МГВРК

МАТЕМАТИКА

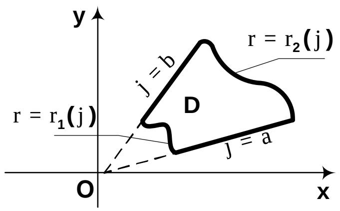
в примерах и задачах

Часть 5

под общ. ред.
Л. И. Майсеня

$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$

$\iint\limits_D f(x;y)dxdy$



$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = C$

$y = ax + b$

МИНСК 2008

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ВЫСШИЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

МАТЕМАТИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие
для учащихся колледжей

В шести частях

Под общей редакцией Л. И. Майсеня

ЧАСТЬ 5

Линейные пространства и линейные операторы
Двойные интегралы. Тройные интегралы
Криволинейные интегралы. Поверхностные интегралы. Элементы теории поля. Ряды
Теория функции комплексной переменной

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего образования, и учащихся учреждений, обеспечивающих получение среднего специального образования по специальностям электротехники, радиотехники и информатики

МИНСК 2008

УДК 51
ББК 22.1я7
М34

Рекомендовано к изданию кафедрой математики и Научно-методическим советом Учреждения образования «Минский государственный высший радиотехнический колледж» (протокол № 4 от 10. 12. 2008 г.)

А в т о р ы:
Л. И. Майсеня, А. А. Ермолицкий, И. Ю. Мацкевич,
Э. Е. Кузьмицкая, С. С. Каянович

Р е ц е н з е н т ы:
А. В. Метельский, д-р физ.-мат. наук, профессор БНТУ,
кафедра высшей математики БГУИР

М34 **Математика** в примерах и задачах : учеб. пособие для учащихся колледжей : в 6 ч. / под общ. ред. Л. И. Майсеня. – Мн. : МГВРК, 2006 – .
ISBN 978-985-6754-70-1
Ч. 5 : Линейные пространства и линейные операторы. Двойные интегралы. Тройные интегралы. Криволинейные интегралы. Поверхностные интегралы. Элементы теории поля. Ряды. Теория функции комплексной переменной / Л. И. Майсеня, А. А. Ермолицкий, И. Ю. Мацкевич, Э. Е. Кузьмицкая, С. С. Каянович. – 2008. – 308 с.
ISBN 978-985-526-018-0

Пособие написано с целью реализации непрерывного образования в системе учебных заведений колледж–университет. Разработано в соответствии с типовой программой дисциплины «Высшая математика» для специальностей электро-, радиотехники и информатики высших учебных заведений. Содержатся необходимые теоретические сведения, примеры с подробными решениями и задания 3-х уровней сложности для самостоятельного решения.

УДК 51
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-526-018-0 (ч. 5)
ISBN 978-985-6754-70-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Особенностью образовательной системы Республики Беларусь является становление и развитие учебных заведений различного типа, в том числе колледжей и высших колледжей. В условиях многоуровневого образования в системе учебных заведений колледж–университет актуальна реализация принципов непрерывности и преемственности в обучении.

Предлагаемое учебное пособие «Математика в примерах и задачах» в 6-ти частях призвано обеспечить процесс изучения математики в высших колледжах и колледжах технического профиля. Оно может быть использовано учащимися на практических занятиях, а также при самостоятельном изучении математики.

При создании настоящего пособия авторы ставили перед собой несколько целей: во-первых, дать значительное количество задач (типовых и оригинальных), которые бы достаточно полно отображали суть основных математических понятий; во-вторых, обеспечить необходимой теоретической информацией для их решения; в-третьих, по каждой теме привести решение основных типов задач; в-четвертых, предлагаемый для решения набор задач распределить по трем уровням сложности. Все эти цели и определили структуру учебного пособия, которое делится на главы, главы – на параграфы. В начале каждого параграфа содержится необходимый справочный материал, затем – решение нескольких задач и набор заданий трех уровней сложности.

Предлагаемая структура учебного пособия, по мнению авторов, делает возможным самостоятельное изучение математики. Его использование позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении – каждый учащийся может решать задания доступного ему уровня сложности.

Пособие разработано и прошло апробацию в УО «Минский государственный высший радиотехнический колледж» (МГВРК) в процессе обучения учащихся после базовой школы.

Характерной особенностью методического подхода к изучению математики в МГВРК является построение интегрированного курса математических дисциплин. Этим объясняется то обстоятельство, что определенные темы высшей математики введены в контекст элементарной математики. Поскольку на практике широко реализуется непрерывное образование в системе учебных заведений колледж–университет (в том числе МГВРК интегрирован с Белорусским государственным университетом информатики и радиоэлектроники), то при разработке данного учебного пособия авторы использовали (как и в реальном учебном процессе) в качестве типовых программу изучения математики в средних школах Беларуси и программу изучения высшей математики для высших учебных заведений по специальностям электро-, радиотехники и информатики.

Таким образом реализуются основы непрерывного продолжения обучения в университете. Кроме того, предлагаемое учебное пособие может быть использовано в колледжах при изучении математики по различным базовым и рабочим программам – менее или более полным.

«Математика в примерах и задачах. Часть 5» является непосредственным продолжением учебного пособия «Математика в примерах и задачах. Части 1–4». В этих изданиях принята единая нумерация глав. Предлагаемое пособие (пятая часть) состоит из семи глав (гл. 23–29). В отношении авторства отметим, что они подготовлены следующим образом:

А. А. Ермолицкий – гл. 23 «Линейные пространства и линейные операторы»;

И. Ю. Мацкевич – гл. 24 «Двойные интегралы», гл. 25 «Тройные интегралы», гл. 26 «Криволинейные интегралы», гл. 27 «Поверхностные интегралы. Элементы теории поля»;

Э. Е. Кузьмицкая – гл. 28 «Ряды»;

С. С. Каянович – гл. 29 «Теория функций комплексной переменной».

Научно-методическое редактирование осуществила Л. И. Майсеня, она является соавтором всего пособия.

Авторы благодарны рецензентам учебного пособия – доктору физ.-мат. наук, профессору А. В. Метельскому и сотрудникам кафедры высшей математики БГУИР, особенно зав. кафедрой, доктору физ.-мат. наук В. В. Цегельнику и профессору А. А. Карпуку, за очень внимательное прочтение рукописи и ряд ценных замечаний, устранение которых улучшило наше издание.

Надеемся, что предлагаемое издание будет содействовать активизации мыслительной деятельности учащихся и повышению эффективности учебного процесса при изучении математики.

23. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

23.1. Линейное пространство, определение и примеры

Пусть **F** – множество всех действительных чисел **R** или множество всех комплексных чисел **C**.

Множество V элементов $x, y, z, \ldots$ называется ***линейным (векторным) пространством*** над числовым множеством **F**, если для каждых двух элементов x и y из V определена их сумма $x+y\in V$, для каждого $x\in V$ и каждого числа $a\in\mathbf{F}$ определено их произведение $a\,x\in V$, причем выполняются следующие аксиомы:

А1) $x+y=y+x,\ \ \forall x,y\in V$ – ***коммутативность*** сложения;

А2) $(x+y)+z=x+(y+z),\ \ \forall x,\ y,\ z\in V$ – ***ассоциативность*** сложения;

А3) существует такой элемент $0\in V$, называемый ***нулевым***, что $x+0=x,\ \forall x\in V$;

А4) для каждого элемента $x\in V$ существует такой элемент $-x\in V$, называемый ***противоположным*** к x, что $x+(-x)=0$;

А5) $1\cdot x=x,\ \ \forall x\in V,\ \ 1\in\mathbf{F}$;

А6) $a\,(b\,x)=(a\,b)\,x$ для всех $a,\ b\in\mathbf{F}$ и $x\in V$;

А7) $(a+b)x=a\,x+b\,x,\ \ \forall a,\ b\in\mathbf{F},\ \ \forall x\in V$;

А8) $a\,(x+y)=a\,x+a\,y,\ \ \forall a\in\mathbf{F},\ \ \forall x,\ y\in V$.

Элементы линейного (векторного) пространства называются *векторами*. Если **F** – множество действительных чисел **R** или множество комплексных чисел **C**, то векторное пространство **V** над множеством **F** называется соответственно ***действительным*** или ***комплексным*** линейным пространством. Далее, в основном, будут рассматриваться действительные линейные пространства.

Векторы $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ линейного пространства V называются ***линейно-зависимыми***, если существуют числа $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n$, не все равные нулю, такие, что

$$l_1x_1+l_2x_2+\ldots+l_nx_n=0. \qquad (23.1)$$

Векторы $x_1, x_2, ..., x_n$ называются ***линейно-независимыми***, если равенство (23.1) выполняется только при условии $l_1 = l_2 = ... = l_n = 0$.

Вектор x разлагается по векторам (***линейно выражается***) через векторы $x_1, x_2, ..., x_k$, если $x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + ... + l_k x_k$. Если векторы $x_1, x_2, ..., x_n$ линейно-зависимы, то хотя бы один из них линейно выражается через остальные.

Линейно-независимая система векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ называется ***базисом*** пространства, если любой вектор этого пространства разлагается по векторам $e_1, e_2, ..., e_n$. Линейное пространство называется ***конечномерным***, если его базис состоит из конечного количества векторов, и ***бесконечномерным*** – в противном случае.

Количество n векторов базиса конечномерного пространства V называется ***размерностью*** пространства V, что записывают $n = \dim V$ или $V = V^n$, где $n \in \mathbf{N}$.

Каждую линейно-независимую систему векторов $x_1, x_2, ..., x_k$ $(k < n)$ конечномерного пространства V^n можно дополнить до базиса V^n.

Если $e_1, e_2, ..., e_n$ – базис пространства V^n, то любой вектор x из V^n имеет единственное разложение

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_n e_n. \qquad (23.2)$$

Числа $a_1, a_2, ..., a_n$ называются ***координатами вектора*** x в базисе (e_i), $i = \overline{1, n}$, при этом записывают $x = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Если некоторое подмножество $V_1 \subset V$ само образует линейное пространство относительно введенных в V операций сложения и умножения на число, то V_1 называется ***подпространством линейного пространства V***.

Пусть $\mathbf{R}^n$ – множество всех матриц-строк, имеющих n элементов, с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число:

а) $(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$;

б) $l(a_1, ..., a_n) = (l a_1, ..., l a_n)$, $l, a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$.

Для этого множества выполняются аксиомы А1)–А8). Следовательно, это множество является линейным пространством.

Строки $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$ образуют базис этого пространства, поэтому оно n-мерно. Построенное пространство называется ***арифметическим*** или ***координатным линейным пространством*** и обозначается $\mathbf{R}^n$.

Теорема. Пусть V^n – линейное пространство размерности n. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между V^n и координатным пространством $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Из этой теоремы следует, что при изучении свойств пространства V^n достаточно рассмотреть соответствующие свойства пространства $\mathbf{R}^n$.

Пример 1. Показать, что множество всех многочленов $P_n(x)$ образует линейное пространство, найти базис и определить размерность пространства $P_n(x)$ всех многочленов с коэффициентами из множества $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, степень которых не превосходит n.

Решение. Нетрудно проверить, что множество всех таких многочленов образует линейное пространство относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число, т. е. выполняются аксиомы А1)–А8). Рассмотрим произвольный многочлен $p(x) \in P_n(x)$, тогда $p(x) = l_n x^n + l_{n-1} x^{n-1} + ... + l_1 x + l_0$, $l_i \in \mathbf{F}$, $i = \overline{0, n}$. Следовательно, $p(x)$ линейно выражается через многочлены $x^n, x^{n-1}, ..., x, 1$. При этом $p(x) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $l_n = l_{n-1} = ... = l_1 = l_0 = 0$, т. е. $x^n, x^{n-1}, ..., x, 1$ – линейно-независимые векторы, они образуют базис векторного пространства $P_n(x)$, причем $\dim P_n(x) = n + 1$.

Пример 2. Определить размерность линейного пространства всех действительных функций $F(\mathbf{R})$ с обычными операциями сложения функций и произведения функции на число.

Решение. Непосредственно проверяются аксиомы А1)–А8) линейного пространства, следовательно $F(\mathbf{R})$ является векторным пространством. Далее, функции $y = x$, $y = x^2$, ..., $y = x^n$ являются линейно-независимыми векторами для любого n, т. е. $F(\mathbf{R})$ не имеет конечного базиса и является бесконечномерным.

Пример 3. Доказать, что множество $M(m, n)$ всех прямоугольных действительных (размера $m \times n$) матриц с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число является линейным пространством. Найти его размерность.

Решение. Поскольку выполняются аксиомы А1)–А8), то $M(m, n)$ – линейное пространство (убедитесь в этом самостоятельно).

Рассмотрим матрицу E_{ij}, $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$, в которой элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен 1, а все остальные элементы равны нулю. Всего таких матриц будет $m\cdot n.$ Для любой матрицы $A=(a_{ij})\in M(m,n)$ имеем: $A=(a_{ij})=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}.$ Из этого равенства следует, что любая матрица A линейно выражается через матрицы E_{ij}. Если $A=O$ (нулевая матрица), то $a_{ij}=0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$ Следовательно, векторы E_{ij} – линейно-независимы и образуют базис векторного пространства $M(m, n)$. Таким образом, размерность этого пространства равна $m\cdot n.$ В частности, для квадратных матриц порядка n она равна n^2.

Пример 4. Доказать, что множество всех *геометрических векторов* в трехмерном пространстве образует трехмерное векторное пространство V.

Решение. Если рассмотреть в трехмерном пространстве декартову систему координат с соответствующими ортами $\vec{i}=(1;0;0),\ \vec{j}=(0;1;0),$ $\vec{k}=(0;0,1),$ то любой вектор $\vec{a}\in V$ единственным образом разлагается по $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$:

$$\vec{a}=l_1\vec{i}+l_2\vec{j}+l_3\vec{k}.$$

В стандартном курсе векторной алгебры показывается, что операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число l удовлетворяют аксиомам А1)–А8). Поэтому множество всех геометрических векторов V образует линейное пространство.

Очевидно, что в случае равенства $l_1\vec{i}+l_2\vec{j}+l_3\vec{k}=\vec{0}$ выполняется $l_1=l_2=l_3=0,$ и векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – линейно-независимы. Таким образом, пространство V имеет размерность 3 и отождествляется с $\mathbf{R}^3$, если задан базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}.$

Пример 5. Описать геометрически все подпространства линейного пространства $\mathbf{R}^3$.

Решение. Любое векторное пространство V имеет два *тривиальных* подпространства V и $\{0\}$. Если $\overline{V}$ – подпространство пространства $\mathbf{R}^3$, то в $\overline{V}$ имеется максимальная система линейно-независимых векторов, предположим, что m – число векторов этой системы. Если $m=3,$ то $\overline{V}=V;$ если $m=0,$ то $\overline{V}=\{0\}.$ Если $m=1,$ то $\overline{V}$ отождествляется с множеством всех векторов некоторой прямой, проходящей через начало координат. В случае $m=2$ множество $\overline{V}$ можно считать множеством всех векторов плоскости, проходящей через начало координат. Всевозможные такие прямые и плоскости геометрически и описывают все нетривиальные подпространства пространства $\mathbf{R}^3$.

Пример 6. Доказать, что векторы $\vec{a}=(1;2;1),$ $\vec{b}=(1;1;-3)$ и $\vec{c}=(-1;2;1)$ образуют базис пространства $\mathbf{R}^3$, и найти координаты вектора $\vec{d}=(0;10;-2)$ в этом базисе.

Решение. Как известно из векторной алгебры, базис в $\mathbf{R}^3$ образует всякая тройка векторов, для которой смешанное произведение не равно нулю. Вычислим его для заданных векторов:

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&-3\\-1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&-4\\0&4&2\end{vmatrix}=14\neq 0.$$

Мы убедились, что векторы $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют базис. Чтобы определить координаты вектора $\overline{d}$, разложим его по векторам этого базиса.

Предположим, что

$$\vec{d}=l_1\vec{a}+l_2\vec{b}+l_3\vec{c}$$

или в координатной форме

$$(0,10,-2)=l_1(1,2,1)+l_2(1,1,-3)+l_3(-1,2,1).$$

В координатной форме последнее равенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}l_1+l_2-l_3=0,\\2l_1+l_2+2l_3=10,\\l_1-3l_2+l_3=-2.\end{cases}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов l_1,l_2,l_3 решим систему методом Крамера. Вычислим определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&1&2\\1&-3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&-1&4\\0&-4&2\end{vmatrix}=-2+16=14\neq 0.$$

Далее находим

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&1&-1\\10&1&2\\-2&-3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\10&1&3\\-2&-3&-2\end{vmatrix}=-(-20+6)=14,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&10&2\\1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&10&4\\1&-2&2\end{vmatrix}=20+8=28,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&10\\1&-3&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-1&10\\1&-4&-2\end{vmatrix}=2+40=42.$$

Используя формулы Крамера, находим:

$$l_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{14}{14}=1,\quad l_2=\frac{28}{14}=2,\quad l_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{42}{14}=3.$$

Таким образом в базисе $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ справедливо разложение $\overline{d}=l_1+2l_2+3l_3$, т. е. $\overline{d}=(1, 2, 3)$.

Задания

I уровень

1.1. Определите, образует ли следующее множество линейное пространство:

1) множество всех векторов координатной плоскости, выходящих из начала координат и имеющих концы, лежащие в пределах верхней полуплоскости;
2) множество всех целых чисел **Z**;
3) множество всех действительных чисел **R**;
4) множество всех матриц-строк $\{(a\,;\,b\,;\,a\,;\,b)\}, a, b\in\mathbf{R}$.

1.2. Определите, образуют ли векторы $\overline{a}, \overline{b}$ базис пространства $\mathbf{R}^2$, если:

1) $\overline{a}=(1;3)$, $\overline{b}=(2;3)$;
2) $\overline{a}=(0;1)$, $\overline{b}=(3;0)$;
3) $\overline{a}=(0;0)$, $\overline{b}=(1;3)$;
4) $\overline{a}=(2;7)$, $\overline{b}=(-3;5)$;
5) $\overline{a}=(-1;1)$, $\overline{b}=(0;1)$;
6) $\overline{a}=(2;2)$, $\overline{b}=(4;4)$.

1.3. Проверьте, образуют ли векторы $\overline{a}, \overline{b}$ базис пространства $\mathbf{R}^2$. Если образуют, то найдите координаты вектора $\overline{c}$ в этом базисе:

1) $\overline{a}=(1;3)$, $\overline{b}=(-1;2)$, $\overline{c}=(3;4)$;
2) $\overline{a}=(1;1)$, $\overline{b}=(-3;-3)$, $\overline{c}=(7;5)$;
3) $\overline{a}=(2;-1)$, $\overline{b}=(2;1)$, $\overline{c}=(5;-5)$;
4) $\overline{a}=(0;1)$, $\overline{b}=(0;-5)$, $\overline{c}=(1;1)$;
5) $\overline{a}=(5;-1)$, $\overline{b}=(3;2)$, $\overline{c}=(7;7)$;
6) $\overline{a}=(1;-1)$, $\overline{b}=(3;1)$, $\overline{c}=(4;4)$.

II уровень

2.1. Проверьте, образует ли данное множество векторов подпространство соответствующего линейного пространства:

1) множество всех матриц второго порядка вида $\begin{bmatrix}0&0\\0&b\end{bmatrix}$, $b\in\mathbf{R}$, в пространстве всех квадратных матриц порядка два;
2) множество всех векторов пространства $\mathbf{R}^3$ с рациональными координатами;
3) множество всех векторов пространства $\mathbf{R}^4$ с нулевой первой координатой;
4) множество $C(\mathbf{R})$ всех непрерывных и определенных на **R** функций в пространстве $F(\mathbf{R})$ всех действительных функций, определенных на **R**.

2.2. Определите, образуют ли векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ базис пространства $\mathbf{R}^3$:

1) $\overline{a}=(1;0;0)$, $\overline{b}=(2;1;0)$, $\overline{c}=(3;4;1)$;
2) $\overline{a}=(1;1;2)$, $\overline{b}=(1;2;1)$, $\overline{c}=(1;0;1)$;
3) $\overline{a}=(2;1;-1)$, $\overline{b}=(1;1;1)$, $\overline{c}=(4;2;-2)$;
4) $\overline{a}=(-1;0;1)$, $\overline{b}=(3;4;5)$, $\overline{c}=(2;1;0)$.

2.3. Проверьте, образуют ли векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ базис пространства $\mathbf{R}^3$. Если образуют, то найдите координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе:

1) $\overline{a}=(1;2;1)$, $\overline{b}=(1;1;3)$, $\overline{c}=(-1;2;1)$, $\overline{d}=(0;10;-2)$;
2) $\overline{a}=(3;5;4)$, $\overline{b}=(4;3;2)$, $\overline{c}=(-1;-4;3)$, $\overline{d}=(-2;-2;5)$;

3) $\bar{a}=(2;1;1)$, $\bar{b}=(1;2;1)$, $\bar{c}=(1;1;2)$, $\bar{d}=(2;3;-1)$;

4) $\bar{a}=(2;1;-3)$, $\bar{b}=(-1;2;4)$, $\bar{c}=(3;-4;2)$, $\bar{d}=(-4;19;3)$;

5) $\bar{a}=(3;4;3)$, $\bar{b}=(-2;3;1)$, $\bar{c}=(4;-2;3)$, $\bar{d}=(-17;18;-7)$.

III уровень

3.1. Проверьте, образует ли данное подмножество векторов подпространство соответствующего линейного пространства:

1) множество всех квадратных матриц порядка n $(n\in \mathbf{N}, n\geq 2)$, у которых сумма элементов равна нулю, в линейном пространстве всех квадратных матриц порядка n с действительными элементами;
2) множество всех кососимметрических матриц порядка n (матрица A называется кососимметрической, если $A^T=-A$) в линейном пространстве всех квадратных матриц порядка n с действительными элементами.

3.2. Найдите размерность подпространства V векторного пространства $\mathbf{R}^6$, где $V=\{a;b;0;-a;-b;0 \mid a, b\in \mathbf{R}\}$.

3.3. Проверьте, образуют ли векторы a, b, c, d базис пространства $\mathbf{R}^4$. Если образуют, то найдите координаты вектора f в этом базисе:

$a=(1;2;3;4)$, $b=(2;1;-4;1)$, $c=(-2;3;1;3)$, $d=(1;2;-3;1)$,
$f=(-5;4;11;8)$.

23.2. Евклидово пространство, определение и примеры

Пусть V – линейное пространство. Каждой паре векторов $x, y\in V$ поставим в соответствие действительное число (обозначим (x, y) или $x\cdot y$), называемое ***скалярным произведением*** векторов x, y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

E1) скалярное произведение векторов x, y ***коммутативно***, т. е. $x\cdot y=y\cdot x$;

E2) скалярное произведение векторов ***дистрибутивно*** от-

носительно сложения векторов, т. е. $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ для любых $x, y, z\in V$;

E3) числовой множитель l можно выносить за знак скалярного произведения, т. е. $(l\,x)\cdot y=l\,(x\cdot y)$;

E4) скалярный квадрат $x\cdot x=x^2$ вектора $x\in V$ неотрицателен, т. е. $x^2\geq 0$, причем $x^2=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$.

Линейное пространство V со скалярным произведением, удовлетворяющим аксиомам E1)–E4), называется ***евклидовым пространством*** и обозначается E, n-*мерное* евклидово пространство обозначается E^n.

Теорема (*неравенство Коши–Буняковского*). Для любых двух векторов x, y евклидова пространства E справедливо неравенство: $(x\cdot y)^2\leq (x\cdot x)(y\cdot y)$.

В евклидовом пространстве E для любого вектора x определяется ***длина*** (***норма***) этого вектора:

$|x|=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x^2}$,

обладающая следующими свойствами:

D1) $|x|>0$, если $x\neq 0$, и $|x|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

D2) $|l\,x|=|l|\cdot|x|$, $\forall\, l\in \mathbf{R}$, $\forall x\in E$;

D3) $|x+y|\leq|x|+|y|$, $\forall x, y\in E$ (неравенство треугольника).

В евклидовом пространстве E для любых векторов x, y определяется ***угол*** j $(0\leq j\leq p)$ ***между векторами x, y***, косинус которого находится по формуле:

$$\cos j=\frac{x\cdot y}{|x||y|}=\frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y^2}}.$$

Два вектора евклидова пространства E называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю.

Система векторов называется ***ортогональной***, если каждая пара векторов этой системы ортогональна.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***нормированным***. Для любого вектора $x\in E$, $x\neq 0$, нормированный вектор x_0 находится по формуле: $x_0=\dfrac{1}{|x|}x$.

Базис $e_1, e_2, ..., e_n$ евклидова пространства E^n, который удовлетворяет условиям $e_i \cdot e_j = d_j^i = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j, \end{cases}$ (d_j^i – ***символ Кронекера***), называется ***ортонормированным базисом***.

Базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ трехмерного пространства геометрических векторов является ортонормированным.

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – ортонормированный базис пространства E^n и векторы $x, y \in E^n$ разлагаются по векторам этого базиса:

$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_n e_n = (a_1, a_2, ..., a_n),$

$y = b_1 e_1 + b_2 e_2 + ... + b_n e_n = (b_1, b_2, ..., b_n).$

Тогда имеем:

$$x \cdot y = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n; \qquad (23.3)$$

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}; \qquad (23.4)$$

$$\cos j = \frac{x \cdot y}{|x||y|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}}. \qquad (23.5)$$

Пример 1. Доказать, что евклидовым пространством является:

1) множество всех геометрических векторов V^3, если скалярное произведение векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V^3$ задать по формуле $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$;

2) множество $C[a, b]$ всех действительных функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением $f(x) \cdot g(x) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$;

3) арифметическое линейное пространство $\mathbf{R}^n$ относительно скалярного произведения, определяемого по формуле $x \cdot y = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$, где $x = (a_1, ..., a_n)$, $y = (b_1, ..., b_n) \in \mathbf{R}^n$.

Решение. Проверка аксиом E1)–E4) осуществляется в любом курсе аналитической геометрии.

Выполнение аксиом E1)–E4) следует из свойств определенного интеграла.

Непосредственно проверяется справедливость аксиом E1)–E4).

Пример 2. Доказать, что ортогональная система векторов $x_1, x_2, ..., x_k$, не содержащая нулевых векторов, состоит из линейно-

независимых векторов.

Решение. Пусть $l_1 x_1 + l_2 x_2 + ... + l_k x_k = 0$, тогда

$(l_1 x_1 + l_2 x_2 + ... + l_k x_k) \cdot x_j = l_1 (x_1 \cdot x_j) + l_2 (x_2 \cdot x_j) + ... + l_k (x_k \cdot x_j) =$

$= l_j (x_j \cdot x_j) = l_j x_j^2 = l_j |x_j|^2 = 0,$

$j = \overline{1, n}.$ Если $|x_j| \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, то $l_j = 0$. Следовательно, векторы $x_1, x_2, ..., x_k$ – линейно-независимые.

Пример 3. Найти угол между векторами $\bar{a} = (1; 0; 4; -2; 3)$ и $\bar{b} = (0; 2; 3; 0; -1)$ в E^5.

Решение. Используя формулы (23.3)–(23.5), находим:

$|a| = \sqrt{1 + 16 + 4 + 9} = \sqrt{30},$

$|b| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14},$

$a \cdot b = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 12 - 3 = 9,$

$\cos j = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{9}{\sqrt{30}\sqrt{14}} = \frac{9}{2\sqrt{15 \cdot 7}} = \frac{9\sqrt{105}}{3 \cdot 10 \cdot 7} = \frac{3\sqrt{105}}{70}.$

Получаем $j = \arccos \frac{3\sqrt{105}}{70}.$

Задания

I уровень

1.1. Найдите единичный вектор, сонаправленный с данным вектором $\bar{a}$=(4; 0;-3)

1.2. Даны векторы $\bar{a}$ =(1; 2; 1;) и $\bar{b} = (1; -1; -1)$. Найдите угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

1.3. Нормируйте вектор $\bar{a}$ =(3; 1; 2; 1).

1.4. Определите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:
$\bar{a}(3;\ 4;\ -5)$, $\bar{b}(2; 14; 1)$.

II уровень

2.1. Определите угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:
1) $a = (1; 1; -1; 1)$, $b = (0; -1; 1; 1)$; 2) $a = (2; -2; 0; 1)$, $b = (2; 0; 0; 1)$.

2.2. Найдите векторы, дополняющие до ортонормированного базиса следующие системы векторов:

1) $\bar{a}=\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$, $\bar{b}=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$;

2) $\bar{a}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\bar{b}=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

III уровень

3.1. Выясните, ортогонален ли вектор $\bar{a}$:

1) $\bar{a}=(1;-4;-1;-2)$; 2) $\bar{a}=(3;\ 2;\ 1;-1)$

подпространству решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=0,\\ 2x_1+x_2-5x_3+5x_4=0.\end{cases}$$

3.2. Найдите длины диагоналей *n*-мерного куба со стороной, равной 1, где *n*-мерный куб определить по аналогии с двумерным (квадратом) и обычным трехмерным кубом.

23.3. Линейные операторы. Матрица линейного оператора

Пусть V и $\bar{V}$ – линейные пространства. ***Оператором*** *A, действующим* из V в $\bar{V}$, называется ***отображение*** $A: V\to\bar{V}$, сопоставляющее каждому элементу $x\in V$ единственный элемент $y\in\bar{V}$, обозначаемый $y=A(x)$ или $y=Ax$. Вектор *y* называется ***образом*** вектора *x*.

Оператор $A: V\to\bar{V}$ называется ***линейным***, если для любых векторов x_1, x_2 из V и любого числа l имеем:

$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$, $A(l\,x_1)=l\,Ax_1$.

Если $V=\bar{V}=\mathbf{R}$, то оператор A называется ***функцией*** (числовой).

Если V – произвольное линейное пространство и $\bar{V}=\mathbf{R}$, то оператор *A* называется ***функционалом***.

Если $\bar{V}=V$, то линейный оператор *A* называется ***линейным преобразованием пространства V***.

Пусть $L(V,\bar{V})$ – множество всех линейных операторов, действующих из V в $\bar{V}$, и $A, B\in L(V,\bar{V})$. ***Суммой*** операторов *A* и *B* называется оператор, обозначаемый $A+B$, который определяется условием

$(A+B)x=Ax+Bx,\ \forall x\in V$.

Произведением оператора A на число l называется оператор, обозначаемый $l\,A$, который определяется условием

$(l\,A)x=l\,(Ax),\ \forall x\in V$.

Нулевым линейным ***оператором*** называется оператор *O* такой, что $Ox=0,\ \forall x\in V$. ***Тождественным оператором*** называется линейный оператор I такой, что $Ix=x,\ \forall x\in V$, для него выполняется $I: V\to V$.

Теорема. Относительно введенных операций сложения линейных операторов и умножения линейного оператора на число множество $L(V,\bar{V})$ само образует линейное пространство.

Произведением линейных преобразований *A* и *B* называется линейное преобразование, обозначаемое $A\cdot B$, которое определяется условием $(A\cdot B)x=A(Bx),\ \forall x\in V$. ***Натуральная степень*** оператора определяется равенством $A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{n\ раз}$, $n\in\mathbf{N}$.

Справедливы следующие свойства:

1) $l\,(A\cdot B)=(l\,A)\cdot B=A\cdot(l\,B)$;

2) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;

3) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;

4) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C),\ \forall A, B, C\in L(V,V)$.

В общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$;

5) $A^m\cdot A^n=A^{m+n}$.

Линейное преобразование *B* (обозначаемое A^{-1}) называется ***обратным*** к линейному преобразованию *A*, если $A\cdot B=B\cdot A=I$ $(A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I)$.

Если для преобразования A из того, что $Ax_1=Ax_2$ всегда следует, что $x_1=x_2$, $\forall x_1, x_2\in V$, то говорят, что оператор *A* является ***взаимно-однозначным отображением*** *V* на $\bar{V}$.

Теорема. Для того чтобы для линейного преобразования A существовало обратное линейное преобразование A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы оператор был взаимно-однозначным отображением V на $\bar{V}$.

Пусть $e_1, ..., e_n$ – базис линейного пространства V^n и A – линейный оператор из V^n в V^n. Тогда вектор x $(x \in V^n)$ разлагается по базису: $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.

Если $y = Ax$, то $y = A\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i A(e_i)$.

Если $A(e_k)$ – образы базисных векторов e_k $(k = \overline{1, n})$, то они также разлагаются по заданному базису:

$$A(e_k) = a_{1k}e_1 + a_{2k}e_2 + ... + a_{nk}e_n, \quad k = \overline{1, n}. \tag{23.6}$$

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{23.7}$$

у которой элементы столбцов являются соответственно координатами разложений (23.6), называется ***матрицей оператора*** A в базисе (e_k), $k = \overline{1, n}$.

Пусть для $x \in V^n$ имеем разложение в базисе (e_k), $k = \overline{1, n}$:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n. \tag{23.8}$$

Тогда для соответствующего образа $y = A(x)$ существует разложение

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n. \tag{23.9}$$

В случае задания матрицы (23.7) оператора A, он определяется ею однозначно, а именно $\forall x \in V^n$ и его образа $y \in V^n$ выполняется

$Y = AX$,

где X и Y – столбцы координат (23.8) и (23.9) векторов x и y соответственно, т. е.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & x_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & x_n \end{array}\right]. \tag{23.10}$$

Все операции над линейными операторами, которые рассматривались выше, распространяются на матричную форму задания линейного оператора как соответствующие операции над матрицами, т. е. в заданном базисе оператор $A + B$ имеет матрицу $A + B$, оператор $A \cdot B$ – матрицу AB и т. д. При этом нулевой оператор O имеет нулевую матрицу, а тождественный оператор I – единичную матрицу.

Пусть в линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ заданы два произвольных базиса $(e_1, e_2, ..., e_n)$ и $(e_1', e_2', ..., e_n')$. Тогда каждый вектор второго базиса разлагается по первому базису:

$$\begin{cases} e_1' = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + ... + c_{1n}e_n, \\ e_2' = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + ... + c_{2n}e_n, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad , \\ e_n' = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + ... + c_{nn}e_n. \end{cases} \tag{23.11}$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & ... & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & ... & c_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{1n} & c_{2n} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}, \tag{23.12}$$

транспонированная к матрице системы (23.11), называется ***матрицей перехода*** от базиса (e_k) к базису (e_k'), $k = \overline{1, n}$.

Связь между координатами одного и того же вектора x в базисах (e_k), (e_k'), $k = \overline{1, n}$, устанавливают формулы:

$$\begin{aligned} X &= CX', \\ X' &= C^{-1}X. \end{aligned} \tag{23.13}$$

где X – матрица-столбец координат вектора x в базисе (e_k),

X' – матрица-столбец координат этого же вектора x в базисе (e_k').

Формулы (23.11) и (23.12) выражают зависимость между координатами вектора x в базисах (e_i), (e_i'), $i = \overline{1, n}$.

Если A – линейный оператор, имеющий в базисах (e_k), (e'_k), $k=\overline{1,n}$, линейного пространства $\mathbf{R}^n$ матрицы A и B соответственно, то формула преобразования матрицы оператора при переходе к новому базису имеет вид:

$$B = C^{-1}AC. \qquad (23.14)$$

Пример 1. Пусть $V = \bar{V} = C[a,b]$ – линейное пространство всех функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$. Для всех $f(x) \in C[a,b]$ определен оператор J по формуле

$$(Jf)(t) = \int_a^t f(x)\,dx.$$

Доказать, что J – линейный оператор из $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Решение. Оператор $(Jf)(t)$ является непрерывной функцией на отрезке $[a,b]$. Хорошо известно, что операция интегрирования обладает свойствами линейности, следовательно J – линейный оператор из $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Пример 2. Пусть $V = C^1[a,b]$ – линейное пространство всех действительных функций, определенных и дифференцируемых на отрезке $[a;b]$. Для $f(x) \in C^1[a,b]$ определим оператор D по формуле $(Df)(x) = f'(x)$. Очевидно, что D – линейный оператор из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$, поскольку линейность следует из свойств линейности производной.

Пример 3. Известно, что оператор A переводит базисные векторы $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k} = (0;0;1)$ линейного пространства $\mathbf{R}^3$ в векторы $\bar{a}_1 = (1;1;0)$, $\bar{a}_2 = (3;2;1)$, $\bar{a}_3 = (3;1;1)$. В базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ найти:

1) матрицу оператора A;

2) образ вектора $\bar{b} = (1;2;3)$.

Решение. 1) По условию $A\bar{i} = \bar{a}_1$. Поэтому первый столбец матрицы A оператора составляют координаты вектора $\bar{a}_1$. Поскольку $A\bar{j} = \bar{a}_2$, то второй столбец матрицы A и состоит из координат вектора $\bar{a}_2$. Третий столбец искомой матрицы состоит из координат вектора $\bar{a}_3$, так как $A\bar{k} = \bar{a}_3$. Следовательно, матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Пусть $\bar{c} = A\bar{b}$, где $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – образ вектора $\bar{b}$. Тогда, согласно формуле (23.10), имеем:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6+9 \\ 1+4+3 \\ 0+2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Получаем $\bar{c} = (16;8;5)$.

Пример 4. Известно, что операторы A и B переводят базисные векторы $e_1 = (1;0;0;0)$, $e_2 = (0;1;0;0)$, $e_3 = (0;0;1;0)$, $e_4 = (0;0;0;1)$ соответственно в векторы $a_1 = (1;2;0;0)$, $a_2 = (0;-1;0;0)$, $a_3 = (1;1;0;0)$, $a_4 = (2;0;0;1)$; $b_1 = (2;3;0;-1)$, $b_2 = (0;1;1;0)$, $b_3 = (-1;2;0;0)$, $b_4 = (0;0;0;0)$. Записать формулы, по которым можно найти вектор $y = (2A - B)x$ пространства $\mathbf{R}^4$.

Решение. Пусть в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 заданы векторы $x = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ и $y = (y_1; y_2; y_3; y_4)$. Запишем матрицы операторов $A, B, 2A - B$ в указанном базисе. Записывая координаты векторов a_1, a_2, a_3, a_4 столбцами, получим матрицу A. Используя аналогично координаты векторов b_1, b_2, b_3, b_4, получим матрицу B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы получить матрицу $2A - B$, осуществим соответствующие линейные операции над матрицами A и B. Тогда

$$2A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Если X, Y – матрицы-столбцы координат векторов x, y соответственно, то в матричной форме имеем: $Y = (2A - B)X$,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы в правой части последнего равенства, получаем формулы для нахождения координат искомого вектора y:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_3 + 4x_4, \\ y_2 = x_1 - 3x_2, \\ y_3 = -x_2, \\ y_4 = x_1 - x_4. \end{cases}$$

Пример 5. В базисе (e_1, e_2, e_3) пространства $\mathbf{R}^3$ вектор a имеет координаты (1; 2; 3). Найти координаты вектора a в базисе (e_1', e_2', e_3'), где $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$, $e_3' = e_1 - e_3$.

Решение. Имеем $e_1' = (1; 0; 0)$, $e_2' = (1; 1; 0)$, $e_3' = (1; 0; -1)$. Следовательно, матрица перехода от базиса (e_k) к базису (e_k') в данном случае имеет вид:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

По условию $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ и по формуле (23.13) $X' = C^{-1}X$. Найдем матрицу C^{-1}. Вычисляем:

$\det C = -1$ (как произведение элементов диагонали).

Находя алгебраическое дополнение для каждого элемента матрицы C, получаем матрицу

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Согласно формуле нахождения обратной матрицы, $C^{-1} = \dfrac{1}{\det C}\overline{C}^T$, имеем

$$C^{-1} = -\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда по формуле (23.13) получаем:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, вектор a в базисе (e_1', e_2', e_3') имеет координаты $(2; 2; -3)$.

Пример 6. В базисе (e_1, e_2, e_3) пространства V^3 оператор A имеет матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Найти матрицу B этого же оператора в базисе (e_1', e_2', e_3'), где $e_1' = e_1 + 2e_2$, $e_2' = e_1 - e_3$, $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$.

Решение. Используя условие и равенства (23.11), (23.12), запишем матрицу перехода от базиса (e_k) к базису (e_k'):

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу B оператора в новом базисе найдем по формуле (23.14).

Находим $C^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

Тогда

$$B = C^{-1}AC = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получаем ответ: $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$

Пример 7. Найти матрицу оператора A в базисе (e_1, e_2, e_3) пространства V^3, если известно, что A отображает векторы $b_1 = (0; 0; 1)$, $b_2 = (0; 1; 1)$ и $b_3 = (1; 1; 1)$ соответственно в векторы $c_1 = (2; 3; 5)$, $c_2 = (1; 0; 0)$ и $c_3 = (0; 1; -1)$.

Решение. Из условия имеем $Ab_1 = c_1$, $Ab_2 = c_2$ и $Ab_3 = c_3$ или в матричной форме $AB = C$, где A – искомая матрица оператора A в базисе (e_1, e_2, e_3), B – матрица, столбцами которой являются столбцы координат векторов b_1, b_2, b_3, C – матрица, столбцами которой являются столбцы координат векторов c_1, c_2, c_3 соответственно:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $AB = C$, то после умножения этого равенства справа на B^{-1} получаем $A = CB^{-1}$, если матрица B^{-1} существует.

Вычисляем $\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ и приходим к заключению, что B^{-1} существует.

По правилу нахождения обратной матрицы получаем:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A = CB^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите матрицу C оператора в некотором базисе $\mathbf{R}^2$, если известны матрицы операторов A и B в этом базисе и взаимосвязь операторов A, B, C:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, C = 3A - 2B;$

2) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ C = A^{-1} - 2I;$

3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, C = A \cdot B - B \cdot A.$

1.2. Составьте матрицу C оператора, переводящего базисные векторы $e_1 = (1; 0)$, $e_2 = (0; 1)$ пространства $\mathbf{R}^2$ в векторы $a_1 = (2; -1)$, $a_2 = (3; 5)$, а также формулы, по которым может быть найден вектор $y = (C - 2I)x$ пространства $\mathbf{R}^2$.

1.3. Вектор $\overline{a}$ в базисе $(e_1; e_2)$ пространства $\mathbf{R}^2$ имеет координаты (2; 3). Найдите координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $(e_1'; e_2')$, где $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = -e_1 + e_2$.

1.4. В базисе $(e_1; e_2)$ пространства $\mathbf{R}^2$ оператор A имеет матрицу $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу B этого же оператора в базисе $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = -e_1 + e_2$.

II уровень

2.1. Выясните, является ли линейным оператором пространства $\mathbf{R}^3$ преобразование A, переводящее любой вектор $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ в вектор $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$:

1) $y = (5x_1 + 2x_2 - x_3; x_1 + x_3; x_1 - x_2)$; 2) $y = (2x_1; x_1^2 - 3x_2; x_2 + 3)$;

3) $y = (7x_3; x_1 + x_2 + x_3; 2x_2 - 1)$; 4) $y = (x_1 - x_3; x_2 + x_3; x_1 - x_2)$.

2.2. Найдите матрицу линейного оператора, переводящего в пространстве $\mathbf{R}^3$ векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3 соответственно:

1) $\overline{a}_1 = (0; 0; 1)$, $\overline{a}_2 = (0; 1; 1)$, $\overline{a}_3 = (1; 1; 1)$,
$\overline{b}_1 = (2; 3; 5)$, $\overline{b}_2 = (1; 0; 0)$, $\overline{b}_3 = (0; 1; -1)$;

2) $\overline{a}_1 = (2; 3; 5)$, $\overline{a}_2 = (0; 1; 2)$, $\overline{a}_3 = (1; 0; 0)$,
$\overline{b}_1 = (1; 1; 1)$, $\overline{b}_2 = (1; 1; -1)$, $\overline{b}_3 = (2; 1; 2)$;

3) $\overline{a}_1 = (1; 1; 1)$, $\overline{a}_2 = (1; 2; 3)$, $\overline{a}_3 = (1; 2; 4)$,
$\overline{b}_1 = (0; 0; 1)$, $\overline{b}_2 = (1; 0; -1)$, $\overline{b}_3 = (-1; 1; 0)$.

2.3. Известна матрица A линейного оператора в стандартном базисе пространства $\mathbf{R}^3$. Найдите матрицу этого же оператора в новом базисе e_1', e_2', e_3' пространства $\mathbf{R}^3$:

1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $e_1'=(1;0;-1)$, $e_2'=(0;1;1)$, $e_3'=(0;0;1)$;

2) $A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $e_1'=(2;0;3)$, $e_2'=(0;-1;0)$, $e_3'=(1;1;1)$.

III уровень

3.1. Докажите, что оператор дифференцирования D является линейным преобразованием пространства всех многочленов степени не выше n от одной переменной с действительными коэффициентами. Найдите матрицу оператора D в базисе $e_1=1$, $e_2=x$, $e_3=x^2$, ..., $e_{n+1}=x^n$.

3.2. Докажите, что поворот координатной плоскости xOy на угол a вокруг начала координат есть линейное преобразование $\mathbf{R}^2$. Запишите матрицу этого оператора в базисе $\vec{i}=(1;0)$, $\vec{j}=(0;1)$ пространства $\mathbf{R}^2$.

3.3. Линейное преобразование A в базисе $a_1=(8;-6;7)$, $a_2=(-16;7;-13)$, $a_3=(9;-3;7)$ имеет матрицу $A=\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицу преобразования A^{-1} в базисе $b_1=(1;-2;1)$, $b_2=(3;-1;2)$, $b_3=(2;1;2)$.

3.4. Найдите матрицу линейного преобразования A в ортонормированном базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ пространства $\mathbf{R}^3$, где $A\overline{x}=\left[\overline{x},\overline{b}\right]$, $\overline{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

23.4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Число $l\in\mathbf{R}$ называется ***собственным значением*** оператора A, если существует ненулевой вектор $x\in V$ такой, что

$$Ax=l\,x. \qquad (23.15)$$

Вектор x, удовлетворяющий условию (23.15), называется ***собственным вектором*** оператора A, соответствующим собственному значению l. Множество всех собственных значений оператора A называется его ***спектром***.

Пусть $(e_1,e_2,...,e_n)$ – базис линейного пространства V^n, A – матрица оператора A в этом базисе, $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ – собственный вектор оператора A, X – столбец координат вектора x. Тогда условие (23.15) в матричной форме принимает вид $AX=l\,X$ или $(A-l\,E)X=O$, где E – единичная матрица, O – нулевая матрица. Матричное уравнение $(A-l\,E)X=O$ представляет собой однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-l\,)x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+(a_{22}-l\,)x_2+...+a_{2n}x_n=0, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ , \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+(a_{nn}-l\,)x_n=0. \end{cases} \qquad (23.16)$$

Система уравнений (23.16) имеет отличное от нуля решение тогда и только тогда, когда:

$$\det(A-l\,E)=\begin{vmatrix} a_{11}-l & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-l & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-l \end{vmatrix}=0. \qquad (23.17)$$

Уравнение n-й степени (23.17) относительно переменной l называется ***характеристическим уравнением*** линейного оператора A (матрицы A). Корни этого уравнения и являются собственными значениями оператора A.

Пусть из уравнения (23.17) найден корень $l=l_0$. Чтобы найти собственные векторы оператора A, соответствующие этому собственному значению, нужно подставить $l=l_0$ в (23.16) и, решив полученную однородную систему линейных уравнений, найти координаты искомых собственных векторов.

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы оператора A, заданного в некотором базисе (e_1, e_2) пространства V^2 матрицей $A = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение (23.17) для заданной матрицы

$$\begin{vmatrix} 17-l & 6 \\ 6 & 8-l \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, имеем уравнение:

$(17-l)(8-l)-6^2=0$, т. е. $l^2-25l+100=0$.

Находим $l_1=5$ и $l_2=20$.

Получили собственные значения: $l_1=5$, $l_2=20$.

Найдем собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям. Запишем систему уранений (23.16) для данного случая:

$$\begin{cases} (17-l)x_1+6x_2=0, \\ 6x_1+(8-l)x_2=0. \end{cases} \qquad (23.18)$$

Подставив $l_1=5$ в (23.18), получим систему:

$$\begin{cases} (17-5)x_1+6x_2=0, \\ 6x_1+(8-5)x_2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 12x_1+6x_2=0, \\ 6x_1+3x_2=0. \end{cases}$$

Решение системы: $x_2=-2x_1$.

Получили множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $l_1=5$: $L_1=\{(a;-2a)|a\in R\}$.

Подставив $l_2=20$ в (23.18), получим однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} (17-20)x_1+6x_2=0, \\ 6x_1+(8-20)x_2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} -3x_1+6x_2=0, \\ 6x_1-12x_2=0, \end{cases}$$

решив которую, имеем $x_1=2x_2$. Тогда множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $l_2=20$, будет $L_2=\{(2b;b)|b\in\mathbf{R}\}$.

Пример 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора A, заданного в некотором базисе пространства V^3 матрицей $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение (23.17) для заданной матрицы:

$$\begin{vmatrix} -l & -1 & 1 \\ -1 & -l & 1 \\ 1 & 1 & -l \end{vmatrix} = 0; \quad -l(l^2-1)+(l-1)+(-1+l)=0;$$

$$(l-1)(-l^2-l+2)=0; \quad -(l-1)^2(l+2)=0.$$

Получаем собственные значения: $l_1=1$, $l_2=-2$.

Найдем собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям. Запишем соответствующую систему уравнений

$$\begin{cases} -l\,x_1-x_2+x_3=0, \\ -x_1-l\,x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2-l\,x_3=0. \end{cases} \qquad (23.19)$$

Подставляя $l_1=1$ в систему уравнений (23.19), получим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1-x_2+x_3=0, \\ -x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \end{cases}$$

решение которой $x_3=x_1+x_2$.

Получаем множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $l_1=1$: $L_1=\{(a;b;a+b)|a,b\in\mathbf{R}\}$.

Подставляя $l_2=-2$ в систему уравнений (23.19), получаем однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0, \\ -x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2-2x_3=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1-x_3=0, \\ 2x_1+2x_2=0. \end{cases}$$

Ее решением будет $\begin{cases} x_3=3x_1, \\ x_2=-x_1. \end{cases}$

Получили множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $l_2=-2$: $L_2=\{(g,-g;3g)|g\in\mathbf{R}\}$.

Задания

I уровень

1.1. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A:

1) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$;   2) $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}$;   3) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$;   5) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$;   6) $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$.

II уровень

2.1. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A:

1) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}$; 3) $A=\begin{bmatrix}7 & 0 & 0\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$; 5) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$; 6) $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

III уровень

3.1. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A:

1) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$;   2) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

3.2. Найдите собственные значения квадратной диагональной матрицы порядка n.

3.3. Найдите собственные значения квадратной треугольной матрицы порядка n.

3.4. Известны собственные значения $l_1, l_2, ..., l_k$ матрицы A. Найдите собственные значения матрицы B, если матрица B равна:

1) $B=5A$;   2) $B=A-3E$.

23.5. Квадратичные формы, приведение уравнения кривой и поверхности 2-го порядка к каноническому виду

Квадратичной формой переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ $(x_k \in \mathbf{R},\ k=\overline{1, n})$ называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных:

$$f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \qquad (23.20)$$

где a_{ij} – числовые коэффициенты $(a_{ij} \in \mathbf{R})$.

Квадратичная форма (23.20) не содержит свободного члена и одночленов 1-й степени.

Квадратичную форму можно записать так, что коэффициенты при x_{ij} и x_{ji} $(i \neq j)$ будут равны, поэтому будем считать, что $a_{ij}=a_{ji}$.

Матрица

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn}\end{bmatrix}, \qquad (23.21)$$

составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется ***матрицей квадратичной формы***.

Квадратичная форма (23.20) может быть записана в виде

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)=X^T AX, \qquad (23.22)$$

где A – матрица (23.21), $X^T=(x_1, x_2, ..., x_n)$,

X – матрица-столбец переменных.

Если l_i, $i=\overline{1, n}$ – собственные числа матрицы (23.21), то квадратичная форма имеет канонический вид:

$$f(y_1, y_2, ..., y_n)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} l_i y_i^2=(y_1, y_2, ..., y_n)\cdot\begin{bmatrix}l_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & l_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & l_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \mathrm{M}\\ y_n\end{bmatrix}= \qquad (23.23)$$

$$=l_1 y_1^2+l_2 y_2^2+...+l_n y_n^2.$$

Если $n = 2$, то квадратичная форма (23.20) имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2; \qquad (23.24)$$

если $n = 3$, то –

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + +2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \qquad (23.25)$$

Понятие «квадратичная форма с двумя переменными» используют для приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду, а с тремя переменными – для приведения уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.

Как известно, *множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению:*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \qquad (23.26)$$

в декартовой системе координат $(O; \vec{i}; \vec{j})$, *называется* ***линией второго порядка.***

Пусть дано уравнение (23.26). Рассмотрим квадратичную форму $f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ с матрицей $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ в базисе $(\vec{i}; \vec{j})$, $a_{12} = a_{21}$. Существует ортонормированный базис $(\vec{i}'; \vec{j}')$, составленный из собственных векторов матрицы *A*, в котором матрица *B* квадратичной формы *f* имеет вид: $B = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix}$,

где l_1, l_2 – собственные значения матрицы *A*. Сделав замену координат, приводим уравнение (23.26) к виду:

$$l_1x'^2 + l_2y'^2 + 2c_1x' + 2c_2y' + c = 0. \qquad (23.27)$$

Далее выделяем полные квадраты и приводим уравнение к каноническому уравнению кривой 2-го порядка.

Множество точек E^3, *координаты которых удовлетворяют уравнению:*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + +2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0 \qquad (23.28)$$

в декартовой системе координат $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, *называется* ***поверхностью второго порядка в*** E^3.

Старшие члены уравнения (23.28) образуют квадратичную форму f с матрицей A в указанном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Существует ортонормированный базис $(\vec{i}'; \vec{j}'; \vec{k}')$, составленный из собственных векторов матрицы *A*, в которых квадратичная форма *f* имеет канонический вид. Сделав замену координат, приводим уравнение (23.28) к виду:

$$l_1x'^2 + l_2y'^2 + l_3z'^2 + 2c_1x' + 2c_2y' + 2c_3z' + c = 0, \qquad (23.29)$$

где l_1, l_2, l_3 – собственные значения матрицы *A*.

Далее выделяем полные квадраты и сводим уравнение к каноническому виду.

Пример 1. В базисе (e_1, e_2, e_3) задана квадратичная форма $f = x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$. Записать матрицу *A* формы *f* в этом базисе.

Решение. Учитывая, что $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$, записываем

$$f = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_1 - 3x_2^2 + 3x_2x_3 + 2x_3x_1 + 3x_3x_2 - 5x_3^2.$$

Тогда $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Пример 2. В базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ пространства E^2 задана квадратичная форма $f = x^2 - 4xy + y^2$. Привести эту форму *f* к каноническому виду, выписав соответствующий базис $(\vec{i}', \vec{j}')$ и матрицу перехода от *старого* базиса $(\vec{i}, \vec{j})$ *к новому* $(\vec{i}', \vec{j}')$.

Решение. Матрица *A* формы *f* в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ имеет следующий вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Находим собственные значения и собственные векторы матрицы *A*:

$$\det(A - lE) = 0, \begin{vmatrix} 1-l & -2 \\ -2 & 1-l \end{vmatrix} = 0, \ (l-1)^2 - 2^2 = 0, \ (l-3)(l+1) = 0.$$

Получаем:

$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$

$f = 3x'^2 - y'^2.$

Для $\lambda_1 = 3$ имеем:

$\begin{cases} -2a_1 - 2a_2 = 0, \\ -2a_1 - 2a_2 = 0, \end{cases}$ откуда $a_1 + a_2 = 0$, т. е. $a_2 = -a_1$. Нашли собственный вектор $\vec{e}_1(1;-1)$.

Для него $|\vec{e}_1| = \sqrt{2}$. Поэтому $\vec{i}'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Для $\lambda_2 = -1$ имеем:

$\begin{cases} 2b_1 - 2b_2 = 0, \\ -2b_1 + 2b_2 = 0, \end{cases}$ откуда $b_1 - b_2 = 0, b_2 = b_1$.

Получили собственный вектор $\vec{e}_2(1;1)$, для которого $|\vec{e}_2| = \sqrt{2}$. Тогда $\vec{j}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Новый базис: $\vec{i}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{j}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Далее:

$$(\vec{i}', \vec{j}') = (\vec{i}, \vec{j}) \cdot C, \text{ где } C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Пример 3. В базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ пространства E^3 задана квадратичная форма $f = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 5z^2$. Привести эту форму f к каноническому виду, записав соответствующий базис $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ и матрицу C перехода от старого базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ к новому $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

Решение. Матрица A формы f в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ имеет следующий вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Находим собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = 0; \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(\lambda+5)((\lambda-2)^2 - 1) = 0; \quad -(\lambda+5)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$. Тогда

$f = -5x'^2 + y'^2 + 3z'^2.$

Последовательно находим:

1) $\lambda_1 = -5$, $\begin{cases} 7a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 7a_2 = 0, \end{cases}$ $a_1 = a_2 = 0.$

Собственный вектор $\vec{e}_1(0; 0; 1)$, $\vec{i}'(0; 0; 1)$;

2) $\lambda_2 = 1$, $\begin{cases} b_1 + b_2 = 0, \\ b_1 + b_2 = 0, \\ -6b_3 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} b_2 = -b_1 \\ b_3 = 0. \end{cases}$

Собственный вектор $\vec{e}_2(1;-1;0)$, $|\vec{e}_2| = \sqrt{2}$, $\vec{j}'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$;

3) $\lambda_3 = 3$, $\begin{cases} -g_1 + g_2 = 0, \\ g_1 - g_2 = 0 \\ -8g_3 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} g_2 = g_1, \\ g_3 = 0. \end{cases}$

Собственный вектор $\vec{e}_3(1; 1; 0)$, $|\vec{e}_3| = \sqrt{2}$, $\vec{k}'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

Таким образом получили новый базис: $\vec{i}'(0; 0; 1)$, $\vec{j}'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$,

$$\vec{k}'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right). \quad (\vec{i}'; \vec{j}'; \vec{k}') = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. В некотором базисе пространства E^4 задана квадратичная форма $f = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_3x_4 + 3x_4^2$.

Найти канонический вид этой квадратичной формы.

Решение. Запишем матрицу формы f в этом базисе и найдем собственные значения этой матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&3&4\\0&0&4&3\end{pmatrix}. \qquad \det\left(A-l\,E\right)=0;\ \begin{vmatrix}1-l&2&0&0\\2&1-l&0&0\\0&0&3-l&4\\0&0&4&3-l\end{vmatrix}=0;$$

$$((l-1)^2-2^2)((l-3)^2-4^2)=0;\ \ (l-3)(l+1)(l-7)(l+1)=0;$$

$$(l-3)(l-7)(l+1)^2=0.$$

Получаем: $l_1=3,\ \ l_2=7,\ \ l_3=l_4=-1.$

Тогда в некотором новом базисе квадратичная форма *f* по формуле (23.23) имеет следующий вид:

$$f=3x_1'^2+7x_2'^2-x_3'^2-x_4'^2.$$

Пример 5. В системе координат xOy плоскости E^2 задана линия второго порядка $x^2-4xy+y^2+4\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+5=0$. Найти каноническое уравнение этой линии в некоторой декартовой системе координат $x''O''y''$, а также зависимость между координатами $(x;\,y)$ и $(x'';\,y'')$.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму $f=x^2-4xy+y^2$ и приведем ее к каноническому виду (см. пример 2, с. 33 данного пособия): $f=3x'^2-y'^2$,

где $(\vec{i}';\,\vec{j}')=(\vec{i};\,\vec{j})\cdot C$,

$$C=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле замены координат имеем:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.\ \text{Значит}\ \begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y',\\y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'.\end{cases}$$

Подставляя в уравнение линии, получаем:

$$3x'^2-y'^2+4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)+\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)+5=0,$$

$$3x'^2-y'^2+4x'+4y'-x'+y'+5=0,$$

$$3x'^2+3x'-y'^2+5y'+5=0.$$

В последнем уравнении, выделив полные квадраты, получим:

$$3\left(x'^2+x'+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}-\left(y'^2-5y'+\frac{25}{4}\right)+\frac{25}{4}+5=0,$$

$$3\left(x'+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y'-\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{42}{4}.$$

$$\text{Пусть}\ \begin{cases}x''=x'+\dfrac{1}{2},\\y''=y'-\dfrac{5}{2},\end{cases}\ \begin{cases}x'=x''-\dfrac{1}{2},\\y'=y''+\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

Тогда $3x''^2-y''^2=-\dfrac{21}{2}$, т. е. $\dfrac{y''^2}{\frac{21}{2}}-\dfrac{x''^2}{\frac{7}{2}}=1$ – уравнение гиперболы.

Зависимость между старыми и новыми координатами задается равенствами:

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x'+y'\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x''+y''+2\right),\\y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-x'+y'\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-x''+y''+3\right),\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x''+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y''+\sqrt{2},\\y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x''+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y''+\dfrac{3}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

Пример 6. В системе координат $(O;\vec{i};\,\vec{j};\vec{k})$ пространства E^3 задана поверхность второго порядка $2x^2+2xy+2y^2-5z^2+4\sqrt{2}x+$ $+6\sqrt{2}y-10z+16=0$. Найти каноническое уравнение этой поверхности в некоторой декартовой системе координат $(O'';\,\vec{i}'';\,\vec{j}'';\,\vec{k}'')$, а также зависимость между координатами $(x;\,y;\,z)$ и $(x'';\,y'';\,z'')$.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму $f=2x^2+2xy+2y^2-5z^2$ и приведем ее к каноническому виду (см. пример 3, с. 34 данного пособия): $f=-5x'^2+y'^2+3z'^2$, где $(\vec{i}';\,\vec{j}';\,\vec{k}')=(\vec{i};\,\vec{j};\,\vec{k})\cdot C$,

$$C=\begin{pmatrix}0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Согласно формуле замены координат имеем:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

откуда $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z', \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z', \\ z = x'. \end{cases}$

Подставляя в уравнение поверхности, получаем:

$$-5x'^2 + y'^2 + 3z'^2 + 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z'\right) + 6\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z'\right) -$$

$$-10x' + 16 = 0,$$

$$-5x'^2 + y'^2 + 3z'^2 - 2y' + 10z' - 10x' + 16 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, получим:

$$-5(x'^2 + 2x' + 1) + 5 + (y'^2 - 2y' + 1) - 1 + 3\left(z'^2 + \frac{10}{3} z' + \frac{25}{9}\right) - \frac{25}{3} + 16 = 0.$$

$$-5\left(x' + 1\right)^2 + \left(y' - 1\right)^2 + 3\left(z' + \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{35}{3} = 0.$$

Пусть $\begin{cases} x'' = x' + 1, \\ y'' = y' - 1, \\ z'' = z' + \frac{5}{3}. \end{cases}$ Тогда получаем $-5x''^2 + y''^2 + 3z''^2 = -\frac{35}{3}$,

$$\frac{x''^2}{\frac{7}{3}} - \frac{y''^2}{\frac{35}{3}} - \frac{z''^2}{\frac{35}{9}} = 1.$$

Приходим к уравнению

$$\frac{y''^2}{\frac{35}{3}} + \frac{z''^2}{\frac{35}{9}} - \frac{x''^2}{\frac{7}{3}} = -1,$$

которое определяет двуполостный гиперболоид.

Переход к каноническому виду уравнения был произведен с помощью следующих преобразований координат:

$$\begin{cases} x' = x'' - 1, \\ y' = y'' + 1, \\ z' = z'' - \frac{5}{3}, \end{cases} \quad \text{т. е.}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y'' + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z'' - \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} y'' + \frac{1}{\sqrt{2}} z'' - \frac{\sqrt{2}}{3}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y'' + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z'' - \frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} y'' + \frac{1}{\sqrt{2}} z'' - \frac{4\sqrt{2}}{3}, \\ z = x'' - 1. \end{cases}$$

Задания

I уровень

1.1. Запишите матрицу данной квадратичной формы:

1) $f = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^3$;

2) $f = 5x_1^2 + x_2^2 - 10x_2x_3 + 3x_3^2 - 4x_1x_3$;

3) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3$;

4) $f = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3$.

1.2. Запишите квадратичную форму, имеющую заданную матрицу:

1) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$; 3) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

1.3. В базисе $(\bar{i}, \bar{j})$ пространства E^2 задана квадратичная форма f. Приведите эту форму f к каноническому виду, выписав соответствующий базис $(\bar{i}', \bar{j}')$ и матрицу C перехода от старого базиса $(\bar{i}, \bar{j})$ к новому $(\bar{i}', \bar{j}')$, если форма f равна:

1) $f = 5x^2 + 4xy + 8y^2$; 2) $f = 6xy - 8y^2 + 12x$;

3) $f = 5x^2 + 8xy + 5y^2$; 4) $f = 4x^2 - 4xy + y^2$;

5) $f = 3x^2 + 2xy + 3y^2$; 6) $f = 13x^2 - 48xy + 27y^2$.

II уровень

2.1. В системе координат xOy плоскости E^2 задана линия второго порядка l. Найдите каноническое уравнение этой линии в некоторой декартовой системе координат $x''O''y''$, а также зависимость между координатами $(x; y)$ и $(x''; y'')$, если линия l имеет следующее уравнение:

1) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0;$

2) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0;$

3) $6xy - 8y^2 - 12x - 26y - 11 = 0;$

4) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$

2.2. В базисе $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ пространства E^3 задана квадратичная форма f. Приведите ее к каноническому виду, если форма f равна:

1) $f = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + 8xz + 2yz;$

2) $f = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz;$

3) $f = 3x^2 - y^2 + 3z^2 + 6xy - 2xz + 6yz;$

4) $f = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz;$

5) $f = -6x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 4xy + 6xz + 12yz.$

III уровень

3.1. В системе координат $(0; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$ пространства E^3 задана поверхность второго порядка a. Найдите каноническое уравнение a в некоторой новой системе координат $(0''; \bar{i}''; \bar{j}''; \bar{k}'')$, а также зависимость между координатами $(x; y; z)$ и $(x''; y''; z'')$, если известно уравнение a в старой системе координат:

1) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + 8xz + 2yz + 2x = 1;$

2) $3x^2 - y^2 + 3z^2 + 6xy - 2xz + 6yz - 2y = 1;$

3) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz = 0.$

24. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

24.1. Понятие двойного интеграла, его свойства и вычисление в декартовой системе координат

Пусть в замкнутой ограниченной области D плоскости xOy определена непрерывная функция $z = f(x;y)$. Разобьем указанную область произвольным образом на элементарные плоские области S_1, S_2, ..., S_n (рис. 24.1), площади которых будем считать соответственно равными ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. Внутри каждой элементарной области выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i \in) S_i$, $i = \overline{1,n}$.

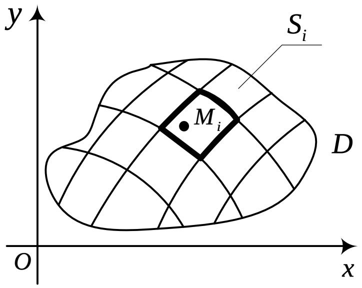


Рис. 24.1

Диаметром области назовем наибольшее из расстояний между любыми двумя точками границы области.

