ПРЕДИСЛОВИЕ

Особенностью образовательной системы Республики Беларусь является становление и развитие учебных заведений различного типа, в том числе колледжей и высших колледжей. В условиях многоуровневого образования в системе учебных заведений колледж–университет актуальна реализация принципов непрерывности и преемственности в обучении.

Предлагаемое учебное пособие «Математика в примерах и задачах» в 6-ти частях призвано обеспечить процесс изучения математики в высших колледжах и колледжах технического профиля. Оно может быть использовано учащимися на практических занятиях, а также при самостоятельном изучении математики.

При создании настоящего пособия авторы ставили перед собой несколько целей: во-первых, дать значительное количество задач (типовых и оригинальных), которые бы достаточно полно отображали суть основных математических понятий; во-вторых, обеспечить необходимой теоретической информацией для их решений; в-третьих, по каждой теме привести решение основных типов задач; в-четвертых, предлагаемый для решения набор задач распределить по трем уровням сложности. Все эти цели и определили структуру учебного пособия, которое делится на главы, главы – на параграфы. В начале каждого параграфа содержится необходимый справочный материал, затем – решение нескольких задач и набор заданий трех уровней сложности.

Предлагаемая структура учебного пособия, по мнению авторов, делает возможным самостоятельное изучение математики. Его использование позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении – каждый учащийся может решать задания доступного ему уровня сложности.

Пособие разработано и прошло апробацию в УО «Минский государственный высший радиотехнический колледж» (МГВРК) в процессе обучения учащихся после базовой школы.

Характерной особенностью методического подхода к изучению математики в МГВРК является построение интегрированного курса математических дисциплин. Этим объясняется то обстоятельство, что определенные темы высшей математики введены в контекст элементарной математики. Поскольку на практике широко реализуется непрерывное образование в системе учебных заведений колледж–университет (в том числе МГВРК интегрирован с Белорусским государственным университетом информатики и радиоэлектроники), то при разработке данного учебного пособия авторы использовали (как и в реальном учебном процессе) в качестве типовых программу изучения математики в средних школах Беларуси и программу изучения высшей математики для высших учебных заведений по специальностям электро-, радиотехники и информатики.

Таким образом реализуются основы непрерывного продолжения обучения в университете. Кроме того, предлагаемое учебное пособие может быть использовано в колледжах при изучении математики по различным базовым и рабочим программам – менее или более полным.

«Математика в примерах и задачах. Часть 2» является непосредственным продолжением учебного пособия «Математика в примерах и задачах. Часть 1». В этих изданиях принята единая нумерация глав. Предлагаемое пособие (вторая часть) состоит из шести глав (гл. 7–12). В отношении авторства отметим, что они подготовлены следующим образом:

С. Б. Махнач – гл. 7 «Тригонометрия»;

М. А. Калугина – гл. 8 «Векторы на плоскости», гл. 9 «Аналитическая геометрия на плоскости»;

Е. В. Уласевич – гл. 10 «Предел последовательности и функции», гл. 11 «Производная функции»;

Т. В. Есипович – гл. 12 «Стереометрия».

Научно-методическое редактирование осуществила Л. И. Майсеня, она является соавтором всего пособия.

Авторы благодарны рецензентам учебного пособия – доктору физ.-мат. наук, профессору А. В. Метельскому и сотрудникам кафедры высшей математики БГУИР, особенно зав. кафедрой, доктору физ.-мат. наук В. В. Цегельнику и профессору А. А. Карпуку, за очень внимательное прочтение рукописи и ряд ценных замечаний, устранение которых улучшило наше издание.

Надеемся, что предлагаемое издание будет содействовать активизации мыслительной деятельности учащихся и повышению эффективности учебного процесса при изучении математики.

7. ТРИГОНОМЕТРИЯ

7.1. Тригонометрические функции произвольного угла, их свойства

Рассмотрим систему координат Oxy и в ней радиус-вектор $\overline{OA}$.

Будем рассматривать понятие угла с учетом направления поворота радиус-вектора от оси Ox. Если $\overline{OA}$ повернуть против движения часовой стрелки, то $\angle\alpha$, образованный этим радиус-вектором и положительным направлением оси Ox, назовем ***положительным углом*** (рис. 7.1).

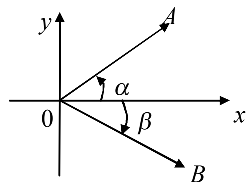


Рис. 7.1

Если $\overline{OB}$ повернуть от оси Ox по ходу часовой стрелки, то образованный им $\angle\beta$ будем называть ***отрицательным углом*** (рис. 7.1).

Если радиус-вектор повернуть от оси Ox в некотором направлении на $\frac{1}{360}$ часть полного оборота, то он образовал угол меры один градус ($\pm 1^\circ$) в зависимости от направления поворота; $\frac{1}{60}$ часть от одного градуса называется ***минутой*** и обозначается 1'; $\frac{1}{60}$ часть от одной минуты называется ***секундой*** и обозначается 1''. Заданные единицы измерения вместе с направлением поворота дают возможность измерения любого угла, образованного радиус-вектором.

Кроме измерения угла в градусах используют также радианное измерение угла. ***Радианной мерой угла*** называется отношение длины дуги, образованной поворотом конца радиус-вектора, к длине радиус-вектора с учетом направления поворота (рис. 7.2):

$$\alpha_{рад} = \frac{l}{r}, \tag{7.1}$$

где l – длина дуги;

r – длина радиус-вектора.

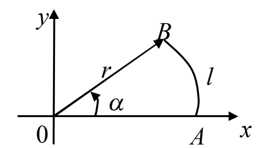


Рис. 7.2

Для перевода градусной меры в радианную и наоборот пользуются формулами:

$$\alpha_{рад} = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ}, \tag{7.2}$$

$$n^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}. \tag{7.3}$$

В системе координат Oxy рассмотрим единичную окружность с центром в начале системы координат и единичный радиус-вектор, образующий с осью Ox угол α.

Спроецируем конец радиус-вектора на координатные оси, получим определенные точки x, y (рис. 7.3). В прямоугольном треугольнике ***синусом острого угла*** называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

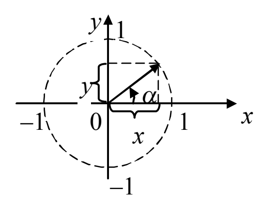


Рис. 7.3

Это понятие обобщается на любой угол α: острый и тупой, отрицательный и положительный.

Синусом угла α называется проекция конца радиус-вектора, образующего этот угол, на ось Oy:

$\sin\alpha = y$.

Косинусом угла α называется проекция конца радиус-вектора, образующего этот угол, на ось Ox:

$\cos\alpha = x$.

Тангенсом угла α называется величина, равная отношению синуса угла α к косинусу угла α, при условии $\cos\alpha \neq 0$:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Котангенсом угла α называется величина, равная отношению косинуса угла α к синусу угла α, при условии $\sin\alpha \neq 0$:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Тангенс и котангенс угла α можно определить также через проекции x и y:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ x \neq 0;$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y},\ y \neq 0.$$

Для того чтобы показать геометрический смысл $\mathrm{tg}\alpha$, построим ***ось тангенсов***. Она проходит через точку (1; 0), касается единичной окружности, имеет такое же направление, как и ось Oy, и такой же масштаб на ней (рис. 7.4).

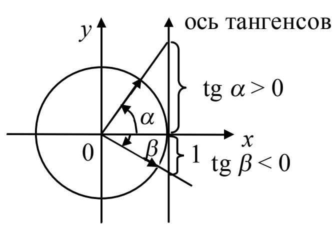


Рис. 7.4

Далее продолжаем радиус-вектор до пересечения с осью тангенсов. Полученный на оси тангенсов отрезок (с точностью до знаков) и является $\mathrm{tg}\alpha$.

Для того чтобы показать геометрический смысл $\mathrm{ctg}\alpha$, рисуем ось котангенсов. Она проходит через точку (0; 1), имеет то же направление и тот же масштаб. Геометрическое значение $\mathrm{ctg}\alpha$ получаем после того, как продолжим радиус-вектор до пересечения с осью котангенсов (рис. 7.5).

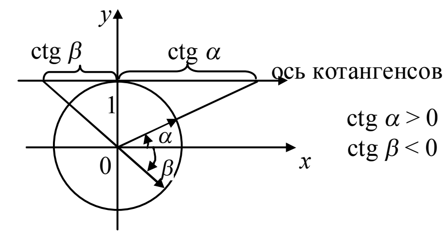


Рис. 7.5

Секансом угла α называется величина

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \cos\alpha \neq 0.$$

Косекансом угла α называется величина

$$\mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},\ \sin\alpha \neq 0.$$

Свойства тригонометрических функций

1. Знаковая характеристика тригонометрических функций следует из их определения через проекции на координатные оси (рис. 7.6).

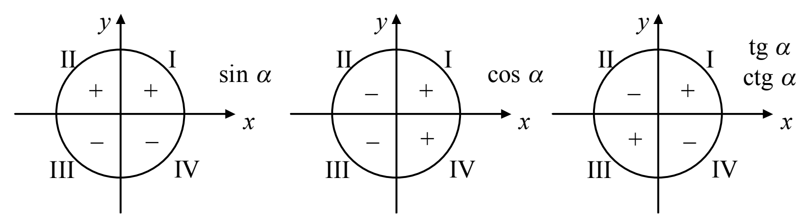


Рис. 7.6

2. Поскольку $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ введены как проекции внутри единичной окружности, то для всякого угла α:

$|\sin\alpha| \leq 1;\ |\cos\alpha| \leq 1.$

Функции $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$ могут принимать любые по величине значения: $|\sec\alpha| \geq 1$, $|\mathrm{cosec}\,\alpha| \geq 1$.

3. Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\mathrm{cosec}\,\alpha$ являются ***2π-периодическими***.

Функции $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$ являются ***π-периодическими***.

Следовательно, для тригонометрических функций выполняются следующие равенства:

$$\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha, \quad \cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi n)=\mathrm{tg}\alpha, \quad \mathrm{ctg}(\alpha+\pi n)=\mathrm{ctg}\alpha,\ n\in\mathbf{Z}.$$

4. Функции $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ являются четными:

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha, \quad \sec(-\alpha)=\sec\alpha.$$

Функции $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$ и $\mathrm{cosec}\,\alpha$ являются нечетными:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \quad \mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha, \quad \mathrm{cosec}(-\alpha)=-\mathrm{cosec}\,\alpha.$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Угол (α)		Функция			
градус	радиан	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
0°	0	0	1	0	не определен
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	не определен	0
180°	π	0	–1	0	не определен
270°	$\frac{3\pi}{2}$	–1	0	не определен	0
360°	2π	0	1	0	не определен

Правило приведения:

Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ и $\mathrm{cosec}\,\alpha$ называются сходными друг для друга:

1. Если аргумент тригонометрической функции имеет вид:

а) $(2n-1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $(2n-1)\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $n\in\mathbf{N}$,

то функция меняется на сходную аргумента α;

б) $n\pi\pm\alpha$, $n\in\mathbf{N}$,

то сохраняется та же функция, но с аргументом α.

2. Перед функцией аргумента α, записанной согласно пункту 1, ставится тот знак («+» или «–»), который имела исходная функция.

Всюду в преобразованиях по формулам приведения условно считают угол α острым. В табл. 7.2 представлены формулы приведения.

Таблица 7.2

x	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$2\pi\pm\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos x$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,x$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\,x$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \tag{7.4}$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1, \tag{7.5}$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \tag{7.6}$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{7.7}$$

По значению одной из тригонометрических функций некоторого угла можно, используя приведенные выше формулы, найти значения всех остальных. Применение этих формул значительно упрощает процесс тригонометрических преобразований. При этом необходимо помнить, что при извлечении квадратного корня получаем выражение с модулем, например, $\left|\sin\alpha\right| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Раскрывая модуль, знак выбираем в зависимости от того, в какой четверти лежит угол α.

Пример 1. 1) Выразить в радианной мере угол, равный 150º.

2) Выразить в градусной мере угол в $\frac{2\pi}{3}$ радиан.

Решение. 1) Используя формулу (7.2), получим:

$$150° = \frac{\pi}{180°}\cdot 150° = \frac{5\pi}{6}.$$

2) Используя формулу (7.3), получим:

$$\frac{2\pi}{3}\text{ ðàä} = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{180°}{\pi} = 120°.$$

Пример 2. Вычислить tg α, если $\sin\alpha = -0{,}8$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Сначала найдем cos α. Из формулы (7.4) получим:

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-(-0{,}8)^2 = 0{,}36.$$

Так как в III четверти $\cos\alpha < 0$, то $\cos\alpha = -0{,}6$. Находим

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}8}{-0{,}6} = \frac{4}{3}.$$

Пример 3. Вычислить $\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$.

Решение. Используя нечетность и 2π-периодичность функции $\sin\alpha$, получаем:

$$\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right) = -\sin\frac{41\pi}{6} = -\sin\left(6\pi+\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6}.$$

По формулам приведения находим:

$$-\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Пример 4. Определить знак выражения

$$\sin\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\cdot\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\text{tg}\frac{9\pi}{10}\cdot\text{ctg}\left(-\frac{12\pi}{9}\right).$$

Решение. Вначале используем нечетность функций, а затем их знаковые характеристики (рис. 7.6):

$$\sin\left(-\frac{6\pi}{5}\right) = -\sin\frac{6\pi}{5},\ \frac{6\pi}{5} > \pi.$$

Следовательно, это угол III четверти, в которой синус принимает отрицательное значение (рис. 7.6). Тогда $\sin\left(-\frac{6\pi}{5}\right) > 0$.

Угол $\frac{5\pi}{6}$ – это угол II четверти, в которой косинус отрицательный:

$$\cos\frac{5\pi}{6} < 0.$$

$\frac{9\pi}{10}$ – это угол II четверти, тогда $\text{tg}\frac{9\pi}{10} < 0$.

$$\text{ctg}\left(-\frac{12\pi}{9}\right) = -\text{ctg}\frac{12\pi}{9}.$$

Угол $\frac{12\pi}{9}$ лежит в III четверти, тогда $\text{ctg}\frac{12\pi}{9} > 0$ и $\text{ctg}\left(-\frac{12\pi}{9}\right) < 0$.

Учитывая знаки всех множителей, получаем:

$$\sin\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\cdot\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\text{tg}\frac{9\pi}{10}\cdot\text{ctg}\left(-\frac{12\pi}{9}\right) > 0,$$

т. е. заданное выражение положительно.

Пример 5. Сравнить два числа $\sin\frac{\pi}{10}$ и $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{9}$.

Решение. Заметим, что углы $\frac{\pi}{9}$ и $\frac{\pi}{10}$ – это углы I четверти, в которой синус и косинус принимают положительные значения.

$\cos\frac{\pi}{9} < 1$ (в силу ограниченности функции косинус), тогда

$$\sin\frac{\pi}{10} > \sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{9}.$$

Пример 6. Указать наибольшее и наименьшее значения выражения $3\cos^2\alpha - 1$.

Решение. Выражение будет наибольшим, если $\cos^2\alpha$ будет наибольшим.

Известно, что $|\cos\alpha| \le 1$, но тогда $0 \le \cos^2\alpha \le 1$.

Тогда наибольшее значение выражения будет равно 2, если $\cos^2\alpha = 1$, а наименьшее равно –1, если $\cos^2\alpha = 0$.

Задания

I уровень

1.1. Выразите в радианной мере угол:
1) 100º; 2) 244,38º; 3) 720º; 4) 135º; 5) 27,13º.

1.2. Выразите в градусной мере угол:
1) $\dfrac{7\pi}{2}$; 2) $\dfrac{11\pi}{4}$; 3) 3π; 4) 0,64; 5) 3,627.

1.3. Найдите значение функции:

1) sin α, если $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

2) cos α, если $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) tg α, если $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

4) ctg α, если $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

1.4. Вычислите:

1) $\mathrm{tg}390°$; 2) $\cos 1080°$; 3) $\sin\dfrac{19\pi}{4}$; 4) $\mathrm{ctg}\dfrac{7\pi}{4}$;

5) $4\sin 18°\sin 306°$; 6) $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15} - \sin\dfrac{4\pi}{15}\sin\dfrac{\pi}{15}$;

7) $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{2\pi}{3} - \mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{12}}{1 + \mathrm{tg}\dfrac{2\pi}{3}\,\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{12}}$; 8) $\cos\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{7\pi}{12}$;

9) $\mathrm{tg}225°\cos 330°\mathrm{ctg}120°\sin 240°$;

10) $\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{tg}\pi + \sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\pi$.

1.5. Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения:
1) $1 - \sin^2\alpha$; 2) $|5\cos\alpha|$; 3) $8\cos^2\alpha - 1$.

1.6. Выберите среди чисел наименьшее:

1) $\sin 1$, $\sin 3$, $\sin 5$, $\sin 7$, $\sin\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\cos 1$, $\cos 1{,}5$, $\cos(-1{,}2)$, $\cos(-0{,}5)$, $\cos 2$.

1.7. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\sin 2\alpha = 2\cos(\alpha - \beta)$;

2) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha = \cos^4\alpha - \cos^2\alpha$;

3) $\dfrac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos(-\alpha) + \sin\alpha} - \dfrac{2 - 3\sin^2\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\alpha\right)} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha$;

4) $\left(\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha\right)^2 = 1 - \sin 4\alpha$.

1.8. Упростите выражение, используя формулы (7.4)–(7.7) и формулы приведения:

1) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$; 2) $\left(1 - \cos^2\alpha\right)\mathrm{tg}^2\alpha + 1 - \mathrm{tg}^2\alpha$;

3) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) + \mathrm{ctg}(\pi - \alpha)}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$;

4) $\dfrac{\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \mathrm{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{2\cos(\pi + \alpha)}$;

5) $\dfrac{\sin(\pi + \alpha)}{\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}\cdot\dfrac{\mathrm{tg}(\alpha - \pi)}{\mathrm{ctg}(\pi + \alpha)}\cdot\dfrac{\cos(2\pi - \alpha)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$;

6) $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\mathrm{tg}^2(\alpha - 2\pi)} + \dfrac{\cos^2(-\alpha)}{\mathrm{tg}^2\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

II уровень

2.1. Найдите значение выражения:

1) $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a>0$, $b>0$;

2) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\dfrac{4\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}$, если $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{3}{4}$.

2.2. Определите знак произведения:

1) $\sin 67^\circ \cos 267^\circ \cos 375^\circ \sin(-68^\circ)\cos(-68^\circ)$;

2) $\sin 110^\circ \cos 95^\circ \mathrm{tg} 135^\circ \mathrm{ctg} 185^\circ$;

3) $\sin\left(-\dfrac{6\pi}{5}\right)\cos\dfrac{5\pi}{6}\,\mathrm{tg}\dfrac{3\pi}{11}\,\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{11\pi}{9}\right)$;

4) $\sin\dfrac{4\pi}{7}\cos\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right)\mathrm{tg}\dfrac{4\pi}{5}\,\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{4\pi}{11}\right)$;

5) $\sin 22$.

2.3. Вычислите:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 52,5^\circ - \mathrm{tg}^2 7,5^\circ}{1-\mathrm{tg}^2 7,5^\circ \mathrm{tg}^2 52,5^\circ}$; 2) $\mathrm{ctg}\dfrac{9\pi}{8} + \mathrm{ctg}\dfrac{5\pi}{8}$;

3) $\dfrac{\cos 41^\circ - \cos 79^\circ}{1-2\sin^2 35,5^\circ}$; 4) $\dfrac{(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)\ (\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)}{\sin 110^\circ}$;

5) $\sin\dfrac{3\pi}{10} - \sin\dfrac{\pi}{10}$; 6) $\dfrac{\mathrm{tg}10^\circ + \mathrm{ctg}55^\circ}{1-\mathrm{ctg}80^\circ \mathrm{tg}35^\circ}$;

7) $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = 10$;

8) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha$, если $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = 7$ и $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$;

9) $\mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{ctg}^3\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = 2$;

10) $\dfrac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ}$;

11) $\mathrm{tg}9^\circ - \mathrm{tg}63^\circ + \mathrm{tg}81^\circ - \mathrm{tg}27^\circ$.

2.4. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$;

2) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha - 1}{\mathrm{ctg}\alpha} = 1$;

3) $2 + \dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$;

4) $\sin^3\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$;

5) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\sin x + \cos x}{\mathrm{tg}^2 x - 1} = \sin x - \cos x$.

2.5. Упростите выражение:

1) $\left(\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + 1\right) : \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$;

2) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \mathrm{tg}^2\alpha\left(\cos^2\alpha + 1\right)$;

3) $\left(1-\dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}\right)\left(1-\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right)^{-1}$;

4) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, если $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

5) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha) + \mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

6) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) + \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{7\pi}{2}+\alpha\right)$;

7) $\dfrac{\cos(1,5\pi+\alpha) + \sin(\alpha-\pi) + \mathrm{tg}(-0,5\pi)}{\mathrm{tg}(1,5\pi-\alpha)}$;

8) $\dfrac{1-\mathrm{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}\cdot\dfrac{\mathrm{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{1-\mathrm{ctg}^2(\alpha-2\pi)}$.

2.6. Сравните два числа $\cos\dfrac{3\pi}{5}$ и $\cos\dfrac{3\pi}{5}\cdot\sin\dfrac{\pi}{5}$.

III уровень

3.1. Докажите тождество:

1) $\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\mathrm{tg}^2\alpha;$

2) $\dfrac{\mathrm{tg}^2x+\mathrm{ctg}^2x-6}{\mathrm{tg}^2x+\mathrm{ctg}^2x+2}=\cos 4x;$

3) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}=\mathrm{tg}^3x+\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}x+1;$

4) $\left(\dfrac{\sin\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{\dfrac{1}{\sin\alpha}+\mathrm{ctg}\alpha}\right)^2=\dfrac{\sin^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha}{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\mathrm{ctg}^2\alpha};$

5) $\dfrac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{1}{4}.$

3.2. Вычислите:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{1-\cos\alpha}$, если $\sin\alpha=-\dfrac{2}{3}$ и $\mathrm{ctg}\alpha>0;$

2) $\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha}{1+\sin\alpha}$, если $\cos\alpha=-\dfrac{3}{4}$ и $\mathrm{ctg}\alpha<0.$

3.3. Упростите выражение:

1) $\mathrm{tg}^2\alpha-\dfrac{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha}\cdot\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha};$

2) $\dfrac{(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)^2-(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha)^2}{\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}-\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha};$

3) $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha)};$

4) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha;$

5) $\dfrac{\mathrm{tg}^3\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+\dfrac{\mathrm{ctg}^3\alpha}{\cos^2\alpha};$

6) $\dfrac{\cos^2\alpha+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^3(\alpha-4\pi)}+\dfrac{\cos^2\alpha-4\sin(-\alpha)+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}.$

3.4. Найдите значение выражения $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=k$.

3.5. Сравните числа $\sin 10$ и $\sin 11$.

3.6. Найдите наибольшее значение выражения
$$\sin^{12}x+\cos^{11}x.$$

7.2. Основные тригонометрические формулы

Всюду далее считаем, что выражения определены на своей ОДЗ.

Формулы суммы и разности углов

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;\\&\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;\\&\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;\\&\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}\tag{7.8}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta};\qquad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta};$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta};\qquad \mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta}.$$

Формулы двойных и тройных углов

$$\begin{aligned}&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\\&\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1;\\&\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha};\\&\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}.\end{aligned}\tag{7.9}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$
$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}; \qquad (7.10)$$
$$\mathrm{ctg}3\alpha = \frac{3\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}^3\alpha}{1-3\mathrm{ctg}^2\alpha}.$$

Формулы половинного аргумента

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$
$$\left|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \qquad \left|\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}; \qquad (7.11)$$
$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$
$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha); \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$
$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}; \qquad \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}. \qquad (7.12)$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (7.13)$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$
$$\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}; \qquad \mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}; \qquad \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

Формулы произведения тригонометрических функций

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)); \qquad (7.14)$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)).$$

Формулы универсальной подстановки

$$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}. \qquad (7.15)$$

Пример 1. Упростить выражение $\dfrac{\sin 3\alpha\cos\alpha + \cos 3\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}$.

Решение. Используя формулы (7.7)–(7.9), получим:

$$\frac{\sin 3\alpha\cos\alpha + \cos 3\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{\sin(3\alpha+\alpha)}{2\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} =$$
$$= \frac{\sin 4\alpha}{2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha} =$$
$$= \frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2\sin 2\alpha.$$

Пример 2. Вычислить выражение $\sin 75° + \cos 75°$.

