \dfrac{\cos x}{2}. \end{cases}$$

Подставляем заданные начальные условия:

$$\begin{cases}\frac{5}{2}=C_1+C_2+C_3+\frac{1}{2},\\ 0=-C_2+C_3,\\ \frac{3}{2}=C_2+C_3-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Из полученной системы находим $C_1=0,\ C_2=1,\ C_3=1$.

Решением задачи Коши является $y=e^{-x}+e^{x}+\frac{\cos x}{2}$.

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $y''-y=x$; 2) $y''-7y'+6y=\cos x$;

3) $y''+3y'=x-2$; 4) $y''+y=2\sin x$.

1.2. Решите задачу Коши:

1) $y''-4y'+3y=e^{-5x},\ \ y(0)=\frac{1}{48},\ \ y'(0)=\frac{43}{48}$;

2) $y''-2y'=4,\ \ y(0)=2,\ \ y'(0)=0$;

3) $y'''+y'=x,\ \ y(0)=4,\ \ y'(0)=3,\ \ y''(0)=-1$.

1.3. Найдите общее решение уравнения методом Лагранжа:

1) $y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}$; 2) $y''-y=\sqrt{x}$.

II уровень

2.1. Найдите общее решение уравнения методом Лагранжа:

1) $y''+4y=\operatorname{tg}2x$; 2) $y''-4y'+4y=\frac{e^{2x}}{x}$;

3) $y'''+y'=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$; 4) $y''-4y=\frac{1}{\cos^3 2x}$.

2.2. Решите уравнение:

1) $y^{V}-y^{IV}-2y'''=2x$; 2) $y''-y=4\sin x-2\cos x$;

3) $y''+y=\sin 2x+\sin x$; 4) $y''-3y'=24x-e^{3x}$.

2.3. Решите задачу Коши:

1) $y''-y=x^2,\ \ y(0)=-2,\ \ y'(0)=4$;

2) $y''-2y'+y=e^{x}\sin x,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=2$;

3) $y''+9y=\cos 3x,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=3$;

4) $y''-y=xe^{x}+e^{2x},\ \ y(0)=\frac{1}{4},\ \ y'(0)=\frac{1}{2}$.

2.4. Укажите вид частного решения дифференциального уравнения:

1) $y^{IV}-y'''-y''-y'-2y=x^2\cos x$; 2) $y'''-iy''=3x^2-2ix+5$;

3) $y'''-y''=3\sin 2x+5x\cos 2x$; 4) $y^{V}-10y'''+9y'=2xe^{x}+2e^{-3x}$.

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $y'''-y''=x^2+e^{x}+\sin x$; 2) $y''-3y=e^{3x}+\cos x$;

3) $y''+2y'+y=e^{-x}(\cos x+x)$; 4) $y''+y=2\sin x\sin 2x$.

3.2. Найдите общее решение методом Лагранжа:

1) $y''-y=e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$; 2) $y''-6y'+9y=\frac{9x^2+6x+2}{x^2}$;

3) $y''-y=\frac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}$; 4) $y''-2y'+y=\frac{x^2+2x+2}{x^3}$.

22.8. Системы дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \mathbf{K},\ y_n),\\ \frac{dy_2}{dx}=f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \mathbf{K},\ y_n),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dy_n}{dx}=f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \mathbf{K},\ y_n),\end{cases}\qquad(22.73)$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ – искомые функции переменной x, называется ***нормальной системой***.

Совокупность n функций $y_1, y_2, ..., y_n$, удовлетворяющих каждому уравнению системы (22.73), называется ***решением*** этой ***системы***.

Задача Коши для системы (22.73) состоит в нахождении решения этой системы, удовлетворяющего ***начальным условиям***: $y_1(x_0) = y_1^0,\ \ y_2(x_0) = y_2^0,\ \ \ldots,\ \ y_n(x_0) = y_n^0.$

Основные методы интегрирования нормальных систем (22.73) – *метод исключения и метод интегрируемых комбинаций*.