Обозначим через d_i диаметры элементарных областей S_i, а через Δ – максимальный диаметр, т. е. $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. Составим интегральную сумму функции $f(x; y)$ в области D:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i.$$

Устремим $n \to \infty$ так, чтобы $\Delta \to 0$. Если существует предел интегральной суммы, который не зависит ни от способа разбиения области D на элементарные области, ни от выбора точек M_i внутри каждой из этих областей, то этот предел называется ***двойным интегралом*** от функции $f(x; y)$ по области D:

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i.$$

При этом говорят, что функция $f(x; y)$ ***интегрируема*** в области D, x и y называют ***переменными интегрирования***.

Достаточное условие интегрируемости функции: если определенная в некоторой ограниченной замкнутой области функция непрерывна, то она интегрируема в этой области.

Если функции $f(x; y)$, $f_1(x; y)$ и $f_2(x; y)$ интегрируемы в области D, то имеют место следующие свойства:

1) ***линейность***:

$$\iint\limits_D (a\ f_1(x;y) + b\ f_2(x;y))\,dxdy = a \iint\limits_D f_1(x;y)dxdy +$$
$$+ b \iint\limits_D f_2(x;y)\,dxdy,$$

где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$;

2) ***аддитивность***:

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x;y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)\,dxdy,$$

причем области D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек;

3) если $\forall (x;y) \in D$ выполняется неравенство $f_1(x;y) \le f_2(x;y)$, то

$$\iint\limits_D f_1(x;y)dxdy \le \iint\limits_D f_2(x;y)dxdy;$$

4) ***оценка модуля интеграла***:

$$\left| \iint\limits_D f(x;y)dxdy \right| \le \iint\limits_D |f(x;y)|\,dxdy;$$

5) если $m = \min\limits_{(x;y)\in D} f(x;y)$, $M = \max\limits_{(x;y)\in D} f(x;y)$, то

$$mS \le \iint\limits_D f(x;y)dS \le MS,$$

где S – площадь области D.

Геометрический смысл двойного интеграла:

$$\iint\limits_D dS = S, \tag{24.1}$$

где S – площадь области D.

В основе вычисления двойного интеграла в декартовых координатах лежит понятие правильной области. Область D называют ***правильной в направлении оси Oy***, если всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку области параллельно оси

Oy, пересекает только один раз (только одну) «линию входа» и только один раз (только одну) «линию выхода», которые ограничивают эту область. В частности, это выполняется, если область *D* имеет вид, приведенный на рис. 24.2.

$D = \{ (x;y) \mid a \le x \le b,\ j_1(x) \le y \le j_2(x) \}.$

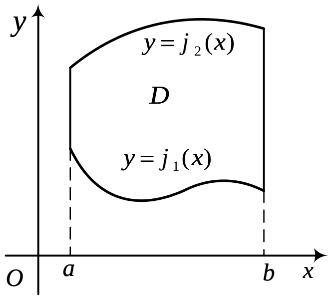


Рис. 24.2

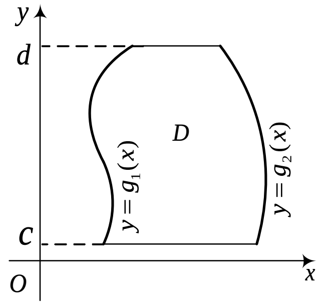


Рис. 24.3

В случае элементарной области *D* в направлении оси *Oy* верна формула

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x;y)dy. \qquad (24.2)$$

Интеграл в правой части равенства (24.2) называется ***повторным интегралом*** от функции *f*(*x*; *y*) по области *D* с внешним интегрированием по *x*, а $\int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x;y)dy$ – ***внутренним интегралом*** по переменной *y*.

Область *D* называют ***правильной в направлении оси Ox***, если всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку области параллельно оси *Ox*, пересекает только один раз (только одну) «линию входа» и только один раз (только одну) «линию выхода», которые ограничивают эту область. В частности, это выполняется, если область *D* имеет вид, приведенный на рис. 24.3.

$D = \{ (x;y) \mid c \le y \le d,\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \}.$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x;y)dx. \qquad (24.3)$$

Интеграл в правой части равенства (24.3) называется ***повторным интегралом*** от функции *f*(*x*; *y*) по области *D* с внешним интегрированием по *y*, а $\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x;y)dx$ – ***внутренним интегралом*** по переменной *x*.

Если область *D* является элементарной и в направлении оси *Ox*, и в направлении оси *Oy*, то для вычисления двойного интеграла можно использовать любую из формул (24.2) и (24.3).

Если область интегрирования *D* не является элементарной ни в направлении оси *Ox*, ни в направлении оси *Oy*, то необходимо произвести разбиение этой области *D* на конечное количество областей и воспользоваться свойством аддитивности двойных интегралов.

Пример 1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:

1) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{4}+1}^{6-y} f(x;y)dx;$ 2) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)dy;$

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{3x^2}^{6x} f(x;y)dy;$ 4) $\int\limits_{-3}^3 dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)dy.$

Решение. 1) Область интегрирования ограничена прямыми $y = 0$, $y = 4$, $x = \frac{y}{4} + 1$, $x = 6 - y$. Изобразим ее (рис. 24.4).

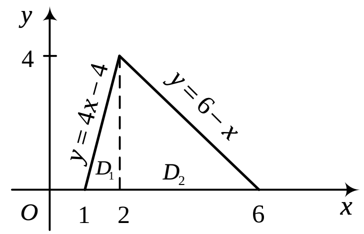


Рис. 24.4

Область интегрирования является правильной в направлении оси *Ox*, но не в направлении оси *Oy*. Поэтому для перехода к повторному интегралу с внешним интегрированием по *x* сначала выразим через эту переменную *x* уравнения прямых, ограничивающих область *D*. В результате получим:

$y = 4x - 4$ и $y = 6 - x$.

Затем разобьем область на две подобласти D_1 и D_2. Для каждой из них определим границы изменения переменных *x* и *y*:

$D_1: 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4x - 4;$

$D_2: 2 \le x \le 6,\ 0 \le y \le 6 - x.$

После применения формул (24.2) и (24.3) получим искомый результат:

$$\int_0^4 dy \int_{\frac{y}{4}+1}^{6-y} f(x;y)dx = \int_1^2 dx \int_0^{4x-4} f(x;y)dy + \int_2^6 dx \int_0^{6-x} f(x;y)dy.$$

2) Линиями, ограничивающими область интегрирования D, являются координатные оси Ox и Oy, прямая $x=4$ и часть окружности $x^2+y^2=5^2$, лежащая в первой четверти. Изобразим эту область (рис. 24.5).

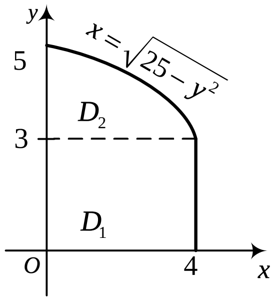


Рис. 24.5

Она является правильной в направлении оси Oy, но не в направлении оси Ox. Выразив через переменную y часть окружности, лежащую в первой координатной четверти, получим: $x=\sqrt{25-y^2}$.

Для того чтобы перейти к повторному интегралу с внешним интегрированием по y, разобьем область D на две подобласти D_1 и D_2. Определив для каждой из них границы изменения переменных x, y и применив формулы (24.2) и (24.3), получим:

$$\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)dy = \int_0^3 dy \int_0^4 f(x;y)dx + \int_3^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x;y)dx.$$

3) Изобразим область интегрирования D с учетом границ изменения переменных x и y. В нашем случае: $0 \le x \le 1$, $3x^2 \le y \le 6x$ (рис. 24.6).

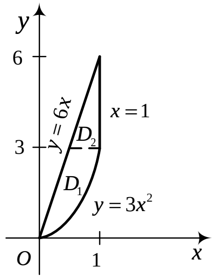


Рис. 24.6

Выразим y через x в уравнениях линий, ограничивающих область интегрирования. У нас парабола $x=\sqrt{\dfrac{y}{3}}$ и прямая $x=\dfrac{y}{6}$.

Область не является правильной в направлении оси Ox. Поэтому ее необходимо разбить на две подобласти D_1 и D_2 и для каждой из них определить границы изменения переменных x и y. С учетом вышесказанного мы имеем следующее:

$$\int_0^1 dx \int_{3x^2}^{6x} f(x;y)dy = \int_0^3 dy \int_{\frac{y}{6}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x;y)dx + \int_3^6 dy \int_{\frac{y}{6}}^{1} f(x;y)dx.$$

4) Изобразим область интегрирования D, ограниченную прямыми $x=-3$, $x=3$ и верхними полуокружностями $y=\sqrt{9-x^2}$, $y \le \sqrt{25-x^2}$ (рис. 24.7):

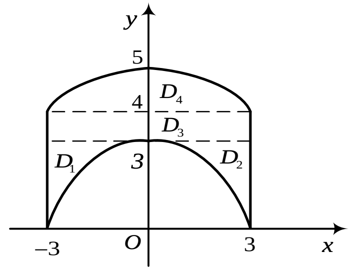


Рис. 24.7

Выразим x через y в уравнениях линий, ограничивающих область интегрирования. Одну из окружностей $x^2+y^2=9$ можно представить как объединение двух полуокружностей $x=\sqrt{9-y^2}$ при $x \ge 0$ и $x=-\sqrt{9-y^2}$ при $x<0$. Аналогично, другая окружность $x^2+y^2=25$ представляет собой объединение двух полуокружностей: $x=\sqrt{25-y^2}$ при $x \ge 0$ и $x=-\sqrt{25-y^2}$ при $x<0$.

Отметим, что область D не является правильной в направлении оси Ox. Поэтому чтобы перейти к повторному интегралу с внешним интегрированием по y, необходимо область интегрирования D разбить на четыре подобласти $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$. Для каждой из них определим границы изменения переменных x и y:

$D_1: 0 \le y \le 3,\ -3 \le x \le -\sqrt{9-y^2}$,

$D_2: 0 \le y \le 3,\ \sqrt{9-y^2} \le x \le 3$,

$D_3: 3 \le y \le 4,\ -3 \le x \le 3$,

$D_4: 4 \le y \le 5,\ -\sqrt{25-y^2} \le x \le \sqrt{25-y^2}$.

Итак, искомый результат выглядит как сумма повторных интегралов по каждой из указанных областей интегрирования:

$$\int_{-3}^{3} dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)dy = \int_0^3 dy \int_{-3}^{-\sqrt{9-y^2}} f(x;y)dx + \int_0^3 dy \int_{\sqrt{9-y^2}}^{3} f(x;y)dx +$$

$$+\int_3^4 dy \int_{-3}^{3} f(x;y)dx + \int_4^5 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x;y)dx.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл по указанному прямоугольнику:

1) $\iint\limits_{D_1} (2+xy^3)dxdy, D_1 = \{(x;y) \mid 1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 4\}$;

2) $\iint\limits_{D_2} \frac{1}{(x-y)^2}dxdy, \quad D_2 = \{\ (x;y)\mid 0 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 4\};$

3) $\iint\limits_{D_3} (x\ln y + y\ln x)dxdy, \quad D_3 : x=1,\ x=e,\ y=e,\ y=e^2.$

Решение. 1) Поскольку область D_1 – это прямоугольник, то она является правильной областью и в направлении *Oy*, и в направлении *Ox*. Рассмотрим оба случая и покажем, что результат вычислений интеграла не зависит от порядка интегрирования.

1-й способ. При вычислении двойного интеграла перейдем к повторному интегралу, воспользовавшись формулой (24.2). Вычисляя внутренний интеграл по переменной *y* и понимая под *x* постоянную величину, получим:

$$\iint\limits_{D_1}(2+xy^3)dxdy = \int\limits_1^2 dx\int\limits_2^4\left(2+xy^3\right)dy = \int\limits_1^2\left(2y+\frac{1}{4}xy^4\right)\Bigg|_{y=2}^{y=4}dx.$$

По аналогии с формулой Ньютона–Лейбница подставим вместо *y* вначале верхний предел интегрирования, а затем – нижний, и составим разность полученных выражений. В результате будем иметь дело с определенным интегралом по переменной *x*. Исходный интеграл будет равен следующему выражению:

$$\iint\limits_{D_1}\left(2+xy^3\right)dxdy = \int\limits_1^2(4+60x)\,dx = \left(4x+30x^2\right)\Big|_1^2 = 94.$$

2-й способ. Изменив порядок интегрирования и применив формулу (24.3), получим:

$$\iint\limits_{D_1}(2+xy^3)dxdy = \int\limits_2^4 dy\int\limits_1^2(2+xy^3)dx.$$

Вычислим внутренний интеграл по переменной *x*, считая *y* постоянной величиной, и применим формулу Ньютона–Лейбница. В результате придем к определенному интегралу по переменной *y*:

$$\iint\limits_{D_1}(2+xy^3)dxdy = \int\limits_2^4\left(2x+\frac{x^2y^3}{2}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}dy = \int\limits_2^4\left(2+2y^3-\frac{y^3}{2}\right)\Bigg|_1^2 dy =$$

$$= \int\limits_2^4\left(2+\frac{3y^3}{2}\right)dy.$$

Найдем определенный интеграл:

$$\int\limits_2^4\left(2+\frac{3y^3}{2}\right)dy = \left(2y+\frac{3y^4}{8}\right)\Bigg|_2^4 = 4+\frac{3}{8}\cdot(4^4-2^4) = 94.$$

2) Так как D_2 и в направлении *Oy*, и в направлении *Ox* является правильной областью, применим формулу (24.2). Вначале вычислим внутренний интеграл по переменной *y*, считая *x* постоянной величиной:

$$\iint\limits_{D_2}\frac{1}{(x-y)^2}dxdy = \int\limits_0^2 dx\int\limits_3^4\frac{1}{(x-y)^2}dy = -\int\limits_0^2\left(-\frac{1}{x-y}\right)\Bigg|_{y=3}^{y=4}dx =$$

$$= \int\limits_0^2\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}\right)dx.$$

Вычислим полученный определенный интеграл по переменной *x* с помощью формулы Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_0^2\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}\right)dx = \left(\ln|x-4|-\ln|x-3|\right)\Big|_0^2 = \ln 2-\ln 4+\ln 3 =$$

$$= \ln 2 - 2\ln 2 + \ln 3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

3) Так как прямоугольник D_3 – правильная область и в направлении *Oy*, и в направлении *Ox*, при вычислении двойного интеграла применима как формула (24.2), так и формула (24.3). На основании свойства линейности получим:

$$\iint\limits_{D_3}(x\ln y + y\ln x)\,dxdy = \iint\limits_{D_3}x\ln y dxdy + \iint\limits_{D_3}y\ln x dxdy.$$

Для вычисления первого интеграла более рационально считать область D_3 правильной в направлении оси *Ox* и применить формулу (24.3). В случае второго интеграла будем рассматривать область D_3 как правильную в направлении оси *Oy*, и применим формулу (24.2). Получим:

$$\iint\limits_{D_3}x\ln y dxdy + \iint\limits_{D_3}y\ln x dxdy = \int\limits_e^{e^2}dy\int\limits_1^e(\ln y)\,xdx + \int\limits_1^e dx\int\limits_e^{e^2}(\ln x)\,ydy =$$

$$= \int\limits_e^{e^2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^e \ln y dy + \int\limits_1^e\frac{y^2}{2}\Bigg|_e^{e^2}\ln x dx = \frac{e^2-1}{2}\int\limits_e^{e^2}\ln y dy + \frac{e^4-e^2}{2}\int\limits_1^e\ln x dx.$$

Для вычисления полученных определенных интегралов используем метод интегрирования по частям. Абстрагируясь от буквенного обозначения и вычислив сначала неопределенный интеграл $\int\ln y dy$, получим следующее:

$$\int \ln y\,dy = \left| \begin{matrix} u=\ln y;\ du=\dfrac{dy}{y} \\ dv=dy;\ v=y \end{matrix} \right| = y\ln y - \int y\cdot\frac{1}{y}dy =$$

$$= y\ln y - \int dy = y\ln y - y + C.$$

С учетом найденной первообразной после подстановки соответствующих пределов интегрирования получим:

$$\frac{e^2-1}{2}\int_e^{e^2}\ln y\,dy + \frac{e^4-e^2}{2}\int_1^e \ln x\,dx = \frac{e^2-1}{2}(y\ln y - y)\Big|_e^{e^2} +$$

$$+\frac{e^4-e^2}{2}(x\ln x - x)\Big|_1^e = \frac{e^2-1}{2}(2e^2-e^2-e+e)+$$

$$+\frac{e^4-e^2}{2}(e-e+1)=\frac{e^2-1}{2}e^2+\frac{e^4-e^2}{2}=e^4-e^2.$$

Пример 3. Вычислить интеграл по области, ограниченной указанными линиями:

1) $\iint\limits_{D_1} e^y dxdy, \quad D_1: y=\ln x,\ x=3,\ y=0;$

2) $\iint\limits_{D_2} \cos(x+y)dxdy, \quad D_2: x+y=\dfrac{p}{2},\ y=x,\ y=0;$

3) $\iint\limits_{D_3} (x+y)dxdy, \quad D_3: -\dfrac{p}{2}\le y\le\dfrac{p}{2},\ 0\le x\le\cos y;$

4) $\iint\limits_{D_4} xy^2(3x+y)dxdy, \quad D_4: y=1-x^2,\ y\ge 0.$

Решение. 1) Изобразим область интегрирования D_1 (рис. 24.8).

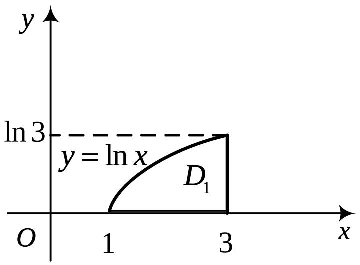


Рис. 24.8

Рассматриваемая область является правильной в направлении оси *Oy*. Поэтому для перехода к повторному интегралу рационально применить формулу (24.2). Предварительно расставим пределы интегрирования, используя изображение области:

$1\le x\le 3,\ 0\le y\le \ln x.$

Перейдя к повторному интегралу с внешним интегрированием по *x* и вычислив его, получим:

$$\iint\limits_{D_1} e^y dxdy = \int_1^3 dx \int_0^{\ln x} e^y dy = \int_1^3 e^y\Big|_0^{\ln x} dx = \int_1^3 (x-1)dx = \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^3 = 2.$$

2) Изобразим область интегрирования D_2 и убедимся, что она является правильной в направлении оси *Ox* (рис. 24.9).

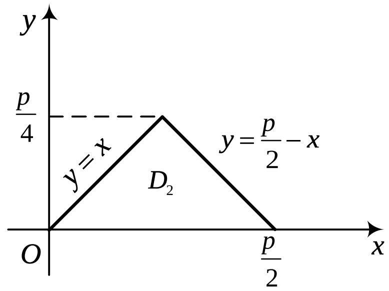


Рис. 24.9

Расставим пределы интегрирования, исходя из изображения области: $0\le y\le\dfrac{p}{4},\ y\le x\le\dfrac{p}{2}-y.$ Вычислим двойной интеграл, перейдя к повторному интегралу по формуле (24.3):

$$\iint\limits_{D_2}\cos(x+y)dxdy = \int_0^{\frac{p}{4}} dy\int_y^{\frac{p}{2}-y}\cos(x+y)dx = \int_0^{\frac{p}{4}}\sin(x+y)\Big|_{x=y}^{x=\frac{p}{2}-y} dy =$$

$$= \int_0^{\frac{p}{4}}(1-\sin 2y)dy = \left(y+\frac{1}{2}\cos 2y\right)\Big|_0^{\frac{p}{4}} = \frac{p}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\cos 0 = \frac{p-2}{4}.$$

3) Изобразим область интегрирования D_3 (рис. 24.10). Она является правильной в направлении обеих осей, но будем считать ее правильной в направлении оси *Ox*. С учетом этого расставим пределы интегрирования:

$$-\frac{p}{2}\le y\le\frac{p}{2},\quad 0\le x\le\cos y.$$

Вычислим двойной интеграл, перейдя к повторному интегралу по формуле (24.3):

$$\iint\limits_{D_3}(x+y)dxdy = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} dy\int_0^{\cos y}(x+y)dx = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)\Big|_{x=0}^{x=\cos y} dy =$$

$$=\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left(\frac{\cos^2 y}{2}+y\cos y\right)dy.$$

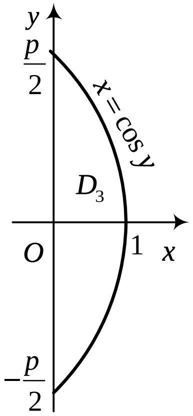


Рис. 24.10

Мы получили определенный интеграл по переменной y. Для вычисления интеграла от первого слагаемого применим формулу понижения степени $\cos^2 y=\frac{1}{2}(1+\cos 2y)$, второго слагаемого – формулу интегрирования по частям. Имеем:

$$\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2y+y\cos y\right)dy=\left|\begin{matrix}u=y;\, du=dy\\ dv=\cos y dy;\\ v=\sin y\end{matrix}\right|=$$

$$=\left(\frac{y}{4}+\frac{1}{8}\sin 2y+y\sin y+\cos y\right)\Bigg|_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}=\frac{p}{4}.$$

4) Изобразим область интегрирования D_4 (рис. 24.11).

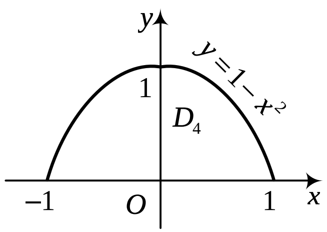


Рис. 24.11

Она является правильной в направлении оси Oy. Учитывая это, расставим пределы интегрирования: $-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x^2$.

Вычислим двойной интеграл, перейдя к повторному интегралу по формуле (24.2):

$$\iint\limits_{D_4} xy^2(3x+y)dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{1-x^2}xy^2(3x+y)dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2y^3+\frac{xy^4}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x^2}dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2\left(1-x^2\right)^3+\frac{x}{4}\left(1-x^2\right)^4\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}x^2(1-3x^2+3x^4-x^6)dx-\frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^4d(1-x^2)=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}(x^2-3x^4+3x^6-x^8)\,dx-\frac{(1-x^2)^5}{40}\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=2\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^5}{5}+\frac{3x^7}{7}-\frac{x^9}{9}\right)\Bigg|_0^1=\frac{32}{315}.$$

Задания

I уровень

1.1. Измените порядок интегрирования в двойных интегралах:

1) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}dx\int\limits_{x^3}^{3x}f(x;y)dy$; 2) $\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{-2-y}^{2+y}f(x;y)dx$; 3) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{0}^{2-y^2}f(x;y)dx$;

4) $\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{0}^{y^2}f(x;y)dx$; 5) $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{(x+1)^2}^{\sqrt{x+1}}f(x;y)dy$; 6) $\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{4-2x^2}^{4-x^2}f(x;y)dy$.

1.2. Вычислите интеграл по области, ограниченной указанными линиями:

1) $\iint\limits_D(2x^3+3y^2)dxdy,\quad D: x=0,\ x=1,\ y=2,\ y=4;$

2) $\iint\limits_D\frac{5x^4}{1+y^2}dxdy,\quad D: x=0,\ x=1,\ y=-\frac{p}{4},\ y=\frac{p}{4};$

3) $\iint\limits_D x^2ydxdy,\ D: y=x^2,\ y=2x;$

4) $\iint\limits_D(x+1)y^2dxdy,\ D: y=3x^2,\ y=3;$

5) $\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy,\ D: x=y^2,\ x=2;$

6) $\iint\limits_D\frac{x^2}{y^2}dxdy,\ D: y=\frac{1}{x},\ y=x,\ y=3.$

II уровень

2.1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле:

1) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-x^2}^{3x} f(x;y)dy$; 2) $\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2-2x}^{4-x^2} f(x;y)dy$; 3) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y} f(x;y)dx$;

4) $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{y+1}^{e^y} f(x;y)dx$; 5) $\int\limits_1^{16} dx \int\limits_{\frac{1}{2x}}^{\frac{\sqrt{x}}{2}} f(x;y)dy$; 6) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{-x^2} f(x;y)dy$.

2.2. Вычислите интеграл по области, ограниченной указанными линиями:

1) $\iint\limits_D \frac{2x^2+y^2}{x}dxdy, \quad D: x=e, x=e^3, y=2, y=3;$

2) $\iint\limits_D ye^{xy}dxdy, \quad D: x=-1, x=0, y=0, y=1;$

3) $\iint\limits_D x\cdot\sin y\cdot e^{x^2+\cos y}dxdy, \quad D: x=0, x=-\frac{p}{2}, y=0, \quad y=\frac{p}{2};$

4) $\iint\limits_D \frac{y}{x}\sin ydxdy, \quad D: x=-\frac{1}{e}, x=e, y=0, y=\frac{p}{2};$

5) $\iint\limits_D (x^3+3y)dxdy, \quad D: x+y=1, y=x^2-1, x\ge 0;$

6) $\iint\limits_D x\sin(x+y)dxdy, \quad D: y=0, x=p, y=x;$

7) $\iint\limits_D y^2(2x+1)dxdy, \quad D: x=2-y^2, x=0;$

8) $\iint\limits_D xydxdy, \quad D: x^2+y^2=9, x+y=3.$

III уровень

3.1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле:

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x;y)dx$; 2) $\int\limits_2^4 dy \int\limits_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{2}{y}} f(x;y)dx$.

3.2. Вычислите интеграл по области, ограниченной указанными линиями:

1) $\iint\limits_D \ln(y+x)dxdy, \quad D: x=1, x=2, y=0, y=1;$

2) $\iint\limits_D (\sin^2 x+\cos^3 y)dxdy, \quad D: x=0, x=\frac{p}{4}, y=\frac{p}{4}, \quad y=\frac{p}{2};$

3) $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy, \quad D: x\ge 0, y=0, y=\sqrt{4-x^2};$

4) $\iint\limits_D y^2\sin xydxdy, \quad D: y=\frac{\sqrt{p}}{2}, y=x, x=0;$

5) $\iint\limits_D \text{arctg}\frac{y}{x}dxdy, \quad D: x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=16, \quad y=\frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y=x\sqrt{3},$

$x\ge 0, \ y\ge 0.$

24.2. Вычисление двойных интегралов в полярной системе координат

Если область интегрирования представляет собой круг или его часть, для упрощения производимых вычислений переходят к полярным координатам. Формулы перехода от декартовых координат x и y к полярным координатам j и r имеют вид:

$$\begin{cases} x = r\cos j, \\ y = r\sin j, \end{cases} \tag{24.4}$$

где $0\le r<+\infty, 0\le j<2p$ (или $-p<j\le p$).

Формула замены переменных в двойном интеграле при переходе к полярным координатам имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos j; r\sin j)\, r\, dj\, dr, \tag{24.5}$$

где D^* – область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат;

$f(x;\ y)$ – функция, непрерывная в этой области.

Для вычисления двойного интеграла в полярных координатах также переходят к повторному интегралу. При этом используют понятие области, правильной в полярной системе.

Область D называют ***правильной в полярной системе***, если всякий луч, выходящий из полюса и проходящий через внутреннюю точку области, пересекает только одну (только один раз) «линию входа» и только одну (только один раз) «линию выхода».

В случае правильной области (рис. 24.12) верна формула

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dj \int_{r_1(j)}^{r_2(j)} r\ f(r\cos j;\ r\sin j)dr. \qquad (24.6)$$

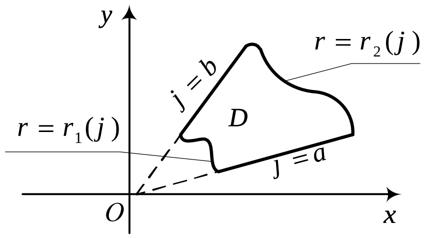


Рис. 24.12

Если область интегрирования D ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ или его частью, обосновано применение ***обобщенных полярных координат***, переход к которым осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = ar\ \cos j, \\ y = br\ \sin j. \end{cases} \qquad (24.7)$$

Тогда

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_{D^*} f(ar\cos j; br\sin j)abr\ dj\ dr, \qquad (24.8)$$

где D^* – область в обобщенной полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

Далее переходят к повторному интегралу.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями, используя полярные координаты:

1) $\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy,\quad D_1: x^2+y^2=2,\ x\le 0,\ y\ge 0;$

2) $\iint_{D_2} \sqrt{x^2+y^2}dxdy,\quad D_2: x^2-2x+y^2=0;$

3) $\iint_{D_3} ydxdy,\quad D_3:\ x^2+y^2-4y=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ x^2+y^2-8y=0,\ x=0.$

Решение. 1) Прежде, чем вычислять интеграл, изобразим область интегрирования D_1 (рис. 24.13).

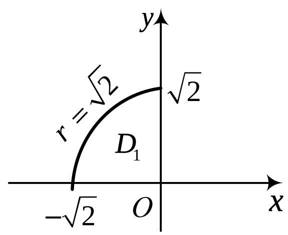


Рис. 24.13

В полярной системе координат Or уравнение окружности $x^2+y^2=2$, ограничивающей область D_1, имеет вид: $(r\cos j)^2+(r\sin j)^2=2$, т. е. $r^2(\cos^2 j+\sin^2 j)=2$. Окончательно получаем, что $r^2=2$, откуда $r=\sqrt{2}$. Определим границы изменения координат j и r:

$$\frac{p}{2}\le j\le p;\quad 0\le r\le\sqrt{2}.$$

Область D_1 является правильной в полярной системе координат. Поэтому, воспользовавшись формулами (24.4) и (24.5) перехода от декартовых координат к полярным, перейдем к повторному интегралу по формуле (24.6):

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{\frac{p}{2}}^{p} dj \int_0^{\sqrt{2}} r\ e^{-r^2} dr = -\frac{1}{2}\int_{\frac{p}{2}}^{p} dj \int_0^{\sqrt{2}} e^{-r^2} d(-r^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} j \Big|_{\frac{p}{2}}^{p} \cdot e^{-r^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\left(p-\frac{p}{2}\right)\cdot\left(e^{-(\sqrt{2})^2}-1\right) = \frac{(e^2-1)p}{4e^2}.$$

2) Изобразим область интегрирования D_2 (рис. 24.14).

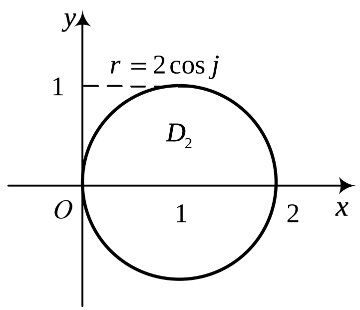


Рис. 24.14

Воспользуемся формулами (24.4) перехода от декартовых координат к полярным координатам. В новой системе координат Or уравнение заданной окружности $x^2+y^2=2x$, ограничивающей область D_2, принимает вид: $(r\cos j)^2+(r\sin j)^2=2r\cos j$. После сокращения имеем $r=2\cos j$.

Определим границы изменения координат j и r:

$$-\frac{p}{2}\le j\le\frac{p}{2};\quad 0\le r\le 2\cos j.$$

Воспользуемся формулой (24.6) перехода от двойного интеграла к повторному и вычислим его:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} dj \int\limits_0^{2\cos j} \sqrt{r^2\cos^2 j + r^2\sin^2 j}\cdot r\,dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} dj \int\limits_0^{2\cos j} r^2 dr = \int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos j} \right) dj = \frac{8}{3}\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \cos^3 j\; dj =$$

$$= \frac{8}{3}\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} (1-\sin^2 j)\, d\sin j = \frac{8}{3}\cdot 2\left(\sin j - \frac{1}{3}\sin^3 j\right)\Bigg|_0^{\frac{p}{2}} =$$

$$= \frac{16}{3}\left(\sin\frac{p}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{p}{2}\right) = \frac{32}{9}.$$

3) Изобразим область интегрирования D_3 (рис. 24.15).

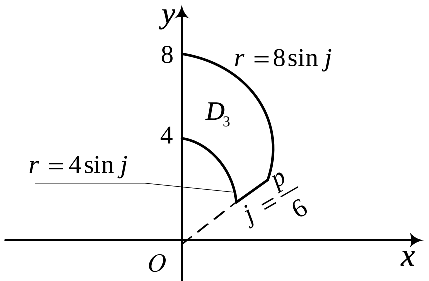


Рис. 24.15

Воспользуемся формулами (24.4) перехода от декартовых координат к полярным координатам. В новой системе координат Or уравнение заданной окружности $x^2+y^2=4y$, ограничивающей область D_3, имеет вид: $(r\cos j)^2 + (r\sin j)^2 = 4r\sin j$. Откуда $r^2 = 4r\sin j$ и окончательно $r = 4\sin j$.

Уравнение окружности $x^2+y^2=8y$ в новой системе координат будет следующим: $(r\cos j)^2+(r\sin j)^2 = 8r\sin j$, т. е. $r^2 = 8r\sin j$ или $r = 8\sin j$.

Область D_3 является правильной, ее ограничивают линии $r = 4\sin j$ и $r = 8\sin j$.

Прямая $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ имеет угловой коэффициент $\mathrm{tg}\, j = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда находим уравнение луча $j = \frac{p}{6}$. Для уравнения прямой $x = 0$ имеем $j = \frac{p}{2}$. Значит, границы изменения координат j и r таковы:

$$\frac{p}{6} \le j \le \frac{p}{2};\quad 4\sin j \le r \le 8\sin j.$$

Перейдя к повторному интегралу по формуле (24.6), вычислим его:

$$\iint\limits_D y\,dxdy = \int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} dj \int\limits_{4\sin j}^{8\sin j} r\cdot r\sin j\; dr = \int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} \frac{r^3}{3}\Bigg|_{4\sin j}^{8\sin j}\cdot \sin j\, dj = \frac{448}{3}\int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} \sin^4 j\; dj.$$

Для вычисления определенного интеграла воспользуемся формулами понижения степени: $\cos^2 j = \frac{1}{2}(1+\cos 2j)$ и $\sin^2 j = \frac{1}{2}(1-\cos 2j)$.

$$\frac{448}{3}\int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} \sin^4 j\; dj = \frac{112}{3}\int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} (1-\cos 2j)^2 dj =$$

$$= \frac{112}{3}\int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} \left(1 - 2\cos 2j + \cos^2 2j\right) dj =$$

$$= \frac{112}{3}\int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2j + \frac{\cos 4j}{2}\right) dj = \frac{112}{3}\left(\frac{3}{2}j - \sin 2j + \frac{1}{8}\sin 4j\right)\Bigg|_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} =$$

$$= \frac{112}{3}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{6}\right) + \sin\frac{p}{3} - \frac{1}{8}\sin\frac{2p}{3}\right) = \frac{112}{3}\left(\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{16}\right) =$$

$$= \frac{112}{3}\cdot\frac{8p + 7\sqrt{3}}{16} = \frac{56p + 49\sqrt{3}}{3}.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями, используя полярные координаты:

1) $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\quad D: y = -\sqrt{1-x^2},\ x \ge 0;$

2) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sin^2\sqrt{x^2+y^2}},\quad D: x^2+y^2 = 25,\ y \ge x,\ x \ge 0;$

3) $\iint\limits_D \frac{xydxdy}{x^2+y^2}, \quad D: y=\sqrt{4-x^2},\ x\le 0;$

4) $\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)dxdy, \quad D: y=-\sqrt{25-x^2},\ x\ge 0.$

II уровень

2.1. Вычислите двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями, используя полярные координаты:

1) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy, \quad D: x^2-x+y^2=0;$

2) $\iint\limits_D \arcsin(x^2+y^2)dxdy, \quad D: x^2+y^2=1,\ y\le 0,\ x\ge 0;$

3) $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy, \quad D: x^2+y^2=e^2,\ x^2+y^2=e^4;$

4) $\iint\limits_D \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\right)dxdy, \quad D: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1.$

III уровень

3.1. Вычислите двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями, используя полярные координаты:

1) $\iint\limits_D \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, D: y=x,\ x^2+y^2-2y=0, \quad x^2+y^2-y=0;$

2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy, \quad D: y=\sqrt{16-x^2}, \quad x\ge 0;$

3) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ctg}\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D: x^2+y^2=4, \quad x\ge 0;$

4) $\iint\limits_D xy^3dxdy, \quad D: 1\le \frac{x^2}{16}+y^2\le 4, \quad x\ge 0, \quad y\ge x;$

5) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad D: y=\sqrt{1-x^2}, \quad x\le 0.$

24.3. Геометрические и физические приложения двойных интегралов

1. Площадь плоской фигуры D равна

$$S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D^*}\rho\, d\varphi\, d\rho, \tag{24.9}$$

где первый интеграл вычисляется в декартовой системе координат, а второй – в полярной.

2. Объем v цилиндрического тела V (рис. 24.16), ограниченного сверху поверхностью $z=f(x;y)$, находят по формуле

$$v=\iint\limits_D f(x;y)dxdy, \tag{24.10}$$

где D – основание криволинейного цилиндра, а его образующие параллельны оси Oz.

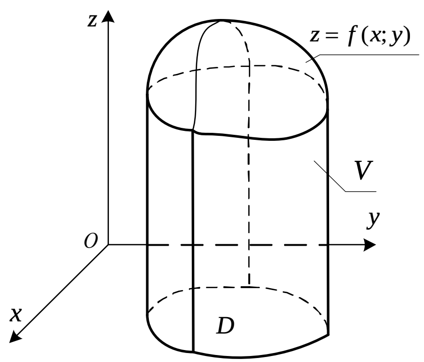


Рис. 24.16

3. Для нахождения площади ограниченной части поверхности, заданной уравнением $z=z(x;y)$ и имеющей проекцию D_{XY} на плоскость xOy, применяют формулу

$$S=\iint\limits_{D_{XY}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy, \tag{24.11}$$

где z_x' и z_y' – непрерывные в области D_{XY} функции.

4. Если $f(x;y)$ – непрерывная функция, выражающая поверхностную плотность распределения массы по плоской пластине D, то масса m этой плоской пластины вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_D f(x;y)dxdy. \qquad (24.12)$$

5. Для нахождения координат центра масс плоской материальной пластины D с поверхностной плотностью распределения массы, выражаемой функцией $f(x; y)$, применяют следующие формулы:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_D xf(x;y)dxdy,$$
$$y_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_D yf(x;y)dxdy, \qquad (24.13)$$

где m – масса пластины D, вычисляемая по формуле (24.12).

Пример 1. Найти площадь области D, ограниченной указанными кривыми:

1) $y = 3x^2 - 1,\ \ y = 2x;$ 2) $y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ x = -\frac{3p}{4},\ \ x = \frac{p}{4}.$

Решение. 1) Изобразим область D (рис. 24.17).

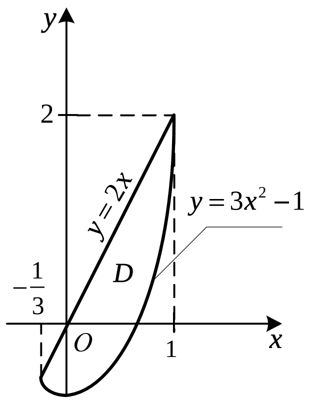


Рис. 24.17

Она является правильной в направлении оси Oy. Найдем точки пересечения двух графиков, чтобы найти проекцию области на ось Ox:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 1, \\ y = 2x. \end{cases}$$

Получаем: $x = -\frac{1}{3},\ \ x = 1.$

Найдем границы изменения координат интегрирования: $-\frac{1}{3} \le x \le 1,$

$$-\frac{1}{3} \le x \le 1,\ \ 3x^2 - 1 \le y \le 2x.$$

Вычислим площадь области D по формуле (24.9)

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{1} dx \int\limits_{3x^2-1}^{2x} dy = \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(y \Big|_{3x^2-1}^{2x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{1} (2x - 3x^2 + 1)dx = (x^2 - x^3 + x)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \frac{32}{27} \text{ (кв. ед.).}$$

2) Изобразим область интегрирования D (рис. 24.18).

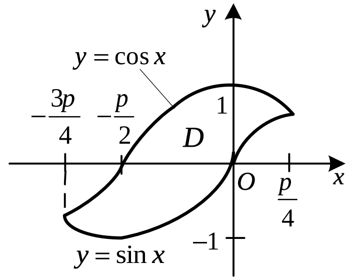


Рис. 24.18

Она является правильной в направлении оси Oy. Найдем точки пересечения двух графиков, ограничивающих область интегрирования, и определим границы изменения координат интегрирования:

$$-\frac{3p}{4} \le x \le \frac{p}{4},\ \ \sin x \le y \le \cos x.$$

Вычислим площадь области D по формуле (24.9):

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-\frac{3p}{4}}^{\frac{p}{4}} dx \int\limits_{\sin x}^{\cos x} dy = \int\limits_{-\frac{3p}{4}}^{\frac{p}{4}} y\Big|_{y=\sin x}^{y=\cos x} dx =$$

$$= \int\limits_{-\frac{3p}{4}}^{\frac{p}{4}} (\cos x - \sin x)dx = (\sin x + \cos x)\Big|_{-\frac{3p}{4}}^{\frac{p}{4}} = 2\sqrt{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 2. Найти площадь области D, ограниченной указанными кривыми, используя полярные координаты:

1) $r = a\cos 3j$ (трехлепестковая роза);

2) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (лемниската Бернулли).

Решение. 1) Изобразим шестую часть области интегрирования D (рис. 24.19).

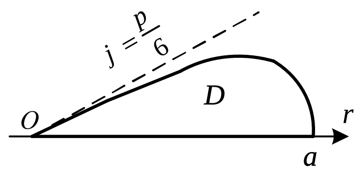


Рис. 24.19

Используем симметрию заданной области. Определим границы изменения переменных интегрирования (с учетом того, что мы рассматриваем шестую часть искомой площади):

$$0 \le j \le \frac{p}{6},\ \ 0 \le r \le a\cos 3j.$$

Вычислим площадь области D по формуле (24.9), перейдя к полярным координатам:

$$S = \iint\limits_D r\,dj\,dr = 6\int\limits_0^{\frac{p}{6}} dj \int\limits_0^{a\cos 3j} r\,dr = 3\int\limits_0^{\frac{p}{6}} \left(r^2 \Big|_0^{a\cos 3j} \right) dj =$$

$$=3a^2\int\limits_0^{\frac{p}{6}}\frac{1}{2}(1+\cos 6j)dj=\frac{3a^2}{2}(j+\frac{1}{6}\sin 6j)\Bigg|_0^{\frac{p}{6}}=\frac{pa^2}{4}\ \text{(кв. ед.)}.$$

2) Запишем уравнение лемнискаты Бернулли в полярных координатах: $r^4=2a^2r^2(\cos^2 j-\sin^2 j)$, откуда $r^2=2a^2\cos 2j$. Окончательно имеем: $r=a\sqrt{2\cos 2j}$.

Изобразим четвертую часть области интегрирования D (рис. 24.20).

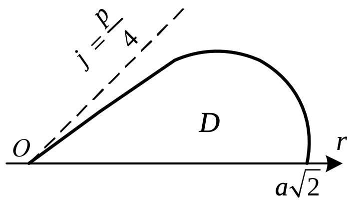


Рис. 24.20

Используем симметричность области интегрирования. С учетом того, что мы рассматриваем четвертую часть искомой площади, определим границы изменения переменных интегрирования:

$$0\le j\le\frac{p}{4},\ 0\le y\le a\sqrt{2\cos 2j}.$$

Вычислим площадь области D по формуле (24.9)

$$S=\iint\limits_D r\,dj\,dr=4\int\limits_0^{\frac{p}{4}}dj\int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2j}}r\,dr=2\int\limits_0^{\frac{p}{4}}\left(r^2\Bigg|_0^{a\sqrt{2\cos 2j}}\right)dj=$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{p}{4}}2a^2\cos 2j\,dj=4a^2\frac{1}{2}\sin 2j\Bigg|_0^{\frac{p}{4}}=2a^2\sin\frac{p}{2}=2a^2\ \text{(кв. ед.)}.$$

Пример 3. Используя двойной интеграл, вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=2,\ z=2\,(x^2+y^2)$;

2) $V:\ x^2+y^2+z^2=4z,\quad x^2+y^2=2z.$

Решение. 1) Изобразим тело V (рис. 24.21), объем которого необходимо найти, и спроектируем его на плоскость xOy.

При этом мы получим плоскую область D_{XY} (рис. 24.22).

Определим границы интегрирования, исходя из области D_{XY}: $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2-x.$

Применив формулу (24.10), получим:

$$v=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}2(x^2+y^2)dy=2\int\limits_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2-x}dx=$$

$$=2\int\limits_0^2\left(2x^2-x^3+\frac{(2-x)^3}{3}\right)dx=2\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{(2-x)^4}{12}\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}\ \text{(кв. ед.)}.$$

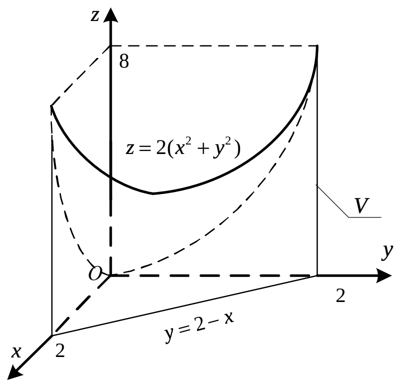


Рис. 24.21

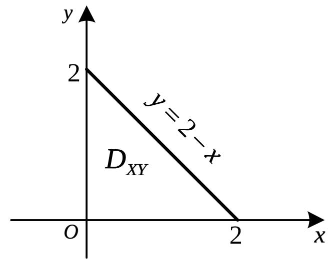


Рис. 24.22

2) Найдем пересечение сферы с центром в точке (0; 0; 2) радиуса 2 и кругового параболоида, ограничивающих тело V: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4z,\\x^2+y^2=2z.\end{cases}$

Следовательно, $\begin{cases}z^2-2z=0,\\x^2+y^2=2z.\end{cases}$ Окончательно имеем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z=0,\\x=y=0,\end{cases}\\\begin{cases}z=2,\\x^2+y^2=4.\end{cases}\end{array}\right.$

Изобразим указанное тело V (рис. 24.23).

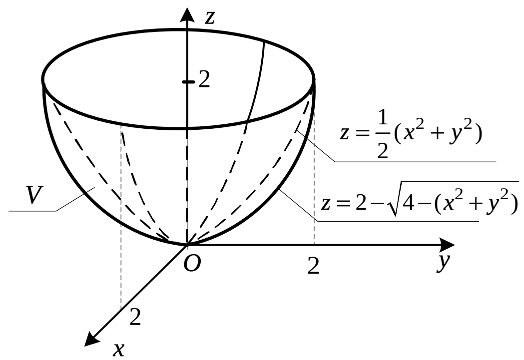


Рис. 24.23

Его проекцией D_{XY} на плоскость xOy будет являться круг с центром в начале координат радиуса 2. Запишем уравнение окружности $x^2+y^2=4$, ограничивающей область интегрирования D_{XY}, в полярных координатах: $r=2$. Используем симметричность области D_{XY}. Для ее четвертой части определим границы интегрирования в полярных координатах:

$$0\le j\le\frac{p}{2},\quad 0\le r\le 2.$$

Выразим подынтегральные функции через полярные координаты, для чего используем формулы перехода (24.4). Получим уравнения: кругового параболоида $z=\dfrac{r^2}{2}$ и сферы $z=2-\sqrt{4-r^2}$.

Вычисляем объем тела V по формуле (24.10), представив это тело как разность между двумя криволинейными цилиндрами, один из которых ограничен сверху параболоидом, а другой – сферой:

$$v=\iint\limits_D f(x;y)dxdy=4\int_0^{\frac{p}{2}}dj\int_0^2\frac{r^2}{2}\,r\,dr-4\int_0^{\frac{p}{2}}dj\int_0^2 r\,(2-\sqrt{4-r^2})dr=$$

$$=4\int_0^{\frac{p}{2}}dj\int_0^2\left(\frac{r^3}{2}-2r+r\sqrt{4-r^2}\right)dr=$$

$$=4\int_0^{\frac{p}{2}}\left(\frac{r^4}{8}-r^2-\frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^2 dj=$$

$$=4\left(2-4+\frac{8}{3}\right)\int_0^{\frac{p}{2}}dj=\frac{8}{3}j\,\Bigg|_0^{\frac{p}{2}}=\frac{4p}{3}\text{ (куб. ед.).}$$

Пример 4. Вычислить площадь поверхности $2x+6y+3z=12$ при условии, что $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

Решение. Изобразим часть плоскости $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1$, лежащую в первом октанте, как того требует условие задачи (рис. 24.24).

Вычислим элемент площади по формуле $dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$ (см. соотношение 24.11).

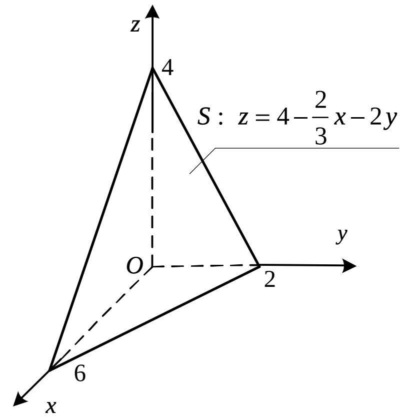


Рис. 24.24

$z=4-\dfrac{2}{3}x-2y$, а потому элемент площади будет иметь вид:

$$dS=\sqrt{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+(-2)^2}=\frac{7}{3}.$$

Спроектируем поверхность, площадь которой необходимо найти, на одну из координатных плоскостей (в данном случае – на плоскость xOy) и получим плоскую область D_{XY}, ограниченную прямыми $x=0,\ \ y=0,\ \ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{2}=1$ (рис. 24.25).

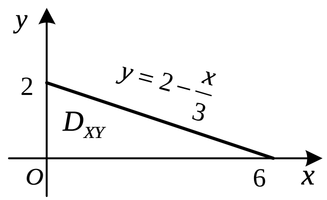


Рис. 24.25

Определим границы изменения координат x и y, ориентируясь на область интегрирования D_{XY}:

$$0\le x\le 6,\ 0\le y\le 2-\frac{x}{3}.$$

Вычислим искомую площадь поверхности S по формуле (24.11):

$$S=\int_0^6 dx\int_0^{2-\frac{x}{3}}\frac{7}{3}dy=\frac{7}{3}\int_0^6\left(2-\frac{x}{3}\right)dx=\frac{7}{3}\left(2x-\frac{x^2}{6}\right)\Bigg|_0^6=14\text{ (кв. ед.).}$$

Пример 5. Вычислить площадь части кругового параболоида $4z=x^2+y^2$, вырезаемого цилиндром $x^2+y^2=16$.

Решение. Изобразим указанную поверхность (рис. 24.26).

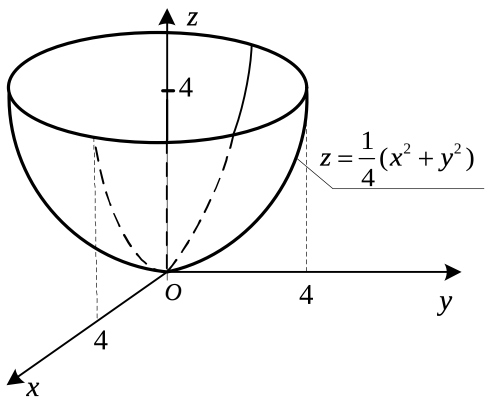


Рис. 24.26

Ее проекцией на плоскость xOy будет круг. Найдем уравнение линии пересечения параболоида и цилиндра, ограничивающей этот круг:

$$\begin{cases}4z=x^2+y^2,\\ x^2+y^2=16;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4z=16,\\ x^2+y^2=4^2;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=4,\\ x^2+y^2=4^2.\end{cases}$$

Таким образом, видим, что поверхность проектируется на круг $x^2+y^2\le 4^2$. Вычислим значение выражения $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$ из формулы (24.11).

В нашем случае: $z=\dfrac{x^2+y^2}{4}$. Следовательно, $z'_x=\dfrac{x}{2}$, $z'_y=\dfrac{y}{2}$. Итак, выражение имеет вид:

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}}=\frac{\sqrt{4+x^2+y^2}}{2}.$$

Вычислим искомую площадь поверхности по формуле (24.11), перейдя в двойном интеграле к полярным координатам по формулам (24.4):

$$S=\iint\limits_{D_{XY}}\frac{\sqrt{4+x^2+y^2}}{2}dxdy=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{p}{2}}dj\int_0^4 r\sqrt{4+r^2}\,dr=$$

$$=2\int_0^{\frac{p}{2}}dj\int_0^4\frac{1}{2}\sqrt{4+r^2}\,d\left(4+r^2\right)=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{2(4+r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^4 dj=$$

$$=\frac{40\sqrt{20}-16}{3}\int_0^{\frac{p}{2}}dj=\frac{p}{2}\cdot\frac{80\sqrt{5}-16}{3}=\frac{8p\,(5\sqrt{5}-1)}{3}\ \text{(кв.ед.)}.$$

Пример 6. Найти массу плоской пластины D, ограниченной линиями $y^2=4x$, $x^2=4y$, если плотность распределения массы на пластине $f(x;y)=x^2y$.

Решение. Изобразим пластину D (рис. 24.27).

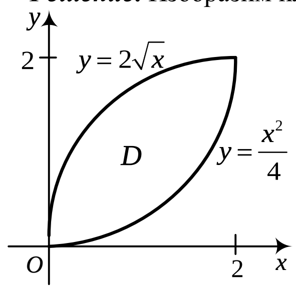


Рис. 24.27

Расставим пределы интегрирования, исходя из рисунка области D: $0\le x\le 2$, $\dfrac{x^2}{4}\le y\le 2\sqrt{x}$. Найдем массу этой пластины по формуле (24.12):

$$m=\iint\limits_D x^2ydxdy=\int_0^2dx\int_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}}x^2ydy=$$

$$=\int_0^2 x^2\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=\frac{x^2}{4}}^{y=2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(4x^3-\frac{1}{16}x^6\right)dx=\frac{1}{2}\left(x^4-\frac{1}{112}x^7\right)\Bigg|_0^2=7\frac{3}{7}.$$

Пример 7. Найти координаты центра масс плоской однородной пластины D, ограниченной линиями $y^2=2x+2$ и $y^2=2-x$.

Решение. Изобразим пластину D (рис. 24.28).

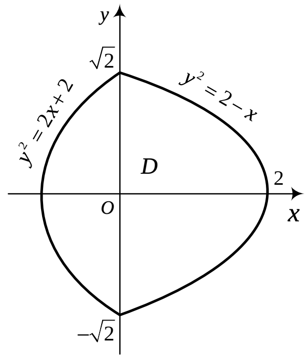


Рис. 24.28

В уравнениях кривых, ограничивающих указанную область, выразим x через y, поскольку область является элементарной в направлении оси Ox. Из первого уравнения имеем: $y^2=2(x+1)$, т. е. $x+1=\dfrac{y^2}{2}$, $x=\dfrac{y^2}{2}-1$. Из второго уравнения линии получаем: $x=2-y^2$.

Определим границы изменения переменной y: $-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$. Учитывая симметричность отрезка изменения y, будем считать, что $0\le y\le\sqrt{2}$.

Найдем массу этой пластины по формуле (24.12):

$$m=\iint_D dxdy = 2\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{2}-1}^{2-y^2} dx = 2\int_0^{\sqrt{2}}\left(3-\frac{3y^2}{2}\right)dy = 6\int_0^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{y^2}{2}\right)dy =$$

$$=6\left(y-\frac{1}{6}y^3\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Воспользуемся формулами (24.13) и вычислим сначала абсциссу, а затем и ординату центра масс пластины:

$$x_0=\frac{1}{m}\iint_D xdxdy = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{2}-1}^{2-y^2} xdx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{y^2}{2}-1}^{2-y^2} dy =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(4-4y^2+\frac{3y^4}{4}+y^2-1\right)dy = \frac{3\sqrt{2}}{64}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(y^4-4y^2+4)\,dy =$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{32}\left(\frac{y^5}{5}-\frac{4y^3}{3}+4y\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{32}\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{8\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2}\right)=\frac{2}{5},$$

$$y_0=\frac{1}{m}\iint_D ydxdy = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} ydy \int_{\frac{y^2}{2}-1}^{2-y^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} yx\Bigg|_{x=\frac{y^2}{2}-1}^{x=2-y^2} dy =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} y\left(2-y^2-\frac{y^2}{2}+1\right)dy = \frac{\sqrt{2}}{16}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(3y-\frac{3}{2}y^3\right)dy =$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{16}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 0.$$

Таким образом, точка $\left(\frac{2}{5};0\right)$ – центр масс данной пластины.

Задания

I уровень

1.1. Найдите площадь области D, ограниченной указанными кривыми:

1) $D:\ y=\frac{4}{x},\ \ y=4\sqrt{x},\ x=8;$ 2) $D:\ x=8-y^2,\ \ x=-2y;$

3) $D:\ y=\frac{1}{2}\ln x,\ \ y=\frac{e}{2x},\ \ x=1;$ 4) $D:\ y=3x^2-1,\ \ y=2x.$

1.2. Используя двойные интегралы, вычислите объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

$V: z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2=4,\ z=0.$

1.3. Вычислите площадь поверхности, ограниченной указанными кривыми:

1) $x+y+z=4,\ x^2+y^2=1;$

2) $x+y+z=4,\ x=0,\ y=0,\ x=2,\ y=2.$

1.4. Найдите массу плоской пластины, ограниченной указанными кривыми при заданной плотности распределения $f(x;y)$:

1) $x=0, y=1, y=\frac{x^2}{4},\ \ f(x;y)=x+y^2;$

2) $x=1, y=0, y=2\sqrt{x},\ \ f(x;y)=x^2+y.$

II уровень

2.1. Найдите площадь области D, ограниченной указанными кривыми:

1) $D: x^2+y^2=3,\ \ y=-2x^2;$

2) $D: y=(x-2)^2,\ \ y^2=x-2;$

3) $D: y=8\,e^x,\ \ y=\frac{4}{x},\ \ y=4,\ \ y=8;$

4) $D: x^2+y^2=4y,\ \ x^2+y^2=8y,\ \ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ \ y=x\sqrt{3}.$

2.2. Используя двойные интегралы, вычислите объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V:\ z=1-y^2,\ y=x^2,\ z=0;$

2) $V:\ z=x,\ x^2+y^2=9,\ z\ge 0;$

3) $V:\ x^2+y^2+z^2=4,\ \ \ x^2+y^2=2x,\ \ \ z=0;$

4) $V:\ z=x^2+y^2,\ 2x=x^2+y^2,\ 4x=x^2+y^2,\ z=0.$

2.3. Вычислите площадь поверхности, ограниченной сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$ и цилиндром $x^2+y^2=Ry.$

2.4. Найдите массу плоской пластины, ограниченной указанными кривыми при указанных условиях, если известна поверхностная плотность распределения массы $f(x; y)$:

1) $x=0,\ y=0,\ x^2+y^2=4, x^2+y^2=16,\ f(x;y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2};$

2) $y=0,\ y=x\sqrt{3},\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=9,\ f(x;y)=y.$

2.5. Найдите координаты центра масс однородной плоской пластины D, ограниченной одной полуволной косинусоиды $y=\cos x$ и осью абсцисс.

III уровень

3.1. Найдите площадь области D, ограниченной указанными кривыми.

1) $D: r = a(1+\cos j)$ – кардиоида;

2) $D:\ x^2+y^2-2ax=0,\ x^2+y^2-2bx=0,\ 0<a<b.$

3.2. Используя двойные интегралы, вычислите объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V: x^2+y^2+z^2=2x,\ y^2+z^2=x;$ 2) $V: z=1-x^2-4y^2,\ z=0.$

3.3. Найдите площадь поверхности части сферы $x^2+y^2+z^2=4,$ вырезанной цилиндром $x^2+y^2=2y.$

3.4. Найдите массу плоской пластины, ограниченной указанными кривыми при указанных условиях, если известна поверхностная плотность распределения массы $f(x; y)$:

1) $x=2,\ y=0,\ y^2=\dfrac{x}{2},\ y\ge 0,\ f(x;y)=\dfrac{7x^2}{2}+8y;$

2) $x=0,\ y=x,\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=16,\ y\ge x,\ x\ge 0,\ f(x;y)=\dfrac{x}{y^2}.$

3.5. Найдите координаты центра масс однородной плоской пластины D, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1,$ и $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1.$

25. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

25.1. Понятие тройного интеграла, его свойства и вычисление в декартовой системе координат

Пусть в замкнутой ограниченной пространственной области V, расположенной в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, определена непрерывная функция $w = f(x;y;z)$. Разобьем указанную область произвольным образом на элементарные области $V_1, V_2, ..., V_n$, объемы которых будем считать соответственно равными $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Внутри каждой элементарной области выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i) \in V_i$, $i = \overline{1, n}$.

Диаметром области будем называть наибольшее из расстояний между любыми двумя точками границы области. Обозначим через d_i диаметры элементарных областей V_i, а через Δ – максимальный диаметр, т. е. $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. Составим интегральную сумму функции $f(x; y; z)$ в области V:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta V_i.$$

Устремим $n \to \infty$ так, чтобы $\Delta \to 0$. Если существует предел интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения области V на частичные области V_i, ни от выбора точек $M_i(x_i; y_i; z_i)$ внутри каждой из этих областей, то этот предел называется ***тройным интегралом*** от функции $f(x; y; z)$ по области V:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta V_i.$$

При этом говорят, что функция $f(x; y; z)$ ***интегрируема*** в области V; x, y и z называют ***переменными интегрирования***.

Достаточное условие интегрируемости функции: если определенная в некоторой ограниченной замкнутой области функция непрерывна, то она интегрируема в этой области.

Если функции $f(x; y; z)$, $f_1(x; y; z)$ и $f_2(x; y; z)$ интегрируемы в области V, то имеют место следующие свойства:

1) ***линейность***:

$$\iiint\limits_V (a\ f_1(x;y;z) + b\ f_2(x;y;z))dxdydz =$$
$$= a\iiint\limits_V f_1(x;y;z)dxdydz + b\iiint\limits_V f_2(x;y;z)dxdydz,$$

где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$;

2) ***аддитивность***:

$$\iiint\limits_{V_1 \cup V_2} f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x;y;z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x;y;z)dxdydz,$$

где V_1 и V_2 – области, не имеющие общих внутренних точек;

3) если выполняется неравенство $f_1(x;y;z) \le f_2(x;y;z)$ $\forall (x;y) \in V$, то

$$\iiint\limits_V f_1(x;y;z)dxdydz \le \iiint\limits_V f_2(x;y;z)dxdydz;$$

4) ***оценка модуля интеграла***:

$$\left|\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz\right| \le \iiint\limits_V |f(x;y;z)|dxdydz;$$

5) если $m = \min\limits_{(x;y;z)\in V} f(x;y;z)$, $M = \max\limits_{(x;y;z)\in V} f(x;y;z)$, то

$$mv \le \iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz \le Mv,$$

где v – объем области V.

Геометрический смысл тройного интеграла:

$$\iiint\limits_V dxdydz = v, \tag{25.1}$$

где v – объем области V.

Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах основано на понятии правильной пространственной области. Область V называют ***правильной в направлении оси Oz***, если:

1) всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку пространственной области V параллельно оси Oz, пересекает только один раз (только одну) «поверхность входа» и только один раз (только одну) «поверхность выхода»;

2) проекция D пространственной области V на плоскость xOy является правильной плоской областью в направлении оси Ox или Oy.

Пусть область V является правильной в направлении оси Oz, ограниченной снизу поверхностью $z = g_1(x;y)$, а сверху – поверхностью $z = g_2(x;y)$ (рис. 25.1). Пусть она проектируется на область $D \subset xOy$, элементарную в направлении оси Oy, и снизу ее ограничивает кривая $y = j_1(x)$, а сверху – кривая $y = j_2(x)$, $x \in [a;b]$ (рис. 25.2).

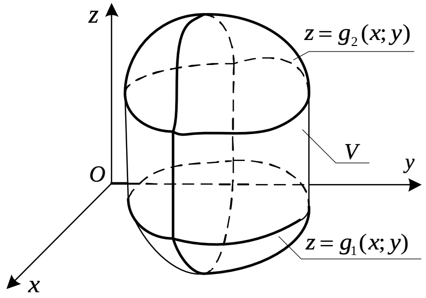


Рис. 25.1

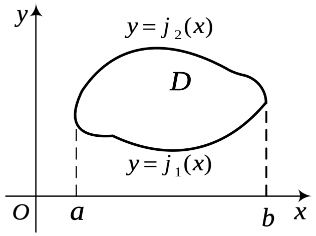


Рис. 25.2

Тогда справедлива следующая формула:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)} dy \int\limits_{g_1(x;y)}^{g_2(x;y)} f(x;y;z)dz, \qquad (25.2)$$

причем интеграл в правой части равенства называется ***повторным интегралом*** от функции $f(x;y;z)$ по области V с внешним интегрированием по x, а $\int\limits_{g_1(x;y)}^{g_2(x;y)} f(x;y;z)dz$ – ***внутренним интегралом*** по переменной z.

Аналогично рассматривают пространственные области, правильные в направлении оси Ox или Oy, и применяют соответствующие формулы перехода к повторным интегралам.

Если область интегрирования V не подпадает под эти случаи, необходимо произвести разбиение этой области V на конечное число правильных областей и воспользоваться свойством аддитивности.

Пример 1. Вычислить тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V (x+2z)\,dxdydz$, $V: y=0,\quad x=1,\quad y=x,\quad z=x^2+3y^2,\quad z=0$;

2) $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, $V: y=x,\quad y=2,\quad x=0,\quad z=8-x^2-y^2$;

3) $\iiint\limits_V (x-y)\,dxdydz$, $V: y+x=2,\ z=4-x^2-y^2,\ x\ge 0,\ y>0,\ z>0.$

Решение. 1) Изобразим область интегрирования V (рис. 25.3).

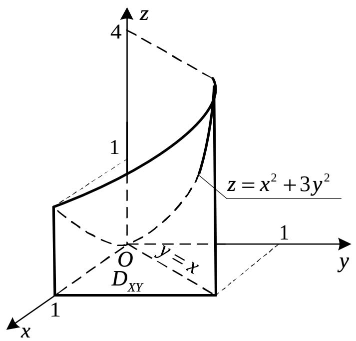


Рис. 25.3

Замечаем, что она является правильной в направлении оси Oz: снизу ее ограничивает плоскость $z=0$, а сверху – поверхность эллиптического параболоида $z = x^2+3y^2$. К тому же, область V проектируется на область плоскости xOy, которая является правильной областью в направлении оси Oy: $0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le x.$

Вычислим заданный интеграл, перейдя к повторному интегралу по формуле (25.2):

$$\iiint\limits_V (x+2z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_1^{x^2+3y^2+1} (x+2z)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (xz+z^2)\Bigg|_{z=1}^{z=x^2+3y^2+1} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x^3+3xy^2+x^4+9y^4+2x^2+6x^2y^2+6y^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^3y + xy^3 + x^4y + \frac{9}{5}y^5 + 2x^2y + 2x^2y^3 + 2y^3 \right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^4 + x^4 + x^5 + \frac{9}{5}x^5 + 2x^3 + 2x^5 + 2x^3 \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{24}{5}x^5 + 2x^4 + 4x^3 \right) dx = \left(\frac{4}{5}x^6 + \frac{2}{5}x^5 + x^4 \right)\Bigg|_0^1 = 2,2.$$

2) Нарисуем область интегрирования V (рис. 25.4).