Решение. Чтобы применить формулы (7.12), преобразуем $\cos 75°$ по формулам приведения:

$$\cos 75° = \cos(90° - 15°) = \sin 15°.$$

Тогда

$$\sin 75° + \cos 75° = \sin 75° + \sin 15° = 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} =$$

$$= 2\sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Пример 3. Вычислить выражение $\dfrac{5}{6+7\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0,2.$

Решение. Используя универсальную подстановку, получим:

$$\frac{5}{6+7\sin 2\alpha} = \frac{5}{6+7\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{5+5\operatorname{tg}^2\alpha}{6+6\operatorname{tg}^2\alpha+14\operatorname{tg}\alpha}.$$

Подставив в полученное выражение $\operatorname{tg}\alpha = 0,2,$ находим:

$$\frac{5}{6+7\sin 2\alpha} = \frac{5+5\cdot 0,04}{6+6\cdot 0,04+14\cdot 0,2} = \frac{5,2}{9,04} = \frac{65}{113}.$$

Пример 4. Преобразовать в произведение выражение

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right).$$

Решение. Для решения можно использовать формулы понижения степени, а также формулы суммы и разности тригонометрических функций (7.12) и (7.13):

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right) = \frac{1-\cos(\alpha+4\beta)}{2}-\frac{1-\cos(\alpha-4\beta)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{\cos(\alpha+4\beta)}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\cos(\alpha-4\beta)}{2} = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-4\beta)-\cos(\alpha+4\beta)\big) =$$

$$= -\sin\alpha\sin(-4\beta) = \sin\alpha\sin 4\beta.$$

Пример 5. Найти значение выражения:

1) $\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ;$

2) $\dfrac{\cos 64^\circ\cdot\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cdot\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cdot\cos 41^\circ-\cos 49^\circ\cdot\cos 19^\circ}.$

Решение. 1) Для применения формулы двойного аргумента $\sin 2\alpha$ умножим и разделим исходное выражение на $4\cos 18^\circ.$ Получим:

$$\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ = \frac{4\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ\cdot\cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ}.$$

Используя формулы приведения, преобразуем

$$\sin 72^\circ = \sin(90^\circ-18^\circ) = \cos 18^\circ.$$

Тогда получим: $\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ = \dfrac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \dfrac{1}{4}.$

2) Из формул приведения следует:

$\cos 64^\circ = \cos(90^\circ-26^\circ) = \sin 26^\circ,$

$\cos 86^\circ = \cos(90^\circ-4^\circ) = \sin 4^\circ,$

$\cos 71^\circ = \cos(90^\circ-19^\circ) = \sin 19^\circ,$

$\cos 49^\circ = \cos(90^\circ-41^\circ) = \sin 41^\circ.$

Отсюда, используя формулы (7.8), имеем:

$$\frac{\sin 26^\circ\cdot\cos 4^\circ-\sin 4^\circ\cdot\cos 26^\circ}{\sin 19^\circ\cdot\cos 41^\circ-\sin 41^\circ\cdot\cos 19^\circ} = \frac{\sin(26^\circ-4^\circ)}{\sin(19^\circ-41^\circ)} = \frac{\sin 22^\circ}{\sin(-22^\circ)} =$$

$$= -\frac{\sin 22^\circ}{\sin 22^\circ} = -1.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите:

1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\beta\right),$ если $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi;$

2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right),$ если $\cos\alpha = 0,6$ и $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi;$

3) $\operatorname{tg}\alpha,$ если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{3};$

4) $\cos(\alpha+\beta),$ если $\sin\alpha = \dfrac{2}{3},$ $\cos\beta = -\dfrac{3}{4},$ $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi,$ $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi;$

5) $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}+2\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}-2\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+2\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}-2\alpha\right);$

6) $\cos\alpha,$ если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3;$

7) $\dfrac{10\cos\alpha-6}{10\sin\alpha+1},$ если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3;$

8) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18}+\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{18}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{18}};$

9) $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 4$;

10) $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{24}\cdot\cos\dfrac{7\pi}{24}-\cos\dfrac{\pi}{24}\sin\dfrac{7\pi}{24}}{\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{21}-\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{4\pi}{21}}$.

1.2. Упростите выражение:

1) $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\sin\alpha\sin\beta\left(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta\right)$;

3) $\dfrac{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha-2\cos 3\alpha-\sin\alpha}$;

4) $\dfrac{\sin 4\alpha-1}{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2}$;

5) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\alpha$;

6) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

7) $2\cos^4\left(2\beta+\dfrac{5\pi}{2}\right)-2\sin^4\left(2\beta-\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

8) $0{,}125\cos 4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

1.3. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cos\beta$;

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-1}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

4) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$;

5) $1+\cos(3\pi+3\alpha)\cos 2\alpha-\cos(1{,}5\pi-3\alpha)\sin 2\alpha=2\sin^2 2{,}5\alpha$;

6) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\dfrac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$;

7) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{-4}{\sin^2 2\alpha}$;

8) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\sin\beta\cos\alpha}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

1.4. Вычислите:

1) $3\sin 18^\circ$;

2) $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ$.

1.5. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(a\cos 0)^2-\left(b\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^2}{2a^2\cos\dfrac{\pi}{3}+2ab\cos(-\pi)+b^2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}$;

2) $\dfrac{a\cos 0-ab\sin 0-b\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}{a\cos(-2\pi)-b\sin 2\pi}$.

1.6. Проверьте справедливость равенства:

1) $\sin 87^\circ-\sin 27^\circ=\cos 57^\circ$;

2) $\sin 93^\circ-\cos 63^\circ=\sin 33^\circ$.

1.7. Вычислите:

1) $\cos 105^\circ+\cos 75^\circ$;

2) $\operatorname{tg}267^\circ+\operatorname{tg}93^\circ$.

1.8. Преобразуйте в произведение выражение:

1) $1+2\sin\alpha$;

2) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$;

3) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha$;

4) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha$;

5) $\sin 4\beta+4\cos\beta\cos 8\beta\sin\beta$.

1.9. Представьте в виде суммы тригонометрических функций выражение:

1) $\sin^2\alpha\sin 3\alpha$;

2) $4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\dfrac{12\alpha}{2}$.

1.10. Упростите выражение:

1) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$;

2) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}$;

3) $\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

4) $\dfrac{\mathrm{ctg}^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}$;

5) $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}$.

II уровень

2.1. Вычислите:

1) $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

2) $\mathrm{tg}2\alpha$, если $\mathrm{tg}(45°+\alpha)=-\dfrac{3}{2}$;

3) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, если $\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{4}$;

4) $\mathrm{ctg}^2\left(\dfrac{3\pi}{4}-\beta\right)$, если $\sin 2\beta=-\dfrac{1}{5}$;

5) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=p$.

2.2. Упростите выражение:

1) $4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)+2\sin 2\alpha$;

2) $4\sin^3 3\alpha\cos 3\alpha-4\cos^3 3\alpha\sin 3\alpha$;

3) $\dfrac{\mathrm{tg}2\alpha\cos^{-1}2\beta+\mathrm{tg}2\beta\cos^{-1}2\alpha}{\cos^{-1}2\alpha+\cos^{-1}2\beta}$;

4) $\dfrac{\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta}{\mathrm{tg}\alpha\cos^{-1}\beta+\mathrm{tg}\beta\cos^{-1}\alpha}$;

5) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}-\dfrac{2\cos 2\alpha}{1+\sin(2\alpha+1{,}5\pi)}$;

6) $\dfrac{(1+\mathrm{tg}2\alpha)^2+2\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1$;

7) $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}$;

8) $\dfrac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+3\pi)+\cos\left(4\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

2.3. Докажите тождество:

1) $(\sin\alpha)^{-1}+(\mathrm{tg}\alpha)^{-1}=\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$;

2) $\mathrm{ctg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha}$;

3) $2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)\cdot\left(1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $\mathrm{tg}^4\alpha\left(8\cos^2(\pi-\alpha)-\cos(\pi+4\alpha)-1\right)=8\sin^4\alpha$;

5) $\sin 50°+8\sin 10°\sin 50°\sin 70°=2\cos^2 20°$.

2.4. Вычислите:

1) $\dfrac{\cos 70°\cos 10°+\cos 80°\cos 20°}{\cos 69°\cos 9°+\cos 81°\cos 21°}$;

2) $\dfrac{2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1}{2-16\sin^2\dfrac{\pi}{2}\cos^2\dfrac{\pi}{2}}$;

3) $\dfrac{\cos 67°\cos 7°-\cos 83°\cos 23°}{\cos 128°\cos 68°-\cos 38°\cos 22°}-\mathrm{tg}164°$;

4) $\dfrac{\sin 24°\cos 6°-\sin 6°\sin 66°}{\sin 21°\cos 39°-\sin 39°\cos 21°}$;

5) $64\cos 5°\cos 55°\cos 65°$.

2.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\cos^2\beta-2\cos 2\beta$; 2) $\sin^6\beta+\cos^6\beta$;

3) $2\sin\beta-5\cos\beta$; 4) $2\sin^2\beta+2\cos\beta$.

2.6. Докажите, что $\alpha-\beta=30^0$, если $\mathrm{tg}\alpha=3$, $\mathrm{tg}\beta=-0{,}5$,

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}<\beta<0.$

2.7. Преобразуйте в произведение выражение:

1) $\sqrt{2}+2\sin 2\beta;$ 2) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta);$

3) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x.$

2.8. Вычислите:

1) $\cos 47^\circ+\sin 77^\circ-\sqrt{3}\cos 17^\circ;$ 2) $\dfrac{\cos 41^\circ-\cos 79^\circ}{1-2\sin^2 35{,}5^\circ}.$

2.9. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos 15\beta+\cos 7\beta+\cos\beta}{\sin 7\beta-\sin\beta+\sin 15\beta}=\operatorname{ctg}7\beta;$

2) $\cos\left(3\beta-\dfrac{\pi}{9}\right)+\sin\left(\dfrac{11\pi}{18}-5\beta\right)=2\cos\beta\cos\left(4\pi-\dfrac{\pi}{9}\right);$

3) $1-\dfrac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}=\dfrac{1}{2\cos^2\alpha};$

4) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

5) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

2.10. Упростите выражение:

1) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha};$ 2) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1};$

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}};$ 4) $\dfrac{\sin 4\alpha+\sin 5\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha};$

5) $\sin^2\alpha\left(1+\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\right)\cdot\left(1-\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\right).$

III уровень

3.1. Вычислите:

1) $6\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)$, если $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{3};$

2) $\left(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha\right)\cdot 5^3$, если $\cos 2\alpha=0{,}8;$

3) $\sin 105^\circ-\sin 82{,}5^\circ\cos^3 22{,}5^\circ-\cos 82{,}5^\circ\sin^3 22{,}5^\circ;$

4) $\cos 20^\circ+\cos 40^\circ+\cos 60^\circ+\ldots+\cos 180^\circ;$

5) $\dfrac{1-\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12}}.$

3.2. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\alpha}}$, где $2\pi\le\alpha\le 4\pi;$

2) $\dfrac{4\sin(\alpha+\beta)}{2\cos(\alpha+\beta)+2\cos(\alpha-\beta)}-\operatorname{tg}\alpha;$

3) $\dfrac{\cos^2(\beta-\alpha)+\cos^2(\alpha+\beta)}{4\sin^2\alpha\sin^2\beta}-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta;$

4) $3\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right);$

5) $\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^4(3\pi+\alpha)-2\left[\sin^6\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin^6(5\pi-\alpha)\right].$

3.3. Докажите тождество:

1) $\sin^4\alpha+3\cos^2\alpha-\sin^4\alpha\cos^2\alpha-3\cos^4\alpha+\cos^6\alpha=1;$

2) $\dfrac{4\left(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha\right)}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha;$

3) $\dfrac{1}{8}\sin 50^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\dfrac{1}{4}\cos^2 20^\circ.$

3.4. Вычислите:

1) $6\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, если $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$, $\alpha+\beta\ne\pi n$, $n\in\mathbf{Z};$

2) $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}...\cos\frac{12\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}$;

3) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

3.5. Докажите тождество:

1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$.

3.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$; 2) $\dfrac{4+4\cos\alpha+4\cos2\alpha}{\sin(0{,}5\pi+\alpha)}$;

3) $\dfrac{\sin(2{,}5\pi+2\beta)}{2\sqrt{2}\cos(1{,}5\pi+\beta)-2}$.

3.7. Определите, рациональным или иррациональным числом является $\operatorname{ctg}^2 4{,}5\alpha$, если известно, что

$$\cos3\alpha=0,25\left(\sqrt{21-12\sqrt{3}}-2\sqrt{3}\right).$$

3.8. Преобразуйте в произведение выражение

$$\sin2\alpha-2\sin\frac{2\pi}{3}\sin5\alpha+\sin8\alpha.$$

3.9. Вычислите:

1) $\dfrac{2}{\sin50^\circ}+8\sin10^\circ$; 2) $\dfrac{4}{\cos670^\circ}-\dfrac{4}{\sqrt{3}\cos220^\circ}$.

3.10. Докажите тождество

$$\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+...+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

3.11. Упростите выражение:

1) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\lambda\right)-\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}+2\alpha\right)$;

2) $\dfrac{\cos7\alpha-\cos8\alpha-\cos9\alpha+\cos10\alpha}{\sin7\alpha-\sin8\alpha-\sin9\alpha+\sin10\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$;

4) $\operatorname{ctg}10^\circ\operatorname{ctg}50^\circ\operatorname{ctg}70^\circ$;

5) $\dfrac{\cos63^\circ\cos3^\circ-\cos87^\circ\cos27^\circ}{\cos132^\circ\cos72^\circ-\cos42^\circ\cos18^\circ}$;

6) $\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$.

7.3. Графики тригонометрических функций

При рассмотрении графиков тригонометрических функций предполагается, что ***числовой*** аргумент представляет угол, измеренный в радианах.

Соответствие, при котором каждому действительному числу x сопоставляется синус этого числа, называют ***функцией синус*** и обозначают $y=\sin x$.

Свойства функции $y=\sin x$ приведены в табл. 7.3.

Графиком функции $y=\sin x$ является кривая, называемая ***синусоидой*** (рис. 7.7).

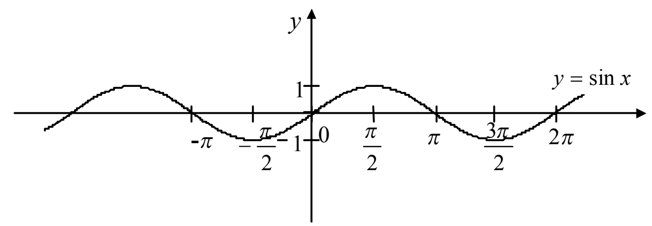


Рис. 7.7

Соответствие, при котором каждому действительному числу x сопоставляется косинус этого числа, называют ***функцией косинус*** и обозначают $y=\cos x$.

Свойства функции $y=\cos x$ приведены в табл. 7.3.

Графиком функции $y = \cos x$ является кривая, называемая ***косинусоидой*** (рис. 7.8).

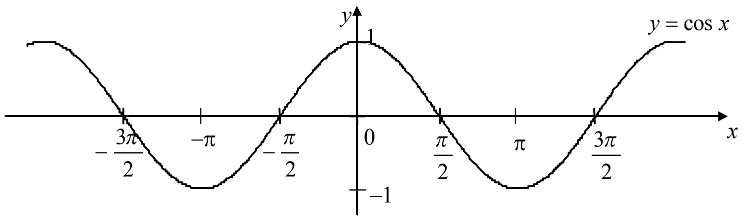


Рис. 7.8

Соответствие, при котором каждому действительному числу $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, сопоставляется тангенс этого числа, называют ***функцией тангенс*** и обозначают $y = \mathrm{tg}x$.

Свойства функции $y = \mathrm{tg}x$ приведены в табл. 7.3.

Графиком функции $y = \mathrm{tg}x$ является кривая, называемая ***тангенсоидой*** (рис. 7.9).

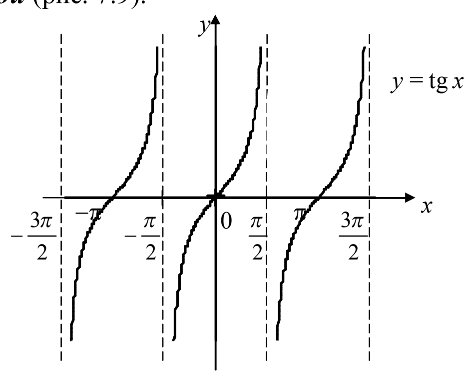


Рис. 7.9

Соответствие, при котором каждому действительному числу $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, сопоставляется котангенс этого числа, называют ***функцией котангенс*** и обозначают $y = \text{ñtg}x$.

Свойства функции $y = \text{ñtg}x$ приведены в табл. 7.3.

График функции приведен на рис. 7.10.

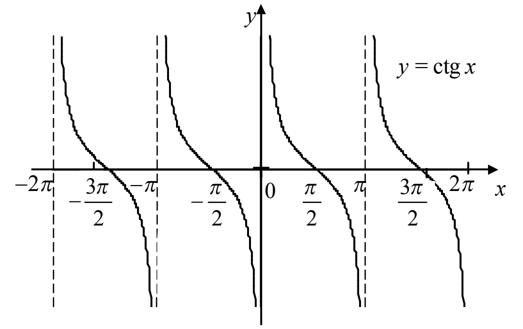


Рис. 7.10

Пример 1. Найти область определения функции $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Должно выполняться неравенство

$2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \;\; x \in \mathbf{Z},$ т. е.

$2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \pi k, \;\; k \in \mathbf{Z},$

$2x \neq \frac{\pi}{3} + \pi k, \;\; k \in \mathbf{Z},$

$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, \;\; k \in \mathbf{Z}.$

Таким образом, $D(y)$: $x \in \mathbf{R}, \;\; x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, \;\; k \in \mathbf{Z}.$

Пример 2. Найти область значений функции $y = \sin 2x \cos 2x + 2$.
Решение. Используя формулу двойного угла для синуса, получим:
$y = \frac{1}{2}\sin 4x + 2.$
Так как функция $y = \sin 4x$ ограничена, то $-1 \leq \sin 4x \leq 1$, тогда
$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sin 4x \leq \frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}\sin 4x + 2 \leq \frac{5}{2}.$
Таким образом, $E(y) = \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right].$

Пример 3. Выяснить, является ли функция $y(x)$ четной или нечетной.

$$y(x)=\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Решение. Функцию можно исследовать на четность или нечетность, если область определения функции является симметричным относительно нуля множеством и выполняется одно из равенств. В данном случае $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ – симметричное относительно нуля множество. Рассмотрим

$$y(-x)=\frac{\cos(-x)}{-x}+\frac{1}{2}\sin(-2x).$$

В силу четности косинуса и нечетности синуса, получим:

$$y(-x)=-\frac{\cos x}{x}-\frac{1}{2}\sin 2x=-\left(\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{2}\sin 2x\right)=-y(x).$$

Таким образом, выполняется $y(-x)=-y(x)$. Следовательно, данная функция является нечетной.

Пример 4. Сравнить числа $\cos\frac{3\pi}{7}$ и $\cos\frac{2\pi}{9}$.

Решение. Используем свойство монотонности функции $y=\cos x$ на определенных промежутках. Углы $\frac{3\pi}{7}$ и $\frac{2\pi}{9}$ принадлежат отрезку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, на котором функция $y=\cos x$ убывает, и при этом $\frac{3\pi}{7}>\frac{2\pi}{9}$. Используя свойство убывающей функции, по которому большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, приходим к ответу: $\cos\frac{3\pi}{7}<\cos\frac{2\pi}{9}$.

Пример 5. Найти наименьший положительный период функции $y=\sin^4 x-\cos^4 x$.

Решение. Преобразуем

$$y=\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right).$$

Используя формулы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество, получим функцию $y=-\cos 2x$, график которой получается из графика функции $y=\cos x$ с периодом $T=2\pi$. Воспользуемся правилом нахождения периода T' функции, полученной путем некоторых преобразований периодической функции $y=\cos x$ с периодом $T=2\pi$: $\cos 2x=\cos(2x+2\pi)=\cos 2(x+\pi)$.

Таким образом, наименьший положительный период функции $y=-\cos 2x$, а значит и функции $y=\sin^4 x-\cos^4 x$, равен π.

Пример 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sin x+\cos x$.

Решение. Используем формулу приведения и формулу преобразования суммы функций в произведение:

$$\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Так как $-1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$, то $-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$.

Таким образом, $y_{\min}=-\sqrt{2}$, а $y_{\max}=\sqrt{2}$.

Пример 7. Построить график функции $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+3$.

Решение. Для построения будем использовать правила преобразования графика элементарной функции $y=\sin x$: параллельный перенос вдоль осей Ox и Oy, сжатие и растяжение графика функции.

Рассмотрим последовательность преобразований, позволяющих из графика функции $y=\sin x$ получить график функции

$$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+3.$$

Для начала преобразуем данную функцию следующим образом:

$$y=2\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)+3.$$

Выполним построение поэтапно.

1. График функции $y=2\sin x$ может быть получен из графика $y=\sin x$ путем растяжения вдоль оси Oy в 2 раза (рис. 7.11).

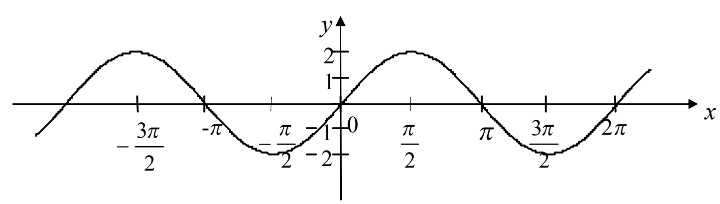


Рис. 7.11

2. График функции $y = 2\sin 2x$ может быть получен из графика функции $y = 2\sin x$ путем сжатия вдоль оси Ox в 2 раза (рис. 7.12).

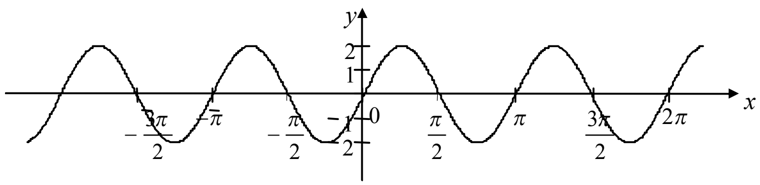


Рис. 7.12

3. График функции $y = 2\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$ может быть получен из графика $y = 2\sin 2x$ путем параллельного переноса вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{6}$ единиц вправо (рис. 7.13).

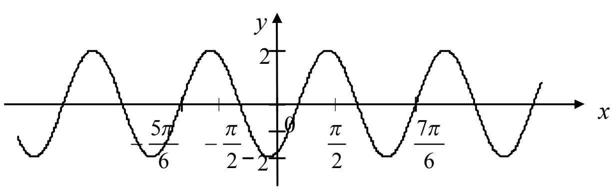


Рис. 7.13

4. График $y = 2\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 3$ получаем из графика $y = 2\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$ путем параллельного переноса вдоль оси Oy на 3 единицы вверх (рис. 7.14).

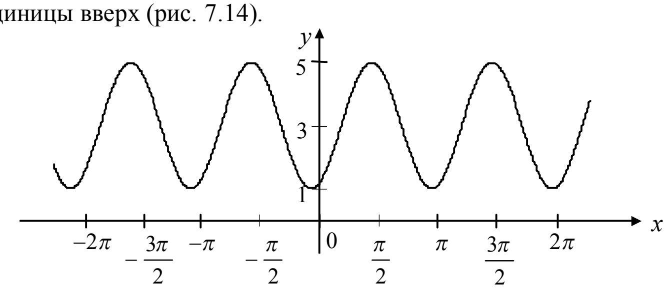


Рис. 7.14

Задания

I уровень

1.1. Найдите область определения функции:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \cos\frac{2}{x}$;

3) $y = \sin\sqrt{x^2 - 1}$; 4) $y = \cos\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$.

1.2. Найдите множество значений функции:

1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = 2\sin x + 3$;

3) $y = 1 - 4\cos 2x$; 4) $y = \frac{1}{2}\sin x\cos x - 1$;

5) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$.

1.3. Выясните, является ли данная функция четной или нечетной:

1) $y = x\cos\frac{x}{2}$; 2) $y = \sin x + x$;

3) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - x^2$; 4) $y = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin(\pi - x)$;

5) $y = \frac{1}{2}\cos 2x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) + 3$.

1.4. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \mathrm{tg}2x$; 3) $y = \sin\frac{4x}{5}$;

4) $y = \cos\frac{2x}{5}$; 5) $y = \sin\frac{3x}{2}$; 6) $y = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$;

7) $y = 3\mathrm{tg}(1{,}5x + 2)$; 8) $y = 4\mathrm{tg}\frac{x}{3}$.

1.5. Используя свойства возрастания и убывания функций $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$, сравните числа:

1) $\sin 3$ и $\sin 4$; 2) $\sin 7$ и $\sin 6$;

3) $\cos 1$ и $\cos 3$;

4) $\sin\frac{4\pi}{9}$ и $\sin\frac{3\pi}{8}$;

5) $\sin\frac{13\pi}{7}$ и $\sin\frac{11\pi}{7}$;

6) $\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;

7) $\cos\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$;

8) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$;

9) $\cos 4$ и $\cos 5$;

10) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;

11) $\cos\frac{8\pi}{7}$ и $\cos\frac{10\pi}{7}$;

12) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$;

13) $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{3\pi}{5}$;

14) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$;

15) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{5\pi}{14}$;

16) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$;

17) $\mathrm{tg}\frac{9\pi}{7}$ è $\mathrm{tg}\frac{6\pi}{5}$;

18) $\mathrm{tg}4$ è $\mathrm{tg}3{,}8$;

19) $\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{5}$ è $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{10}$;

20) $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ è $\mathrm{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;

21) $\mathrm{ctg}2$ è $\mathrm{ctg}3$;

22) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ è $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$.