Метод исключения

Этот метод позволяет свести нормальную систему из n линейный дифференциальных уравнений к одному линейному дифференциальному уравнению n-го порядка относительно одной неизвестной функции.

Метод интегрируемых комбинаций

Метод заключается в том, что посредством арифметических операций из уравнений системы (22.73) получают легко интегрируемые уравнения относительно новой неизвестной функции.

Пример 1. Решить систему:

1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z^2 + \sin x, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{2z}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 4y_2 - y_1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_3 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_3 - y_1. \end{cases}$

Решение. 1) Используем метод исключения. Дифференцируем первое уравнение системы по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2z\frac{dz}{dx} + \cos x.$$

Подставив в полученное уравнение из второго уравнения системы выражение вместо $\dfrac{dz}{dx}$, имеем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2z\frac{y}{2z} + \cos x \text{ или}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \cos x. \qquad (22.74)$$

Последнее уравнение – линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка со специальной правой частью. Его соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - y = 0.$$

Характеристическое уравнение последнего:

$l^2 - 1 = 0$, корни которого $l_{1,2} = \pm 1$. Тогда общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^x.$$

Ищем частное решение полученного неоднородного уравнения (22.74) в виде

$$y_ч = A\cos x + B\sin x,$$

где A, B – неопределенные коэффициенты.

Вычисляем производные:

$$y_ч' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$y_ч'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставляем их в уравнение (22.74), группируем относительно $\sin x$ и $\cos x$, приравниваем коэффициенты.

Получаем систему $\begin{cases} -2A = 1, \\ -2B = 0, \end{cases}$ из которой находим $A = -\dfrac{1}{2}, B = 0.$

Общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x - \frac{\cos x}{2}. \qquad (22.75)$$

Возвращаемся к первому уравнению заданной системы, из которого выражаем z^2:

$$z^2 = \frac{dy}{dx} - \sin x.$$

Подставляя в это уравнение продифференцированное общее решение (22.75), получим:

$$z^2 = C_2e^x - C_1e^{-x} - \frac{\sin x}{2}. \qquad (22.76)$$

Функции (22.75) и (22.76) составляют общее решение заданной системы.

2) Применим метод исключения. Выразим из первого уравнения системы y_2:

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} - 2y_1.$$

Отсюда, дифференцируя по x, получим:

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{d^2y_1}{dx^2} - 2\frac{dy_1}{dx}.$$

Подставим правую часть полученного равенства вместо $\frac{dy_2}{dx}$ во второе уравнение системы:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - 2\frac{dy_1}{dx} = 4\frac{dy_1}{dx} - 8y_1 - y_1 \text{ или}$$

$$y_1'' - 6y_1' + 9y_1 = 0.$$

Получили однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение: $l^2 - 6l + 9 = 0;$ решая которое, находим: $l = 3$ – корень кратности 2.

Тогда

$$y_1(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}.$$

Продифференцируем функцию y_1:

$$\frac{dy_1}{dx} = 3C_1e^{3x} + C_2e^{3x}(3x+1).$$

Возвращаясь к первому уравнению системы, имеем:

$$y_2(x) = 3C_1e^{3x} + C_2e^{3x}(3x+1) - 2(C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}).$$

Упрощаем: $y_2(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + C_2e^{3x}.$

Таким образом, получаем общее решение заданной системы:

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{3x}(C_1 + C_2x), \\ y_2(x) = e^{3x}(C_1 + C_2x + C_2). \end{cases}$$

3) Используем метод исключения. Дифференцируем первое уравнение системы:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{dy_3}{dx} - \frac{dy_2}{dx}.$$