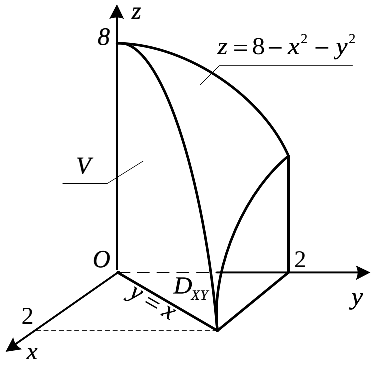


Рис. 25.4

Расставим пределы интегрирования в декартовой системе координат, учитывая то, что она является правильной в направлении оси *Oz*:

$0 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le z \le 8 - x^2 - y^2.$

Вычислим данный интеграл, перейдя к повторному интегралу по формуле (25.2):

$$\iiint\limits_V y\,dxdydz = \int_0^2 dy \int_0^y dx \int_0^{8-x^2-y^2} y\,dz = \int_0^2 dy \int_0^y yz\Big|_{z=0}^{z=8-x^2-y^2} dx =$$

$$= \int_0^2 dy \int_0^y (8y - x^2y - y^3)dx = \int_0^2 \left(8xy - \frac{1}{3}x^3y - xy^3\right)\Bigg|_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_0^2 \left(8y^2 - \frac{4y^4}{3}\right)dy = 4\left(\frac{2y^3}{3} - \frac{y^5}{15}\right)\Bigg|_0^2 = 12{,}8.$$

3) Изобразим область интегрирования V (рис. 25.5).

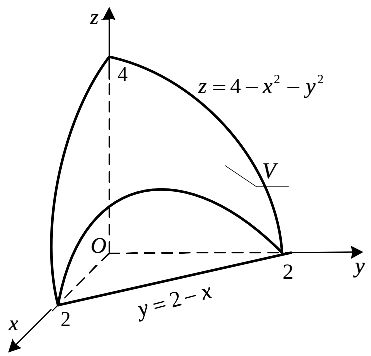


Рис. 25.5

Она является правильной в направлении оси *Oz*: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2 - x, \quad 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2.$

Перейдем к повторному интегралу по формуле (25.2) и вычислим данный интеграл:

$$\iiint\limits_V (x-y)dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{4-x^2-y^2} (x-y)dz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (xz - yz)\Big|_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4x - x^3 - xy^2 - 4y + x^2y + y^3)dy =$$

$$= \int_0^2 \left(4xy - x^3y - \frac{xy^3}{3} - 2y^2 + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2-x} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{11}{6}x^4 - 6x^3 + \frac{40}{3}x - 8\right)dx - \frac{1}{4}\int_0^2 (2-x)^4 d(2-x) =$$

$$= \left(\frac{11}{30}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{20}{3}x^2 - 8x\right)\Bigg|_0^2 - \frac{1}{20}(2-x)^5\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{16\cdot 11}{15} - 24 + \frac{80}{3} - 16 + \frac{8}{5} = \frac{176 + 400 + 24 - 600}{15} = 0.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V (2y+z)dxdydz, \quad V: y = \dfrac{x}{4}, y = 0, x = 4, z = 4y^2, z = 0;$

2) $\iiint\limits_V (2x+3z)dxdydz, \quad V: x = 1,\ y = x,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 3x^2 + 2y^2;$

3) $\iiint\limits_V (3x+4y)dxdydz, \quad V: x = 1, y = x, y = 0, z = 0, z = 5(x^2 + y^2);$

4) $\iiint\limits_V x\,dxdydz, \quad V: x = 2,\ y = 3x,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 4(x^2 + y^2).$

II уровень

2.1. Вычислите тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V (x+z)dxdydz,\ V: y=0,\ y=3,\ z=0,\ y=3x,\ x=\sqrt{\dfrac{z}{3}};$

2) $\iiint\limits_V (x+4z)dxdydz,\ V: y=3x,\ y=3,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ z=2(x^2+y^2);$

3) $\iiint\limits_V \left(x+\dfrac{5}{9}z\right)dxdydz,\ V: y=x,\ y=-x,\ y=2,\ z\ge 0,\ z=3(x^2+y^2);$

4) $\iiint\limits_V (x+2z)dxdydz,\quad V: x=1,\ y=2x,\ y=3x,\ z\ge 0,\ z=2x^2+y^2.$

III уровень

3.1. Вычислите тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V (y-xy)dxdydz,\quad V: z=2, z\ge 0, y=2x, y=4\sqrt{x};$

2) $\iiint\limits_V ydxdydz,\quad V:\ y=x, y=3,\ x\ge 0,\ z=18-x^2-y^2,\ z\ge 0;$

3) $\iiint\limits_V \left(2x+\dfrac{z}{3}\right)dxdydz,\quad V: y=4x,\ x=1,\ y=0,\ z=\sqrt{3y},\ z\ge 0;$

4) $\iiint\limits_V (3y-x)dxdydz,\ V: x+y=3,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=9-x^2-y^2.$

25.2. Вычисление тройных интегралов в цилиндрической и сферической системах координат

Если область интегрирования при вычислении тройного интеграла представляет собой тело, ограниченное цилиндром или некоторой его частью, целесообразно перейти к ***цилиндрическим координатам***. Схематически переход от декартовой системы координат к цилиндрической изображен на рис. 25.6.

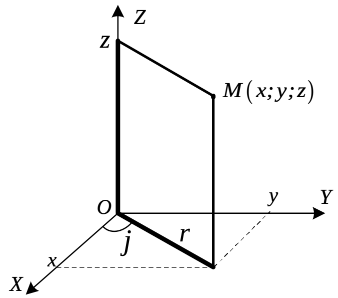


Рис. 25.6

Формулы перехода от декартовых координат x, y и z к цилиндрическим координатам j, r и z имеют вид:

$$\begin{cases} x = r\ \cos j, \\ y = r\ \sin j, \\ z = z, \end{cases} \tag{25.3}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le j < 2p$ (или $-p < j \le p$), $|z| < +\infty$.

Формула замены переменных в тройном интеграле при переходе к цилиндрическим координатам имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos j; r\sin j; z)\, r\ dj\ dr\ dz, \tag{25.4}$$

где V^* – область в цилиндрической системе координат, соответствующая области V в декартовой системе координат;

$f(x; y; z)$ – функция, непрерывная в этой области.

Вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах основано на понятии правильной пространственной области.

Область V называют правильной пространственной областью в направлении оси Oz в цилиндрической системе координат, если:

1) переход от декартовых координат к цилиндрическим осуществляется по формулам (25.3);

2) всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку пространственной области V параллельно оси Oz, пересекает только один раз (только одну) «поверхность входа» и только один раз (только одну) «поверхность выхода»;

3) проекция D пространственной области V на плоскость xOy является правильной в полярной системе координат.

Аналогично в случае перехода к цилиндрическим координатам по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \\ y = y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \\ x = x, \end{cases}$$

вводят понятие правильной пространственной области в направлении оси Oy или оси Ox в цилиндрической системе координат.

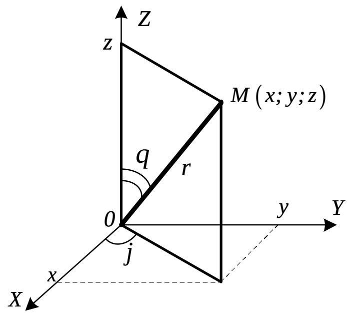


Рис. 25.7

Если область интегрирования при вычислении тройного интеграла представляет собой тело, ограниченное сферой или некоторой ее частью, целесообразно перейти к ***сферическим*** координатам. Схематически переход от декартовой системы координат к сферической изображен на рис. 25.7.

Формулы перехода от декартовых координат x, y и z к сферическим координатам ρ, θ и φ, исходя из приведенного чертежа, имеют вид:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases} \tag{25.5}$$

где $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$), $0 \le \theta \le \pi$.

Формула замены переменных в тройном интеграле при переходе к сферическим координатам имеет вид:

$$\iiint_V f(x;y;z)dxdydz = \\ = \iiint_{V^{**}} f(\rho\sin\theta\cos\varphi; \rho\sin\theta\sin\varphi; \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\, d\rho d\theta d\varphi, \tag{25.6}$$

где V^{**} – область в сферической системе координат, соответствующая области V в декартовой системе координат;

$f(x; y; z)$ – функция, непрерывная в этой области.

Пример 1. Используя цилиндрические координаты, вычислить тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint_V xyzdxdydz$, $\quad V: \ z = 0, \ z = 4, \ x \ge 0, \ y \ge 0, \ x^2 + y^2 = 4;$

2) $\iiint_V (\sqrt{x^2+y^2})^3 dxdydz$, $\quad V: \ 3z = \sqrt{x^2+y^2}, \ 9z = x^2 + y^2.$

Решение. 1) Нарисуем область интегрирования V (рис. 25.8).

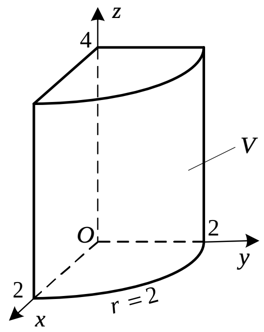


Рис. 25.8

Перейдем к цилиндрическим координатам, применив формулы (25.3). Учитывая, что область V, ограниченная частью кругового цилиндра, является элементарной в направлении оси Oz, определим пределы изменения координат:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \le \rho \le 2, \ 0 \le z \le 4.$$

Воспользуемся формулой (25.4) замены переменных в интеграле при переходе к цилиндрической системе координат. Затем перейдем к повторному интегралу и вычислим его. Получим:

$$\iiint_V xyzdxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_0^4 \rho\cos\varphi\ \rho\sin\varphi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{\rho=0}^{\rho=2} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho^3\cos\varphi\sin\varphi \left.\frac{z^2}{2}\right|_{z=0}^{z=4} d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{\rho=0}^{\rho=2} d\varphi =$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi = 16\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -8(\cos\pi - \cos 0) = 16.$$

2) Изобразим область интегрирования V (рис. 25.9).

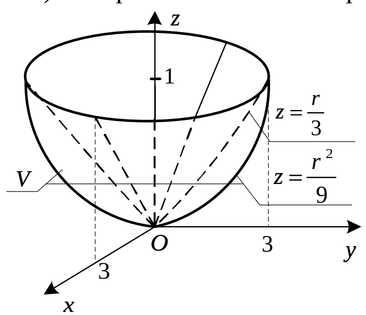


Рис. 25.9

Применив формулы (25.3), перейдем к цилиндрическим координатам. Расставим пределы интегрирования в цилиндрической системе координат с учетом того, что область интегрирования является элементарной в направлении оси Oz. Данная пространственная область ограничена круговым параболоидом $9z = x^2 + y^2$, уравнение которого в цилиндрических координатах имеет вид $z=\frac{r^2}{9}$, и частью конуса $3z=\sqrt{x^2+y^2}$ при $z\ge 0$ с уравнением $z=\frac{r}{3}$ в цилиндрических координатах. Таким образом, пределы интегрирования в новой системе координат: $0\le j\le 2p$, $0\le r\le 3$, $\frac{r^2}{9}\le z\le \frac{r}{3}$.

Перейдем к тройному интегралу в цилиндрических координатах по формуле (25.4), затем – к повторному интегралу и вычислим его:

$$\iiint\limits_V (\sqrt{x^2+y^2})^3 dxdydz=\int_0^{2p} dj\int_0^3 dr\int_{\frac{r^2}{9}}^{\frac{r}{3}} (r^2)^{\frac{3}{2}}\, r\, dz=\int_0^{2p} dj\int_0^3 dr\int_{\frac{r^2}{9}}^{\frac{r}{3}} r^4 dz=$$

$$=\int_0^{2p} dj\int_0^3 r^4 z\Bigg|_{z=\frac{r^2}{9}}^{z=\frac{r}{3}} dr=\int_0^{2p} dj\int_0^3\left(\frac{r^5}{3}-\frac{r^6}{9}\right)dr=\int_0^{2p}\left(\frac{r^6}{18}-\frac{r^7}{63}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=3} dj=$$

$$=\left(\frac{81}{2}-\frac{243}{7}\right)\cdot j\Big|_0^{2p}=\frac{81}{14}\cdot 2p=\frac{81}{7}p.$$

Пример 2. Используя сферические координаты, вычислить тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^2 dxdydz,\quad V: x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2=4;$

2) $\iiint\limits_V (2z-x^2-y^2)dxdydz,\quad V: x^2+y^2+z^2=2Rz.$

Решение. 1) Область представляет собой часть шара, расположенного в первом октанте (рис. 25.10).

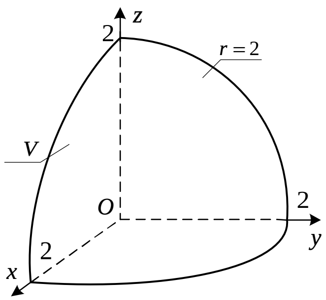


Рис. 25.10

Перейдем к сферическим координатам, применив формулы (25.5). Уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=4$ в сферической системе координат: $r=2$.

С учетом этого пределы интегрирования в сферической системе координат:

$$0\le j\le\frac{p}{2},\quad 0\le q\le\frac{p}{2},\quad 0\le r\le 2.$$

Воспользуемся формулой (25.6) замены переменных при переходе к интегралу в сферической системе координат,

затем перейдем к повторному интегралу и вычислим его:

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^2 dxdydz=\int_0^{\frac{p}{2}} dj\int_0^{\frac{p}{2}}\sin q\, dq\int_0^2 r^6 dr=$$

$$=\int_0^{\frac{p}{2}} dj\int_0^{\frac{p}{2}}\sin q\left(\frac{r^7}{7}\Bigg|_0^2\right)dq=\frac{128}{7}\int_0^{\frac{p}{2}} dj\int_0^{\frac{p}{2}}(-\cos q)\Bigg|_0^{\frac{p}{2}} dq=$$

$$=\frac{128}{7}\int_0^{\frac{p}{2}}\left(-\cos\frac{p}{2}+\cos 0\right)dj=\frac{128}{7}\int_0^{\frac{p}{2}} dj=\frac{128}{7}j\Bigg|_0^{\frac{p}{2}}=\frac{64p}{7}.$$

2) Изобразим тело V (рис. 25.11).

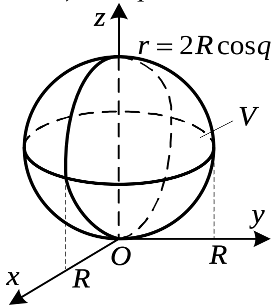


Рис. 25.11

Применим формулы (25.5). Запишем уравнение заданной сферы $x^2+y^2+z^2=2Rz$ с центром в точке (0; 0; R) радиуса R в сферических координатах: $r^2=2Rr\cos q$, откуда $r=2R\cos q$. Расставим пределы интегрирования в сферической системе координат:

$$0\le j\le 2p,\ 0\le q\le\frac{p}{2},\ 0\le r\le 2R\cos q.$$

Воспользуемся формулой (25.6) и, перейдя к повторному интегралу, вычислим его:

$$\iiint\limits_V (2z-x^2-y^2)dxdydz=$$

$$=\int_0^{2p} dj\int_0^{\frac{p}{2}} dq\int_0^{2R\cos q} r^2\sin q(2r\cos q-r^2\sin^2 q)dr=$$

$$=\int_0^{2p} dj\int_0^{\frac{p}{2}} dq\int_0^{2R\cos q}\left(2r^3\cos q\sin q-r^4\sin^3 q\right)dr=$$

$$=\int_0^{2p} dj\int_0^{\frac{p}{2}}\left(\frac{r^4\sin q\cos q}{2}-\frac{r^5\sin^3 q}{5}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2R\cos q} dq=$$

$$=8R^4\int_0^{2p} dj\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^5 q\sin q\, dq-\frac{32R^5}{5}\int_0^{2p} dj\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^5 q\sin^3 q\, dq=$$

$$= -8R^4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, d\cos\theta + \frac{32R^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta(1-\cos^2\theta) d\cos\theta =$$

$$= -8R^4\int_0^{2\pi}\left(\left.\frac{\cos^6\theta}{6}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)d\varphi + \frac{32R^5}{5}\int_0^{2\pi}\left.\left(\frac{\cos^6\theta}{6}-\frac{\cos^8\theta}{8}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$

$$= \left(\frac{4R^4}{3}-\frac{4R^5}{15}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4R^4(5-R)}{15}\left.\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\pi R^4(5-R)}{15}.$$

Задания

I уровень

1.1. Используя цилиндрические координаты, вычислите тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz, \quad V: x^2+y^2=3z^2, \ z=0, \ z=\sqrt{3};$

2) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)^2\,dxdydz, \quad V:\ 2z=x^2+y^2, \ z=2;$

3) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz, \quad V: z=4+x^2+y^2, \ x^2+y^2=16, \ z=2;$

4) $\iiint\limits_V z\,dxdydz, \quad V:\ z^2=x^2+y^2, \ z=2.$

1.2. Используя сферические координаты, вычислите тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dxdydz, \quad V: x^2+y^2+z^2=8, \ y\ge 0;$

2) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, \quad V: x^2+y^2+z^2=16, \ x\ge 0.$

II уровень

2.1. Используя цилиндрические координаты, вычислите тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz, \quad V: y=0, \ z=0, \ z=4, \ x^2+y^2=4x;$

2) $\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz, \quad V: x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0, \quad x^2+y^2+z^2=4,$ $3z=x^2+y^2;$

3) $\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdydz, \quad V: z=\sqrt{8-x^2-y^2}, \ z^2=x^2+y^2.$

2.2. Используя сферические координаты, вычислите тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V \frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dxdydz, \quad V: \quad y=\sqrt{4-x^2-z^2}, \ y=\sqrt{\frac{x^2+z^2}{3}};$

2) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad V:\ x^2+y^2+z^2=16;$

3) $\iiint\limits_V \frac{x^2dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ V: x\ge 0, \ y\ge 0, \ y=x, \ y=x\sqrt{3}, \ z=\sqrt{8-x^2-y^2}.$

III уровень

3.1. Используя цилиндрические координаты, вычислите тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz, \quad V:\ x^2+y^2+z^2=4, \ 3z=x^2+y^2;$

2) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dxdydz, \quad V: 4z=x^2+y^2, \ z=0, \ x^2+y^2=2x;$

(У к а з а н и е: $\iiint\limits_V (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^4 dr \int_0^{\frac{r^2}{4}} dz.$)

3) $\iiint\limits_V z\ln(x^2+y^2+1)\,dxdydz, \ V: x^2+y^2=4z^2+1, \ x^2+y^2=2z+1, \ z=1.$

3.2. Используя сферические координаты, вычислите тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V \sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz, \quad V: x^2+y^2+z^2=x;$

2) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\ V: x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2+(z-2)^2=4;$

3) $\iiint\limits_V x\,dxdydz,\quad V: x^2+y^2+z^2=12,\ x=\sqrt{3(y^2+z^2)}.$

25.3. Геометрические и физические приложения тройных интегралов

1. Объем v пространственной области V находят по формулам:

$$v=\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_{V^*}\rho\ d\varphi\ d\rho\ dz=\iiint\limits_{V^{**}}\rho^2\sin\theta\ d\varphi\ d\theta\ d\rho \quad (25.7)$$

в зависимости от того, какая система координат используется: декартова, цилиндрическая или сферическая. Здесь подразумевается, что область V, заданная в декартовых координатах, преобразуется в пространственную область V^* в цилиндрической системе координат или область V^{**} в сферических координатах.

2. Если $f(x;y;z)$ – непрерывная функция, выражающая объемную плотность распределения массы внутри пространственного тела V, то масса m области V вычисляется по формуле

$$m=\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dxdydz. \quad (25.8)$$

3. Для нахождения координат центра масс пространственного тела V применяют формулы:

$$x_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V xf(x;y;z)\,dxdydz,$$

$$y_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V yf(x;y;z)\,dxdydz, \quad (25.9)$$

$$z_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V zf(x;y;z)\,dxdydz,$$

где m – масса области V, вычисляемая по формуле (25.8);

x_0, y_0 и z_0 – соответственно абсцисса, ордината и аппликата искомой точки.

Пример 1. Вычислить с помощью тройного интеграла в декартовой системе координат объем тела V, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V: x=0,\ x+y=2,\ x=\sqrt{y},\ z=0,\ z=\frac{12}{5}x;$

2) $V: x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ 2x+y=2,\ z=2-x^2-y^2.$

Решение. 1) Изобразим тело V (рис. 25.12). Расставим пределы интегрирования с учетом того, что область элементарна в направлении оси Oz:

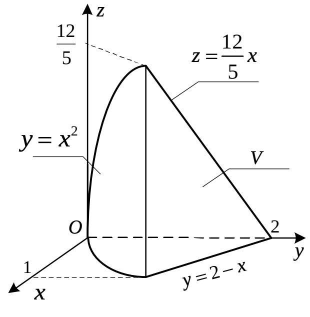


Рис. 25.12

$$0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 2-x,\ 0\le z\le\frac{12}{5}x.$$

С помощью первой из формул (25.7) найдем объем данного тела:

$$v=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x}dy\int_0^{\frac{12}{5}x}dz=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x} z\Big|_{z=0}^{z=\frac{12x}{5}}dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x}\frac{12}{5}xdy=\frac{12}{5}\int_0^1 xy\Big|_{y=x^2}^{y=2-x}dx=$$

$$=\frac{12}{5}\int_0^1(2x-x^2-x^3)dx=\frac{12}{5}\left(x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=1 \text{ (куб. ед.)}.$$

2) Изобразим тело V (рис. 25.13).

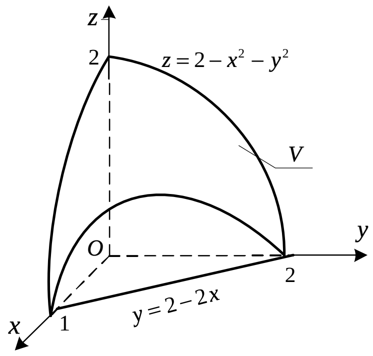


Рис. 25.13

Так как область V элементарна в направлении оси Oz, пределы интегрирования таковы:

$$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2-2x,$$
$$0\le z\le 2-x^2-y^2.$$

Найдем объем данного тела с помощью первой из формул (25.7):

$$v=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}dy\int_0^{2-x^2-y^2}dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x} z\Big|_{z=0}^{z=2-x^2-y^2}dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}(2-x^2-y^2)dy=\int_0^1\left(2y-x^2y-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2-2x}dx=$$

$$=\int_0^1\left(4-4x-2x^2+2x^3-\frac{8}{3}(1-x)^3\right)dx=$$

$$=\left(4x-2x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{2}{3}(1-x)^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{2}-\frac{4}{3}=\frac{7}{6}\ \text{(куб. ед.).}$$

Пример 2. Вычислить с помощью тройного интеграла в цилиндрической системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V: z=x,\ x=\sqrt{25-y^2},\ y\ge 0,\ z\ge 0$; 2) $V: x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2=z.$

Решение. 1) Изобразим тело *V* (рис. 25.14).

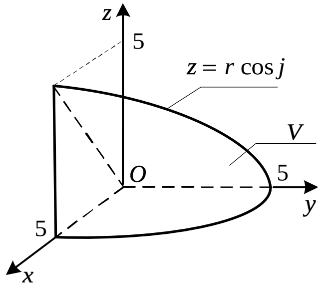


Рис. 25.14

Перейдем к цилиндрическим координатам, применив формулы (25.3), и расставим пределы интегрирования в новой системе координат: $0\le j\le\frac{p}{2}$,

$$0\le j\le\frac{p}{2},\quad 0\le r\le 5,\quad 0\le z\le r\cos j.$$

Используя формулы (25.4), а также вторую из формул (25.7), перейдем к повторному интегралу и вычислим его:

$$v=\iiint_V dxdydz=\int_0^{\frac{p}{2}}dj\int_0^5 dr\int_0^{r\cos j} r\ dz=\int_0^{\frac{p}{2}}dj\int_0^5 r\ z\Big|_{z=0}^{z=r\cos j}dr=$$

$$=\int_0^{\frac{p}{2}}dj\int_0^5 r^2\cos j\ dr=\int_0^{\frac{p}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_{r=0}^{r=5}\right)\cos j\ dj=$$

$$=\frac{125}{3}\int_0^{\frac{p}{2}}\cos j\ dj=\frac{125}{3}\sin j\Bigg|_{j=0}^{j=\frac{p}{2}}=\frac{125}{3}\ \text{(куб. ед.).}$$

2) Изобразим тело *V* (рис. 25.15).

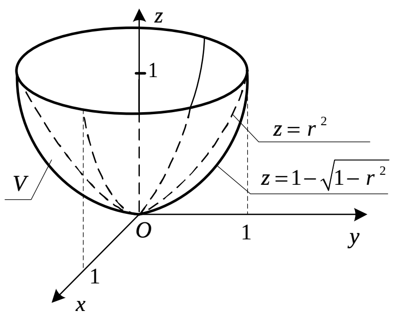


Рис. 25.15

Применив формулы (25.3), перейдем к цилиндрическим координатам. Запишем уравнение заданной сферы $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ в цилиндрических координатах. Поскольку $(z-1)^2=1-r^2$, то выделив полный квадрат относительно *z*, получим: $z=1+\sqrt{1-r^2}$ или $z=1-\sqrt{1-r^2}$. В нашем случае задана нижняя часть сферы, поэтому $z=1-\sqrt{1-r^2}$.

Расставим пределы интегрирования в цилиндрической системе координат, приняв во внимание, что область интегрирования элементарна в направлении оси *Oz*:

$$0\le j\le 2p,\quad 0\le r\le 1,\quad 1-\sqrt{1-r^2}\le z\le r^2.$$

Воспользуемся формулой (25.4) перехода к повторному интегралу и вычислим его, применив соотношение (25.7):

$$v=\iiint_V dxdydz=\int_0^{2p}dj\int_0^1 dr\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2} r\ dz=\int_0^{2p}dj\int_0^1 r\ z\Big|_{z=1-\sqrt{1-r^2}}^{z=r^2}dr=$$

$$=\int_0^{2p}dj\int_0^1\left(r^3-r+r\sqrt{1-r^2}\right)dr=\int_0^{2p}\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^2}{2}-\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1}dj=$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\int_0^{2p}dj=\frac{j}{12}\Bigg|_0^{2p}=\frac{p}{6}\ \text{(куб. ед.).}$$

Пример 3. Вычислить с помощью тройного интеграла в сферической системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ y\le x,\ y\ge 0,\ z\ge 0;$

2) $V:\ 2\le x^2+y^2+z^2\le 8,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z^2=x^2+y^2.$

Решение. 1) Изобразим тело *V* (рис. 25.16).

Перейдем к сферическим координатам, применив формулы (25.5). Записав уравнение плоскости $y=x$ в сферических координатах, получим: $r\sin q\sin j=r\sin q\cos j$. Откуда $\mathrm{tg}\, j=1$, т. е. $j=\frac{p}{4}$. Расставим пределы интегрирования в сферической системе координат, используя то, что $0\le j\le\frac{p}{4},\ 0\le q\le\frac{p}{2}, 1\le r\le 3.$

Воспользуемся формулой (25.6) перехода от тройного интеграла к повторному в случае сферической системы координат. Вычислим полученный повторный интеграл, используя соотношение (25.7).

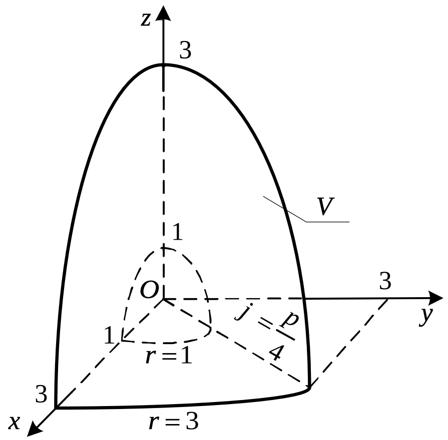


Рис. 25.16

$$v=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, d\theta\int_1^3 r^2\sin\theta\; dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\bigg|_{r=1}^{r=3}\right)\sin\theta\; d\theta=$$

$$=\frac{26}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\; d\theta=-\frac{26}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{26}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi=$$

$$=\frac{26}{3}\varphi\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{13\pi}{6}\ \text{(куб. ед.)}.$$

2) Изобразим тело V (рис. 25.17).

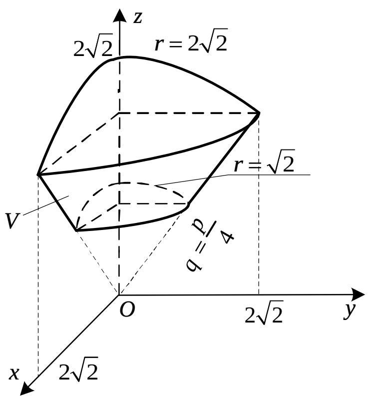


Рис. 25.17

Перейдем к сферическим координатам, применив формулы (25.5). Запишем уравнение конуса $z^2=x^2+y^2$ в сферических координатах: $r^2\cos^2\theta=r^2\sin^2\theta$, т. е. $\operatorname{tg}\theta=1$. Следовательно, $\theta=\frac{\pi}{4}$. Расставим пределы интегрирования в сферической системе координат: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2}\le r\le 2\sqrt{2}$.

Воспользуемся формулой (25.6) перехода к интегралу в сферической системе координат и вычислим его. Согласно третьей из формул (25.7), имеем следующее:

$$v=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}r^2\sin\theta\; dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{r^3}{3}\bigg|_{r=\sqrt{2}}^{r=2\sqrt{2}}\right)\sin\theta\; d\theta=$$

$$=\frac{16\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\; d\theta=-\frac{14\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi=$$

$$=-\frac{14\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0\right)\int_o^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=-\frac{14\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\varphi\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{7\pi(\sqrt{2}-1)}{3}\ \text{(куб. ед.)}.$$

Пример 4. Найти массу призмы, ограниченной поверхностями $x=0$, $z=0$, $y=2$, $y=4$, $x+2z=4$ и заполненной массой с плотностью $f(x;y;z)=x+y$.

Решение. Нарисуем указанную призму (рис. 25.18).

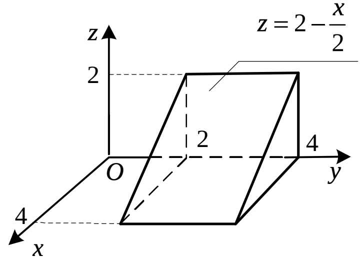


Рис. 25.18

Она элементарна в направлении оси Oz, причем $0\le x\le 4$, $2\le y\le 4$, $0\le z\le 2-\frac{x}{2}$.

По формуле (25.8) найдем массу призмы с учетом данной плотности:

$$m=\iiint\limits_V (x+y)dxdydz=$$

$$=\int_0^4 dx\int_2^4 dy\int_0^{2-\frac{x}{2}}(x+y)dz=\int_0^4 dx\int_2^4 (x+y)z\bigg|_{z=0}^{z=2-\frac{x}{2}}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 dx\int_2^4(4x+4y-x^2-xy)dy=\frac{1}{2}\int_0^4\left(4xy+2y^2-x^2y-\frac{xy^2}{2}\right)\bigg|_{y=2}^{y=4}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4(8x+24-2x^2-6x)dx=\frac{1}{2}\left(x^2+24x-\frac{2}{3}x^3\right)\bigg|_0^4=$$

$$=\frac{1}{2}\left(16+96-\frac{128}{3}\right)=\frac{104}{3}.$$

Пример 5. Найти массу шара $x^2+y^2+z^2\le 4z$ с плотностью распределения массы $f(x;y;z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Решение. Изобразим указанное тело V (рис. 25.19).

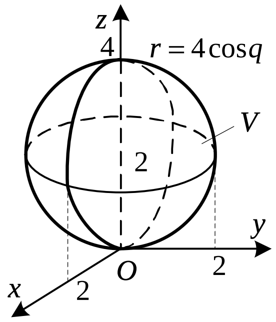


Рис. 25.19

Так как тело ограничено сферой $x^2+y^2+z^2=4z$, перейдем к сферическим координатам, воспользовавшись формулами (25.5). Запишем уравнение этой сферы в сферических координатах: $r^2=4r\cos q$, т. е. $r=4\cos q$. Определим границы интегрирования в сферических координатах:

$$0\le j\le 2p,\quad 0\le q\le\frac{p}{2},\quad 0\le r\le 4\cos q.$$

Найдем массу шара с учетом данной плотности, применив формулу (25.8):

$$m=\iiint\limits_V\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz=\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{\frac{p}{2}}dq\int\limits_0^{4\cos q}\frac{r^2\sin q}{\sqrt{r^2}}dr=$$

$$=\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{\frac{p}{2}}dq\int\limits_0^{4\cos q}r\sin q\,dr=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{\frac{p}{2}}r^2\Big|_{r=0}^{r=4\cos q}\sin q\,dq=$$

$$=8\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{\frac{p}{2}}\cos^2 q\,\sin q\,dq=-8\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{\frac{p}{2}}\cos^2 q\,d\cos q=$$

$$=-\frac{8}{3}\int\limits_0^{2p}\cos^3 q\Big|_0^{\frac{p}{2}}dj=\frac{8}{3}\int\limits_0^{2p}dj=\frac{8}{3}j\Big|_0^{2p}=\frac{16p}{3}.$$

Пример 6. Найти координаты центра масс тела, ограниченного поверхностями $z=4-x^2-y^2$, $z=0$ и заполненного массой с плотностью $f(x;y;z)=x^2+y^2$.

Решение. Нарисуем указанное тело V (рис. 25.20).

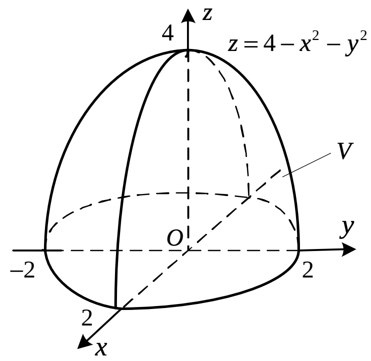


Рис. 25.20

Перейдем к цилиндрическим координатам, воспользовавшись формулами (25.3). Определим границы интегрирования в цилиндрических координатах с учетом того, что область интегрирования элементарна в направлении оси Oz:

$$0\le j\le 2p,\quad 0\le r\le 2,$$

$$0\le z\le 4-r^2.$$

Найдем массу тела с учетом данной плотности, применив формулу (25.8):

$$m=\iiint\limits_V(x^2+y^2)dxdydz=\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{2}dr\int\limits_0^{4-r^2}r^3dz=$$

$$=\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{2}r^3z\Big|_{z=0}^{z=4-r^2}dr=\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{2}(4r^3-r^5)dr=\int\limits_0^{2p}\left(r^4-\frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^2 dj=$$

$$=\left(16-\frac{32}{3}\right)\int\limits_0^{2p}dj=\frac{16}{3}j\Big|_0^{2p}=\frac{32p}{3}.$$

С помощью первой из формул (25.9) найдем абсциссу x_0 центра масс данного тела:

$$x_0=\frac{3}{32p}\iiint\limits_V x(x^2+y^2)dxdydz=\frac{3}{32p}\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{2}dr\int\limits_0^{4-r^2}r^4\cos j\,dz=$$

$$=\frac{3}{32p}\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{2}r^4\cos j\,z\Big|_{z=0}^{z=4-r^2}dr=\frac{3}{32p}\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{2}(4r^4-r^6)\cos j\,dr=$$

$$=\frac{3}{32p}\int\limits_0^{2p}\cos j\left(\frac{4r^5}{5}-\frac{r^7}{7}\right)\Big|_{r=0}^{r=2}dj=\frac{24}{35p}\int\limits_0^{2p}\cos j\,dj=$$

$$=\frac{24}{35p}\sin j\Big|_0^{2p}=0.$$

С помощью второй из формул (25.9) найдем ординату y_0 центра масс:

$$y_0=\frac{3}{32p}\iiint\limits_V y(x^2+y^2)dxdydz=\frac{3}{32p}\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{2}dr\int\limits_0^{4-r^2}r^4\sin j\,dz=$$

$$=\frac{3}{32p}\int_0^{2p} dj\int_0^2 r^4\sin j\; z\Big|_{z=0}^{z=4-r^2} dr=\frac{3}{32p}\int_0^{2p} dj\int_0^2 \sin j\;(4r^4-r^6)dr=$$

$$=\frac{3}{32p}\int_0^{2p}\left(\frac{4}{5}r^5-\frac{1}{7}r^7\right)\Bigg|_0^2 \sin j\; dj=\frac{24}{35p}\int_0^{2p}\sin j\; dj=$$

$$=\frac{24}{35p}\cdot(-\cos j)\Big|_0^{2p}=0.$$

С помощью третьей из формул (25.9) найдем аппликату z_0 центра масс:

$$z_0=\frac{3}{32p}\iiint_V z(x^2+y^2)dxdydz=\frac{3}{32p}\int_0^{2p} dj\int_0^2 dr\int_0^{4-r^2} r^3 zdz=$$

$$=\frac{3}{64p}\int_0^{2p} dj\int_0^2 r^3z^2\Big|_{z=0}^{z=4-r^2} dr=\frac{3}{64p}\int_0^{2p} dj\int_0^2 (16r^3-8r^5+r^7)\,dr=$$

$$=\frac{3}{64p}\int_0^{2p}\left(4r^4-\frac{4r^6}{3}+\frac{r^8}{8}\right)\Bigg|_0^2 dj=\frac{1}{2p}\int_0^{2p} dj=\frac{1}{2p}j\Big|_0^{2p}=1.$$

Центр масс тела находится в точке $M_0(0;0;1)$.

Задания

I уровень

1.1. Вычислите с помощью тройного интеграла в декартовой системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V:\quad x+y=3,\ z=x^2+3y^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0;$

2) $V:\quad z=y^2,\ x+y=2,\ x\ge 0,\ z\ge 0;$

3) $V:\quad z=12y,\ y=\sqrt{x},\ x+y=2,\quad z=0.$

1.2. Вычислите с помощью тройного интеграла в цилиндрической системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V:\quad z=1-x^2-y^2,\ y\ge x,\ x\ge 0,\ z\ge 0;$

2) $V:\quad x^2+y^2=4,\ z=x^2+y^2,\ y\ge x,\ z\ge 0;$

3) $V:\quad z=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$

1.3. Вычислите с помощью тройного интеграла в сферической системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V:\quad 4\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ y\le x\sqrt{3},\ y\ge 0,\ z\ge 0;$

2) $V:\quad 4\le x^2+y^2+z^2\le 36,\ y\ge x\sqrt{3},\ x\ge 0,\ z\ge 0;$

3) $V:\quad 1\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ y\le \frac{x}{\sqrt{3}},\ y\ge 0,\ z\ge 0;$

4) $V:\quad x^2+y^2+z^2=36,\ y\le -x,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

II уровень

2.1. Вычислите с помощью тройного интеграла в декартовой системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V:\quad x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x},\ z=15x,\ y=0,\ z=0;$

2) $V:\quad z=3y,\ y=2\sqrt{x},\ x+y=8,\ y=0,\ z=0;$

3) $V:\quad z=\frac{4}{5}x,\ x=\sqrt{3y},\ x+y=6,\ y=0,\ z=0;$

4) $V:\quad x+z=\frac{1}{2},\ y=2\sqrt{2x},\ y=17\sqrt{2x},\ z=0.$

2.2. Вычислите с помощью тройного интеграла в цилиндрической системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V:\quad x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x,\ y\le x,\ z=4,\ y\ge 0,\ z\ge 0;$

2) $V:\quad x^2+y^2=y,\ x^2+y^2=4y,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0;$

3) $V:\quad x^2+y^2=6x,\ x^2+y^2=9x,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,\ y=0\ (y\le 0);$

4) $V:\quad x^2+y^2=2y,\ y\ge x,\ z=4,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ \ x^2+y^2=4y.$

2.3. Вычислите с помощью тройного интеграла в сферической системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V:\quad x^2+y^2+z^2=25,\ x^2=y^2+z^2,\ x\le 0;$

2) $V:\quad z=\sqrt{18-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x\ge 0;$

3) $V: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 32, \quad y^2 = x^2 + z^2, \quad y \ge 0;$

4) $V: \quad z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad x = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad y \ge 0.$

2.4. Найдите координаты центра масс тела, ограниченного поверхностями $z = 3 - x^2 - y^2$ и $x = 0$, при условии, что плотность распределения массы выражается функцией $f(x; y; z) = z$.

III уровень

3.1. Вычислите с помощью тройного интеграла в декартовой системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V: \quad y = \sqrt{2x},\ x = 2\sqrt{y},\ z = 4 - x,\ z \ge 0;$

2) $V: \quad z = \dfrac{6}{11}y,\ x = \sqrt{5y},\ x^2 + y^2 = 50,\ x = 0,\ z = 0;$

3) $V: \quad z = \dfrac{5}{11}x,\ x = \sqrt{3x},\ x^2 + y^2 = 18,\ y = 0,\ z = 0.$

3.2. Вычислите с помощью тройного интеграла в цилиндрической системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V: \quad x = \sqrt{9 - y^2},\ x = \sqrt{25 - y^2},\ z = x,\ y \ge 0,\ z \ge 0;$

2) $V: \quad x^2 + y^2 = 2x,\ z = 4 - y^2,\ z = 0;$

3) $V: \quad x^2 + y^2 = 2y,\ z = 4 - x^2,\ z = 0;$

4) $V: \quad z = x^2 + y^2,\ x = x^2 + y^2,\ 2x = x^2 + y^2,\ z = 0.$

3.3. Вычислите с помощью тройного интеграла в сферической системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

1) $V: \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2;$

2) $V: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4z,\ x^2 + y^2 = 3z^2,\ x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{3}.$

(Указание: $0 \le j \le 2p, \quad \dfrac{p}{6} \le q \le \dfrac{p}{3}, \quad 0 \le r \le 4\cos q$).

26. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

26.1. Понятие криволинейного интеграла 1-го рода, его свойства и вычисление

Пусть на плоскости xOy задана гладкая незамкнутая кривая L с началом в точке A и концом в точке B, не имеющая самопересечений. Допустим, что на этой кривой определена непрерывная функция $z = f(x;y)$. Разобьем указанную кривую L произвольным образом на элементарные дуги $L_1, L_2, ..., L_n$, длины которых будем считать соответственно равными $\Delta L_1, \Delta L_2, ..., \Delta L_n$. На каждой из элементарных дуг L_i выберем произвольную точку $M_i(x_i;y_i)$, $i=\overline{1,n}$. Обозначим через $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta L_i$ и составим ***интегральную сумму***

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta L_i.$$

Устремим $n\to\infty$ так, чтобы $\Delta\to 0$. Если существует предел интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения кривой L на части, ни от выбора точек $M_i(x_i;y_i)$, то этот предел называется ***криволинейным интегралом 1-го рода*** от функции $f(x;y)$ вдоль кривой L:

$$\int_L f(x;y)dl = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta L_i,$$

dl называют ***дифференциалом длины дуги***, а саму кривую L – ***линией интегрирования***. При этом говорят, что функция $f(x;y)$ ***интегрируема*** по кривой L.

Если L – гладкая кривая в трехмерном пространстве без самопересечений, а $f(x;y;z)$ – непрерывная функция в точках этой кривой, то криволинейный интеграл 1-го рода по этой кривой определяется равенством

$$\int_L f(x;y;z)dl = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta L_i$$

в случае существования предела и при аналогичных плоской кривой условиях.

Если кривая L представляет собой замкнутый контур (т. е. начало кривой и ее конец совпадают), используют специальное обозначение: $\oint_L f(x;y;z)dl$.

Достаточное условие интегрируемости функции: если функция определена и непрерывна в точках гладкой, не имеющей самопересечений, кривой, то она интегрируема по этой кривой.

Если функции $f(x;y)$, $f_1(x;y)$ и $f_2(x;y)$ интегрируемы по гладкой кривой L, то справедливы следующие свойства:

1) ***линейность***:

$$\int_L \left(a\ f_1(x;y) + b\ f_2(x;y)\right)dl = a\int_L f_1(x;y)dl + b\int_L f_2(x;y)dl,$$

где $a = const$, $b = const$;

2) ***аддитивность***: если гладкая или кусочно-гладкая кривая L состоит из конечного числа гладких дуг L_i, $i=\overline{1,n}$, то

$$\int_L f(x;y)dl = \sum_{i=1}^{n}\int_{L_i} f(x;y)dl;$$

3) ***независимость от направления пути интегрирования***: если кривая L соединяет точки A и B, то

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{BA} f(x;y)dl;$$

4) ***оценка модуля интеграла***:

$$\left|\int_L f(x;y)dl\right| \le \int_L |f(x;y)|dl.$$

Допустим, что $z = f(x;y)$ – функция, непрерывная в точках кривой L. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода сводится к вычислению определенного интеграла, причем вид формулы зависит от способа задания кривой L:

1. Если кривая L задана явно уравнением $y = y(x)$, $a\le x\le b$, то

$$\int_L f(x;y)dl = \int_a^b f\left(x;y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx. \qquad (26.1)$$

2. Если кривая L задана явно уравнением $x = x(y)$, $c\le x\le d$, то

$$\int_L f(x;y)dl = \int_c^d f(x(y);y)\sqrt{1+(x'(y))^2}dy. \qquad (26.2)$$

3. Если плоская кривая L задана параметрически формулами $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $a \le t \le b$, то

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_a^b f\left(x(t);y(t)\right)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \qquad (26.3)$$

4. Если пространственная кривая L задана параметрически формулами $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ где $a \le t \le b$, а $f(x;y;z)$ – непрерывная в точках этой кривой функция, то

$$\int\limits_L f(x;y;z)dl = \int\limits_a^b f(x(t);y(t);z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt. \quad (26.4)$$

5. Если кривая L задана уравнением в полярных координатах $r = r(j)$, где $j_1 \le j \le j_2$, то

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_{j_1}^{j_2} f(r\cos j; r\sin j)\sqrt{r^2(j) + \left(r'(j)\right)^2}\,dj. \quad (26.5)$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода в случае явного задания кривой интегрирования:

1) $\int\limits_L y\,dl$, где $L: y^2 = 4x$ от точки $A(1;\,2)$ до точки $B(4;\,4)$;

2) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где $L: y = 2x+2$ от точки $A(0;\,2)$ до точки $B(-1;\,0)$;

3) $\oint\limits_L (x+y)dl$, где L – контур треугольника AOB с вершинами в точках $A(2;\,0)$, $O(0;\,0)$, $B(0;\,2)$.

Решение. 1) В уравнении кривой L выразим x через y: $x = \frac{y^2}{4}$, где $2 \le y \le 4$. Для этого вычислим производную функции $x = x(y)$ по переменной y: $x'(y) = \frac{y}{2}$. Далее для нахождения элемента длины дуги кривой L целесообразно применить формулу $dl = \sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy$, так как кривая задана явно уравнением $x = x(y)$ (см. формулу (26.2)):

$$dl = \sqrt{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy = \sqrt{1+\frac{y^2}{4}}\,dy = \frac{\sqrt{4+y^2}}{2}\,dy.$$

Вычислим исходный криволинейный интеграл, применив формулу (26.2):

$$\int\limits_L y\,dl = \int\limits_2^4 y\cdot\frac{\sqrt{4+y^2}}{2}\,dy = \frac{1}{4}\int\limits_2^4 \sqrt{4+y^2}\,d(4+y^2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(4+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^4 =$$

$$= \frac{4(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{3}.$$

2) В уравнении кривой L переменная y выражена через x: $y = 2x+2$, где x меняется от 0 до –1. Вначале вычислим производную функции $y = y(x)$ по переменной x: $y'(x) = 2$. Затем с учетом случая 1 применим формулу $dl = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$ и найдем элемент длины дуги кривой L: $dl = \sqrt{1+2^2}\,dy = \sqrt{5}dy$. Вычислив исходный криволинейный интеграл, применив формулу (26.1), получим:

$$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{5}\int\limits_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x^2+8x+4}} = \int\limits_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{8}{5}x+\frac{4}{5}}} =$$

$$= \int\limits_0^{-1} \frac{d\left(x+\frac{4}{5}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{8}{5}x+\frac{4}{5}}} = \ln\left|x+\frac{4}{5}+\sqrt{x^2+\frac{8}{5}x+\frac{4}{5}}\right|\Bigg|_0^{-1} = \ln\frac{\sqrt{5}-1}{5} -$$

$$-\ln\frac{4+2\sqrt{5}}{5} = \ln\frac{\sqrt{5}-1}{2(\sqrt{5}+2)} = \ln\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-2)}{2} = \ln\frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

3) Изобразим треугольник AOB (рис. 26.1).

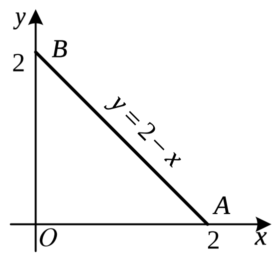


Рис. 26.1

Разобьем контур интегрирования на три части:

$$\oint\limits_L (x+y)dl = \int\limits_{OA}(x+y)dl + \int\limits_{AB}(x+y)dl + \int\limits_{OB}(x+y)dl.$$

Рассмотрим отдельно каждый из отрезков интегрирования.

Отрезок OA: уравнение соответствующей прямой $y = 0$; получаем элемент длины дуги $dl = \sqrt{1+0}\,dx = dx$, где $0 \le x \le 2$.

Отрезок AB: уравнение прямой интегрирования $y = 2 - x$, отсюда элемент длины дуги этой прямой $dl = \sqrt{1+(-1)^2}\,dx = \sqrt{2}dx$, где $0 \le x \le 2$.

Отрезок OB: уравнение прямой $x = 0$; получаем элемент длины дуги $dl = \sqrt{1+0}\,dy = dy$, где $0 \le y \le 2$.

Вычислим отдельно каждый из интегралов суммы:

$$\int\limits_{OA}(x+y)dl = \int\limits_0^2 x dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 = 2,$$

$$\int\limits_{AB}(x+y)dl = \int\limits_0^2 (x+2-x)\sqrt{2}dx = 2\sqrt{2}x\bigg|_0^2 = 4\sqrt{2},$$

$$\int\limits_{OB}(x+y)dl = \int\limits_0^2 y dy = \frac{y^2}{2}\bigg|_0^2 = 2.$$

Тогда исходный интеграл будет равен

$$\oint\limits_L (x+y)dl = 2 + 4\sqrt{2} + 2 = 4(\sqrt{2}+1).$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода, используя параметрическое задание кривой интегрирования:

1) $\int\limits_L x^2 dl$, где L – нижняя полуокружность $x^2 + y^2 = 9$;

2) $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$, где L – первый виток винтовой линии $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t\sqrt{2}$;

3) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1;\ 3;\ 5)$ и $B(4;\ 7;\ 5)$.

Решение. 1) Перейдем к параметрическому заданию данной окружности: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, причем $p \le t \le 2p$. Для того чтобы воспользоваться формулой (26.3), найдем элемент длины дуги:

$$dl = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}\,dt = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}\,dt = 3dt.$$

Вычислим криволинейный интеграл, перейдя к определенному интегралу по указанной формуле:

$$\int\limits_L x^2 dl = \int\limits_p^{2p}(3\cos t)^2 3dt = \int\limits_p^{2p} 27\cos^2 t dt = \frac{27}{2}\int\limits_p^{2p}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{27}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\bigg|_p^{2p} = \frac{27p}{2}.$$

2) Поскольку задан первый виток винтовой линии, то $0 \le t \le 2p$. Вычислим криволинейный интеграл, перейдя к определенному интегралу по формуле (26.4). Вначале найдем элемент длины дуги:

$$dl = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}\,dt = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 2}\,dt = \sqrt{6}dt.$$

Тогда

$$\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl = \sqrt{6}\int\limits_0^{2p}(4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 2t^2)dt =$$

$$= 2\sqrt{6}\int\limits_0^{2p}(2+t^2)dt = 2\sqrt{6}\left(2t + \frac{t^3}{3}\right)\bigg|_0^{2p} = \frac{8p\sqrt{6}}{3}(3+2p^2).$$

3) Запишем уравнение данной прямой, проходящей через точку $A(1;\ 3;\ 5)$, направляющий вектор которой $\overrightarrow{AB} = (3;\ 4;\ 0)$:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{0} = t.$$

Перейдем к параметрическому заданию этой прямой: $x = 1 + 3t$, $y = 3 + 4t$, $z = 5$, причем $0 \le t \le 1$, так как $0 \le x \le 4$. Вычислим криволинейный интеграл, перейдя к определенному интегралу по формуле (26.3), найдя вначале элемент длины дуги: $dl = \sqrt{3^2 + 4^2}\,dt = 5dt$. Получим:

$$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 5\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+6t+9t^2+9+24t+16t^2+25}}dt =$$

$$= 5\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{25t^2+30t+35}}dt = \int\limits_0^1 \frac{d\left(t+\frac{3}{5}\right)}{\sqrt{t^2+\frac{6}{5}t+\frac{7}{5}}} = \ln\left|t + \frac{3}{5} + \sqrt{t^2 + \frac{6}{5}t + \frac{7}{5}}\right|\Bigg|_0^1 =$$

$$= \ln\frac{8\sqrt{35}+15\sqrt{14}-9\sqrt{10}-24}{26}.$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода в случае задания кривой интегрирования полярным уравнением:

1) $\int\limits_L (x+y)dl$, где L – лепесток лемнискаты $r^2 = 5\cos 2j$, $-\frac{p}{4} \le j \le \frac{p}{4}$;

2) $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dl$, где L – дуга кардиоиды $r = 1 + \cos j$, $0 \le j \le p$.

Решение. 1) В данном случае необходимо использовать формулу (26.5). Но вначале найдем производную функции $r(\varphi)=\sqrt{5\cos 2\varphi}$ и возведем ее в квадрат: $r'(\varphi)=\dfrac{-5\sin 2\varphi}{\sqrt{5\cos 2\varphi}}$, $(r'(\varphi))^2=\dfrac{5\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}$. Применив формулу $dl=\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$, выясним, каков в нашем случае элемент длины дуги:

$$dl=\sqrt{5\cos 2\varphi+\frac{5\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}d\varphi=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi.$$

Вычислим исходный криволинейный интеграл, перейдя к определенному интегралу и воспользовавшись формулами перехода от декартовых координат к полярным $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$ с учетом того, что $r=\sqrt{5\cos 2\varphi}$. Имеем

$$\int_L (x+y)dl=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{5\cos 2\varphi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi=$$

$$=5\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=5(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=5\sqrt{2}.$$

2) Воспользуемся формулой (26.5). Найдем производную заданной функции и возведем ее в квадрат:

$$r'(\varphi)=-\sin\varphi,\ (r'(\varphi))^2=\sin^2\varphi.$$

Выясним, каков элемент длины дуги. Так как $dl=\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$, то

$$dl=\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+2\cos\varphi+1}\,d\varphi=\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Вычислим исходный криволинейный интеграл, перейдя к определенному интегралу:

$$\int_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dl=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\varphi\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=8\int_0^{\pi}\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\frac{\varphi}{2}=\left|\begin{matrix}t=\dfrac{\varphi}{2}\\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=t, & dv=\cos t dt\\ du=dt, & v=\sin t\end{matrix}\right|=8(t\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4(\pi-2).$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите криволинейный интеграл 1-го рода в случае явного задания кривой интегрирования:

1) $\int_L x^3 dl$, где $L:\ y=x^3$ от точки $A(2;\ 8)$ до точки $B(1;\ 1)$;

2) $\int_L x^2 y dl$, где L – отрезок прямой от точки $O(0;\ 0)$ до точки $C(1;\ 3)$;

3) $\int_L \dfrac{dl}{y+x^2}$, где $L:\ y=2x+1$ от точки $A(1;\ 2)$ до точки $B(0;\ 1)$;

4) $\int_L \dfrac{dl}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, где $L:\ y=x$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 1)$;

5) $\oint_L (x+2y)dl$, где L – контур ΔABO с вершинами в точках $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 4)$, $O(0;\ 0)$;

6) $\oint_L xydl$, где L – прямоугольник с вершинами в точках $A(3;\ 0)$, $B(3;\ 5)$, $C(0;\ 5)$, $O(0;\ 0)$;

7) $\int_L (3\sqrt[3]{y}-4\sqrt{x})dl$, где L – отрезок прямой от точки $B(0;\ -1)$ до точки $C(1;\ 0)$.

1.2. Вычислите криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L (x^2+y^2)^2 dl$, где $L:\ x^2+y^2=4$, перейдя к параметрическому заданию кривой интегрирования.

II уровень

2.1. Вычислите криволинейный интеграл 1-го рода в случае явного задания кривой интегрирования:

1) $\int_L xydl$, где $L:\ x=y^2$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $C(1;\ 1)$;

2) $\int\limits_L \sqrt{y}dl$, где L: $y = x^2$ от точки $A(-1; 1)$ до точки $B(3; 9)$;

3) $\int\limits_L \frac{xdl}{\sqrt{y}}$, где L: $y^3 = \frac{9}{4}x^2$ от точки $A\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ до точки $B\,(2\sqrt{3}; 3)$;

4) $\int\limits_L (x^5 + 16xy)dl$, где $L: 16y = x^4$ от точки $O(0; 0)$ до точки $B\left(1; \frac{1}{16}\right)$;

5) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{y^2+1}}$, где L: $y = e^x$ от точки $A(e; 1)$ до точки $B\,(e^2; 2)$;

6) $\int\limits_L xdl$, где L – дуга параболы $x^2 = 8y$, отсеченная параболой $y^2 = 8x$;

7) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+17}}$, где L – отрезок прямой от точки $O(0; 0)$ до точки $C(1; 4)$.

2.2. Вычислите криволинейный интеграл 1-го рода в случае параметрического задания кривой интегрирования:

1) $\int\limits_L ydl$, где L – первая арка циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t); \end{cases}$

2) $\int\limits_L \sqrt{y}dl$, где L – первая арка циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

3) $\int\limits_L \frac{z^2}{x^2+y^2}dl$, где L – первый виток винтовой линии $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = at; \end{cases}$

4) $\oint\limits_L yzdl$, где L – контур прямоугольника с вершинами в точках $O(0; 0; 0)$, $A(0; 2; 0)$, $B(0; 2; 4)$, $C(0; 0; 4)$;

5) $\int\limits_L (3z - \sqrt{x^2+y^2})dl$, где L – виток конической винтовой линии $x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t, \; 0 \le t \le 2p$.

2.3. Вычислите криволинейный интеграл 1-го рода в случае задания кривой интегрирования в полярных координатах:

1) $\int\limits_L \frac{xy(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}dl$, где L – дуга кривой $r = a\sin j$, где $0 \le j \le \frac{p}{4}$;

2) $\int\limits_L \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, где L – дуга кардиоиды $r = 2(1 + \cos j)$, $\frac{p}{2} \le j \le p$;

3) $\int\limits_L (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dl$, где L – часть гиперболической спирали $r = \frac{1}{j}$ от $j = \sqrt{3}$ до $j = 2$.

III уровень

3.1. Вычислите криволинейный интеграл 1-го рода $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где L – отрезок прямой от точки $B(0; 2)$ до точки $C(-4; 0)$.

3.2. Вычислите криволинейный интеграл 1-го рода в случае параметрического задания кривой интегрирования:

1) $\oint\limits_L (y - x)dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = by$;

2) $\int\limits_L (x + y)dl$, где L – полуокружность $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = z \quad (y \ge 0); \end{cases}$

3) $\int\limits_L \sqrt[3]{z}(x + 9z)dl$, где L: $\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}, \text{ причем } 0 \le t \le 1; \\ z = t^3, \end{cases}$

4) $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 2ax$;

5) $\int\limits_L xydl$, где L – первая четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

6) $\int\limits_L xdl$, где L – дуга астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, заключенная между точками $A(0; -1)$ и $B(1; 0)$.

26.2. Понятие криволинейного интеграла 2-го рода, его свойства и вычисление. Формула Грина

Пусть на плоскости xOy задана гладкая незамкнутая кривая L, и на этой кривой определена вектор-функция

$\vec{F}(x;y) = P(x;y)\vec{i} + Q(x;y)\vec{j}$,

где $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ – непрерывные функции.

Разобьем указанную кривую L произвольным образом на элементарные дуги L_1, L_2, ..., L_n. На каждой из элементарных дуг L_i выберем произвольную точку $M_i(x_i;y_i)$, $i=\overline{1,n}$.

Составим произведение значения функции $P(x_i;y_i)$ на длину проекции Δx_i дуги L_i на ось Ox и произведение значения функции $Q(x_i;y_i)$ на длину проекции Δy_i дуги L_i на ось Oy. Запишем предельную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n}(P(x_i;y_i)\Delta x_i + Q(x_i;y_i)\Delta y_i).$$

Обозначим через $\Delta_1 = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$, а через $\Delta_2 = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta y_i$. Устремим $n\to\infty$ так, чтобы $\Delta_1\to 0$ и $\Delta_2\to 0$. Если существует предел интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения кривой L на части, ни от выбора точек $M_i(x_i;y_i)$, то этот предел называется ***криволинейным интегралом 2-го рода*** от функции $\vec{F}(x;y) = P(x;y)\vec{i} + Q(x;y)\vec{j}$ по координатам x и y:

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \lim_{\substack{\Delta_1\to 0\\ \Delta_2\to 0}}\sum_{i=1}^{n}(P(x_i;y_i)\Delta x_i + Q(x_i;y_i)\Delta y_i).$$

Если L – гладкая кривая в трехмерном пространстве, а $\vec{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$ – вектор-функция, заданная на L, причем $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$ – непрерывные функции в точках этой кривой, то в случае существования предела и при аналогичных плоской кривой условиях криволинейный интеграл 2-го рода по координатам x, y и z определяется равенством:

$$\int_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta_1\to 0\\ \Delta_2\to 0\\ \Delta_3\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\left(P\Delta x_i + Q\Delta y_i + R\Delta z_i\right),$$

где в правой части формулы $P = P(x_i;y_i;z_i)$, $Q = Q(x_i;y_i;z_i)$ и $R = R(x_i;y_i;z_i)$.

Если кривая L представляет собой замкнутый контур (т. е. начало кривой и ее конец совпадают), вводят понятие ***положительного*** и ***отрицательного*** направлений обхода контура. ***Положительным направлением обхода контура*** называется такое направление, при котором линия интегрирования обходится против хода часовой стрелки. Противоположное ему направление обхода контура называется ***отрицательным***. При этом считают, что $\oint\limits_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz > 0$ при положительном направлении обхода контура L.

Достаточное условие интегрируемости функции: если определенная в точках гладкой кривой вектор-функция $\vec{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$ имеет непрерывные координатные функции $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$, то эта вектор-функция $\vec{F}(x;y;z)$ интегрируема по этой кривой.

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода аналогичны свойствам криволинейного интеграла 1-го рода, кроме одного: величина криволинейного интеграла 2-го рода численно зависит от направления интегрирования, т. е.

$$\int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$$

$$= -\int_{BA} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz.$$

Допустим, что координатные функции $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$ непрерывны на рассматриваемой кривой. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода сводится к вычислению определенных интегралов. Вид формулы зависит от способа задания кривой. Возможны следующие случаи:

1. Если плоская кривая L с началом в точке A и концом в точке B задана явно уравнением $y = y(x)$, $a\le x\le b$, причем при изменении x от a до b кривая L описывается от A к B, то

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_a^b (P(x;y(x)) + Q(x;y(x))y'(x))\,dx \qquad (26.6)$$

2. Если плоская кривая L с началом в точке A и концом в точке B задана явно уравнением $x = x(y), \quad c \le y \le d$, причем при изменении y от c до d кривая L описывается от A к B, то

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)\,dy = \int_c^d (P(x(y);y)\,x'(y) + Q(x(y);y))\,dy. \qquad (26.7)$$

3. Если плоская кривая L с началом в точке A и концом в точке B задана параметрически с помощью формул $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $a \le t \le b$, причем при изменении параметра t от a к b кривая L описывается от A к B, функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ непрерывно дифференцируемы, тогда

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = $$
$$= \int_a^b (P(x(t);y(t))\,x'(t) + Q(x(t);y(t))\,y'(t))\,dt. \qquad (26.8)$$

4. Если пространственная кривая L задана параметрически с помощью формул $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$, где $a \le t \le b$, причем при изменении параметра t от a к b кривая описывается от A к B, то

$$\int_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$$
$$= \int_a^b (P\,x'(t) + Q\,y'(t) + R\,z'(t))\,dt, \qquad (26.9)$$

причем в правой части формулы – $P = P(x(t);y(t);z(t))$, $Q = Q(x(t);y(t);z(t))$ и $R = R(x(t);y(t);z(t))$.

Формула Грина: если функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ непрерывно дифференцируемы в замкнутой ограниченной области D, то имеет место формула Грина:

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x;y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x;y)}{\partial y} \right) dxdy, \qquad (26.10)$$

где L – граница области D, интегрирование вдоль которой производится в положительном направлении (рис. 26.2).

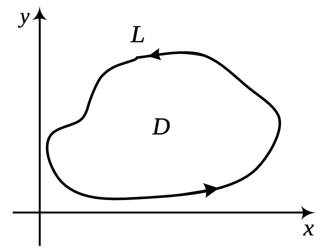


Рис. 26.2

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода по указанной дуге кривой L:

1) $\int_L xy^2dx + (y^2 - x)\,dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$;

2) $\int_L xydx + y^2dy$, где L – четверть эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \frac{p}{2}$;

3) $\int_L (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1; 2; 3)$ и $B(3; 5; 7)$.

Решение. 1) Вычислим заданный интеграл по формуле (26.6):

$$\int_L xy^2dx + (y^2 - x)dy = \int_0^1 (x(x^2)^2 + ((x^2)^2 - x)\,2x)\,dx =$$
$$= \int_0^1 (x^5 + 2x^5 - 2x^2)dx = \int_0^1 (3x^5 - 2x^2)dx = \left(\frac{x^6}{2} - \frac{2x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}.$$

2) Вычислим заданный интеграл по формуле (26.8):

$$\int_L xydx + y^2dy = \int_0^{\frac{p}{2}} (3\cos t\,2\sin t(-3\sin t) + 2^2\sin^2 t\,2\cos t)\,dt =$$
$$= -10\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 t\ d\sin t = -\frac{10}{3}\sin^3 t\Bigg|_0^{\frac{p}{2}} = -\frac{10}{3}.$$

3) Запишем параметрические уравнения данной прямой:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + 3t, \text{ где } 0 \le t \le 1. \\ z = 3 + 4t, \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой (26.9), вычислим интеграл:

$$\int_L (y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz =$$
$$=\int_0^1 ((7t+5)2+(6t+4)3+(5t+3)4)\,dt =$$
$$=\int_0^1 (52t+34)dt=(26t^2+34t)\Big|_0^1=60.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода по указанному замкнутому контуру L:

1) $\oint_L 2ydx-3xdy$, где L – контур ΔABC с вершинами в точках $A(1;\,0)$, $B(3;\,1)$ и $C(0;\,5)$;

2) $\oint_L x^2ydx+2x^3dy$, где L – контур, образованный дугами парабол $y^2=2x$, $x^2=2y$ при положительном обходе контура интегрирования.

Решение. 1) Нарисуем ΔABC (рис. 26.3).