1.6. Постройте график функции, используя правила преобразования графиков:

1) $y = 1 + 2\sin x$;

2) $y = \frac{1}{2}\cos x - 1$;

3) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

4) $y = \sin 3x - 1$;

5) $y = -3\cos\frac{x}{2}$;

6) $y = \mathrm{ctg}x - 3$;

7) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

8) $y = 2 + \mathrm{tg}\frac{x}{4}$.

II уровень

2.1. Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{1}{\cos x}$;

2) $y = \mathrm{tg}\frac{x}{3}$;

3) $y = \mathrm{ctg}5x$;

4) $y = \frac{1}{\sin x - \sin 3x}$.

2.2. Найдите множество значений функции:

1) $y = \frac{1 + 8\cos^2 x}{4}$;

2) $y = 10 - 9\sin^2 3x$;

3) $y = 1 - 2|\cos x|$;

4) $y = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

5) $y = \cos 3x\sin x - \sin 3x\cos x + 4$.

2.3. Выясните, является ли данная функция четной или нечетной:

1) $y = x^2 + \frac{1 + \cos x}{2}$;

2) $y = \frac{x^2 + \sin 2x}{\cos x}$;

3) $y = (1 - x^2)\cos x$;

4) $y = (1 + \sin x)\sin x$;

5) $y = \mathrm{tg}x\sin^2 x$;

6) $y = \frac{\cos 2x - x^2}{\mathrm{ctg}x}$;

7) $y = \sin x\,\mathrm{tg}\, x$.

2.4. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $y = \sin^2 x$;

2) $y = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2$;

3) $y = \sin x + \cos x$;

4) $y = 3\mathrm{ctg}\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2.5. Постройте график функции, используя правила преобразования:

1) $y = 2 + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

2) $y = 4 + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = 2 - \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

4) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 2$;

5) $y = \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$;

6) $y = -\mathrm{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.

III уровень

3.1. Найдите область определения функции:

1) $y=\dfrac{1}{\cos^2 x+\cos x}$; 2) $y=\dfrac{x}{2\sin x-2}$;

3) $y=\dfrac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x}$; 4) $y=\dfrac{x+1}{\sin 4x\cos 4x}$;

5) $y=\sqrt{\cos \pi x}-\sqrt{\sin \pi x}$.

3.2. Найдите множество значений функции:

1) $y=1-8\sin^2 x\cos^2 x$; 2) $y=2\cos^2 x+5$;

3) $y=1-2|\sin 3x|$; 4) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

5) $y=\sin^2 x-2\cos^2 x$; 6) $y=2+\sqrt{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

3.3. Выясните, является ли данная функция четной или нечетной:

1) $y=x|\sin x|\sin^2 x$; 2) $y=3^{\cos x}$;

3) $y=\cos x+|\sin x|$; 4) $y=\dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{1+\cos 2x}$.

3.4. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $y=\dfrac{1}{3}|\sin x|$; 2) $y=\sqrt{3\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$;

3) $y=8\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}-1$; 4) $y=3\cos\sqrt{x+\dfrac{\pi}{3}}$.

3.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\cos^2 2x$; 2) $y=\sin^2 x-\sin x\cos x$.

3.6. Постройте график функции, используя правила преобразования графиков функции:

1) $y=\mathrm{tg}|x|$; 2) $y=\dfrac{|x|}{x}\mathrm{ctg}x$;

3) $y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$; 4) $y=\sqrt{1-\sin^2 2x}$.

3.7. Определите вид графика функции $y=f(x)$ и постройте его, используя правила преобразования:

1) $y=4\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin 3x$;

2) $y=\sqrt{2}\left(\cos^2 x-\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$;

3) $y=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

4) $y=\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

5) $y=2\mathrm{tg}\,2x-\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

6) $y=\dfrac{2\mathrm{ctg}x}{1+\mathrm{ctg}^2 x}$;

7) $y=\mathrm{ctg}x-2\mathrm{ctg}2x$.

3.8. Найдите абсциссы общих точек графиков функций

$$y=\sqrt{1+\sin^2 2x} \text{ и } y=\sin 3x.$$

7.4. Обратные тригонометрические функции

Функция $y=\sin x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ имеет обратную функцию, которая называется ***арксинусом.***

Арксинусом числа x, где $x\in[-1;\ 1]$, называется такое число y, $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу x.

Обозначают: $y=\arcsin x$.

Таким образом, $\arcsin x$ – это угол y, измеренный в радианах, такой, что $\sin y = x$.

Свойства арксинуса

$D(\arcsin x) = [-1;\ 1]$;

$E(\arcsin x) = \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$;

$\sin(\arcsin x) = x$, где $x \in [-1;\ 1]$;

$\arcsin(\sin x) = x$, где $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

График функции $y = \arcsin x$ приведен на рис. 7.15.

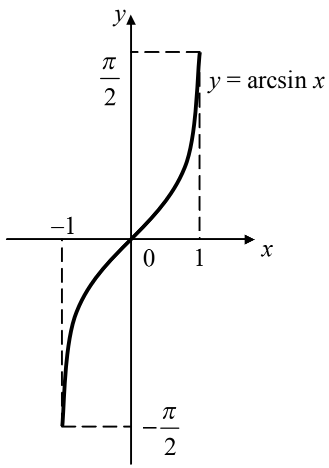


Рис. 7.15

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0;\ \pi]$ имеет обратную функцию, которая называется ***арккосинусом.***

Арккосинусом числа x, где $x \in [-1;\ 1]$, называется такое число y, $y \in [0;\ \pi]$, косинус которого равен числу x.

Обозначают: $y = \arccos x$.

Таким образом, $\arccos x$ – это угол y, измеренный в радианах, такой, что $\cos y = x$.

Свойства арккосинуса

$D(\arccos x) = [-1;\ 1]$;

$E(\arccos x) = [0;\ \pi]$;

$\cos(\arccos x) = x$, где $x \in [-1;\ 1]$;

$\arccos(\cos x) = x$, где $x \in [0;\ \pi]$;

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

График функции $y = \arccos x$ приведен на рис. 7.16.

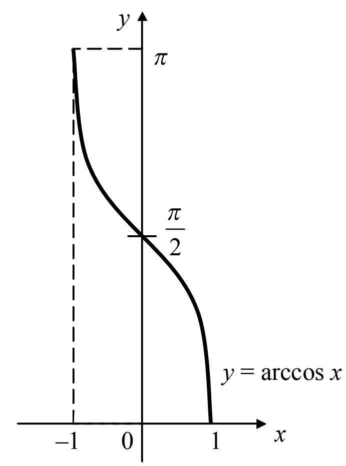


Рис. 7.16

Функция $y = \mathrm{tg}x$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ имеет обратную функцию, которая называется ***арктангенсом.***

Арктангенсом числа x, $x \in \mathbf{R}$, называется такое число y, $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу x.

Обозначают: $y = \mathrm{arctg}x$.

Таким образом, $\mathrm{arctg}x$ – это угол y, измеренный в радианах, такой, что $\mathrm{tg}y = x$.

Свойства арктангенса

$D(\operatorname{arctg}x)=R;$

$E(\operatorname{arctg}x)=\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right);$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x,$ где $x\in\mathbf{R};$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=x,$ где $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right).$

График функции $y=\operatorname{arctg}x$ приведен на рис. 7.17.

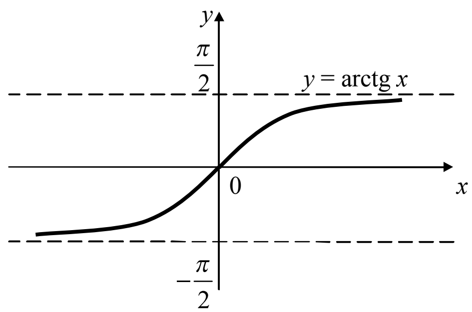


Рис. 7.17

Функция $y=\operatorname{ctg}x$ на промежутке $(0;\ \pi)$ имеет обратную функцию, которая называется ***арккотангенсом.***

Арккотангенсом числа x, $x\in\mathbf{R}$, называется число y, $y\in(0;\ \pi)$, котангенс которого равен числу x.

Обозначается: $y=\operatorname{arcctg}x$.

Таким образом, $\operatorname{arcctg}x$ – это угол y, измеренный в радианах, такой, что $\operatorname{ctg}y=x$.

Свойства арккотангенса

$D(\operatorname{arcctg}x)=R;$

$E(\operatorname{arcctg}x)=(0;\ \pi);$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)=x,$ где $x\in\mathbf{R};$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x)=x,$ где $x\in(0;\ \pi);$

$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg}x.$

График функции $y=\operatorname{arcctg}x$ приведен на рис. 7.18.

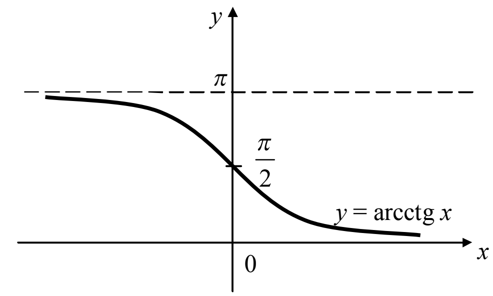


Рис. 7.18

Для обратных тригонометрических функций выполняются следующие равенства:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad x\in[-1;\ 1]; \tag{7.16}$$

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2},\quad x\in\mathbf{R}. \tag{7.17}$$

Пример 1. Проверить, справедливы ли равенства:

1) $\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6};$ 2) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{5\pi}{6};$

3) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\pi}{3};$ 4) $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{3}.$

Решение. 1) $\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$, так как $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Равенство верно.

2) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$, так как $\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{5\pi}{6}\in[0;\pi]$. Равенство верно.

3) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ и $-\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Равенство верно.

4) $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $\dfrac{\pi}{3}\in(0;\pi)$. Равенство верно.

Пример 2. Вычислить

$$2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-4\mathrm{arctg}1+3\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right).$$

Решение. Вычислим слагаемые отдельно, чтобы прокомментировать действия.

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2},$$

функция нечетная и

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3},\text{ так как }\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ и }\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Поэтому $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}\text{ (по свойству) и }\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3},$$

так как $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3}\in[0;\ \pi]$.

Поэтому $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

$$\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4},\text{ так как }\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1\text{ и }\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\pi-\mathrm{arcctg}\sqrt{3}\text{ (по свойству) и }\mathrm{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6},$$

так как $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{6}\in(0;\ \pi)$.

Поэтому $\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

Таким образом,

$$2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-4\mathrm{arctg}1+3\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=$$

$$=2\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{2\pi}{3}-4\cdot\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{5\pi}{6}=-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}-\pi+\frac{5\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}.$$

Получаем ответ: $\frac{3\pi}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение $\arccos(2x+3)=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Поскольку $\cos(\arccos x)=x$, то

$$\cos(\arccos(2x+3))=\cos\frac{\pi}{6},\text{ т. е. }2x+3=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Находим:

$$2x=\frac{\sqrt{3}}{2}-3,\quad 2x=\frac{\sqrt{3}-6}{2},$$

откуда приходим к ответу $x=\frac{\sqrt{3}-6}{4}$.

Пример 4. Найти область значений функции $y=4-\arccos 3x$.

Решение. Поскольку $0\le\arccos 3x\le\pi$, то

$-\pi\le-\arccos 3x\le 0$ и $4-\pi\le 4-\arccos 3x\le 4$;

$E(4-\arccos 3x)=[4-\pi;\ 4]$.

Получаем ответ: $[4-\pi;\ 4]$.

Пример 5. Вычислить $\sin(\mathrm{arcctg}(-3))$.

Решение. Используя свойство функции $\mathrm{arcctg}x$ для отрицательного аргумента и формулу приведения для $\sin x$, получаем:

$$\sin(\mathrm{arcctg}(-3))=\sin(\pi-\mathrm{arcctg}3)=\sin(\mathrm{arcctg}3).$$

Для дальнейших вычислений необходимо выразить функцию $\sin x$ через $\mathrm{ctg}x$, чтобы воспользоваться затем формулой

$$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x)=x,\quad x\in\mathbf{R}.$$

Из формулы $1+\mathrm{ctg}^2x=\frac{1}{\sin^2 x}$ выражаем

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2x}},\text{ если }x\in(0;\ \pi).$$

Для нашего случая имеем:

$$\sin(\mathrm{arcctg}3)=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2(\mathrm{arcctg}3)}}=\frac{1}{\sqrt{1+9}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Получаем ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Пример 6. Построить график функции $y = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}x+1\right)-\frac{\pi}{2}$.

Решение. Для построения будем использовать правила преобразования графика функции $y = \arcsin x$ (рис. 7.15).

Рассмотрим последовательность преобразований, позволяющих из графика функции $y = \arcsin x$ получить график заданной функции. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$y = 2\arcsin\frac{1}{2}\left(\tilde{o}+2\right)-\frac{\pi}{2}$.

Выполним построение поэтапно.

1. График функции $y = 2\arcsin x$ может быть получен из графика $y = \arcsin x$ (рис. 7.15) путем растяжения вдоль оси Oy в 2 раза (рис. 7.19).

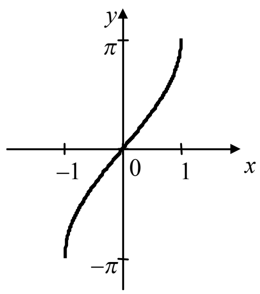


Рис. 7.19

2. График функции $y = 2\arcsin\frac{1}{2}x$ может быть получен из графика функции $y = 2\arcsin x$ путем растяжения вдоль оси Ox в 2 раза (рис. 7.20).

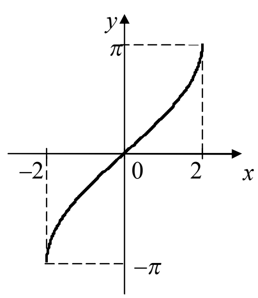


Рис. 7.20

3. График функции $y = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}(x+2)\right)$ может быть получен из графика функции $y = 2\arcsin\frac{1}{2}x$ путем параллельного переноса вдоль оси Ox на 2 единицы влево (рис. 7.21).

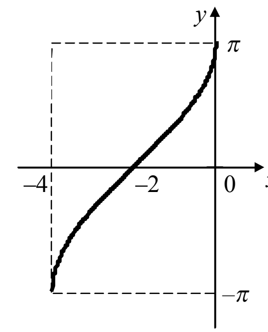


Рис. 7.21

4. График функции $y = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}(x+2)\right)-\frac{\pi}{2}$ получаем из графика $y = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}(x+2)\right)$ путем параллельного переноса вдоль оси Oy на $\frac{\pi}{2}$ единиц вниз (рис. 7.22).

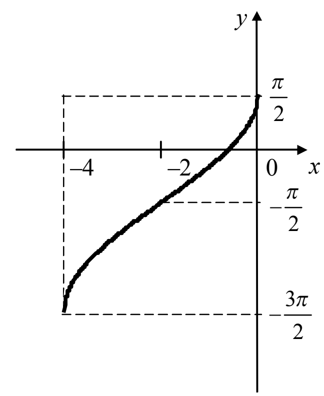


Рис. 7.22

Пример 7. Построить на единичной окружности угол α, такой, что

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\alpha = \arcsin\frac{1}{2}$.

Решение. 1) Воспользуемся определением синуса. Равенству $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ соответствуют два угла $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ (рис. 7.23).

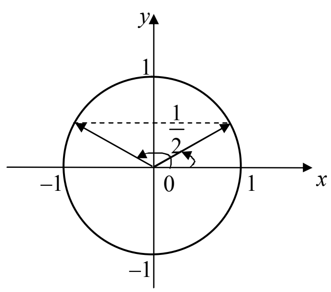


Рис. 7.23

2) По определению арксинуса $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На данном промежутке существует только один угол, синус которого равен $\frac{1}{2}$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (рис. 7.24).

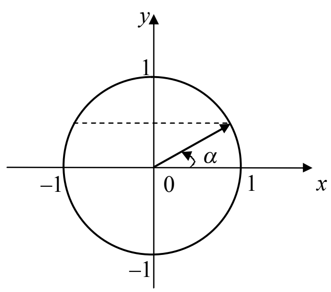


Рис. 7.24

Пример 8. Решить уравнение $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}$.

Решение. Формула (7.16) позволяет перейти к системе

$$\begin{cases} (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}, \\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad (7.18)$$

Пусть $\arcsin x = t$, $\arccos x = p$, где $p \in [0; \pi]$. Тогда система (7.18) приобретает вид: $\begin{cases} t^2 + p^2 = \frac{5\pi^2}{36}, \\ t + p = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Решим последнюю систему и получим: $\begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{6}, \\ p_1 = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$ или $\begin{cases} t_2 = \frac{\pi}{3}, \\ p_2 = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} \arcsin x = \frac{\pi}{6}, \\ \arccos x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ или $\begin{cases} \arcsin x = \frac{\pi}{3}, \\ \arccos x = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$

Обе эти системы имеют решение. Из первой системы получаем $x = \frac{1}{2}$, а вторая дает $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Получаем ответ: $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задания

I уровень

1.1. Проверьте, справедливо ли равенство:

1) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

3) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$;

5) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$;

7) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$; 8) $\operatorname{arcctg}\left(-1\right)=\dfrac{3\pi}{4}$.

1.2. Вычислите:

1) $2\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(-1\right)+\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $3\arcsin\dfrac{1}{2}+4\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$;

4) $4\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+6\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

5) $\arcsin\left(-1\right)+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

6) $\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}\left(-1\right)$;

7) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}1+2\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$;

8) $\operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\left(-1\right)+3\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

1.3. Решите уравнение:

1) $\arcsin 2x=-\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(x-1\right)=\dfrac{\pi}{6}$;

3) $\arccos\dfrac{x}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arctg}\left(x+1\right)=\dfrac{2\pi}{3}$;

5) $\operatorname{arcctg}\left(2x-1\right)=\dfrac{\pi}{2}$; 6) $\arcsin\left(\dfrac{x}{4}+1\right)=\dfrac{2\pi}{3}$;

7) $\arccos x^2=\dfrac{\pi}{3}$; 8) $\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}=\dfrac{4\pi}{3}$;

9) $\operatorname{arcctg}\left(x^2+2x\right)=\dfrac{3\pi}{4}$; 10) $\operatorname{arctg}e^x=\dfrac{\pi}{4}$.

1.4. Найдите область определения функции:

1) $y=\dfrac{1}{\arcsin\left(x+3\right)}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\arccos\left(\dfrac{x}{3}-1\right)}$.

1.5. Постройте график функции:

1) $y=2\arcsin(x-1)$; 2) $y=\dfrac{1}{3}\arccos(x+2)-\dfrac{\pi}{4}$;

3) $y=-\operatorname{arctg}(2x-1)+\dfrac{\pi}{6}$; 4) $y=5\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{x}{3}+6\right)-\dfrac{\pi}{2}$.

1.6. Постройте на единичной окружности угол α, такой, что:

1) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\alpha=\arccos\dfrac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg}3\alpha=1$; 4) $\alpha=\operatorname{arctg}(-1)$;

5) $\alpha=\operatorname{arcctg}(-1)$; 6) $\alpha=\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

II уровень

2.1. Вычислите:

1) $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; 2) $\sin\left(2\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$;

5) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}\right)$; 6) $\sin\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

7) $\cos\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$; 8) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

9) $\arccos\left(\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$; 10) $\operatorname{arcctg}\left(-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\right)$;

11) $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{4}+\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$.

2.2. Сравните числа:

1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ è $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ è $\operatorname{arctg}(-1)$;

3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ è $\arcsin 1$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\arcsin\frac{1}{2}$;

5) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\operatorname{arctg}(-1)$ è $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

7) $\arcsin(-1)$ è $\operatorname{arctg}(-1)$; 8) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ è $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.3. Решите уравнение:

1) $(\arccos x)^2+2\arccos x-3=0$;

2) $(\arcsin x)^2-5\arcsin x-6=0$;

3) $\arcsin\sqrt{x}+\arccos\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}$;

4) $\sin(\arcsin x+\arccos x)=1$;

5) $\cos\left(\arccos\sqrt{x-1}+\arcsin\sqrt{x-1}\right)=0$.

2.4. Найдите область определения функции:

1) $y=\dfrac{\sqrt{50x^2+115x+66}}{\sqrt[4]{\arcsin(2x+3)-\frac{\pi}{6}}}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{\arccos(3x+1)-\frac{\pi}{3}}}{\sqrt[6]{72x^2+17x+1}}$;

3) $y=\arccos\sqrt{\log_2\frac{3x-2}{2-x}}$; 4) $y=\dfrac{\lg(2x^2-11x+15)}{\sqrt{\frac{\pi}{3}-\arcsin(x-3)}}$;

5) $y=\sqrt{8x^2+6x+1}\cdot\dfrac{1}{\lg(x+3)}+\dfrac{1}{\arcsin(x+1)}$.

2.5. Постройте график функции:

1) $y=\arccos|x|-1$; 2) $y=\left|-\arcsin 3x+\frac{\pi}{4}\right|$;

3) $y=\left|-\operatorname{arctg}(2x-3)-\frac{\pi}{6}\right|$; 4) $y=-\operatorname{arcctg}|x-1|+\pi$.

2.6. Постройте на единичной окружности угол α, такой, что:

1) $\operatorname{tg}\alpha=1$; 2) $\alpha=\arccos(-1)+\frac{\pi}{6}$;

3) $\alpha=2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\alpha=\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 5) $\sin\alpha=\left|\frac{1}{2}\right|$.

III уровень

3.1. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$; 4) $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3$;

5) $\arcsin\left(\cos\frac{2}{17}\right)$; 6) $14\arccos\left(\sin\frac{3}{14}\right)$;

7) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

8) $3\cos(2\operatorname{arctg}1)+3\cos(2\operatorname{arcctg}(-1))$;

9) $2\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right)$.

3.2. Решите уравнения:

1) $\frac{6}{\pi}\arccos\left(x^3-2x^2+3x-5{,}5\right)=2\operatorname{tg}\left(-\frac{67\pi}{4}\right)$;

2) $\frac{4}{\pi}\arcsin\left(4{,}5-2x+15x^2-6x^3\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\left(-\frac{46\pi}{3}\right)$;

3) $\arcsin(3x-2)=\arcsin(-x+2)$;

4) $2\arcsin^2 x+\pi^2=3\pi\arcsin x$;

5) $4\mathrm{arctg}^2 x - 3\pi\mathrm{arctg}x - \pi^2 = 0$;

6) $4\mathrm{arctg}\dfrac{3x-1}{x+3} = \pi$;

7) $\mathrm{arctg}^2 x - 18\mathrm{arctg}x \cdot \mathrm{arcctg}x + \mathrm{arcctg}^2 x = 4\pi^2$;

8) $\log_{0,5\pi} \arccos(1-x) = 1$;

9) $\log_{\pi} \arccos(2x+1) = 1$.

3.3. Решите неравенство:

1) $\arcsin(x-1) < -\dfrac{\pi}{6}$;

2) $\arcsin(3x-2) > \arcsin(5x-3)$;

3) $\mathrm{arcctg}(x-2) < \dfrac{5\pi}{6}$;

4) $4\arcsin^2 x - 7\pi \arcsin x - 2\pi^2 \le 0$;

5) $-\dfrac{\pi}{3} \le \mathrm{arctg}\dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{4}$.

3.4. Известно, что числа 9, $x-4$, $\sin(\arcsin x)$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите x.

3.5. Постройте график функции:

1) $y = \arccos x + \arcsin x$, $x \in [-1;\ 1]$;

2) $y = \arcsin(\log_2 4x)$;

3) $y = 3arctg\left(\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)$;

4) $y = -\mathrm{arccrtg}\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1}$.

3.6. Постройте на единичной окружности угол α, такой, что:

1) $|\cos\alpha| = \dfrac{1}{2}$;

2) $\alpha = \left|\mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right|$;

3) $\alpha = \arcsin\left|\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|$;

4) $\alpha = \mathrm{arcctg}(-\sqrt{3}) + \dfrac{\pi}{2}$;

5) $\alpha = \mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x$.

7.5. Тригонометрические уравнения

Приведем основные типы уравнений.

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнение

$$\sin x = a. \tag{7.19}$$

Если $|a| > 1$, то уравнение (7.19) решений не имеет, так как $|\sin x| \le 1$.

Если $|a| \le 1$, то уравнение имеет решение, которое находят по формуле

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{7.20}$$

Частные случаи уравнения (7.19):

уравнение $\sin x = -1$, решение $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

уравнение $\sin x = 0$, решение $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

уравнение $\sin x = 1$, решение $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Уравнение

$$\cos x = a. \tag{7.21}$$

Если $|a| > 1$, то уравнение решений не имеет, так как $|\cos x| \le 1$.