Подставив в него выражения для $\frac{dy_3}{dx}$ и $\frac{dy_2}{dx}$ из 2-го и 3-го уравнений системы, получим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка: $\frac{d^2y_1}{dx^2} + y_1 = 0.$ Его характеристическое уравнение имеет вид: $l^2 + 1 = 0,$ корни которого $l_{1,2} = \pm i$ – простые комплексно-сопряженные. Тогда общим решением однородного дифференциального уравнения будет:

$$y_1(x) = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Из третьего уравнения системы получаем:

$$\frac{dy_3}{dx} - y_3 = -y_1.$$

Подставим в него найденное выражение для y_1, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\frac{dy_3}{dx} - y_3 = -C_1\cos x - C_2\sin x. \qquad (22.77)$$

Решим его методом Эйлера. Характеристическое уравнение соответствующего однородного $l - 1 = 0,$ корень которого $l = 1.$ Тогда общее решение соответствующего однородного:

$$y_{3_0} = C_3e^x.$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y_{3_ч} = A\cos x + B\sin x,$$

где A, B – неопределенные коэффициенты.

Вычисляем $y_{3_ч}' = -A\sin x + B\cos x$ и подставляем в неоднородное уравнение (22.77).

Для определения A и B приходим к системе

$$\begin{cases} B - A = -C_1, \\ -B - A = -C_2, \end{cases}$$

из которой находим $\grave{A} = \frac{\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2}{2},\ \hat{A} = \frac{\tilde{N}_2 - \tilde{N}_1}{2}.$

Тогда получаем:

$$y_3(x) = C_3e^x + \frac{C_1 + C_2}{2}\cos x + \frac{C_2 - C_1}{2}\sin x.$$

Из первого уравнения заданной системы выразим y_2:

$$y_2 = y_3 - \frac{dy_1}{dx}.$$

Подставим в это равенство найденные y_3 и $\frac{dy_1}{dx}$, получим:

$$y_2(x) = C_3e^x + \frac{C_1 - C_2}{2}\cos x + \frac{C_1 + C_2}{2}\sin x.$$

Таким образом, получено решение заданной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1\cos x + C_2\sin x, \\ y_2(x) = C_3e^x + \frac{C_1 - C_2}{2}\cos x + \frac{C_1 + C_2}{2}\sin x, \\ y_3(x) = C_3e^x + \frac{C_1 + C_2}{2}\cos x + \frac{C_2 - C_1}{2}\sin x. \end{cases}$$

Пример 2. Методом интегрируемых комбинаций решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 1. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся методом интегрируемых комбинаций. Сложив оба уравнения системы, получим:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + y - 2 \text{ или}$$

$$(x+y)' = x + y - 2.$$

Обозначим $x + y = z$, где $z = z(t)$, получим: $z' = z - 2$ – уравнение с разделяющимися переменными. Запишем его в виде

$$\frac{dz}{dt} = z - 2 \text{ или}$$

$$\frac{dz}{z-2} = dt.$$

Отсюда находим $z = C_1 e^t + 2$. Возвращаемся к старым переменным:

$$x + y = C_1 e^t + 2.$$

Выразим теперь y через x:

$$y = C_1 e^t + 2 - x.$$

Продифференцируем это равенство и подставим вместо $\dfrac{dy}{dt}$ во 2-е уравнение системы:

$$y' = C_1 e^t - x'.$$

После подстановки:

$C_1 e^t - x' = x - 1$ или $x' + x = C_1 e^t + 1$ – это линейное уравнение 1-го порядка. Решим его методом Бернулли.

Пусть $x = uv$, тогда $u'v + uv' + uv = C_1 e^t + 1$.

Отсюда $v = e^{-t}$, $u = \dfrac{C_1}{2} e^{2t} + e^t + C_2$, тогда

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{C_1}{2} e^t + C_2 e^{-t} + 1, \\ y(t) = \dfrac{C_1}{2} e^t - C_2 e^{-t} + 1. \end{cases}$$

Это и есть общее решение исходной системы.