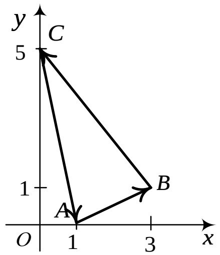


Рис. 26.3

Представим данный интеграл как сумму трех интегралов по отрезкам прямых:
$$\oint_L 2ydx-3xdy=\int_{AB} 2ydx-3xdy+$$
$$+\int_{BC} 2ydx-3xdy+\int_{CA} 2ydx-3xdy.$$

Вычислим интеграл по каждому из отрезков интегрирования.

Отрезок AB: уравнение $y=\frac{1}{2}(x-1)$, где $1\le x\le 3$, поэтому
$$\int_{AB} 2ydx-3xdy=\int_1^3\left(2\frac{1}{2}(x-1)-3x\frac{1}{2}\right)dx=-\frac{1}{2}\int_1^3(x+2)\,dx=$$
$$=-\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Bigg|_1^3=-4.$$

Отрезок BC: уравнение $y=-\frac{4}{3}x+5$, где x меняется от 3 до 0, поэтому
$$\int_{BC} 2ydx-3xdy=\int_3^0\left(2\left(-\frac{4}{3}x+5\right)-3x\left(-\frac{4}{3}\right)\right)dx=$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^3(2x+15)dx=-\frac{2}{3}(x^2+15x)\Big|_0^3=-36.$$

Отрезок CA: уравнение $y=-5x+5$, где $0\le x\le 1$, поэтому
$$\int_{CA} 2ydx-3xdy=\int_0^1(2(-5x+5)-3x(-5))dx=5\int_0^1(x+2)\,dx=$$
$$=5\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^1=12,5.$$

Чтобы получить искомый результат, просуммируем промежуточные данные:
$$\oint_L 2ydx-3xdy=-4-36+12,5=-27,5.$$

2) Нарисуем контур L (рис. 26.4).

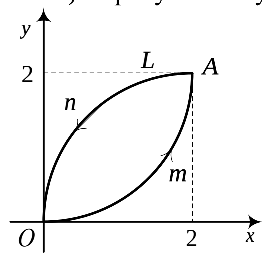


Рис. 26.4

Представим данный интеграл как сумму двух интегралов по дугам различных парабол:
$$\oint_L x^2ydx+2x^3dy=\int_{OmA} x^2ydx+2x^3dy+$$
$$+\int_{AnO} x^2ydx+2x^3dy.$$

По каждой из кривых интегрирования вычислим интеграл отдельно.

Дуга OmA: уравнение $y=\frac{x^2}{2}$, где $0\le x\le 2$, поэтому
$$\int_{OmA} x^2ydx+2x^3dy=\int_0^2\left(\frac{x^4}{2}+2x^4\right)dx=\frac{5}{2}\int_0^2 x^4dx=\frac{x^5}{2}\Bigg|_0^2=16.$$

Дуга AnO: уравнение $y=\sqrt{2x}$, где x меняется от 2 до 0, поэтому
$$\int_{AnO} x^2ydx+2x^3dy=\int_2^0\left(x^2\sqrt{2x}+2x^3\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx=-2\sqrt{2}\int_0^2 x^{\frac{5}{2}}dx=$$
$$=-\frac{4\sqrt{2}x^{\frac{7}{2}}}{7}\Bigg|_0^2=-\frac{64}{7}.$$

Чтобы получить искомый результат, просуммируем промежуточные данные:
$$\oint_L x^2ydx+2x^3dy=16-\frac{64}{7}=6\frac{6}{7}.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода по указанной дуге кривой L:

1) $\int\limits_L (y^2 - x^2)dy,$ где L – дуга параболы $y = 2x^4$ от точки A(– 1; 2) до точки B(1; 2);

2) $\int\limits_L \frac{y}{2x}dx + (x+2y)dy,$ где L – дуга параболы $y = 2x^2$ от точки O(0; 0) до точки A(2; 8);

3) $\int\limits_L 2xydx + (x^2 + 3y^2)dy,$ где L – дуга кривой $y = x^3$ от точки B(– 1; – 1) до точки C(1; 1);

4) $\int\limits_L (x^2 - z^2)dx + 2yzdy - xzdz,$ где L – дуга пространственной кривой $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,$ соединяющая точки O(0; 0; 0) и A(1; 1; 1);

5) $\int\limits_L (y^2 - x^2)dx + x^2y^2dy,$ где L – отрезок прямой от точки A(1; 1) до точки B(4; 3);

6) $\int\limits_L xydx + ydy,$ где L – дуга окружности $x = R\cos t,\ y = R\sin t,$ $0 \le t \le \frac{p}{2}.$

II уровень

2.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода по указанной дуге кривой L:

1) $\int\limits_L 2x^2ydx + (x+y)dy,$ где L – дуга от точки O(0; 0) до точки A(2; 4):

а) прямой $y = x$, б) параболы $y = x^2$,

в) кривой $y = 2\sqrt{2x},$ г) кубической параболы $y = \frac{1}{2}x^3;$

2) $\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy,$ где L – дуга кривой $y = \ln x$ от точки A(1; 0) до точки B(e^2; 2);

3) $\int\limits_L (xy - x^2)dx + x^2dy,$ где L – дуга кривой $x^2 = 9y$ от точки O(0; 0) до точки C(3; 1);

4) $\int\limits_L (y^2 - x^2)dx + x^2y^2dy,$ где L – отрезок прямой от точки A(1; 1) до точки B(4; 3);

5) $\oint\limits_L (x+y)dx - (x-y)dy,$ где L – окружность $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16;$

6) $\int\limits_L \frac{x}{y^2}dx + \frac{y}{x^2}dy,$ где L – дуга окружности $x = a\cos t,\ y = a\sin t,$ $\frac{p}{6} \le t \le \frac{p}{3};$

7) $\oint\limits_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$ где L – окружность $x^2 + y^2 = 2;$

8) $\int\limits_L xydx + yzdy + zxdz,$ где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t,$ $y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le 2p.$

III уровень

3.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода по указанной дуге кривой L:

1) $\int\limits_L (2y - x)dx + (x + y^2)dy,$ где L – дуга кривой $x = 2y - y^2$ от точки A(–3; 3) до точки B(1; 1);

2) $\int\limits_L xdx + zdy - ydz,$ где L – окружность в пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 32$ и конуса $y^2 + z^2 = x^2$ при $x \ge 0;$

3) $\int\limits_L 2xydx + (x^2 + 3y^2)dy,$ где L – дуга кривой $x = \sqrt{\cos t},$ $y = \sqrt{\sin t},\ 0 \le t \le \frac{p}{2};$

4) $\int\limits_L y^2dx + x^2dy,$ где L – арка циклоиды $x = 2(t - \sin t),$ $y = 2(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2p.$

26.3. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов

1. Если L – гладкая кривая с началом в точке A и концом в точке B, то

$$\int_L dl = l, \qquad (26.11)$$

где l – длина дуги кривой L от точки A до точки B.

2. Если $f(x;\ y)$ – непрерывная функция, выражающая линейную плотность распределения массы m по гладкой кривой L, то криволинейный интеграл 1-го рода представляет собой массу данной материальной кривой:

$$m = \int_L f(x;y)dl. \qquad (26.12)$$

В этом состоит физический смысл криволинейного интеграла 1-го рода.

3. Для нахождения координат центра масс дуги кривой L пользуются следующими формулами:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_L x\, f(x;y;z)dl,$$
$$y_0 = \frac{1}{m}\int_L y\, f(x;y;z)dl, \qquad (26.13)$$
$$z_0 = \frac{1}{m}\int_L z\, f(x;y;z)dl,$$

где m – масса материальной кривой L с линейной плотностью $f(x;\ y)$, которая вычисляется по формуле (26.12).

4. Если $\vec{F}\left(P(x;y;z);\ Q(x;y;z);\ R(x;y;z)\right)$ – переменная сила, которая действует вдоль контура L, то криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$ выражает работу A этой силы $\vec{F}$, т. е.

$$A = \int_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz. \qquad (26.14)$$

5. Площадь S области D, ограниченной простым замкнутым контуром L, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx, \qquad (26.15)$$

причем обход контура интегрирования L совершается в положительном направлении.

Пример 1. Найти длину дуги кривой, заданной указанными соотношениями:

1) $x = 3\cos t,\ \ y = 3\sin t,\ \ z = 6t,\ \ 0 \le t \le \frac{p}{2}$ (винтовая линия);

2) $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t,\ -\infty \le t \le 0.$

Решение. 1) Найдем производные функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$: $x'(t) = -3\sin t$, $y'(t) = 3\cos t$, $z = 6$. Применив формулу $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z^2(t)}dt$, определим дифференциал длины дуги в случае параметрического задания кривой:

$$dl = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 36}dt = 3\sqrt{5}dt.$$

По формуле (26.11) вычислим длину дуги кривой:

$$l = \int_L dl = \int_0^{\frac{p}{2}} 3\sqrt{5}dt = 3\sqrt{5}\,t\Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{3p\sqrt{5}}{2}.$$

2) Найдем производные функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и возведем их в квадрат:

$$x'(t) = e^t(\cos t - \sin t),\ \ y'(t) = e^t(\sin t + \cos t),\ \ z'(t) = e^t\sqrt{b^2 - 4ac},$$
$$(x'(t))^2 = e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t - \sin 2t) = e^{2t}(1 - \sin 2t),$$
$$(y'(t))^2 = e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t + \sin 2t) = e^{2t}(1 + \sin 2t),$$
$$(z'(t))^2 = e^{2t}.$$

С помощью формулы $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z^2(t)}dt$ определим дифференциал длины дуги в случае параметрического задания кривой: $dl = \sqrt{e^{2t}(1 - \sin 2t + 1 + \sin 2t + 1)}\ dt = e^t\sqrt{3}dt.$ Вычислим длину дуги, воспользовавшись формулой (26.11):

$$l = \int_L dl = \sqrt{3}\int_{-\infty}^{0} e^t dt = \sqrt{3}e^t\Big|_{-\infty}^{0} = \sqrt{3}e^0 - \lim_{t\to-\infty} e^t = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}.$$

Пример 2. Найти массу дуги указанной кривой:

1) $y = 4\sqrt{x}$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(4;\ 8)$ с плотностью распределе-

ния массы $f(x;y)=\sqrt{x^2+\frac{1}{4}y^2}$;

2) винтовой линии $x=\cos t,\ \ y=\sin t,\ \ z=t,\ \ 0\le t\le 2p$ с плотностью распределения массы $f(x;y)=z(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3$.

Решение. 1) Найдем производную функции $y=y(x)$ и возведем ее в квадрат: $y'(x)=\frac{4}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}},\ \ (y'(x))^2=\frac{4}{x}.$ Воспользовавшись формулой $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx,$ определим дифференциал длины дуги кривой: $dl=\sqrt{1+\frac{4}{x}}dx=\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}dx,$ где $0\le x\le 4.$ Вычислим массу дуги по формуле (26.12):

$$m=\int_L f(x;y)dl=\int_0^4\sqrt{x^2+4x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}dx=\int_0^4(x+4)dx=\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_0^4=24.$$

2) Найдем производные функций $x=x(t),\ \ y=y(t)$ и $z(t)$:

$x'(t)=-\sin t,\ \ y'(t)=\cos t,\ \ z=1.$

Определим дифференциал длины дуги в случае параметрического задания кривой:

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z^2(t)}dt=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}\ dt=\sqrt{2}dt.$$

Вычислим массу дуги, воспользовавшись формулой (26.12):

$$m=\int_L f(x;y;z)dl=\sqrt{2}\int_0^{2p}t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+t^2}dt=\sqrt{2}\int_0^{2p}t\sqrt{1+t^2}dt=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2p}\sqrt{1+t^2}\,d(1+t^2)=\frac{\sqrt{2}}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2p}==\frac{\sqrt{2}}{3}\left((4p^2+1)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

Пример 3. Найти центр масс однородной дуги циклоиды, заданной уравнениями $x=2(t-\sin t),\ \ y=2(1-\cos t),\ \ 0\le t\le p$.

Решение. Найдем производные функций $x=x(t),\ \ y=y(t)$: $x'(t)=2(1-\cos t),\ \ \ y'(t)=2\sin t.$

Определим дифференциал длины дуги в случае параметрического задания кривой:

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{4-8\cos t+4\cos^2 t+4\sin^2 t}dt=$$

$$=2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt=4\sin\frac{t}{2}dt.$$

Вычислим массу дуги, воспользовавшись формулой (26.12):

$$m=\int_L dl=4\int_0^p\sin\frac{t}{2}dt=-8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2p}=16.$$

Найдем абсциссу центра масс данной дуги кривой, применив одну из формул (26.13):

$$x_0=\frac{1}{m}\int_L x\cdot f(x;y)dl=\frac{1}{4}\int_0^p 2(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=2\int_0^p\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}d\frac{t}{2}-\int_0^p\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt.$$

После интегрирования по частям имеем:

$$x_0=\left|\begin{array}{ll}u=\frac{t}{2}, & dv=\sin\frac{t}{2}d\frac{t}{2}\\ du=d\frac{t}{2}, & v=-\cos\frac{t}{2}\end{array}\right|=2\left(-\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)\Big|_0^p-$$

$$-2\int_0^p\sin^2\frac{t}{2}d\sin\frac{t}{2}=2-\frac{2}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^p=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

Найдем ординату центра масс данной дуги кривой, применив одну из формул (26.13):

$$y_0=\frac{1}{m}\int_L y\ f(x;y)dl=\frac{1}{4}\int_0^p 2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt=\int_0^p\sin^3\frac{t}{2}dt=$$

$$=-2\int_0^p\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2}=-2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^p+\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Big|_0^p=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

Приходим к ответу: центр масс имеет координаты $\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Пример 4. Найти работу переменной силы $\vec{F}=\frac{1}{y}\vec{i}+\frac{1}{z}\vec{j}+\frac{1}{x}\vec{k}$ при перемещении материальной точки единичной массы вдоль отрезка AB, где $A(1;\,1;\,1)$, $B(2;\,4;\,8)$.

Решение. Предварительно запишем параметрические уравнения прямой AB. Направляющим вектором этой прямой является вектор $\overrightarrow{AB}(1;3;7)$, прямая проходит через точку $A(1;\,1;\,1)$, поэтому параметрическими уравнениями прямой будут соотношения: $x=t+1$, $y=3t+1,\ \ z=7t+1,$ где при изменении переменной x от 1 до 2 параметр t заключен между 0 и 1, т. е. $0\le t\le 1.$

Применив формулу (26.14) и подставив соответствующие выражения для функций $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$, получим $A = \int\limits_{AB} \frac{1}{y}dx + \frac{1}{z}dy + \frac{1}{x}dz.$ При вычислении данного интеграла необходимо перейти к определенному интегралу, для чего следует применить формулу (26.9) и учесть, что $dx = dt$, $dy = 3dt$, $dz = 7dt$. Получим

$$A = \int\limits_{AB} \frac{1}{y}dx + \frac{1}{z}dy + \frac{1}{x}dz = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3t+1} + \frac{3}{7t+1} + \frac{7}{t+1} \right) dt =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ln|3t+1| + \frac{3}{7}\ln|7t+1| + 7\ln|t+1| \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\ln 4 + \frac{3}{7}\ln 8 + 7\ln 2 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{9}{7} + 7 \right)\ln 2 = \frac{188}{21}\ln 2.$$

Пример 5. С помощью криволинейного интеграла найти площадь области D, ограниченной указанным замкнутым контуром L:

1) $L: x^2 + y^2 = R^2$ – окружность;

2) $L: x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ – астроида.

Решение. 1) Запишем параметрические уравнения окружности: $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \le t \le 2p$.

Воспользуемся формулой (26.15):

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2p} (R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t)\,dt = \frac{R^2}{2}t\Bigg|_0^{2p} = pR^2.$$

2) Воспользуемся формулой (26.15):

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2p} (a\cos^3 t\, 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t\, 3a\cos^2 t\sin t)\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2p} (\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2p} (\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t))dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2p} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2p} (1 - \cos 4t)dt = \frac{3a^2}{16}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t \right)\Bigg|_0^{2p} = \frac{3pa^2}{8}.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите центр масс дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le t \le \frac{p}{2}$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = xy$.

1.2. Найдите работу, производимую силой $\vec{F}(M)$ вдоль указанной линии Г:

1) $\vec{F}(M) = y\vec{i} - x\vec{j}$, Г – верхняя половина эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ от точки $A(a;\ 0)$ до точки $B(-\,a;\ 0)$;

2) $\vec{F}(M) = (2a - y)\vec{i} + (y - a)\vec{j}$, Г – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1.3. Найдите площадь области D, ограниченной указанным замкнутым контуром L:

1) $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс;

2) D – область при пересечении кривых $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

II уровень

2.1. Найдите массу кривой $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, $0 \le t \le T$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

2.2. Найдите центр масс дуги винтовой линии $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 6t$, $0 \le t \le \frac{p}{2}$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = x^2 y$.

2.3. Найдите площадь области D, ограниченной указанным замкнутым контуром L:

1) $L: x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$ – кардиоида;

2) D – область при пересечении кривых $y^2 = 8x$, $x^2 = 8y$;

3) D – область, ограниченная осью Ox и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2.4. Найдите работу, производимую силой $\vec{F}(M)$ вдоль указанной линии Г:

1) $\vec{F}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, Г – один виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$;

2) $\vec{F}(M) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, Г: $x = t^2$, $y = t^4$, $z = t^6$, $0 \le t \le 1$.

III уровень

3.1. Найдите массу кривой $x = t$, $y = \dfrac{t^2}{2}$, $z = \dfrac{t^3}{3}$, $0 \le t \le 1$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = y$.

3.2. Найдите массу эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = xy$.

3.3. Найдите массу дуги окружности $x^2 + y^2 = ax$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.4. Найдите площадь области D, ограниченной замкнутым контуром $L: x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ – «декартов лист».

Указание: $0 \le t < +\infty$.

3.5. Найдите работу, производимую силой $\vec{F}(M)$ вдоль указанной линии Г:

1) $\vec{F}(M) = e^{y-x}\vec{i} + e^{z-x}\vec{j} + e^{x-y}\vec{k}$, Г – отрезок, соединяющий точки $O(0; 0; 0)$ и $M(1; 3; 5)$;

2) $\vec{F}(M) = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$, Г – сечение гиперболоида $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ плоскостью $y = x$ от точки $A(a; a; 0)$ до точки $B(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; a)$.

26.4. Независимость криволинейных интегралов 2-го рода от пути интегрирования

Если функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ непрерывно дифференцируемы в замкнутой ограниченной области D, то все следующие условия равносильны:

1) $\oint\limits_L P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$, где L – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области D;

2) интеграл $\int\limits_l P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ не зависит от линии интегрирования, соединяющей две данные точки;

3) выражение $P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ является полным дифференциалом некоторой однозначной функции;

4) во всех точках области D имеет место равенство $\dfrac{\partial P(x; y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x; y)}{\partial x}$.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода по произвольной линии L, соединяющей точки A и B:

1) $\int\limits_L (3x^2 + 6xy^2 - 2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$, где $A(1; 1)$, $B(2; 2)$;

2) $\int\limits_L (e^{-y} + 5)dx + (1 - xe^{-y})dy$, где $A(0; 2)$, $B(1; \ln 2)$;

3) $\int\limits_L \dfrac{1-y}{x^2y}dx + \dfrac{1-2x}{xy^2}dy$, где $A(1; 1)$, $B(3; 3)$.

Решение. 1) Определим, каковы функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ в нашем случае:

$P(x; y) = 3x^2 + 6xy^2 - 2$;

$Q(x; y) = 6x^2y + 4y^3$.

Проверим справедливость равенства $\dfrac{\partial P(x; y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x; y)}{\partial x}$:

$\dfrac{\partial P(x; y)}{\partial y} = 12xy$; $\dfrac{\partial Q(x; y)}{\partial x} = 12xy$.

Следовательно, $\dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x;y)}{\partial x}=12xy$. Делаем вывод, что подынтегральное выражение действительно представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$.

Восстановим функцию $U(x;y)$. Для этого пройдем несколько этапов:

а) проинтегрируем по переменной x функцию $P(x;y)$, считая y постоянной величиной:

$\int(3x^2+6xy^2-2)dx=x^3+3x^2y^2-2x+j(y)$, где $j(y)$ представляет собой константу по отношению к переменной x и зависит только от y;

б) продифференцируем полученное выражение по переменной y, считая x константой, и приравняем его к функции $Q(x;y)$:

$$6x^2y+j'(y)=6x^2y+4y^3;$$

в) из последнего соотношения найдем $j'(y)$ и затем после интегрирования – $j(y)$:

$$j'(y)=4y^3\Rightarrow j(y)=\int 4y^3dy=y^4+C;$$

г) подставив $j(y)$ в выражение из пункта а), получим искомую функцию $U(x;y)$:

$$U(x;y)=x^3+3x^2y^2-2x+y^4+C.$$

Займемся непосредственным вычислением исходного интеграла:

$$\int\limits_L(3x^2+6xy^2-2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=\int\limits_{(1;1)}^{(2;2)}dU=$$

$$=(x^3+3x^2y^2-2x+y^4+C)\Big|_{(1;1)}^{(2;2)}=65.$$

2) Определим, каковы функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ в заданном случае:

$$P(x;y)=e^{-y}+5;$$

$$Q(x;y)=1-xe^{-y}.$$

Проверим выполнимость соотношения $\dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x;y)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P(x;y)}{\partial y}=-e^{-y};\quad \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}=-e^{-y}.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x;y)}{\partial x}=-e^{-y}$. Делаем вывод, что подынтегральное выражение действительно представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$.

Восстановим функцию $U(x;y)$. Для этого пройдем несколько этапов:

а) проинтегрируем по переменной x функцию $P(x;y)$, считая y постоянной величиной:

$$\int(e^{-y}+5)dx=xe^{-y}+5x+j(y),$$

где $j(y)$ – константа по отношению к переменной x и зависит только от y;

б) продифференцируем полученное выражение по переменной y, считая x константой, и приравняем его к функции $Q(x;y)$:

$$-xe^{-y}+j'(y)=1-xe^{-y};$$

в) из последнего соотношения найдем $j'(y)$ и затем после интегрирования – $j(y)$:

$$j'(y)=1\Rightarrow j(y)=\int dy=y+C;$$

г) подставив $j(y)$ в выражение из пункта а), получим искомую функцию $U(x;y)$:

$$U(x;y)=xe^{-y}+5x+y+C.$$

Займемся непосредственным вычислением исходного интеграла:

$$\int\limits_L(e^{-y}+5)dx+(1-xe^{-y})dy=\int\limits_{(0;2)}^{(1;\ln 2)}dU=(xe^{-y}+5x+y+C)\Big|_{(0;2)}^{(1;\ln 2)}=$$

$$=\frac{5-2\ln 2}{2}.$$

3) Определим, каковы функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ в нашем случае:

$$P(x;y)=\frac{1-y}{x^2y}=\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x^2};$$

$$Q(x;y)=\frac{1-2x}{xy^2}=\frac{1}{xy^2}-\frac{2}{y^2}.$$

Проверим справедливость равенства $\dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x;y)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P(x;y)}{\partial y}=-\frac{1}{x^2y^2};\quad \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}=-\frac{1}{x^2y^2}.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x;y)}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2y^2}$. Делаем вывод, что подынтегральное выражение действительно представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$.

Восстановим функцию $U(x;y)$. Для этого пройдем несколько этапов:

а) проинтегрируем по переменной x функцию $P(x; y)$, считая y постоянной величиной:

$$\int \frac{1-y}{x^2 y} dx = -\frac{1-y}{xy} + j(y) = -\frac{1}{xy} + \frac{1}{x} + j(y),$$

где $j(y)$ представляет собой константу по отношению к переменной x и зависит только от y;

б) продифференцируем полученное выражение по переменной y, считая x константой, и приравняем его к функции $Q(x; y)$:

$$\frac{1}{xy^2} + j'(y) = \frac{1}{xy^2} - \frac{2}{y^2};$$

в) из последнего соотношения найдем $j'(y)$ и затем после интегрирования – $j(y)$:

$$j'(y) = -\frac{2}{y^2} \Rightarrow j(y) = -\int \frac{2}{y^2} dy = \frac{2}{y} + C;$$

г) подставив $j(y)$ в выражение из пункта а), получим искомую функцию $U(x; y)$:

$$U(x; y) = -\frac{1}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + C = \frac{2x+y-1}{xy} + C.$$

Займемся непосредственным вычислением исходного интеграла:

$$\int\limits_L \frac{1-y}{x^2 y} dx + \frac{1-2x}{xy^2} dy = \int\limits_{(1;1)}^{(3;3)} dU = \left(\frac{2x+y-1}{xy} + C \right)\Bigg|_{(1;1)}^{(3;3)} = -\frac{10}{9}.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода по произвольной линии L, соединяющей точки A и B:

1) $\int\limits_L (x+y+1)dx + (x-y^2+5)dy$, где $A(0;\ 1)$, $B(2;\ 3)$;

2) $\int\limits_L (y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy$, где $A\left(\frac{p}{4}; \ln 3\right)$, $B\left(\frac{p}{2}; \ln 9\right)$;

3) $\int\limits_L \left(x - \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} - y \right) dy$, где $A(1;\ 1)$, $B(2; 2\sqrt{3})$.

II уровень

2.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода по произвольной линии L, соединяющей точки A и B:

1) $\int\limits_L \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy$, где $A(2;\ 2)$, $B(4;\ 4)$;

2) $\int\limits_L \left(\frac{1}{y-1} - \frac{y}{(x-1)^2} - 2 \right) dx + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{(y-1)^2} + 2y \right) dy$, где $A(2;\ 2)$, $B(4;\ 5)$;

3) $\int\limits_L \frac{x \ln y + y}{x} dx + \frac{y \ln x + x}{y} dy$, где $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 2)$.

III уровень

3.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода по произвольной линии L, соединяющей точки A и B:

1) $\int\limits_L \frac{y}{x^2} \cos\frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos\frac{y}{x} + 2y \right) dy$, где $A\left(2; \frac{p}{2}\right)$, $B(4; p)$;

2) $\int\limits_L \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + x^2 \right) dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + y \right) dy$, где $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{4}; 2\right)$;

3) $\int\limits_L \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy$, где $A(1;\ 0)$, $B(\sqrt{3}; 1)$.

27. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

27.1. Поверхностный интеграл 1-го рода

Пусть функция $f(x; y; z)$ непрерывна на некоторой гладкой замкнутой ограниченной поверхности s. Разобьем эту поверхность произвольным образом на элементарные поверхности $s_1, s_2, ..., s_n$, площади которых будем считать соответственно равными $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$. Внутри каждой элементарной области выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Диаметром ограниченной замкнутой поверхности будем называть наибольшее расстояние между любыми двумя точками границы поверхности. Обозначим через d_i диаметры элементарных поверхностей s_i, а через Δ – максимальный диаметр, т. е. $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta s_i.$$

Устремим $n \to \infty$ так, чтобы $\Delta \to 0$. Если существует предел последовательности интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения поверхности s, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется ***поверхностным интегралом 1-го рода от функции f(x; y; z) по поверхности*** s :

$$\iint_s f(x; y)ds = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta s_i.$$

При этом говорят, что функция $f(x; y; z)$ ***интегрируема*** на поверхности s ; x, y и z называют ***переменными интегрирования***.

Достаточное условие интегрируемости функции: если определенная на некоторой ограниченной замкнутой гладкой поверхности функция непрерывна, то она интегрируема на этой поверхности.

Если функции $f(x; y; z)$, $f_1(x; y; z)$ и $f_2(x; y; z)$ интегрируемы на поверхности s , то имеют место следующие свойства:

1) ***линейность***:

$$\iint_s (a\ f_1(x; y; z) + b\ f_2(x; y; z))\,ds = a\iint_s f_1(x; y; z)ds +$$
$$+ b\iint_s f_2(x; y; z)\,ds,$$

где $a = const$, $b = const$;

2) ***аддитивность***:

$$\iint_{s_1 \cup s_2} f(x; y)\,ds = \iint_{s_1} f(x; y; z)\,ds + \iint_{s_2} f(x; y; z)\,ds,$$

причем поверхности s_1 и s_2 не имеют общих внутренних точек;

3) если для любой точки $(x; y; z) \in s$ выполняется неравенство $f_1(x; y; z) \le f_2(x; y; z)$, то

$$\iint_s f_1(x; y; z)ds \le \iint_s f_2(x; y; z)ds;$$

4) ***оценка модуля интеграла***:

$$\left|\iint_s f(x; y; z)ds\right| \le \iint_s |f(x; y; z)|\,ds;$$

5) если $m = \min\limits_{(x,\,y,\,z)\in s} f(x; y; z)$, $M = \max\limits_{(x;\,y;\,z)\in s} f(x; y; z)$, то

$$mS \le \iint_s f(x; y; z)ds \le MS,$$

где S – площадь ограниченной части поверхности s.

Геометрический смысл поверхностного интеграла 1-го рода:

$$\iint_s ds = S,$$

где S – площадь поверхности s.

Физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода: если $f(x; y; z)$ – поверхностная плотность материальной поверхности s, то

$$m = \iint_s f(x; y; z)ds, \qquad (27.1)$$

где m – масса поверхности s.

Пусть $f(x; y; z)$ – функция, непрерывная в точках поверхности s. Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода сводится к вычислению двойного интеграла. В зависимости от способа задания поверхности s и ее функции возможны следующие случаи вычисления поверхностного интеграла 1-го рода:

1. Если поверхность s задана явно уравнением $z = z(x; y)$ и однозначно проектируется на область D_{XY} плоскости xOy, то

$$\iint_s f(x; y; z)ds =$$
$$= \iint_{D_{XY}} f\left(x; y; z(x; y)\right)\sqrt{1+(z'_x(x; y))^2+(z'_y(x; y))^2}\,dxdy. \quad (27.2)$$

2. Если поверхность s задана явно уравнением $y = y(x; z)$ и однозначно проектируется на область D_{XZ} плоскости xOz, то

$$\iint_s f(x; y; z)ds =$$
$$= \iint_{D_{XZ}} f\left(x; y(x; z); z\right)\sqrt{1+(y'_x(x; z))^2+(y'_z(x; z))^2}\,dxdz. \quad (27.3)$$

3. Если поверхность s задана явно уравнением $x = x(y; z)$ и однозначно проектируется на область D_{YZ} плоскости yOz, то

$$\iint_s f(x; y; z)ds =$$
$$= \iint_{D_{YZ}} f\left(x(y; z); y; z\right)\sqrt{1+(x'_y(y; z))^2+(x'_z(y; z))^2}\,dydz. \quad (27.4)$$

4. Если поверхность s задана неявно уравнением $F(x; y; z) = 0$, которое определяет единственную функцию $z = j\,(x; y)$, то

$$\iint_s f(x; y; z)ds =$$
$$= \iint_D f(x; y; j\,(x; y))\frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_z|}\,dxdy. \quad (27.5)$$

где D – проекция поверхности s на плоскость xOy, $F'_z(x; y; z) \neq 0$ на всей поверхности s.

Координаты центра масс материальной поверхности s с поверхностной плотностью распределения масс, выражаемой функцией $f(x, y, z)$, находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_s xf(x; y; z)ds, \quad y_0 = \frac{1}{m}\iint_s yf(x; y; z)ds,$$
$$z_0 = \frac{1}{m}\iint_s zf(x; y; z)ds, \quad (27.6)$$

где m – масса поверхности s, рассчитываемая по формуле (27.1).

Пример 1. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода по поверхности s, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iint_s \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,ds$, $s: z = 1-x^2-y^2$, $z = 0$;

2) $\iint_s y(x+z)ds$, $s: y = \sqrt{1-x^2}$, $z = 0$, $z = 1$.

Решение. 1) Определим поверхность s, заключенную между круговым параболоидом $z = 1-x^2-y^2$ и плоскостью xOy (рис. 27.1).

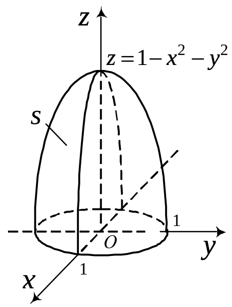


Рис. 27.1

Проекция этой поверхности на плоскость xOy будет представлять собой круг с центром в начале координат радиуса 1, т. е. $D_{XY} = \{(x; y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\}$.

Для вычисления поверхностного интеграла 1-го рода применим формулу (27.2). Вначале найдем элемент площади

$$ds = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy =$$
$$= \sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,dxdy =$$
$$= \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy.$$

Для вычисления поверхностного интеграла подставим полученное выражение в указанную формулу и осуществим переход к двойному интегралу по области D_{XY}. Получим:

$$\iint_s \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,ds = \iint_{D_{XY}} (1+4x^2+4y^2)dxdy.$$

По формулам $x = r\cos j$, $y = r\sin j$ в подынтегральном выражении перейдем к полярным координатам и найдем полученный повторный интеграл:

$$\iint_{D_{XY}} (1+4x^2+4y^2)dxdy = \int_0^{2p} dj \int_0^1 (1+4r^2)r\,dr = \int_0^{2p} dj \int_0^1 (r+4r^3)dr =$$
$$= \int_0^{2p}\left(\frac{r^2}{2}+4\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 dj = \frac{3}{2}\int_0^{2p} dj = \frac{3}{2}j\Bigg|_0^{2p} = \frac{3}{2}\cdot 2p = 3p.$$

2) Поверхность s ограничена частью цилиндрической поверхности $y = \sqrt{1-x^2}$ между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$ (рис. 27.2). Ее проекцией на плоскость xOy будет являться прямоугольник $D_{XZ} = \{(x; z)\,|\,-1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$.

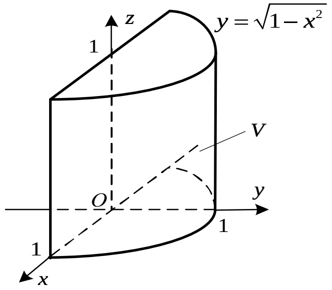


Рис. 27.2

По формуле

$$ds = \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dydz$$

предварительно рассчитаем элемент площади

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dxdz =$$

$$= \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dxdz = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdz.$$

Для вычисления поверхностного интеграла применим формулу (27.3) и учтем, что явное задание поверхности s имеет вид: $y=\sqrt{1-x^2}$. Получим двойной интеграл:

$$\iint_s y(x+z)ds = \iint_{D_{XZ}} \sqrt{1-x^2}\,(x+z)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdz = \iint_{D_{XZ}} (x+z)dxdz.$$

Перейдя к повторному интегралу, вычислим его интеграл:

$$\iint_{D_{XZ}} (x+z)dxdz = \int_{-1}^{1} dx\int_{0}^{1}(x+z)\,dz = \int_{-1}^{1}\left(xz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}(x^2+x)\Bigg|_{-1}^{1} = 1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint_s \sqrt{y^2+z^2}\,ds$, где s – часть поверхности $y^2+z^2-x^2=0$, отсекаемая плоскостями $x=1$ и $x=3$.

Решение. Поверхность s представляет собой часть конуса вдоль оси *Ox*, ограниченную плоскостями $x=1$ и $x=3$ (рис. 27.3).

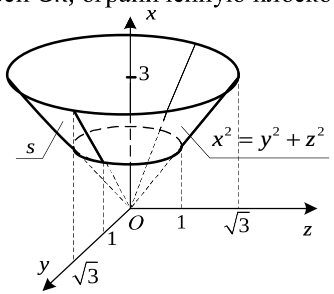


Рис. 27.3

Мы имеем дело с неявным заданием поверхности s уравнением $F(x,\,y,\,z)=y^2+z^2-x^2=0$. Поэтому целесообразно применить формулу, аналогичную соотношению (27.5). Вначале вычислим элемент площади, применив формулу

$$ds = \frac{\sqrt{(F'_y)^2+(F'_z)^2+(F'_x)^2}}{|F'_x|}\,dydz.$$

В нашем случае

$$ds = \frac{\sqrt{(2y)^2+(2z)^2+(-2x)^2}}{2x}\,dydz = \frac{\sqrt{y^2+z^2+x^2}}{x}\,dydz.$$

Так как $x^2=y^2+z^2$, откуда $x=\sqrt{y^2+z^2}$, имеем

$$ds = \frac{\sqrt{2(y^2+z^2)}}{\sqrt{y^2+z^2}}\,dydz = \sqrt{2}\,dydz.$$

Перейдем к двойному интегралу, применив формулу (27.5) и подставив найденный элемент площади:

$$\iint_s \sqrt{y^2+z^2}\,ds = \sqrt{2}\iint_{D_{YZ}} \sqrt{y^2+z^2}\,dydz.$$

Учтем, что проекцией D_{YZ} поверхности s на плоскость *yOz* является кольцо между окружностями $y^2+z^2=1$ и $y^2+z^2=3$. Далее целесообразно перейти к полярным координатам с помощью соотношений $y=r\cos j$, $z=r\sin j$, где $0\le j\le 2p$, $1\le r\le\sqrt{3}$. Получим повторный интеграл и вычислим его:

$$\sqrt{2}\iint_{D_{YZ}} \sqrt{y^2+z^2}\,dydz = \sqrt{2}\int_0^{2p} dj\int_1^{\sqrt{3}} r^2dr = \sqrt{2}\int_0^{2p}\frac{r^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{3}} dj =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)}{3}\int_0^{2p} dj = \frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)}{3}\,j\,\Bigg|_0^{2p} = \frac{2\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)p}{3}.$$

Пример 3. Используя поверхностный интеграл 1-го рода, найти координаты центра масс поверхности s, ограниченной поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и $z=2$, при условии, что поверхностная плотность распределения масс выражается функцией $f(x,\,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Уравнение $z=\sqrt{x^2+y^2}$ задает часть конуса вдоль оси *Oz* при $z\ge 0$, отсекаемую плоскостью $z=2$ (рис. 27.4).

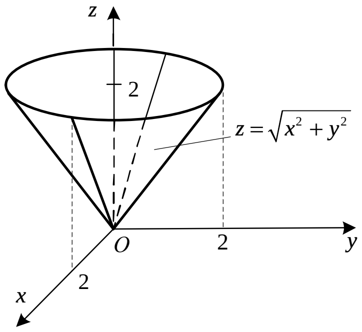
Найдем массу этой части конуса по формуле (27.1):

$$m = \iint_s \sqrt{x^2+y^2}\,ds.$$

Спроектировав ограниченную поверхность конуса на плоскость *xOy*, получим круг $x^2+y^2\le 4$. По формулам $x=r\cos j$, $y=r\sin j$ перейдем к полярным координатам, причем в нашем случае $0\le j\le 2p$, $0\le r\le 2$. Применив формулу $ds=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$, вычислим элемент площади

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy.$$

Поверхностный интеграл 1-го рода вычислим по формуле (27.2):



$$m=\iint_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma = \sqrt{2}\iint_{D_{XY}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^2\,d\rho = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^2 d\varphi = \frac{8\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{8\sqrt{2}}{3}\varphi\bigg|_0^{2\pi} = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Рис. 27.4

Абсциссу, ординату и аппликату центра масс находим по формулам (27.6). Учтем также, что элемент площади $d\sigma=\sqrt{2}dxdy$ в декартовых координатах при переходе к полярным координатам приобретает вид: $d\sigma=\sqrt{2}\rho\,d\varphi\,d\rho$. Получим следующие соотношения:

$$x_0=\frac{3}{16\pi\sqrt{2}}\iint_{\sigma}x\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\iint_{\sigma}x\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\cos\varphi\;\rho^2\,d\rho=\frac{3}{16\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\cos\varphi\;\rho^3\,d\rho=$$

$$=\frac{3}{16\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^2\cos\varphi\,d\varphi=\frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{3}{4\pi}\sin\varphi\bigg|_0^{2\pi}=0;$$

$$y_0=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\iint_{\sigma}y\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\frac{3}{16\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\sin\varphi\;\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{3}{16\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\sin\varphi\;\rho^3\,d\rho=\frac{3}{16\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^2\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi=-\frac{3}{4\pi}\cos\varphi\bigg|_0^{2\pi}=0;$$

$$z_0=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\iint_{\sigma}z\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\iint_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\iint_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma=\frac{3}{16\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^3\,d\rho=\frac{3}{16\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^2 d\varphi=$$

$$=\frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{3}{4\pi}\varphi\bigg|_0^{2\pi}=\frac{3}{2}.$$

Итак, центр масс находится в точке (0; 0; 1,5).

Задания

I уровень

1.1. Вычислите поверхностный интеграл 1-го рода по поверхности, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iint_{\sigma}(3x^2+3y^2+5z^2-2)\,d\sigma$, $\sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $z=1$;

2) $\iint_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, $\sigma: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}$, $z=0$, $z=3$;

3) $\iint_{\sigma}\left(x^2+y^2+z-\frac{1}{2}\right)d\sigma$, $\sigma: 2z=2-x^2-y^2$, $z=0$;

4) $\iint_{\sigma}\sqrt{1+4x^2+4z^2}\,d\sigma$, $\sigma: y=2-x^2-z^2$, $y=0$.

1.2. Найдите массу материальной поверхности σ, ограниченной указанными поверхностями, с поверхностной плотностью $f(x; y; z)$:

1) $\sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $f(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2}$;

2) $\sigma: z=2-\frac{x^2+y^2}{3}$, $z\ge 0$, $f(x;y;z)=1$;

3) $\sigma: x+2y+3z=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $f(x;y;z)=x+18y+24z$.

II уровень

2.1. Вычислите поверхностный интеграл 1-го рода по поверхности, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iint_{\sigma}y(z+x)\,d\sigma$, $\sigma: y=\sqrt{4-z^2}$, $x=0$, $x=2$;

2) $\iint\limits_s (x^2+y^2+z)\,ds$, $s: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$;

3) $\iint\limits_s xyz\,ds$, $s: z=x^2+y^2$, $z=0$, $z=1$;

4) $\iint\limits_s (2x+3y+2z)\,ds$, $s: x+3y+z=3$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

2.2. Найдите массу материальной поверхности s, ограниченной указанными поверхностями, с поверхностной плотностью $f(x; y; z)$:

1) $s: x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$, $f(x;y;z)=z$;

2) $s: x^2+y^2-4z^2=0$, $z=0$, $z=\frac{1}{2}$, $f(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2}$;

3) $s: x^2+y^2=2$, $z=0$, $z=1$, $f(x;y;z)=y^2-1$.

III уровень

3.1. Вычислите поверхностный интеграл 1-го рода по поверхности, ограниченной указанными поверхностями:

1) $\iint\limits_s x^2y^2z\,ds$, $s: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$;

2) $\iint\limits_s (xy+yz+zx)\,ds$, $s: x^2+y^2-z^2=0$, $z=0$, $z=1$;

3) $\iint\limits_s \sqrt{x^2+y^2+z}\,ds$, $s: x^2+y^2=2$, $z=0$, $z=2$;

4) $\iint\limits_s (x^2+y^2-2z)\,ds$, $s: x^2+y^2+z^2=9$, $z\ge 0$.

3.2. Найдите массу материальной поверхности s, ограниченной указанными поверхностями, с поверхностной плотностью $f(x; y; z)$:

1) $s: x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$, $f(x;y;z)=\sqrt[3]{9-x^2-y^2}$;

2) $s: x^2+y^2+z^2=10$, $z\ge 0$, $f(x;y;z)=21x-21y+z$.

3.3. Найдите координаты центра масс однородной материальной поверхности $z=2\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2=4x$.

27.2. Поверхностный интеграл 2-го рода

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задана гладкая двусторонняя поверхность s (т. е. такая поверхность, у которой различают внешнюю и внутреннюю сторону) с единичным вектором нормали $\bar{n}(M)$ для внешней стороны, где $M(x; y; z)$ – произвольная точка поверхности. Такая поверхность называется ***ориентированной***. Допустим, что на этой поверхности s определена вектор-функция

$$\vec{F}(x;y;z)=P(x;y;z)\vec{i}+Q(x;y;z)\vec{j}+R(x;y;z)\vec{k}.$$

Разобьем поверхность s на части $s_1, s_2, ..., s_n$, площади которых будем считать соответственно равными $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$. Внутри каждой элементарной области выберем произвольную точку M_i. Найдем в ней значение вектор-функции $\vec{F}(M_i)$ и вектор нормали $\bar{n}(M_i)$, $i=\overline{1,n}$. Вычислив скалярные произведения $(\bar{F}(M_i), \bar{n}(M_i))$, где $i=\overline{1,n}$, составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{F}(M_i),\bar{n}(M_i)\right)\Delta s_i.$$

Пусть Δ – диаметр разбиения поверхности s. Устремим $n\to\infty$ так, чтобы $\Delta\to 0$. Если существует предел интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения поверхности s, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется ***поверхностным интегралом 2-го рода от функции f(x; y; z) по поверхности s:***

$$\iint\limits_s \left(\bar{F},\bar{n}\right)ds=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{F}(M_i),\bar{n}(M_i)\right)\Delta s_i. \qquad (27.7)$$

Интеграл (27.7) может быть записан также в следующем виде:

$$\iint\limits_s \left(\bar{F},\bar{n}\right)ds=\iint\limits_s (P\cos a+Q\cos b+R\cos g)\,ds,$$

где $P=P(x;y;z)$, $Q=Q(x;y;z)$, $R=R(x;y;z)$ – известные функции;

a, b, g – углы, которые образует единичный вектор нормали $\bar{n}$ с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно.

Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода связаны между собой соотношением

$$\iint\limits_s (\bar F,\bar n)\,ds = \iint\limits_s (P\cos a + Q\cos b + R\cos g)\,ds =$$
$$= \iint\limits_s P(x;\, y;\, z)dydz + Q(x;\, y;\, z)\,dzdx + R(x;\, y;\, z)dxdy. \qquad (27.8)$$

Поверхностный интеграл 2-го рода обладает теми же свойствами, что и поверхностный интеграл 1-го рода (линейность, аддитивность, оценка модуля). Исключением является лишь его зависимость (по знаку) от ориентации поверхности, т. е. от выбора вектора нормали (внешнего или внутреннего).

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению двойного интеграла.

1. Если поверхность s задана явно уравнением $z = z(x;\, y)$, $\bar n$ – ее единичный вектор нормали (внешний), то справедлива формула

$$\iint\limits_s \left(\bar F,\bar n\right) ds = \mathrm{m}\iint\limits_{D_{XY}} \left(P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R \right) dxdy, \qquad (27.9)$$

где $P = P(x;\, y;\, z(x;y))$, $Q = Q(x;\, y;\, z(x;y))$, $R = R(x;\, y;\, z(x;y))$ – известные функции,

D_{XY} – проекция поверхности s на плоскость xOy.

Знак «–» или «+» перед интегралом в формуле (27.9) выбирают в зависимости от того, какой угол g образует вектор $\bar n$ с осью Oz: если $g < \frac{p}{2}$, берут знак «–»; при $g > \frac{p}{2}$ берут «+».

2. Если поверхность s задана неявно уравнением $\Phi(x;\, y;\, z) = 0$, где $\Phi'_z(x;y;z) \neq 0$ на всей поверхности s, то справедлива формула

$$\iint\limits_s (\bar F,\bar n)\,ds = \pm \iint\limits_{D_{XY}} \frac{1}{\left|\Phi'_z\right|} \left(P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + R\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dxdy, \qquad (27.10)$$

где $P = P(x;\, y;\, z)$, $Q = Q(x;\, y;\, z)$, $R = R(x;\, y;\, z)$ – известные функции, в которых учтена зависимость $z = z(x;\, y)$,

D_{XY} – проекция поверхности s на плоскость xOy.

Если вектор $\bar n$ образует угол $g < \frac{p}{2}$ с осью Oz, то в формуле (27.10) перед интегралом выбирают знак «+», если $g > \frac{p}{2}$ – знак «–».

Если s – гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая область $V \subset \mathbf{R}^3$, и в этой области определены функции $P(x;\, y;\, z)$, $Q(x;\, y;\, z)$ и $R(x;\, y;\, z)$, имеющие непрерывные производные, то в случае интегрирования по внешней стороне поверхности s имеет место ***формула Остроградского–Гаусса***

$$\oiint\limits_s Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \qquad (27.11)$$

Пример 1. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода:

1) $\iint\limits_s (y+2z)dxdy$, где s – верхняя часть плоскости $6x+3y+2z-6=0$, расположенная в первом октанте;

2) $\iint\limits_s zdydz - 4ydzdx + 8x^2dxdy$, где s – часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$, нормаль к поверхности – внешняя.

Решение. 1) Изобразим поверхность s и направление нормального вектора $\bar n$ к указанной части поверхности (рис. 27.5). Проекцией плоскости s на координатную плоскость xOy является треугольник $D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2-2x$ (рис. 27.6).

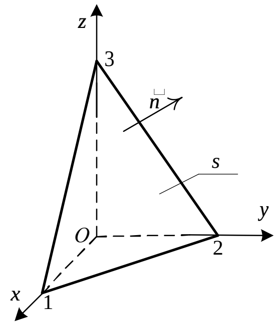


Рис. 27.5

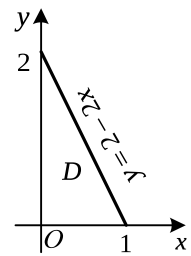


Рис. 27.6

Из уравнения плоскости находим $z = 3 - 3x - \frac{3}{2}y$. Следовательно, поверхность s может быть задана уравнением в явном виде. Так как нормальный вектор $\bar n$ образует с осью Oz острый угол $\left(g < \frac{p}{2} \right)$, то используем формулу (27.9) со знаком «–». Тогда

$$\iint\limits_s (y+2z)dxdy = -\iint\limits_D (-1)(y+2z)dxdy = \iint\limits_D (y+2z)dxdy.$$

Подставляя в последний интеграл вместо z уравнение плоскости $z = 6 - 6x - 3y$, получим двойной интеграл

$$\iint_D (y + 6 - 6x - 3y)dxdy = 2\iint_D (3 - 3x - y)dxdy.$$

Для нахождения значения этого интеграла перейдем к повторному интегралу и вычислим его:

$$2\iint_D (3-3x-y)dxdy = 2\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (3-3x-y)dy = -\int_0^1 (3-3x-y)^2 \Big|_0^{2-2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left((3-3x)^2 - (1-x)^2\right)dx = 8\int_0^1 (1-x)^2 dx = -8\frac{(1-x)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

2) Уравнение $z = x^2 + y^2$ задает в пространстве эллиптический параболоид (рис. 27.7).

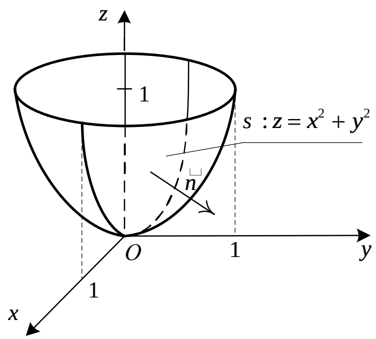


Рис. 27.7

Нормальный вектор $\bar{n}$ образует с осью Oz тупой угол $\left(\gamma > \frac{\pi}{2}\right)$. По условию $P = z$, $Q = -4y$, $R = 8x^2$. В результате сечения поверхности $z = x^2 + y^2$ плоскостью $z = 1$ получаем окружность единичного радиуса. Проекцией поверхности σ на плоскость xOy является круг $D: x^2 + y^2 \le 1$.

Поскольку поверхность σ задана уравнением в явном виде, используем формулу (27.9) со знаком «+» (так как $\gamma > \frac{\pi}{2}$). Тогда

$$\iint_\sigma zdydz - 4ydzdx + 8x^2 dxdy = \iint_D (z \cdot 2x - 4y \cdot 2y - 8x^2)dxdy =$$

$$= \iint_D (2xz - 8y^2 - 8x^2)dxdy.$$

Учитывая, что поверхность σ задана уравнением $z = x^2 + y^2$, и подставив в последний интеграл выражение $z = x^2 + y^2$, получим

$$\iint_D \left(2x(x^2 + y^2) - 8(x^2 + y^2)\right)dxdy = 2\iint_D (x^2 + y^2)(x - 4)dxdy.$$

Осуществим переход к полярным координатам по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, а затем перейдем к повторному интегралу. При этом целесообразно использовать симметрию области D и рассмотреть четвертую часть круга при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Найдем полученный повторный интеграл в полярных координатах:

$$4 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^2 (r\cos\varphi - 4) r\,dr = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (r^4 \cos\varphi - 4r^3)dr =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{r^5}{5}\cos\varphi - 4\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5}\cos\varphi - 1\right)d\varphi =$$

$$= 8\left(\frac{1}{5}\sin\varphi - \varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{5} - 4\pi.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint_\sigma xdydz + ydzdx + 3zdxdy$, где σ – внешняя сторона поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ при условии $0 \le z \le 2$.

Решение. Уравнение конической поверхности может быть записано в неявном виде $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, причем рассматривается ее внешняя часть от плоскости $z = 0$ до плоскости $z = 2$ (рис. 27.8).

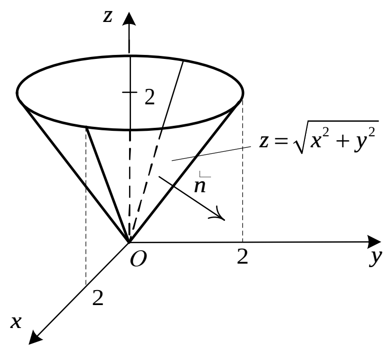


Рис. 27.8

Поверхность σ проектируется на круг $D: x^2 + y^2 \le 4$, лежащий в плоскости xOy. Используем уравнение поверхности σ в неявном виде, т. е. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Тогда $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $F_x' = 2x$, $F_y' = 2y$, $F_z' = -2z$. Учтем, что угол γ между вектором нормали $\bar{n}$ и осью Oz – тупой (т. е. $\gamma > \frac{\pi}{2}$).

Тогда по формуле (27.10) со знаком «–» перед интегралом получаем:

$$\iint_\sigma xdydz + ydzdx + 3zdxdy = -\iint_D \frac{1}{2z}(x \cdot 2x + y \cdot 2y + 3z(-2z))dxdy.$$

Подставив $z^2 = x^2 + y^2$, имеем двойной интеграл:

$$-\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-3(x^2+y^2))dxdy =$$
$$= 2\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам. Учтем, что область D ограничена окружностью $x^2+y^2=4$, и используем симметрию области D. Таким образом, для четвертой части круга $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $\rho = 2$. Последний интеграл сводится вначале к двойному в полярных координатах, а затем – к повторному:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\,\rho\, d\rho =$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{64}{3}\,\frac{\pi}{2} = \frac{32\pi}{3}.$$

Пример 3. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода $\oiint\limits_s (x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$, где s – внешняя сторона поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^3$.

Решение. Воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса (27.11). Учитывая, что $P = x+y$, $Q = y+z$, $R = z+x$, находим:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(x+y)}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(y+z)}{\partial y} = 1,\quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(z+x)}{\partial z} = 1.$$

Так как геометрический смысл тройного интеграла $\iiint\limits_V dxdydz$ состоит в том, что он равен объему шара, т. е. $\iiint\limits_V dxdydz = \frac{4}{3}\pi R^3$, то в нашем случае

$$\oiint\limits_s (x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy = \iiint\limits_V (1+1+1)dxdydz =$$
$$= 3\iiint\limits_V dxdydz = 3\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите поверхностный интеграл 2-го рода:

1) $\iint\limits_s xdydz + ydzdx + zdxdy$, где s – верхняя часть плоскости $x+2y+z-6=0$, расположенная в первом октанте;

2) $\iint\limits_s (x^2+y^2)dxdy$, где s – внешняя сторона поверхности параболоида $z = 9 - x^2 - z^2$, отсекаемая плоскостью $z=0$.

1.2. С помощью формулы Остроградского–Гаусса вычислите поверхностный интеграл:

1) $\oiint\limits_s xdydz + ydzdx + zdxdy$, где s – внешняя сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$;

2) $\oiint\limits_s zdydz + (2y-x)dzdx - zdxdy$, где s – внешняя сторона цилиндра $x^2+y^2=R^2$ с основаниями $z=0$ и $z=H$.

II уровень

2.1. Вычислите поверхностный интеграл 2-го рода:

1) $\iint\limits_s zdxdy$, где s – верхняя часть плоскости $x+y+z-2=0$, расположенная в первом октанте;

2) $\iint\limits_s \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$, где s – внешняя часть поверхности гиперболоида $x^2+y^2=z^2+1$, отсекаемая плоскостями $z=0$, $z=\sqrt{3}$;

3) $\iint\limits_s zdydz - 2ydzdx + 4x^2dxdy$, где s – внешняя часть поверхности $z = x^2+y^2+1$, отсекаемая плоскостью $z=2$;

4) $\iint\limits_s z^2dxdy$, где s – внешняя сторона поверхности эллипсоида $x^2+y^2+4z^2=4$, расположенная в первом октанте.

2.2. С помощью формулы Остроградского–Гаусса вычислите поверхностный интеграл:

1) $\oiint\limits_s (z-x)dydz+(x-y)dzdx+(y-z)dxdy$, где s – внутренняя сторона замкнутой поверхности, образованной конусом $z^2=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1$;

2) $\oiint\limits_s 6xdydz-2ydzdx-zdxdy$, где s – внешняя часть поверхности тела, ограниченной поверхностями $z=3-2(x^2+y^2)$ и $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

III уровень

3.1. Вычислите поверхностный интеграл 2-го рода:

1) $\iint\limits_s yzdydz+zxdzdx+xydxdy$, где s – верхняя часть плоскости $x+y+z-4=0$, расположенная в первом октанте;

2) $\iint\limits_s (x^2+y^2)zdxdy$, где s – внешняя сторона нижней половины сферы $x^2+y^2+z^2=4$;

3) $\iint\limits_s x^2dydz-z^2dzdx+zdxdy$, где s – внешняя часть поверхности параболоида $z=3-x^2-y^2$, отсекаемая плоскостью $z=0$;

4) $\iint\limits_s zxdydz+xydzdx+yzdxdy$, где s – наружная поверхность цилиндра $x^2+y^2=1$, отсекаемая плоскостями $z=0$, $z=2$, $y=0$ $(y\geq 0)$.

3.2. С помощью формулы Остроградского–Гаусса вычислите поверхностный интеграл:

1) $\oiint\limits_s xdydz+z^3dxdy$, где s – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1$;

2) $\oiint\limits_s zdydz+(3y-x)dzdx-zdxdy$, где s – внешняя часть поверхности тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $x^2+y^2=1$, $z=x^2+y^2+2$.

27.3. Элементы теории поля

Если каждой точке $M(x;y;z)\in V\subset \mathbf{R}^3$ поставлена в соответствие некоторая скалярная величина $u=u(M)=f(x;y;z)$, то говорят, что в области V пространства $\mathbf{R}^3$ задано ***скалярное поле*** $u=u(M)$. Если функция $u=u(M)$ не зависит от времени, то скалярное поле называется ***стационарным***; поле, меняющееся с течением времени, – ***нестационарным***. Далее будем рассматривать только стационарные поля.

Скалярное поле можно изображать графически в виде ***поверхностей уровня*** – множества точек $(x;y;z)$, в которых функция принимает постоянное значение $f(x;y;z)=C=\text{const}$. Если заданная функция $u=f(x;y;z)$ является непрерывной и дифференцируемой в области V, то через каждую точку, не являющуюся критической, проходит единственная поверхность уровня.

В случае задания функции двух переменных $z=f(x;y)$, $(x;y)\in D\subset \mathbf{R}^2$ рассматриваемое скалярное поле называется ***плоским***, а множество точек $(x;y)$, в которых $f(x;y)=C$, называется ***линиями уровня***.

Для характеристики скорости изменения поля $u=u(M)$ в заданном направлении вводится такая характеристика, как производная от функции по направлению (см. Математика в примерах и задачах. Ч. 3, с. 266), физический смысл которой состоит в том, что модуль данной производной представляет собой мгновенную скорость изменения функции в направлении дифференцирования в выбранной точке. С физической точки зрения направление наибыстрейшего возрастания функции задает градиент функции (см. там же.).

Если каждой точке $M(x;y;z)\in V\subset \mathbf{R}^3$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\overline{a}=\overline{a}(M)$, то говорят, что в области $V\subset \mathbf{R}^3$ задано ***векторное поле*** $\overline{a}=\overline{a}(M)$. Задание векторного поля $\overline{a}=\overline{a}(M)$ равносильно заданию вектор-функции

$$\overline{a}=\overline{a}(M)=P(x;y;z)\vec{i}+Q(x;y;z)\vec{j}+R(x;y;z)\vec{k}. \quad (27.12)$$

В случае отсутствия одной из переменных x, y, z, или равенства нулю одной из функций $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$, рассматриваемое векторное поле является ***плоским***.

Если в каждой точке области существуют все непрерывные частные производные первого порядка от функций $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$, векторное поле (27.12) называется ***дифференцируемым в области*** V. По аналогии со скалярным полем, если вектор $\overline{a}=\overline{a}(M)$ не зависит от времени, задаваемое им векторное поле называется ***стационарным***; поле, меняющееся с течением времени, – ***нестационарным***.

Геометрическими характеристиками векторного поля $\overline{a}$ являются ***векторные линии***, т. е. линии, касательные к которым в каждой точке имеют направление вектора $\overline{a}(M)$.

Пусть векторное поле образовано вектором (27.12), который будем считать вектором скорости некоторого потока несжимаемой жидкости, движущейся стационарно. Предположим, что в этом потоке находится некоторая поверхность s, пропускающая данную жидкость.

Потоком вектора $\overline{a}$ ***через поверхность*** s называется интеграл по поверхности s от скалярного произведения вектора поля $\overline{a}=(P, Q, R)$ на единичный вектор $\overline{n}=(\cos a,\ \cos b,\ \cos g)$ нормали к поверхности, т. е. поверхностный интеграл 1-го рода

$$K=\iint_s(\overline{a},\overline{n})\,ds=\iint_s(P\cos a+Q\cos b+R\cos g)\,ds\,.$$

С учетом формулы (27.8) при вычислении потока вектора через поверхность s можно легко перейти к поверхностному интегралу 2-го рода

$$K=\iint_s Pdydz+Qdxdz+Rdxdy. \qquad (27.13)$$

С физической точки зрения поток вектора $\overline{a}$ представляет собой скалярную величину, численно равную объему несжимаемой жидкости, протекающей через поверхность s за единицу времени.

Если поверхность s является замкнутой и ограничивает некоторый объем V, поток вектора записывают в виде

$$K=\oiint_s(\overline{a},\overline{n})\,ds\,,$$

причем за направление вектора $\overline{n}$ принято брать направление внешней нормали, тогда поток считается идущим изнутри поверхности s. В этом случае величина потока K через замкнутую поверхность выражает разность между количеством жидкости,

вытекающей из области объема V и втекающей в нее за единицу времени. При этом, если $K>0$, из области V вытекает больше жидкости, чем в нее втекает, т. е. внутри области имеются дополнительные источники. При $K<0$ внутри области V имеются стоки, поглощающие избыток жидкости. Значение потока $K=0$ свидетельствует о том, что из области V вытекает столько же жидкости, сколько и втекает в нее за единицу времени, т. е. внутри рассматриваемой области либо нет источников и стоков, либо их действие взаимно компенсируется.

Для описания распределения и интенсивности источников и стоков векторного поля применяют такую характеристику, как дивергенция. ***Дивергенцией векторного поля*** $\overline{a}(M)$ в точке $M(x; y; z)$ называется предел отношения потока поля через замкнутую поверхность s, окружающую точку M, к объему V тела, ограниченного этой поверхностью, при стремлении диаметра этого тела Δ к нулю:

$$div\,\overline{a}(M)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\oiint_s(\overline{a},\overline{n})\,ds}{V}.$$

Если векторное поле $\overline{a}=\overline{a}(M)$ дифференцируемо в области V, то в любой точке $M(x; y; z)$ существует дивергенция поля, причем

$$div\,\overline{a}(M)=\frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}. \qquad (27.14)$$

Физический смысл дивергенции состоит в том, что абсолютная величина $|div\,\overline{a}(M)|$ выражает интенсивность источника или стока в токе M. По знаку дивергенции можно судить о наличии источника или стока векторного поля в рассматриваемой точке M: если $div\,\overline{a}(M)>0$, то в точке M находится источник; если $div\,\overline{a}(M)<0$, в точке M – сток; при $div\,\overline{a}(M)=0$ источников и стоков в точке M нет.

Свойства дивергенции:

1) если $\overline{a}=\text{const}$, то $div\,\overline{a}=0$;

2) $div\,(C\overline{a})=Cdiv\,\overline{a}$, где $C=\text{const}$;

3) $div\,(\overline{a}+\overline{b})=div\,\overline{a}+div\,\overline{b}$;

4) если u является скалярной функцией, то $div(u\cdot\overline{a})=u\cdot div\,\overline{a}+\overline{a}\cdot grad\,u$.

Формулу Остроградского–Гаусса (27.11) можно записать в векторном виде

$$\oiint_s (\overline{a}, \overline{n})\, ds = \iiint_V div\, \overline{a} dv.$$

Пусть в области $V \subset \mathbf{R}^3$ задано векторное поле (27.12) и гладкая поверхность s с границей L, причем функции $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$ являются непрерывно дифференцируемыми, а обход контура – положительным.

Циркуляцией векторного поля $\overline{a}$ вдоль контура L называется криволинейный интеграл

$$C = \oint_L (\overline{a}, \overline{t})\, dl = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz, \qquad (27.15)$$

где $\overline{t}$ – единичный вектор, направленный по касательной к кривой L в направлении ее обхода.

Физический смысл циркуляции состоит в том, что если замкнутая кривая L расположена в силовом поле $\overline{F}(M)$, то циркуляция равна работе силы $\overline{F}(P, Q, R)$ при перемещении материальной точки вдоль L (см. формулу (26.14)).

Ротором векторного поля $\overline{a}(M)$ в точке $M(x; y; z)$ называется предел отношения при стягивании контура L в точку M:

$$rot\, \overline{a}(M) = \lim_{S \to 0} \frac{\oiint_s [\overline{n}, \overline{a}]\, ds}{V} =$$
$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}, \qquad (27.16)$$

где $\overline{n}$ – вектор нормали к замкнутой поверхности s в точке M,
V – объем области,
S – площадь поверхности интегрирования.

Свойства ротора:

1) если $\overline{a} = \text{const}$, то $rot\, \overline{a} = \vec{0}$;

2) если $\overline{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то $div(rot\, \overline{a}) = 0$;

3) $rot\,(a \cdot \overline{a} + b \cdot \overline{b}) = a \cdot rot\, \overline{a} + b \cdot rot\, \overline{b}$, где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$;

4) если u представляет собой скалярную функцию, то $rot\,(u \cdot \overline{a}) = u \cdot rot\, \overline{a} + grad\, u \times \overline{a}$.

Формулу (27.16) можно записать в символической форме:

$$rot\, \overline{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (27.17)$$

С физической точки зрения направление ротора – это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшую плотность по сравнению с циркуляцией вокруг любого направления, не совпадающего с нормалью к поверхности s.

Имеет место соотношение

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$= \iint_s (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dxdz + (Q'_x - P'_y)dxdy,$$

называемое ***формулой Стокса***. Эта формула может быть записана в векторном виде

$$C = \oint_L (\overline{a}, \overline{t})dl = \iint_s ((rot\, \overline{a}), \overline{n})ds\,, \qquad (27.18)$$

где левая часть соотношения представляет собой циркуляцию вектора $\overline{a}$ по контуру L, а правая часть – поток вектора $rot\, \overline{a}$ через поверхность s, ограниченную контуром L. Таким образом, формула Стокса (27.18) показывает, что циркуляция вектора $\overline{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора $\overline{a}$ через поверхность, лежащую в этом векторном поле и ограниченную контуром L.