Если $|a| \le 1$, то уравнение (7.21) имеет решение, которое находят по формуле

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{7.22}$$

Частные случаи уравнения (7.21):

уравнение $\cos x = -1$, решение $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

уравнение $\cos x = 0$, решение $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

уравнение $\cos x = 1$, решение $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Уравнение

$$\mathrm{tg}x = a,\ a \in \mathbf{R}. \tag{7.23}$$

Решение уравнения (7.23) находят по формуле

$$x = \mathrm{arctg}a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{7.24}$$

Уравнение

$$\mathrm{ctg}x = a,\ a \in \mathbf{R}. \tag{7.25}$$

Решение уравнения (7.25) находят по формуле

$$x = \operatorname{arcctg} x + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (7.26)$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} = 0.$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

и воспользуемся формулой (7.20):

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Используем нечетность функции $\arcsin x$:

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \left(-\arcsin\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Из последнего равенства находим:

$$\frac{x}{2} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

что приводит к ответу

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Решение. Воспользуемся частным случаем решения уравнения типа (7.21):

$$3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$3x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

приходим к ответу

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{ctg}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0.$

Решение. Найдем решение по формуле (7.26):

$$4x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$4x - \frac{\pi}{3} = \pi - \operatorname{arcctg} 1 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$4x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$4x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$4x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$4x = \frac{13\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Получаем ответ: $x = \frac{13\pi}{28} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbf{Z}.$

2. Уравнения, решаемые разложением на множители

Пример 4. Решить уравнение $\sin x \operatorname{tg} x + 1 - \sin x - \operatorname{tg} x = 0.$

Решение. ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\sin x \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x - \sin x + 1 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x(\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0$$

или

$$(\sin x - 1) \cdot (\operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

Решаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 1. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Однако решение $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}$ не удовлетворяет ОДЗ исходного уравнения. Поэтому получаем ответ:

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

Пример 5. Решить уравнение $\sin 2x-\sin x=0$.

Решение. Используя формулу $\sin 2x=2\sin x\cos x$, запишем уравнение в виде

$$2\sin x\cos x-\sin x=0,$$

откуда

$$\sin x(2\cos x-1)=0.$$

Решаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ 2\cos x-1=0;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Получаем ответ:

$$x=\pi n, n\in\mathbf{Z};\ \ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}.$$

Пример 6. Решить уравнение $\cos 3x+\sin 5x=0$.

Решение. Используем формулу приведения и запишем уравнение в виде

$$\cos 3x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=0.$$

Преобразуем по формуле суммы косинусов:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

откуда получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0,\\ \cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},\\ 4x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Приходим к ответу:

$$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z};\ \ x=\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{4},\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

3. Уравнения, решаемые с помощью формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

Пример 7. Решить уравнение

$$4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3x=1.$$

Решение. Преобразуем произведение $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ в сумму, получим:

$$2\sin x\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos(2x+\pi)\right)+\cos 3x=1;$$

$$\sin x+2\sin x\cos 2x+\cos 3x=1.$$

Преобразуем в сумму произведение $\sin x\cdot\cos 2x$:

$$\sin x+\sin 3x-\sin x+\cos 3x=1,$$

$$\sin 3x+\cos 3x=1.$$

Используем формулу приведения и представим последнее уравнение в виде

$$\sin 3x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=1.$$

Преобразуем полученную сумму синусов в произведение:

$$\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Получаем уравнение

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

которое решаем по формуле (7.22):

$$3x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

Получаем ответ:

$$x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

4. Уравнения, решаемые с помощью замены переменной

Пример 8. Решить уравнение $\cos^2 4x+\cos 4x-2=0$.

Решение. Данное уравнение является квадратным относительно

$\cos 4x$. Заменяем $\cos 4x = y$, получим уравнение $y^2 + y - 2 = 0$. Его корни $y_1 = 1$ и $y_2 = -2$. Таким образом, решение исходного уравнения свелось к решению совокупности простейших уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4x = 1, \\ \cos 4x = -2. \end{array}\right.$$

Уравнение $\cos 4x = -2$ корней не имеет, т. е. $|-2| > 1$.

Решением второго является:

$$4x = 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z},\ \ x = \frac{\pi n}{2},\ \ n \in \mathbf{Z}.$$

Получаем ответ: $x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$

Пример 9. Решить уравнение $3\cos^2 6x + 8\sin 3x \cos 3x - 4 = 0$.

Решение. Используем тождество $\cos^2 6x + \sin^2 6x = 1$ и формулу $\sin 6x = 2\sin 3x \cos 3x$. Уравнение сводится к виду

$$3\left(1 - \sin^2 6x\right) + 4\sin 6x - 4 = 0,$$

$$3\sin^2 6x - 4\sin 6x + 1 = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно $\sin 6x$. Заменяем $\sin 6x = y$, получим уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1$; $y_2 = \dfrac{1}{3}$.

Приходим к совокупности простейших уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 6x = 1, \\ \sin 6x = \dfrac{1}{3}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 6x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}, \\ 6x = \left(-1\right)^k \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi k,\ \ k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Получаем ответ:

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ \ n \in \mathbf{Z};\ \ x = \frac{\left(-1\right)^k}{6}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{6},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 10. Найти сумму корней уравнения
$3 + 2\sin 2x = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$, если $x \in [0;\ \pi]$.

Решение. Î ÄÇ: $\begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi, \\ x \ne \pi n, \end{cases}$ поскольку $x \in [0;\ \pi]$, $\begin{cases} x \ne 0, \\ x \ne \dfrac{\pi}{2}, \\ x \ne \pi. \end{cases}$

Упростим исходное уравнение:

$$3 + 2\sin 2x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$3 + 2\sin 2x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x};$$

$$3 + 2\sin 2x = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x};$$

$$\frac{3}{2}\sin 2x + \sin^2 2x = 1;$$

$$2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 2 = 0.$$

Получили квадратное уравнение относительно $\sin 2x$. Сделав замену $\sin 2x = t$, где $-1 \le t \le 1$, имеем уравнение $2t^2 + 3t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -2$ или $t_2 = \dfrac{1}{2}$.

Вернувшись к прежней неизвестной, получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -2, \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение не имеет решения. Решаем второе:

$$2x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z};$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n,\ \ n \in \mathbf{Z}.$$

Придаем n значение $n = 0$, получаем:

$$x = \frac{\pi}{12} \in [0;\ \pi];$$

при $n = 1$ имеем $x = \dfrac{5\pi}{12} \in [0;\ \pi]$.

Нетрудно убедиться, что при всех других значениях n корни не попадут на отрезок $[0;\ \pi]$. Значит сумма корней, принадлежащих отрезку $[0;\ \pi]$, равна

$$\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}.$$

Получаем ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

5. Однородные уравнения

Однородным тригонометрическим уравнением n-й степени относительно $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$, $\alpha \in \mathbf{R}$, называется уравнение вида

$$\begin{aligned} &c_0 \sin^n \alpha x + c_1 \sin^{n-1} \alpha x \cos\alpha x + \ldots + \\ &+c_{n-1} \sin\alpha x \cos^{n-1} \alpha x + c_n \cos^n \alpha x = 0, \end{aligned} \qquad (7.27)$$

где c_0, c_1, ..., c_n – действительные числа, $c_0 \neq 0$; $n \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$.

В уравнении (7.27) $\cos\alpha x \neq 0$, так как при $\cos\alpha x = 0$ исходное уравнение примет вид: $a_0 \sin^n \alpha x = 0$, откуда $\sin\alpha x = 0$, что невозможно, поскольку $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$ не могут одновременно равняться нулю.

Разделив исходное уравнение на $\cos^n \alpha x$, получим:

$$a_0 \mathrm{tg}^n \alpha x + a_1 \mathrm{tg}^{n-1} \alpha x + \ldots + a_{n-1} \mathrm{tg}\alpha x + a_n = 0.$$

С помощью замены $\mathrm{tg}\alpha x = t$ имеем алгебраическое уравнение

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n = 0,$$

которое решаем и возвращаемся к старой переменной.

Пример 11. Решить уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Решение. Разделив уравнение на $\cos x \neq 0$, получим $2\mathrm{tg}x - 3 = 0$, откуда $\mathrm{tg}x = \frac{3}{2}$ и $x = \mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Получаем ответ: $x = \mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Пример 12. Решить уравнение $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$.

Решение. Используя формулу $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, приведем данное уравнение к однородному:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0,$$

$$2\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cos x = 0.$$

Разделим почленно на $\cos^2 x \neq 0$:

$$2 - \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}x = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}x - 2 = 0.$$

Введем замену $\mathrm{tg}x = t$ и получим уравнение $t^2 - t - 2 = 0$, корнями

которого будут $y_1 = -1$; $y_2 = 2$.

После чего перейдем к решению совокупности простейших уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = -1, \\ \mathrm{tg}x = 2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ x = \mathrm{arctg}2 + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Получаем ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $x = \mathrm{arctg}2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Неоднородные уравнения 2-й степени

Неоднородным тригонометрическим уравнением 2-й степени называется уравнение вида

$$a\sin^2 \alpha x + b\sin\alpha x \cdot \cos\alpha x + c\cos^2 \alpha x = d, \ d \neq 0. \qquad (7.28)$$

Используя основное тригонометрическое тождество, приводим уравнение к однородному

$$a\sin^2 \alpha x + b\sin\alpha x \cdot \cos\alpha x + c\cos^2 \alpha x = d\left(\cos^2 \alpha x + \sin^2 \alpha x\right),$$

которое решаем далее как уравнение (7.27).

Пример 13. Решить уравнение $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$.

Решение. Используя формулы:

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ и $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

преобразуем данное уравнение к однородному:

$$4\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right),$$

$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Разделим на $\cos^2 x \neq 0$:

$$\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - 3 = 0.$$

Введем замену $\mathrm{tg}x = y$:

$y^2 - 2y - 3 = 0$, откуда $y_1 = -1$; $y_2 = 3$.

Решим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = -1, \\ \mathrm{tg}x = 3; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ x = \mathrm{arctg}3 + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Получаем ответ:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}; \ x = \mathrm{arctg}3 + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

7. Неоднородные уравнения 1-й степени

Неоднородным уравнением 1-й степени называется уравнение вида

$$a\sin\alpha x+b\cos\alpha x=c,\ \ a,\ \ b,\ \ c\neq 0. \qquad (7.29)$$

1-й способ решения. Используем формулы двойного аргумента:

$$2a\sin\frac{\alpha x}{2}\cos\frac{\alpha x}{2}+b\left(\cos^2\frac{\alpha x}{2}-\sin^2\frac{\alpha x}{2}\right)=c\left(\sin^2\frac{\alpha x}{2}+\cos^2\frac{\alpha x}{2}\right).$$

Тогда уравнение (7.29) сводится к однородному уравнению 2-й степени, которое решаем как уравнение (7.28).

2-й способ решения. Используем метод введения вспомогательного аргумента.

Разделив обе части уравнения (7.29) на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то существует угол φ, такой, что

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases} \qquad (7.30)$$

Тогда исходное уравнение (7.29) примет вид:

$$\sin\alpha x\cos\varphi+\cos\alpha x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

или, используя формулу (7.8) для синуса суммы, получим:

$$\sin(\alpha x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если $c\leq\sqrt{a^2+b^2}$, то последнее уравнение имеет решение:

$$\alpha x+\varphi=(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

Угол φ находят из формулы (7.30), например,

$$\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Приходим к ответу:

$$x=-\frac{1}{\alpha}\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{(-1)^k}{\alpha}\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\pi k}{\alpha},\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

Пример 14. Решить уравнение $\sin x+\cos x=1$.

Решение. Разделив левую и правую часть уравнения на $\sqrt{2}$ (так как $a=1;\ b=1$), получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ и }\ \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, получаем уравнение:

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z},$$

откуда приходим к ответу:

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

8. Уравнения, решаемые с применением формул понижения степени

При решении широкого круга тригонометрических уравнений ключевую роль играют формулы понижения степени (7.12).

Пример 15. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=0.$$

Решение. Используем формулу $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$. Заданное уравнение примет вид:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1-\cos 8x}{2}=0.$$

Преобразуя, перейдем к решению уравнения

$$\cos 8x+\cos 6x-\cos 2x-\cos 4x=0,$$

откуда

$$\left(\cos 8x-\cos 2x\right)+\left(\cos 6x-\cos 4x\right)=0.$$

Применив формулы (7.13) преобразования суммы и разности косинусов в произведение, получим:

$$-2\sin 3x\sin 5x-2\sin x\sin 5x=0$$

или

$$2\sin 5x\left(\sin 3x+\sin x\right)=0,$$

откуда

$$\sin 5x=0;\;\; 5x=\pi n,\;\; n\in\mathbf{Z};\;\; x=\frac{\pi n}{5},\;\; n\in\mathbf{Z};$$

$$\sin 3x+\sin x=0;$$

$$2\sin 2x\cos x=0.$$

Получаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0,\\ \cos x=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}2x=\pi k,\;\; k\in\mathbf{Z},\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\;\; n\in\mathbf{Z};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi k}{2},\;\; k\in\mathbf{Z},\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\;\; n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Множество решений $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\;\; n\in\mathbf{Z}$ содержится во множестве решений $x=\frac{\pi k}{2},\;\; k\in\mathbf{Z}.$

Поэтому приходим к ответу:

$$x=\frac{\pi k}{2},\;\; k\in\mathbf{Z}.$$

9. Уравнения, решаемые методом универсальной подстановки

Тригонометрическое уравнение, рациональное относительно $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\mathrm{ctg} x$, может быть сведено к рациональному уравнению относительно $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул универсальной подстановки (7.15).

Следует отметить, что применение формул (7.15) может привести к сужению ОДЗ исходного уравнения, поскольку $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ не определен в точках $x=\pi+2\pi n,\;\; n\in\mathbf{Z}.$ Поэтому в таком случае нужно проверять, являются ли значения $x=\pi+2\pi n,\;\; n\in\mathbf{Z},$ корнями исходного уравнения.

Пример 16. Решить уравнение $\sin x+\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0.$

Решение. По условию задачи $x\neq\pi+2\pi k,\;\; k\in\mathbf{Z}.$ Применим формулу (7.15) и преобразуем уравнение к виду

$$\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0.$$

Сделав замену $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t,$ получим:

$$\frac{2t}{1+t^2}+t=0,$$

откуда $t=0$ и, следовательно, $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0.$ Решая последнее уравнение, получаем ответ:

$$x=2\pi k,\;\; k\in\mathbf{Z}.$$

10. Уравнения, решаемые применением ограниченности тригонометрических функций

Рассмотрим уравнения, решение которых основано на следующем утверждении: если при решении уравнения $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ удалось установить, что для всех допустимых значений переменной x выполняется $f\left(x\right)\leq a$ и $g\left(x\right)\geq a$ (a – константа), то данное уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l}f\left(x\right)=a,\\ g\left(x\right)=a.\end{array}\right.$$

При решении уравнений, содержащих тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, надо помнить, что

$$-1\leq\sin x\leq 1 \text{ и } -1\leq\cos x\leq 1.$$

Пример 17. Решить уравнение $\cos\left(\frac{x^2-8x}{5}\right)=x^2+1.$

Решение. Так как $\cos\left(\frac{x^2-8x}{5}\right)\le 1,$ а $x^2+1\ge 1,$ то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{x^2-8x}{5}\right)=1,\\ x^2+1=1,\end{cases}$$

имеющей единственное решение $x=0.$

Получаем ответ: $x=0.$

Задания

I уровень

1.1. Решите тригонометрическое уравнение:

1) $\cos(-2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2};$ 2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}=0\right);$

3) $2\sin x+\sqrt{3}=0;$ 4) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2};$

5) $\sqrt{3}\mathrm{tg}x-1=0;$ 6) $\mathrm{ctg}x+1=0;$

7) $\sqrt{3}\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=3;$ 8) $\left(\mathrm{ctg}3x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$

1.2. Решите уравнение:

1) $15\sin^2 x-25\sin x-10=0;$ 2) $\cos^2 x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}=0;$

3) $\mathrm{tg}^2 2x-4\mathrm{tg}2x+3=0;$ 4) $5\sin^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-6=0;$

5) $\mathrm{tg}3x+3\mathrm{tg}3x=2\sqrt{3};$ 6) $\sin 2x-\cos x=0;$

7) $\left(\cos\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1;$ 8) $\sin x+\cos 3x=0;$

9) $3\cos 3x-3\cos 5x=3\sin 4x;$ 10) $2\cos^2 x+\sin 2x=0;$

11) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0;$ 12) $\sin 3x=\sin 2x\cos x;$

13) $\sin 2x=2\cos 2x;$ 14) $\sin\frac{x}{4}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{4}=0;$

15) $\sin 3x=\sin 2x\cos x;$ 16) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2};$

17) $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2;$ 18) $4\sin^2 2x-1=0;$

19) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x;$ 20) $\cos^2 4x=1;$

21) $1-\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=0;$ 22) $1+\cos^2 2x=\sin^4 2x;$

23) $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=(\sin x+\cos x)^2;$ 24) $\sin 3x=3\sin x;$

25) $3\mathrm{ctg}\frac{5\pi-x}{2}+6\mathrm{ctg}\left(\pi-\frac{x}{2}\right)=3;$ 26) $\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=1;$

27) $\cos x+\cos 5x=\cos 3x+\cos 7x;$

28) $3\cos 2x+\sin^2 x+5\sin x\cos x=0.$

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $4\sin^2 x-\sin 2x=3;$

2) $2\cos^2\frac{x}{3}+3\sin\frac{x}{3}=0;$

3) $\mathrm{tg}^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{tg}x+\sqrt{3}=0;$

4) $\mathrm{tg}\left(2(x+\pi)\right)+4=5\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right);$

5) $\sin 4x+\sin^2 2x=0;$

6) $\cos 3x+\cos x=4\cos 2x;$

7) $2\cos^2 x+3\sin 4x+4\sin^2 2x=0;$

8) $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x;$

9) $2\sin^2 2x+3\cos^2 2x=2{,}5\sin 4x;$

10) $2\cos^2 3x+\sin^2 3x=1{,}5\sin 6x;$

11) $2\sin 6x + 2\cos 6x = \sqrt{2}$;

12) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{4} - \sqrt{2}\sin\frac{x}{4} = 1$;

13) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$;

14) $2\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^3 2x = 1$;

15) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 + 4\sin x$;

16) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \frac{5}{8}$;

17) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$;

18) $\cos 2x + 3\sin 2x = 3$;

19) $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - 2 = 0$;

20) $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2$;

21) $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$;

22) $\frac{\cos x}{\cos 7x} = 0$;

23) $1 + \cos 4x = \sin 3x - \sin x$;

24) $2\sqrt{3}\cos 6x + 6\sin 6x = \sqrt{12}$;

25) $3\sin\left(\frac{x}{3} - 2\right) + \sqrt{3}\cos\left(2 - \frac{x}{3}\right) = -\sqrt{12}$;

26) $\cos 2x + \cos 6x = |\cos 4x|$;

27) $\sin\frac{\pi}{4}x = x^2 - 4x + 5$;

28) $2\cos 2\pi x = x + \frac{1}{x}$;

29) $\sqrt{1 - \sqrt{3}\sin x} + \sqrt{10}\cos x = 0$;

30) $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$. Найдите сумму корней уравнения на отрезке $[0;\ 3\pi]$.

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $2\cos^2 3x + \sin 5x = 1$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin 2x$;

3) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$;

4) $\sin^4\frac{x}{2} + 5\cos x + 4 = 0$;

5) $4\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 6\sin^2\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = 4$;

6) $\frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x} + \frac{4}{\mathrm{tg}x + 3} = \frac{18}{\mathrm{tg}^2 x - 9}$;

7) $\mathrm{ctg}^2 2x + \mathrm{ctg}2x = 4 - \mathrm{tg}^2 2x + \mathrm{tg}2x$;

8) $2\sin^2 x + 3\cos 2x - 4 = 5\sin 2x$;

9) $\cos^4 x + 3 - 4\sin 2x = \sin^4 x$;

10) $\cos 2x = \sin^3 x - \cos^3 x$;

11) $3\sin\frac{x}{2} - 4\cos\frac{x}{2} = 5$;

12) $\left|\frac{1}{\sin x}\right| = -\frac{1}{\sin x}$. Найдите наименьшее целое решение уравнения, удовлетворяющее условию $x \in [-180°;\ -90°]$;

13) Найдите все решения уравнения $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, удовлетворяющие условию $\sin x\cos x < 0$;

14) $1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2 x}} = 2\cos^2 x$;

15) $\sqrt{1 - 4\sin x} = \sqrt{1 - 4\cos 2x}$;

16) $\sin 2x - \cos 2x = \mathrm{tg}x$;

17) $2 - \mathrm{tg}2x = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$;

18) $\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}=3;$

19) $(2\sin x+\cos x)\cdot(1-\cos x)=\sin^2 x$. Найдите сумму корней уравнения, принадлежащих отрезку $[-\pi;\ \pi]$;

20) $1+\dfrac{1}{\sin x}=\cos x+\mathrm{ctg}x$. Найдите количество корней, принадлежащих промежутку $[-6\pi;\ 4\pi]$.

3.2. Решите уравнение:

1) $\log_{\sqrt{2}\cos x}(1+\sin x)=2;$ 2) $\log_{\sqrt{2}\sin 0,5x}\left(1+\cos\dfrac{x}{2}\right)=2;$

3) $2^{x^2-4x+5}=1+\sin^2\dfrac{\pi x}{4};$ 4) $3^x+3^{2-x}=3(1+\cos 2\pi x)$.

3.3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет хотя бы одно решение:

1) $a\cos x+1=(a+1)^2;$ 2) $2a\cos 2x+1=4a^2-\cos 2x;$

3) $2-2\cos 2x=3a+4\sin x$.

7.6. Тригонометрические неравенства

Для решения тригонометрических неравенств используют единичную окружность и определение тригонометрических функций или графический метод, а также метод замены переменной.

Простейшие тригонометрические неравенства и неравенства, сводящиеся к ним

Пример 1. Решить неравенство $\sin x>\dfrac{1}{2}$.

Решение. Воспользуемся определением синуса. С помощью единичной окружности находим вначале углы x, которые соответствуют равенству $\sin x=\dfrac{1}{2}$. Их два: $x=\dfrac{\pi}{6}$ и $x=\dfrac{5\pi}{6}$ (рис. 7.25). Строим их,

причем соответствующие радиус-векторы пунктиром, так как заданное неравенство строгое.

Выделим на единичной окружности множество точек, ординаты которых больше $\dfrac{1}{2}$, это $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{6}$. Используя периодичность функции $f(x)=\sin x$, приходим к ответу:

$$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in\mathbf{Z}.$$

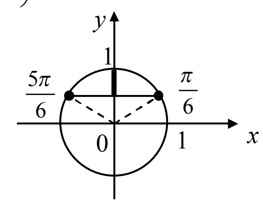


Рис. 7.25

Ответ неравенства следует понимать как объединение всех промежутков, которые получаем при всех $k\in\mathbf{Z}$.

Пример 2. Решить неравенство $\cos(3x+1)\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Заменив $3x+1$ на t, получим: $\cos t\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Выделим на единичной окружности множество точек, абсциссы которых меньше или равны $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 7.26). Получим:

$$\frac{3\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{4}.$$

Учитывая период, имеем:

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi k\le t\le\frac{5\pi}{4}+2\pi k.$$

Возвращаемся к заданной неизвестной:

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi k\le 3x+1\le\frac{5\pi}{4}+2\pi k;$$

$$\frac{3\pi}{4}-1+2\pi k\le 3x\le\frac{5\pi}{4}-1+2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi k\le x\le\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

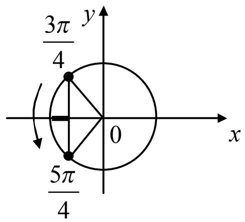


Рис. 7.26

Приходим к ответу:

$\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi k;\ \frac{5\pi}{12}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi k\right],\ k\in\mathbf{Z}.$

Пример 3. Решить неравенство $\mathrm{tg}x \geq 1$.

Решение. Используем графический метод. Построим график функции $y=\mathrm{tg}x$ для промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Проведем прямую $y=1$ (рис. 7.27). Находим промежуток оси абсцисс, для точек которого график $y=\mathrm{tg}x$ проходит не ниже построенной прямой. Этот промежуток и будет решением неравенства на рассматриваемом интервале.

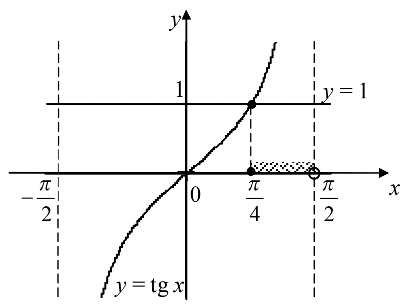


Рис. 7.27

С учетом периодичности функции $y=\mathrm{tg}x$ приходим к ответу: $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ k\in\mathbf{Z}.$

Пример 4. Решить неравенство $-5\sin x+\cos 2x<3$.

Решение. $-5\sin x+\left(1-2\sin^2 x\right)<3;$

$2\sin^2 x+5\sin x+2>0.$

Заменим $\sin x=t$. Имеем:

$2t^2+5t+2>0,$

$2(t+2)\left(t+\frac{1}{2}\right)>0,$

т. е. получаем:

$$\left[\begin{array}{l} t<-2, \\ t>-\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x<-2, \\ \sin x>-\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Первое неравенство совокупности решения не имеет. Решаем второе. С помощью единичной окружности получаем:

$-\frac{\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6}.$

Учитываем период и приходим к ответу:

$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in\mathbf{Z}.$

Задания

I уровень

1.1. Решите неравенство:

1) $-3\mathrm{tg}x\geq\sqrt{3}$; 2) $2\cos x\geq\sqrt{3}$;

3) $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\leq\sqrt{3}$; 4) $2\sin(\pi+3x)\leq\sqrt{3}$;

5) $\mathrm{tg}\left(\pi+\frac{x}{3}\right)+1\geq 0$; 6) $\sin x+4\leq 0$.