22.9. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n, \end{cases} \tag{22.78}$$

где $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ – числа, называется ***системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами***. Решение системы (22.78) ищут в виде

$$y_1 = g_1 e^{lx},\ y_2 = g_2 e^{lx},\ \ldots,\ y_n = g_n e^{lx}, \tag{22.79}$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_n, l$ – постоянные, которые подбираются по системе (22.78). Подставляя эти функции в систему (22.78), получаем систему n алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} (a_{11} - l) g_1 + a_{12} g_2 + \ldots + a_{1n} g_n = 0, \\ a_{21} g_1 + (a_{22} - l) g_2 + \ldots + a_{2n} g_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} g_1 + a_{n2} g_2 + \ldots + (a_{nn} - l) g_n = 0. \end{cases} \tag{22.80}$$

Чтобы система (22.80) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - l & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - l & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - l \end{vmatrix} = 0. \tag{22.81}$$

Уравнение (22.81) называется ***характеристическим уравнением*** системы (22.78). Оно имеет n корней, вид которых определяет решение системы (22.78).

Правило нахождения общего решения системы линейных однородных уравнений

1. Любому простому действительному корню l_1 характеристического уравнения (22.81) соответствует решение

$$y_{11} = g_{11}e^{l_1 x},\ y_{21} = g_{21}e^{l_1 x},\ \ldots,\ y_{n1} = g_{n1}e^{l_1 x},$$

где коэффициенты $g_1, g_2, \mathbf{K}, g_n$ определяют из системы (22.80) при найденном l_1, т. е.

$$\begin{cases} (a_{11} - l_1)g_1 + a_{12}g_2 + \ldots + a_{1n}g_n = 0, \\ a_{21}g_1 + (a_{22} - l_1)g_2 + \ldots + a_{2n}g_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}g_1 + a_{n2}g_2 + \ldots + (a_{nn} - l_1)g_n = 0. \end{cases} \tag{22.82}$$

Тогда общее решение системы (22.78) записывают в виде

$$y_1 = C_1y_{11} + C_2y_{12} + \ldots + C_ny_{1n},$$
$$y_2 = C_1y_{21} + C_2y_{22} + \ldots + C_ny_{2n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_n = C_1y_{n1} + C_2y_{n2} + \mathbf{K} + C_ny_{nn},$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

2. Каждому комплексному корню $l_1 = a + bi$ и ему сопряженному $l_2 = a - bi$ соответствуют два линейно-независимых действительных решения. Для построения этих решений находим комплексное решение по формуле (22.79) для корня l_1, как и в случае 1, и выделяем действительную и мнимую части этого решения (корень l_2 уже не рассматриваем, так как новых решений системы (22.78) он не дает).

3. Если $l = l_0$ – корень кратности k, то решение, соответствующее этому корню, ищут в виде

$$y_1 = P_{k-1}^{(1)}(x)e^{l_0 x},\ y_2 = P_{k-1}^{(2)}(x)e^{l_0 x},\ \ldots,\ y_n = P_{k-1}^{(n)}(x)e^{l_0 x}, \tag{22.83}$$

где $P_{k-1}^{(i)}(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами степени $k-1$, $i = \overline{1, n}$.

Чтобы найти коэффициенты многочленов $P_{k-1}^{(i)}(x)$, $i = \overline{1, n}$, подставляем решение (22.83) в систему (22.78) и приравниваем коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений. Выразив все коэффициенты через любые k, полагаем по очереди один из них равным единице, а остальные равными нулю.