Векторное поле, в каждой точке $M \in V \subset \mathbf{R}^3$ которого дивергенция поля равна нулю, т. е. $div\, \overline{a}(M) \equiv 0$, называется ***соленоидальным*** в области V. Для соленоидального поля в области V характерно следующее:

- нет источников и стоков;
- для любой замкнутой поверхности $s \subset V$ поток векторного поля через поверхность s равен нулю;
- векторные линии поля являются замкнутыми или имеют концы на границе области V.

Если в каждой точке векторного поля $\overline{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$ выполняется соотношение $rot\, \overline{a}(M) = \vec{0}$, векторное поле называется ***потенциальным*** в области V задания поля.

Согласно определению ротора (27.16), необходимым и достаточным условием потенциальности поля является справедливость равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}. \end{cases} \qquad (27.19)$$

Для того чтобы поле $\overline{a}(M)$ было потенциальным в области V, необходимо и достаточно, чтобы существовала дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция $u(M) = u(x;\, y;\, z)$, такая, что $\overline{a} = \overrightarrow{grad}\, u(M)$. Функция $u(M)$ при этом называется ***потенциалом поля*** $\overline{a}(M)$.

При выполнении условий (27.19) криволинейный интеграл 2-го рода не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки M_0 и M. Поэтому для нахождения потенциала векторного поля $\overline{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ применяют формулу

$$u(x,\, y,\, z) = \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy + Rdz,$$

где $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0) \in V$ – некоторая фиксированная точка,

$M(x;\, y;\, z) \in V$ – произвольная точка,

C – произвольная постоянная.

Векторное поле $\overline{a}(M)$ называется ***гармоническим***, если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} div\, \overline{a}(M) = 0, \\ rot\, \overline{a}(M) = \overline{0}. \end{cases}$$

Потенциал $u(M)$ гармонического поля является решением уравнения Лапласа

$$\Delta u(M) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (27.20)$$

Функция $u(M) = u(x;\, y;\, z)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа (27.20), называется ***гармонической***.

Пример 1. Найти поток векторного поля $\overline{a}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ через верхнюю сторону части поверхности $z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$.

Решение. Нахождение потока векторного поля сводится к вычислению поверхностного интеграла 2-го рода по формуле (27.13):

$$K = \iint\limits_{s} xdydz + ydxdz - zdxdy.$$

Спроектировав поверхность параболоида $z = 2 - x^2 - y^2$ на плоскость xOy, сведем вычисление поверхностного интеграла к нахождению двойного интеграла по области D_{XY}, представляющей собой круг $x^2 + y^2 \le 2$. Применив формулу (27.9), получим:

$$K = \iint\limits_{s} xdydz + ydxdz - zdxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{XY}} (x(-2x) + y(-2y) - z(-1))dxdy = \iint\limits_{D_{XY}} (-2x^2 - 2y^2 + z)dxdy.$$

После подстановки в подынтегральное выражение $z = 2 - x^2 - y^2$ имеем интеграл $\iint\limits_{D_{XY}} (2 - 3(x^2 + y^2))dxdy$, который вычислим, перейдя к полярным координатам $x = r\cos j$, $y = \sin j$ и с учетом того, что в повторном интеграле $0 \le j \le 2p$, $0 \le r \le \sqrt{2}$:

$$K = \iint (2 - 3(x^2 + y^2))dxdy = \int\limits_0^{2p} df \int\limits_0^{\sqrt{2}} (2 - 3r^2)r\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^{\sqrt{2}} (2r - 3r^3)\,dr = \int\limits_0^{2p} \left(r^2 - \frac{3r^4}{4} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} dj = -\int\limits_0^{2p} dj = -j \Big|_0^{2p} = -2p.$$

Пример 2. Вычислить дивергенцию векторного поля $\overline{a}(M) = (xy + z^2)\vec{i} + (yz + x^2)\vec{j} + (zx + y^2)\vec{k}$ в точке $M_0(1;\, 3;\, -5)$.

Решение. По условию $P = xy + z^2$, $Q = yz + x^2$, $R = zx + y^2$. Согласно формуле (27.14), имеем:

$$div\, \overline{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (xy + z^2)'_x + (yz + x^2)'_y + (zx + y^2)'_z =$$

$$= y + z + x.$$

В точке $M_0(1;\, 3;\, -5)$ имеем:

$div\,\bar a(M_0)=3-5+1=-1.$

Так как $div\,\bar a(M_0)<0,$ то точка M_0 является стоком поля.

Пример 3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar a(M)=-x^2y\vec i+4\vec j+x^2z\vec k$ вдоль замкнутого контура L: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=4$, если $0\le t\le 2\pi$.

Решение. Циркуляция векторного поля находится с помощью криволинейного интеграла 2-го рода по формуле (27.15), причем вычисление криволинейного интеграла 2-го рода производится с помощью соотношения (26.9), так как мы имеем дело с параметрическим заданием пространственной кривой. В нашем случае получим:

$$C=\oint_L(-x^2y)dx+4dy+x^2zdz=$$

$$=\int_0^{2\pi}(-4\cos^2 t\,2\sin t\,(-2\sin t)+4(2\cos t)+(4\cos^2 t)4\cdot 0)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(16\cos^2 t\,\sin^2 t+8\cos t)\,dt=\int_0^{2\pi}(4\sin^2 2t+8\cos t)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(2(1-\cos 4t)+8\cos t)dt=\left(2t-\frac{1}{2}\sin 4t+8\sin t\right)\Big|_0^{2\pi}=4\pi.$$

Пример 4. Найти ротор векторного поля $\bar a(M)=xy^2\vec i+yz^2\vec j-x^2\vec k$ в точке $M_0(1;-2;0)$.

Решение. По условию $P=xy^2$, $Q=yz^2$, $R=-x^2$. Согласно формуле (27.17), имеем:

$$rot\,\bar a(M)=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy^2 & yz^2 & -x^2\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(-x^2)}{\partial y}-\frac{\partial(yz^2)}{\partial z}\right)\vec i-$$

$$-\left(\frac{\partial(-x^2)}{\partial x}-\frac{\partial(xy^2)}{\partial z}\right)\vec j+\left(\frac{\partial(yz^2)}{\partial x}-\frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\right)\vec k=-2yz\vec i+2x\vec j-2xy\vec k.$$

В точке $M_0(1;-2;0)$ имеем:

$$rot\,\bar a(M_0)=-2\cdot(-2)\cdot 0\cdot\vec i+2\cdot 1\cdot\vec j-2\cdot 1\cdot(-2)\cdot\vec k=2\vec j-4\vec k.$$

Пример 5. С помощью формулы Стокса вычислить циркуляцию векторного поля $\bar a(M)=(x+z)\vec i+2y\vec j+(x+y-z)\vec k$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $\Pi: x+2y+z-2=0$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\bar n=(1,2,1)$ этой плоскости.

Решение. В результате пересечения плоскости с координатными плоскостями получим треугольник *ABC*. Укажем на нем положительное направление обхода контура *ABC* согласно условию задачи (рис. 27.9).

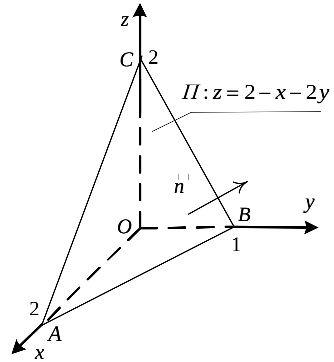


Рис. 27.9

Так как данный треугольник *ABC* лежит в плоскости Π, то в качестве поверхности σ возьмем часть этой плоскости, ограниченную указанным контуром.

Найдем ротор векторного поля $\bar a(M)=(x+z)\vec i+2y\vec j+(x+y-z)\vec k$. В нашем случае $P=x+z$, $Q=2y$, $R=x+y-z$. По формуле (27.17) находим:

$$rot\,\bar a(M)=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+z & 2y & x+y-z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial(x+y-z)}{\partial y}-\frac{\partial(2y)}{\partial z}\right)\vec i-\left(\frac{\partial(x+y-z)}{\partial x}-\frac{\partial(x+z)}{\partial z}\right)\vec j+$$

$$+\left(\frac{\partial(2y)}{\partial x}-\frac{\partial(x+z)}{\partial y}\right)\vec k=\vec i.$$

Согласно формуле Стокса (27.18),

$$C=\iint_\sigma\left((rot\,\bar a),\bar n\right)d\sigma=\iint_\sigma dydz.$$

Из уравнения плоскости Π находим $z=2-x-2y$. Поскольку поверхность σ задана уравнением в явном виде, а нормальный вектор $\bar n$ образует с осью *Oz* острый угол $(\gamma<\frac{\pi}{2})$, то для вычисления последнего интеграла используем формулу (27.9) со знаком «–». Тогда

$$\iint_\sigma dydz=-\iint_{D_{XY}}(-1)dxdy=\iint_{D_{XY}}dxdy=S_{D_{XY}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1,$$

где $S_{D_{XY}}$ – площадь треугольника *AOB*.

Задания

I уровень

1.1. Вычислите поток векторного поля $\overline{a}(M)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ через верхнюю часть плоскости $4x+y+2z-2=0$, расположенную в первом октанте.

1.2. Вычислите дивергенцию векторного поля $\overline{a}(M)=x\vec{i}-y\vec{j}+z^2\vec{k}$ в точке $M_0(-1;-2;1)$.

1.3. Найдите ротор векторного поля $\overline{a}(M)=z^2\vec{i}-xz\vec{j}+z^2\vec{k}$ в точке $M_0(1;-2;1)$.

1.4. Вычислите циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=-y\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$ вдоль замкнутого контура $\Gamma: z=x^2+y^2$, $z=1$ при положительном направлении обхода относительно орта $\vec{k}(0;0;1)$ двумя способами: 1) непосредственно; 2) с помощью формулы Стокса.

1.5. Выясните, является ли векторное поле $\overline{a}$ соленоидальным:
1) $\overline{a}(M)=x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}+2xyz\vec{k}$;
2) $\overline{a}(M)=(x^2-z^2)\vec{i}-3xy\vec{j}+(y^2+z^2)\vec{k}$.

1.6. Выясните, является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+x)\vec{k}$ потенциальным.

1.7. Выясните, является ли векторное поле гармоническим:
1) $\overline{a}(M)=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$; 2) $\overline{a}(M)=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

II уровень

2.1. Вычислите поток векторного поля $\overline{a}(M)=x^2\vec{i}+xy\vec{j}+x\vec{k}$ через внешнюю сторону части параболоида $z=x^2+y^2$, ограниченного плоскостью $z=1$ $(x\ge 0)$.

2.2. Вычислите поток векторного поля $\overline{a}(M)=2x\vec{i}+2y\vec{j}-z\vec{k}$ через замкнутую поверхность s, ограниченную поверхностями $z^2=x^2+y^2$, $z=H$ $(H>0)$.

2.3. Найдите $div(grad\,u)$, если:
1) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$; 2) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2.4. Вычислите циркуляцию векторного поля $\overline{a}$ вдоль указанного замкнутого контура Г:
1) $\overline{a}(M)=y\vec{i}+x^2\vec{j}-z\vec{k}$, где Г – линия пересечения цилиндра $x^2+y^2=4$ и плоскости $z=3$ в положительном направлении обхода относительно единичного вектора $\vec{k}(0;0;1)$;
2) $\overline{a}(M)=-y\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, где Г – линия пересечения конуса $x^2+y^2-z^2=0$ и плоскости $z=1$ в положительном направлении обхода относительно единичного вектора $\vec{k}(0;0;1)$.

2.5. Докажите с помощью формулы Стокса, что $\oint\limits_{\Gamma} yzdx+xzdy+xydz=0$, где Г – любой замкнутый контур. Результат проверьте путем вычисления интеграла по контуру треугольника *ABC* с вершинами *A*(0; 0; 0), *B*(1; 1; 0) и *C*(1; 1; 1).

2.6. Вычислите $\Delta u(M)$ в точке $M_0(-1;-1;-1)$, если $u=\sin^2(2x-3y+z)-2x^2+y^2+z^2$.

131 $+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ потенциальным. Найдите его потенциал и вычислите соответствующий криволинейный интеграл 2-го рода по линии, соединяющей точки $M_0(1;1;1)$ и $M(2;3;2)$.

III уровень

3.1. Вычислите поток векторного поля $\overline{a}(M)=2x\vec{i}+y\vec{j}+3z\vec{k}$ через часть поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.

3.2. Вычислите поток векторного поля $\overline{a}(M)=xz^2\vec{i}+yx^2\vec{j}+zy^2\vec{k}$ через поверхность шара $x^2+y^2+z^2=4$ во внешнюю его сторону.

3.3. С помощью формулы Стокса вычислите интеграл

$\oint\limits_{\Gamma}(z^2 - x^2)dx + (x^2 - y^2)dy + (y^2 - z^2)dz = 0,$ где Γ – пробегаемая в положительном направлении линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ и конуса $x^2 + y^2 = z^2$ при $z > 0$.

3.4. Вычислите циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = zy^2\vec{i} +$ $+xz^2\vec{j} + yx^2\vec{k}$ вдоль линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскости $x + y + z = R$ в положительном направлении обхода относительно вектора $\overline{n}(1; 1; 1)$.

3.5. Выясните, является ли векторное поле $\overline{a}(M) = yz\cos(xy)\vec{i} +$ $\overline{a}(M) = yz\cos(xy)\vec{i} + xz\cos(xy)\vec{j} + \sin(xy)\vec{k}$ потенциальным и найдите его потенциал $u(M)$.

3.6. Выясните, является ли гармоническим векторное поле $\overline{a}(M) = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}.$

28. РЯДЫ

28.1. Числовые ряды. Знакоположительные ряды

Понятие числового ряда

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (28.1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – последовательность чисел, $a_n \in \mathbf{R}$ ($a_n \in \mathbf{C}$), $n \in \mathbf{N}$, a_n – n-й член ряда. Аналитическое выражение n-го члена в виде формулы называется ***общим членом ряда***.

Ряд (28.1) называется ***знакопостоянным***, если все его члены имеют одинаковый знак; ***знакопеременным*** – если члены ряда имеют различные знаки; ***знакоположительным*** – если все члены ряда положительны.

Сумма первых n членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (28.2)$$

называется его ***n-й частичной суммой***.

Ряд называется ***сходящимся***, если последовательность (S_n) его частичных сумм имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Значение S называется ***суммой ряда***, что записывают

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если для последовательности (S_n) предел при $n \to \infty$ не существует или он бесконечно большой, то ряд (28.1) называется ***расходящимся***. Расходящийся ряд суммы не имеет.

Ряд

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \qquad (28.3)$$

который получается из исходного (28.1) отбрасыванием первых n последовательных членов, называется ***n-м остатком ряда***.

Если ряд сходится (расходится), то и любой его остаток сходится (расходится).

Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к суммам S_1, S_2 соответственно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n)$ сходится к сумме $c_1 S_1 + c_2 S_2$, где c_1, $c_2 \in \mathbf{R}$.

Необходимое условие сходимости. Если ряд (28.1) сходится, то его общий член стремится к нулю при неограниченном возрастании n:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

С л е д с т в и е. Если общий член ряда не стремится к нулю при неограниченном возрастании n, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Исследование ряда на сходимость целесообразно начинать с необходимого условия сходимости. В случае его выполнения исследование продолжается с помощью достаточных признаков сходимости.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Признак сравнения. Пусть заданы два знакоположительных ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (28.4)$$

и

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad (28.5)$$

для которых, начиная с некоторого n ($n \in \mathbf{N}$), выполняется условие

$$a_n \le b_n. \qquad (28.6)$$

Тогда:

1) из сходимости ряда (28.5) следует сходимость ряда (28.4);

2) из расходимости ряда (28.4) следует расходимость ряда (28.5).

Если выполняется условие (28.6), то ряд (28.5) называется ***мажорантой*** для ряда (28.4).

Предельный признак сравнения. Если для знакоположительных рядов (28.4) и (28.5) существует конечный, отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=C$, то эти ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, то из сходимости ряда (28.5) следует сходимость ряда (28.4).

Сравнение исследуемых рядов производится обычно с рядом, представляющим *сумму членов геометрической прогрессии*

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}q^n,$$

который при $|q|<1$ сходится, а при $|q|\geq 1$ расходится, а также *рядом Дирихле*

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},$$

который при $p>1$ сходится, а при $p\leq 1$ расходится. В частном случае при $p=1$ получается *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

который расходится.

Признак Д'Аламбера. Если для знакоположительного ряда (28.4), начиная с некоторого номера n $(n\in\mathbf{N})$, справедлива оценка

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1,\quad q\in\mathbf{R},$$

то ряд (28.4) сходится, если же справедливо условие

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1,$$

то ряд расходится.

Предельный признак Д'Аламбера. Пусть для знакоположительного ряда (28.4) существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=C. \qquad (28.7)$$

Тогда:

1) при $C<1$ ряд сходится;

2) при $C>1$ ряд расходится.

Признак Коши. Если для знакоположительного ряда (28.4), начиная с некоторого номера n $(n\in\mathbf{N})$, справедлива оценка

$$\sqrt[n]{a_n}\leq q<1,$$

то ряд сходится, если же выполняется условие

$$\sqrt[n]{a_n}\geq 1,$$

то ряд расходится.

Предельный признак Коши. Пусть для знакоположительного ряда (28.4) существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=C. \qquad (28.8)$$

Тогда:

1) при $C<1$ ряд сходится;

2) при $C>1$ ряд расходится.

При использовании предельного признака Коши полезна формула

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

При $C=1$ предельные признаки Д'Аламбера и Коши не дают ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда. В этом случае сходимость ряда исследуют по другим признакам.

Интегральный критерий сходимости. Ряд с положительными монотонно убывающими членами $a_n=f(n)$ сходится (расходится) тогда и только тогда, когда несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}f(x)\,dx$ сходится (расходится), где $f(x)$ – непрерывная убывающая функция.

С л е д с т в и е. Если члены сходящегося знакоположительного ряда (28.4) монотонно убывают, то для n-го остатка R_n ряда справедлива оценка:

$$\int\limits_{n+1}^{\infty}f(x)dx\leq R_n\leq\int\limits_{n+1}^{\infty}f(x)dx+a_{n+1}.$$

Пример 1. Исследовать сходимость ряда и в случае сходимости, найти его сумму:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Решение. 1) Разложим общий член ряда на простые дроби и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}.$$

Числители в левой и правой частях полученного выражения будут тождественно равны. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n в обеих частях числителей тождества, получим систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} n^1 & A+B=0, \\ n^0 & A=1 \end{array}\Bigg\},$$

решение которой: $A=1,\ B=-1$.

Тогда $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Запишем n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Так как $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$

то данный ряд сходится к сумме $S=1$.

2) Разложим общий член ряда на простые дроби и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{4}{4n^2+4n-3}=\frac{4}{(2n-3)(2n+1)}=\frac{A}{2n-3}+\frac{B}{2n+1}=$$
$$=\frac{A(2n+1)+B(2n-3)}{(2n-3)(2n+1)}=\frac{(2A+2B)n+A-3B}{(2n-3)(2n+1)}.$$

Числители в левой и правой частях полученного выражения будут тождественно равны. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n в обеих частях числителей тождества, получим систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} n^1 & 2A+2B=0, \\ n^0 & A-3B=4 \end{array}\Bigg\},$$

решение которой: $A = 1$, $B = -1$.

Тогда $\frac{4}{4n^2+4n-3}=\frac{A}{2n-3}+\frac{B}{2n+1}=\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+1}$.

Выпишем n первых членов ряда:

$$a_2=1-\frac{1}{5},$$
$$a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{7},$$
$$a_4=\frac{1}{5}-\frac{1}{9},$$
$$a_5=\frac{1}{7}-\frac{1}{11},$$
$$a_6=\frac{1}{9}-\frac{1}{13},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_{n-3}=\frac{1}{2n-9}-\frac{1}{2n-5},$$
$$a_{n-2}=\frac{1}{2n-7}-\frac{1}{2n-3},$$
$$a_{n-1}=\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n-1},$$
$$a_n=\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+1}.$$

Сложив записанные члены ряда, получим:

$$S_n=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}.$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{4}{3}.$$

Данный ряд сходится к сумме $S=\frac{4}{3}$.

3) Данный ряд представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\ldots+\frac{1}{9^n}+\ldots$ со знаменателем $q=\frac{1}{9}<1$. Известно, что бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с первым членом b_1 и знаменателем q имеет конечную сумму, которую вычисляем по формуле

$$S=\frac{b_1}{1-q}.$$

Значит, $S=\dfrac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{1}{8}.$

Данный ряд сходится к сумме $S=\dfrac{1}{8}.$

4) Преобразуем общий член ряда:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n.$$

Запишем n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n=\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\ldots+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n+1))=\infty,$

то данный ряд суммы не имеет и является расходящимся.

Пример 2. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2-5}{5n^2+n-7};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lg\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right).$

В случае его выполнения продолжить исследование на сходимость.

Решение. Найдем предел общего члена ряда при неограниченном увеличении его номера n:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-5}{5n^2+n-7}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{5}{n^2}}{5+\frac{1}{n}-\frac{7}{n^2}}=\dfrac{1}{5}\neq 0;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\lg\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)=\lg\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)=\lg 1=0.$

Первый ряд расходится, поскольку для него не выполняется необходимый признак сходимости. Для второго ряда необходимый признак сходимости выполняется, поэтому ряд может сходиться, а может и расходиться. Для установления сходимости оценим его n-ю частичную сумму:

$$a_n=\lg\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\lg\left(\frac{n+2}{n+1}\right)=\lg(n+2)-\lg(n+1);$$

$a_1=\lg 3-\lg 2;$

$a_2=\lg 4-\lg 3;$

$a_3=\lg 5-\lg 4;$

..............................;

$a_{n-1}=\lg(n+1)-\lg n;$

$a_n=\lg(n+2)-\lg(n+1);$

$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=-\lg 2+\lg(n+2).$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\lg 2+\lg(n+2)\right)=\infty.$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty,$ то второй ряд также расходится.

Пример 3. Исследовать по признакам сравнения сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n}{(9n+1)11^n};$ 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{3n^4-n+5};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n+n}.$

Решение. 1) Сравним заданный ряд со сходящейся геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{11^n},$ где $q=\dfrac{1}{11}<1.$ Замечаем, что каждый член $a_n=\dfrac{7n}{(9n+1)11^n}$ данного ряда меньше соответствующего члена $b_n=\dfrac{1}{11^n}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поэтому, согласно признаку сравнения, заданный ряд сходится.

2) Сравним заданный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n},$ где $p=1.$ Замечаем, что каждый член $a_n=\dfrac{1}{\ln n}$ заданного ряда больше соответствующего члена $b_n=\dfrac{1}{n}$ расходящегося гармонического ряда. Поэтому, согласно признаку сравнения, заданный ряд расходится.

3) Сравнив заданный ряд со сходящимся рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2},$ где $p=2>1,$ по предельному признаку сравнения, имеем:

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)/(3n^4-n+5)}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2+1)}{3n^4-n+5}=\frac{1}{3}.$$

Получен конечный, отличный от нуля предел. Сравниваемые ряды ведут себя одинаково. Поэтому, согласно предельному признаку сравнения, заданный ряд сходится.

4) Воспользуемся предельным признаком сравнения с гармоническим рядом:

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(\ln n+n)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\ln n}{n}+1}=1.$$

Получен конечный, отличный от нуля предел. Сравниваемые ряды ведут себя одинаково. Поэтому, согласно предельному признаку сравнения, заданный ряд расходится.

Пример 4. Исследовать по признаку Д'Аламбера сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{7^{n+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!}$.

Решение. Используем предельный признак Д'Аламбера. Заменяем в заданной формуле общего члена ряда $a_n=f(n)$ номер n на $n+1$ и получаем формулу следующего члена ряда $a_{n+1}=f(n+1)$. Затем находим предел отношения последующего члена ряда a_{n+1} к предыдущему a_n при неограниченном увеличении номера n:

1) $a_n=\frac{n^3}{7^{n+1}}$; $a_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{7^{n+2}}$;

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 7^{n+1}}{7^{n+2}n^3}=\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=$$

$$=\frac{1}{7}(1+0)^3=\frac{1}{7}<1.$$

Согласно предельному признаку Д'Аламбера, заданный ряд сходится.

2) Поскольку $a_n=\frac{(2n)!}{3^n(n+1)}$ и $a_{n+1}=\frac{(2n+2)!}{3^{n+1}(n+2)}$, то

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!3^n(n+1)}{3^{n+1}(n+2)(2n)!}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)(n+1)}{(n+2)}=$$

$$=+\infty>1.$$

Согласно предельному признаку Д'Аламбера, заданный ряд расходится.

3) По условию $a_n=\frac{2^n}{(2n+1)!}$ и $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}$. Поэтому

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!\,2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0<1.$$

Согласно предельному признаку Д'Аламбера, заданный ряд сходится.

Пример 5. Исследовать по признаку Коши сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n(n^2+1)$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение. 1) Используем предельный признак Коши.

По условию $a_n=\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$. Поэтому

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}=\frac{2}{3}<1.$$

Согласно предельному признаку Коши, заданный ряд сходится.

2) Поскольку $a_n=\ln^n(n^2+1)$, то

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^n(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\ln(n^2+1)=+\infty>1.$$

Согласно предельному признаку Коши, заданный ряд расходится.

3) Используя то, что $a_n=\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, вычисляем:

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{-n}{n+1}}=\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}<1.$$

Согласно предельному признаку Коши, заданный ряд сходится.

Пример 6. Исследовать по интегральному критерию сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\ln n}{n(\ln^2 n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14n+1}{7n^2+n-1}$.

Решение. 1) Заменяем в заданной формуле общего члена ряда a_n номер n на переменную x. Получаем $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, где $x\in[2;+\infty)$.

Убеждаемся, что полученная функция $f(x)$ *является непрерывной и убывающей на бесконечном интервале изменения* x. Затем исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$:

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\ln\ln x\Big|_2^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln\ln b-\ln\ln 2)=+\infty.$$

Поскольку интеграл расходится, то, согласно интегральному критерию, заданный ряд также расходится.

2) Изучим сходимость соответствующего несобственного интеграла:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{2\ln x}{x(\ln^2 x+1)^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{2\ln x}{x(\ln^2 x+1)^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{d(\ln^2 x+1)}{(\ln^2 x+1)^2}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln^2 x+1}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln^2 b+1}+\frac{1}{\ln^2 1+1}\right)=0+1=1.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а следовательно, сходится и заданный ряд.

3) Исследуем на сходимость соответствующий несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{14x+1}{7x^2+x-1}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{14x+1}{7x^2+x-1}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{d(7x^2+x-1)}{7x^2+x-1}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\ln(7x^2+x-1)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln(7b^2+b-1)-\ln 7)=\ln(+\infty)-\ln 7=+\infty.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, а следовательно, расходится и заданный ряд.

Пример 7. Вычислить приближенное значение суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ с точностью до 0,1.

Решение. Воспользуемся оценкой остатка ряда:

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx\le R_n\le\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx+a_{n+1},$$

$$R_n\ge\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{n+1}^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{n+1}^b=\frac{1}{n+1}.$$

$$R_n\le\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx+a_{n+1}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{n+1}^{b}\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Чтобы обеспечить точность в 0,1, нужно взять 10 членов ряда, так как $\frac{1}{11}\le R_n\le\frac{1}{11}+\frac{1}{11^2}=\frac{12}{11^2}<\frac{1}{10}$.

Получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\approx 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\frac{1}{81}+\frac{1}{100}\approx 1{,}6.$$

Задания

I уровень

1.1. Напишите пять первых членов ряда, и проверьте, выполняется ли для него необходимый признак сходимости:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n-1}{n(2n-3)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n}{\sqrt{3n^2+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{2}{n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+(n+1)!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{2^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n-1}(2n-1)!}$.

1.2. Исследуйте сходимость ряда по признакам сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 11^n}$; 2) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n-3}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+2}$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{5n-7}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{5n^4+2}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+8)^3}$.

1.3. Исследуйте сходимость ряда по признаку Д’Аламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n/2}}{\sqrt{n+3}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(n+1)!}{(n+5)\cdot 3^{2n-1}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{3n}}{(3n)!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{7n-1}}{5^{5n-2}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{(4n-1)!}$.

1.4. Исследуйте сходимость ряда по признаку Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{11n-3}\right)^{n}$; 2) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n-3}\right)^{n}$; 3) $\sum\limits_{n=8}^{\infty}\frac{5^n}{(n-7)^n}$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{7n^2-1}{3n^2-5}\right)^{n}$; 5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(3n-1)^n}{125^n}$; 6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{7n-1}-\frac{1}{2n+7}\right)^{n}$.

1.5. Исследуйте сходимость ряда по интегральному критерию:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{7n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(5n+2)^3}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+9}$; 5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{13\ln n}{n}$; 6) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{7}{3n-2}$.

II уровень

2.1. Найдите сумму ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7n-2}-\frac{3}{7n+5}\right)$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-4)(3n-1)}$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{25n^2-5n-6}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{11\cdot14^n+3\cdot5^n}{13\cdot16^n}$.

2.2. Исследуйте сходимость ряда по признакам сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)^{n-1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}+n^3+5n}$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{7}{\ln(5n-7)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{3n+1}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[5]{n^3}\cdot\sqrt[4]{2n^2-n+1}}$.

2.3. Исследуйте сходимость ряда по признаку Д’Аламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\sqrt[3]{n^3+6}}{(n-6)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(3n^2-2)7^n}}{(n+1)\cdot3^{n/2}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!}{(n+3)!\cdot13^{3n+2}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3-5+7n}{15^n(n^2+4)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!}{n^{3n}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{7n}(n^2-7n+13)(3n-2)!}{n^{5n}}$.

2.4. Исследуйте сходимость ряда по признаку Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}\left(\frac{7n+1}{11n-3}\right)^{-3n}$; 2) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n-3}\right)^{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=8}^{\infty}\left(\frac{n-7}{n+5}\right)^{n^2}$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2n^2-1}{3n^2-5}\right)^{n^2}$; 5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)^{n^3}}{5^n\cdot n^{n^3}}$; 6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{7^n}{\ln^n(3n-2)}$.

2.5. Исследуйте сходимость ряда по интегральному критерию:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6n}{3n^2-5}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{5\ln n}{n\sqrt{7\ln^2 n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(5n+2)\ln(5n+2)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{7n^4+25}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{4^{n^2}}$; 6) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3}{n^2-n-2}$.

2.6. Исследуйте сходимость ряда с положительными членами:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{17n^5+\sqrt[5]{2n-1}}{7+19n^5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3\sin^2 n}{\sqrt[3]{3n^{81}-2}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{91n^7+\sqrt[7]{2n-1}}{31n^2+79+11n^{13}}$; 4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3}{n\cdot\sqrt[3]{\ln^2 n-1}}$;

5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos^{2n} p\, n^3}{\sqrt[3]{n^{11n}}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^3+\sqrt[3]{3n-1})\cdot(2n)!}{(9+12n^3)\cdot(3n)!}$;

7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{7n^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+(n+1)^3}{n^3+1}\right)^{n^3}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5^n-2\cdot3^n}{7\cdot15^n}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)\cdot(\operatorname{arctg} n+1)}$.

III уровень

3.1. Найдите сумму ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^{3n}\frac{7}{5}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{121}{2n(2n-1)}+\frac{1}{2^n}\right)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{n(n-1)(n+1)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}-\dfrac{1}{2n+5}\right)$;

5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2^{3n+1}\cdot 5^{n+2}}{19^{2n}\cdot 21^{n+1}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2+6n+6}{n^4+6n^3+11n^2+6n}$;

7) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{125}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{625}+\dots$.

3.2. Исследуйте сходимость ряда с положительными членами:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{2n^3}{\sqrt[11]{3n^9-\sin\left(\dfrac{p}{n^2+1}\right)}}$; 2) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{p}{n}}{n^2\left(\sin^2\dfrac{p}{n}+1\right)}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{6n^2+1}{n^2+5}\right)}{\ln\left(\dfrac{11n-1}{5+3n}\right)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4-\dfrac{1}{\ln(n+1)}}{11n^{11}+115}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\cdot(4n+\sqrt[7]{2n-1})\cdot(2n)!}{2^n\cdot(79+11n^{13})\cdot(3n)!}$; 6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{3\ln n}{\sqrt[3]{n^2-1}}$;

7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^{11}+1}}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2}{7^{n^3}-\arcsin\dfrac{1}{n}}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\sin\dfrac{2p}{3^n}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{7n(n+1)\sqrt{2n^3+1}}{n^3\cdot\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[6]{3n-2}}\right)^{n^2}$.

28.2. Знакопеременные числовые ряды

Для знакопеременного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\dots+a_n+\dots \qquad (28.9)$$

составляют ряд из абсолютных значений его членов, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|+\dots \qquad (28.10)$$

Для исследования на сходимость ряда (28.10) используют признаки сходимости знакоположительных рядов.

Знакопеременный ряд (28.9) называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд (28.10).

Теорема. Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

Если знакопеременный ряд не сходится абсолютно, то нельзя утверждать, что он не сходится. Необходимо провести дополнительное исследование.

Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Для исследования на сходимость знакопеременного ряда вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n+\dots \qquad (28.11)$$

используют следующие две теоремы.

Признак Дирихле. Пусть для ряда (28.11) выполняются условия:

1) последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ является ограниченной;

2) последовательность (a_n) монотонно убывает, стремясь к нулю.

Тогда ряд (28.11) сходится.

Признак Абеля. Пусть для ряда (28.11) выполняются условия:

1) последовательность (a_n) является монотонной и ограниченной;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится.

Тогда ряд (28.11) сходится.

Важным частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд.

Знакопеременный ряд называется ***знакочередующимся***, если любые два его соседних члена имеют разные знаки.

Признак Лейбница. Пусть для знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\dots+(-1)^{n+1}a_n+\dots, \qquad (28.12)$$

где $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, выполняются условия:

1) абсолютные значения его членов образуют монотонно невозрастающую последовательность, т. е.

$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд (28.12) сходится.

Ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница, называется ***рядом Лейбница***.

С л е д с т в и е 1. Если для знакочередующегося ряда (28.12) выполняются условия признака Лейбница, то для его суммы S справедлива оценка $S \leq a_1$;

С л е д с т в и е 2. Для остатка R_n знакочередующегося ряда, который удовлетворяет признаку Лейбница, справедлива оценка $|R_n| \leq a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Пример 1. Исследовать сходимость знакопеременного ряда (определить, является ли он абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся):

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{7n+11};\quad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(3n)}{(2n+7)!};\quad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)(2n-1)};\quad 4)\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{5pn}{13}.$$

Решение. 1) Чтобы установить, сходится ли заданный ряд абсолютно, исследуем знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7n+11}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда. Воспользуемся предельным признаком сравнения с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$$C = \lim_{n\to\infty}\frac{1/(7n+11)}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{7n+11} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7+\frac{11}{n}} = \frac{1}{7}.$$

Получен конечный, отличный от нуля предел. Сравниваемые ряды ведут себя одинаково. Поэтому, согласно предельному признаку сравнения, знакоположительный ряд из модулей расходится. Для исследования на условную сходимость используем признак Лейбница. Поскольку члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю: $\frac{1}{18} > \frac{1}{25} > \frac{1}{32} > \ldots > \frac{1}{7n+11} > \ldots$ и

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{7n+11} = 0$, то, согласно признаку Лейбница, заданный ряд сходится. Следовательно, заданный ряд является условно сходящимся.

2) Исследуем знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(3n)|}{(2n+7)!}$, составленный из абсолютных величин членов данного знакопеременного ряда. Поскольку $\frac{|\sin(3n)|}{(2n+7)!} \leq \frac{1}{(2n+7)!}$, то воспользуемся признаком сравнения с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+7)!}$, который, согласно предельному признаку Д'Аламбера, сходится. Действительно: $b_n = \frac{1}{(2n+7)!}$, $b_{n+1} = \frac{1}{(2n+9)!}$,

$$C = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n+9)!}{1/(2n+7)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+8)(2n+9)} = 0 < 1.$$

Поэтому, согласно признаку сравнения, полученный знакоположительный ряд также сходится, а значит, заданный ряд является абсолютно сходящимся.

3) Чтобы установить, сходится ли заданный ряд абсолютно, исследуем знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n-1)}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда. Используем интегральный критерий:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{(2x+2)(2x-1)}dx = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b\frac{d(2x-1)}{2x-1} - \int_1^b\frac{d(2x+2)}{2x+2}\right) = \frac{1}{6}\lim_{b\to\infty}(\ln(2x-1)-\ln(2x+2))\Big|_1^b =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{b\to\infty}\ln\frac{2x-1}{2x+2}\Big|_1^b = \frac{1}{6}\lim_{b\to\infty}\left(\ln\frac{2b-1}{2b+2} - \ln\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}(\ln 1 + 2\ln 2) = \frac{1}{3}\ln 2.$$

Следовательно, заданный знакочередующийся ряд является абсолютно сходящимся.

4) Для заданного знакопеременного ряда не выполняется необходимый признак сходимости:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{5pn}{13}$ – не существует ($\cos\frac{5pn}{13}$ «колеблется» между –1 и 1, не стремясь ни к какому определенному числу). Следовательно, заданный знакопеременный ряд расходится.

Пример 2. Установить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$ и вычислить приближенное значение его суммы с точностью до 0,01.

Решение. Поскольку члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю: $\frac{1}{2}>\frac{1}{9}>\frac{1}{28}>...>\frac{1}{n^3+1}>...$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+1}=0,$ то согласно признаку Лейбница заданный ряд сходится. Чтобы обеспечить точность в 0,01, нужно вычислить несколько последовательных первых членов ряда, пока не получим такой член, абсолютное значение которого меньше $\frac{1}{100}$:

$$a_1=-\frac{1}{2};\ \ a_2=\frac{1}{9};\ \ a_3=-\frac{1}{28};\ \ a_4=\frac{1}{65};\ \ a_5=-\frac{1}{126}.$$

$$|a_5|=\frac{1}{126}<\frac{1}{100}.$$

Следовательно, чтобы обеспечить точность до 0,01, нужно взять четыре члена ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}\approx-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65}\approx-0,41.$$

Задания

I уровень

1.1. Напишите пять первых членов знакопеременного ряда и исследуйте его сходимость (определите, является ли он абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+11}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(5n)$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$.

1.2. Исследуйте сходимость ряда и вычислите приближенное значение его суммы с точностью до 0,01:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^8+1}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{10\ln(n^3+1)}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)^n$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{n^2+1}\right)^n$.

II уровень

2.1. Исследуйте сходимость знакопеременного ряда (определите, является ли он абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n(n+5)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos p n}{n(n+11)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{2p}{11n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln(2n)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{3^{n-1}}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt[3]{n+1}}{(n+1)^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 5n}{(n+1)!}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\sin\frac{p}{n}}{20n+1}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^n$.

2.2. Исследуйте сходимость ряда и вычислите приближенное значение его суммы с точностью до 0,01:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{10n\cdot\sqrt[3]{2n^3-1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{p n}{2}}{(n+1)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{11n\ln(2+n^2)}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+11)}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos p\,n}{4^{n-1}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^{n-1}(2n-1)!}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^{n}}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n(n+5)}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\sin\frac{p}{n}}{20n+1}$.

III уровень

3.1. Исследуйте сходимость знакопеременного ряда (определите, является ли он абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot\sqrt[5]{5n+1}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3}\cdot\arcsin\frac{3n^2}{1+3n^2}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot\ln n\cdot(\ln\ln n)^{7}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sin\frac{2p^{12}}{3n-1}+\frac{\sqrt{3n-1}}{n^{2}}\right)$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^{99}}{(2n+1)^{1109}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{\sqrt{n^{11}+7n^{2}+2}-\sqrt{n^{11}-7n+2}}{3n^{2}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n^{3}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\left(\frac{3n^{2}}{3n^{2}+1}\right)^{n^{2}}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3n+2}\right)^{3n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n+0{,}5\,\mathrm{arctg}\,n)\sin\left(-\frac{1}{2n+\mathrm{arctg}\,n}\right)}{6n}\right)^{n}$.

3.2. Исследуйте сходимость ряда и вычислите приближенное значение его суммы с точностью до α:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+1)}{n3^{n}}$, $a=0{,}01$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n^{n^2}+1}\right)^{n}$, $a=0{,}01$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(2^{n}+1)}$, $a=0{,}01$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}\cos 3p\,n}{n^{6}+1}$, $a=0{,}01$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{3}\cdot\sqrt[3]{n^{2}}}$, $a=0{,}01$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)\ln^{3}(n+1)}$, $a=0{,}1$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n^{3}}{e^{n^{2}}}$, $a=0{,}1$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!\,\mathrm{arctg}^{n}\left(3^{\frac{n-2}{2}}\right)}$, $a=0{,}001$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{p\,n}{2}}{n(n^{3}+1)}$, $a=0{,}01$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{p(3n-1)}{2}}{(n+1)^{n}}$, $a=0{,}01$.

28.3. Функциональные ряды

Функциональным рядом называется выражение вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \qquad (28.13)$$

где $u_n(x)$ – функции, определенные на числовом множестве $X\subset\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$, $u_n(x)$ – n-й член ряда.

Сумма первых n членов ряда

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x) \qquad (28.14)$$

называется его ***n-й частичной суммой***.

Ряд

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+k}(x)+\ldots=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x), \qquad (28.15)$$

называется ***n-м остатком ряда***.

При определенном значении x выражение (28.13) является числовым рядом.

В зависимости от значения x выражение (28.13) становится сходящимся или расходящимся числовым рядом. Совокупность всех тех значений x $(x\in X)$, для которых ряд (28.13) сходится, называется ***областью сходимости ряда*** и обозначается D: $D\subseteq X$.

Если $x\in D$, то можно говорить о сумме ряда (28.13) в точке x: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$, т. е. значение суммы ряда зависит от аргумента x.

Ряд (28.13) называется ***абсолютно сходящимся на множестве D***, если на D сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$, составленный из абсолютных значений его членов.

Всякий абсолютно сходящийся на множестве D функциональный ряд сходится.

Признак абсолютной сходимости Д'Аламбера. Пусть для функционального ряда (28.13) существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=C(x),\quad x\in D. \qquad (28.16)$$

Тогда:

1) в тех точках *x*, для которых $C(x)<1$, ряд (28.13) сходится абсолютно;

2) в тех точках *x*, для которых $C(x)>1$, ряд (28.13) расходится.

Признак абсолютной сходимости Коши. Пусть для функционального ряда (28.13) существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=C(x),\quad x\in D. \qquad (28.17)$$

Тогда:

1) в тех точках *x*, для которых $C(x)<1$, ряд (28.13) сходится абсолютно;

2) в тех точках *x*, для которых $C(x)>1$, ряд (28.13) расходится.

При $C(x)=1$ признаки Д'Аламбера и Коши не дают ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда. В этом случае то значение *x*, при котором $C(x)=1$, необходимо подставить в заданный функциональный ряд и исследовать полученный числовой ряд на сходимость.

Ряд (28.13) называется ***условно сходящимся в точке x***, если в этой точке ряд сходится, но не абсолютно.

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\lg^n(x+2)$.

Решение. Данный ряд представляет собой сумму геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lg^n(x+2)=1+\lg(x+2)+\lg^2(x+2)+\ldots+\lg^n(x+2)+\ldots .$$

Он сходится и притом абсолютно, если $|\lg(x+2)|<1$. Из последнего условия получаем

$$-1<\lg(x+2)<1;\quad \frac{1}{10}<x+2<10;\quad -\frac{19}{10}<x<8.$$

Следовательно, областью сходимости данного ряда является интервал $(-1{,}9;\,8)$.

Пример 2. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(x-1)^n$.

Решение. Заменяем в заданной формуле общего члена ряда $u_n=f(n)$ номер *n* на *n*+1 и получаем формулу следующего члена ряда $u_{n+1}=f(n+1)$. Далее, используя признак абсолютной сходимости Д'Аламбера, ищем предел:

$$u_n(x)=\frac{n^2(x-1)^n}{2^n};\quad u_{n+1}(x)=\frac{(n+1)^2(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}};$$

$$C(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}}:\frac{n^2(x-1)^n}{2^n}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}|x-1|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}|x-1|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}|x-1|(1+0)^2=\frac{1}{2}|x-1|.$$

Определяем, при каких значениях *x* этот предел будет меньше единицы, т. е., решаем неравенство:

$$\frac{1}{2}|x-1|<1;\quad -1<\frac{1}{2}(x-1)<1;\quad -2<x-1<2;\quad -1<x<3.$$

Поэтому интервал (– 1; 3) является интервалом сходимости данного ряда. Исследуем сходимость ряда на концах интервала (– 1; 3). При $x=-1$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(-1-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^n}{2^n}(-1)^n=$ $=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$, который расходится, поскольку для него не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty\neq 0$.

При $x=3$ получаем знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(3-1)^n=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2$, который также расходится, поскольку для него не выполняется необходимый признак сходимости.

Следовательно, областью сходимости заданного ряда является открытый интервал (–1; 3).

Пример 3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n)^n}$.

Решение. Используя признак абсолютной сходимости Коши, ищем предел: $C(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{x+1}{2n}\right)^n}=|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0<1.$

Согласно признаку Коши, заданный ряд сходится при любом значении x.

Следовательно, областью сходимости заданного ряда является вся числовая ось: $(-\infty;+\infty)$.

Пример 4. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^{2n}$.

Решение. Нетрудно видеть, что при $x=0$ ряд сходится. Пусть $x\neq 0$. Тогда для любого $x\in\mathbf{R}$ имеем $n!x^{2n}>0$. Используя признак абсолютной сходимости Д'Аламбера, ищем предел:

$$C(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{2(n+1)}}{n!x^{2n}}\right|=x^2\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty>1.$$

Следовательно, заданный ряд сходится только при $x=0$.

Задания

I уровень

1.1. Найдите область сходимости функционального ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n(x+1)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(3-x)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{x^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x-2)^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{2n}}$.

II уровень

2.1. Найдите область сходимости функционального ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{7^{n-1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(11+x^2)^{n-1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(x+1)}{n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3x+5}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+x^{n+1}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{n-1}\left(3x+\frac{p}{8}\right)$;

7) $1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\ldots$; 8) $\operatorname{tg}x+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{3^3}+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{5^3}+\frac{\operatorname{tg}^4 x}{7^3}+\ldots$;

III уровень

3.1. Найдите область сходимости функционального ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-3n+1}{5(n+1)}\right)^{3x+7}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\lg^{n-1}(x^2-3)$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{7-(3x+1)^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{13n-1}\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^{n-1}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}{2^{nx}+3}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}(x^2-x+13)^n$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3}\left(\frac{x^2-12x+35}{x^2+12x+35}\right)^n$.

28.4. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n, \quad (28.18)$$

где $a\in\mathbf{R}$, числа $c_n\in\mathbf{R}$ $(n\in\mathbf{N})$ – коэффициенты ряда.

Ряд (28.18) также называется ***степенным рядом с центром в точке a***.

Для степенного ряда находят ***радиус сходимости r*** по одной из формул

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,\quad r=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \quad (28.19)$$

если эти пределы существуют.

Ряд (28.18) сходится, причем абсолютно, на ***интервале сходимости*** $(a-r, a+r)$, где $0 \le r \le +\infty$, и расходится на $(-\infty, a-r) \cup (a+r, +\infty)$. При $r=0$ ряд (28.18) сходится только в точке a, при $r=+\infty$ – на всей числовой оси.

Для определения ***области сходимости*** заданного степенного ряда следует найти его радиус сходимости по формулам (28.19), далее определить его интервал сходимости и выяснить, сходится или расходится ряд в граничных точках этого интервала $x = a \pm r$, для чего эти значения подставляют в заданный ряд и исследуют полученные числовые ряды.

Замечание. Поскольку степенной ряд является функциональным, то для определения области сходимости степенного ряда можно также использовать признаки абсолютной сходимости Д'Аламбера или Коши, а затем те значения x, для которых эти признаки не решают вопрос о сходимости ряда $(C(x)=1)$, исследуются отдельно с использованием достаточных признаков сходимости числовых рядов (см. параграф 28.3). Однако целесообразно решать эту задачу через нахождение радиуса сходимости r.

Свойства степенных рядов

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда является непрерывной функцией на его интервале сходимости.

2. Степенной ряд с суммой $S(x)$ можно почленно дифференцировать и интегрировать на его интервале сходимости любое количество раз:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n((x-a)^n)' = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots +$$
$$+ nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

$$\int S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \int (x-a)^n dx) = c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 +$$
$$+ \frac{c_2}{3}(x-a)^3 + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n}(x-a)^n + \ldots$$

Интервал сходимости при этом не меняется. Сходимость может измениться только в граничных точках интервала сходимости.

Операции почленного дифференцирования и интегрирования позволяют в некоторых случаях найти сумму степенного ряда.

Если существует такой степенной ряд (28.18), который на определенном промежутке D сходится к функции $f(x)$, то говорят, что ***функция f(x) разлагается на промежутке D в степенной ряд (по степеням x – a),*** а выражение вида

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots, \qquad (28.20)$$

где $x \in D$, называется ***разложением функции в степенной ряд (по степеням x – a)***. Такое разложение единственно.

Рядом Тейлора функции f(x) в окрестности точки a (по степеням x – a), называется степенной ряд вида

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (28.21)$$

Критерий сходимости ряда Тейлора. Ряд Тейлора (28.21) функции $f(x)$ сходится к ней на некотором интервале $(a-r, a+r)$ тогда и только тогда, когда остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора для функции $f(x)$ при всех $x \in (a-r, a+r)$ стремится к нулю с ростом n: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Признак сходимости ряда Тейлора. Если в интервале $(a-r, a+r)$ функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема и все ее производные ограничены в совокупности, то в этом интервале функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $x-a$ (является его суммой).

Рядом Маклорена функции f(x) называется ряд Тейлора (28.21) функции $f(x)$ в окрестности точки $a=0$ (по степеням x):

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (28.22)$$

На области сходимости ряды Маклорена для основных элементарных функций имеют указанный ниже вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\mathrm{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\mathrm{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

$x \in (-1, 1]$;

$$(a+x)^k = a^k \left(1 + \frac{k}{1!}\frac{x}{a} + \frac{k(k-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{k(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-(n-1))}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n + \ldots \right), \quad x \in (-|a|, |a|).$$

При разложении функции $f(x)$ в ряд используют следующие правила:

1) непосредственное разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора (28.21) или Маклорена (28.22);

2) использование известных рядов Маклорена для основных элементарных функций;

3) использование сложения и вычитания рядов и умножения ряда на число;

4) использование дифференцирования и интегрирования рядов.

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}(x+1)^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n+1}\right)^{2n} (x-3)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+1}(x-1)^n$.

Решение. 1) Формула коэффициентов ряда: $c_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbf{N}$.

По формуле (28.19) найдем радиус сходимости степенного ряда:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} : \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

Поэтому (–1; 1) является интервалом сходимости данного ряда. Исследуем сходимость ряда на концах интервала (–1; 1). При $x = -1$ получаем гармонический ряд, который расходится:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$$

При $x = 1$ получаем знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница:

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots .$$

Следовательно, областью сходимости данного ряда является полуоткрытый интервал $(-1;\ 1]$.

2) Имеем степенной ряд с центром в точке $a = -1$.

Формула коэффициентов ряда $c_n = \frac{n^3}{3^n}$, $n \in \mathbf{N}$.

По формуле (28.19) найдем радиус сходимости степенного ряда:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{3^n} : \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{(n+1)^3} = 3.$$

Поэтому $(a-r,\ a+r) = (-1-3;\ -1+3) = (-4;\ 2)$ является интервалом сходимости данного ряда. Исследуем сходимость ряда на концах интервала (–4; 2). При $x = -4$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}(-4+1)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}(-3)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}(-1)^n \cdot 3^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^3$, который расходится, поскольку для него не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty \neq 0$.

При $x = 2$ получаем знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}(2+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot 3^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3,$$

который также расходится, поскольку для него не выполняется необходимый признак сходимости.

Следовательно, областью сходимости заданного ряда является открытый интервал: (–4; 2).

3) Имеем степенной ряд с центром в точке $a = 3$. Формула коэффициентов ряда $c_n = \left(\frac{3n}{n+1}\right)^{2n}$, $n \in \mathbf{N}$. По формуле (28.19) найдем радиус сходимости степенного ряда:

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{3}{n+1}\right)^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3}\right)^2=\infty.$$

Следовательно, областью сходимости заданного ряда является вся числовая ось: $(-\infty;+\infty)$.

4) Имеем степенной ряд с центром в точке $a=1$. Формула коэффициентов ряда: $c_n=\frac{n!}{n+1}$, $n\in\mathbf{N}$. По формуле (28.19) найдем радиус сходимости степенного ряда:

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n+1}:\frac{(n+1)!}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+2)}{(n+1)!\,(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)^2}=0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n+1}(x-1)^n.$$

Следовательно, заданный ряд сходится только в точке $x=1$.

Пример 2. Найти сумму ряда и указать область сходимости:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

Решение. 1) Интервал сходимости заданного ряда: (– 1; 1). Значит, его можно почленно дифференцировать и интегрировать в его интервале сходимости. Выполним дифференцирование:

$$S'(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}.$$

Полученный ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей при $|x|<1$ геометрической прогрессии:

$$S'(x)=\frac{u_1(x)}{1-q}=\frac{1}{1-x},\ \text{откуда}\ \ S(x)=\int\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x).$$

Таким образом, сумма заданного ряда $S(x)=-\ln(1-x)$, $x\in(-1;1)$.

2) Область сходимости заданного ряда [–1; 1], что следует из признака абсолютной сходимости Д'Аламбера и сходимости ряда при $x=\pm1$ (убедитесь в этом самостоятельно). Значит, его можно почленно дифференцировать и интегрировать в его интервале сходимости:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}=S_1(x)-\frac{1}{x}S_2(x);$$

$$S_1'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x};$$

$$S_2'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x};$$

$$S_1(x)=\int\frac{xdx}{1-x}=-\int dx-\int\frac{dx}{x-1}=-x-\ln|x-1|;$$

$$S_2(x)=\int\frac{x^2dx}{1-x}=-\int\frac{(x^2-1)+1}{x-1}dx=-\int(x+1)\,dx-\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|x-1|.$$

Окончательно имеем:

$$S(x)=S_1(x)-\frac{1}{x}S_2(x)=-x-\ln|x-1|-\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|x-1|\right)=$$

$$=-x-\ln|x-1|+\frac{1}{2}x+1+\frac{\ln|x-1|}{x}=\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln|x-1|-\frac{1}{2}x+1,\quad |x|\le1.$$

Пример 3. Разложить функцию $f(x)=3^x$ в ряд Тейлора по степеням x.

Решение. Используем прием непосредственного разложения.

Составим для данной функции ряд Тейлора. С этой целью найдем числовые значения производных всех порядков функции в точке $x=0$:

$f(x)=3^x$, $\qquad f(0)=1$;

$f'(x)=3^x\ln3$, $\qquad f'(0)=\ln3$;

$f''(x)=3^x\ln^2 3$, $\qquad f''(0)=\ln^2 3$;

. . . .

$f^{(n)}(x)=3^x\ln^n 3$, $\qquad f^{(n)}(0)=\ln^n 3$;

. . . .

Подставив найденные значения производных в выражение (28.21) при $a=0$, получим ряд Тейлора для функции $f(x)=3^x$ по степеням x:

$$1+\frac{\ln3}{1!}x+\frac{\ln^2 3}{2!}x^2+\ldots+\frac{\ln^n 3}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 3}{n!}x^n.$$

По формуле (28.19) найдем радиус сходимости полученного степенного ряда:

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^n 3}{n!}:\frac{\ln^{n+1}3}{(n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\ln3}=\infty.$$

Следовательно, областью сходимости данного ряда является вся числовая ось: $(-\infty;+\infty)$.

Пример 4. Разложить функцию $f(x)=\cos\left(\frac{x^3}{2}\right)$ в ряд Маклорена.

Решение. Полагаем $\frac{x^3}{2}=y$ и используем известное разложение в ряд Маклорена для функции $\cos y$:

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}+\ldots .$$

Тогда, с учетом того, что $y=\frac{x^3}{2}$, получаем:

$$\cos\left(\frac{x^3}{2}\right)=1-\frac{x^6}{2^2\cdot 2!}+\frac{x^{12}}{2^4\cdot 4!}-\frac{x^{18}}{2^6\cdot 6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{6n}}{2^{2n}\cdot(2n)!}+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{6n}}{2^{2n}\cdot(2n)!}.$$

Так как разложение в ряд Маклорена функции $\cos x$ имеет место для всех $x\in\mathbf{R}$, то и разложение в ряд Маклорена заданной функции $\cos\left(\frac{x^3}{2}\right)$ имеет место для всех $x\in\mathbf{R}$.

Пример 5. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\arccos x$.

Решение. Замечаем, что функцию $f(x)=\arccos x$ можно получить интегрированием функции $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Поэтому разложим в ряд по степеням x функцию $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и затем проинтегрируем полученный степенной ряд. Поскольку $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, используем табличное разложение для функции $(a+y)^k$:

$$(a+y)^k=a^k\left(1+\frac{k}{1!}\frac{y}{a}+\frac{k(k-1)}{2!}\left(\frac{y}{a}\right)^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-(n-1))}{n!}\left(\frac{y}{a}\right)^n+\ldots\right),\quad y\in(-|a|,|a|).$$

Полагая $-x^2=y$, $a=1$, $k=-\frac{1}{2}$, получим:

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-(1+y)^{-\frac{1}{2}}=-\left(1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}y+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}y^n+\ldots\right)=$$
$$=-\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot 3!}x^6+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+\ldots\right).$$

$$\arccos x=-\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=-\int_0^x\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}x^6+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+\ldots\right)dx=$$
$$=-\left(x+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot5\cdot2!}x^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot7\cdot3!}x^7+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot(2n+1)\cdot n!}x^{2n+1}+\ldots\right).$$

Так как при интегрировании интервал сходимости степенного ряда не меняется, то найденное разложение имеет место для $x\in(-1,1)$.

Пример 6. Разлагая функцию $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ в ряд, вычислить с точностью 0,001.

Решение. Используя разложение $\ln(1+x)$ в степенной ряд, получим

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^{0,1}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots}{x}dx=$$
$$=\int_0^{0,1}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{16}x^4+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,1}=$$
$$=0,1-\frac{1}{4}\cdot0,01+\frac{1}{9}\cdot0,001-\ldots\approx0,098.$$

Мы взяли два слагаемых, так как третье по модулю меньше требуемой точности $0,001:0,001\cdot\frac{1}{9}<0,001$. Поэтому, начиная с третьего, все последующие слагаемые отбрасываем.

Задания

I уровень

1.1. Найдите область сходимости степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+2)^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+1)^n}{2^{n+1}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{3^{n-1}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{(n-3)^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot x^{3n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^{2n+1}}{3n+11}$.

1.2. Найдите первые четыре члена разложения функции в ряд Маклорена и укажите область сходимости полученного ряда к своей сумме:

1) $\cos 2x$; 2) e^{7x}; 3) $\sin x^3$; 4) $\ln(1-x)$; 5) $\frac{1}{1+x^3}$;

6) $\sqrt[3]{1-x}$; 7) $\operatorname{sh} x^2$; 8) $\operatorname{ch} 3x$; 9) $3x \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{4}$; 10) $\frac{e^x}{5x}$.

1.3. Пользуясь соответствующими рядами, вычислите приближенно с точностью до α:

1) $\cos 1,\ a = 0,0001$; 2) $\sin 3,\ a = 0,0001$; 3) $\sqrt[3]{30},\ a = 0,0001$;

4) $\sqrt[5]{250},\ a = 0,001$; 5) $\ln 1,1,\ a = 0,0001$; 6) $\ln 0,3,\ a = 0,0001$;

7) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx,\ a = 0,001$; 8) $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\, dx,\ a = 0,001$;

9) $\int_2^5 \frac{\ln(1+x)}{x} dx,\ a = 0,001$; 10) $\int_{1/4}^{1/2} \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} dx,\ a = 0,001$.

II уровень

2.1. Найдите область сходимости степенного ряда:

1) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{16} + \ldots$; 2) $1 + 2!x + 3!x^2 + 4!x^4 + \ldots$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot x^{3n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^{2n+1}}{3n+11}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} (x+11)^{2n-1}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+1)^n}{7^{3n+1} \cdot \sqrt{n^2+1}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(5x-3)^n}{5^{n-1}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+1)(x-7)^{n+1}}{(2n-3)^2 \cdot 3^n}$.

2.2. Найдите сумму ряда и укажите область сходимости к своей сумме:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+3)(n+4)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+12}}{(n+12)(n+13)}$;

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + (-1)^n \right) x^{2n}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} + 1 \right) x^n$;

5) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) x^{n+2}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n+6} - \frac{1}{n+8} \right) x^{n+8}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{3n+5} x^{3n+5}$; 8) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+7} + (-4)^n \right) x^{n+7}$.

2.3. Найдите первые четыре члена разложения функции в ряд Маклорена и укажите область сходимости полученного ряда к своей сумме:

1) $\sqrt{x} \cos 3x^3$; 2) $x^3 e^{x^3}$; 3) $\operatorname{arctg} \frac{x^3}{2}$; 4) $\frac{1}{1-3x}$; 5) $\ln(1-x^2)$;

6) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2x}$; 7) $\sqrt[4]{3x}$; 8) 5^x; 9) $\frac{1}{5+7x}$; 10) $\frac{1}{\sqrt[7]{1+2x^2}}$.

2.4. Пользуясь соответствующими рядами, вычислите приближенно с точностью до α:

1) $\cos \frac{p}{150},\ a = 0,0001$; 2) $\sin \frac{p}{100},\ a = 0,0001$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right),\ a = 0,001$; 4) $\sqrt[6]{738},\ a = 0,001$;

5) $\ln 3,\ a = 0,0001$; 6) $\int_{1/4}^{1/2} \frac{\cos x^2}{x^2} dx,\ a = 0,001$;

7) $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx,\ a = 0,001$; 8) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{5-x^3}} dx,\ a = 0,001$.

III уровень

3.1. Найдите область сходимости степенного ряда:

1) $\frac{2}{3}\frac{x+\sqrt{2}}{5}+\frac{4}{9}\frac{(x+\sqrt{2})^3}{5}+\frac{8}{27}\frac{(x+\sqrt{2})^5}{5}+\frac{16}{81}\frac{(x+\sqrt{2})^7}{5}+\ldots;$

2) $1-\frac{\sqrt{3\cdot 7}(2x-13)}{2!}+\frac{\sqrt{8\cdot 49}(2x-13)^2}{5!}-\frac{\sqrt{13\cdot 343}(2x-13)^3}{8!}+\ldots;$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5n^2-1}(9x-19)^{2n+1}}{(3n+7)^2};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2-3x)^{n+1}}{n-\ln^2 n};$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}7^{n^2}(x+3)^{n^2};$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(x+7)^n;$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5x-3)^n}{5^{n-1}+6^{n-1}};$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot(n+1)!(x-2)^n}{(n+1)^{n+1}}.$

3.2. Найдите сумму ряда и укажите область сходимости к своей сумме:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+7)(x+3)^{n+8};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n+2}(x-12)^{n+2}}{n+2};$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right)(x-17)^{n+3};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{n+11}}{(n+10)(n+11)};$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+2)(x-1)^{n+1}}{5^{n+1}};$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{4n+3}}{(4n-1)(4n+3)};$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(x^3-1)^n;$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-2)^{n+6}}{n+6};$

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{(x^2-1)^{n+5}};$ 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n^2+7n+5)(x-1)^n.$

3.3. Найдите первые пять членов разложения функции в ряд Тейлора в окрестности указанной точки a и укажите область сходимости полученного ряда к своей сумме:

1) $\mathrm{ch}(2x),\ a=0;$ 2) $\ln x,\ a=1;$ 3) $e^{\sqrt{1-x^2}},\ a=-1;$

4) $\frac{1}{(1+x^3)^2},\ a=1;$ 5) $\mathrm{tg}\,x,\ a=\frac{p}{4};$ 6) $\mathrm{cosec}\,x,\ a=\frac{p}{2};$

7) $\arcsin x,\ a=0;$ 8) $\sin 2x,\ a=5;$ 9) $\ln(1-x+x^2),\ a=0;$

10) $\ln\frac{3+2x}{3-2x},\ a=0.$

3.4. Пользуясь соответствующими рядами, вычислите приближенно с точностью до α:

1) $\sqrt{e},\ a=0{,}0001;$ 2) $\ln 11,\ a=0{,}0001;$ 3) $\sin 10°,\ a=0{,}0001;$

4) $\frac{1}{\sqrt[7]{136}},\ a=0{,}001;$ 5) $\sqrt[3]{8{,}36},\ a=0{,}001;$ 6) $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right),\ a=0{,}001;$

7) $\int\limits_2^4 e^{1/x}dx,\ a=0{,}001;$ 8) $\int\limits_0^{0{,}125}\sqrt[3]{x}\cos^2 x\,dx,\ a=0{,}001;$

9) $\int\limits_5^{10}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx,\ a=0{,}001;$ 10) $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt[5]{32-x^5}}dx,\ a=0{,}001.$

28.5. Ряд Фурье

Рядом Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (28.23)$$

где

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx, \qquad (28.24)$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos nx\,dx,\ n\in\mathbf{N}, \qquad (28.25)$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin nx\,dx,\ n\in\mathbf{N}. \qquad (28.26)$$

Числа (28.24)–(28.26) называются ***коэффициентами Фурье***. Это записывается следующим образом:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Сумма такого ряда $S(x)$, если она существует, является периодической функцией от x с периодом 2π.

Достаточные условия сходимости ряда Фурье сформулированы в теореме Дирихле.

Теорема Дирихле. Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на промежутке $[-p\,;p\,]$ имеет конечное число точек разрыва первого рода x_k (или непрерывна) и конечное число точек экстремума (или кусочно-монотонна). Тогда ее ряд Фурье сходится (т. е. имеет сумму $S(x)$) во всех точках этого интервала. При этом:

1) в точках непрерывности ряд Фурье сходится к самой функции: $S(x) = f(x)$;

2) в каждой точке разрыва x_k функции ее ряд Фурье сходится к полусумме односторонних пределов функции при стремлении x к x_k слева и справа:

$$S(x_k) = \frac{1}{2}\big(f(x_k - 0) + f(x_k + 0)\big);$$

3) в граничных точках промежутка $[-p\,;\,p\,]$ ряд Фурье сходится к полусумме односторонних пределов функции при стремлении x к этим точкам изнутри промежутка:

$$S(-p) = S(p) = \frac{1}{2}\big(f(-p + 0) + f(p - 0)\big).$$

Частные случаи разложения функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы Дирихле, в ряд Фурье следующие:

1. Если функция $f(x)$ является ***четной*** $(f(x) = f(-x))$, то ее ***ряд Фурье содержит только косинусы*** $(b_n = 0)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad (28.27)$$

где $a_0 = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)dx$; $a_n = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_{0}^{p} f(x)\cos nxdx.$

2. Если функция $f(x)$ является ***нечетной*** $(f(-x) = -f(x))$, то ее ***ряд Фурье содержит только синусы*** $(a_0 = 0,\ a_n = 0)$:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad (28.28)$$

где $b_n = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_{0}^{p} f(x)\sin nxdx.$

3. Если функция $f(x)$ задана на промежутке $[0; p\,]$, то ее ряд Фурье может быть получен различными способами, в зависимости от того, как построено продолжение функции на промежуток $[-p\,; 0]$.