II уровень

2.1. Решите неравенство:

1) $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)-1\leq 0$; 2) $\sin^2 x+2\sin x<0$;

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-4x\right)+0{,}5>0;$ 4) $4\sin\frac{x}{2}\ge 3;$

5) $\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left|\sin 2x\right|-3\ge 0;$ 6) $\cos^4 x+\sin^4 x\le\frac{5}{8}.$

III уровень

3.1. Решите неравенство:

1) $2\mathrm{tg}^2 2x-1>0;$ 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos x<\frac{2}{3};$

3) $\cos^2\frac{x}{3}\le\sin^2\frac{x}{3}-0{,}5;$ 4) $\sqrt{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)}+4\le 0;$

5) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\ge 3;$ 6) $4\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>\sqrt{3}.$

7.7. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Комплексное число $z=a+ib$ в прямоугольной декартовой системе координат Oxy изображается точкой M (рис. 7.28).

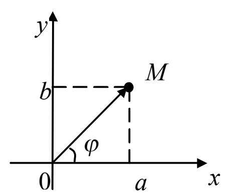


Рис. 7.28

Длина радиус-вектора точки M называется ***модулем*** комплексного числа z и обозначается $|z|$ или r:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (7.31)$$

Угол φ, образованный этим вектором с положительным направлением действительной оси Ox, называется ***аргументом*** числа z. Связь между аргументом φ комплексного числа и его

действительной и мнимой частью выражается формулами:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{b}{a} \qquad (7.32)$$

или

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases} \qquad (7.33)$$

Аргумент комплексного числа определен неоднозначно: если φ – аргумент числа z, то $\varphi+2\pi k$ – также аргумент этого числа при любом целом k. Для однозначности определения аргумента его выбирают в пределах $-\pi<\varphi\le\pi$ (èëè $[0;\ 2\pi)$), такое значение аргумента называют ***главным*** и обозначают $\arg z$. Всюду далее будем рассматривать главное значение аргумента: $\varphi=\arg z$.

На практике находить аргумент комплексного числа z имеет смысл согласно формуле (7.32) с учетом координатной четверти, в которой лежит число z, или формул (7.33).

Запись комплексного числа в виде

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad (7.34)$$

называется ***тригонометрической формой комплексного числа***.

Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ комплексные числа, заданные в тригонометрической форме. Тогда для произведения $z_1\cdot z_2$ и частного $\frac{z_1}{z_2}$ справедливы формулы:

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \qquad (7.35)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right). \qquad (7.36)$$

Для комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ справедлива ***формула Муавра***:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\ n\in\mathbf{N}. \qquad (7.37)$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w такое, что $w^n=z$.

Корень n-й степени из комплексного числа

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

имеет ***n*** различных значений, которые находят по формуле

$$w_k = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (7.38)$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1$; $\sqrt[n]{r}$ – арифметическое значение корня.

Все значения корня $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$, $k = \overline{0,\ n-1}$, расположены на окружности с центром в начале системы координат и радиусом $\sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного вписанного в окружность n-угольника.

Соотношение

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (7.39)$$

называется ***формулой Эйлера***.

Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме. Используя формулу Эйлера (7.39), можно записать:

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (7.40)$$

Такая форма записи называется ***показательной формой*** комплексного числа.

Правила действий над комплексными числами в показательной форме

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \qquad (7.41)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}; \qquad (7.42)$$

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}; \qquad (7.43)$$

$$w_k = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \text{ где } k = \overline{0;\ n-1}. \qquad (7.44)$$

Пример 1. Представить в тригонометрической форме комплексное число:

1) $z = 4 - 4\sqrt{3}i$; 2) $z = -3i$; 3) $z = 1 - \sqrt{3}$.

Решение. 1) Находим модуль данного числа по формуле (7.31):

$|z| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8.$

Для нахождения аргумента φ используем формулу (7.32):

$\mathrm{tg}\varphi = -\sqrt{3}$

и число z лежит в IV четверти. Поэтому $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ (рис. 7.29).

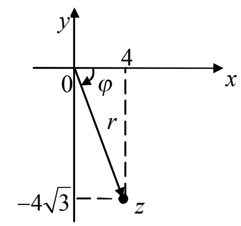


Рис. 7.29

Подставим полученные значения $|z|$ и φ в формулу (7.34), получим:

$z = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$

2) В данном случае $|z| = 3$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (точка, изображающая данное число, принадлежит отрицательной части мнимой оси (рис. 7.30)).

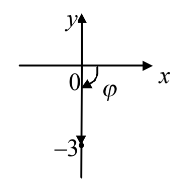


Рис. 7.30

Поэтому $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$

3) Находим модуль комплексного числа

$|z| = \sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \left|1 - \sqrt{3}\right| = \sqrt{3} - 1$

(так как $1 - \sqrt{3} < 0$), $\varphi = \pi$ (заданное число является отрицательным действительным числом (рис. 7.31)).

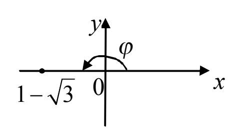


Рис. 7.31

Поэтому $z = \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot (\cos\pi + i\sin\pi).$

Пример 2. Выполнить действия:

1) $16\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right);$

2) $(2-2i)\cdot 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right);$

3) $\left(\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6}\right):\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$

Решение. 1) Используя формулу (7.35), находим:

$$16\cdot\frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i.$$

2) Сначала представим число $2-2i$ в тригонометрической форме. Имеем $|z|=2\sqrt{2}$. Поскольку число лежит в IV четверти и $\operatorname{tg}\varphi=-1$, то $\varphi=-\frac{\pi}{4}$. Следовательно, $2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Теперь воспользуемся формулой (7.35):

$$2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}\right)\right)=$$

$$=12\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=12\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot 12\frac{1}{2}=6\sqrt{3}+6i.$$

Получаем ответ: $6\sqrt{3}+6i$.

3) Заметим, что делимое число не записано в тригонометрической форме. Запишем его в этой форме. Получим:

$$\left(\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right).$$

Используя формулу (7.36), находим:

$$\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right):\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=\left(1:\frac{1}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Переходя к алгебраической форме, получаем в ответе $1-i\sqrt{3}$.

Пример 3. Возвести в степень выражение $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^9$.

Решение. Представим число $-1+\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме. Здесь $r=2$, $\operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3}$ и соответствующая точка лежит во II четверти, т. е. $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Получили $z=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. По формуле (7.37) находим:

$$z^9=2^9\left(\cos\left(9\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(9\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right)=512\left(\cos 6\pi+i\sin 6\pi\right)=512.$$

Получаем ответ: 512.

Пример 4. Извлечь корень. Полученные значения корня изобразить на комплексной плоскости:

1) $\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$; 2) $\sqrt[3]{8i}$.

Решение. 1) Находим модуль и аргумент числа $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Получаем $|z|=1$, $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Далее, используя формулу (7.38), вычисляем:

$$w_k=\left(\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)_k=\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2},$$

где $k=0,\ 1$.

Если $k=0$, то $w_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$

если $k=1$, то $w_1=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (рис. 7.32).

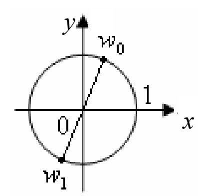


Рис. 7.32

2) Находим модуль и аргумент числа $z = 8i$: $|z| = 8$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Получили $8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда, используя формулу (7.38), имеем:

$$w_k = \left(\sqrt[3]{8i}\right)_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0,\ 1,\ 2.$

Если $k = 0$, то $w_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i;$

если $k = 1$, то

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i;$$

если $k = 2$, то

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

Изобразим комплексные числа w_0, w_1, w_2. На комплексной плоскости точки, соответствующие значениям корня, являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[3]{|z|} = 2$ с центром в начале координат (рис. 7.33).

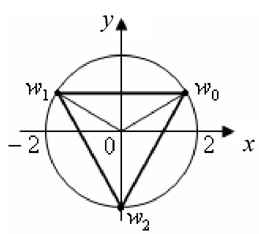


Рис. 7.33

Пример 5. Представить число в показательной форме:
1) $-1 + i$; 2) $-6i$.

Решение. 1) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$ и число лежит во II четверти, следовательно $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Получили $z = -1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

2) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = -6i$: $|z| = 6$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Тогда, по формуле (7.40) имеем:

$$z = -6i = 6e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

Пример 6. Решить уравнение $z^3 + 27 = 0$.

Решение. $z^3 = -27$. Искомыми корнями уравнения будут значения $\left(\sqrt[3]{-27}\right)_k$, $k = 0,\ 1,\ 2.$

Для $z = -27$ имеем $|z| = 27$, $\varphi = \arg z = \pi$. Тогда $z = 27e^{i\pi}$. По формуле (7.44) получаем:

$$w_k = \left(\sqrt[3]{z}\right)_k = \sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}},$$

где $k = 0, 1, 2$.

Если $k = 0$, то $w_0 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i;$

если $k = 1$, то $w_1 = 3e^{i\frac{\pi+2\pi}{3}} = 3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -3;$

если $k = 2$, то $w_2 = 3e^{i\frac{\pi+4\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$

Таким образом, корнями заданного уравнения являются числа:

$$w_0 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i;\quad w_1 = -3;\quad w_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

Пример 7. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых:

1) $|z+1| = 2$; 2) $\frac{\pi}{6} < \arg z \le \frac{\pi}{3}$; 3) $\begin{cases} |z| > 1, \\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

Решение. 1) Пусть $z = x + yi$, тогда

$$z + 1 = x + yi + 1 = (x+1) + yi.$$

Найдем модуль полученного комплексного числа

$|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$.

Тогда заданное равенство будет иметь вид:

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2$ или $(x+1)^2 + y^2 = 2^2$.

Это уравнение окружности радиуса 2 с центром в точке $C(-1;\ 0)$ (рис. 7.34).

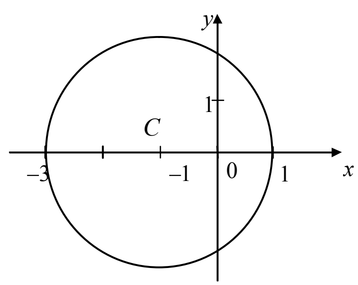


Рис. 7.34

2) Пусть $\arg z = \varphi$. Из условия имеем $\frac{\pi}{6} < \varphi \le \frac{\pi}{3}$. Геометрически это неравенство задает на плоскости множество точек, лежащих внутри угла с вершиной в точке (0; 0), стороны которого составляют с положительным направлением оси Ox углы $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$, а также множество точек, лежащих на луче $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (рис. 7.35).

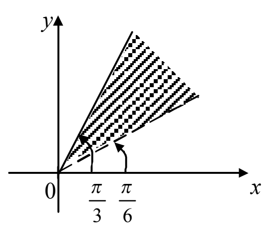


Рис. 7.35

3) Заданная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1, \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решением системы будет пересечение множества точек, лежащих вне окружности $x^2 + y^2 = 1$, и множества точек, лежащих внутри угла величины $\frac{\pi}{4}$ и на его сторонах (рис. 7.36).

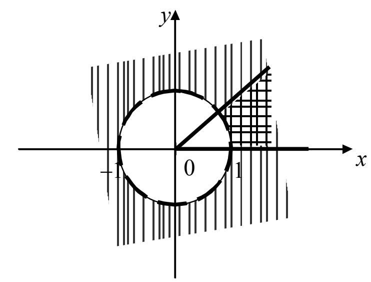


Рис. 7.36

Задания

I уровень

1.1. Представьте число в тригонометрической и показательной формах, изобразите его на плоскости:

1) $z = -2i$; 2) $z = 8 - 8\sqrt{3}i$; 3) $z = 1{,}5\sqrt{3} + 1{,}5i$;
4) $z = 12$; 5) $z = (\sqrt{5} - 2)i$; 6) $z = -10 + 10i$.

1.2. Представьте комплексное число в алгебраической форме:

1) $z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; 2) $z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $z = -\sqrt{2}i\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

1.3. Используя тригонометрическую формулу комплексного числа, выполните действия:

1) $(-3 + \sqrt{3}i) \cdot \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $(-4 + 4\sqrt{3}i) \cdot (2 + 2\sqrt{3}i)$;

3) $\frac{-2 + 2\sqrt{3}}{1 - i}$; 4) $\frac{8i}{2 + 2\sqrt{3}i}$;

5) $\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{i\sqrt{6}}{4}\right)$; 6) $\dfrac{\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}-i}$;

7) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{23\pi}{45}+i\sin\frac{25\pi}{45}\right)\cdot 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{22\pi}{45}+i\sin\frac{22\pi}{45}\right)$.

1.4. Возведите в степень:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)^9$; 2) $\left(\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)\right)^8$;

3) $(2+2i)^5$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^{10}$.

1.5. Представив комплексные числа $z_1=-1-i$, $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, $z_3=1+\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме, вычислите $\dfrac{4z_1\cdot z_3}{z_2}$.

1.6. Вычислите корни из комплексных чисел и дайте геометрическую интерпретацию их значений:

1) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$; 2) $\sqrt[3]{27i}$; 3) $\sqrt{-1-i}$; 4) $\sqrt{-6+6\sqrt{3}i}$;

5) $\sqrt[3]{-125}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{-i}{8}}$; 7) $\sqrt{4-4i}$; 8) $\sqrt[3]{-i}$.

1.7. Выполните действия, результат запишите в алгебраической форме:

1) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{100}$; 2) $\dfrac{\left(\sqrt{2}(1+i)\right)^4}{1+2i}$;

3) $\dfrac{3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$; 4) $\left(\dfrac{2\left(\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}\right)}{\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)}\right)^3$;

5) $\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^6}{1-i}$; 6) $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}{1+3i}$.

1.8. Решите уравнение:

1) $z^2-3z+4=0$; 2) $z^3-1=0$;

3) $2z^2+8=0$; 4) $z^2+z+1=0$;

5) $\frac{1}{2}z^2+\left(\frac{4-3i}{2}\right)z+2-3i=0$.

1.9. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, для которых:

1) $|z-3+3i|\le 1$; 2) $|z+1|>2$; 3) $-2\le \operatorname{Im} z<5$;

4) $1<|2z-1|\le 2$; 5) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\le 1$; 6) $-\frac{\pi}{6}<\arg z\le\frac{\pi}{3}$;

7) $|2z+4i-6|\ge 1$; 8) $\begin{cases}\operatorname{Re} z\ge 1,\\ -\frac{\pi}{4}\le\arg z<\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

II уровень

2.1. Представьте число в тригонометрической и показательной формах:

1) $z=\dfrac{2-i}{1+i}$; 2) $z=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$;

3) $z=-0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i$; 4) $z=(1+2i)\cdot(1-i)$;

5) $z=6\left(\sin\frac{2\pi}{3}+i\cos\frac{2\pi}{3}\right)$; 6) $z=1-\sqrt{3}$.

2.2. Даны комплексные числа $z_1=-2+2\sqrt{3}i$ и $z_2=1-i$. Представив их в тригонометрической форме, вычислите:

1) $5z_1\cdot z_2$; 2) $\dfrac{z_2}{2z_1}$; 3) $-\dfrac{z_1^3}{z_2}$; 4) $\bar{z}_2^6$.

2.3. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, выполните действия:

1) $\left(-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}i\right)^3\cdot(1+i)^2$; 2) $(1-i)^2\left(0{,}25-0{,}25\sqrt{3}i\right)^3$;

3) $\dfrac{4\left(\cos\dfrac{7\pi}{30}+i\sin\dfrac{7\pi}{30}\right)}{\left(\cos\dfrac{17\pi}{60}+i\sin\dfrac{17\pi}{60}\right)^2}$; 4) $\dfrac{4\sqrt{3}-4i}{(-1+i)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)}$.

2.4. Возведите в степень, результат запишите в алгебраической форме:

1) $\left(\dfrac{1+i}{-1-i}\right)^{20}$; 2) $\left(\dfrac{1+i}{i-1}\right)^{100}\cdot 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}}$; 4) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$.

2.5. Вычислите корни, а результат изобразите на комплексной плоскости:

1) $\sqrt[4]{16i}$; 2) $\sqrt[4]{-4}$; 3) $\sqrt[5]{-1+i}$;

4) $\sqrt[6]{2-2i\sqrt{3}}$; 5) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$; 6) $\sqrt[6]{-64i}$.

2.6. Решите уравнение:

1) $z^2-64i=0$; 2) $z^4+4=0$;

3) $z^4-2\sqrt{3}z^2+4=0$; 4) $z^2+4iz+6(2-5i)=0$;

5) $z^4-4z^2+16=0$; 6) $z^2-(8+3i)z+13(1+i)$;

7) $z^2+(1+i)z+2^{\frac{i}{2}}=0$.

2.7. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, для которых:

1) $\dfrac{\pi}{6}<\arg(z+1)\le\dfrac{\pi}{4}$; 2) $1\le|z+1-i|\le 2$;

3) $\begin{cases}0<\operatorname{Im}(z+2i)\le 1,\\ \operatorname{Re} z>-5;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}0\le\arg(z-1+2i)\le\dfrac{3\pi}{4},\\ \operatorname{Im}(z+i)\ge 1;\end{cases}$

5) $|z+1|+|z-i|>2$; 6) $\begin{cases}\arg z=\dfrac{\pi}{4},\\ |z-1-i|=2.\end{cases}$

III уровень

3.1. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах комплексные числа и выполните действия:

1) $\dfrac{\left(0{,}5\sqrt{2}+0{,}5\sqrt{6}i\right)^3}{\left(-1{,}5+0{,}5\sqrt{3}i\right)^2\cdot i}\cdot 3$; 2) $2\cdot\left(\dfrac{-\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}}{\cos\dfrac{13\pi}{12}-i\sin\dfrac{13\pi}{12}}\right)^3$;

3) $\dfrac{16i\left(\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)}{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4}-i$; 4) $\dfrac{4\sqrt{2}\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-i\right)\cdot(1-i)^2}$.

3.2. Пусть $z_1=3+4i$, $z_2=-4+3i$. Найдите действительные значения *a* и *b*, для которых $\dfrac{z_1}{z_2}=az_1+bz_2$.

3.3. Изобразите множество точек комплексной плоскости, координаты *x* и *y* которых удовлетворяют условию

$$x^2+i-2x+2yi=y-1+\frac{4y^2-1}{2y-1}i.$$

3.4. Найдите комплексное число *z*, удовлетворяющее уравнению

$$(i-z)\cdot(1+2i)+(1-iz)\cdot(3-4i)=1+7i.$$

3.5. Определите, при каких действительных значениях *x* и *y* комплексные числа $z_1=9y^2-4-10xi^5$ и $z_2=8y^2+20i^{11}$ являются сопряженными.

3.6. Решите уравнение:

1) $z^3 - \dfrac{2\sqrt{2}}{1-i} = 0;$ 2) $-z^5 + i = 2;$ 3) $z^2 + |z| = 0;$

4) $\left(z^2 + z + 1\right)\cdot\left(z^2 + z + 2\right) = 12.$

3.7. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|z - 2 + i| \ge |z + 4i|;$ 2) $\operatorname{Re}|1 + 8i| + |z| > 2;$

3) $\dfrac{|z+i|}{|z-i|} \ge 2;$ 4) $\begin{cases} -1 < |z + 2i| \le 2, \\ 0 < \arg\left(z + 1 - i\right) \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

3.8. Найдите z^6, если $3z - \overline{z} = -4 + 8i$.

3.9. Найдите α и β, если известно, что комплексное число $\alpha + \beta i$ является корнем уравнения $x^2 - 3x + 3 + i = 0$.

3.10. Комплексное число z удовлетворяет условию $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{3}$. Найдите z^{18}.

8. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

8.1. Векторы и простейшие действия над ними

Под ***вектором*** на плоскости понимают направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B, который обозначается $\overrightarrow{AA}$ (или $\overrightarrow{AA}$). ***Модулем***, или ***длиной***, $\left|\overline{AB}\right|$ такого вектора называется длина отрезка AB.

Если нет необходимости указывать начало и конец вектора, то его обозначают $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ или $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$

Различают векторы ***связанные*** (закрепленные) с фиксированным началом и ***свободные***. Под свободным вектором $\overline{a}$ понимают класс эквивалентных направленных отрезков, т. е. таких отрезков, которые совмещаются при параллельном переносе.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***коллинеарными*** (обозначение: $\overline{a} \parallel \overline{b}$), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Кроме того, если они имеют одинаковое направление, их называют ***сонаправленными*** (обозначение: $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$), а если противоположное – ***противоположно направленными*** (обозначение: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$).

Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются ***равными***, если они имеют одинаковые длины и являются сонаправленными. Записывается это с помощью обычного знака равенства: $\overline{AB} = \overline{CD}$. При этом запись $\overline{a} = \overline{AB}$ понимают также в смысле, что начало свободного вектора $\overline{a}$ приложено к точке A.

Вектор нулевой длины называется ***нулевым*** и обозначается $\overline{0}$. Направление такого вектора считается неопределенным. У нулевого вектора начальная и конечная точки совпадают.

Пусть заданы два ненулевых вектора $\overline{a}, \overline{b}$. Отложим их от некоторой точки O таким образом, чтобы $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$. Под углом $\varphi = (\overline{a}, \overline{b})$ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ понимают наи-

меньший положительный угол, на который надо повернуть один из векторов, чтобы его направление совпало с направлением второго вектора. Этот угол не зависит от выбора точки O и изменяется от 0 до π.

Для векторов определены следующие ***линейные операции***: умножение вектора на действительное число и сложение векторов $\overline{a}, \overline{b}$.

Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное число λ называется вектор $\lambda \cdot \overline{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\left|\lambda \cdot \overline{a}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overline{a}\right|$;

2) $\lambda \cdot \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$, åñëè $\lambda > 0$,

$\lambda \cdot \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$, åñëè $\lambda < 0$,

$\lambda \cdot \overline{a} = \overline{0}$, åñëè $\lambda = 0$ èëè $\overline{a} = \overline{0}$.

Для того чтобы сложить векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ геометрически, используют ***правило треугольника***: начало вектора $\overline{b}$ совмещается с концом вектора $\overline{a}$, их суммой является вектор $\overline{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец – с концом вектора $\overline{b}$ (рис. 8.1). Для обозначения этого действия используется обычный знак суммы: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

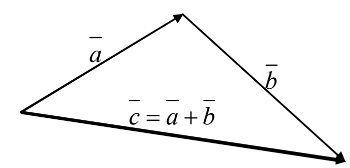


Рис. 8.1

Сложение двух векторов можно производить также по ***правилу параллелограмма***: векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приводятся к общему началу, некоторой точке O, и на них строится параллелограмм. Тогда суммой этих векторов является вектор $\overline{c}$, который совпадает с диагональю построенного параллелограмма, исходящей из точки O (рис. 8.2).

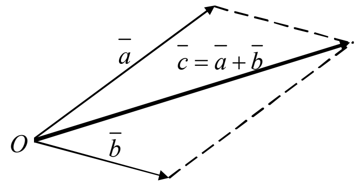


Рис. 8.2

Сумма трех и более векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, ..., $\overline{a_n}$ может быть найдена по ***правилу замыкания (ломаной)***. Это вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a_1}$, а конец – с концом вектора $\overline{a_n}$ (рис. 8.3).

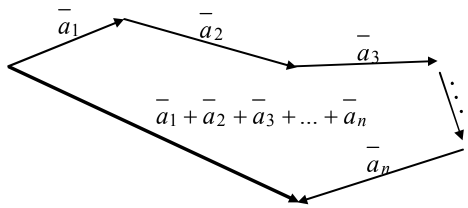


Рис. 8.3

Свойства линейных операций над векторами:

1) коммутативность сложения векторов, т. е.

$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

2) ассоциативность сложения векторов, т. е.

$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$;

3) дистрибутивность сложения векторов относительно умножения на действительное число λ, т. е.

$\lambda\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$;

дистрибутивность сложения действительных чисел относительно умножения на вектор, т. е.

$\left(\lambda+\mu\right)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$;

4) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$;

5) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$;

6) коммутативность и ассоциативность операции умножения вектора на число, т. е.

$\lambda\left(\mu\overline{a}\right)=\left(\lambda\mu\right)\overline{a}=\left(\mu\lambda\right)\overline{a}=\mu\left(\lambda\overline{a}\right)$.

Вектор $-\overline{a}=-1\cdot\overline{a}$ называется ***противоположным*** вектору $\overline{a}$.

Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор

$\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$.

Для того чтобы найти разность $\overline{a}-\overline{b}$, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приводятся к общему началу. Тогда разностью $\overline{a}-\overline{b}$ будет являться вектор $\overline{c}$, у которого начало совпадает с концом вектора $\overline{b}$, а конец – с концом вектора $\overline{a}$ (рис. 8.4).

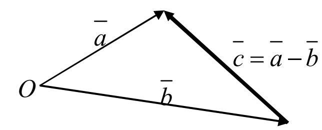


Рис. 8.4

Таким образом, геометрически векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ изображаются диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, которые приведены к общему началу (рис. 8.5): $\overline{d_1}=\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{d_2}=\overline{a}-\overline{b}$.