Пример 1. Решить систему однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

1) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 8y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5y - x. \end{cases}$

Решение. 1) Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1-l & 8 \\ 1 & -1-l \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получаем $l^2 = 9$, откуда $l_1 = -3$, $l_2 = 3$ – простые действительные корни. Частные решения системы ищем в виде

$$y_1(x) = g_1e^{lx},\ \ y_2(x) = g_2e^{lx}.$$

При $l_1 = -3$ система (22.82) имеет вид:

$$\begin{cases} 4g_1 + 8g_2 = 0, \\ g_1 + 2g_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений. Для определенности положим $g_1 = -2$, тогда $g_2 = 1$. Получаем частные решения:

$$y_{11}(x) = -2e^{-3x},\ \ y_{21}(x) = e^{-3x}.$$

При $l_2 = 3$ система (22.82) принимает вид:

$$\begin{cases} -2g_1 + 8g_2 = 0, \\ g_1 - 4g_2 = 0. \end{cases}$$

Положим $g_1 = 4$, тогда $g_2 = 1$.

Значит, корню $l_2 = 3$ соответствуют частные решения:

$$y_{12}(x) = 4e^{3x},\ \ y_{22}(x) = e^{3x}.$$

Общее решение исходной системы запишется в виде

$$\begin{cases} y_1(x) = -2C_1e^{-3x} + 4C_2e^{3x}, \\ y_2(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}. \end{cases}$$

2) Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} 3-g & 1 \\ -1 & 5-l \end{vmatrix} = 0,$$

которое приобретает вид $(3-l)(5-l)+1=0$ или $l^2 - 8l + 16 = 0$. Уравнение имеет двукратный корень $l = 4$. Ему соответствует решение вида

$$x(t) = (At + B)e^{4t},\ \ y(t) = (Ct + D)e^{4t}.$$

Продифференцируем функции ***x(t)*** и ***y(t)*** и подставим в исходную систему:

$$\begin{cases} e^{4t}(A+4At+4B)=e^{4t}(3At+3B+Ct+D), \\ e^{4t}(C+4Ct+4D)=e^{4t}(-At-B+5Ct+5D). \end{cases}$$

Сокращаем на $e^{4t}\neq 0$ и группируем. Получаем систему для коэффициентов

$$\begin{cases} A-C=0, \\ A+B-D=0, \\ B+C-D=0. \end{cases}$$

Так как кратность корня $l=4$ равна двум (k = 2), то выразим все коэффициенты последней системы через любые два, например, через A и B:

$$\begin{cases} C=A, \\ D=A+B. \end{cases}$$

Полагая $A=1$, $B=0$, находим $C=1$, $D=1$. Полагая $A=0$, $B=1$, находим $C=0$, $D=1$.

Получаем два линейно-независимых частных решения:

$$\begin{cases} x_1(t)=te^{4t}, \\ y_1(t)=(t+1)e^{4t} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2(t)=e^{4t}, \\ y_2(t)=e^{4t}. \end{cases}$$

Общее решение исходной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x(t)=C_1te^{4t}+C_2e^{4t}, \\ y(t)=C_1(t+1)e^{4t}+C_2e^{4t}. \end{cases}$$

Пример 2. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y, \; x(0)=1, \; y(0)=-1. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} 2-l & -1 \\ 1 & 2-l \end{vmatrix}=0, \text{ т. е. } (2-l)^2+1=0.$$

Оно имеет корни $l_1=2+i$, $l_2=2-i$. Для корня $l_1=2+i$ составляем систему (22.82):

$$\begin{cases} -ig_1-g_2=0, \\ g_1-ig_2=0. \end{cases}$$

Полагаем $g_1=1$, тогда $g_2=-i$.

Частное комплексное решение системы:

$x(t)=e^{(2+i)t}$, $y(t)=-ie^{(2+i)t}$.

Выделяем в полученных функциях действительные (Re) и мнимые (Im) части.

Поскольку $x(t)=e^{(2+i)\,t}=e^{2t}(\cos t+i\sin t)$, то

$\operatorname{Re} x=e^{2t}\cos t$, $\operatorname{Im} x=e^{2t}\sin t$;

$y(t)=-ie^{(2+i)t}=-ie^{2t}(\cos t+i\sin t)$, тогда

$\operatorname{Re} y=e^{2t}\sin t$, $\operatorname{Im} y=-e^{2t}\cos t$.