При четном продолжении функции на промежуток $[-p\,; 0]$ (график данной функции продолжается на промежуток $[-p\,; 0]$ симметрично относительно оси ординат, рис. 28.1) получают ряд по косинусам (формула (28.27)).

При нечетном продолжении функции на промежуток $[-p\,; 0]$ (график данной функции продолжается на промежуток $[-p\,; 0]$ симметрично относительно начала координат, рис. 28.2) получают ряд по синусам (формула (28.28)).

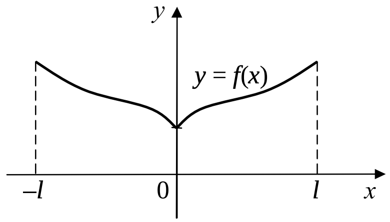


Рис. 28.1

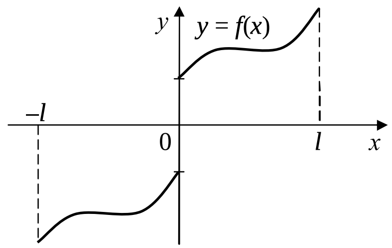


Рис. 28.2

4. Для функции $f(x)$, заданной на промежутке $[0;\ 2p\,]$, ее ряд Фурье (28.23), получается при условии, что пределами интегрирования в формулах (28.24)–(28.26) являются 0 и 2π.

5. Если функция $f(x)$ задана несколькими различными формулами на промежутке $[-p\,; p\,]$, то при разложении ее в ряд Фурье, при вычислении интегралов в формулах (28.24)–(28.26) для коэффициентов ряда, следует разбить интервал интегрирования точками, в которых меняется аналитическое выражение функции, на части и вычислять интегралы как сумму интегралов по составляющим частям.

6. Если функция $f(x)$ задана на произвольном промежутке

$[a;\, b] \in [-p\,;\, p\,]$, то ее ряд Фурье может быть получен двумя способами:

а) если построено продолжение функции на промежутке $[-p\,;\, p\,]$ четным образом (рис. 28.3), то разложение в ряд Фурье происходит по косинусам (формула (28.27));

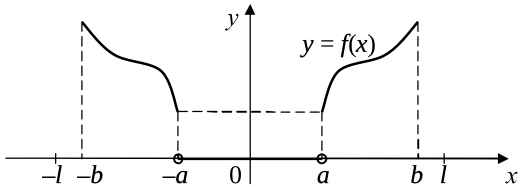


Рис. 28.3

б) если построено продолжение функции на промежутке $[-p\,;\, p\,]$ нечетным образом (рис. 28.4), то разложение в ряд Фурье происходит по синусам (формула (28.28)).

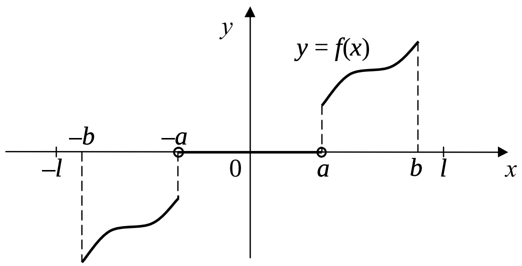


Рис. 28.4

7. Для функции $f(x)$, заданной на произвольном промежутке $[a;\, b]$ длины 2π, ее ряд Фурье (28.23) получается при условии, что в формулах коэффициентов (28.24)–(28.26) пределами интегрирования являются числа a и b.

Если $f(x)$ – $2l$-периодическая функция, $l \in \mathbf{R}$, то ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{p\,nx}{l} + b_n \sin\frac{p\,nx}{l} \right), \qquad (28.29)$$

где $a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx,$ $\qquad (28.30)$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{p\,nx}{l}dx,\ \ n \in \mathbf{N}. \qquad (28.31)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{p\,nx}{l}dx,\ \ n \in \mathbf{N}. \qquad (28.32)$$

Ряд (28.23) является частным случаем ряда (28.29).

Как и в случае 2π-периодической функции четная $2l$-периодическая функция разлагается только по косинусам, нечетная – по синусам.

Теорема сходимости Дирихле обобщается на случай $2l$-периодической функции.

С помощью формул Эйлера

$e^{iy} = \cos y + i\sin y;\quad e^{-iy} = \cos y - i\sin y;$

$\cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2};\quad \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$

из формул (28.23)–(28.26) получается удобная своей краткостью ***комплексная форма ряда Фурье 2l-периодической функции:***

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \qquad (28.33)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{np\,x}{l}}dx \quad (n \in Z,\, l \in R,\, l > 0). \qquad (28.34)$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию (с периодом 2π):

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x, & \text{если} \quad -p < x \le 0; \\ 0, & \text{если} \quad 0 < x \le p. \end{cases}$$

Записать первые три члена полученного ряда. Исследовать ряд на сходимость.

Решение. Изобразим график заданной функции (рис. 28.5).

Поскольку функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, то вычисляем ее коэффициенты Фурье по общим формулам (28.23)–(28.26):

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{1}{p}\int_{-p}^{0}(2 + x)dx + \frac{1}{p}\int_{0}^{p} 0dx = \frac{1}{p}\left(2x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-p}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{p}\left(-2p + \frac{p^2}{2}\right) = 2 - \frac{p}{2}.$$

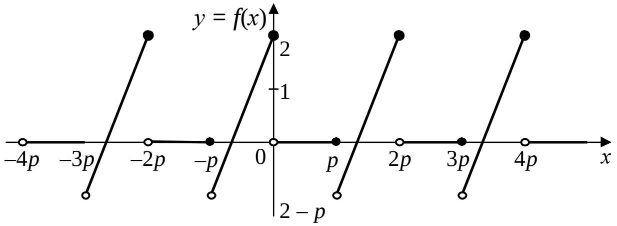


Рис. 28.5

Пусть $n\in \mathbf{N}$, тогда

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{p}\int_{-p}^{0}(2+x)\cos nxdx=\begin{vmatrix}u=2+x, & du=dx\\ dv=\cos nxdx, & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{2+x}{n}\sin nx\Big|_{-p}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-p}^{0}\sin nxdx\right)=-\frac{1}{pn^2}\int_{-p}^{0}\sin nxd(nx)=\frac{1}{pn^2}\cos nx\Big|_{-p}^{0}=$$

$$=\frac{1}{pn^2}\cos 0-\frac{1}{pn^2}\cos(-pn)=\frac{1}{pn^2}-\frac{1}{pn^2}\cos(pn).$$

Так как $\cos np=(-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$a_n=\frac{1}{pn^2}-\frac{1}{pn^2}(-1)^n=\frac{1}{pn^2}(1-(-1)^n).$$

Вычисляем далее:

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{p}\int_{-p}^{0}(2+x)\sin nxdx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=2+x, & du=dx\\ dv=\sin nxdx, & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{vmatrix}=\frac{1}{p}\left(-\frac{2+x}{n}\cos nx\Big|_{-p}^{0}+\frac{1}{n}\int_{-p}^{0}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{p}\left(-\frac{2+0}{n}\cos 0+\frac{2-p}{n}\cos(-np)+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-p}^{0}\right)=$$

$$=\frac{1}{p}\left(-\frac{2}{n}+\frac{2-p}{n}(-1)^n\right)=\frac{1}{pn}((2-p)(-1)^n-2).$$

Таким образом, согласно формуле (28.23), искомый ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim 2-\frac{p}{2}+\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n(2-p)-2}{n}\sin nx\right).$$

Полагая последовательно n = 1, 2, 3, получаем:

$$f(x)\sim 2-\frac{p}{2}+\frac{2}{p}\cos x+\frac{p-4}{p}\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2p}\cos 3x+\frac{p-4}{3p}\sin 3x+\ldots$$

Заданная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. В точках ее непрерывности $x\neq pk$ $(k\in \mathbf{Z})$ ряд Фурье сходится к $f(x)$. В точках разрыва $x_k=2pk$ $(k\in \mathbf{Z})$ сумма полученного ряда равна 1. Например, в точке $x = 0$, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0-0} f(x)+\lim_{x\to 0+0} f(x)\right)=\frac{1}{2}(2+0)=1.$$

В точках разрыва $x_k=p(2k-1)$, $k\in \mathbf{Z}$, сумма полученного ряда равна

$$S((2k-1)p)=S(-p)=S(p)=\frac{1}{2}(\lim_{x\to -p+0} f(x)+\lim_{x\to p-0} f(x))=$$

$$=\frac{1}{2}((2-p)+0)=1-\frac{p}{2}.$$

График суммы $S(x)$ ряда Фурье изображен на рис. 28.6.

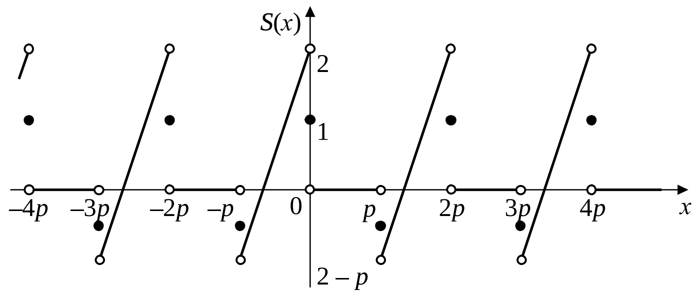


Рис. 28.6

Пример 2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 4:

$$f(x)=\begin{cases}-2, & \text{если } -2<x<0;\\ 1, & \text{если } 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Решение. Изобразим график заданной функции (рис. 28.7).

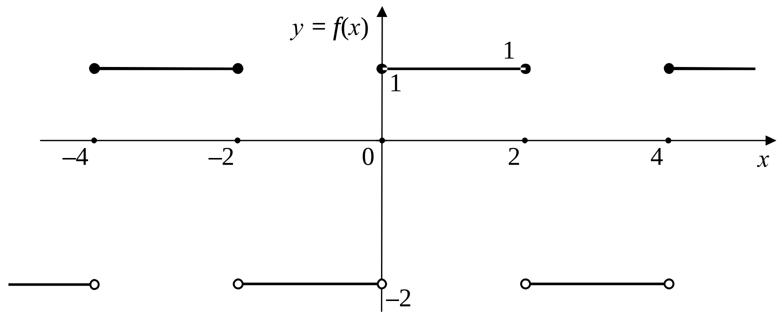


Рис. 28.7

Поскольку функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, то вычисляем ее коэффициенты Фурье по общим формулам (28.29)–(28.32), полагая $l = 2$:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-2)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}1dx = \frac{1}{2}(-2x)\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{2}x\Big|_{0}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(0-4+2) = -1;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{np\,x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-2)\cos\frac{np\,x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}1\cos\frac{np\,x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{p\,n}\sin\frac{np\,x}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{2}{p\,n}\sin\frac{np\,x}{2}\Big|_{0}^{2}\right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{np\,x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-2)\sin\frac{np\,x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}1\sin\frac{np\,x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{p\,n}\cos\frac{np\,x}{2}\Big|_{-2}^{0} - \frac{2}{p\,n}\cos\frac{np\,x}{2}\Big|_{0}^{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{p\,n} - \frac{6}{p\,n}(-1)^n\right) =$$

$$= \frac{3}{p\,n}(1-(-1)^n) = \frac{6}{p\,(2n-1)}.$$

Таким образом, согласно формуле (28.29), искомый ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \frac{6}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\sin nx\right).$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому в точках ее непрерывности $x \neq 2k$ $(k \in \mathbf{Z})$ ряд Фурье сходится к $f(x)$, а в точках разрыва $x_k = 2k$ $(k \in \mathbf{Z})$ сумма полученного ряда равна –0,5:

$$S(x_k) = S(0) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to 0-0} f(x) + \lim_{x\to 0+0} f(x)) = \frac{1}{2}(-2+1) = -0,5.$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье $2p$-периодическую функцию $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in (0;\ 2p)$.

Решение. Изобразим график заданной функции (рис. 28.8)

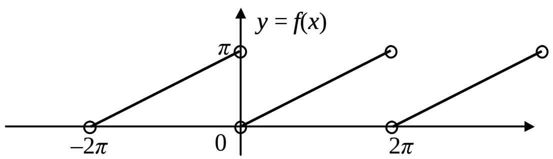


Рис. 28.8

Поскольку функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, то вычисляем ее коэффициенты Фурье по общим формулам (28.29)–(28.32), полагая $l = p$ (с пределами интегралов 0 и 2π), поскольку функция задана в интервале $(0;\ 2p)$:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)dx = \frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2p}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{2p} = p;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{x}{2}\cos nxdx = \begin{vmatrix} u = \frac{x}{2}, & du = \frac{1}{2}dx \\ dv = \cos nxdx, & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{x}{2n}\sin nx\Big|_0^{2p} - \frac{1}{2n}\int_0^{2p}\sin nxdx\right) = -\frac{1}{2p\,n^2}\int_{-p}^{0}\sin nxd(nx) =$$

$$= \frac{1}{2p\,n^2}\cos nx\Big|_0^{2p} = \frac{1}{2p\,n^2}\cos 2p\,n - \frac{1}{2p\,n^2}\cos 0 = \frac{\cos 2p\,n - 1}{p\,n^2} = 0,$$

так как $\cos 2np = 1$, $n \in \mathbf{N}$;

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{x}{2}\sin nxdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \frac{x}{2}, & du = \frac{1}{2}dx \\ dv = \sin nxdx, & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} = \frac{1}{p}\left(-\frac{x}{2n}\cos nx\Big|_0^{2p} + \frac{1}{2n}\int_0^{2p}\cos nxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{p}\left(-\frac{2p}{2n}\cos 2p\,x + 0 + \frac{1}{2n^2}\sin nx\Big|_0^{2p}\right) = -\frac{1}{n}.$$

Таким образом, согласно формуле (28.29), искомый ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$\frac{x}{2} \sim \frac{p}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому в точках ее непрерывности $(x \in (0;\ 2p))$ ряд Фурье сходится к $f(x)$, а в граничных точках $x = 0$ и $x = 2p$ сумма полученного ряда равна $\frac{p}{2}$, так как

$$S(2p) = S(0) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to 2p-0} f(x) + \lim_{x\to 0+0} f(x)) = \frac{1}{2}(p+0) = \frac{p}{2}.$$

График суммы полученного ряда изображен на рис. 28.9.

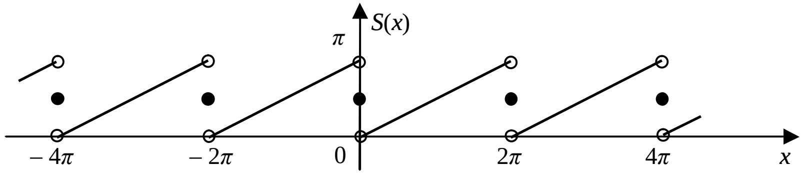


Рис. 28.9

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$, $x\in[-1;1]$, считая ее заданной на периоде.

Решение. Изобразим график заданной функции (рис. 28.10).

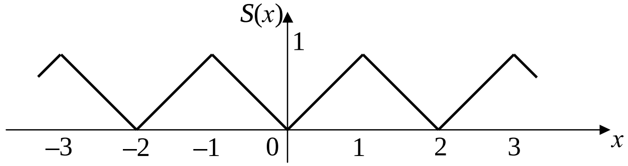


Рис. 28.10

Поскольку функция $f(x)$ является четной, то вычисляем ее коэффициенты Фурье по формулам (28.29)–(28.32), учитывая, что ее ряд Фурье не содержит синусов ($b_n=0$). Полагаем $l=1$ и берем пределами интегралов 0 и 1, поскольку функция задана на отрезке $[-1;1]$:

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,dx=2\int_0^1 x\,dx=2\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=1;$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ dv=\cos n\pi x\,dx, & v=\dfrac{1}{\pi n}\sin n\pi x\end{matrix}\right|=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\sin n\pi x\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2n^2}\int_0^1\sin n\pi x\,d(n\pi x)=\frac{2}{\pi^2n^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi^2n^2}\cos\pi n-\frac{2}{\pi^2n^2}\cos 0=$$

$$=\frac{2(\cos\pi n-1)}{\pi^2n^2}=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2n^2}.$$

Отсюда следует, что $a_n=0$ при четном n, $a_n=-\dfrac{4}{\pi^2n^2}$ при нечетном n.

Таким образом, согласно формуле (28.29), искомый ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=|x|\sim\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому в точках ее непрерывности ряд Фурье сходится к $f(x)$ на всей числовой прямой.

Пример 5. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=1-x$, заданную на промежутке [0; 1], как на полупериоде:

1) по синусам; 2) по косинусам.

Решение. 1) Продолжим заданную функцию на промежуток [– 1; 0] нечетным образом, т. е. положим

$$f(x)=\begin{cases}-1-x, & \text{если } -1\le x<0;\\ 1-x, & \text{если } 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Далее продолжим ее периодически (рис. 28.11).

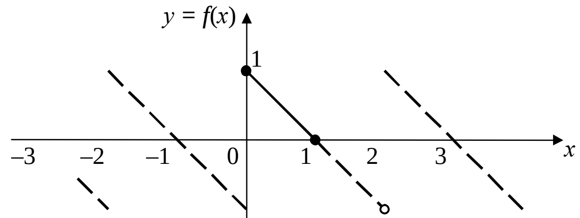


Рис. 28.11

Поскольку функция $f(x)$ является нечетной, то ее ряд Фурье содержит только синусы ($a_n=0$, $n=0,1,2,\ldots$). Вычисляем его коэффициенты Фурье по формулам (28.28)–(28.31), полагая $l=1$. Пределами интегралов берем 0 и 1, поскольку функция задана на промежутке [0; 1]:

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_0^1(1-x)\sin n\pi x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=1-x, & du=-dx\\ dv=\sin n\pi x\,dx, & v=-\dfrac{1}{\pi n}\cos n\pi x\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-x}{n}\cos n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\cos n\pi x\,dx\right)=\frac{2}{\pi n}-\frac{2}{\pi^2n^2}\sin n\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi n}.$$

Таким образом, согласно формуле (28.28), искомый ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=1-x\sim\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin np\,x.$$

2) Продолжим заданную функцию на промежуток [–1; 0] четным образом, т. е. положим

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{если } -1\le x<0;\\ 1-x, & \text{если } \ \ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Затем продолжим его периодически (рис. 28.12).

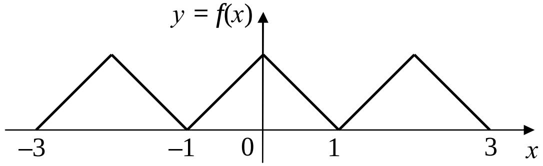


Рис. 28.12

Поскольку функция $f(x)$ является четной, то ее ряд Фурье содержит только косинусы ($b_n=0,\ n\in\mathbf{N}$). Вычисляем его коэффициенты Фурье по формулам (28.29)–(28.32), полагая $l=1$. Пределами интегралов берем 0 и 1, поскольку функция задана на промежутке [0; 1]:

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,dx=2\int_0^1(1-x)dx=-2\left(\frac{(1-x)^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=1;$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\frac{np\,x}{1}\,dx=2\int_0^1(1-x)\cos np\,x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=1-x, & du=-dx\\ dv=\cos np\,x\,dx, & v=\dfrac{1}{p\,n}\sin np\,x\end{matrix}\right|=\frac{2}{p}\left(\frac{1-x}{n}\sin np\,x\Big|_0^1+\frac{1}{n}\int_0^1\sin np\,x\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{p^2n^2}\int_0^1\sin np\,x\,d(np\,x)=-\frac{2}{p^2n^2}\cos np\,x\Big|_0^1=-\frac{2}{p^2n^2}\cos p\,n+$$

$$+\frac{2}{p^2n^2}\cos 0=-\frac{2(\cos p\,n-1)}{p^2n^2}=-\frac{2((-1)^n-1)}{p^2n^2}.$$

Откуда следует, что $a_n=0$ при четном n, $a_n=\dfrac{4}{p^2n^2}$ при нечетном n.

Таким образом, согласно формуле (28.29), искомый ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=1-x\sim\frac{1}{2}+\frac{4}{p^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)p\,x}{2}.$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому во всей области определения ряд Фурье сходится к $f(x)$, а на всей числовой прямой сумма полученного ряда определяет периодическую функцию с периодом 2.

Пример 6. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме $2p$-периодическую функцию $f(x)=e^{-x},\ \ x\in(-p;p)$.

Решение. Изобразим график этой функции (рис. 28.13).

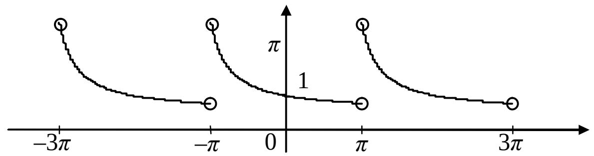


Рис. 28.13

По формуле (28.33) вычисляем

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-\frac{inp\,x}{l}}dx=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}e^{-x}e^{-inx}dx\ \ =\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}e^{-(1+in)x}dx=$$

$$=\frac{1}{2p}\frac{e^{-(1+in)x}}{1+in}\Bigg|_p^{-p}=\frac{1}{2p}\frac{e^{(1+in)p}-e^{-(1+in)p}}{1+in}=\frac{1}{2p}\frac{e^pe^{inp}-e^{-p}e^{-inp}}{1+in}.$$

По формулам Эйлера $e^{\pm inp}=\cos np\pm i\sin np=(-1)^n$.

Следовательно, $c_n=\dfrac{1}{2p}\dfrac{(-1)^n(e^p-e^{-p})}{1+in}$.

Таким образом, согласно формуле (28.32), искомый ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=e^{-x}\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}=\frac{e^p-e^{-p}}{2p}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+in}e^{inx}.$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому в интервалах $(-p+2p\,k;\ p+2p\,k)$, $k\in\mathbf{Z}$, ряд Фурье сходится к функции $f(x)=e^{-x}$, а в точках $x=(2k-1)p$, $k\in\mathbf{Z}$ его сумма равна

$$\frac{e^p+e^{-p}}{2p}=\frac{1}{p}\cdot\frac{e^p+e^{-p}}{2}=\frac{1}{p}\operatorname{ch}p.$$

Задания

I уровень

1.1. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию (с периодом $2p$). Запишите первые три его слагаемых. Исследуйте ряд на сходимость. Постройте графики данной функции и суммы ряда:

1) $f(x)=\begin{cases}-1, & -p\le x<0,\\ 2, & 0\le x\le p;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}0, & -p\le x<0,\\ 3, & 0\le x\le p;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}-7, & -p\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le p;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}-5, & -p\le x<0,\\ -9, & 0\le x\le p;\end{cases}$

5) $f(x)\equiv 2,\ \ 0\le x\le 2p;$ 6) $f(x)\equiv p,\ \ 2p\le x\le 4p;$

7) $f(x)=\begin{cases}1, & -p\le x<0,\\ -1, & 0\le x\le p;\end{cases}$ 8) $f(x)\equiv -3,\ \ -p\le x\le p.$

1.2. Разложите в ряд Фурье функцию, заданную на промежутке $[0;p]$, как на полупериоде:

а) по синусам; б) по косинусам.

Запишите первые три члена полученного ряда. Исследуйте ряд на сходимость. Постройте графики данной функции и суммы ряда:

1) $f(x)\equiv 4;$ 2) $f(x)\equiv p;$ 3) $f(x)\equiv -p;$

4) $f(x)\equiv -5;$ 5) $f(x)\equiv 6;$ 6) $f(x)\equiv -2p;$

7) $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\dfrac{p}{2},\\ 2, & \dfrac{p}{2}\le x\le p;\end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases}-1, & 0\le x<\dfrac{p}{2},\\ 0, & \dfrac{p}{2}\le x\le p.\end{cases}$

II уровень

2.1. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию (с периодом $2p$). Запишите первые три его слагаемых. Исследуйте ряд на сходимость. Постройте графики данной функции и суммы ряда:

1) $f(x)=\begin{cases}3x, & -p\le x<0,\\ 2, & 0\le x\le p;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}4-x, & -p\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le p;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}0, & -p\le x\le 0,\\ x-5, & 0<x\le p;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}7x, & -p\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le p;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}3, & -p\le x<0,\\ \dfrac{x}{3}, & 0\le x\le p;\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{p+2x}{3}, & -p\le x<0,\\ 1, & 0\le x\le p;\end{cases}$

7) $f(x)=11x,\ \ 0\le x\le 2p;$ 8) $f(x)=3x-\dfrac{p^2}{4},\ \ -p\le x\le p.$

2.2. Разложите в ряд Фурье функцию, заданную на промежутке $[0;\, l]$, как на полупериоде:

а) по синусам; б) по косинусам.

Запишите первые три члена полученного ряда. Исследуйте ряд на сходимость. Постройте графики данной функции и суммы ряда:

1) $f(x)=x+1,\ \ l=1;$ 2) $f(x)=-x-2,\ \ l=2;$

3) $f(x)=x+p,\ \ l=2p;$ 4) $f(x)=2x,\ \ l=3;$

5) $f(x)=p\,x,\ \ l=3p;$ 6) $f(x)=-2x+1,\ \ l=6;$

7) $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\dfrac{l}{2},\\ 2x, & \dfrac{l}{2}\le x\le l;\end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases}-x-4, & 0\le x<\dfrac{l}{3},\\ 0, & \dfrac{l}{3}\le x\le l.\end{cases}$

2.3. Разложите в ряд Фурье $2l$-периодическую функцию. Исследуйте ряд на сходимость. Постройте графики данной функции и суммы ряда.

1) $f(x)=\begin{cases}-2, & -l\le x<0,\\ 2, & 0\le x\le l,\end{cases}\ l=3;$ 2) $f(x)=\begin{cases}3, & -l\le x<0,\\ 7, & 0\le x\le l,\end{cases}\ l=1;$

3) $f(x)=\begin{cases}-3, & -l\le x<0,\\ 5, & 0\le x\le l,\end{cases}\ l=2;$ 4) $f(x)=\begin{cases}-3, & -l\le x<0,\\ -6, & 0\le x\le l,\end{cases}\ l=4;$

5) $f(x)\equiv 3,\ \ 0\le x\le 2l,\ \ l=5;$ 6) $f(x)=e^x,\ -l\le x\le l,\ \ l=p;$

7) $f(x)=3-x,\ \ l\le x\le 2l,\ \ l=5;$ 8) $f(x)=p\,x,\ 3l\le x\le 5l,\ \ l=1.$

2.4. Разложите в ряд Фурье функцию, заданную на промежутке, как на полупериоде, продолжив ее четным и нечетным образом. Исследуйте ряд на сходимость. Постройте графики данной функции и суммы ряда:

1) $f(x)\equiv 2-p,\ \ 0\le x\le p;$ 2) $f(x)\equiv p-1,\ \ -p\le x\le 0;$

3) $f(x)=2+x,\ \ 0\le x\le 1;$ 4) $f(x)=p-x,\ \ -2\le x\le 0;$

5) $f(x)\equiv 12,\ \ 0\le x\le 2p;$ 6) $f(x)\equiv -p^2,\ \ -5p\le x\le 0;$

7) $f(x)=1-2x,\ \ 0\le x\le 3;$ 8) $f(x)\equiv -p\,x+2,\ \ -11\le x\le 0.$

III уровень

3.1. Разложите в ряд Фурье функцию, заданную на указанном промежутке, как на полупериоде:

1) $f(x)=2x-p\,,\ \ 0\le x\le p\,;$ 2) $f(x)=(p-1)x,\ \ -p\le x\le 0;$

3) $f(x)=2+e^{x},\ \ 0\le x\le p\,;$ 4) $f(x)=p-e^{-x},\ \ -p\le x\le 0;$

5) $f(x)=e^{5x},\ \ 0\le x\le 2p\,;$ 6) $f(x)=2\sin x,\ \ 0\le x\le p\,;$

7) $f\left(x\right)=-p^{\,2}-\cos x,\ \ -2p\le x\le 0.$

3.2. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию (с периодом $2p$). Запишите первые три его слагаемых. Исследуйте ряд на сходимость. Постройте графики данной функции и суммы ряда:

1) $f(x)=p\,x^{2},\ \ 0\le x\le 2p\,;$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{2}x-x^{2},\ \ -p\le x\le p\,;$

3) $f(x)=3e^{-3x},\ \ -p\le x\le p\,;$ 4) $f(x)=\dfrac{p}{2}-\left|x\right|,\ \ -p\le x\le p\,;$

4) $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x},\ \ -p\le x\le p\,;$ 5) $f(x)=\dfrac{p}{2}x^{2}+\dfrac{p^{\,2}}{9},\ \ -p\le x\le p\,;$

6) $f(x)=-3x^{2}+\dfrac{1}{3}x-5,\ \ 0\le x\le 2p\,.$

3.3. Разложите в ряд Фурье $2l$-периодическую функцию. Исследуйте ряд на сходимость:

1) $f(x)=\begin{cases}-2x, & -l\le x<0,\\ 2x, & 0\le x\le l,\end{cases}\quad l=2;$

2) $f(x)=\begin{cases}-3x+1, & -l\le x<0,\\ -6x-1, & 0\le x\le l,\end{cases}\quad l=4;$

3) $f(x)=p\,x,\ \ 4l\le x\le 6l,\ \ l=1;$

4) $f(x)=\left|\sin x\right|,\ \ 0\le x\le 2l,\ \ l=1;$

5) $f\left(x\right)=\begin{cases}-2x^{2}, & -l\le x<0,\\ x, & 0\le x\le l,\end{cases}\quad l=1;$

6) $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+5, & -l\le x<0,\\ 2x^{2}-5, & 0\le x\le l,\end{cases}\quad l=3;$

7) $f(x)=3x^{2}-5,\ \ 0\le x\le 2l,\ \ l=5;$

8) $f(x)=p\,x+3x\left|x\right|,\ \ -l\le x\le l,\ \ l=1.$

3.4. Разложите в ряд Фурье функцию, заданную на промежутке, как на полупериоде, продолжив ее четным и нечетным образом. Исследуйте ряд на сходимость. Постройте графики данной функции и суммы ряда:

1) $f(x)=2-x^{2},\ \ 0\le x\le p\,;$ 2) $f(x)=(p-1)(x-1)^{2},\ \ -p\le x\le 0;$

3) $f(x)=2^{x},\ \ 0\le x\le 2;$ 4) $f(x)=\operatorname{ch}x,\ \ -p\le x\le 0;$

5) $f(x)=e^{5x}+5,\ \ 0\le x\le 3;$ 6) $f(x)=\operatorname{sh}2x,\ \ -2p\le x\le 0;$

7) $f(x)=e^{-\frac{x}{2}},\ \ 0\le x\le 4p\,;$ 8) $f(x)=x\cos x,\ \ 0\le x\le p\,.$

28.6. Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, абсолютно интегрируема на бесконечном промежутке, и удовлетворяет условиям теоремы Дирихле в любом конечном промежутке, то справедливо следующее интегральное представление функции $f(x)$:

$$f(x)\sim\int_{0}^{\infty}(A(a)\cos a\,x+B(a)\sin a\,x)\,da\,, \tag{28.34}$$

где $A(a)=\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos a\,t\,dt,\ \ B(a)=\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin a\,t\,dt,$

которое называется ***интегралом Фурье для функции f(x).***

Интеграл Фурье для функции $f(x)$ сходится к самой функции в точках непрерывности. В каждой точке разрыва x_k функции ее интеграл Фурье сходится к полусумме односторонних пределов функции при стремлении x к x_k слева и справа, т. е. дает значение, равное $\dfrac{1}{2}(f(x_k-0)+f(x_k+0))$.

Комплексная форма интеграла Фурье:

$$f(x)\sim\int_{-\infty}^{+\infty}C\left(a\right)e^{-ia\,x}\,da\,, \tag{28.35}$$

где $C(a) = \dfrac{1}{2p} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iat} dt.$

Частные случаи представления функции *f*(*x*) интегралом Фурье

1. Если функция *f*(*x*) является ***четной*** $(f(x) = f(-x))$, то ее ***интеграл Фурье содержит только косинусы***:

$$A(a) = \frac{2}{p} \int\limits_0^{\infty} f(t) \cos a t dt, \quad B(a) = 0,$$

$$f(x) \sim \int\limits_0^{\infty} A(a) \cos(a x) da. \qquad (28.36)$$

2. Если функция *f*(*x*) является ***нечетной*** $(f(-x) = -f(x))$, то ее ***интеграл Фурье содержит только синусы***:

$$A(a) = 0, \quad B(a) = \frac{2}{p} \int\limits_0^{\infty} f(t) \sin a t dt,$$

$$f(x) \sim \int\limits_0^{\infty} B(a) \sin(a x) da, \qquad (28.37)$$

3. Если функция *f*(*x*) задана на промежутке $[0; +\infty)$, то ее интеграл Фурье может быть получен следующими двумя способами:

а) по формуле (28.36) при четном продолжении функции на промежутке $(-\infty; 0]$ (график данной функции продолжается на промежутке $(-\infty; 0]$ симметрично относительно оси ординат, рис. 28.14),

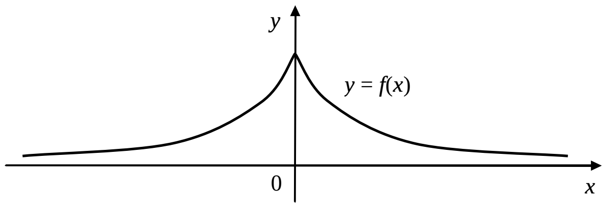


Рис. 28.14

б) по формуле (28.37) при нечетном продолжении функции на промежутке $(-\infty; 0]$ (график данной функции продолжается на промежутке $(-\infty; 0]$ симметрично относительно начала координат, рис. 28.15).

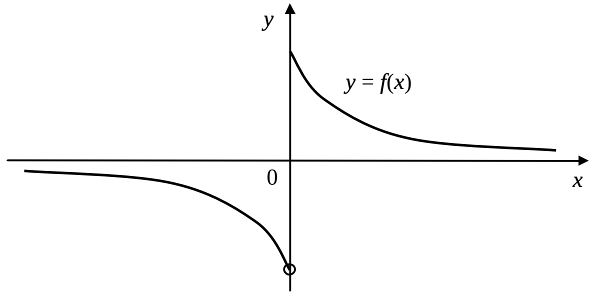


Рис. 28.15

Пример 1. Заданную функцию представить в виде интеграла Фурье.

1) $f(x) = \begin{cases} -e^{x}, & \text{если} \quad x \le 0, \\ e^{-x}, & \text{если} \quad x > 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad 0 < x < 3, \\ 1, & \text{если} \quad x = 3, \\ 0, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$

Решение. 1) Заданная функция нечетная (рис. 28.16)

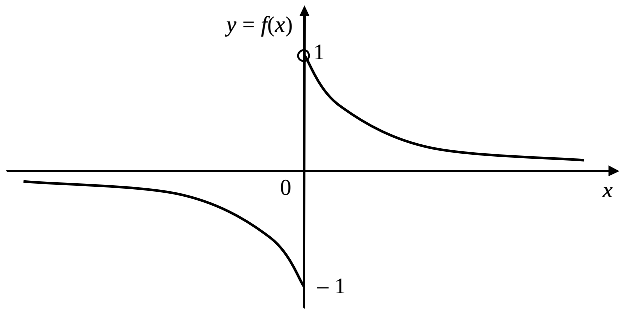


Рис. 28.16

Поэтому, согласно формуле (28.37), $A(a) = 0.$

Вычисляем:

$$B(a) = \frac{2}{p} \int\limits_0^{\infty} f(t) \sin a t dt = \frac{2}{p} \int\limits_0^{\infty} e^{-t} \sin a t dt = \lim_{b \to \infty} \frac{2}{p} \int\limits_0^{b} e^{-t} \sin a t dt =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \frac{e^{-t}(\sin a t + a \cos a t)}{1 + a^2} \Bigg|_{t=b}^{t=0} = \frac{a}{1 + a^2}.$$

Тогда $f(x) \sim \int\limits_0^{\infty} B(a)\sin(a\,x)\,da = \int\limits_0^{\infty} \frac{a\sin(a\,x)}{1+a^2}\,da.$

На всей числовой оси, кроме точки $x=0$, интеграл Фурье сходится к функции $f(x)$, а в точке $x=0$ интеграл Фурье равен $\frac{1}{2}(\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) + \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)) = \frac{1}{2}(-1+1)=0.$

2) Заданная функция $f(x)$ определена только на промежутке $(0;+\infty)$, поэтому ее можно представить интегралом Фурье двумя способами:

1-й способ. При четном продолжении заданной функции $f(x)$ на промежутке $\left(-\infty, 0\right]$ (рис. 28.17), согласно формуле (28.35), получим:

$$A(a) = \frac{2}{p}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos a\,t dt = \frac{2}{p}\int\limits_0^{3} 2\cos a\,t dt = \frac{4}{p}\frac{\sin a\,t}{a}\Bigg|_{t=0}^{t=3} = \frac{4\sin 3a}{pa}.$$

$$B(a)=0,\quad f(x) \sim \int\limits_0^{\infty} A(a)\cos(a\,x)\,da = \frac{4}{p}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin 3a}{a}\cos(a\,x)\,da.$$

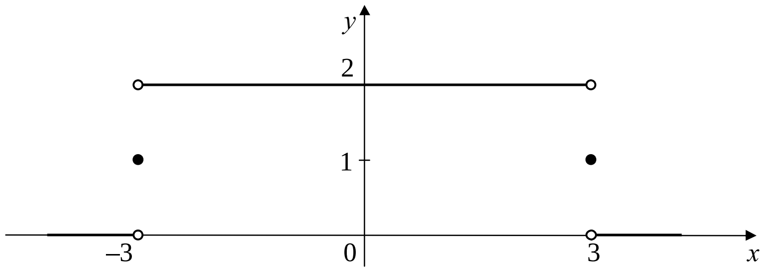


Рис. 28.17

2-й способ. При нечетном продолжении заданной функции $f(x)$ на промежутке $\left(-\infty; 0\right]$ (рис. 28.18), согласно формуле (28.36), получим:

$A(a)=0,$

$$B(a) = \frac{2}{p}\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin a\,t dt = \frac{2}{p}\int\limits_0^{3} 2\sin a\,t dt = \frac{4}{p}\frac{\cos a\,t}{a}\Bigg|_{t=3}^{t=0} = \frac{4(1-\cos 3a)}{pa}.$$

$$f(x) \sim \int\limits_0^{\infty} B(a)\sin(a\,x)\,da = \frac{4}{p}\int\limits_0^{\infty}\frac{(1-\cos 3a)}{a}\sin(a\,x)\,da.$$

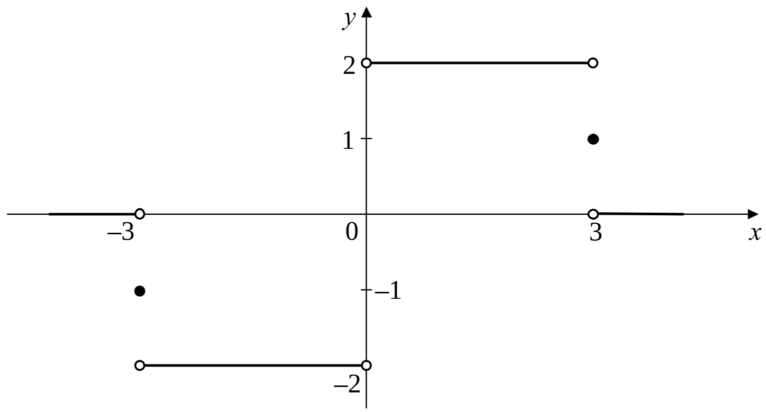


Рис. 28.18

Оба полученных интеграла Фурье представляют заданную функцию во всей области ее определения, включая и точку $x=3$, в которой функция имеет разрыв, поскольку в этой точке значение каждого из полученных интегралов равно:

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 3-0} f(x) + \lim_{x\to 3+0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(2+0)=1.$$

Задания

I уровень

1.1. Постройте график заданной функции и представьте ее интегралом Фурье:

1) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\le 0,\\ 2, & \text{если } x>0;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}3, & \text{если } 0<x<5,\\ 1, & \text{если } x=5,\\ 0, & \text{если } x>5;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}2, & \text{если } x\le 0,\\ -2, & \text{если } x>0;\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}3, & \text{если } 0<x\le 2,\\ -1, & \text{если } x>2;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}p, & \text{если } x\le 0,\\ 0, & \text{если } x>0;\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } 0<x\le p,\\ 7, & \text{если } x>p;\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}-2p, & \text{если } x\le 0,\\ 2, & \text{если } x>0;\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases}3, & \text{если } 0<x\le 3p,\\ 3p, & \text{если } x>3p.\end{cases}$

II уровень

2.1. Постройте график заданной функции и представьте ее интегралом Фурье:

1) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|>1,\\ 0, & 0<x<1,\\ -1, & -1<x<0;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}-1, & |x|>2,\\ 0, & 0<x<2,\\ 1, & -2<x<0;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}0, & |x|>3,\\ 2, & 0<x<3,\\ -3, & -3<x<0;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}7, & |x|>4,\\ -2, & 0<x<4,\\ 0, & -4<x<0;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}p, & |x|>1,\\ 0, & 0<x<1,\\ -p, & -1<x<0;\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}9, & |x|>4,\\ 0, & |x|\le 4;\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}-p, & |x|>p,\\ p, & |x|\le p;\end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases}-e, & |x|>3p,\\ e, & |x|\le 3p.\end{cases}$

2.2. Постройте график данной функции и представьте ее интегралом Фурье в комплексной форме:

1) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & |x|>1;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}-1, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ -1, & |x|>1;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}-2, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}0, & |x|<2,\\ -3, & |x|>2;\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}p, & |x|<7,\\ -p, & |x|>7;\end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases}-e, & |x|<p,\\ e, & |x|>p.\end{cases}$

III уровень

3.1. Постройте график функции и представьте ее интегралом Фурье:

1) $f(x)=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ 1, & 0<x<1,\\ -1, & -1<x<0.\end{cases}$

Используйте результат для вычисления $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^3 t}{t}dt;$

2) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0,5, & x=1,\\ 0, & |x|<1.\end{cases}$

Используйте результат для вычисления $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt.$

3) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -p<x<p,\\ 0, & |x|\ge p;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x\le p,\\ 0, & x>p;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -1<x\le 0,\\ 1-2x, & 0<x<1,\\ 0, & |x|\ge 1;\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x<p,\\ 0, & x\ge p;\end{cases}$

7) $f(x)=e^{-|x|};$ 8) $f(x)=e^{-x^2}.$

3.2. Постройте график функции и представьте ее интегралами Фурье в комплексной форме:

1) $f(x)=\begin{cases}e^{x}, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}0, & |x|<2,\\ e^{-3x}, & |x|>2;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}e^{-x}-1, & |x|<3,\\ e^{x}, & |x|>3;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}e^{-4x}, & |x|<4,\\ -3+e^{2x}, & |x|>4;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}-2e^{|x|}, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}0, & |x|<2,\\ -3xe^{-|x|}, & |x|>2;\end{cases}$

7) $f(x)=e^{-7|x|};$ 8) $f(x)=e^{-x^2}.$

3.3. Функцию $f(x)=e^{-px}$, $0<x<\infty$, представьте интегралом Фурье, продолжая ее четным образом и нечетным.

29. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

29.1. Основные понятия теории функций комплексной переменной

Множество всех комплексных чисел обозначают C. Между множеством C и множеством точек (x, y) плоскости xOy существует взаимно однозначное соответствие. Плоскость xOy называют ***комплексной плоскостью (плоскостью C)***.

Множество C пополняют элементом $z = \infty$, который называется ***бесконечностью*** или ***бесконечно удаленной точкой***. Комплексная плоскость, которую пополнили бесконечностью, называется ***расширенной комплексной плоскостью и обозначается*** $\hat{C}$.

Множество точек $z \in C$, которые лежат внутри круга радиуса e с центром в точке z_0 называется ***e-окрестностью точки*** z_0, т. е. $U_e(z_0) = \{z \mid z \in C, \mid z - z_0 \mid < e\}$.

Проколотой e-окрестностью точки z_0 называется ее e-окрестность без центра z_0.

Для бесконечной точки $z = \infty$ из расширенной плоскости $\hat{C}$ понятие r***-окрестности*** определяется как множество точек, которые находятся вне круга радиуса r с центром в начале системы координат, т. е. это множество точек z, для которых $|z| > r$, $r > 0$.

Множество D называют ***ограниченным***, если существует круг конечного радиуса с центром в начале системы координат, который содержит это множество.

Точка z_1 называется ***внутренней*** для множества D, если существует окрестность этой точки, целиком содержащаяся внутри множества D. Множество D, которое содержит только внутренние точки, называется ***открытым множеством***.

Связным называется множество, любые две точки которого можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей множеству. Множество D точек комплексной плоскости называют ***областью***, если оно является открытым и связным.

Граничной точкой области D называется такая точка, которая сама не принадлежит D, но в любой ее окрестности есть точки области D. Совокупность всех граничных точек области D называется ее ***границей***. Область D с присоединенной к ней границей Γ называется ***замкнутой областью*** $\bar{D}$: $\bar{D} = D \cup \Gamma$.

Точки комплексной плоскости, которые не принадлежат $\bar{D}$, называются ***внешними*** для области D.

Предел последовательности комплексных чисел

Последовательность (z_n) комплексных чисел определяется как функция натурального аргумента, которая каждому значению $n \in \mathbf{N}$ ставит в соответствие единственное комплексное число $z_n \in C$.

Число $s = a + bi$ называется ***пределом*** последовательности (z_n), $z_n = x_n + iy_n$, если для любого $e > 0$ существует число $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что для любого номера $n \ge n_0$ выполняется:

$\mid z_n - s \mid < e$.

Факт, что последовательность (z_n) имеет предел s, записывают так:

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = s$ (или $z_n \to s$, $n \to \infty$).

Последовательность (z_n), имеющая предел, называется ***сходящейся***.

Используя понятие e-окрестности, предел последовательности определяют и так: число e называется пределом последовательности (z_n), если для любого $e > 0$ существует такой номер $n_0(e)$, что, начиная с него, все элементы последовательности находятся в e-окрестности точки e.

Свойства предела последовательности комплексных чисел

1. Для того, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = a + bi, \qquad (29.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b. \qquad (29.2)$$

2. Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = s$, следует $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |s|$.

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = s$, $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = s'$, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + z'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n + \lim\limits_{n\to\infty} z'_n = s + s'$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n z'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} z'_n = s \cdot s'$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{z_n}{z'_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} z'_n} = \dfrac{s}{s'}$ $(z'_n \neq 0, s' \neq 0)$.

Последовательность (z_n) называется ***сходящейся к ¥***, если для любого $r > 0$ существует номер $n_0(r)$ такой, что для любого номера $n \geq n_0(r)$ выполняется неравенство

$$|z_n| > r.$$

Другими словами, сходимость последовательности к бесконечности означает, что для любого сколь угодно большого числа $r > 0$ можно найти такой номер, начиная с которого все элементы последовательности находятся в r-окрестности точки $z = \infty$. Символически это записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

Свойства последовательности, сходящейся к ¥

1. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ $(z_n \neq 0)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{z_n} = 0$.

Пример 1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n} + i\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = 1 + i.$$

Решение. Зададим произвольное малое число $e > 0$ и рассмотрим e-окрестность точки $s = 1 + i$. Покажем, что существует такое натуральное число $n_0(e)$, что для любого $n \geq n_0(e)$ все точки рассматриваемой последовательности будут находиться в e-окрестности точки s. Это значит, что должно выполняться неравенство

$$\left|1 + \frac{1}{n} + i\left(1 - \frac{1}{n}\right) - (1+i)\right| < e, \quad \forall n \geq n_0(e).$$

Поскольку

$$\left|1 + \frac{1}{n} + i\left(1 - \frac{1}{n}\right) - (1+i)\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{i}{n}\right| = \left|\frac{1-i}{n}\right| = \frac{|1-i|}{n} = \frac{\sqrt{2}}{n},$$

то последнее неравенство принимает вид $\dfrac{\sqrt{2}}{n} < e$. Решаем его относительно n: $ne > \sqrt{2}$, $n > \dfrac{\sqrt{2}}{e}$ и полагаем $n_0(e) = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{e}\right] + 1$. Поскольку $n_0(e)$ найдено, то тем самым доказано, что предел рассматриваемой последовательности равен $1 + i$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, если последовательность (z_n) задается формулой:

1) $z_n = \dfrac{2^n - 5^{n+2}}{2^{n+1} + 5^{n+1}} - \left(\dfrac{2n^2 + 2}{2n^2 + 1}\right)^{n^2} i$; 2) $z_n = \dfrac{2n^2 - 3ni}{1 + n^2 i}$.

Решение. 1) Найдем отдельно пределы действительной и мнимой частей данной последовательности, что мы можем сделать, используя свойство 1) предела последовательности. По формулам (29.1) и (29.2) получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n - 5^{n+2}}{2^{n+1} + 5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n - 25\right)}{5^n\left(2\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5\right)} = -5,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 1}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n^2 + 1}\right)^{(2n^2+1)\frac{n^2}{2n^2+1}} = \sqrt{e}.$$

Получили, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -5 - \sqrt{e}i$.

2) Запишем сначала элементы последовательности (комплексные числа) в алгебраической форме:

$$z_n = \frac{(2n^2 - 3ni)(1 - n^2 i)}{1 + n^4} = -\frac{3n^3 - 2n^2}{n^4 + 1} - \frac{2n^4 + 3n}{n^4 + 1} i.$$

Легко убедиться, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -2i$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, если последовательность (z_n) задается формулой:

$$z_n = \frac{an^3 + bn^2 - 2n}{cn^2 + 4n} + \frac{cn - 3}{an^2 + bn + 1} i.$$

Решение. В наших обозначениях $z_n = x_n + iy_n$. Значит,
$x_n = \dfrac{an^3+bn^2-2n+5}{cn^2+4n}$, $y_n = \dfrac{cn-3}{an^2+bn+1}$.

Рассмотрим различные случаи.

1. Допустим, что $a \neq 0$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Другими словами, для произвольного $M > 0$ существует номер $n_0(M)$, что для любого $n \geq n_0(M)$ справедливо $|x_n| > M$. Так как $|z_n| = \sqrt{x_n^2+y_n^2} > \sqrt{x_n^2} = |x_n|$, то $|z_n| > |x_n| > M$ $(n \geq n_0(M))$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

2. Пусть $a = 0$. Тогда $x_n = \dfrac{bn^2-2n+5}{cn^2+4n}$, $y_n = \dfrac{cn-3}{bn+1}$.

Рассмотрим далее четыре случая коэффициентов b, c.

Если $b \neq 0$, $c \neq 0$, то находим:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{c},\ \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{c}{b} \text{ и } \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}i.$$

Если $b \neq 0$, $c = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} y_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

Если $b = 0$, $c \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} y_n = \infty.$$

Так как $|z_n| > |y_n|$, то

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

Если $b = 0$, $c = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{2} = -0,5,\ \lim_{n\to\infty} y_n = -3,\ \lim_{n\to\infty} z_n = -0,5-3i.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, если последовательность (z_n) задается формулой:

1) $z_n = \dfrac{2n+3}{3n+1} - \dfrac{n+1}{2n-1}i$;

2) $z_n = \left(\dfrac{2}{n+1} - \dfrac{3n}{3n-1}\right) + \left(\dfrac{n^2}{2n^2+1} + \dfrac{n}{n^3+1}\right)i$;

3) $z_n = (\sqrt{9n^2-2n} - 3n) - \dfrac{2n-3}{\sqrt{4n^2+7}}i$;

4) $z_n = \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!} + \dfrac{(n+2)!}{n!+(n+1)!}i$.

1.2. Пользуясь определением предела последовательности (z_n), докажите, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{2n} + i\left(4 + \dfrac{1}{4n}\right)\right) = 3+4i$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{2n+2} + \dfrac{1-2n}{1+n}i\right) = \dfrac{3}{2} - 2i$.

II уровень

2.1. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, если последовательность (z_n) задается формулой:

1) $z_n = \dfrac{2n+5}{(n+1)^2-(n-3)^2} - \dfrac{4n^2-(2n-1)^2}{3n+2}i$;

2) $z_n = \dfrac{24n^3+7}{16(n+2)^4-(2n+1)^4} + \dfrac{(n+2)^3-(n-3)^3}{11(n+2)^2+(2n+1)^2}i$;

3) $z_n = \dfrac{\sqrt{3n^3}+2n^2}{7n+\sqrt[5]{2+5n^3-n^{10}}} - \dfrac{(n-\sqrt[3]{n})\cdot\sqrt[3]{8n^3-3}}{(n+2\sqrt{n})\cdot\sqrt{2n^2+3}}i$;

4) $z_n = \dfrac{n\sqrt[4]{7n+2}+\sqrt{81n^4-2n^2+3}}{(n+\sqrt[4]{n})\cdot\sqrt{7-2n+4n^2}} + \dfrac{(n+\sqrt[3]{n})\cdot\sqrt[3]{n^3+2}}{n\sqrt[7]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}i$;

5) $z_n = (\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)} - \sqrt{n^4-9}) + n(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n)i$;

6) $z_n = \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-2n(2n+2)!} - \dfrac{(n-1)!+(2n-1)^2(n-2)!}{4n!-(n-1)!}i$;

7) $z_n = \dfrac{2+3\cdot4^{-n}+5\cdot7^{-n}}{9^{-n}+7\cdot5^{-n}+4} + \dfrac{7^{n+1}+2\cdot3^n}{3\cdot7^{n-1}+5\cdot4^{n+1}}i$.

2.2. Пользуясь определением предела, докажите, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2(n^2+4)}+\dfrac{2n^2+7}{n^2+4}i\right)=2i;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\big(2n+(n+1)i\big)=\infty.$

III уровень

3.1. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, если последовательность (z_n) задается формулой:

1) $z_n=\dfrac{1-2+4-5+...-(2+3n)}{\sqrt{4n^2+3}}+\dfrac{1-2+4-4+...+(1+3n)-(2+2n)}{\sqrt{2n^4+n^3+1}}i;$

2) $z_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)+$

$+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{1+3(n-1)}+\sqrt{1+3n}}\right)i;$

3) $z_n=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{n^2-12n+35}\right)+$

$+\left(\dfrac{(n+10)^{10}}{n^{10}+10^{10}}+\dfrac{(n+20)^{10}}{n^{10}+20^{10}}+...+\dfrac{(n+100)^{10}}{n^{10}+100^{10}}\right)i;$

4) $z_n=x_{2n}+iy_n$, где $y_n=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$, а последовательность (x_n) задается рекуррентно:

$x_1=0,\ x_{2n}=x_{2n-1}+a,\ x_{2n+1}=a\cdot x_{2n}$

(a – действительное число, $a>0$, $a\neq 1$).

3.2. Пользуясь определением предела, докажите, что

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2(n^2+4)}+\dfrac{2n^2+7}{n^2+4}i\right)\neq 1+2i$

(необходимо найти $e^*>0$).

3.3. Дана последовательность (z_n), где

$z_n=\sin((-1)^n(2n+1)a)+i\cos((-1)^{n+1}(2n+1)b)$.

1) Найдите две пары значений a и b: (a_1, b_1), (a_2, b_2),

$(a_i\neq 0,\ b_i\neq 0)$ таких, что при этих значениях $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ существует, и вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ при (a_1, b_1) и при (a_2, b_2);

2) укажите пару значений (a_3, b_3), при которой $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ не существует, и докажите этот факт.

29.2. Функция комплексной переменной, ее предел и непрерывность

Пусть D – некоторое множество комплексных чисел. Если каждому $z\in D$ по некоторому правилу функции f ставится в соответствие одно или несколько комплексных чисел w, то говорят, что на множестве D задана ***функция комплексной переменной z*** со значениями w, и пишут:

$w=f(z)$.

Если каждому значению z соответствует единственное значение w, то функция называется ***однозначной***. Если существуют такие $z\in D$, которым соответствуют несколько значений w, то функция называется ***многозначной*** (могут быть n-значные, $n\in \mathbf{N}$, и бесконечнозначные функции).

Так как числа z и w имеют действительные и мнимые части, то пишут

$z=x+iy,\quad w=u+iv,$

при этом говорят, что аргумент z функции f лежит в комплексной плоскости C_z, а значение w – в комплексной плоскости C_w (функция f однозначная).

Далее считаем, что функция $f(z)$ однозначна и определена в некоторой проколотой окрестности точки z_0.

Комплексное число S называется ***пределом функции f(z) в точке z₀***, если для любого $e>0$ существует действительное число $d=d(e, z_0)>0$, что для любого z такого, что $0<|z-z_0|<d$, выполняется $|f(z)-S|<e$ (определение ***предела по Коши***).

Комплексное число S называется ***пределом функции f(z) в точке z₀***, если для любой последовательности аргументов (z_n), $z_n\to z_0$, $n\to\infty$, $z_n\neq z_0$, соответствующая последовательность

$(f(z_n))$ значений функции сходится к числу S, т. е. $f(z_n) \to S$, $n \to \infty$ (определение ***по Гейне***).

Наличие предела $S \in C$ функции $f(z)$ в точке z_0 записывают так: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = S$ (или $f(z) \to S$, $z \to z_0$). Используя понятие окрестности, предел функции определяют и так: комплексное число S называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если для любой e-окрестности точки S существует проколотая d-окрестность точки z_0, что для каждой ее точки z соответствующее значение функции $f(z)$ лежит в e-окрестности точки S.

Свойства предела функции

1. Если $S = A + iB, z_0 = x_0 + iy_0$, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = S$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = A, \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = B, \text{ где } f(z) = w = u + iv. \end{cases}$$

2. $\lim\limits_{z \to z_0}(f(z) + g(z)) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) + \lim\limits_{z \to z_0} g(z).$

3. $\lim\limits_{z \to z_0}(f(z) \cdot g(z)) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim\limits_{z \to z_0} g(z).$

4. $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}$ $\left(\lim\limits_{z \to z_0} g(z) \neq 0\right).$

Функция $f(z)$ имеет конечный предел S в точке z_0 тогда и только тогда, когда существует точка $a(z_0, z)$, $a(z_0, z) \to 0$ при $z \to z_0$ такая, что $f(z) = S + a(z_0, z)$.

Могут рассматриваться также пределы: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = S$, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$.

Пусть функция $f(z)$ задана на C и принимает значения из множества C. Функция $f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{z_0}$ **Î** $\boldsymbol{C}$, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и $\lim\limits_{z \to z_0} = f(z_0)$.

Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0), \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0); \end{cases} \quad (z_0 = x_0 + iy_0).$$

Свойства функций, непрерывных в точке и на множестве

1. Если $f(z)$ и $g(z)$ – непрерывные функции в точке z_0, то непрерывными в этой точке являются также функции:

$$f(z) + g(z), \quad f(z) \cdot g(z), \quad \frac{f(z)}{g(z)}, \quad g(z_0) \neq 0.$$

2. Пусть $w = f(z)$ есть непрерывная функция на множестве D и она имеет множество значений G, на котором определена непрерывная функция $g(w)$. Тогда сложная функция $F(z) = g(f(z))$ есть непрерывная функция на множестве D.

3. Пусть множество D является ограниченным и замкнутым, а функция $f(z)$ – непрерывной на D. Тогда $f(z)$ является функцией, ограниченной на множестве D, т. е. $|f(z)| \leq M$, $M \in \mathbf{R}$, и ее модуль достигает на этом множестве своих точных нижней и верхней граней.

Пример 1. Найти действительную и мнимую части функции $w = \dfrac{z - i}{z + i}$.

Решение. В формулу, которая задает функцию, вместо w подставим $u + iv$, а вместо z – $x + iy$ и получим:

$$u + iv = \frac{x + iy - i}{x + iy + i} = \frac{x + i(y-1)}{x + i} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} + i\frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2}.$$

В результате находим

$$u(x,y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}, \quad v(x,y) = \frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2}.$$

Пример 2. Выразить функцию $w = \dfrac{y}{x^2 + y^2} - i\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ в виде зависимости от аргумента z, где $z = x + iy$.

Решение. Функция w записана в виде $w = u(x,y) + iv(x,y)$. Очевидно, что

$$w=\frac{y-ix}{x^2+y^2}=\frac{y-ix}{(y-ix)(y+ix)}=\frac{1}{y+ix}=\frac{-i}{x-iy}.$$

Используя понятие сопряженного комплексного числа, приходим к ответу $w=-\frac{i}{\bar{z}}$.

Пример 3. Дано отображение $w=-2z+3i$. Найти образ линии:
1) $x+y=2$; 2) $|z-1-i|=2$.

Решение. 1) Выделим действительную и мнимую части функции $w=-2z+3i$:

$$w=-2(x+iy)+3i=-2x+(3-2y)i.$$

Для прямой $x+y=2$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} u=-2x, \\ v=3-2y, \\ x+y=2, \end{cases}$$

из которой находим $u+v=3-2(x+y)=3-2\cdot 2=-1$, т. е. $u+v=-1$.

Значит, образом прямой $x+y=2$ является прямая $u+v=-1$.

2) Для заданной окружности рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} w=-2z+3i, \\ |z-(1+i)|=2, \end{cases} \text{ из которой получаем } \begin{cases} 2z=-w+3i, \\ |2z-2(1+i)|=4. \end{cases}$$

Тогда $|-w+3i-2-2i|=4$; $|w-(-2+i)|=4$.

Следовательно, образом заданной окружности радиуса 2 с центром в точке $1+i$ является окружность радиуса 4 с центром в точке $-2+i$.

Пример 4. Найти образ прямой $x+y=2$ при отображении $w=z^2$.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции $w=z^2$ и решим полученную систему уравнений для прямой $x+y=2$. Тогда

$$w=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy.$$

$$\begin{cases} u=x^2-y^2, \\ v=2xy, \\ x+y=2. \end{cases}$$

Находим:

$$u=(x+y)(x-y)=2(x-y)=2(2x-2)=4x-4;$$

$$u=4x-4;\ \ 4x=4+u;$$

$$4y=8-4x=8-(4+u)=4-u.$$

Тогда

$$8v=16xy=(4+u)(4-u)=16-u^2;\ \ 8v=16-u^2.$$

Таким образом, прямая $x+y=2$ при отображении $w=z^2$ переходит в параболу $v=2-\frac{1}{8}u^2$.

Пример 5. Найти образ множества точек, ограниченных прямыми $x=1$, $x=2$ (образ полосы), при отображении $w=z^2$.

Решение. Изобразим заданную полосу (рис. 29.1, а). Выясним, на какую линию отображается функцией $w=z^2$ граница $x=1$. Параметрические уравнения этой прямой

$\begin{cases} x=1, \\ y=y, \end{cases}$ где $y\in(-\infty,+\infty)$, y – параметр. Тогда в комплексном виде линия задается уравнением $z=1+iy$, $y\in\mathbf{R}$. Поскольку $w=z^2=$ $=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2xyi$, то, используя параметрические уравнения заданной прямой линии, имеем $w=(1-y^2)+2yi$, т. е.

$$\begin{cases} u=1-y^2, \\ v=2y. \end{cases}$$

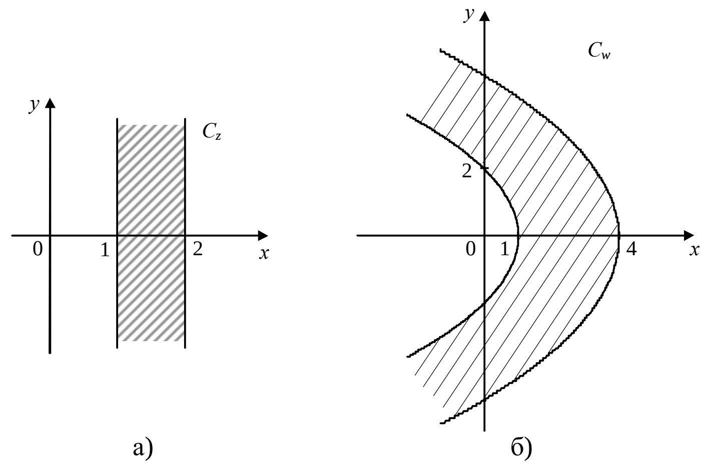


Рис. 29.1

Из последней системы получаем $u=1-\left(\frac{v}{2}\right)^2$. Таким образом, приходим к уравнению параболы $u-1=-\frac{1}{4}v^2$. Аналогично можно убедиться в том, что прямая $x=2$ отображается функцией $w=z^2$ на параболу $u-4=-\frac{1}{16}v^2$. Если взять произвольную прямую $x=c$, $1<c<2$ (которая параллельна границам и лежит внутри полосы), то ее образ при отображении $w=z^2$ есть парабола $u-c^2=-\frac{1}{4c^2}v^2$, которая лежит между параболами $u-1=-\frac{1}{4}v^2$ и $u-4=-\frac{1}{16}v^2$.

Значит, полоса с плоскости C_z, ограниченная прямыми $x=1$ и $x=2$, отображается на полосу, ограниченную названными параболами в плоскости C_w (рис. 29.1, б).

Пример 6. Выяснить, имеет ли функция $f(z)=\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{\operatorname{Im} z}$ предел в точке $z=0$.

Решение. Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся определением предела по Гейне. Рассмотрим сначала последовательность точек $z_n^{(1)}=\frac{i}{n}$, $n\in\mathbf{N}$. Очевидно, что $\frac{i}{n}\to 0$, если $n\to\infty$. Поскольку $\operatorname{Re} z_n^{(1)}=0$, то $f(z_n^{(1)})=0$, $\forall n\in\mathbf{N}$. Значит, $f(z_n^{(1)})\to 0$, $n\to\infty$.

Возьмем теперь последовательность точек $z_n^{(2)}=\frac{1}{n}+\frac{i}{n^2}$. Для нее тоже выполняется $\frac{1}{n}+\frac{i}{n^2}\to 0$, если $n\to\infty$. Однако $\operatorname{Re} z_n^{(2)}=\frac{1}{n}$, $\operatorname{Im} z_n^{(2)}=\frac{1}{n^2}$, а поэтому $f(z_n^{(2)})=1$, $\forall n\in\mathbf{N}$. Значит, $f(z_n^{(2)})\to 1$, $n\to\infty$.

Мы получили, что для двух последовательностей аргументов $(z_n^{(1)})$ и $(z_n^{(2)})$, таких, что $z_n^{(1)}\to 0$ и $z_n^{(2)}\to 0$ при $n\to\infty$, последовательности соответствующих значений функции сходятся к разным числам. Поэтому заданная функция не имеет предела в точке $z=0$.

Пример 7. Вычислить предел функции:

1) $\lim\limits_{z\to 2-3i}\frac{\bar z\operatorname{Re} z}{z^2}$; 2) $\lim\limits_{z\to -1+2i}\frac{z^2+2z+5}{(z+1-2i)^2}$; 3) $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{3z^2+4z-1}{1-2z^2}$.