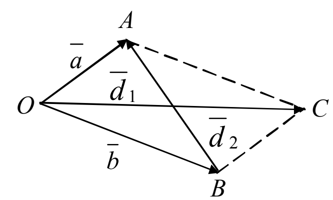


Рис. 8.5

Вектор $\overline{a_0}$ называется ***ортом*** (***единичным вектором***) вектора $\overline{a}$, если $\overline{a_0}\uparrow\uparrow\overline{a}$ и $\left|\overline{\grave{a}_0}\right|=1$. Для его нахождения может быть использована формула

$$\overline{a_0} = \frac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}.$$

Вектор $\overline{a}$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ ...,\ \overline{a_n}$, если существуют числа $c_1,\ c_2,\ ...,\ c_n$, такие, что

$$\overline{a} = c_1\overline{a_1} + c_2\overline{a_2} + ... + c_n\overline{a_n},\quad n \in \mathbf{N}.$$

Говорят, что точка С делит вектор $\overline{AB}$ в отношении λ ($\lambda > 0$), если $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$.

Кроме линейных операций, для векторов определено также ***скалярное умножение***.

Скалярным произведением $\left(\overline{a},\ \overline{b}\right)$ двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число

$$\left(\overline{a},\ \overline{b}\right) = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{a},\ \overline{b}}\right).$$

Скалярное произведение обозначается также $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

Если хотя бы один из векторов $\overline{a}$ или $\overline{b}$ нулевой, то $\left(\overline{a},\ \overline{b}\right) = 0$.

Скалярным квадратом вектора $\overline{a}$ называется величина

$$\overline{a}^2 = \left(\overline{a},\ \overline{a}\right).$$

Физический смысл скалярного произведения двух векторов состоит в том, что оно численно равно работе, осуществляемой силой $\overline{F}$ по перемещению материальной точки на вектор $\overline{s}$, т. е.

$$A = \left(\overline{F},\ \overline{s}\right).$$

Для вычисления ***угла между векторами*** $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно воспользоваться формулой

$$\cos\left(\widehat{\overline{a},\ \overline{b}}\right) = \frac{\left(\overline{a},\ \overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|}.$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\overline{b}, \overline{a}\right)$ – коммутативность;

2) $\left(\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}\right) = \left(\overline{a}, \overline{b}\right) + \left(\overline{a}, \overline{c}\right)$ – дистрибутивность;

3) $\left(\lambda\overline{a},\ \overline{b}\right) = \left(\overline{a},\ \lambda\overline{b}\right) = \lambda\left(\overline{a},\ \overline{b}\right)$;

4) $\left(\overline{a},\ \overline{b}\right) = 0,$ ãäå $\overline{a} \neq 0,\ \overline{b} \neq 0,$ тогда и только тогда, когда $\overline{a} \perp \overline{b}$;

5) $\left(\overline{a},\ \overline{b}\right) > 0$ тогда и только тогда, когда $0 \le \left(\widehat{\overline{a},\ \overline{b}}\right) < \dfrac{\pi}{2}$,

$\left(\overline{a},\ \overline{b}\right) < 0$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\pi}{2} < \left(\widehat{\overline{a},\ \overline{b}}\right) \le \pi$;

6) $$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \begin{cases} \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|, & \text{åñëè}\quad \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}, \\ -\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|, & \text{åñëè}\quad \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}; \end{cases}$$

7) $\left(\overline{a}\right)^2 = \left(\overline{a},\ \overline{a}\right) = \left|\overline{a}\right|^2$.

Пример 1. По заданным трем векторам $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$ (рис. 8.6) изобразить их линейную комбинацию $\overline{d} = 3\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b} + \overline{c}$.

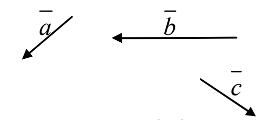


Рис. 8.6

Решение. Зафиксируем на плоскости произвольную точку O и отложим от нее вектор $3\overline{a}$ (рис. 8.7). Затем от конца вектора $3\overline{a}$ отложим вектор $-\frac{1}{2}\overline{b}$ и, наконец, вектор $\overline{c}$, исходящий из концевой точки вектора $-\frac{1}{2}\overline{b}$. Искомая линейная комбинация $\overline{d}$ изображается вектором, замыкающим полученную ломаную с началом в точке O.

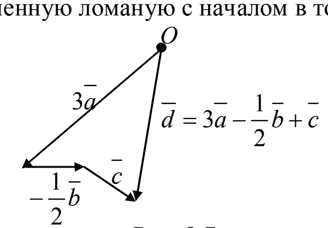


Рис. 8.7

Пример 2. Найти вектор, определяющий направление биссектрисы угла между ненулевыми векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Решение. *1-й способ.* Пусть для определенности $|\overline{a}| = \lambda|\overline{b}|$. Тогда $\lambda = \dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$. Рассмотрим векторы $\overline{a}$ и $\overline{b_1} = \lambda\overline{b}$ с общим началом в некоторой точке. По определению суммы векторов вектор $\overline{a} + \overline{b_1}$ совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b_1}$. Поскольку $|\overline{a}| = |\overline{b_1}|$, то вектор $\overline{a} + \overline{b_1}$ совпадает с диагональю ромба, а значит, с направлением биссектрисы угла между этими векторами и векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Используя введенные обозначения, заключаем, что искомое направление биссектрисы может быть задано вектором $\overline{a} + \dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\overline{b}$.

Аналогично можно показать, что вектором, задающим направление этой же биссектрисы, является также и $\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a} + \overline{b}$.

2-й способ. Отложим от фиксированной точки плоскости единичные векторы $\overline{a_0} = \dfrac{1}{|\overline{a}|}\overline{a}$, $\overline{b_0} = \dfrac{1}{|\overline{b}|}\overline{b}$ и построим на них ромб, диагональ которого $\overline{a_0} + \overline{b_0} = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|} + \dfrac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$ совпадает с направлением биссектрисы угла между векторами $\overline{a_0}$, $\overline{b_0}$, а значит, между $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Пример 3. В трапеции $ABCD$ отношение длины основания AD к длине основания BC равно λ. Полагая $\overline{AC} = \overline{a}$, $\overline{BD} = \overline{b}$, выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.

Решение. Проведем диагонали AC и BD (рис. 8.8). Пусть O – точка их пересечения.

Тогда из подобия треугольников AOD и COB и условия $\overline{AD} = \lambda \cdot \overline{BC}$ следует, что $\overline{AO} = \lambda \cdot \overline{OC}$, $\overline{OD} = \lambda \cdot \overline{BO}$. Имеем:

$$\overline{a} = \overline{AO} + \overline{OC} = \lambda \cdot \overline{OC} + \overline{OC} = (\lambda + 1) \cdot \overline{OC}, \text{ î òêóäà ï î ëó÷àåì } \overline{OC} = \frac{\overline{a}}{1+\lambda};$$

$$\overline{a} = \overline{AO} + \overline{OC} = \overline{AO} + \frac{1}{\lambda}\overline{AO} = \frac{\lambda+1}{\lambda}\overline{AO}, \text{ î òêóäà } \overline{AO} = \frac{\lambda\overline{a}}{1+\lambda}.$$

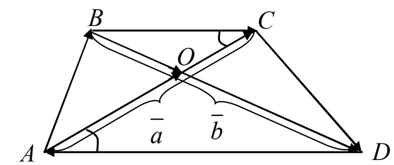


Рис. 8.8

Аналогично из равенств $\overline{b} = \overline{BO} + \overline{OD}$ и $\overline{OD} = \lambda \cdot \overline{BO}$ получаем: $\overline{b} = (1+\lambda)\overline{BO} = \dfrac{1+\lambda}{\lambda}\overline{OD}$, что ведет к соотношениям

$$\overline{BO} = \frac{\overline{b}}{1+\lambda}, \quad \overline{OD} = \frac{\lambda\overline{b}}{1+\lambda}, \text{ соответственно.}$$

Тогда, подставив найденные выражения вместо $\overline{AO}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$, получим:

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AO} - \overline{BO} = \frac{\lambda\overline{a}}{1+\lambda} - \frac{\overline{b}}{1+\lambda} = \frac{\lambda\overline{a} - \overline{b}}{1+\lambda};$$

$$\overline{BC} = \overline{BO} + \overline{OC} = \frac{\overline{b}}{1+\lambda} + \frac{\overline{a}}{1+\lambda} = \frac{\overline{a} + \overline{b}}{1+\lambda};$$

$$\overline{CD} = \overline{CO} + \overline{OD} = -\overline{OC} + \overline{OD} = -\frac{\overline{a}}{1+\lambda} + \frac{\lambda\overline{b}}{1+\lambda} = \frac{\lambda\overline{b} - \overline{a}}{1+\lambda};$$

$$\overline{DA} = -\overline{AD} = -(\overline{AO} + \overline{OD}) = -\left(\frac{\lambda\overline{a}}{1+\lambda} + \frac{\lambda\overline{b}}{1+\lambda}\right) = -\frac{\lambda(\overline{a} + \overline{b})}{1+\lambda}.$$

Пример 4. Найти угол, образованный единичными векторами $\overline{m}$ и $\overline{n}$, если $\overline{a} \perp \overline{b}$, причем $\overline{a} = \overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{b} = 5\overline{m} - 4\overline{n}$.

Решение. Найдем скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, используя его алгебраические свойства:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{m} + 2\overline{n},\ 5\overline{m} - 4\overline{n}) =$$
$$= (\overline{m}, 5\overline{m}) - (\overline{m}, 4\overline{n}) + (2\overline{n}, 5\overline{m}) + (2\overline{n}, -4\overline{n}) =$$
$$= 5(\overline{m}, \overline{m}) - 4(\overline{m}, \overline{n}) + 10(\overline{n}, \overline{m}) - 8(\overline{n}, \overline{n}) = 5|\overline{m}|^2 + 6(\overline{m}, \overline{n}) - 8|\overline{n}|^2.$$

Из условия $\overline{a} \perp \overline{b}$ следует $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$, т. е.

$$5\left|\overline{m}\right|^2+6(\overline{m},\ \overline{n})-8\left|\overline{n}\right|^2=0.$$

Учитывая, что $\left|\overline{m}\right|=\left|\overline{n}\right|=1,$ имеем:

$5\cdot 1^2+6(\overline{m},\overline{n})-8\cdot 1^2=0,$ òî ãäà $(\overline{m},\overline{n})=1/2.$

Следовательно,

$$\cos(\overline{m},\ \overline{n})=\frac{(\overline{m},\overline{n})}{\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|}=\frac{1/2}{1\cdot 1}=1/2.$$

Из последнего соотношения получаем:

$$(\overline{m},\ \overline{n})^{\wedge}=\pi/3.$$

Пример 5. Найти диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, угол между которыми равен 60°, причем $\left|\overline{a}\right|=1,\quad \left|\overline{b}\right|=2.$

Решение. По определению линейных операций над векторами, диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a},\ \ \overline{b},$ равны соответственно

$$\left|\overline{d_1}\right|=\left|\overline{a}+\overline{b}\right| \quad \text{è} \quad \left|\overline{d_2}\right|=\left|\overline{a}-\overline{b}\right|.$$

Так как $\left|\overline{a}\pm\overline{b}\right|=\sqrt{\left(\overline{a}\pm\overline{b}\right)^2},$ то имеем следующее:

$$\left|\overline{d_1}\right|=\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\sqrt{\overline{a}^2+2(\overline{a},\overline{b})+\overline{b}^2}=\sqrt{\left|\overline{a}\right|^2+2\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\overline{a},\overline{b})+\left|\overline{b}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{1^2+2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ+2^2}=\sqrt{1+2+4}=\sqrt{7};$$

$$\left|\overline{d_2}\right|=\left|\overline{a}-\overline{b}\right|=\sqrt{\overline{a}^2-2(\overline{a},\overline{b})+\overline{b}^2}=\sqrt{1^2-2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ+2^2}=\sqrt{3}.$$

Задания

I уровень

1.1. Определите, сколько различных векторов задают упорядоченные пары точек, составленные из вершин:

1) треугольника; 2) параллелограмма.

1.2. В плоскости треугольника ABC взята точка O. Отложите от нее вектор:

1) $\overline{OA}-\overline{OB}$; 2) $-\overline{OA}-\overline{OC}$; 3) $\overline{OA}+\overline{OB}-\overline{OC}$.

1.3. По заданным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ постройте их линейные комбинации:

1) $2\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{a}-2\overline{b}$; 3) $\frac{1}{3}\overline{a}+2\overline{b}$; 4) $\overline{b}-\overline{a}$.

1.4. Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

1) $\left|\overline{a}\right|=4,\ \left|\overline{b}\right|=5,\ (\overline{a},\overline{b})^{\wedge}=60^\circ$; 2) $\left|\overline{a}\right|=\left|\overline{b}\right|=1,\ \left(\overline{a},\overline{b}\right)^{\wedge}=135^\circ$;

3) $\left|\overline{a}\right|=5,\left|\overline{b}\right|=2,\ \overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$; 4) $\left|\overline{a}\right|=1,\ \left|\overline{b}\right|=3,\ \overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}.$

1.5. Зная, что $\left|\overline{a}\right|=3,\ \left|\overline{b}\right|=2,\ \left(\overline{a},\overline{b}\right)^{\wedge}=\frac{\pi}{3},$ вычислите:

1) $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$; 2) $\left(\overline{a}\right)^2$; 3) $\left(\overline{b}\right)^2$;

4) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^{2;}$; 5) $\left(\overline{a}-\overline{b}\right)^2$; 6) $\left(\overline{a}-2\overline{b},\ 3\overline{a}+\overline{b}\right).$

1.6. К точке O приложены две силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, для которых $\left|\overline{F_1}\right|=\left|\overline{F_2}\right|=9,$ а угол между направлениями этих сил равен 120°. Найдите величину равнодействующей этих сил.

1.7. В треугольнике ABC задается: $\overline{a}=\overline{AB},\ \overline{b}=\overline{BC},\ \overline{c}=\overline{CA}.$ Точки M, N, P являются серединами сторон BC, AC и AB соответственно. Выразите векторы $\overline{AM},\ \overline{BN},\ \overline{CP}$ через векторы $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}.$

II уровень

2.1. Определите, на какое число нужно умножить ненулевой вектор $\overline{a}$, чтобы получить вектор $\overline{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b},\ \left|\overline{b}\right|=1$; 2) $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b},\ \left|\overline{b}\right|=3$;

3) $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b},\ \left|\overline{b}\right|=d$, где $d\in\mathbf{R},\ d>0$; 4) $\overline{b}=\overline{0}.$

2.2. Определите, каким условиям должны удовлетворять ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы:

1) $\dfrac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|} = \dfrac{\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}$; 2) $\overline{a} - \overline{b} = \lambda\left(\overline{a} + \overline{b}\right)$.

2.3. Найдите $\left|\overline{a} + \overline{b}\right|$ и $\left|\overline{a} - \overline{b}\right|$, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, причем $\left|\overline{a}\right| = 4$, $\left|\overline{b}\right| = 3$.

2.4. Вычислите $\left|\overline{a} - \overline{b}\right|$, если $\left|\overline{a}\right| = 11$, $\left|\overline{b}\right| = 23$, $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 30$.

2.5. Вычислите $\left|\overline{a} - \overline{b}\right|$, если $\left|\overline{a}\right| = 2\sqrt{2}$, $\left|\overline{b}\right| = 4$, $\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right) = 135°$.

2.6. Найдите длину вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$, если $\left|\overline{a}\right| = 1$, $\left|\overline{b}\right| = 2$, $\left|\overline{c}\right| = 3$, $\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right) = \left(\widehat{\overline{b}, \overline{c}}\right) = 60°$ (все векторы лежат в одной плоскости).

2.7. Вычислите длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – единичные векторы, угол между которыми равен 60°.

2.8. Найдите $\cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{m}}\right)$, $\cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{n}}\right)$, если $\overline{a} = 2\overline{m} - \overline{n}$, где $\left|\overline{m}\right| = \left|\overline{n}\right| = 1$, $\left(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}\right) = 120°$.

2.9. Определите, какой угол образуют единичные векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$, если известно, что векторы $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} - \overline{n}$ взаимно перпендикулярны.

2.10. В параллелограмме $ABCD$ длины векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ равны соответственно 2, 3, 4. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

2.11. Найдите угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\left|\overline{a}\right| = 1$, $\left|\overline{b}\right| = 2$, $\left(\overline{a} - \overline{b}\right)^2 + \left(\overline{a} + 2\overline{b}\right)^2 = 20$.

III уровень

3.1. Точки K, L являются серединами сторон AD и AB параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overline{CK} = \overline{k}$, $\overline{CL} = \overline{l}$, выразите векторы $\overline{BA}$ и $\overline{DA}$ через векторы $\overline{k}$ и $\overline{l}$.

3.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Найдите разложение вектора $\overline{AD}$ по векторам $\overline{c} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AC}$.

3.3. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N являются серединами сторон AD и CD соответственно. Выразите вектор $\overline{BO}$ через $\overline{BM}$, если O – точка пересечения отрезков AN и BM.

3.4. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника ABC соответственно равны 6 и 8. Найдите косинус угла между векторами $\overline{AM}$ и $\overline{BN}$, если известно, что AM и BN – биссектрисы углов A и B заданного треугольника.

3.5. Площадь равнобедренного треугольника равна $2\sqrt{3}$, а угол при вершине A – 120°. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AK}$ и $\overline{BL}$, если известно, что K и L – середины соответственно сторон BC и AC треугольника ABC.

3.6. Вычислите $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) + \left(\overline{b}, \overline{c}\right) + \left(\overline{c}, \overline{a}\right)$, если $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 4$, $\left|\overline{c}\right| = 5$, $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$.

8.2. Операции над векторами в координатной форме

Прямоугольная декартова система координат Oxy на плоскости задается совокупностью точки O (начало системы координат) и пары перпендикулярных единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$. При этом ось Ox, направление которой совпадает с направлением вектора $\bar{i}$, называется ***осью абсцисс***. Ось Oy, совпадающая по направлению с вектором $\bar{j}$, – ***осью ординат***. Вся плоскость называется ***координатной плоскостью*** xOy. За масштабную единицу выбирают длину $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$.

Координатами точки M являются перпендикулярные проекции точки M на координатные оси Ox и Oy, взятые с соответствующим знаком. Таким образом, точке M на плоскости соответствует упорядоченная пара (x, y) действительных чисел x и y. Пишут: $M(x, y)$.

Каждой точке M на плоскости соответствует единственный ***радиус-вектор*** $\overline{OM}$, который имеет те же координаты, что и точка M. Пишут: $\overline{OM} = (x, y)$. Вектор $\overline{OM}$ может быть представлен также в виде линейной комбинации векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$:

$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$.

Если на плоскости заданы точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то

$\overline{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$,

длина

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (8.1)$$

Пусть $\bar{a} = (x, y)$, тогда его единичный вектор (орт) есть

$$\overline{a_0} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \qquad (8.2)$$

При этом координаты орта $\overline{a_0}$ задают направление вектора $\bar{a}$ и называются ***направляющими косинусами***. Если α и β – углы между вектором $\bar{a}$ и базисными векторами $\bar{i}$ и $\bar{j}$ соответственно, то

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (8.3)$$

Если $\bar{a} = (x_1, y_1) \neq \bar{0}$, $\bar{b} = (x_2, y_2) \neq \bar{0}$, то верны формулы:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2); \qquad (8.4)$$

$$\lambda\bar{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1), \quad \lambda \in \mathbf{R}; \qquad (8.5)$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2; \qquad (8.6)$$

$$\cos\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \qquad (8.7)$$

Для коллинеарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ $(\bar{a} \parallel \bar{b})$ справедливо:

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Координаты точки $C(x_c, y_c)$, делящей отрезок AB в отношении $\lambda > 0$, находят по формулам:

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (8.8)$$

Пример 1. Вектор $\bar{a}$ образует с вектором $\bar{i}$ угол $\alpha = 60°$, с вектором $\bar{j}$ угол $\beta = 30°$. Найти координаты вектора $\bar{a}$ на плоскости, если $|\bar{a}| = 2$.

Решение. Орт $\overline{a_0}$ вектора $\bar{a}$ на плоскости xOy имеет координаты $(\cos\alpha, \cos\beta)$. Используя формулы (8.2) и (8.3), получаем $\overline{a_0} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Так как $\bar{a} = |\bar{a}|\overline{a_0}$, то $\bar{a} = 2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1, \sqrt{3}\right)$.

Пример 2. Найти координаты векторов, определяемых диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j}$.

Решение. Известно, что сумма и разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяют диагонали параллелограмма, построенного на них. Следовательно, $\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{d}_2 = \bar{a} - \bar{b}$. Тогда

$\bar{d}_1 = (\bar{i} + \bar{j}) + (\bar{i} - 2\bar{j}) = (\bar{i} + \bar{i}) + (\bar{j} - 2\bar{j}) = 2\bar{i} - \bar{j}$

и, значит, $\overline{d}_1 = (2, -1)$.

Аналогично находим $\overline{d}_2$:

$$\overline{d}_2 = \overline{a} - \overline{b} = (\overline{i} + \overline{j}) - (\overline{i} - 2\overline{j}) = (\overline{i} - \overline{i}) + (\overline{j} + 2\overline{j}) = 3\overline{j} = (0, 3).$$

Пример 3. Координаты левого конца отрезка AB и его середины M соответственно равны $A(-1, -5)$ и $M(3, -2)$. Найти координаты точки B.

Решение. Пусть $B(x_B, y_B)$. Середина отрезка делит его длину в отношении 1:1, т. е. $\lambda = 1$. Значит, из формул (8.8) имеем:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Выразив x_B и y_B, получаем:

$$x_B = 2x_M - x_A = 2 \cdot 3 + 1 = 7,$$

$$y_B = 2y_M - y_A = 2 \cdot (-2) + 5 = 1.$$

Приходим к ответу: $B(7, 1)$.

Пример 4. Даны векторы $\overline{a} = (2, \ -1)$, $\overline{b} = (4, \ 1)$. Вычислить:

1) $(\overline{a}, \overline{b})$; 2) $(2\overline{a} - 3\overline{b}, \overline{b} - \overline{a})$; 3) $|3\overline{a} - \overline{b}|$; 4) $\cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right)$.

Решение. 1) Используя формулу (8.6), имеем:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 = 8 - 1 = 7.$$

2) Согласно формулам (8.4) и (8.5), получаем:

$$2\overline{a} - 3\overline{b} = 2(2, -1) - 3(4, 1) = (4, -2) - (12, 3) = (4 - 12, -2 - 3) = (-8, -5),$$

$$\overline{b} - \overline{a} = (4, 1) - (2, -1) = (4 - 2, 1 + 1) = (2, 2).$$

Тогда на основании формулы (8.10) вычисляем:

$$(2\overline{a} - 3\overline{b}, \overline{b} - \overline{a}) = -8 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 = -16 - 10 = -26.$$

Получить тот же результат можно и несколько по-другому. Используем свойства скалярного произведения, а затем формулы (8.1) и (8.6):

$$(2\overline{a} - 3\overline{b}, \overline{b} - \overline{a}) = 2(\overline{a}, \overline{b}) - 2(\overline{a})^2 - 3(\overline{b})^2 + 3(\overline{a}, \overline{b}) =$$

$$= 5(\overline{a}, \overline{b}) - 2|\overline{a}|^2 - 3|\overline{b}|^2 = 5 \cdot 7 - 2(2^2 + (-1)^2) - 3(4^2 + 1^2) =$$

$$= 35 - 10 - 51 = -26.$$

3) Найдем координаты вектора $3\overline{a} - \overline{b}$, используя формулы (8.4) и (8.5):

$$3\overline{a} - \overline{b} = 3(2, -1) - (4, 1) = (3 \cdot 2 - 4, 3 \cdot (-1) - 1) = (2, -4).$$

Следовательно, по формуле длины вектора (8.1) получаем:

$$|3\overline{a} - \overline{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

В качестве второго способа решения примера можно использовать следующий. Поскольку $|3\overline{a} - \overline{b}| = \sqrt{(3\overline{a} - \overline{b})^2}$, то

$$(3\overline{a} - \overline{b})^2 = 9(\overline{a})^2 - 6(\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{b})^2 = 9 \cdot (4 + 1) - 6 \cdot 7 + (16 + 1) =$$

$$= 45 - 42 + 17 = 20.$$

Находим:

$$|3\overline{a} - \overline{b}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

4) Используем формулу (8.7) и получаем:

$$\cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{85}} = \frac{7\sqrt{85}}{85}.$$

Пример 5. Даны векторы $\overline{a} = (1, 1)$, $\overline{b} = (1, -1)$. Найти косинус угла между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$, для которых $2\overline{x} + \overline{y} = \overline{a}$, $\overline{x} + 2\overline{y} = \overline{b}$.