Сопряженный корень $l_2=2-i$ новых линейно-независимых решений не дает, поэтому не рассматривается. Таким образом, общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{2t}\cos t+C_2e^{2t}\sin t, \\ y(t)=C_1e^{2t}\sin t-C_2e^{2t}\cos t, \\ C_1, C_2=const. \end{cases}$$

Найдем частное решение для заданных начальных условий. Получаем:

$$\begin{cases} 1=C_1+0, \\ -1=0-C_2, \end{cases} \text{ откуда находим } \tilde{N}_1=1, \; \tilde{N}_2=1.$$

Искомое частное решение системы:

$$\begin{cases} x(t)=e^{2t}(\cos t+\sin t), \\ y(t)=e^{2t}(\sin t-\cos t). \end{cases}$$

Задания

I уровень

1.1. Решите систему дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=-2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=-2y_1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=2y_1+3y_2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=y_1-y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_2-y_1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=y_1+y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=-4y_1-3y_2. \end{cases}$

1.2. Решите задачу Коши:

1) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2y_1-y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=3y_2-2y_1, \; y_1(0)=2, \; y_2(0)=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2, \ y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x, \ x(0) = 1, \ y(0) = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y, \ x(0) = -2, \ y(0) = -1. \end{cases}$

II уровень

2.1. Решите систему:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 - 3y_1, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_2 - 4y_1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 3x + 2t. \end{cases}$

2.2. Решите задачу Коши:

1) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 4y_1 - 3y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 - 3y_2, \ y_1(0) = 4, \ y_2(0) = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 5y, \ x(0) = 1, \ y(0) = -5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x, \ x(0) = 2, \ y(0) = -2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 7y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 5y_2, \ y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 2. \end{cases}$

III уровень

3.1. Найдите частное решение системы дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 + y_2, \ y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 1, \ y_3(0) = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 3y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_1 + 2y_2 + 3y_3, \ y_1(0) = 0, \ y_2(0) = 1, \ y_3(0) = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2 - x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2, \ x_1(0) = 1, \ x_2(0) = 0, \ x_3(0) = 4. \end{cases}$

3.2. Решите систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{x - y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x - y}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{2y}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 10\dfrac{d^2y}{dt^2} + x = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} + 10\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + t, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z + t; \end{cases}$

5) $\dfrac{dy_1}{y_2+y_3}=\dfrac{dy_2}{y_1+y_3}=\dfrac{dy_3}{y_1+y_2}$;

6) $\dfrac{dy_1}{2y_1y_2}=\dfrac{dy_2}{y_2^2-y_1^2-y_3^2}=\dfrac{dy_3}{2y_2y_3}$;

7) $\dfrac{dy_1}{y_1(y_2-y_3)}=\dfrac{dy_2}{y_2(y_3-y_1)}=\dfrac{dy_3}{y_3(y_1-y_2)}$.

Содержание

Учебное издание

М А Т Е М А Т И К А
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие
для учащихся колледжей

В шести частях

ЧАСТЬ 4

Майсеня Людмила Иосифовна
Ламчановская Марина Валерьевна
Михайлова Наталия Викторовна

Неопределенный интеграл
Определенный интеграл. Несобственные интегралы
Дифференциальные уравнения

Зав. ред.-издат. отд. О. П. Козельская
Редактор Г. Л. Говор
Корректор Н. Г. Михайлова
Компьютерная верстка Н. М. Олейник, А. П. Пучек

План изданий 2007 г. (поз. 42)

Изд. лиц. № 02330/0131735 от 17.02.2004.
Подписано в печать 29.12.2007. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 14,42. Уч.-изд. л. 12,40. Тираж 500 экз. Заказ 238.

Издатель и полиграфическое исполнение Учреждение образования
«Минский государственный высший радиотехнический колледж»
220005, г. Минск, пр-т Независимости, 62.

ISBN 978 985 6651 25 7