Решение. 1) Перейдем к функции двух переменных под знаком предела. Тогда

$$\lim_{z\to 2-3i}\frac{\bar z\operatorname{Re} z}{z^2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to -3}}\frac{x(x-iy)}{(x+iy)^2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to -3}}\frac{x^2-iyx}{(x^2-y^2)+2xyi}=\frac{4+6i}{-5-12i}=$$

$$=\frac{(4+6i)(-5+12i)}{169}=-\frac{92}{169}+\frac{18}{169}i.$$

2) Непосредственный переход к частному пределов приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Поэтому сначала преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, а затем вычислим предел:

$$\lim_{z\to -1+2i}\frac{z^2+2z+5}{(z+1-2i)^2}=\lim_{z\to -1+2i}\frac{(z+1-2i)(z+1+2i)}{(z+1-2i)^2}=\lim_{z\to -1+2i}\frac{z+1+2i}{z+1-2i}=\infty.$$

3) После деления на старшую степень числителя и знаменателя дроби (как это делается для действительных функций) получим

$$\lim_{z\to\infty}\frac{3z^2+4z-1}{1-2z^2}=\lim_{z\to\infty}\frac{3+\frac{4}{z}-\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{z^2}-2}=-\frac{3}{2}.$$

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ j=a}}e^z$, если:

1) $a=\frac{p}{4}$; 2) $a=\frac{p}{2}$; 3) $a=\frac{3p}{4}$ ($j=\arg z$, $r=|z|$).

Решение. Заметим, что $e^{ij}=\cos j+i\sin j$ и, значит,

$|e^{ij}|=|\cos j+i\sin j|=\sqrt{\cos^2 j+\sin^2 j}=1$, $|e^{ij}|=1$.

1) Рассмотрим $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ j=\frac{p}{4}}}e^z$.

Имеем $e^z=e^{r\cos j+ir\sin j}=\left|j=\frac{p}{4}\right|=e^{\frac{r\sqrt2}{2}+i\frac{r\sqrt2}{2}}=e^{\frac{r\sqrt2}{2}}\cdot e^{i\frac{r\sqrt2}{2}}$. Тогда

$$\left|e^z\right|=\left|e^{\frac{r\sqrt2}{2}}\cdot e^{i\frac{r\sqrt2}{2}}\right|=\left|e^{\frac{r\sqrt2}{2}}\right|\cdot\left|e^{i\frac{r\sqrt2}{2}}\right|=e^{\frac{r\sqrt2}{2}}.$$

Так как $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ j=\frac{p}{4}}}\left|e^z\right|=\lim\limits_{r\to\infty}e^{\frac{r\sqrt2}{2}}=\infty$, то $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ j=\frac{p}{4}}}e^z=\infty$.

2) В этом случае $j = \frac{p}{2}$, $z = r\cos\frac{p}{2} + ir\sin\frac{p}{2} = ir$, $e^z = e^{ir}$,

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ j=\frac{p}{2}}} |e^z| = \lim_{r\to\infty} |e^{ir}| = 1.$$

Покажем, что, несмотря на существование предела $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ j=\frac{p}{2}}} |e^z|$, не существует предел $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ j=\frac{p}{2}}} e^z$.

Запишем

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ j=\frac{p}{2}}} e^z = \lim_{r\to\infty} e^{ir} = \lim_{r\to\infty}(\cos r + i\sin r).$$

Используем определение предела по Гейне. Сначала рассмотрим последовательность $(r_n') = (2p\,n)$.

$$\lim_{n\to\infty} r_n' = \lim_{n\to\infty} 2p\,n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(\cos r_n' + i\sin r_n') = \lim_{n\to\infty}(\cos 2p\,n + i\sin 2p\,n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Затем рассмотрим последовательность $(r_n'') = \left(\frac{p}{2} + 2p\,n\right)$.

$$\lim_{n\to\infty} r_n'' = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{p}{2} + 2p\,n\right) = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\cos r_n'' + i\sin r_n'') = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{p}{2} + 2p\,n\right) + i\sin\left(\frac{p}{2} + 2p\,n\right)\right) = i.$$

Таким образом, указаны две последовательности $(r_n') = (2p\,n)$ и $(r_n'') = \left(\frac{p}{2} + 2p\,n\right)$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n' = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n'' = \infty, \text{ но } \lim_{n\to\infty} e^{ir_n'} \ne \lim_{n\to\infty} e^{ir_n''}.$$

Значит, $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ j=\frac{p}{2}}} e^z$ не существует.

3) При $j = \frac{3p}{4}$, имеем

$$z = r\cos\frac{3p}{4} + ir\sin\frac{3p}{4} = -\frac{r\sqrt{2}}{2} + ir\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$e^z = e^{-\frac{r\sqrt{2}}{2}}\cdot e^{i\frac{r\sqrt{2}}{2}}, \quad |e^z| = e^{-\frac{r\sqrt{2}}{2}} \text{ и}$$

$$\lim_{r\to\infty} |e^z| = \lim_{r\to\infty} e^{-\frac{r\sqrt{2}}{2}} = 0.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ j=\frac{3p}{4}}} e^z = 0$.

Пример 9. Исследовать на непрерывность функцию:

1) $w = \dfrac{z^3 - 2z}{|z+i| - 4}$; 2) $w = z\,\mathrm{Im}\,z^2 + i\,\mathrm{Re}\,\overline{z}$.

Решение. 1) Очевидно, что функция определена на всей плоскости $\hat{C}$. Непрерывной она является во всех ее точках, кроме тех, где знаменатель равен нулю, т. е. $|z+i| = 4$. Иначе говоря, множество точек разрыва функции лежит на окружности радиуса $R = 4$ с центром в точке $(0;-1)$ (в этих точках функция принимает значение $w = \infty$).

2) Для исследования данной функции на непрерывность отделим ее действительную и мнимую части:

$$w = (x+iy)\,\mathrm{Im}(x+iy)^2 + i\,\mathrm{Re}(x-iy) = (x+iy)\cdot 2xy + ix =$$
$$= 2x^2y + (2xy^2 + x)i.$$

Обе функции $u = 2x^2y$ и $v = x(2y^2+1)$ являются непрерывными для всех $x, y \in \mathbf{R}$. Значит, данная функция непрерывна на всей плоскости C.

Пример 10. Доказать, что функция $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ является непрерывной внутри единичного круга $|z| < 1$.

Решение. Пусть z_0 – произвольная точка, лежащая внутри круга $|z| < 1$. Обозначим $|1 - z_0| = g_0 > 0$ и заметим, что для всех z, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \frac{g_0}{2}$, выполняется неравенство $|1 - z| > \frac{g_0}{2}$.

Преобразуем разность $f(z) - f(z_0)$:

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z_0} = \frac{z - z_0}{(1-z)(1-z_0)}.$$

Возьмем произвольное $e > 0$, обозначим $b = \dfrac{eg_0^2}{2}$ и положим

$d = \min\left\{b; \frac{g_0}{2}\right\}$. Тогда для любого z, такого, что $|z - z_0| < d$ будет

$$|f(z) - f(z_0)| = \frac{|z - z_0|}{|1-z| \cdot |1-z_0|} < \frac{b}{\frac{g_0}{2} \cdot g_0} = \frac{eg_0^2 \cdot 2}{2 \cdot g_0^2} = e,$$

т. е. $|f(z) - f(z_0)| < e$.

Непрерывность функции в точке z_0 доказана, а поскольку z_0 – произвольная точка круга $|z| < 1$, то доказана непрерывность $f(z)$ внутри круга $|z| < 1$.

Пример 11. Записать уравнение линии в комплексной форме:

1) $\begin{cases} x = -1 + 2\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t, \quad t \in [0; 2p]; \end{cases}$ 2) $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Решение. 1) Это параметрические уравнения окружности радиусом, равным 2, с центром $(-1; 3)$. Поскольку $z(t) = x(t) + iy(t)$, то уравнение данной линии можно записать в виде

$$z(t) = (-1 + 2\cos t) + i\left(3 + 2\sin t\right) = -1 + 3i + 2(\cos t + i\sin t).$$

Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^t - e^{-t}}{2i}, \text{ откуда}$$

$$z(t) = -1 + 3i + 2e^{it}, \quad t \in [0;\ 2p].$$

Из последней записи видно, какой центр имеет окружность и каков ее радиус.

2) Если обе части заданного уравнения поделить почленно на 36, придем к уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

который имеет центр в точке (0; 0). Его параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t, \ t \in [0;\ 2p]. \end{cases}$$

Значит, в комплексной форме это уравнение принимает вид

$$z(t) = 3\cos t + 2i\sin t.$$

Пример 12. Определить, какую линию на плоскости задает уравнение:

1) $z = 3t - 2 + i \cdot (1 + 3t - 9t^2)$; 2) $z = t^3 - 5t + 15 - i(t^3 - 5t + 3)$.

Решение. 1) Сначала запишем уравнение линии в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = 1 + 3t - 9t^2, \quad t \in [0;\ 2p]. \end{cases}$$

Из первого равенства выразим t через x и подставим в другое:

$t = \frac{x+2}{3}$, $y = 1 + 3 \cdot \frac{x+2}{3} - 9 \cdot \frac{(x+2)^2}{9}$, т. е. $y = -x^2 - 3x - 1$. Как известно, это есть уравнение параболы.

2) Переходим к параметрическому заданию линии:

$$\begin{cases} x = t^3 - 5t + 15, \\ y = -t^3 + 5t - 3. \end{cases}$$

Сложив эти равенства, получим $x + y = 12$, что есть уравнение прямой. (Для строгости рассуждений и в первом, и во втором случаях убедитесь в обратном: каждая точка параболы $y = -x^2 - 3x - 1$ и каждая точка прямой $x + y = 12$ задается соответствующей системой с параметром).

Задания

I уровень

1.1. Найдите действительную и мнимую части функции:

1) $w = \frac{1}{iz} - z + i$; 2) $w = i \cdot \operatorname{Re} z + \frac{1}{\operatorname{Im} z}$; 3) $w = \frac{1}{\bar{z}} + z^3$.

1.2. Дано отображение $w = 3z - 2 - i$. Найдите образ линии:

1) $x - y = 3$; 2) $y = \frac{1}{x}$;

3) $\left|z - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i\right| = 1$; 4) $\operatorname{Re} z = a$, $a = \text{const}$.

1.3. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{z \to -2+i}\left(\frac{1}{iz} - z + i\right)$; 2) $\lim\limits_{z \to 2-i}\left(i \cdot \operatorname{Re} z + \frac{1}{\operatorname{Im} z}\right)$;

3) $\lim\limits_{z \to -3}\left(i \operatorname{Re} z + \frac{1}{\operatorname{Im} z}\right)$; 4) $\lim\limits_{z \to 1}\frac{z^2 + 2z - 3}{z^2 - z + 4zi - 4i}$.

II уровень

2.1. Дано отображение $w = z + 3 - 2i$. Найдите образ линии:

1) $\arg z = \dfrac{p}{3}$; 2) $\arg(z + 3 + 2i) = \dfrac{p}{4}$.

2.2. Найдите образ множества точек, заданного неравенствами $-\dfrac{p}{4} < \arg z \le \dfrac{p}{2}$ при отображении $w = z + 3 - 2i$.

2.3. Дано отображение $w = z^2$. Найдите образ множества точек, ограниченного прямыми:

1) $y = 2,\ \ y = 3$; 2) $y = x + 1,\ \ y = x + 2$; 3) $y = 2x,\ \ y = 3x$.

III уровень

3.1. Докажите, что функция $w = f(z)$ непрерывна при любом значении $z_0 \in C$:

1) $f(z) = z$; 2) $f(z) = z^2$; 3) $f(z) = |z|$; 4) $f(z) = \operatorname{Re} z$.

3.2. Докажите, что:

1) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z \cdot \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z}{|z|^2} = 0$; 2) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z \cdot (\operatorname{Re} z)^2}{|z|^2} = 0$.

3.3. Докажите, что $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ не существует, если:

1) $f(z) = \dfrac{z \cdot \operatorname{Im} z}{|z|^2}$; 2) $f(z) = \dfrac{z \cdot \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z}{(\operatorname{Re} z)^4 + (\operatorname{Im} z)^2}$.

3.4. Дано отображение $w = z^2$. Найдите:

1) длину образа отрезка $x = 1,\ -1 \le y \le 1$;

2) площадь образа замкнутой области $1 \le |z| \le 2,\ -\dfrac{p}{4} \le \arg z \le \dfrac{p}{4}$.

29.3. Дифференцирование функций комплексной переменной

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. Если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$, то он называется ***производной функции f(z) в точке*** $\boldsymbol{z_0}$. Если величину $\Delta z = z - z_0$ назвать ***приращением аргумента*** в точке z_0, а величину $\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0)$ ***приращением функции*** в точке z_0, то можно дать эквивалентное определение производной, а именно:

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0).$$

Если функция *f*(*z*) имеет производную в точке z_0, то она называется ***дифференцируемой в этой точке***.

Функция *f*(*z*) дифференцируема в точке z_0, тогда и только тогда, когда для ее приращения выполняется равенство

$$\Delta f(z_0) = A\Delta z + a(z_0, \Delta z)\Delta z,$$

где $A = \text{const}$, $a(z_0, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$, $a \in C$.

Дифференцируемая в точке z_0 функция *f*(*z*) является непрерывной в этой точке. Функция *f*(*z*) называется ***дифференцируемой на множестве D***, если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$.

Правила дифференцирования

Пусть все использованные в равенствах функции дифференцируемы в произвольной точке *z* некоторого множества. Тогда:

1) $c = \text{const}$, $c' = 0$, где $c \in C$;

2) $(cf(z))' = cf'(z)$, $c = \text{const}$;

3) $(f_1(z) + f_2(z))' = f_1'(z) + f_2'(z)$; (29.3)

4) $(f_1(z) \cdot f_2(z))' = f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z)$;

5) $\left(\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \dfrac{f_1'(z) f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)}$, $f_2(z) \ne 0$;

6) если $F(z) = g(f(z))$, то $F'(z) = \dfrac{dg(f)}{df} \cdot \dfrac{df(z)}{dz}$;

7) если $w = f(z)$ и $z = j(w)$ есть обратная функция, то

$j'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$, $(f'(z) \neq 0)$.

Для дифференцируемой в точке z функции $f(z)$ выполняется равенство

$\Delta f(z) = f'(z)\Delta z + a(z, \Delta z)\Delta z.$

Величина $df(z) = f'(z)dz$ называется ***дифференциалом функции f в точке z.***

Справедливы формулы

$f''(z) = (f'(z))'$,

$d^2 f(z) = d(df(z)) = f''(z)dz^2$;

$f^{(n)}(z) = (f^{(n-1)}(z))'$;

$d^n f(z) = d(d^{n-1} f(z)) = f^{(n)}(z)dz^n, \; n \in N, \; n \geq 2.$

Функция $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ является дифференцируемой в точке $z = x + iy$, $z \in D$ тогда и только тогда, когда функции u, v являются дифференцируемыми в точке $(x; y)$ и выполняются соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \qquad (29.4)$$

Последние два равенства называют условиями Д'Аламбера–Эйлера (Коши–Римана).

Если все частные производные функций u, v непрерывны в точке (x, y) и удовлетворяют условиям Д'Аламбера–Эйлера, то функция $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ является дифференцируемой в точке $z = x + iy$.

Если функция $f(z)$ является дифференцируемой в точке $z = x + iy$, то для вычисления ее производной в этой точке справедливы формулы:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (29.5)$$

Геометрический смысл модуля производной: модуль производной $|f'(z_0)|$ в точке z_0 можно рассматривать как коэффициент растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Геометрический смысл аргумента производной: аргумент производной $\arg f'(z_0)$ в точке z_0 есть угол поворота касательной к кривой в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Взаимно-однозначное отображение, которое сохраняет углы между кривыми, проходящими через некоторую точку, и дает одинаковый коэффициент их растяжения, называется ***конформным в этой точке***.

Функция $w = f(z)$ называется ***аналитической в области D***, если она однозначна и дифференцируема в каждой точке этой области. Функция $f(z)$ ***называется аналитической в замкнутой области $\bar{G}$***, если существует область $D \supset \bar{G}$, в которой функция аналитична. Функция называется ***аналитической в точке***, если существует некоторая окрестность этой точки, в которой функция аналитична.

Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции $w = u(x; y) + iv(x; y)$ в области D являются дифференцируемость в области D функций u, v и выполнение в этой области условий Д'Аламбера–Эйлера (29.4).

Однозначная функция $u(x; y)$ двух действительных переменных называется ***гармонической в области D***, если она имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (29.6)$$

Действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. Условие гармоничности функций $u(x; y)$ и $v(x; y)$ является необходимым условием аналитичности функции $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$, но не является достаточным.

Пусть D – произвольная область плоскости $\hat{C}$. Если для любой замкнутой линии g, которая принадлежит множеству D, внутренняя или внешняя область кривой g *целиком* принадлежит D, то область D называется ***односвязной***.

Область, границей которой является объединение конечного числа замкнутых непрерывных непересекающихся кривых без точек самопересечения, называется ***многосвязной***. Если граница области состоит из n указанных кривых, то область называется ***n-связной***.

Любая гармоническая в односвязной области D функция является действительной (мнимой) частью некоторой аналитической в области D функции. При этом вторая неизвестная часть этой функции находится с точностью до постоянного слагаемого по ее известной части.

Пример 1. Выяснить, дифференцируема ли функция $f(z)=|z|$.

Решение. Находим $f(z)=|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$, т. е. $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $v=0$. Проверим, выполняются ли условия (29.4) дифференцируемости функции.

Вычисляем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Видим, что условие $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ выполняется при $x=0,\ \ y\neq 0$, а условие $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ – при $y=0,\ \ x\neq 0$. Таким образом, сразу оба условия Д'Аламбера–Эйлера не выполняются ни в одной точке комплексной плоскости, т. е. функция $f(z)=|z|$ не является дифференцируемой ни в одной точке.

Пример 2. Выяснить дифференцируемость функции $f(z)$ и найти ее производную, если:

1) $f(z)=z^2+3z+2$; 2) $f(z)=z^2\cdot\mathrm{Im}(z+i)$.

Решение. 1) *1-й способ*. Функция определена в каждой точке плоскости C. Найдем ее действительную часть u, а также мнимую часть v.

$$f(z)=(x+iy)^2+3(x+iy)+2=(x^2-y^2+3x+2)+(2xy+3y)i,$$

т. е. $u=x^2-y^2+3x+2$, $v=2xy+3y$. Проверим, имеет ли эта функция непрерывные частные производные. Найдем их:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+3,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x+3.$$

Видим, что все производные непрерывны на плоскости C и удовлетворяют на ней условиям Коши–Римана (29.4). Значит, функция $f(z)$ является дифференцируемой на всей комплексной плоскости. Для вычисления ее производной можно использовать, например, формулу (29.5):

$$f'(z)=(2x+3)+2yi=2(x+iy)+3=2z+3.$$

2-й способ. Используя формулу $(z^n)'=nz^{n-1}$, $n\in\mathbf{N}$, и правила дифференцирования (29.3), получим $f'(z)=2z+3$. Очевидно, что этот способ нахождения производной рациональнее, чем первый.

2) Функция определена на всей плоскости C. Найдем ее действительную и мнимую части, преобразовав выражение, которым она задается (при условии $z=x+iy$):

$$f(z)=((x^2-y^2)+2xyi)(y+1)=(x^2y-y^3+x^2-y^2)+(2xy^2+2xy)i.$$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy+2x$, $\frac{\partial u}{\partial x}=x^2-3y^2-2y$,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y^2+2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=4xy+2x.$$

Частные производные непрерывны всюду на множестве C, но нельзя утверждать, что условия Коши–Римана выполняются для всех $z\in C$. Найдем те точки, где они справедливы, т. е. где имеет решение система

$$\begin{cases}2xy+2x=4xy+2x,\\ x^2-3y^2-2y=-2y^2-2y.\end{cases}$$

Поскольку она равносильна системе

$$\begin{cases}2xy=0,\\ x^2-y^2=0,\end{cases}$$

то видим, что условия Коши–Римана выполняются только в точке (0; 0). Для этой точки все частные производные равны нулю, значит, $f'(0)=0$.

Пример 3. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=z^4$ в точке $z_0=1-2i$.

Решение. $w'=4z^3$;

$$w'(z_0)=4(1-2i)^3=4(1-6i-12+8i)=4(-11+2i)=-44+8i.$$

Откуда получаем коэффициент растяжения в заданной точке:

$$|w'(z_0)|=\sqrt{(-44)^2+8^2}=\sqrt{2000}=20\sqrt{5}.$$

Находим угол поворота для заданного отображения:

$$\arg w'(z_0) = p - \operatorname{arctg}\frac{2}{11}.$$

Пример 4. Найти область аналитичности функции:

1) $f(z) = z \cdot \mathrm{Im} z$; 2) $f(z) = \frac{1}{z}$; 3) $f(z) = e^z$.

Решение. 1) Поскольку $f(z) = z \cdot \mathrm{Im} z = (x+iy) \cdot y = xy + i \cdot y^2$, то

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = y^2. \end{cases}$$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$.

Условия Д'Аламбера–Эйлера (29.4) выполняются в единственной точке $z = 0$ $(x = y = 0)$. В этой точке функция является дифференцируемой, но не является аналитической. Таким образом, функция $f(z) = z \cdot \mathrm{Im}\, z$ не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости.

2) Найдем действительную и мнимую части заданной функции:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2+y^2}, \text{ т. е.}$$

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Условия Д'Аламбера–Эйлера (29.4) выполняются во всех точках, кроме точки $z = 0$. Функция $f(z) = \frac{1}{z}$ аналитична на всей комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$.

3) Для нахождения действительной и мнимой частей заданной функции используем формулы Эйлера:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Поэтому

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Вычисляем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Замечаем, что условия дифференцируемости (29.4) выполняются для всех $x, y \in \mathbf{R}$, т. е. функция $f(z) = e^z$ аналитична на всей комплексной плоскости.

Пример 5. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по ее известной части (если это возможно): 1) действительной $u = 2 + e^x \cos y$; 2) мнимой $v = (x+1)^2 - y^2 + 3$; 3) действительной $u = x^3 + y^3$.

Решение. 1) Убедимся, что функция $u(x, y)$ является гармонической. Поскольку

$u'_x = e^x \cos y$, $u''_{x^2} = e^x \cos y$ и $u'_y = -e^x \sin y$, $u''_{y^2} = -e^x \cos y$, то справедливо равенство (29.6). Первое равенство из условий Коши–Римана (т. е. $u'_x = v'_y$) приобретает вид $v'_y = e^x \cos y$, откуда после интегрирования имеем

$$v = \int e^x \cos y dy + j(x).$$

Таким образом, приходим к выражению

$$v(x, y) = e^x \sin y + j(x).$$

Из второго равенства Коши–Римана $u'_y = -v'_x$ имеем: $u'_y = -(e^x \sin y + j(x))'_x$, или, то же самое,

$$-e^x \sin y = -e^x \sin y + j'(x).$$

Из последнего равенства получаем $j'(x) = 0$ и соответственно $j(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$. В результате найдена функция $v = e^x \sin y + c$ и восстановлена аналитическая функция

$f(z) = 2 + e^x \cos y + i(e^x \sin y + c)$, которую можно записать иначе:

$$f(z) = 2 + e^x(\cos y + i \sin y) + ic = 2 + e^x e^{iy} + ic.$$

Это то же самое, что $f(z) = 2 + e^z + ic$.

2) Нетрудно убедиться, что функция $v(x, y)$ является гармонической, так как

$$v'_x = 2(x+1), \quad v''_{x^2} = 2, \quad v'_y = -2y, \quad v''_{y^2} = -2.$$

Равенство $u'_x = v'_y$ из условий Коши–Римана принимает вид $u'_x = -2y$. Интегрируя его, находим

$$u(x, y) = \int (-2y)\, dx + j(y) = -2yx + j(y).$$

Второе равенство $u'_y = -v'_x$ из тех же условий дает

$v'_x = -(-2xy + j(y))'_y = 2x - j'(y).$ Значит, $2(x+1) = 2x - j'(y).$

Из последнего равенства получаем $j'(y) = -2$ и соответственно $j(y) = -2y + c,\ c \in \mathbf{R}.$

Таким образом, $u = -2xy - 2y + c$ и

$$f(z) = (-2xy - 2y + c) + i((x+1)^2 - y^2 + 3).$$

Функцию $f(z)$ можно записать в виде зависимости от z. Действительно,

$$f(z) = i(x^2 + 2xyi + y^2 i^2) + 2i(x + iy) + 4i + c,$$

что приводит к виду $f(z) = iz^2 + 2iz + 4i + c.$

3) Проверим, является ли функция $u(x;y) = x^3 + y^3$ гармонической. Вычислим соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y.$$

Уравнение Лапласа (29.6) для этой функции приобретает вид $6x + 6y = 0$, откуда видим, что функция удовлетворяет уравнению Лапласа только в точках прямой $y = -x$. Приходим к заключению, что она не является гармонической, так как не существует области, в которой справедливо равенство (29.6). По этой причине не существует аналитической функции, у которой действительная часть есть $x^3 + y^3$.

Задания

I уровень

1.1. Выясните, дифференцируема ли функция:

1) $f(z) = y + ix;$ 2) $f(z) = y - ix;$

3) $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi;$ 4) $f(z) = (x^2 + y^2) - 2xyi.$

Если функция дифференцируема, то найдите ее производную.

1.2. Найдите коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = f(z)$ в точке z_0:

1) $f(z) = z,\ z_0 = 2 + i;$ 2) $f(z) = \dfrac{1}{z},\ z_0 = i;$

3) $f(z) = z^2,\ z_0 = (1 - 4i);$ 4) $f(z) = 3z + 4,\ z_0 = 1 + 5i.$

1.3. Найдите область аналитичности функции, если такая существует:

1) $f(z) = \overline{z};$ 2) $f(z) = z \cdot \mathrm{Re}\, z;$ 3) $f(z) = e^y \sin x + ie^y \cos x.$

II уровень

2.1. Найдите производную функции $f(z)$, если $f(z)$ дифференцируема:

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3).$$

2.2. При каком значении a функция $f(z)$ является дифференцируемой:

1) $f(z) = a\overline{z};$ 2) $f(z) = y + axi?$

2.3. Определите действительные функции $j(y)$ и $y(x)$ так, чтобы фукнция $f(z) = j(y) + iy(x)$ была дифференцируемой.

III уровень

3.1. Восстановите аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ части:

1) $u = x^3 - 3xy^2 + y;$ 2) $v = e^{-y} \sin x - x + y;$

3) $v = 2xy - 5y;$ 4) $u = e^{-x} \cos y + x^2 - y^2.$

3.2. Зная, что в декартовой системе координат условия Д'Аламбера–Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

получите такие условия в полярной системе координат.

3.3. Пусть функция $w = f(z)$ определена и аналитична в области D. Определите, как выражается площадь области G, являющейся образом D, при отображении $w = f(z)$.

29.4. Однозначные элементарные функции

Определим основные однозначные элементарные функции.

1. Экспонента

Экспонентой комплексной переменной z называется функция, которая определяется равенством:

$$w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$

где $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y$, $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

Кроме обозначения e^z для этой функции используют и обозначение $\exp z$.

Свойства экспоненты

1. Определена и непрерывна на плоскости C.

2. Производная существует на всей плоскости C и выполняется равенство $(e^z)' = e^z$.

3. $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} = \exp(z_1 + z_2)$,

$\dfrac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp(z_1 - z_2)$.

4. Периодична с основным периодом $2p\,i$: $e^z = e^{z + 2p\,i}$.

2. Тригонометрические функции

Функции косинус и синус комплексной переменной определяются равенствами:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (29.7)$$

Справедлива формула Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

Свойства функций $w = \cos z$ и $w = \sin z$

1. Определены и непрерывны на всей плоскости C.

2. Аналитичны на C и выполняются равенства

$(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$.

3. Функция $\cos z$ является четной, т. е. $\cos(-z) = \cos z$, а $\sin z$ – нечетной, т. е. $\sin(-z) = -\sin z$.

4. Периодичны с основным периодом $2p$, т. е. верны формулы:

$\cos z = \cos(z + 2p)$, $\sin z = \sin(z + 2p)$,

$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \; m\sin z_1 \sin z_2$,

$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$,

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

$\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$,

$\cos\left(\dfrac{p}{2} + z\right) = -\sin z$, $\sin\left(\dfrac{p}{2} + z\right) = \cos z$,

$\cos(p + z) = -\cos z$, $\sin(p + z) = -\sin z$.

З а м е ч а н и е. Может оказаться, что для некоторых значений $z \in \mathbf{C}$ выполняется $|\sin z| > 1$, $|\cos z| > 1$.

Функции тангенс и котангенс комплексной переменной определяются формулами:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \left(z \ne \frac{p}{2} + kp \right), \; \operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z} \;\; (z \ne kp), \;\; k \in Z.$$

Функции тангенс и котангенс являются нечетными и периодическими с основным периодом p.

3. Гиперболические функции

Гиперболические косинус, синус, тангенс и котангенс комплексной переменной определяются соответственно равенствами:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \; \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \; \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \; \operatorname{cth} z = \frac{1}{\operatorname{th} z}.$$

Свойства гиперболических функций

1. Функции $w = \operatorname{ch} z$, $w = \operatorname{sh} z$ определены и непрерывны на плоскости C.

2. Производные функций $w = \operatorname{ch} z$, $w = \operatorname{sh} z$ существуют для любого $z \in C$ и $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$, $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.

3. Справедливы равенства:

$\operatorname{ch} z = \cos(iz)$, $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$,

$\cos z = \operatorname{ch}(iz)$, $\sin z = -i \operatorname{sh}(iz)$, (29.8)

$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$,

$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$,

$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$,

$\cos z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$, $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y$.

4. Функции th$z$ и cth$z$ определены и непрерывны всюду на плоскости C, кроме нулей знаменателей.

Пример 1. Доказать, что для функции $f(z) = e^z$ справедлива формула

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \qquad (29.9)$$

Решение. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Используя свойства степени и формулу Эйлера, получим:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1 + iy_1} \cdot e^{x_2 + iy_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2).$$

Далее, перемножая выражения в скобках и используя тригонометрические формулы для косинуса и синуса суммы двух аргументов, получаем:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{x_1}\cdot e^{x_2}\cdot(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2+$$
$$+i(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2))=e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2))=$$
$$=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}=e^{z_1+z_2}.$$

Равенство (29.9) доказано.

Пример 2. Доказать равенство $\sin z=-i\,\mathrm{sh}\,(iz)$.

Решение. Используем определение гиперболического синуса. Тогда

$$-i\,\mathrm{sh}\,(iz)=-i\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=-i^2\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z.$$

Заданное равенство доказано.

Пример 3. Доказать равенство

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2. \qquad (29.10)$$

Решение. Преобразуем правую часть заданного равенства, используя формулы (29.7):

$$\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2=\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}-\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}.$$

Выражения перемножаем и по формуле (29.7) получаем:

$$\frac{1}{4}(e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(-z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}+e^{i(-z_1-z_2)}+e^{i(z_1+z_2)}-e^{i(-z_1+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}+$$
$$+e^{i(-z_1-z_2)})=\frac{1}{4}(2e^{i(z_1+z_2)}+2e^{i(-z_1-z_2)})=\frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{2}=\cos(z_1+z_2).$$

Равенство (29.10) доказано.

Пример 4. Найти действительную и мнимую части функции $w=\cos z$.

Решение. Так как $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$, то

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cdot\cos(iy)-\sin x\cdot\sin(iy)=\cos x\cdot\mathrm{ch}y-\frac{i}{i}\sin x\sin(iy).$$

Используем далее формулу (29.8). Тогда

$$\cos z=\cos x\cdot\mathrm{ch}y+\frac{1}{i}\sin x\cdot\mathrm{sh}y=\cos x\cdot\mathrm{ch}y-i\sin x\cdot\mathrm{sh}y.$$

Значит, для $w=\cos z=u+iv$ будет

$u=\cos x\cdot\mathrm{ch}\,y,\ \ v=-\sin x\cdot\mathrm{sh}\,y.$

Пример 5. Выяснить, на какое множество точек плоскости C_w функция $w=e^z$ отображает прямую линию с плоскости C_z.

Решение. Рассмотрим три случая таких прямых.

1. Пусть z «пробегает» прямую, параллельную мнимой оси Oy: $z=c_1+it, c_1=\mathrm{const}.$ Тогда $w=e^{c_1}(\cos t+i\sin t)$, т. е. образом такой прямой является окружность радиуса $r=e^{c_1}$ с центром в начале системы координат Ouv. При этом, когда точка z «пробегает» рассматриваемую прямую один раз (координата t непрерывно меняется от $-\infty$ до $+\infty$), то образ w «пробежит» (в положительном направлении) соответствующую окружность бесконечное количество раз.

2. Пусть z «пробегает» прямую, параллельную действительной оси Ox: $z=t+ic_2$, $c_2=\mathrm{const}$. Тогда $w=e^t(\cos c_2+i\sin c_2)$, т. е. множество образов лежит на луче, который выходит из начала системы координат и образует с осью Ou угол c_2. При этом, когда точка z «пробегает» прямую один раз (абсцисса t непрерывно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$), то образ w тоже один раз «пробегает» соответствующий луч (расстояние от начала системы координат до точки w непрерывно растет от 0 до $+\infty$).

3. Пусть z «пробегает» прямую, которая не параллельна координатным осям. Уравнение такой прямой имеет вид $z=t+(kt+b)i$, где k – угловой коэффициент прямой; b – ордината при $t=0$; $-\infty<t<+\infty$. Тогда образом такой прямой является кривая

$$w=\exp\left(t+(kt+b)i\right)=e^t\left(\cos(kt+b)+i\sin(kt+b)\right).$$

Для точки w, которая лежит на этой кривой (при условии, что $r=|w|, j=\arg w$), имеем: $r=e^t$, $j=kt+b$. Из второго равенства выразив t через j и подставив в первое, получим $r=ce^{\frac{j}{k}}$, где $c=e^{-\frac{b}{k}}$, $c=\mathrm{const}$.

Это уравнение логарифмической спирали.

Пример 6. Выяснить, на какое множество точек функция

$$w(z)=\cos z\ \text{ отображает полуполосу } \begin{cases}0<x<\dfrac{p}{2},\\ y>0.\end{cases}$$

Решение. Обозначим данную в условии полуполосу через d. Согласно восьмой формуле (29.8), для функции $w=\cos z\ (w=u+iv)$ имеем $u=\cos x\,\mathrm{ch}\,y$, $v=-\sin x\,\mathrm{sh}\,y$ $(z=x+iy;\ x,y\in\mathbf{R})$. Найдем сначала образ луча g_1: $x=0, y>0$. Очевидно, что он отображается на множество точек $u=\text{ch}y$ $(y>0)$, $v=0$. Поскольку для $y>0$ имеем $u>0$, то в плоскости C_w образом луча g_1 будет луч Γ_1 $1<u<\infty$. Аналогично определим, что интервал g_2: $0<x<\frac{p}{2}$, $y=0$, отображается на множество $u=\cos x$ $\left(0<x<\frac{p}{2}\right)$, $v=0$, которое является интервалом Γ_1: $0<u<1$, $v=0$. И наконец, луч g_3: $x=\frac{p}{2}$, $y>0$ преобразуется в множество $u=0$, $v=-\text{sh}\,y<0$, которое является лучом Γ_3: $u=0$, $v<0$. Выберем внутреннюю точку z_0 полосы d, $z_0=x_0+iy_0$, $0<x_0<\frac{p}{2}$, $y_0>0$. Для этой точки получаем следующие значения: $u_0=\cos x_0 \text{ch}\, y_0>0$, $v_0=-\sin x_0 \text{sh}\, y_0<0$ – образ принадлежит четвертой координатной четверти. Это значит, что внутренние точки полосы d отображаются на внутренние точки множества D четвертой четверти, причем это взаимно-однозначное отображение.

Задания

I уровень

1.1. Докажите равенство:

1) $\text{ch}\, z=\cos(iz)$; 2) $\cos z=\text{ch}(iz)$; 3) $\text{sh}\, z=-i\sin(iz)$;

4) $\cos(-z)=\cos z$; 5) $\sin(-z)=-\sin z$; 6) $e^{z_1}:e^{z_2}=e^{z_1-z_2}$.

1.2. Зная, что $(e^z)'=e^z$, докажите равенство:

1) $(\cos z)'=-\sin z$; 2) $(\sin z)'=\cos z$;

3) $(\text{ch}\, z)'=\text{sh}\, z$; 4) $(\text{sh}\, z)'=\text{ch}\, z$.

1.3. Докажите равенство:

1) $\sin i\cdot \text{ch}1=i\cos i\cdot \text{sh}1$; 2) $\sin i\cdot\cos 1=i\cdot \text{ch}\, i\cdot \text{sh}1$.

II уровень

2.1. Проверив выполнение условий Д'Аламбера–Эйлера для функций $w=e^z$, $w=\cos z$, $w=\text{sh}\, z$ и воспользовавшись одной из

формул $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$, $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$, докажите равенство:

1) $(e^z)'=e^z$; 2) $(\cos z)'=-\sin z$; 3) $(\text{sh}\, z)'=\text{ch}\, z$.

2.2. Докажите равенство:

1) $e^z=e^{z+2pi}$; 2) $\cos z=\cos(z+2p)$;

3) $\sin 2z=2\sin z\cos z$; 4) $\cos\left(\frac{p}{2}+z\right)=-\sin z$.

2.3. Решите уравнение:

1) $\cos z=2$; 2) $\sin z=i$; 3) $\sin z=-2$.

III уровень

3.1. Дана функция $w=f(z)$. Найдите ее значения в указанных точках:

1) $f(z)=e^{e^z}$, $z_1=i$, $z_2=1+\frac{pi}{2}$;

2) $f(z)=\ln(\cos e^z+i\sin e^z)$, $z_1=1+\frac{pi}{2}$, где $\ln z=\ln|z|+i\arg z$

29.5. Многозначные функции

Определим основные многозначные функции.

1. Функция $w=\sqrt[n]{z}$, где $n\in \mathbf{N}$, $n\geq 2$.

При каждом z, (если $z\neq 0$ и $z\neq\infty$) корень $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных значений, которые задаются формулой

$$w=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{j+2kp}{n}+i\sin\frac{j+2kp}{n}\right),\ k=\overline{0,n-1},\ \text{где } j=\arg z.$$

(Для исключенных точек $\sqrt[n]{0}=0$, $\sqrt[n]{\infty}=\infty$). Значит, функция $w=\sqrt[n]{z}$ является n-значной.

2. Натуральный логарифм

Натуральный логарифм (логарифмическая функция) определяется равенством

$$\text{Ln}\, z=\ln|z|+i\text{Arg}z,\quad z\neq 0, \tag{29.11}$$

где $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2kp$, $k \in \mathbf{Z}$. Это есть бесконечнозначная функция.

Главным значением логарифма **Ln z** называют величину

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z. \qquad (29.12)$$

Значит,

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2kp\,i,\ \ k \in \mathbf{Z}. \qquad (29.13)$$

Справедливы формулы:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,\ \ \operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,\ \ z_1, z_2 \neq 0.$$

3. Степенная функция

Если $p \in \mathbf{N}$, тогда $w = z^p = r^p(\cos pj + i\sin pj)$, где $r = |z|$, $j = \arg z$. В этом случае $w = z^p$ – однозначная функция.

Если $p = \dfrac{m}{n}$ ($m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$; m и n – взаимно-простые числа), то

$$w = z^p = z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m} = \sqrt[n]{r^m}\left(\cos\frac{m(j+2kp)}{n} + i\sin\frac{m(j+2kp)}{n}\right),$$

$k = \overline{0, n-1}$, причем, по определению $z^{-m} = \dfrac{1}{z^m}$, $z^0 = 1$.

В этом случае $w = z^p$ – n-значная функция ($z \neq 0$ при $m \leq 0$).

Если $p = a + ib$ – произвольное комплексное число, $a, b \in \mathbf{R}$, причем $z \neq 0$, $p \notin \mathbf{N}$, $p \neq \dfrac{m}{n}$ (как во 2-м случае), то

$$w = z^p = e^{p\operatorname{Ln} z} = e^{(a+ib)(\ln r + i(j+2kp))} =$$
$$= e^{a\ln r - b(j+2kp)} \cdot e^{i(b Ln r + a(j+2kp))},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

В этом случае $w = z^p$ – бесконечнозначная функция.

4. Показательная функция

Эта функция определяется равенством

$$w = a^z = e^{z\operatorname{Ln} a},\ \ a \neq 0. \qquad (29.14)$$

Функция $w = a^z$ есть бесконечнозначная функция.

5. Обратные тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции определяются равенствами:

$$\operatorname{Arccos} = -i \cdot \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});\ \ \operatorname{Arcsin} z = -i \cdot \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2});$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \cdot \operatorname{Ln}\frac{1 - iz}{1 + iz};\ \ \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{iz + 1}{iz - 1}.$$

Приведенные четыре обратные тригонометрические функции являются бесконечнозначными.

Главное значение логарифма используют для определения следующих функций:

$$\arccos z = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1});$$
$$\arcsin z = -i\ln(iz + \sqrt{1 - z^2}); \qquad (29.15)$$
$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2}\ln\frac{1 - iz}{1 + iz};\ \ \operatorname{arcctg} z = \frac{i}{2}\ln\frac{iz + 1}{iz - 1},$$

из которых первые две – двузначные, а последние две – однозначные.

Пример 1. Вычислить:

1) $\ln(-1 + i)$; 2) $\operatorname{Ln}(-1)$.

Решение. 1) Воспользовавшись формулой (29.12), получаем

$$\ln(-1+i) = \ln|-1+i| + i\arg(-1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{3p\,i}{4}.$$

2) По формуле (29.11) находим

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i \cdot \operatorname{Arg}(-1) = \ln 1 + i(p + 2kp) = ip(2k + 1).$$

Пример 2. Выяснить, справедлива ли формула $\operatorname{Ln} z^2 = 2\operatorname{Ln} z$, $z \in \mathbf{C}$.

Решение. Проверим справедливость формулы, например, для $z = 2$. Согласно формуле (29.13), находим

$$\operatorname{Ln} 2^2 = \operatorname{Ln} 4 = \ln 4 + 2kp\,i,\ \ k \in \mathbf{Z}.$$
$$2\operatorname{Ln} 2 = \ln 4 + 4np\,i,\ \ n \in \mathbf{Z}.$$

Однако это не одно и то же. Если $k = 1$, то из первого равенства получаем значение $\operatorname{Ln} 2^2 = \ln 4 + 2p\,i$. Такое значение мы не можем получить из второго равенства ни при каком $n \in \mathbf{Z}$. Приходим к выводу, что приведенная в условии формула не справедлива.

Пример 3. Вычислить: 1) $1^{\sqrt{5}}$; 2) i^i.

Решение. 1) Воспользуемся формулой (29.14):

$$1^{\sqrt{5}} = e^{\sqrt{5}\,Ln 1} = e^{\sqrt{5}\,2kp\,i} = \cos(2kp\sqrt{5}) + i\sin(2kp\sqrt{5}),\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

2) Вычисляем аналогично

$$i^i = e^{iLn\,i} = e^{i\left(\frac{p}{2}i - 2kp\,i\right)} = e^{\left(4k-1\right)\frac{p}{2}},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 3 показывает, что число 1 в иррациональной степени дает бесконечное множество комплексных значений. А все значения степени i^i есть положительные действительные числа.

Пример 4. Вычислить:

1) $\arcsin i$;   2) $\mathrm{Arctg}\,(1-i)$.

Решение. 1) Согласно формуле (29.15), получаем

$$\arcsin i = -i\ln(i^2+\sqrt{1-i^2}).$$

Записывая комплексное число $1-i^2=2$ в тригонометрической форме и извлекая квадратный корень, найдем два его значения, а именно: $\pm\sqrt{2}$. Значит, $\arcsin i = -i\ln(-1\pm\sqrt{2})$, т. е. решение имеет два значения. Рассмотрим каждое из этих значений отдельно, воспользовавшись формулой (29.12):

$$-i\ln(-1+\sqrt{2}) = -i(\ln\left|-1+\sqrt{2}\right| + i\cdot 0) = -i\ln(\sqrt{2}-1) = i\ln(\sqrt{2}+1);$$

$$-i\ln(-1-\sqrt{2}) = -i\cdot(\ln|-1-\sqrt{2}| + i\cdot p) = -i\ln(\sqrt{2}+1) + p =$$
$$= p - i\ln(\sqrt{2}+1) = p + i\ln(\sqrt{2}-1).$$

Таким образом, $\arcsin i = \begin{cases} i\ln(\sqrt{2}+1), \\ p + i\ln(\sqrt{2}-1). \end{cases}$

2) Вычислим последовательно:

$$\mathrm{Arctg}\,(1-i) = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1-i(1-i)}{1+i(1-i)} = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{-i}{2+i} = \frac{i}{2}Ln\left(-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right) =$$

$$= \frac{i}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{5}}{5} + i(p + \mathrm{arctg}\,2 + 2kp)\right) = -\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\,2 + (2k+1)p) +$$

$$+ \frac{i}{2}\ln\frac{\sqrt{5}}{5},\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите значение функции:

1) $\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i}$;   2) $\ln(1-\sqrt{3}i)$;   3) $\mathrm{Ln}\,(-i)$.

1.2. Вычислите значение функции:

1) $(-1)^i$;   2) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2i}$;   3) $(1+i)^{1-i}$;   4) $i^{\frac{1}{i}}$.

II уровень

2.1. Докажите равенство:

1) $\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\,z_1 + \mathrm{Ln}\,z_2$;   2) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\,z_1 - \mathrm{Ln}\,z_2,\ z_1, z_2 \neq 0.$

2.2. Найдите ошибку в рассуждениях:
так как справедливо равенство

$$\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\,z_1 - \mathrm{Ln}\,z_2 \quad (z_1, z_2 \neq 0),$$

то, полагая в нем $z_1 = z_2 = z$, получаем

$$\mathrm{Ln}\frac{z}{z} = \mathrm{Ln}\,1 = \mathrm{Ln}\,z - \mathrm{Ln}\,z = 0,\ \text{т. е. } Ln1 = 0;$$

с другой стороны,

$$\mathrm{Ln}\,1 = \ln|1| + i\mathrm{Arg}\,1 = i\cdot(0+2kp) = 2kp\,i,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

2.3. Докажите равенство $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$, проверив выполнение условий Д'Аламбера–Эйлера для функции $w = \ln z$ и воспользовавшись формулой $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

III уровень

3.1. Дана функция $w = z^p = e^{p\ln z}$, где $p = a + ib$, $\ln z$ – главное значение $\mathrm{Ln}\,z$. Докажите $(z^p)' = pz^{p-1}$, проверив выполнение условий Д'Аламбера–Эйлера (в полярной системе координат) и воспользовавшись формулой

$$f'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial j} - i\frac{\partial u}{\partial j}\right),\quad z\neq 0.$$

29.6. Интегрирование функций комплексной переменной

Допустим, что $w = f(z)$ – однозначная непрерывная функция комплексной переменной z, определенная в области D плоскости C_z, Γ – гладкая кривая, лежащая в D, с началом в точке A и концом в точке B.

Пусть $z_0 = A, z_1, z_2, ..., z_n = B$ – произвольные последовательные точки, разбивающие кривую Г на n частичных дуг, z_k^0 – произвольная точка k-й частичной дуги, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$. ***Интегральной суммой*** называется выражение вида:

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k^0)\Delta z_k. \qquad (29.16)$$

Пусть $\Delta = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \Delta z_k$. Будем увеличивать количество точек разбиения кривой Г, чтобы $\Delta \to 0$.

Если существует конечный предел интегральных сумм (29.16) при $\Delta \to 0$, который не зависит ни от способа разбиения кривой Г на частичные дуги, ни от выбора точек z_k^0, то этот предел называется ***интегралом от функции f(z) по кривой Г***:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(z_k^0)\,\Delta z_k. \qquad (29.17)$$

Возможно и другое обозначение интеграла:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{AB} f(z)\,dz.$$

Свойства интеграла

1. Интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} f(s)\,ds.$$

2. При изменении направления движения по кривой знак интеграла изменяется:

$$\int\limits_{\Gamma_+} f(z)\,dz = -\int\limits_{\Gamma_-} f(z)\,dz,$$

где через Γ_+, Γ_- обозначен один и тот же путь интегрирования Г, который ориентирован положительно и отрицательно соответственно.

3. Свойство линейности интеграла:

$$\int\limits_{\Gamma}(a\ f(z) + b\ g(z))\,dz = a\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz + b\int\limits_{\Gamma} g(z)\,dz,$$

где a, b – числа.

4. Свойство аддитивности:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz + ... + \int\limits_{\Gamma_n} f(z)\,dz,$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup ... \cup \Gamma_n$ $(n \in \mathbf{N})$, причем дуги Γ_k, $k = \overline{1,n}$, такие, что конец предыдущей совпадает с началом следующей.

5. Оценка модуля интеграла:

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \le M \cdot l,$$

где $M = \max\limits_{Z\in\Gamma} |f(z)|$, l – длина пути интегрирования Г.

Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то интеграл вычисляют по формуле:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma}(u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy),$$

которая после перемножения выражений в скобках принимает вид:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx. \qquad (29.18)$$

Таким образом, вычисление интеграла от функции комплексной переменной сводится к вычислению криволинейных интегралов 2-го рода.

Если кривая Г задана параметрически

$\Gamma:\ z = z(t) = x(t) + iy(t)\ \ (a \le t \le b)$,

где $z'(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и $z'(t) \ne 0$ на $[a, b]$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b}(u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t) + iu(x(t),y(t))y'(t) + iv(x(t),y(t))x'(t))dt = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)\,dt. \qquad (29.19)$$

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то для любой замкнутой гладкой кривой $\Gamma \subset D$ выполняется равенство:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то значение интеграла $\int_{\Gamma} f(z)dz,$ взятого по гладкой кривой $\Gamma \subset D,$ не зависит от пути интегрирования Г, а определяется только положениями начальной и конечной точек линии Г. В этом случае можно записать

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz = \int_{A}^{B} f(z)\,dz$$

и для вычисления интеграла можно пользоваться формулой Ньютона–Лейбница.

$$\int_{A}^{B} f(z) = F(B) - F(A),$$

где $F(z)$ – первообразная функции $f(z)$. В случае аналитичности $f(z)$ ее первообразную можно найти по таблице интегралов, аналогичной таблице интегралов для функций действительной переменной.

Теорема Коши для многосвязной области. Пусть D – $(n + 1)$ – связная область, которая вместе со своей границей Г лежит в области G, а $f(z)$ – аналитическая функция в области G. Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0,$$

где граница Г обходится в положительном направлении и $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + ... + \Gamma_n$. За положительное направление обхода границы Г принимается то направление, при котором область D остается слева (рис. 29.2).

При выполнении условий теоремы имеет место равенство

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz, \qquad (29.20)$$

где Γ_0 – наружная часть границы Г, а Γ_k, $k = \overline{1, n}$ – внутренние ее части, причем теперь все кривые $(\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_n)$ обходятся в направлении против движения часовой стрелки (т. е. кривые Γ_1, …, Γ_n – в направлении, противоположном тому, которое указано стрелками на рис. 29.2). В частности, для двусвязной области D верно равенство

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz,$$

откуда следует, что

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma'} f(z)\,dz,$$

где Γ' – любой замкнутый гладкий контур, расположенный между Γ_0 и Γ' (лежащий в области аналитичности функции $f(z)$).

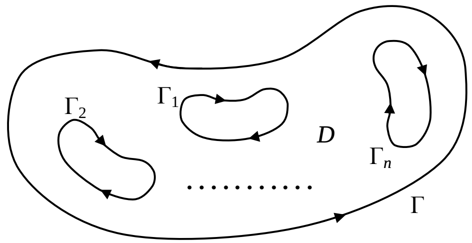


Рис. 29.2

Интегральная формула Коши. Если D – односвязная область с гладкой границей Г и $f(z)$ – аналитическая функция в замкнутой области $\bar{D} = DU\Gamma$, то для любой точки $z_0 \in D$ справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2p\,i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0}, \qquad (29.21)$$

где граница Г обходится в положительном направлении.

Если функция $f(z)$ аналитична на круге $|z - z_0| \le r,$ то справедлива формула:

$$f(z_0) = \frac{1}{2p} \int_{0}^{2p} f\,(z_0 + r\,e^{ij})\,dj\,.$$

Интегральная формула Коши для многосвязной области. Если D – $(n+1)$-связная область с границей $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1+...+\Gamma_n$ и $f(z)$ – аналитическая функция в замкнутой области $\bar{D}=D\cup\Gamma$, то

$$f(z_0)=\frac{1}{2p\,i}\int_\Gamma\frac{f(z)\,dz}{z-z_0},$$

где $z_0\in D$, граница Γ обходится в положительном направлении.

Пусть D – односвязная область с гладкой границей Γ и $f(z)$ – аналитическая функция в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда в каждой точке $z_0\in D$ функция $f(z)$ имеет производную любого порядка n, $n\in\mathbf{N}$, причем справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2p\,i}\int_\Gamma\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}. \qquad (29.22)$$

Для функции $f(z)$, аналитичной на круге $|z-z_0|\le r$, справедливо неравенство

$$|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{Mn!}{r^n},\quad n=0,1,2,...,$$

где $M=\max\limits_{|z-z_0|\le r}|f(z)|$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma\frac{dz}{z-z_0}$, где Γ – ориентированная положительно окружность $|z-z_0|=r$; z_0 – конкретная точка комплексной плоскости (центр окружности), r – радиус, $r>0$.

Решение. Для вычисления интеграла воспользуемся его определением (29.17). Параметрическим уравнением заданной окружности является уравнение $z=z_0+re^{it}$, $0\le t\le 2p$. В качестве точек деления z_k кривой Γ выберем те, которые соответствуют значениям параметра $t_k=\frac{2kp}{n}$, т. е. $z_k=z_0+re^{\frac{2kp}{n}i}$, $k=\overline{0,n}$.

На частичных дугах g_k выберем точки z_k^0, которые соответствуют значениям параметра $\frac{t_{k-1}+t_k}{2}=\frac{(2k-1)p}{n}$, т. е. $z_k^0=z_0+re^{\frac{(2k-1)p}{n}i}$, $k=\overline{1,n}$.

Тогда интегральные суммы (29.16) приобретут вид

$$S_n=\sum_{k=1}^n\frac{1\cdot r}{re^{\frac{(2k-1)p}{n}i}}\left(e^{\frac{2kpi}{n}}-e^{\frac{2(k-1)p}{n}i}\right)=\sum_{k=1}^n\left(e^{(2k-2k+1)\frac{p}{n}i}-e^{(2k-2-2k+1)\frac{p}{n}i}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^n\left(e^{\frac{p}{n}i}-e^{-\frac{p}{n}i}\right)=n\left(e^{\frac{p}{n}i}-e^{-\frac{p}{n}i}\right)=n\cdot 2i\frac{e^{\frac{p}{n}i}-e^{-\frac{p}{n}i}}{2i}=2ni\sin\frac{p}{n}.$$

Согласно равенству (29.17), имеем:

$$\int_\Gamma\frac{dz}{z-z_0}=\lim_{n\to\infty}2ni\sin\frac{p}{n}=2p\,i\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{p}{n}}{\frac{p}{n}}=2p\,i.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma\bar{z}dz$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=2-i$:

1) по отрезку Γ_1 прямой, соединяющему точки z_1 и z_2;

2) по дуге Γ_2 параболы $y=-\frac{x^2}{4}$;

3) по ломаной ABC, где $A(0;0)$, $B(0;-1)$, $C(2;-1)$.

Решение. 1) Сведем вычисление заданного интеграла к вычислению криволинейного интеграла 2-го рода по отрезку прямой. Уравнение прямой, проходящей через точки A и C (z_1 и z_2), имеет вид $y=-\frac{x}{2}$. Воспользуемся формулой (29.18). Так как

$\bar{z}=x-iy$, то

$$\int_\Gamma\bar{z}dz=\int_{\Gamma_1}(x-iy)(dx+idy)=\int_{\Gamma_1}xdx+ydy+i\int_{\Gamma_1}xdy-ydx=\int_0^2xdx+\int_0^{-1}ydy+$$

$$+i\int_0^{-1}(-2y)\,dy-i\int_0^2\left(-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2+\frac{y^2}{2}\Big|_0^{-1}-i\cdot y^2\Big|_0^{-1}+i\cdot\frac{x^2}{4}\Big|_0^2=\frac{5}{2}.$$

2) Воспользуемся формулой (29.18). Тогда

$$\int_{\Gamma_2}(x-iy)dz=\int_{\Gamma_2}xdx+ydy+i\int_{\Gamma_2}xdy-ydx=\int_0^2xdx+\int_0^{-1}ydy+$$

$$+i\int_0^2 x\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)dx-i\int_0^2\left(-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{5}{2}-i\cdot\frac{x^3}{6}\Bigg|_0^2+i\frac{x^3}{12}\Bigg|_0^2=\frac{5}{2}-\frac{2}{3}i.$$

3) Вначале используем свойство аддитивности интеграла, а затем перейдем к криволинейному по формуле (29.18):

$$\int_{ABC}\overline{z}dz=\int_{AB}\overline{z}dz+\int_{BC}\overline{z}dz=\int_{AB}xdx+ydy+i\int_{AB}xdy-ydx+$$

$$+\int_{BC}xdx+ydy+i\int_{BC}xdy-ydx=\int_0^{-1}ydy+\int_0^2 xdx+i\int_0^2 dx=\frac{5}{2}+2i.$$

Заметим, что функция $f(z)=\overline{z}$ не является аналитической и получены разные значения интеграла при движении по разным кривым.

Пример 3. Вычислить интеграл $I=\int_{\Gamma}(-2z+iz^2)dz$ от точки $z_1=i$ до точки $z_2=1$:

1) по дуге Γ_1 окружности $x^2+y^2=1$;

2) по отрезку Γ_2 прямой $x+y=1$;

3) по ломаной ABC, где $A(0;\,1)$, $B(0;\,0)$, $C(1;\,0)$;

4) по формуле Ньютона–Лейбница.

Решение. Подынтегральная функция имеет вид

$-2z+iz^2=-2(x+iy)+i(x+iy)^2=(-2x-2xy)+i(x^2-y^2-2y).$

1) Используем формулу (29.18):

$$I=\int_{\Gamma_1}(-2x-2xy)dx-(x^2-y^2-2y)dy+$$
$$+i\int_{\Gamma_1}(-2x-2xy)dy+(x^2-y^2-2y)dx. \qquad (29.23)$$

От полученного криволинейного интеграла перейдем к определенному. Из уравнения окружности получаем $y=\sqrt{1-x^2}$. При этом $x\in[0;1]$, соответственно условию, что кривая от точки i до точки 1 лежит в правой четверти.

$$I=\int_0^1(-2x-2x\sqrt{1-x^2})dx-\int_1^0(1-y^2-y^2-2y)\,dy+$$

$$+i\int_1^0(-2\sqrt{1-y^2}-2y\sqrt{1-y^2})\;dy+i\int_0^1(x^2+x^2-1-2\sqrt{1-x^2})dx=$$

$$=\left(-x^2+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1+\left(y-y^2-\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_0^1-i\cdot\frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1+$$

$$+i\cdot\left(\frac{2}{3}x^3-x\right)\Bigg|_0^1=-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}i.$$

2) Вначале переходим от заданного интеграла к криволинейному интегралу (29.23). Затем перейдем к определенному интегралу, используя уравнение линии $y=1-x$.

$$I=\int_0^1(-2x-2x\cdot(1-x)+x^2-(1-x)^2-2(1-x))\,dx+$$

$$+i\int_0^1(2x+2x\cdot(1-x)+x^2-(1-x)^2-2(1-x))\;dx=$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^3-3x\right)\Bigg|_0^1+i\left(-\frac{2}{3}x^3+4x^2-3x\right)\Bigg|_0^1=-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}i.$$

3) Поскольку заданная ломаная состоит из трех звеньев, то

$$I=\int_{AB}(y^2+2y)dy+\int_{BC}(-2x)\,dx+i\int_{BC}x^2dx=$$

$$=\int_1^0(y^2+2y)\;dy-2\int_0^1 xdx+i\int_0^1 x^2dx=-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}i.$$

4) Поскольку подынтегральная функция является аналитической, то используем формулу Ньютона–Лейбница:

$$I=\int_i^1(-2z+iz^2)\,dz=-z^2\Bigg|_i^1+i\cdot\frac{1}{3}z^3\Bigg|_i^1=-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}i.$$

Заметим, что все четыре интеграла данного примера равны, так как подынтегральная функция аналитична. В таком случае значение интеграла не зависит от кривой интегрирования.

Пример 4. Вычислить интеграл:

1) $\int_{\Gamma}\frac{dz}{z-z_0}$, где Γ – окружность $|z-z_0|=r$, которая ориентирована положительно;

2) $\int\limits_{\Gamma} z^n dz$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$; где Г – произвольная гладкая линия с началом в точке z_0 и концом в точке z_1.

Решение. 1) Данный интеграл мы уже вычисляли в примере 1 (с. 257 данного пособия), переходя к интегральным суммам. Вычислим его другим способом, воспользовавшись формулой (29.19). Кривая интегрирования есть окружность, ее параметрическое уравнение $z = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2p$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_0^{2p} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int\limits_0^{2p} dt = 2p\, i.$$

Видно, что предложенный тут способ вычисления интеграла является более рациональным, чем предыдущий (см. пример 1).

2) Уравнение линии Г можно записать в некотором виде $z = z(t)$, где $a \le t \le b$ и $z(a) = z_0$, $z(b) = z_1$. Согласно формуле (29.19), имеем:

$$\int\limits_{\Gamma} z^n dz = \int\limits_a^b (z(t))^n z'(t)\, dt = \int\limits_a^b \frac{((z(t))^{n+1})'}{n+1} dt = \frac{1}{n+1}\int\limits_a^b ((z(t))^{n+1})' dt =$$

$$= \frac{1}{n+1}(z(t))^{n+1}\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}((z(b))^{n+1} - (z(a))^{n+1}) = \frac{1}{n+1}(z_1^{n+1} - z_0^{n+1}).$$

Мы получили ответ, который показывает, что значение интеграла от данной функции не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек.

Пример 5. Вычислить интеграл от функции $f(z) = \cos^2 z + z$ вдоль линии Г, которая соединяет точки $z_0 = 0$, $z_1 = 2 + 2i$.

Решение. Поскольку *f*(*z*) является аналитической функцией всюду на комплексной плоскости, то значение интеграла зависит только от начальной и конечной точек, т. е.

$$I = \int\limits_{\Gamma} (\cos^2 z + z)\, dz = \int\limits_0^{2+2i} (\cos^2 z + z) dz.$$

Используем таблицу интегралов и формулу Ньютона–Лейбница:

$$I = \int\limits_0^{2+2i} \left(\frac{1}{2}\left(1 + \cos 2z\right) + z \right) dz = \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sin 2z + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{2+2i} =$$

$$= 1 + i + \frac{1}{4}\sin(4+4i) + 2(1+i)^2 = 1 + 5i + \frac{1}{4}\sin(4+4i).$$

Пример 6. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2+4} dz$, где Г – окружность $x^2 + y^2 + 6y = 0$;

2) $\int\limits_{\Gamma} \frac{\sin(z+2)}{z^3 - 3z^2 - 3z} dz$, где Г – окружность $|z| = 2$.

Решение. 1) Преобразуем уравнение окружности Г к виду $x^2 + (y+3)^2 = 9$, что в комплексной форме запишем как $|z + 3i| = 3$. Подынтегральную функцию перепишем в виде

$$\frac{\cos z}{z^2+4} = \frac{\cos z}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{\left(\frac{\cos z}{z-2i}\right)}{z+2i}.$$

Заметим, что функция $\frac{\cos z}{z-2i}$ является аналитической в круге $|z+3i| \le 3$, а точка $z_0 = -2i$ – внутренней для этого круга. Можем использовать формулу (29.21):

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z+2i)(z-2i)} dz = 2p\, i \frac{\cos(-2i)}{-4i} = -\frac{p}{2}\cos 2i = -\frac{p}{2}\mathrm{ch}2.$$

2) Внутри окружности $|z| = 2$ подынтегральная функция

$$\frac{\sin(z+2)}{z^3 - 3z^2 - 3z} = \frac{\sin(z+2)}{z(z+1)(z-3)}$$

имеет две особые точки: $z_1 = -1$, $z_2 = 0$ (третья особая точка $z = 3$ лежит вне круга, ограниченного данной окружностью). Ограничим точки $z_1 = -1$ и $z_2 = 0$ двумя непересекающимися окружностями g_1 и g_2, которые целиком лежат внутри окружности Г.

В результате получим трехсвязную область, в которой подынтегральная функция является аналитической. Согласно формуле (29.20), имеем:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\sin(z+2)}{z(z+1)(z-3)} dz = \int\limits_{g_1} \frac{\sin(z+2)}{z(z+1)(z-3)} dz + \int\limits_{g_2} \frac{\sin(z+2)}{z(z+1)(z-3)} dz.$$

Применим формулу Коши (29.21) к интегралам в правой части равенства:

$$\int\limits_{g_1}\frac{\sin(z+2)}{z(z+1)(z-3)}dz=\int\limits_{g_1}\frac{\dfrac{\sin(z+2)}{z(z-3)}}{z+1}dz=2p\,i\left.\frac{\sin(z+2)}{z(z-3)}\right|_{z=-1}=\frac{p\,i}{2}\sin 1.$$

$$\int\limits_{g_2}\frac{\sin(z+2)}{z(z+1)(z-3)}dz=\int\limits_{g_2}\frac{\dfrac{\sin(z+2)}{(z+1)(z-3)}}{z}dz=2p\,i\left.\frac{\sin(z+2)}{(z+1)(z-3)}\right|_{z=0}=-\frac{2}{3}p\,i\sin 2.$$

В результате получаем:

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{\sin(z+2)}{z(z+1)(z-3)}dz=\frac{p\,i}{6}(3\sin 1-4\sin 2).$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{\cos z^2}{(z+2i)^3}dz,\ \text{где } \Gamma - \text{окружность } |z+i|=2.$$

Решение. Функция $f(z)=\cos z^2$ является аналитической на области $|z+i|\le 2$. Согласно формуле (29.22), для $z_0=-2i$ (точка z_0 – внутренняя) имеем

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{\cos z^2}{(z+2i)^3}dz=\frac{2p\,i}{2!}(\cos z^2)''\Big|_{z=-2i}=-2p\,i(\sin z^2+2z^2\cos z^2)\Big|_{z=-2i}=$$

$$=2p\,i(\sin 4+8\cos 4).$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{(2z-i)\,dz}{(z+2)(z-1+i)}$, если:

1) Γ – окружность $|z|=1$; 2) Γ – окружность $|z|=2$;

3) Γ – окружность $|z-i|=5$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде

$$f(z)=\frac{2z-i}{(z+2)(z-1+i)}=\frac{A+Bi}{z+2}+\frac{C+Di}{z-1+i}.$$

Найдя неизвестные коэффициенты A, B, C, D из равенства

$$(A+Bi)(z-1+i)+(C+Di)(z+2)=2z-i,$$

т. е. из системы уравнений

$$\begin{cases}A+C=2,\\ B+D=0,\\ A-B+2D=-1,\\ -A-B+2C=0,\end{cases}$$

получим $A=\dfrac{11}{10}$, $B=\dfrac{7}{10}$, $C=\dfrac{9}{10}$, $D=-\dfrac{7}{10}$, т. е.

$$f(z)=\frac{1}{10}\cdot\frac{11+7i}{z+2}+\frac{1}{10}\cdot\frac{9-7i}{z-1+i}.$$

Последнее выражение показывает, что в точках $z_1=-2$ и $z_2=1-i$ заданная функция имеет разрывы (эти точки особые).