Решение. Выразим $\overline{y}$ из первого заданного соотношения: $\overline{y} = \overline{a} - 2\overline{x}$. Тогда, подставив во второе соотношение, получим $\overline{x} + 2(\overline{a} - 2\overline{x}) = \overline{b}$, откуда

$$\overline{x} = -\frac{1}{3}(\overline{b} - 2\overline{a}) = -\frac{1}{3}(1 - 2 \cdot 1, \ -1 - 2 \cdot 1) = -\frac{1}{3}(-1, -3) = \left(\frac{1}{3}, 1\right),$$

$$\overline{y} = \overline{a} - 2\overline{x} = \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{3}, 1 - 2 \cdot 1\right) = \left(\frac{1}{3}, -1\right).$$

Следовательно, на основании формулы (8.7) получаем:

$$\cos(\widehat{\overline{x}, \overline{y}}) = \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{|\overline{x}| \cdot |\overline{y}|} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{-8}{9}}{\frac{10}{9}} = -\frac{4}{5}.$$

Пример 6. Пусть векторы $\overline{i}_1$, $\overline{j}_1$ получены из векторов $\overline{i}$, $\overline{j}$ поворотом относительно точки O на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (рис. 8.9). Представить произвольный вектор $\overline{a} \neq \overline{0}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{i}_1$, $\overline{j}_1$, если $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j}$.

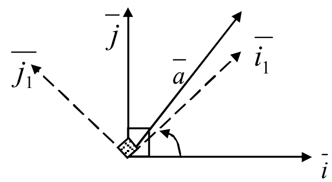


Рис. 8.9

Решение. Зафиксируем прямоугольную систему координат x_1Oy_1 с единичными векторами $\overline{i_1}$, $\overline{j_1}$. В этой системе координат определим направляющие косинусы векторов $\overline{i}$, $\overline{j}$:

$$\cos(\widehat{\overline{i}, \overline{i_1}}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos(\widehat{\overline{i}, \overline{j_1}}) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos(\widehat{\overline{j}, \overline{i_1}}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(\widehat{\overline{j}, \overline{j_1}}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Это значит, что $\overline{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{i_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{j_1}$, $\overline{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{i_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{j_1}$,

откуда $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} = x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{i_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{j_1}\right) + y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{i_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{j_1}\right) =$

$$= x\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{i_1} - x\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{j_1} + y\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{i_1} + y\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{j_1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\overline{i_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\overline{j_1}.$$

Задания

I уровень

1.1. Даны векторы $\overline{a} = (2,\ -5)$, $\overline{b} = (3,\ 2)$, $\overline{c} = (-1,\ 4)$. Найдите координаты вектора:

1) $2\overline{a} - \overline{b} - 2\overline{c}$; 2) $\frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b}) - 3\overline{c}$;

3) $\overline{a} - 2\overline{b} + \overline{c}$; 4) $\frac{1}{3}(\overline{a} - \overline{b} + 2\overline{c})$.

1.2. Даны векторы $\overline{a} = (1,\ \lambda)$, $\overline{b} = (\lambda,\ 9)$. Определите, при каком значении λ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.

1.3. Вектор $\overline{a}$ образует с ортом $\overline{i}$ угол α, с ортом $\overline{j}$ угол β. Вычислите координаты вектора $\overline{a}$ на плоскости, если:

1) $\alpha = 0°$, $\beta = 90°$, $|\overline{a}| = 2$; 2) $\alpha = 90°$, $\beta = 0°$, $|\overline{a}| = 3$;

3) $\alpha = 180°$, $\beta = 90°$, $|\overline{a}| = 1/2$; 4) $\alpha = 120°$, $\beta = 30°$, $|\overline{a}| = 4$;

5) $\alpha = 90°$, $\beta = 180°$, $|\overline{a}| = 2/3$; 6) $\alpha = 135°$, $\beta = 45°$, $|\overline{a}| = 2\sqrt{2}$;

7) $\alpha = 120°$, $\beta = 150°$, $|\overline{a}| = 1$; 8) $\alpha = 135°$, $\beta = 135°$, $|\overline{a}| = 2/\sqrt{2}$.

1.4. Заданы векторы $\overline{a_1} = (-1,\ 2)$, $\overline{a_2} = (3,\ 1)$, $\overline{a_3} = (1,\ 4)$. Вычислите:

1) $|\overline{a_1}|$, $|\overline{a_2}|$, $|\overline{a_3}|$; 2) орты векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$;

3) $\cos(\widehat{\overline{a_1}, \overline{i}}), \cos(\widehat{\overline{a_2}, \overline{j}})$; 4) координаты вектора $\overline{a} = \overline{a_1} - 2\overline{a_2} + \overline{a_3}$.

1.5. Вычислите скалярное произведение векторов, заданных своими координатами:

1) $\overline{a} = (1,\ 2)$, $\overline{b} = (2,\ 3)$; 2) $\overline{a} = (2{,}8;\ 3{,}1)$, $\overline{b} = (5;\ 10)$.

1.6. Найдите угол между векторами:

1) $\overline{a} = (3,\ 3)$, $\overline{b} = (3,\ 0)$; 2) $\overline{a} = (2, 4)$, $\overline{b} = (-4,\ -8)$.

1.7. Вычислите работу, производимую силой $\overline{F} = (2,\ 4)$, при перемещении ее точки приложения из начала в конец вектора $\overline{s} = (2,\ 3)$.

II уровень

2.1. Известно, что $A(2, -7)$, $B(4, 1)$. Найдите:

1) координаты вектора $\overline{AB}$; 2) $|\overline{AB}|$; 3) орт вектора $\overline{AB}$.

2.2. Даны векторы $\overline{a}=(2,\ 3)$, $\overline{b}=(3,\ 5)$, $\overline{c}=(-1,\ 3)$. Определите, при каком значении коэффициента k векторы коллинеарны:
1) $\overline{p}=\overline{a}+k\overline{b}$ и $\overline{q}=\overline{a}+2\overline{c}$; 2) $\overline{p}=\overline{a}+k\overline{b}$ и $\overline{c}$;
3) $\overline{p}=\overline{a}-k\overline{b}$ и $\overline{q}=\overline{a}+k\overline{c}$.

2.3. Известно, что вектор $\overline{c}=(2m,\ 17)$ является суммой векторов $\overline{a}=(-7,\ 2)$, $\overline{b}=(3,\ -5n)$. Найдите m и n.

2.4. Отрезок с концами в точках $A(3,\ –2)$ и $B(6,\ 4)$ разделен на три равные части. Найдите координаты точек деления.

2.5. Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:
1) $\overline{a}=(2\sin 75°,\ \cos 75°)$, $\overline{b}=(\sin 75°,\ 2\cos 75°)$;
2) $\overline{a}=(\cos 15°,\ \sin 15°)$, $\overline{b}=(2\sin 15°,\ 2\cos 15°)$.

2.6. Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если $A(2,\ 1)$, $B(–1,\ 3)$ и $C(4,\ –2)$.

III уровень

3.1. Сила $\overline{F}=9\overline{i}+5\overline{j}$ разложена по двум перпендикулярным направлениям, одно из которых задано вектором $\overline{a}=\overline{i}-2\overline{j}$. Найдите направляющую силы в направлении этого вектора.

3.2. Подберите ненулевые числа α, β, γ так, чтобы
$\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}-\gamma\overline{c}=\overline{0}$, где $\overline{a}=(5,\ 3)$, $\overline{b}=(2,\ 0)$, $\overline{c}=(4,\ 2)$.

3.3. Даны три вершины $A(3,\ –4)$, $B(–5,\ 3)$ и $C(1,\ 2)$ параллелограмма $ABCD$. Найдите его четвертую вершину D.

3.4. Даны вершины треугольника $A(3,\ –1)$, $B(4,\ 2)$ и $C(–4,\ 0)$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A.

3.5. Даны вершины $A(1,\ –1)$, $B(2,\ 1)$ и $C(–5,\ 2)$ треугольника ABC. Вычислите длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

3.6. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(3,\ –2)$, $B(3,\ 1)$ и $C(4,\ 0)$. Вычислите расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

3.7. В вершинах треугольника $A(1,\ –1)$, $B(0,\ 4)$ и $C(2,\ –1)$ сосредоточены массы соответственно 1, 2, 3. Найдите координаты центра масс этой системы.

З а м е ч а н и е. Для пары масс m_1 и m_2, сосредоточенных в точках A и B, центр находится в точке, делящей отрезок AB в отношении $\lambda=\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_2}{m_1}$, где l_1 и l_2 – расстояния от точек с соответствующими массами до их центра.

3.8. Даны векторы $\overline{a}=(8, 4)$, $\overline{b}=(2, -2)$. Найдите вектор $\overline{c}$, лежащий с векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в одной плоскости, перпендикулярный вектору $\overline{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\overline{b}$ тупой угол.

3.9. Представьте ненулевой вектор $\overline{a}=x\overline{i}+y\overline{j}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{j}$ и $-\overline{i}$.

8.3. Полярная система координат. Способы задания кривой на плоскости

Выделим на плоскости произвольную точку O – ***полюс*** – и проведем числовой луч OP – ***полярную ось***. Расстояние от полюса до произвольной точки M обозначим ρ, а величину угла, на который нужно повернуть OP, чтобы совместить с OM, обозначим через φ. Будем считать φ положительным, если поворот совершается против часовой стрелки, и отрицательным – в противном случае.

Величины ρ и φ называются ***полярными координатами*** точки M: ρ – ***полярный радиус***, φ – ***полярный угол***. Принято считать, что $0\le\varphi<2\pi$ или $-\pi<\varphi\le\pi$, а полюс имеет нулевые полярные координаты.

Если заданы одновременно прямоугольная система координат xOy и полярная с полярной осью Ox, то можно установить связь между прямоугольными (x, y) и полярными (ρ, φ) координатами точки M на плоскости с помощью следующих формул:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \tag{8.9}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \tag{8.10}$$

Можно рассматривать уравнения кривых в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$ или $\Phi(\rho, \varphi) = 0$.

Пример 1. Найти полярные координаты точек $A(\sqrt{3}, 1)$, $B\left(-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $C\left(-2\sin\dfrac{\pi}{9}, 2\cos\dfrac{\pi}{9}\right)$.

Решение. Точка $A(\sqrt{3}, 1)$ лежит в I четверти прямоугольной системы координат. Значит, полярный угол φ удовлетворяет условию $0 < \varphi < \pi/2$, причем согласно первой формуле системы (8.10):

$$\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2.$$

Следовательно, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{1}{2}$, что приводит к $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Итак, $A\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Точка $B\left(-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ является внутренней точкой III четверти прямоугольной системы координат, следовательно, $\pi < \varphi < \dfrac{3\pi}{2}$ (или $-\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}$). Найдем полярный радиус (используем формулы (8.10)):

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Тогда $\cos\varphi = -\dfrac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = -\dfrac{1}{2}$. Значит, $\varphi = \dfrac{7\pi}{6}$ или $\varphi = -\dfrac{5\pi}{6}$. Таким образом, точку B в полярной системе координат можно задать как $B\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{7\pi}{6}\right)$ или $B\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Рассмотрим точку C. Учитывая, что $0 < \dfrac{\pi}{9} < \dfrac{\pi}{2}$, а значит, $\sin\dfrac{\pi}{9} > 0$, $\cos\dfrac{\pi}{9} > 0$, определяем, что точка C лежит во II четверти прямоугольной системы координат. Ее полярный радиус, согласно формулам (8.10), есть

$$\rho = \sqrt{(-2\sin\frac{\pi}{9})^2 + (2\cos\frac{\pi}{9})^2} = \sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{9} + 4\cos^2\frac{\pi}{9}} =$$

$$= \sqrt{4\left(\sin^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{\pi}{9}\right)} = \sqrt{4} = 2.$$

Для нахождения полярного угла φ поступим следующим образом. Найдем $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\cos\frac{\pi}{9}}{-2\sin\frac{\pi}{9}} = -\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{9}$, затем, воспользовавшись тем, что наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg}x$ равен π, а угол φ удовлетворяет соотношению $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, получим:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}\right) + \pi = -\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right)\right) + \pi =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) + \pi = -\frac{9\pi - 2\pi}{18} + \pi = -\frac{7\pi}{18} + \pi = \frac{11\pi}{18}.$$

Значит, $C\left(2, \dfrac{11\pi}{18}\right)$.

З а м е ч а н и е. При использовании формулы $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ при нахождении полярного угла целесообразно изображать эти точки на чертеже (рис. 8.10).

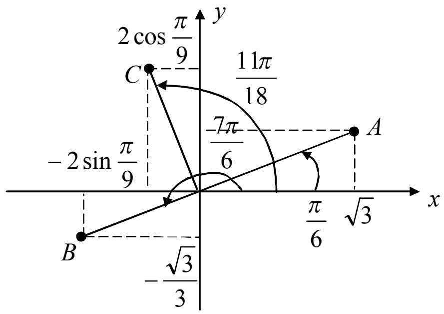


Рис. 8.10

Пример 2. Зная полярные координаты точек $A\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$, Â$\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(3,\ \dfrac{7\pi}{6}\right)$, найти их прямоугольные координаты.

Решение. Используя формулы (8.9), находим прямоугольные координаты заданных точек:

$$x_A = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1, \quad y_A = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Следовательно, $A(1, \sqrt{3})$.

$$x_B = \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -1,$$

$$y_B = \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1.$$

Следовательно, $B(-1, 1)$.

$$x_C = 3\cos\frac{7\pi}{6} = 3\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) = -3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$y_C = 3\sin\frac{7\pi}{6} = -3\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2}.$$

Следовательно, Ñ$\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$.

Пример 3. Зная полярные координаты точки $\rho = 10,\ \varphi = \dfrac{\pi}{6}$, найти ее прямоугольные координаты, если полюс находится в точке $A(2, 3)$, а полярная ось параллельна оси Ox.

Решение. Рассмотрим прямоугольную систему координат xOy, удовлетворяющую условию задачи (рис. 8.11). Тогда точка $M\left(10,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ в этой системе координат определена как $M(x_M, y_M)$.

Очевидно, что

$$x_M = \rho\cos\varphi + 2 = 10\cdot\cos\frac{\pi}{6} + 2 = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = 5\sqrt{3} + 2,$$

$$y_M = \rho\sin\varphi + 3 = 10\sin\frac{\pi}{6} + 3 = 10\cdot\frac{1}{2} + 3 = 8.$$

Таким образом, в заданной прямоугольной системе координат точка M определена как $M(5\sqrt{3} + 2,\ 8)$.

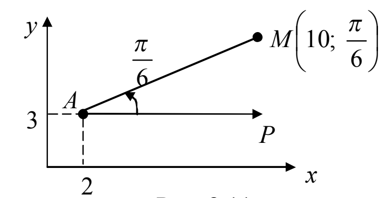


Рис. 8.11

Пример 4. Составить параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = 1$, приняв за параметр угол между осью Ox и радиус-вектором $\overline{OM}$, где O – центр окружности, M – ее точка.

Решение. Пусть точка M имеет прямоугольные координаты $(x,\ y)$, $t = (Ox, \widehat{\overline{OM}})$. Тогда, по определению тригонометрических функций, $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ где $t \in [0,\ 2\pi)$. Таким образом, получили параметрические уравнения окружности.

Пример 5. Найти уравнение фигуры на плоскости в прямоугольных координатах, если она имеет следующее уравнение в полярной системе координат:

1) $\rho = 4$; 2) $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$; 3) $\rho = 2\cos\varphi$.

Решение. Для решения примеров будем использовать формулы (8.10).

1) Поскольку $\rho = 4$, òî $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$. Возводим в квадрат и получаем $x^2 + y^2 = 16$ – уравнение окружности с центром в точке (0, 0) и радиусом $r = 4$.

2) Уравнение $\varphi = \frac{\pi}{6}$ означает, что $\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, причем точка с координатами $(x,\ y)$ лежит в I четверти. Значит, $\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ или $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, ãäå $x > 0$. Получим уравнение луча с началом в точке (0, 0).

3) Заданное уравнение $\rho = 2\cos\varphi$ запишем в виде $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Получили $x^2 + y^2 = 2x$. Выделяем полный квадрат и приходим к уравнению $(x-1)^2 + y^2 = 1$, которое есть уравнение окружности с центром в точке (1, 0) и радиусом $r = 1$.

Задания

I уровень

1.1. Найдите полярные координаты точек $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(-3,\ 0)$, $D(0,\ -1)$, $E(1,\ 1)$, $F(-2,\ 2)$, $G\left(-1, \sqrt{3}\right)$, $H\left(1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $K(-2\sqrt{3},\ -2)$.

1.2. Зная полярные координаты точек $A\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $B(3, \pi)$, $C\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$, $D\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$, найдите их прямоугольные координаты.

1.3. Уравнение линии на плоскости задано в полярных координатах. Найдите ее уравнение в полярных координатах (полюс совпадает с началом прямоугольной системы координат, полярная ось – с осью абсцисс):

1) $\rho = 2$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; 3) $\rho = 2\sin\varphi$.

Сделайте чертеж.

1.4. Перейдите к уравнению линии в полярных координатах, если известно уравнение в прямоугольных координатах:

1) $x^2 + y^2 = 16$; 2) $y = -x\sqrt{3},\ x > 0$; 3) $2\left(x^2 + y^2\right) = x - y$.

II уровень

2.1. Найдите полярные и прямоугольные координаты точек, симметричных относительно полярной оси заданным:

$A\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$, $D(1, 2)$, $E(1, 0)$, $F(5, -1)$.

2.2. Даны полярные координаты точек $A\left(8,\ -\frac{2\pi}{3}\right)$ и $B\left(6,\ \frac{\pi}{3}\right)$. Вычислите полярные координаты середины отрезка AB.

2.3. Определите, какую кривую на плоскости образуют точки, для которых расстояние от точки $A(4,\ 0)$ вдвое больше расстояния от точки $B(1,\ 0)$.

2.4. Найдите полярные уравнения фигур, если известны их уравнения в прямоугольной системе координат xOy:

1) $3x - 2y = 8$;

2) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$;

3) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = 0$.

2.5. Найдите уравнение линии в полярной системе координат, если известны параметрические уравнения (исключить параметр):

1) $\begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = 3t - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2. \end{cases}$

III уровень

3.1. Зная полярные координаты точек $A\left(5,\ \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(8,\ -\frac{\pi}{12}\right)$, найдите длину отрезка AB.

3.2. Найдите уравнение кривой, состоящей из тех точек плоскости, разность расстояний от которых до точек $F_1(-2, -2)$ и $F_2(2, 2)$ равна 4.

3.3. Составьте параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$, приняв за параметр угол между осью Ox и прямой, проходящей через центр окружности.

3.4. Опишите с помощью уравнения в полярных координатах множество точек, лежащих на прямой, перпендикулярной полярной оси и проходящей через точку $A(5, 0)$.

3.5. Уравнения кривых заданы в полярных координатах. Найдите их уравнения в соответствующих прямоугольных координатах:

1) $\rho^2 = \sin\varphi$; 2) $\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$;
3) $\rho^2\cos\varphi\ \sin\varphi = 1$; 4) $\rho^2 - 2\rho\cos\varphi - 3 = 0$.

9. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

9.1. Прямая на плоскости

Рассмотрим различные случаи задания прямой L на плоскости.

1. Если задан ненулевой ***направляющий вектор*** $\bar{a}=(l,m)\parallel L$ и радиус-вектор $\bar{r}_0=(x_0,y_0)$ некоторой фиксированной точки $M_0(x_0,y_0)\in L$, то в этом случае радиус-вектор $\bar{r}=(x,y)$ произвольной точки $M(x,y)\in L$ задается формулой

$$\bar{r}=\bar{r}_0+t\bar{a}, \qquad (9.1)$$

где $t\in\mathbf{R}$.

Уравнение (9.1) называется ***векторно-параметрическим уравнением прямой*** L.

2. Если (x_0,y_0) – координаты точки M_0, которая лежит на прямой L, (l,m) – координаты направляющего вектора $\bar{a}$, то прямая задается ***параметрическими уравнениями:***

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \quad t\in\mathbf{R}, \quad l^2+m^2\neq 0. \end{cases}$$

3. Если $\bar{a}=(l,m)$ – направляющий вектор, такой, что $l^2+m^2\neq 0$, и $M_0(x_0,y_0)$ – точка, через которую проходит прямая, то имеем ***каноническое уравнение***:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m},\ l^2+m^2\neq 0. \qquad (9.2)$$

4. Если прямая L не параллельна оси Ox, то для всех направляющих векторов отношение $\frac{m}{l}=k=\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha=(L,\hat{O}x)$. По заданному угловому коэффициенту k прямой L и точке $M_0(x_0,y_0)\in L$ уравнение прямой L может быть задано в следующем виде:

$y-y_0=k(x-x_0)$ – это ***уравнение прямой с угловым коэффициентом*** k, ***проходящей через точку*** M_0.

В случае, если $M_0(0,b)$ – точка пересечения прямой L с

осью Oy, это уравнение может быть записано в следующем виде:

$y=kx+b.$

5. Координаты направляющего вектора $\bar{a}$ прямой L могут быть найдены, если известны две точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$ этой прямой: $\bar{a}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$. ***Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:***

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}. \qquad (9.3)$$

6. Если известны точки пересечения прямой L с координатными осями, т. е. точки $M_0(a, 0)$ и $M_1(0, b)$, то справедливо ***уравнение «в отрезках»***:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

7. Положение прямой на плоскости однозначно определено и в случае, когда задан ненулевой ***нормальный вектор*** $\bar{n}=(A,B)\perp L$ этой прямой и точка $M_0(x_0,y_0)\in L$. Условие перпендикулярности векторов $\overline{M_0M}\perp\bar{n}$ позволяет перейти к векторному уравнению

$$((\bar{r}-\bar{r}_0),\bar{n})=0$$

и затем к его координатной форме:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ или

$$Ax+By+C=0, \qquad (9.4)$$

где $C=-Ax_0-By_0$, $A^2+B^2\neq 0$.

Уравнение (9.4) называется ***общим уравнением*** прямой L.

8. Если в качестве нормального вектора берется единичный вектор $\overline{n_0}$, направленный из начала координат в сторону прямой, т. е.

$$\bar{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta),\quad \text{ãäå}\quad \alpha=(\bar{n}_0,\hat{O}x),\quad \beta=(\bar{n}_0,\hat{O}y),$$

то справедливо ***нормальное уравнение*** прямой L на плоскости:

$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0,$

где $p>0$ – расстояние от начала координат до прямой.

Величина $\delta(M_0, L) = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta - p$, где $M_0(x_0,y_0)\notin L$, называется отклонением точки M_0 от прямой L. При этом $\delta < 0$, если точки M_0 и $O(0, 0)$ лежат по одну сторону от прямой L, $\delta > 0$ – если по разные. Расстояние $d(M_0, L)$ от точки до прямой равно абсолютному значению отклонения.

От общего уравнения прямой к нормальному можно перейти с помощью умножения на ***нормирующий множитель***:

$$\mu = -\frac{\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ где } \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{åñëè } x > 0, \\ 0, & \text{åñëè } x = 0, \\ -1, & \text{åñëè } x < 0. \end{cases}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой L: $Ax + By + C = 0$ может быть найдено по формуле

$$d(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{9.5}$$

Угол между прямыми легко найти с помощью косинуса угла между их направляющими или нормальными векторами, а также по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|k_1 - k_2|}{|1 + k_1 k_2|},$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых.

При этом возможны частные случаи:

$$1)\quad L_1 \parallel L_2; \quad \left[\begin{array}{l} \bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2, \\ \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2, \\ k_1 = k_2; \end{array}\right. \qquad 2)\quad L_1 \perp L_2; \quad \left[\begin{array}{l} \bar{a}_1 \perp \bar{a}_2, \\ \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2, \\ k_1 k_2 = -1. \end{array}\right.$$

Здесь L_1 и L_2 – прямые на плоскости, для которых $\bar{a}_1 \parallel L_1$, $\bar{a}_2 \parallel L_2$, $\bar{n}_1 \perp L_1$, $\bar{n}_2 \perp L_2$, k_1, k_2 – угловые коэффициенты соответственно прямых L_1 и L_2.

В полярной системе координат уравнение прямой имеет вид

$\rho\cos(\varphi - \varphi_0) = p$,

где p – длина перпендикуляра, проведенного из полюса к прямой, φ_0 – угол между полярной осью и перпендикуляром.

Пример 1. Даны вершины треугольника ABC: $A(1, 2)$, $B(-1, -3)$, $C(2, -1)$. Найти:

1) уравнение прямой BC;

2) уравнение высоты AH и ее длину;

3) уравнение медианы BM;

4) угол между прямыми BM и AH;

5) уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине A.

Решение. 1) Для составления уравнения прямой BC воспользуемся заданными координатами точек B, C и уравнением прямой (9.3), проходящей через две заданные точки. Так как $B(-1, -3)$, $C(2, -1)$, имеем:

$$\frac{x - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{y - (-3)}{-1 - (-3)} \quad \text{или} \quad \frac{x + 1}{3} = \frac{y + 3}{2}.$$

Последнее уравнение приведем к общему уравнению, использовав основное свойство пропорции:

$2(x + 1) = 3(y + 3)$ или $2x - 3y - 7 = 0$.

Таким образом, окончательно получаем:

BC: $2x - 3y - 7 = 0$.

2) Для построения уравнения высоты AH воспользуемся условием перпендикулярности прямых AH и BC: нормальным вектором прямой BC является $\bar{n} = (2; -3)$, т. е. $\bar{n} \perp BC$. Этот вектор можно рассматривать как направляющий вектор прямой AH. Следовательно, каноническое уравнение прямой AH согласно формуле (9.2) имеет вид:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-3}, \tag{9.6}$$

где $A(1, 2) \in AH$.

В общем виде получим AH: $3x + 2y - 7 = 0$.