1) Поскольку $|z_1|=2>1$, $|z_2|=\sqrt{2}>1$, то точки z_1 и z_2 лежат вне круга $|z|\le 1$. Значит, функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $|z|\le 1$ и по теореме Коши

$$\oint\limits_{|z|=1}f(z)\,dz=0.$$

2) Найдем расстояния r_1 и r_2 от точек z_1 и z_2 соответственно до точки $z_0=-1$, являющейся центром окружности $|z+1|=2$.

$$r_1=|z_1-z_0|=|-2+1|=1<2,\quad r_2=|z_2-z_0|=|2-i|=\sqrt{5}>2.$$

Значит, точка z_1 лежит внутри круга $|z+1|\le 2$, а точка z_2 – вне этого круга.

1-й способ. Пусть g_1 – окружность с центром в точке z_1 малого радиуса r (такого, что круг $|z-z_1|\le r$ целиком лежит внутри круга $|z+1|\le 2$). Очевидно, что в двусвязной области с границами Γ: $|z+1|=2$ и $g_1:|z-z_1|=r$, включая и сами границы (на кольце), функция $f(z)$ аналитична. По теореме Коши для двусвязной области

$$\oint\limits_{\Gamma}f(z)dz=\oint\limits_{g_1}f(z)dz.$$

Параметрическое уравнение окружности $g_1:|z-z_1|=r$ имеет вид $z=z_1+re^{it}$, $0\le t\le 2p$.

Замечая, что $dz=ire^{it}dt$, находим

$$\oint\limits_{g_1}f(z)\,dz=\frac{1}{10}(11+7i)\int\limits_0^{2p}\frac{ire^{it}dt}{-2+re^{it}+2}+\frac{1}{10}(9-7i)\oint\limits_{g_1}\frac{dz}{z-1+i}=$$

$$=\frac{11+7i}{10}\cdot 2p\,i+0=\frac{p\,i(11+7i)}{5}=\frac{p\,(-7+11i)}{5},$$

так как второй интеграл в полученной сумме равен нулю, по причине аналитичности функции $\dfrac{1}{z-1+i}$ в круге $\left|z-z_1\right|\le r.$

2-й способ. Представим функцию *f*(*z*) в виде

$f(z)=\dfrac{f_1(z)}{z+2},$ где $f_1(z)=\dfrac{2z-i}{z-1+i}.$ Поскольку функция $f_1(z)$ аналитична в области $|z+1|\le 2,$ то по формуле Коши (29.21) находим:

$$\oint_\Gamma \frac{f_1(z)\,dz}{z-z_1}=2p\,i\cdot f_1(z_1)=2p\,i\cdot\frac{2z_1-i}{z_1-1+i}=2p\,i\cdot\frac{-4-i}{-3+i}=$$

$$=2p\,i\cdot\frac{(-4-i)(-3-i)}{9+1}=\frac{p\,i(11+7i)}{5}=\frac{p\,(-7+11i)}{5}.$$

3) Центром окружности $\Gamma:\left|z-i\right|=5$ является точка $z_0=i.$

Находим:

$|z_1-i|=|-2-i|=\sqrt{5}<5;\qquad |z_2-i|=|1-2i|=\sqrt{5}<5.$

Значит, точки z_1 и z_2 лежат внутри круга $\left|z-i\right|\le 5.$

1-й способ. Пусть g_1 и g_2 – окружности с центрами в точках z_1 и z_2 соответственно малого радиуса r (см. 2-е задание этого примера). В трехсвязной области с границами Г, g_1, g_2, включая сами границы, функция *f*(*z*) аналитична. По теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=\oint_{g_1} f(z)\,dz+\oint_{g_2} f(z)\,dz.$$

Находим

$$\oint_{g_1} f(z)\,dz+\oint_{g_2} f(z)\,dz=\frac{11+7i}{10}\oint_{g_1}\frac{dz}{z+2}+\frac{9-7i}{10}\oint_{g_1}\frac{dz}{z-1+i}+$$

$$+\frac{11+7i}{10}\oint_{g_2}\frac{dz}{z+2}+\frac{9-7i}{10}\oint_{g_2}\frac{dz}{z-1+i}.$$

Второй и третий интегралы полученной суммы равны нулю, так как подынтегральные функции аналитичны. Переходим к параметрическому заданию окружностей g_1 и g_2 и вычисляем:

$$\frac{11+7i}{10}\oint_{g_1}\frac{dz}{z+2}+\frac{9-7i}{10}\oint_{g_2}\frac{dz}{z-1+i}=\frac{11+7i}{10}\int_0^{2p}\frac{i\,re^{it}\,dt}{re^{it}}+\frac{9-7i}{10}\int_0^{2p}\frac{ire^{it}\,dt}{re^{it}}=$$

$$=\frac{p\,i(11+7i)}{5}+\frac{p\,i(9-7i)}{5}=\frac{p(-7+11i)}{5}+\frac{p\,(7+9i)}{5}=\frac{20p\,i}{5}=4p\,i.$$

2-й способ. Применяя формулу Коши к каждому из двух интегралов от функции $f(z)=\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{11+7i}{z+2}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{9-7i}{z-1+i},$ находим:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=\frac{11+7i}{10}\oint_\Gamma\frac{dz}{z+2}+\frac{9-7i}{10}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-1+i}=\frac{11+7i}{10}\cdot 2p\,i\cdot 1+$$

$$+\frac{9-7i}{10}\cdot 2p\,i\cdot 1=4p\,i.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz$ по прямолинейному отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2, если:

1) $f(z)=\operatorname{Im}z,\ z_1=0,\ z_2=-1-2i;$ 2) $f(z)=\operatorname{Re}z,\ z_1=1-i,\ z_2=0;$

3) $f(z)=|z|,\ z_1=-1-i,\ z_2=1+i;$ 4) $f(z)=|z|,\ z_1=1,\ z_2=-1;$

5) $f(z)=z-1+2i,\ z_1=0,\ z_2=1+i.$

1.2. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz,$ если Г представляет собой ломаную *ABC*, состоящую из двух прямолинейных отрезков *AB* и *BC*:

1) $f(z)=\operatorname{Re}z-2,\ A(0;0),\ B(-1;0),\ C(-1;1);$

2) $f(z)=\operatorname{Im}z+3,\ A(-1;1),\ B(1;1), C(1;0);$

3) $f(z)=1-2z,\ A(0;0), B(-1;0),\ C(-1;1);$

4) $f(z)=z^2+z,\ A(-1;1), B(1;1), C(1;0).$

II уровень

2.1. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz,$ если путь Г представляет собой ломаную *ABC*, состоящую из двух прямолинейных отрезков *AB* и *BC*:

1) $f(z)=y+ix,\ A(-1;-1), B(1;1), C(1;-1);$

2) $f(z)=z^2,\ A(-1;1), B(1;-1), C(3;1);$

3) $f(z)=y+ix,\ A(-1;1), B(1;-1), C(-1;1);$

4) $f(z)=z^2,\ A(2;1), B(3;4),\ C(2;1);$

5) $f(z)=z^2+z\cdot\overline{z},\ A(0;1), B(1;2), C(0;3).$

2.2. Вычислите интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$, где Γ – дуга указанной кривой от точки z_1 до точки z_2:

1) $f(z)=z\cdot\operatorname{Re} z,\ \Gamma:|z|=1,\ z_1=1,\ z_2=i;$

2) $f(z)=z\operatorname{Re} z,\ \Gamma:|z|=1,\ z_1=-i,\ z_2=-1;$

3) $f(z)=z\operatorname{Re} z$; Γ – парабола с вершиной в точке (1; 0), проходящая через точку $(0;-1)$, $z_1=2-i,\ z_2=-i;$

4) $f(z)=e^{\overline{z}};\ \Gamma: y=|x|;\ z_1=-1+i, z_2=1+i;$

5) $f(z)=\sin z\cos z;\ \Gamma: y=x^2;\ z_1=0, z_2=1+i.$

2.3. Вычислите интеграл $\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz$ по указанной замкнутой кривой

1) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-4};\ \Gamma:|z|=4;$ 2) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2+1};\ \Gamma:|z|=2;$

3) $f(z)=\dfrac{z-i}{z^2+2z};\ \Gamma:|z|=1;$ 4) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-3iz};\ \Gamma:|z-1-2i|=2;$

5) $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z-4};\ \Gamma:|z+2-i|=4.$

III уровень

3.1. Вычислите интеграл $\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz$ по указанной замкнутой кривой Γ (число m – целое, т. е. $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$):

1) $f(z)=(z-z_0)^m;\ \Gamma:|z-z_0|=R;$

2) $f(z)=(z-z_0)^m;\ \Gamma:|z-z_0+a|+|z-z_0-a|=4a,\ a>0,\ a\in\mathbf{R};$

3) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1-2i)^m};\ \Gamma:|z-2i|=3;$

4) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1+2i)^m};\ \Gamma:|z-2i|=3.$

29.7. Ряды на комплексной плоскости

Пусть (z_n) – последовательность комплексных чисел, $z_n=x_n+iy_n,\ n\in\mathbf{N}.$

Выражение вида

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

называется ***числовым рядом***, числа z_n – ***элементами ряда***, сумма $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ – ***n-й частичной суммой ряда***.

Если последовательность (S_n) частичных сумм сходится, то ряд называется ***сходящимся***, ее предел $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется ***суммой ряда***, что записывают $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$.

Если последовательность (S_n) расходится, то ряд называется ***расходящимся***. Расходящийся ряд суммы не имеет.

Величина

$$R_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k$$

называется ***остатком сходящегося ряда***. Из сходимости ряда следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0.$$

Если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \ \text{ и } \ \sum_{n=1}^{\infty} z'_n$$

сходятся и имеют суммы соответственно S и S', то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a\,z_n+b\,z'_n),\ a,b\in C,$ сходится к сумме $a\,S+b\,S'$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ называется ***действительной частью ряда*** $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ – ***мнимой частью ряда*** $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Ряд с комплексными элементами сходится тогда и только тогда, когда сходятся его действительная и мнимая части, причем в случае сходимости

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \operatorname{Re} S, \\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \operatorname{Im} S. \end{cases}$$

Необходимый признак сходимости: если ряд с комплексными элементами сходится, то $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Достаточный признак расходимости: если $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ (или не существует), то ряд расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, который является рядом с действительными неотрицательными элементами.

Справедливы утверждения

1. Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = c$. Если $c<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, если $c>1$ – ряд расходится.

2. Пусть $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = c$. Если $c<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, если $c>1$ – ряд расходится.

3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, то он сходится.

З а м е ч а н и е. Из сходимости ряда не следует его абсолютная сходимость.

Абсолютная сходимость ряда с комплексными элементами

равнозначна абсолютной сходимости его действительной и мнимой частей.

Ряд вида

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad (29.24)$$

где $a, c_n \in C$, c_n – коэффициенты ряда, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ называется ***степенным рядом***.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ сходится в некоторой точке $z_1 \neq a$, то он сходится, причем абсолютно, в любой точке z, которая удовлетворяет условию

$|z-a| < |z_1 - a|$.

Если этот ряд расходится в некоторой точке z_2, то он расходится во всех точках z, для которых

$|z-a| > |z_2 - a|$.

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ сходится более чем в одной точке, но не на всей комплексной плоскости. Тогда существует действительное число r такое, что этот ряд абсолютно сходится для всех z, для которых $|z-a| < r$, и расходится для тех z, для которых $|z-a| > r$. При этом круг $|z-a| < r$ называется ***кругом сходимости***, число r – ***радиусом сходимости*** степенного ряда.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в круге $|z-a| < r$. Тогда внутри этого круга функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд по степеням $z-a$. Такое разложение единственно.

Признаки Д'Аламбера и Коши. Если существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|c_{n+1}(z-a)^{n+1}\right|}{\left|c_n(z-a)^n\right|} = L(z) \quad (29.25)$$

или соответственно

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|c_n (z-a)^n\right|} = L(z), \quad (29.26)$$

то ряд (29.24) сходится абсолютно во всех точках z, для которых $L(z) < 1$, и расходится, если $L(z) > 1$.

Степенной ряд вида

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad (29.27)$$

называется ***рядом Тейлора*** функции $f(z)$, $z\in C$, в окрестности точки a.

Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-a|<r$, разлагается в этом круге в ряд Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \qquad (29.28)$$

С учетом формулы (29.22), равенство (29.28) можно записать в виде

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

где $c_n=\dfrac{1}{2p\,i}\displaystyle\int_g\frac{f(s)ds}{(s-a)^{n+1}}$, g – окружность $|z-a|=r$,

$0<r<r$, $|z-a|\le r$ – круг аналитичности $f(z)$.

Ряд Тейлора (29.28), у которого $a=0$ называется ***рядом Маклорена***.

Общий вид ряда Маклорена:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

Разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ |z|<\infty;\ \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ |z|<\infty; \qquad (29.29)$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\ |z|<\infty; \qquad (29.30)$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},\ |z|<1;$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1 \text{ – } \textbf{\textit{геометрический ряд}}. \qquad (29.31)$$

Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (29.32)$$

называется ***рядом Лорана***, причем $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ называется ***главной частью ряда Лорана***, а $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ – ***правильной частью ряда Лорана***.

Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r<|z-a|<R$, разлагается в этом кольце в абсолютно сходящийся ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \qquad (29.33)$$

где коэффициенты определяются формулами:

$$c_n=\frac{1}{2p\,i}\int_g\frac{f(s)ds}{(s-a)^{n+1}},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2p\,i}\int_g\frac{f(s)ds}{(s-a)^{-n+1}},\quad n=1,2,\ldots,$$

g – окружность $|z-a|=r$, $r<r<R$.

Разложение (29.33) в кольце $r<|z-a|<R$ является единственным.

Заметим, что формулы для нахождения коэффициентов c_n и c_{-n} можно объединить в одну:

$$c_n=\frac{1}{2p\,i}\int_g\frac{f(s)ds}{(s-a)^{n+1}},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Пример 1. Исследовать сходимость ряда:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n^2 i}{2n^3}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(8+6i)^n}$.

Решение. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n^2i}{2n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}+i\cdot\frac{1}{2n}\right)$. Рассмотрим ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится, так как это обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ с $a=3>1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (это гармонический ряд). Значит, $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$, где $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Так как $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}S_n$, то $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}S_n=\infty.$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ расходится, и, значит, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n^2i}{2n^3}$ расходится.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(8+6i)^n}$ исследуем на абсолютную сходимость, для чего рассмотрим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|8+6i|^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$.

Последний ряд сходится (сходящаяся геометрическая прогрессия с $q=\frac{1}{10}$). Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(8+6i)^n}$ сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-3i)^n}{n\cdot 7^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2(3+\sqrt{7}i)^n}{5^{n+1}}$.

Решение. 1) Рассмотрим ряд из модулей его элементов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(1-3i)^n}{n\cdot 7^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|1-3i|^n}{n\cdot 7^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{10})^n}{n\cdot 7^n}.$$

Для выяснения вопроса сходимости полученного знакоположительного ряда используем признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\sqrt{10})^n}{n\cdot 7^n}}=\frac{\sqrt{10}}{7}<1.$$

Это значит, что данный ряд сходится абсолютно, а поэтому сходится.

2) Исследование на сходимость ряда из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(n+1)^2(3+\sqrt{7}i)^n}{5^{n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 4^n}{5^{n+1}}$$

проведем на основе признака Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)^2\cdot 4^{n+1}}{5^{n+2}}\cdot\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2\cdot 4^n}\right)=\frac{4}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}=\frac{4}{5}<1.$$

Последнее означает абсолютную сходимость данного ряда, чем гарантируется его сходимость.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}+z^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}.$$

Решение. Функции-слагаемые $f_n(z)=z^{n-1}$, $n\in\mathbf{N}$, данного ряда определены на всей плоскости *C*. Его *n*-я частичная сумма есть

$$S_n(z)=1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}.$$

Методом математической индукции нетрудно убедиться в том, что $1-z^n=(1-z)(1+z+\ldots+z^{n-1})$.

Тогда

$$S_n(z)=\frac{1-z^n}{1-z}$$

или, то же самое,

$$S_n(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{z^n}{1-z}.$$

Если z_0 – произвольное комплексное число, то данный функциональный ряд преобразуется в числовой с частичной суммой

$$S_n(z_0)=\frac{1}{1-z_0}-\frac{z_0^n}{1-z_0}.$$

Поэтому, $\left|S_n(z_0)-\frac{1}{1-z_0}\right|=\left|\frac{z_0^n}{1-z_0}\right|$,

откуда $\left|S_n(z_0)-\frac{1}{1-z_0}\right|=\frac{|z_0|^n}{|1-z_0|}$.

Из последнего отношения видно, что только для того числа z_0, для которого $|z_0|<1$, выполняется условие

$$\frac{|z_0|^n}{|1-z_0|} \to 0, \text{ когда } n \to \infty.$$

Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z_0) = \frac{1}{1-z_0}, \text{ если } |z_0|<1.$$

Произвольность числа $z_0, |z_0|<1$, приводит к заключению, что внутри круга $|z|<1$ ряд сходится к сумме $S(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

Если $|z| \ge 1$, то общий элемент z^{n-1} данного ряда не стремится к нулю с ростом n (необходимый признак сходимости не выполняется), а потому ряд расходится.

Таким образом, получена формула

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots = \frac{1}{1-z}, \text{ где } |z|<1.$$

В заключение заметим, что полученный результат полностью соответствует действительному случаю, где для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots = \dfrac{1}{1-x}$, если $|x|<1$.

Пример 4. Найти множество абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n(1+i)^n}{\sqrt{(5n-2)\,2^n}}(z+2)^n$, пользуясь признаком Д'Аламбера.

Решение. Используя формулу (29.25), получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{7^{n+1}(1+i)^{n+1}}{\sqrt{(5n+3)\,2^{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{(5n-2)\,2^n}\;(z+2)^{n+1}}{7^n(1+i)^n(z+2)^n}\right| =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{2}}|1+i|\cdot|z+2|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{5n-2}{5n+3}} = \frac{7}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\cdot|z+2|\cdot 1 = 7|z+2|.$$

Если $7|z+2|<1$, то ряд является абсолютно сходящимся. Очевидно, что это имеет место внутри круга $|z+2|<\dfrac{1}{7}$. Одновременно с этим признак Д'Аламбера утверждает, что вне круга (т. е. при $|z+2|>\dfrac{1}{7}$) ряд расходится, однако он не достаточно «сильный», чтобы дать ответ о сходимости в точках окружности $|z+2| = \dfrac{1}{7}$.

Пример 5. Найти круг и радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-2i)^n(z-2+i)^n}{n+3}$.

Решение. Используем признак Д'Аламбера и рассмотрим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1-2i)^{n+1}(z-2+i)^{n+1}}{n+4}\right| : \left|\frac{(1-2i)^n(z-2+i)^n}{n+3}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1-2i)(n+3)(z-2+i)}{n+4}\right| = |1-2i|\cdot|z-2+i|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+4} =$$

$$= |1-2i|\cdot|z-2+i| = \sqrt{5}\cdot|z-2+i|.$$

По признаку Д'Аламбера ряд сходится, если

$$\sqrt{5}\cdot|z-2+i|<1 \text{ или } |z-(2-i)|<\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Значит, круг сходимости есть $|z-(2-i)|<\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, радиус сходимости $r = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Пример 6. Разложить в ряд Тейлора по степеням $z+1$ функцию:

1) $f(z) = \dfrac{1}{3z+2}$; 2) $f(z) = z^4-2z^3+z^2-3z+1$.

Найти область сходимости полученного ряда.

Решение. 1) Решим задачу двумя способами.

1-й способ. Используем формулу (29.28) для $a=-1$. Для этого найдем производные функции и их значения в точке $a=-1$:

$$f(-1) = -1;$$

$$f'(z) = -\frac{3}{(3z+2)^2}; \qquad f'(-1) = -3;$$

$$f''(z) = \frac{3^2\cdot 2}{(3z+2)^3}; \qquad f''(-1) = -3^2\cdot 2;$$

$$f'''(z) = -\frac{3^3 \cdot 2 \cdot 3}{(3z+2)^4}; \qquad f'''(-1) = -3^3 \cdot 3!;$$

....

$$f^{(n)}(n) = \frac{(-1)^n \cdot 3^n \cdot n!}{(3n+2)^{n+1}}; \qquad f^{(n)}(-1) = -3^n \cdot n!;$$

....

Тогда получаем

$$\frac{1}{3z+2} = -1 - 3(z+1) - 3^2(z+1)^2 - 3^3(z+1)^3 - \ldots - 3^n(z+1)^n - \ldots$$

Радиус сходимости полученного ряда найдем согласно формуле

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

т. е. $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{1}{3}.$

Значит, ряд сходится внутри круга $|z+1| < \frac{1}{3}$.

2-й способ. Запишем выражение, которое задает функцию $f(z)$, в другом виде:

$$\frac{1}{3z+2} = \frac{1}{3z+3-1} = \frac{1}{3(z+1)-1} = -\frac{1}{1-3(z+1)}.$$

Полученную дробь рассмотрим как сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = 3(z+1)$.

Если $3|z+1| < 1$, то

$$\frac{1}{1-3(z+1)} = 1 + 3(z+1) + 3^2(z+1)^2 + 3^3(z+1)^3 + \ldots + 3^n(z+1)^n + \ldots$$

Поэтому заданная функция раскладывается в ряд того же вида, который мы получили первым способом.

2) Для того чтобы получить разложение функции

$f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 3z + 1$ в ряд Тейлора на основе формулы (29.28), вычислим значения ее производных в точке $a = -1$. Сразу заметим, что данная функция есть многочлен 4-й степени, а поэтому все производные, начиная с пятой, будут равны нулю. Получаем

$$f(-1) = 8;$$

$$f'(z) = 4z^3 - 6z^2 + 2z - 3; \qquad f'(-1) = -15;$$

$$f''(z) = 12z^2 - 12z + 2; \qquad f''(-1) = 26;$$

$$f'''(z) = 24z - 12; \qquad f'''(-1) = -36;$$

$$f^{(4)}(z) = 24; \qquad f^{(4)}(-1) = 24;$$

$$f^{(5)}(-1) = 0, \ldots$$

Тогда

$$z^4 - 2z^3 + z^2 - 3z + 1 = 8 - \frac{15}{1!}(z+1) + \frac{26}{2!}(z+1)^2 - \frac{36}{3!}(z+1)^3 + \frac{24}{4!}(z+1)^4.$$

Логично, что для многочлена 4-й степени ряд Тейлора приобретает вид тоже многочлена 4-й степени. И это равенство справедливо на всей комплексной плоскости.

Пример 7. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n (z-1)^n}{2^n(\sqrt{n}+1)}$ и исследовать его сходимость в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 1+2i$, $z_3 = 1-2i$, $z_4 = 4+i$.

Решение. Рассмотрим ряд из модулей членов, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|-i|^n \cdot |z-1|^n}{2^n(\sqrt{n}+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|z-1|^n}{2^n(\sqrt{n}+1)}$ и вычислим предел $(z \neq 1)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z-1|^{n+1} \cdot 2^n(\sqrt{n}+1)}{2^{n+1}(\sqrt{n+1}+1)\cdot |z-1|^n} = \frac{|z-1|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}+1} = \frac{|z-1|}{2}.$$

Значит, по признаку Д'Аламбера, круг сходимости определяется неравенством $\frac{|z-1|}{2} < 1$, т. е. $|z-1| < 2$.

Для $z_1 = 0$ имеем $|z_1 - 1| = |-1| = 1 < 2$, т. е. точка $z_1 = 0$ лежит внутри круга сходимости, значит, исходный ряд в этой точке сходится абсолютно.

Для $z_2 = 1+2i$ получаем $|z_2 - 1| = |1+2i-1| = |2i| = 2$.

Точка $z_2 = 1+2i$ лежит на границе круга сходимости. Из общей теории необходимо сделать вывод о сходимости ряда в этой точке. Исследуем числовой ряд, который получается из исходного степенного ряда при значении $z = z_2$. Имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n (2i)^n}{2^n(\sqrt{n}+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i^2)^n}{\sqrt{n}+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится (как ряд Дирихле с $a = \frac{1}{2} < 1$). Применяя предельный признак сравнения, делаем вывод, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ расходится. Исходный ряд в точке $z_2 = 1+2i$ расходится.

Для $z_3 = 1-2i$ имеем $|z_3 - 1| = |-2i| = 2.$

Точка $z_3 = 1-2i$ лежит на окружности, ограничивающей круг сходимости. При $z = z_3$ исходный ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n(-2i)^n}{2^n(\sqrt{n}+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{\sqrt{n}+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}.$$

Этот ряд не сходится абсолютно (как было показано выше), но он является знакочередующимся и для него выполняются оба условия теоремы Лейбница. По признаку Лейбница этот ряд сходится условно. Исходный ряд в точке $z_3 = 1-2i$ сходится.

Для $z_4 = 4+i$ выполняется $\left|z_4 - 1\right| = \left|3+i\right| = \sqrt{10} > 2.$ Значит, точка $z_4 = 4+i$ лежит вне круга сходимости, и поэтому исходный ряд в этой точке расходится.

Пример 8. Разложить в ряд Маклорена функцию:

1) $f(z) = \dfrac{1}{1-8z^3};$ 2) $f(z) = (2+2z^2)\cos^2\dfrac{z}{2}.$

Решение. 1) Используем формулу (29.31), заменяя в ней переменную z на $8z^3.$ Тогда ряд Маклорена примет вид

$$f(z) = \frac{1}{1-8z^3} = 1 + 8z^3 + (8z^3)^2 + (8z^3)^3 + \ldots + (8z^3)^n + \ldots =$$
$$= 1 + 8z^3 + 8^2z^6 + 8^3z^9 + \ldots + 8^nz^{3n} + \ldots$$

Он сходится при условии $|8z^3| < 1,$ т. е. внутри круга $|z| < \dfrac{1}{2}.$

2) Сначала понизим степень косинуса:

$$\cos^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos z).$$

Далее, используя разложение (29.30), получим:

$$(2+2z^2)\cos^2\frac{z}{2} = (1+z^2)(1+\cos z) =$$
$$= (1+z^2)\left(2 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$
$$= \left(2 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) +$$
$$+ \left(2z^2 - \frac{z^4}{2!} + .. + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n}}{(2n-2)!} + \ldots\right).$$

Приводя подобные, приходим к ответу

$$(2+2z^2)\cos^2\frac{z}{2} = 2 + \left(2 - \frac{1}{2!}\right)z^2 - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right)z^4 + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{(2n-2)!} - \frac{1}{(2n)!}\right)z^{2n} + \ldots,$$

что ряд сходится на всей плоскости C.

Пример 9. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $a = -1$ функцию $f(z) = e^{2z-1}.$

Решение. Этот пример можно решить согласно общему подходу, основываясь на формуле (29.28). Мы же используем ряд Маклорена (29.29). Для этого сделаем следующие преобразования:

$$e^{2z-1} = e^{2z+2-3} = \frac{1}{e^3}e^{2(z+1)}.$$

Тогда

$$e^{2z-1} = \frac{1}{e^3}\left(1 + \frac{2}{1!}(z+1) + \frac{2^2}{2}(z+1)^2 + \ldots + \frac{2^n}{n!}(z+1)^n + \ldots\right).$$

Ряд сходится на всей комплексной плоскости.

Пример 10. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(1-2i)^n}(z-2+2i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{(z-2+2i)^n}.$$

Решение. Данный ряд есть сумма рядов по положительным и отрицательным степеням разности $(z-2+2i)^n.$ Для первого ряда (как для степенного) используем признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|1+i|^n}{|1-2i|^n}|z-2+2i|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|1+i|}{|1-2i|}\cdot|z-2+2i| =$$
$$= \frac{|1+i|}{|1-2i|}\left|z-2+2i\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\left|z-2+2i\right|.$$

Ряд сходится, если $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\left|z-2+2i\right| < 1$ или, то же самое, $\left|z-2+2i\right| < \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}.$

Значит, первый ряд сходится внутри круга:

$$\left|z-(2-2i)\right| < \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Для второго ряда применим признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)|1+i|^{n+1}}{|z-2+2i|^{n+1}}\cdot\frac{|z-2+2i|^n}{n|1+i|^n}\right)=\frac{|1+i|}{|z-2+2i|}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=$$

$$=\frac{|1+i|}{|z-2+2i|}=\frac{\sqrt{2}}{|z-2+2i|}.$$

Ряд сходится, если

$$\frac{\sqrt{2}}{|z-2+2i|}<1 \text{ или } \frac{|z-2+2i|}{\sqrt{2}}>1, \text{ т. е. } |z-2+2i|>\sqrt{2}.$$

Полученные множества сходимости пересекаются, в результате чего мы имеем область сходимости данного ряда – кольцо

$$\sqrt{2}<|z-(2-2i)|<\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Пример 11. Разложить в ряд Лорана функцию

$f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ по степеням *z*.

Решение. Нетрудно увидеть, что $z_1=-1, z_2=2$ – особые точки данной функции. Это означает, что существуют три области, внутри которых функция аналитична: $|z|<1$ (область D_1); $1<|z|<2$ (область D_2); $|z|>2$ (область D_3) (рис. 29.3).

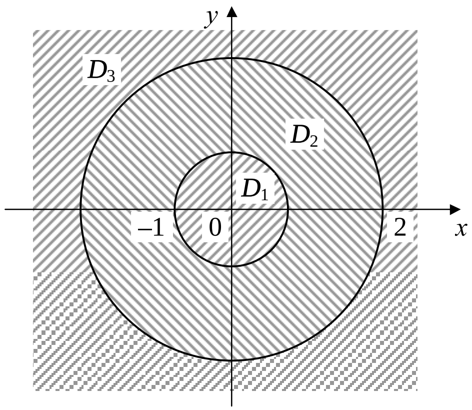


Рис. 29.3

В каждой из трех областей функция $f(z)$ будет представляться своим рядом Лорана. Запишем функцию сначала в виде

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-2)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{z-2}.$$

Рассмотрим область $D_1: |z|<1$. Представим функцию

$f(z)=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+z}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$ как сумму соответствующих геометрических прогрессий (имеем право сделать это, так как в области D_1 выполняется $|z|<1$ и $\left|\dfrac{z}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$). Тогда по формуле суммы (см. формулу (29.31)) получаем следующее представление функции рядом Лорана

$$f(z)=-\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

Видим, что ряд Лорана в области D_1 содержит только правильную часть, т. е. имеет вид степенного. Это не случайно, так как мы рассматриваем разложение в круге $|z|<1$, в котором функция аналитична.

Рассмотрим область $D_2: 1<|z|<2$. Тогда имеет смысл записать функцию в виде

$$f(z)=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right).$$

Так как в области D_2 выполняется $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$ и $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, поэтому, по формуле суммы геометрического ряда, имеем разложение

$$f(z)=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}.$$

Полученный ряд Лорана содержит и правильную, и главную части.

Рассмотрим область $D_3: |z|>2$. Функцию $f(z)$ запишем в виде $f(z)=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1+\frac{1}{z}}-\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)$. Поскольку в области D_3 выполняется $\left|\dfrac{1}{z}\right|<\dfrac{1}{2}$ и $\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$, то на основе формулы суммы геометрического ряда получаем следующее разложение:

$$f(z)=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n\right)=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n-1}}{z^n}.$$

Замечаем, что полученный ряд Лорана содержит только главную часть.

Пример 12. Разложить функцию $f(z)=z\cos\dfrac{z^2+2iz}{(z+i)^2}$ в ряд Лорана по степеням $z+i$.

Решение. Точка $a=-i$ – единственная (на плоскости C) особая точка данной функции. Это означает, что можно построить кольцо $r<|z+i|<r$, $r>0$, $0<r\le+\infty$, в котором функция является аналитической. Преобразуем выражение:

$$f(z)=z\cdot\cos\left(1+\frac{1}{(z+i)^2}\right)=z\left(\cos1\cdot\cos\frac{1}{(z+i)^2}-\sin1\cdot\sin\frac{1}{(z+i)^2}\right).$$

Далее используем разложения в ряд Маклорена (29.29) и (29.30), в которых вместо z возьмем $\dfrac{1}{(z+i)^2}$. Тогда

$$f(z)=((z+i)-i)(\cos1\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z+i)^4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!(z+i)^{4n}}+\ldots\right)-$$

$$-\sin1\left(\frac{1}{(z+i)^2}-\frac{1}{3!(z+i)^6}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+i)^{4n+2}}+\ldots\right)=$$

$$=\cos1\cdot(z+i)-i\cos1-\frac{\sin1}{z+i}+\frac{i\sin1}{(z+i)^2}-\frac{\cos1}{2!(z+i)^3}+\frac{i\cos1}{2!(z+i)^4}+$$

$$+\frac{\sin1}{3!(z+i)^5}-\frac{i\sin1}{3!(z+i)^6}+\ldots+\frac{(-1)^n\cos1}{(2n)!(z+i)^{4n-1}}+\frac{(-1)^{n+1}i\cos1}{(2n)!(z+i)^{4n}}+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}\sin1}{(2n+1)!(z+i)^{4n+1}}+\frac{(-1)^n i\sin1}{(2n+1)!(z+i)^{4n+2}}+\ldots$$

Видим, что полученный ряд Лорана данной функции содержит только два слагаемых правильной части и бесконечное множество слагаемых главной части.

Задания

I уровень

1.1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z-z_0$:

1) $f(z)=z^3$, $z_0=i$; 2) $f(z)=z^4$, $z_0=-1$;
3) $f(z)=e^{z+2-i}$, $z_0=0$; 4) $f(z)=e^z$, $z_0=1$;
5) $f(z)=\sin(z-2i)$, $z_0=2i$.

1.2. Найдите круг сходимости степенного ряда:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n}(z-3)^n$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-3i)^n}{n^2+3}(z+2+i)^n$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{(1-i)^n}(z+2i)^n$; 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n(z-2)^n}{3^n(n+1)}$.

1.3. Найдите кольцо сходимости ряда Лорана:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{7^n}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(z-1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{4^n}$.

II уровень

2.1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

1) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-1}$, $z_0=1$; 2) $f(z)=z\cdot\sin\dfrac{1}{z-1}$, $z_0=1$;

3) $f(z)=z\cdot\sin^2\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$; 4) $f(z)=z^2\cdot e^{\frac{1}{1-z}}$, $z_0=1$.

2.2. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ в кольце D:

1) $f(z)=\dfrac{z}{z+2}$, $z_0=1$, $D:3<|z-1|<+\infty$;

2) $f(z)=\dfrac{2}{z^2-1}$, $z_0=-2$, $D:1<|z+2|<3$;

3) $f(z)=\dfrac{1}{z(z)}$, $z_0=0$, $D:0<|z|<1$;

4) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0=i$, $D: 0<|z-i|<2$.

2.3. Определите круг сходимости заданного ряда и исследуйте его сходимость в точках z_1, z_2, z_3:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-i)^n(z-2)^n}{3^n(n+2)}$, $z_1=0$, $z_2=2+3i$, $z_3=5-2i$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n}{3^n(3n-2)}$, $z_1=0$, $z_2=2i$, $z_3=4+i$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2+i)^n}{2^n(n^2+4n-1)}$, $z_1=2+3i$, $z_2=2-i$, $z_3=4-i$.

III уровень

3.1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ во всех областях аналитичности:

1) $f(z)=\dfrac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=-1-2i$;

2) $f(z)=\dfrac{2z+1-2i}{(z+1+i)(z-3i)}$, $z_0=-2-i$;

3) $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-4}$, $z_0=2+2i$;

4) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=-3-2i$.

3.2. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ при $0<|a|<|z|<|b|$ и при $0<|a|<|b|<|z|$.

29.8. Нули и особые точки функции

Нулем аналитической в области D функции f(z) называется комплексное число $a\in D$ такое, что $f(a)=0$.

Если $z=a$ есть нуль функции $f(z)$, то $c_0=0$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора.

Точка a называется ***нулем кратности k (порядка k) функции f(z)***, если в разложении

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots \qquad (29.34)$$

выполняется $c_0=c_1=\ldots=c_{k-1}=0$, $c_k\neq 0$, $k\in N$. При $k=1$ нуль функции называют ***простым нулем***.

В случае нуля кратности k разложение имеет вид:

$$f(z)=c_k(z-a)^k+c_{k+1}(z-a)^{k+1}+\ldots+c_{k+m}(z-a)^{k+m}+\ldots,$$

т. е. $f(z)=(z-a)^k\cdot j(z)$, (29.35)

где $j(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_{k+m}(z-a)^m$, $j(a)\neq 0$.

Заметим, что точка $z=a$ является нулем кратности k, если

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0,\quad f^{(k)}(a)\neq 0. \qquad (29.36)$$

Точка $z=a$ называется ***изолированным нулем функции f(z),*** $z\in D$, если в области D существует окрестность с центром в точке a, которая не содержит других нулей этой функции.

Справедливо утверждение: нули аналитической в области D функции $f(z)$ изолированы, если $f(z)\not\equiv 0$ на множестве D.

Точка $z=\infty$ называется нулем ***кратности k функции f(z)***, если ее ряд Лорана, построенный в окрестности точки $z=\infty$, не имеет главной части, а для коэффициентов правильной части выполняются условия

$$c_0=c_{-1}=\ldots=c_{-(k-1)}=0,\quad c_{-k}\neq 0. \qquad (29.37)$$

При выполнении условий (29.37) ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ имеет вид:

$$f(z)=\frac{1}{z^k}j(z), \qquad (29.38)$$

где $j(z)=c_{-k}+\dfrac{c_{-(k+1)}}{z}+\dfrac{c_{-(k+2)}}{z^2}+\ldots$

Точка z_0, в которой функция $f(z)$ является аналитической, называется ***правильной точкой функции***. Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки z_0 и не аналитична в самой точке z_0 (или не определена в ней), то z_0 называется изолированной ***особой точкой функции f(z)***.

Будем говорить, что функция $f(z)$ является ***аналитической в***

бесконечно удаленной точке $z = \infty$, если функция $f\left(\frac{1}{w}\right)$, где $w = \frac{1}{z}$, $z = \frac{1}{w}$, является аналитической в точке $w = 0$. Точка $z = \infty$ называется ***особой точкой функции f(z)***, если точка $w = 0$ является особой для функции $f\left(\frac{1}{w}\right)$. Особая точка $z = \infty$ является ***изолированной***, если существует окрестность $|z| > r$ такая, которая не содержит других особых точек функции $f(z)$ (кроме $z = \infty$).

Если выполняются условия:

$$c_0 = c_{-1} = ... = c_{-(k-1)} = 0, \ c_{-k} \neq 0,$$

ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{z^k} j(z),$$

где $j(z) = c_{-k} + \frac{c_{-(k+1)}}{z} + \frac{c_{-(k+2)}}{z^2} + ...$, причем

$$\lim_{z\to\infty} j(z) = c_{-k} \neq 0.$$

Особая точка a (изолированная особая точка) функции $f(z)$ называется ***устранимой***, если ряд Лорана (29.32) этой функции в проколотой окрестности точки a не содержит главной части.

Особая точка a функции $f(z)$ является устранимой тогда и только тогда, когда $f(z)$ ограничена в проколотой окрестности точки a.

Можно дать и такое определение устранимой особой точки: точка a называется ***устранимой особой точкой*** функции $f(z)$, если существует конечный предел $\lim_{z\to a} f(z) = c_0 \neq \infty$.

Особая точка a функции $f(z)$ называется ***полюсом***, если ряд Лорана этой функции в проколотой окрестности точки a содержит ***конечное число*** элементов главной части, т. е. имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + ... + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k},$$

где $c_{-k} \neq 0$. При этом точка a называется ***полюсом k-го порядка*** $(c_{-k} \neq 0)$; при $k = 1$ полюс еще называют ***простым полюсом***.

Особая точка a функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.

Справедливо утверждение: если точка a является полюсом k-го порядка функции $f(z)$ (или нулем кратности k), то для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка a является нулем кратности k (соответственно полюсом порядка k).

Если функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} s(z), \qquad (29.39)$$

где $s(z)$ – аналитическая функция и $s(a) \neq 0$, то точка $z = a$ есть полюс порядка k функции $f(z)$.

Точка a называется ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$, если ряд Лорана этой функции в проколотой окрестности точки a содержит ***бесконечное количество*** ненулевых элементов главной части. Можно дать и такое определение: точка a называется ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$, если $\lim_{z\to a} f(z)$ не существует.

Пусть функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана в окрестности точки ∞, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \qquad (29.40)$$

Бесконечно удаленная точка $(z = \infty)$ называется:

1) ***устранимой особой точкой*** функции $f(z)$, если ее разложение (29.40) в ряд Лорана не содержит положительных степеней z;

2) ***полюсом порядка k***, если разложение содержит конечное число элементов с положительными степенями z, причем последним ненулевым коэффициентом является c_k, $k \geq 1$;

3) ***существенно особой точкой***, если это разложение содержит бесконечное число положительных степеней z.

Пример 1. Найти нули функции $f(z)=z^7-2z^6+2z^5-2z^4+z^3$.

Решение. Данная функция является многочленом седьмой степени. Нули этой функции являются корнями многочлена. Поскольку

$$f(z) = z^3(z^2+1)(z-1)^2 = z^3(z+i)(z-i)(z-1)^2,$$

то $z_1=0,\ z_2=-i,\ z_3=i,\ z_4=1$ – нули данной функции.

Других нулей нет, так как нет других корней многочлена.

Пример 2. Определить порядок нуля $a=0$ функции:

1) $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{e^{2z}-1}$; 2) $f(z)=\sin^2 z-z^2$.

Решение. 1) Используем разложения функций $\sin z$ и e^{2z} в ряд Маклорена. Согласно формулам (29.29), получаем

$$f(z)=\frac{z-z+\dfrac{z^3}{3!}-\dfrac{z^5}{5!}+\ldots}{1+2z+\dfrac{(2z)^2}{2!}+\dfrac{(2z)^4}{4!}+\ldots-1}=\frac{\dfrac{z^3}{3!}-\dfrac{z^5}{5!}+\ldots}{2z+\dfrac{4z^2}{2!}+\dfrac{16z^4}{4!}+\ldots}=$$

$$=z^2\left(\frac{\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z^2}{5!}+\ldots}{2+\dfrac{4z}{2!}+\dfrac{16z^3}{4!}+\ldots}\right).$$

Поскольку при $z=0$ функция, которая стоит в скобках, не равна нулю, то, согласно равенству (29.35), значение $z=0$ есть нуль кратности два.

2) Используем другой способ исследования кратности нуля – проверим выполнение условий (29.36) в точке $z=0$:

$$f(0)=(\sin^2 z-z^2)\big|_{z=0}=0,$$
$$f'(0)=(\sin 2z-2z)\big|_{z=0}=0,$$
$$f''(0)=(2\cos 2z-2)\big|_{z=0}=0,$$
$$f'''(0)=-4\sin 2z\big|_{z=0}=0,$$
$$f^{(4)}(0)=-8\cos 2z\big|_{z=0}=-8.$$

Учитывая то, что

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0,\quad f^{(4)}(0)\neq 0,$$

приходим к заключению, что $z=0$ есть нуль кратности четыре.

Пример 3. Выяснить, является ли точка $z=\infty$ нулем функции $f(z)=\dfrac{z}{8+z^3}$ и какой кратности (если это нуль).

Решение. Преобразуем выражение, которым определяется функция, к виду

$$f(z)=z\cdot\frac{1}{z^3\left(\dfrac{8}{z^3}+1\right)}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{2}{z}\right)^3}.$$

Для окрестности $|z|>2$ бесконечно удаленной точки имеем $\left|\dfrac{2}{z}\right|<1.$ Поэтому, используя формулу суммы геометрического ряда, получаем

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{2^3}{z^3}+\frac{2^6}{z^6}-\ldots\right).$$

Сопоставляя полученное равенство с формулой (29.38), приходим к заключению, что $z=\infty$ есть нуль данной функции кратности два.

Пример 4. Найти особые точки функции и определить их тип:

1) $f(z)=\dfrac{\sin(z-1)}{z^4-z^2}$; 2) $f(z)=\dfrac{\cos 2z-1}{\sin z-z+\dfrac{z^3}{6}}$; 3) $f(z)=\dfrac{1}{e^{z^2}+1}$.

Решение. 1) Очевидно, что для $f(z)=\dfrac{\sin(z-1)}{z^2(z-1)(z+1)}$ особыми точками функции являются нули знаменателя. Поскольку числитель не равен нулю при $z=0$ и $z=-1$, то значения 0, – 1 есть соответственно полюс кратности два и простой полюс. Точку $z=1$ надо исследовать отдельно. Для этого вычислим следующий предел:

$$\lim_{z\to1}\frac{\sin(z-1)}{z^4-z^2}=\lim_{z\to1}\frac{\sin(z-1)}{z-1}\cdot\lim_{z\to1}\frac{1}{z^2(z+1)}=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\frac{\sin(z-1)}{z-1}=\frac{1}{2}.$$

(убедиться в том, что последний предел равнен 1, можно, например, разложив $\sin(z-1)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-1)$). Получив предел $\lim\limits_{z\to1}f(z)=\dfrac{1}{2},$ приходим к заключению, что $z=1$ – устранимая особая точка.

2) Видно, что особой точкой функции является точка $z=0,$ в которой знаменатель принимает нулевое значение. Однако числитель дроби тоже равен нулю для $z=0,$ а поэтому сразу определить тип особой точки мы не можем. Для его определения разложим функции $\cos 2z$ и $\sin z$ в ряд Маклорена. Получим

$$f(z)=\frac{\left(1-\dfrac{2^2z^2}{2!}+\dfrac{2^4z^4}{4!}-\ldots\right)-1}{\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\ldots\right)-z+\dfrac{z^3}{6}}=\frac{-2z^2+4z^4-\ldots}{\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\ldots}=\frac{1}{z^3}\,\frac{-2+4z^2-\ldots}{\dfrac{1}{5!}-\dfrac{z^2}{7!}+\ldots}.$$

Поскольку степенные ряды, которые стоят в числителе и знаменателе последней дроби, представляют аналитические и отличные от нуля функции в окрестности точки $z=0$, то данная функция может быть записана в виде

$$f(z)=\frac{1}{z^3}s(z),$$

где $s(z)$ – аналитическая функция, $s(0)\neq 0$. В соответствии с формулой (29.39) приходим к заключению, что точка $z=0$ есть полюс 3-го порядка.

3) Рассмотрим функцию $\frac{1}{f(z)}=e^{z^2}+1$, которая является знаменателем данной дроби. Найдем ее нули:

$e^{z^2}+1=0$ – то самое, что $e^{z^2}=-1$, т. е. $e^{z^2}=e^{p\,(2n+1)i}$. Поэтому нули этой функции есть $z_n=\pm\sqrt{p\,(2n+1)i}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Определим кратность полученных нулей. Поскольку $\left(e^{z^2}+1\right)'\Big|_{z=z_n}=2ze^{z^2}\Big|_{z=z_n}\neq 0$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, то все точки z_n – простые нули. Тогда для данной функции эти точки есть простые полюсы, причем их бесконечно много (на координатной плоскости они размещаются на двух биссектрисах координатных углов).

Пример 5. Найти особые точки функции $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$ и выяснить их тип.

Решение. Очевидно, что функция определена и дифференцируема на всей комплексной плоскости, кроме точки $z=0$. Выясним тип особой точки, разложив данную функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки. Для этого воспользуемся формулой (29.29) для представления экспоненты рядом Маклорена. Получим

$$ze^{\frac{1}{z}}=z\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)=z+1+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z^2}+\ldots$$

Ряд содержит бесконечное количество слагаемых в главной части, т. е. $z=0$ – существенно особая точка функции.

Задания

I уровень

1.1. Найдите нули функции $f(z)$ и определите их кратности:

1) $f(z)=z^4+(1-i)z^3-iz^2$; 2) $f(z)=z^4+2z^3+5z^2-8z+4$;

3) $f(z)=z^4+(2+2i)z^3+4iz^2-(2-2i)z-1$.

1.2. Найдите особые точки функции $f(z)$ и определите характер каждой особой точки (в случае полюса определите его порядок):

1) $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2-5z+4}$; 2) $f(z)=\dfrac{z^2-5z+4}{z-1}$; 3) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+1}$;

4) $f(z)=\dfrac{z}{z^4+2z^3+z^2}$; 5) $f(z)=\dfrac{z+i}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$.

II уровень

2.1. Найдите нули функции $f(z)$ и определите их кратности:

1) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$; 2) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$; 3) $f(z)=z^2\cdot\sin z$;

4) $f(z)=z^2\cdot\cos z$; 5) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; 6) $f(z)=\sin z-z$.

2.2. Найдите особые точки функции $f(z)$ и определите характер каждой особой точки (в случае полюса определите его порядок):

1) $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$; 2) $f(z)=\dfrac{e^z}{1+z^2}$; 3) $f(z)=\dfrac{z^2}{\cos z-1}$;

4) $f(z)=\dfrac{e^z}{1+z^2}$; 5) $f(z)=e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$; 6) $f(z)=\dfrac{z^3}{z-\sin z}$.

III уровень

3.1. При условии, что функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют в точке $z=a$ полюсы порядка m и порядка n соответственно, определите, является ли точка $z=a$ особой для функции $j(z)$:

1) $j(z)=f(z)\cdot g(z)$; 2) $j(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$; 3) $j(z)=f(z)+g(z)$.

Если точка a является особой точкой, установите ее тип.

3.2. Определите, является ли точка $z=\infty$ особой для функции $f(z)$:

1) $f(z)=\dfrac{z^2+4}{e^z}$; 2) $f(z)=\sqrt{(z-1)(z-2)}$;

3) $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$; 4) $f(z)=\sin\dfrac{1}{1-z}$.

Если да, то каков ее характер?

29.9. Вычеты и их приложения

Вычетом функции f(z) в особой точке a называется коэффициент при первой отрицательной степени ряда Лорана функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки a:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}. \tag{29.41}$$

Вычет функции $f(z)$ в особой точке a может быть найден по формуле:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)\,dz, \tag{29.42}$$

где γ – положительно ориентированная окружность $|z-a| = r$ такая, что функция $f(z)$ аналитична всюду на круге $|z-a| \le r$, за исключением точки $z = a$.

Если a – устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = 0$ и, значит, $\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0,$ где контур γ положительно ориентированная окружность $|z-a| = r$ такая, что $f(z)$ аналитична всюду на круге $0 < |z-a| \le r$.

Если a – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{29.43}$$

Если функцию $f(z)$ можно записать в виде:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ аналитичны в точке a и $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \ne 0$, $\varphi(a) \ne 0$, т. е. a – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{29.44}$$

Если a – полюс k-го порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-a)^k f(z)). \tag{29.45}$$

Основная теорема о вычетах. Пусть функция $f(z)$ является аналитической во всех точках односвязной области D, кроме конечного числа особых точек, и Γ – замкнутая положительно ориентированная кривая, которая лежит в D и ограничивает область, содержащую особые точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{29.46}$$

Вычетом функции f(z) в точке $z=\infty$ ($z=\infty$ – изолированная особая точка функции $f(z)$) называется число, равное противоположному по знаку коэффициенту при первой отрицательной степени ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \tag{29.47}$$

Вычет функции $f(z)$ в точке $z=\infty$ может быть найден по формуле:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^-} f(z)\,dz, \tag{29.48}$$

где Γ^- – окружность достаточно большого радиуса, проходимая по часовой стрелке.

В устранимой особой точке $z=\infty$ вычет может быть и ненулевым (в отличие от конечной устранимой особой точки).

Теорема. Пусть функция $f(z)$ аналитична на плоскости $\hat{C}$, кроме конечного числа точек. Тогда сумма вычетов во всех особых точках, включая и точку $z=\infty$, равна нулю.

Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду на полуплоскости $\operatorname{Im} z \ge 0$, кроме конечного числа особых точек, которые лежат сверху от действительной оси. Пусть также точка $z=\infty$ является нулем кратности больше единицы функции $f(z)$. Тогда справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \tag{29.49}$$

где z_k – особые точки функции $f(z)$, в которых $\operatorname{Im} z_k > 0$.

Пусть дробно-рациональная функция $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, где $m-n \ge 2$, является аналитической на действительной оси. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k}\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \tag{29.50}$$

где z_k – полюсы функции $\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, которые лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Если $R(\sin x, \cos x)$ – дробно-рациональная функция от $\sin x,\ \cos x,$ то

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\ dx = -\int_{|z|=1} \frac{i}{z} \cdot R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z} \right) dz.$$

Пример 1. Вычислить вычет функции:

1) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}$ в точке $a = \dfrac{\pi}{4}$; 2) $f(z) = \dfrac{e^{2iz}-1}{(z-\pi)^2}$ в точке $a = \pi$.

Решение. 1) Очевидно, что $z = \dfrac{\pi}{4}$ есть простой полюс функции. Найти вычет в этой точке можно двумя способами: согласно формулам (29.43) и (29.44). Покажем это.

Используя формулу (29.43), получаем:

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) = \lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \left(z - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{\sin^2 z}{z\left(z - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{2}{\pi}.$$

Заданная функция удовлетворяет всем условиям, при которых справедлива формула (29.44). Поэтому,

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) = \left. \frac{\sin^2 z}{\left(z^2 - \frac{\pi}{4} z \right)'} \right|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4}}{2\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi}.$$

2) Поскольку, в соответствии с формулой Эйлера,

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1,$$

то числитель и знаменатель заданной функции зануляются в точке $z = \pi$. Для выяснения характера особой точки $z = \pi$ разложим числитель в ряд Тейлора по степеням $z - \pi$. Найдем коэффициенты этого ряда:

$$c_0 = e^{2\pi i} - 1 = 0,$$

$$c_1 = \left.(e^{2iz} - 1)'\right|_{z=\pi} = \left.2i\, e^{2iz}\right|_{z=\pi} = 2i,$$

$$c_2 = \frac{1}{2!}\left.(e^{2iz} - 1)''\right|_{z=\pi} = -2,$$

$$c_3 = \frac{1}{3!}\left.(e^{2iz} - 1)'''\right|_{z=\pi} = -\frac{4}{3} i; \ \ldots$$

Получаем

$$\frac{e^{2iz}-1}{(z-\pi)^2} = \frac{1}{(z-\pi)^2}\left(2i(z-\pi) - 2(z-\pi)^2 - \frac{4}{3} i (z-\pi)^3 + \ldots \right) =$$

$$= \frac{2i}{z-\pi} - 2 - \frac{4}{3} i (z-\pi) + \ldots$$

Видим, что $z = \pi$ – простой полюс данной функции. Однако использовать формулу (29.43) или (29.44) уже не надо. Из полученного разложения имеем:

$$c_{-1} = \operatorname*{res}_{z=\pi} f(z) = 2i.$$

Пример 2. Вычислить вычет в точке $z = 0$ функции:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - z^3}$; 2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4 - z^3}$; 3) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z^2}}$.

Решение. 1) Поскольку

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)},$$

то $z = 0$ есть полюс третьего порядка заданной функции. Тогда согласно формуле (29.45), при $k = 3$ имеем:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \left(z^3 \frac{1}{z^3(z-1)} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{z-1} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{2}{(z-1)^3} = -1.$$

2) Запишем данную функцию в виде

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z-1)}. \tag{29.51}$$

Выражение (29.51) показывает, что точка $z = 0$ есть нуль кратности три знаменателя. Однако в этой точке и числитель равен нулю, причем для него $z = 0$ есть простой нуль (это следует из разложения функции $\sin z$ в ряд Маклорена – формула (29.29)). Значит, в отличие от первой функции, рассмотренной в этом примере, точка $z = 0$ есть полюс второго порядка. Для вычисления вычета в ней воспользуемся формулой (29.45) для $k = 2$:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \left(z^2 \frac{\sin z}{z^3(z-1)} \right)' = \lim_{z \to 0} \left(\frac{z^3 \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots \right)}{z^3(z-1)} \right)' =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\dots}{z-1}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{(z-1)\left(-\frac{2z}{3!}+\frac{4z^3}{5!}-\dots\right)-\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\dots\right)}{(z-1)^2} = -1.$$

3) Чтобы определить характер особой точки $z=0$ для данной функции, лучше всего использовать разложение экспоненты в ряд Маклорена (29.29), заменив в нем z на $\frac{1}{z^2}$. Тогда

$$z^3 e^{\frac{1}{z^2}} = z^3\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\frac{1}{3!z^6}+\dots\right) = z^3+z+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z^3}+\dots$$

Видим, что коэффициент c_{-1} равен $\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$. Значит, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{2}$, причем точка $z=0$ существенно особая точка.

Пример 3. Вычислить интеграл от функции

$$f(z)=\frac{(z+1)(z+i)^2}{(z-1)(z^2+1)^2\sin z}$$

по положительно ориентированной окружности:

1) $\Gamma_1 : |z| = \frac{1}{2}$; 2) $\Gamma_2 : |z-1| = 2$.

Решение. Найдем особые точки подынтегральной функции и определим их тип. Нули знаменателя – точки $z_1=1$ (простой нуль); $z_2=i$, $z_3=-i$ (двукратные нули); $z_4=kp$, $k\in \mathbf{Z}$ (простые нули). С учетом того, что $-i$ – нуль кратности два числителя, приходим к заключению, что $z_1=1$, $z_4=kp$, $k\in\mathbf{Z}$ – простые полюсы; $z_2=i$ – полюс второго порядка, $z_3=-i$ – устранимая особая точка. Вычислим интеграл от данной функции, основываясь на формуле (29.46).

1) Внутри линии $\Gamma_1 : |z| = \frac{1}{2}$ находится только одна особая точка $z_4=0$ (при $k=0$).

Используя формулы (29.46) и (29.43), получаем:

$$\int_{\Gamma_1}\frac{(z+1)(z+i)^2}{(z-1)(z^2+1)^2\sin z}dz = 2p\,i\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2p\,i\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z(z+1)(z+i)^2}{(z-1)(z^2+1)^2\sin z} =$$

$$= 2p\,i\cdot 1 = 2p\,i.$$

2) Линия $\Gamma_2 : |z-1| = 2$ имеет внутри четыре особые точки: $z_1=1$, $z_2=i$, $z_3=-i$, $z_4=0$. Поэтому надо вычислить четыре вычета.

Поскольку z_1 – простой полюс, то по формуле (29.43) получаем:

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{(z+1)(z+i)^2}{(z-1)(z^2+1)^2\sin z} = \frac{i}{\sin 1}.$$

Для вычисления вычета в полюсе второго порядка $z_2=i$ воспользуемся формулой (29.45):

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\left(\frac{(z-i)^2(z+1)(z+i)^2}{(z-1)(z-i)^2(z+i)^2\sin z}\right)' = \lim_{z\to i}\left(\frac{z+1}{(z-1)\sin z}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{-2\sin z-(z^2-1)\cos z}{(z-1)^2\sin^2 z} = \frac{\sin i-\cos i}{i\sin^2 i}.$$

Поскольку $z_3=-i$ – устранимая особая точка, то $\operatorname*{res}_{z=-i} f(z)=0$.

Вычет в точке $z_4=0$ находим, используя формулу (29.43). Получаем

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z(z+1)(z+i)^2}{(z-1)(z^2+1)^2\sin z} = 1.$$

Воспользуемся теперь формулой (29.46) и полученными значениями вычетов:

$$\int_{\Gamma_2}\frac{(z+1)(z+i)^2}{(z-1)(z^2+1)^2\sin z}dz = 2p\,i\left(\operatorname*{res}_{z=1} f(z)+\operatorname*{res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{res}_{z=-i} f(z)+\operatorname*{res}_{z=0} f(z)\right) =$$

$$= 2p\,i\left(\frac{i}{\sin 1}+\frac{\sin i-\cos i}{i\sin^2 i}+0+1\right) = 2p\left(i+\frac{\sin i-\cos i}{\sin^2 i}-\frac{1}{\sin 1}\right).$$

Пример 4. Вычислить $\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{z^3+1}{z^5-1}$.

Решение. Преобразуем выражение, которое стоит под знаком вычета:

$$\frac{z^3+1}{z^5-1} = \frac{z^3}{z^5-1}+\frac{1}{z^5-1} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^5}}+\frac{1}{z^5}\frac{1}{1-\frac{1}{z^5}}.$$

Теперь используем разложение (29.31):

$$\frac{z^3+1}{z^5-1} = \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^{10}}+\dots\right)+\frac{1}{z^5}\left(1+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^{10}}+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^7}+\frac{1}{z^{10}}+\dots$$

Видим, что $c_{-1} = 0$, т. е. $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^3+1}{z^5-1} = 0.$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(z^6+1)^3(z-2i)}$,

где Г – окружность $|z| = \frac{3}{2}$.

Решение. Внутри окружности $|z| = \frac{3}{2}$ лежат шесть полюсов третьего порядка, вне ее – простой полюс $z = 2i$ и точка $z = \infty$. Очевидно, что более рационально вычислять сумму вычетов в точках $z = 2i$ и $z = \infty$. Согласно формуле (29.43), получаем:

$$\operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{z-2i}{(z^6+1)^3(z-2i)} = \frac{1}{((2i)^6+1)^3} = -\frac{1}{63^3}.$$

Для определения вычета в точке $z = \infty$ найдем несколько слагаемых ряда Лорана. С этой целью сделаем замену переменной $t = \frac{1}{z}$. Тогда

$$f(z) = f\left(\frac{1}{t}\right) = t^{19} \frac{1}{(1+t^6)(1-2it)} = t^{19} \cdot j(t),$$

где через $j(t)$ обозначена аналитическая функция в окрестности точки $t = 0$. Функцию $j(t)$ можно разложить в степенной ряд:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = t^{19} \cdot (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots).$$

Возвращаясь к старой переменной, имеем:

$$f(z) = \frac{c_0}{z^{19}} + \frac{c_1}{z^{20}} + \frac{c_2}{z^{21}} + \ldots$$

Видим, что $c_{-1} = 0$, т. е. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. Получили следующее значение интеграла:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(z^6+1)^3(z-2i)} = -\frac{1}{63^3}.$$

Пример 6. Вычислить $J = \int\limits_0^{2p} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$.

Решение. Сделаем замену переменной $z = e^{ix}$. Тогда

$$\cos x = \frac{z^2+1}{2z}, \quad dx = -i\frac{dz}{z}.$$

Приходим к необходимости вычисления интеграла

$$J = \int\limits_{|z|=1} \frac{-i}{z} \frac{dz}{\left(2+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = -4i \int\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{(z^2+4z+1)^2}.$$

Найдем особые точки подынтегральной функции. Это те значения z, для которых $z^2+4z+1 = 0$, т. е. $z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Внутри круга $|z| < 1$ лежит только точка $z = -2+\sqrt{3}$. Для подынтегральной функции она является полюсом второго порядка. Значит,

$$\operatorname{res}_{z=-2+\sqrt{3}} \frac{z}{(z^2+4z+1)^2} = \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \left(\frac{z(z+2-\sqrt{3})^2}{(z^2+4z+1)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \left(\frac{z(z+2-\sqrt{3})^2}{(z+2-\sqrt{3})^2(z+2+\sqrt{3})^2}\right)' = \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \left(\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{-z+2+\sqrt{3}}{(z+2+\sqrt{3})^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

По формуле (29.46) получаем

$$J = -4i \cdot 2p\, i \cdot \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{4\sqrt{3}}{9} p.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

Решение. Функция $R(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$, которая является подынтегральной при $z = x$, удовлетворяет всем условиям, при которых справедлива формула (29.50). Ее особыми точками являются точки $z = \pm i$. Это полюсы третьего порядка. В верхней полуплоскости лежит только полюс $z = i$, а поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = 2p\, i \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2)^3}.$$

Находим

$$\operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{(1+z^2)^3}=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{(z-i)^3}{(z-i)^3(z+i)^3}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)''=$$

$$=6\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)^5}=\frac{3}{16i}.$$

Получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}=2p\,i\cdot\frac{3}{16i}=\frac{3}{8}p.$$

Задания

I уровень

1.1. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех особых точках:

1) $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2-5z+4}$; 2) $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)(z+i)}$;

3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z(1-i)-i}$; 4) $f(z)=\dfrac{z-i}{z^3+(1-i)z^2-iz}$;

5) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$.

1.2. Вычислите $\displaystyle\int_g f(z)\,dz$:

1) $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2-5z+4}$, $g:|z|=2$;

2) $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2-5z+4}$, $g:|z|=5$;

3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+(1-i)z-i}$, $g:\left|z+\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{1}{2}$;

4) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+(1-i)z-i}$, $g:|z|=3$;

5) $f(z)=\dfrac{z-i}{z^3+(1-i)z^2-iz}$, $g:\left|z-\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

II уровень

2.1. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех особых точках:

1) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)^3}$; 2) $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-i)^2}$; 3) $f(z)=z^4\cdot\sin\dfrac{1}{z}$;

4) $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$; 5) $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}$.

2.2. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_g f(z)\,dz$:

1) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$, $g:|z|=1$;

2) $f(z)=\dfrac{e^{-2z}}{z^2(z+3i)}$, $g:|z+2i|=3$;

3) $f(z)=\dfrac{e^{-2z}}{z^2(z+3i)}$, $g:|z-i|=2$;

4) $f(z)=\dfrac{z^3}{(z-1)^2(z+i)}$, $g:|z|=4$;

5) $f(z)=\dfrac{(z+i)(z+1)}{z^4+(2+2i)z^3+4iz^2-(2-2i)z-1}$, $g:|z|=3$;

6) $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^2+4)^2}$, $g:|z-i|=2$;

7) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}$, $g:|z-1|=\dfrac{1}{2}$.

2.3. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$:

1) $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+4)^2(x^2+9)}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{(x^4+1)^2}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$.

III уровень

3.1. Докажите, что для функции $f(z)=e^{\frac{1-z}{z}}$ точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой и что $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\neq 0$.

3.2. Вычислите интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}},\ \text{где}\ f(z)=\frac{z}{(z-z_1)^m(z-z_2)}.$$

3.3. Найдите вычеты функции $f(z)=\dfrac{z}{(z-z_1)^m(z-z_2)}$ в точках $z=z_1$ и $z=z_2$ $(z_2\neq z_1)$.

Содержание

Учебное издание

М А Т Е М А Т И К А
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие
для учащихся колледжей

В шести частях

ЧАСТЬ 5

Майсеня Людмила Иосифовна
Ермолицкий Александр Александрович
Мацкевич Ирина Юрьевна
Кузьмицкая Эльвира Евгеньевна
Каянович Сергей Сергеевич

Линейные пространства и линейные операторы
Двойные интегралы. Тройные интегралы
Криволинейные интегралы. Поверхностные интегралы. Элементы теории поля. Ряды
Теория функции комплексной переменной

Зав. ред.-издат. отд. О. П. Козельская
Редактор Г. Л. Говор
Корректор О. А. Артемчик
Компьютерная верстка Н. М. Олейник, А. П. Пучек

План изданий 2008 г. (поз. 41)

Изд. лиц. № 02330/0131735 от 17.02.2004.
Подписано в печать 28.12.2008. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 17,9. Уч.-изд. л. 15,6. Тираж 500 экз. Заказ 285.

Издатель и полиграфическое исполнение Учреждение образования
«Минский государственный высший радиотехнический колледж»
220005, г. Минск, пр-т Независимости, 62.

ISBN 978-985-526-018-0