Чтобы найти длину высоты $\Delta\, ABC$, опущенной из вершины A, воспользуемся формулой расстояния (9.5):

$$|\text{ÀÍ}| = d(A, BC) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

3) Для составления уравнения медианы BM найдем координаты точки M, являющейся серединой отрезка AC:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Получим $M(3/2, 1/2)$. Запишем уравнение прямой BM по двум известным точкам $B(-1, -3)$ и $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, используя формулу (9.3):

$$\frac{x - (-1)}{\frac{3}{2} - (-1)} = \frac{y - (-3)}{\frac{1}{2} - (-3)}; \quad \frac{x + 1}{\frac{5}{2}} = \frac{y + 3}{\frac{7}{2}}.$$

Приведя его к общему уравнению, получим:

$$\frac{7}{2}(x + 1) = \frac{5}{2}(y + 3);$$

$7(x+1)-5(y+3)=0;$

BM: $7x - 5y - 8 = 0$.

4) Угол φ между прямыми BM и AH найдем, используя угол между их нормальными векторами:

$\bar{n}_{BM} = (7,\ -5),\quad \bar{n}_{AH}(3,\ 2):$

$$\cos\varphi = |\cos(\bar{n}_{BM},\ \hat{\ }\ \bar{n}_{AH})| = \frac{|(\bar{n}_{BM}, \bar{n}_{AH})|}{|\bar{n}_{BM}|\cdot|\bar{n}_{AH}|} = \frac{|7\cdot 3+(-5)\cdot 2|}{\sqrt{7^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}} =$$

$$= \frac{|21-10|}{\sqrt{49+25}\cdot\sqrt{9+4}} = \frac{11}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{962}}.$$

Получаем $\varphi \approx 69°$.

5) Пусть точка $M(x,\ y)$ лежит на биссектрисе угла BAC. Тогда по свойству биссектрисы $d(M,\ AB) = d(M,\ AC)$. Запишем уравнения прямых AB и AC. Имеем:

$$AB: \frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-2}{-3-2},\ \text{т. е.}\ \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-5}\ \text{ или } 5(x-1) = 2(y-2).$$

Следовательно,

$AB: 5x-2y-1=0.$

Аналогично

$$AC: \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{-1-2},\ \text{т. е. } 3x+y-5=0.$$

Используем формулу расстояния (9.5):

$$d(M,AB) = \frac{|5x-2y-1|}{\sqrt{25+4}},\quad d(M,AC) = \frac{|3x+y-5|}{\sqrt{9+1}}.$$

Следовательно,

$$\frac{|5x-2y-1|}{\sqrt{29}} = \frac{|3x+y-5|}{\sqrt{10}}.$$

По основному свойству пропорции и свойству модуля имеем:

$\sqrt{10}(5x-2y-1) = \pm\sqrt{29}(3x+y-5).$

Итак, получили две биссектрисы (внутреннего и внешнего углов при вершине A):

$AL_1:\ (5\sqrt{10}-3\sqrt{29})x-(2\sqrt{10}+\sqrt{29})y-\sqrt{10}+5=0,$

$AL_2:\ (5\sqrt{10}+3\sqrt{29})x-(2\sqrt{10}-\sqrt{29})y-\sqrt{10}-5=0.$

Пример 2. Даны две точки $A(-3,\ 8)$ и $B(2,\ 2)$. На оси Ox найти такую точку M, сумма расстояний от которой до двух заданных точек была бы наименьшей.

Решение. Воспользуемся утверждением, смысл которого состоит

в следующем: наименьший путь между двумя точками достигается в случае движения по прямой. Тогда задача будет заключаться в поиске точки пересечения прямой AB' (рис. 9.1) с осью Ox, где B' – точка, симметричная точке B относительно оси Ox (или в нахождении точки пересечения прямой $A'B$ с осью Ox, где A' – точка, симметричная точке A относительно оси Ox).

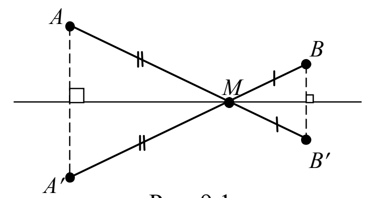


Рис. 9.1

Точки $B'(2,\ -2)$ и $A(-3,\ 8)$ определяют прямую AB':

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y+2}{8+2},\ \text{т. е. } 10(x-2) = -5(y+2)\ \text{ или } 2x+y-2=0.$$

Значит, для нахождения координат искомой точки M осталось решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x+y-2=0, \\ y=0. \end{cases}$

Решаем ее:

$\begin{cases} 2x=2, \\ y=0, \end{cases}\quad \begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$

Итак, точка $M(1,\ 0)$ является искомой.

Задания

I уровень

1.1. Составьте общее, каноническое и параметрические уравнения прямой, проходящей:

1) через точку $M_0(1,\ 2)$ перпендикулярно вектору $\bar{a} = (3,-1)$;

2) через точку $M_0(-2,\ 3)$ параллельно вектору $\bar{b} = (5,-2)$;

3) через две точки $M_1(-1,\ 3)$ и $M_2(2,\ -3)$.

1.2. Составьте уравнение «в отрезках» прямой $2x + 3y - 6 = 0$.

1.3. Определите угловой коэффициент прямой $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{4}$ и постройте ее в прямоугольной системе координат Oxy.

1.4. Прямая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = 3 + t. \end{cases}$$

Найдите:
1) направляющий вектор прямой;
2) координаты точек, для которых $t_1 = 3$, $t_2 = -1$, $t_3 = 0$;
3) значения параметра t для точек пересечения прямой с осями координат;
4) среди точек $A(-3, 4)$, $B(1, 1)$, $C(9, 1)$ – принадлежащие данной прямой.

1.5. Определите, какие из следующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются:
1) $2x + 3y - 8 = 0$ и $4x + 6y - 10 = 0$;
2) $2x + 3y - 8 = 0$ и $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-1}{2}$;
3) $2x + 3y - 8 = 0$ и $\dfrac{x}{4} + \dfrac{3y}{8} = 1$.

II уровень

2.1. Напишите параметрические уравнения прямой:
1) $y = 2\boldsymbol{x} - 3$; 2) $5x - y = 0$;
3) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$; 4) $2x - 3 = 0$.

2.2. Напишите общее уравнение прямой:
1) $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - 3t; \end{cases}$ 2) $\dfrac{x}{1/2} = \dfrac{y}{-3} = 1$; 3) $y = \dfrac{1}{3}x - 1$.

2.3. Найдите угловой коэффициент прямой:
1) $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - t; \end{cases}$ 2) $3x + 4y + 5 = 0$; 3) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-5}$.

2.4. Дан треугольник ABC: $A(1, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(4, 7)$. Напишите уравнения сторон и медианы этого треугольника, проведенной из вершины A.

2.5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 5)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной длины.

2.6. Даны середины $M_1(1, 2)$, $M_2(3, 4)$, $M_3(5, -1)$ сторон треугольника. Составьте уравнения сторон этого треугольника.

2.7. Пусть точки $A(1, 5)$, $B(-4, 3)$, $C(2, 9)$ являются вершинами треугольника ABC. Составьте уравнение высоты, проведенной из вершины A к стороне BC.

2.8. Даны уравнения сторон параллелограмма: $x + y - 2 = 0$, $2x - y + 4 = 0$ и точка $M(3, 1)$ пересечения его диагоналей. Составьте уравнения двух других сторон параллелограмма.

2.9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 5y + 2 = 0$, $5x - 2y + 4 = 0$ и
1) начало координат;
2) параллельную оси Oy;
3) параллельную прямой $2x - y + 4 = 0$;
4) перпендикулярную прямой $x + 3y + 2 = 0$.

2.10. Найдите расстояние от точки $M(2, -1)$ до прямой, проходящей через точки $A(-1, 3)$ и $B(3, 4)$.

2.11. Даны вершины треугольника $A(2, 5)$, $B(1, 3)$, $C(7, 0)$. Вычислите длины его высот.

2.12. Найдите вершины и величины углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 3y = 0$, $x = 3$, $x - 2y + 3 = 0$.

III уровень

3.1. Даны две вершины $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ треугольника ABC и точка $H(1, 2)$ пересечения его высот. Найдите координаты третьей вершины C.

3.2. Найдите координаты центра окружности, описанной около треугольника, вершинами которого являются точки $A(1, 2)$, $B(3, -2)$, $C(5, 6)$.

3.3. Даны вершины $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 0)$ треугольника. Составьте уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A.

3.4. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $P(-3, -5)$, отрезок которой между прямыми $2x + 3y - 15 = 0$ и $4x - 5y - 12 = 0$ в точке P делится пополам.

3.5. Составьте уравнение биссектрисы угла между прямыми $x + 2y - 11 = 0$ и $3x - 6y - 5 = 0$, которому принадлежит точка $A(1, -3)$.

3.6. В полярной системе координат составьте уравнение прямой, проходящей:
1) через полюс и образующей с полярной осью угол $\pi/5$;
2) через точку $A(5, \pi/4)$ перпендикулярно полярной оси.

9.2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{9.7}$$

где

$$a > b > 0. \tag{9.8}$$

Уравнение (9.7) называется ***каноническим уравнением эллипса***.

Параметры эллипса

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называются ***фокусами эллипса***, при этом величина $2c$ определяет ***междуфокусное расстояние***.

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ называются ***вершинами эллипса*** (рис. 9.2), при этом $A_1A_2 = 2a$ образует большую ось эллипса, а B_1B_2 – малую, $O(0; 0)$ – центр эллипса.

Основные параметры эллипса, характеризующие его форму:
$\varepsilon = c/a$ – ***эксцентриситет эллипса***;
$r_1 = |\overline{F_1M}|$, $r_2 = |\overline{F_2M}|$ – ***фокальные радиусы эллипса*** (точка M принадлежит эллипсу), причем $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$;

$D_1 : x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$, $D_2 : x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ – ***директрисы эллипса***.

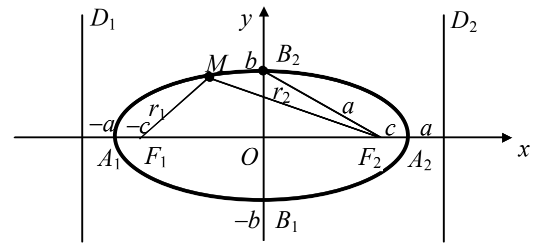


Рис. 9.2

Для эллипса справедливо: $0 \le \varepsilon < 1$, $r_1 + r_2 = 2a$, директрисы не пересекают границу и внутреннюю область эллипса, а также обладают свойством $\dfrac{r_1}{d(M, D_1)} = \dfrac{r_2}{d(M, D_2)} = \varepsilon$.

Эксцентриситет эллипса выражает его меру «сжатости».

Если $b > a > 0$, то эллипс задается уравнением (9.7), для которого вместо условия (9.8) выполняется условие

$$b > a > 0. \tag{9.9}$$

Тогда $2a$ – малая ось, $2b$ – большая ось, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ – фокусы (рис. 9.3). При этом $r_1 + r_2 = 2b$, $\varepsilon = c/b$, директрисы определяются уравнениями:

$D_1 : y = -\dfrac{b}{\varepsilon}$, $D_2 : y = \dfrac{b}{\varepsilon}$.

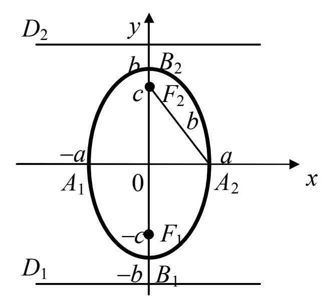


Рис. 9.3

При условии $a = b \neq 0$ имеем (в виде частного случая эллипса) окружность радиуса $R = a$. При этом $c = 0$, а значит, $\varepsilon = 0$.

Точки эллипса обладают ***характеристическим свойством***: сумма расстояний от каждой из них до фокусов есть величина постоянная, равная $2a$ (рис. 9.2).

Для ***параметрического задания эллипса*** (формула (9.7)) в случаях выполнения условий (9.8) и (9.9) в качестве параметра t может быть взята величина угла между радиус-вектором точки, лежащей на эллипсе, и положительным направлением оси Ox:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

где $t \in [0,\ 2\pi)$.

Если центр эллипса с полуосями a, b $(a,\ b \neq 0)$ находится в точке $C(x_0,\ y_0)$, то его уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (9.10)$$

Пример 1. Привести уравнение эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$ к каноническому виду и определить его параметры. Изобразить эллипс.

Решение. Разделим уравнение $x^2 + 4y^2 = 16$ на 16, после чего получим:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

По виду полученного уравнения заключаем, что это каноническое уравнение эллипса (формула (9.7)), где $a = 4$ – большая полуось, $b = 2$ – малая полуось. Значит, вершинами эллипса являются точки $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$, $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$. Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ – половина междуфокусного расстояния, то точки $F_1(-2\sqrt{3},\ 0)$, $F_2(2\sqrt{3},\ 0)$ являются фокусами эллипса. Вычислим эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Директрисы D_1, D_2 описываются уравнениями:

$$D_1:\ x = -\frac{8}{\sqrt{3}}, \quad D_2:\ x = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Изображаем эллипс (рис. 9.4).

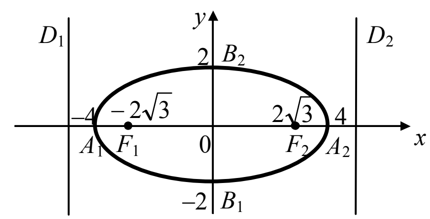


Рис. 9.4

Пример 2. Определить параметры эллипса

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1.$$

Решение. Сравним данное уравнение с каноническим уравнением эллипса $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ со смещенным центром. Находим центр эллипса C: $x_0 = 1$, $y_0 = -2$. Большая полуось $a = 2$, малая полуось $b = 1$, прямые $x = 1$, $y = -2$ – главные оси. Половина междуфокусного расстояния $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, а значит, фокусы $F_1\left(-\sqrt{3}+1;\ -2\right)$, $F_2\left(\sqrt{3}+1;\ -2\right)$. Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Директрисы D_1 и D_2 могут быть описаны с помощью уравнений: $D_1:\ x = -\frac{4}{\sqrt{3}} + 1$, $D_2:\ x = \frac{4}{\sqrt{3}} + 1$ (рис. 9.5).

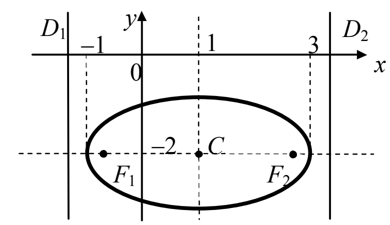


Рис. 9.5

Пример 3. Определить, какая кривая задается уравнением, изобразить ее:

1) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6 = 0$;
3) $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 1 = 0$; 4) $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 17 = 0$;
5) $16x^2 + 9y^2 + 64x - 54y + 1 = 0$.

Решение. 1) Приведем уравнение к каноническому виду методом выделения полного квадрата двучлена:

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0;$

$(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + 4 = 0;$

$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + 4 = 0;$

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$

Таким образом, уравнение может быть приведено к виду

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$

Это уравнение окружности с центром в точке (–2, 1) и радиусом $R = 1$ (рис. 9.6).

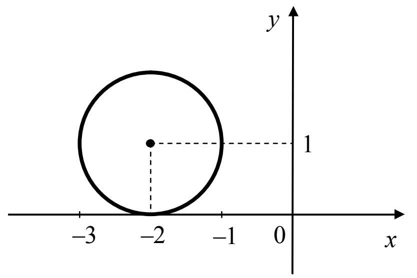


Рис. 9.6

2) Выделяем полные квадраты двучленов в левой части уравнения и получаем:

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = -1.$

Это уравнение не имеет смысла на множестве действительных чисел, так как левая часть неотрицательна при любых действительных значениях переменных x и y, а правая – отрицательна. Поэтому говорят, что это уравнение «мнимой окружности» или оно задает пустое множество точек плоскости.

3) Выделяем полные квадраты:

$x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 1 = 0;$

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + 4(y^2 + 4y + 4) - 16 + 1 = 0;$

$(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 - 16 = 0;$

$(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 16.$

Значит, уравнение имеет вид:

$$(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 16 \quad \text{или} \quad \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Полученное уравнение, а следовательно, и исходное задают эллипс. Центр эллипса находится в точке $O_1(1, -2)$, главные оси задаются уравнениями $y = -2$, $x = 1$, причем большая полуось $a = 4$, малая полуось $b = 2$ (рис. 9.7).

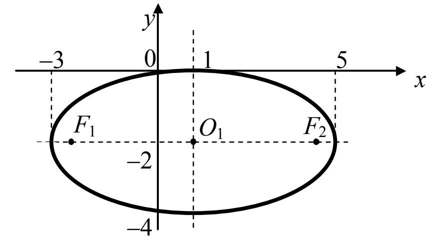


Рис. 9.7

4) После выделения полных квадратов имеем:

$(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 - 17 + 17 = 0$ или $(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 0.$

Полученное уравнение задает единственную точку плоскости с координатами (1, –2).

5) Приведем уравнение к каноническому виду:

$16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) - 64 - 81 + 1 = 0;$

$16(x + 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 144;$

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$$

Очевидно, оно задает эллипс, центр которого находится в точке $O_1(-2; 3)$, главные оси задаются уравнениями $x = -2$, $y = 3$, причем большая полуось $b = 4$, малая полуось $a = 3$ (рис. 9.8).

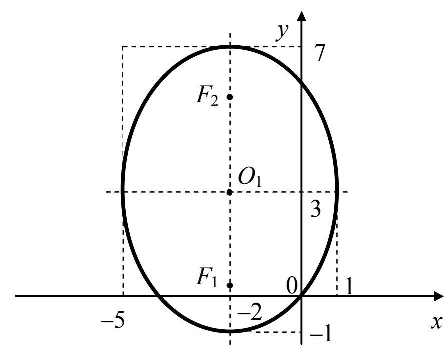


Рис. 9.8

Пример 4. Записать уравнение касательной к окружности радиуса 2 с центром в правом фокусе эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ в точке пересечения с осью ординат.

Решение. Уравнение эллипса приведем к каноническому виду (9.7):

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1.$$

Значит, $c=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ и правый фокус – $F_2(\sqrt{3},\ 0)$. Поэтому, искомое уравнение окружности радиуса 2 имеет вид (рис. 9.9):

$$(x-\sqrt{3})^2+y^2=4.$$

Окружность пересекает ось ординат в точках, координаты которых определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases}(x-\sqrt{3})^2+y^2=4,\\ x=0.\end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases}x=0,\\ y^2=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x=0,\\ \left[\begin{array}{l}y=-1,\\ y=1.\end{array}\right.\end{cases}$$

Пусть это точки $N\ (0;-1)$ и $M\ (0;1)$. Значит, можно построить две касательные, обозначим их T_1 и T_2. По известному свойству касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Пусть $T_1\perp\overline{MF_2},\ T_2\perp\overline{NF_2},\ \ \overline{MF_2}=\left(\sqrt{3};\ -1\right).$ Тогда уравнение касательной T_1 примет вид:

$$\sqrt{3}x-y+c=0.$$

$M\in T_1$, значит, $-1+c=0$ или T_1: $\sqrt{3}x-y+1=0.$

$\overline{NF_2}=\left(\sqrt{3};\ 1\right).$ Тогда уравнение касательной T_2 примет вид:

$$\sqrt{3}x+y+c=0.$$

$N\in T_2$, значит, $-1+c=0$ или T_2: $\sqrt{3}x+y+1=0.$

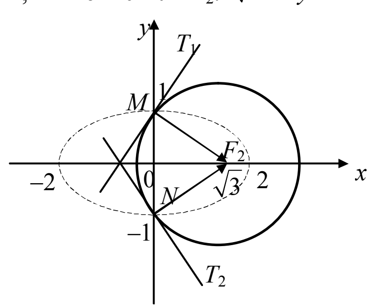


Рис. 9.9

Пример 5. Записать уравнение окружности, проходящей через точку $M(1, -2)$ и точки пересечения прямой $x-7y+10=0$ с окружностью $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

Решение. Найдем точки пересечения прямой $x-7y+10=0$ с окружностью $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, решив систему уравнений:

$$\begin{cases}x-7y+10=0,\\ x^2+y^2-2x+4y-20=0.\end{cases}$$

Выразим x из первого уравнения системы:

$x=7y-10.$

Затем подставим во второе:

$(7y-10)^2+y^2-2(7y-10)+4y-20=0.$

Оно равносильно уравнению

$y^2-3y+2=0.$

Используя формулы корней квадратного уравнения, найдем $y_1=1$, $y_2=2$, откуда $x_1=-3$, $x_2=4$.

Итак, имеем три точки, лежащие на окружности: $M(1,-2)$, $M_1(4, 2)$ и $M_2(-3,\ 1)$. Пусть $O_1(x_0,\ y_0)$ – центр окружности. Тогда $\left|\overline{O_1M}\right|=\left|\overline{O_1M_1}\right|=\left|\overline{O_1M_2}\right|=R$, где R – радиус окружности.

Найдем координаты векторов:

$$\overline{O_1M}=(1-x_0,\ -2-y_0),$$

$$\overline{O_1M_1}=(4-x_0,\ 2-y_0),$$

$$\overline{O_1M_2}=(-3-x_0, 1-y_0).$$

Значит,

$$\sqrt{(1-x_0)^2+(-2-y_0)^2}=\sqrt{(4-x_0)^2+(2-y_0)^2}=\sqrt{(-3-x_0)^2+(1-y_0)^2},$$

что равносильно системе

$$\begin{cases}(1-x_0)^2+(-2-y_0)^2=(4-x_0)^2+(2-y_0)^2,\\ (4-x_0)^2+(2-y_0)^2=(-3-x_0)^2+(1-y_0)^2.\end{cases}$$

Упрощаем ее:

$$\begin{cases}-2x_0+5+4y_0=20-8x_0-4y_0,\\ 20-8x_0-4y_0=10+6x_0-2y_0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}6x_0+8y_0=15,\\ 7x_0+y_0=5.\end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем ответ:

$$\begin{cases}x_0=0,5,\\ y_0=1,5.\end{cases}$$

Таким образом, центр окружности находится в точке (0,5; 1,5), ее радиус

$$R=\sqrt{(1-0,5)^2+(-2-1,5)^2}=\sqrt{(4-0,5)^2+(2-1,5)^2}=$$
$$=\sqrt{(-3-0,5)^2+(1-1,5)^2}=\sqrt{12,5}.$$

Тогда каноническое уравнение искомой окружности имеет вид:

$$(x-0,5)^2+(y-1,5)^2=12,5.$$

Задания

I уровень

1.1. Составьте каноническое уравнение окружности с центром в точке (–4, 7) и радиусом R = 7. Определите, лежат ли на этой окружности точки A(1, –2) и B(–4, 0).

1.2. Найдите центр и радиус окружности:
1) $x^2 + y^2 + 2x = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

1.3. Для эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ найдите:
1) его центр; 2) полуоси; 3) фокусы;
4) эксцентриситет; 5) уравнения директрис.
Изобразите эллипс.

II уровень

2.1. Постройте окружность $x^2 + y^2 - 5y = 0$ и прямую $2x - y = 0$. Найдите их точки пересечения.

2.2. Дана точка A(4, –2). Составьте уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA, и найдите точки пересечения этой окружности с координатными осями.

2.3. Напишите уравнения диаметров окружности

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0,$$

параллельных координатным осям.

2.4. Составьте уравнение эллипса, зная его фокус F_1(2, 0), соответствующую ему директрису x = 8.

2.5. Приведите общее уравнение к каноническому виду и определите геометрическое множество точек, которое оно задает:
1) $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$; 2) $x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 17 = 0$;

3) $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 21 = 0$; 4) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$.
Если это возможно, сделайте рисунок.

2.6. Эллипс касается оси абсцисс в точке A(3, 0) и оси ординат в точке B(0, –2). Составьте уравнение эллипса, если его оси симметрии параллельны координатным осям.

2.7. Эллипс, симметричный относительно координатных осей, проходит через точки $M(\sqrt{3}, -2)$ и $N(-2\sqrt{3}, 1)$. Составьте его уравнение.

III уровень

3.1. Докажите, что для эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ выполняется условие $\dfrac{r}{d}=\varepsilon$, где r – фокальный радиус любой точки эллипса, d – ее расстояние до соответствующей директрисы.

3.2. Эллипс, главные оси которого совпадают с координатными осями, проходит через точки $M_1(2, \sqrt{3})$, $M_2(0, 2)$. Составьте его уравнение, найдите фокальные радиусы точки M_1 и расстояния от этой точки до директрис.

3.3. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найдите точку, расстояние от которой до одного из фокусов в 4 раза больше расстояния до второго фокуса.

3.4. Выведите каноническое уравнение эллипса, используя то, что сумма расстояний от любой из его точек до фокусов есть величина постоянная, равная большой оси, т. е. $2a$ (считать, что фокусы расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, и междуфокусное расстояние равно $2c$, $c < a$).

9.3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{9.11}$$

где $a,\ b>0$.

Параметры гиперболы

Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называются ***фокусами*** гиперболы (рис. 9.10), при этом величина $2c$ ($c > a > 0$) определяет ***междуфокусное расстояние***. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ называются ***вершинами гиперболы***, при этом отрезок $A_1A_2 = 2a$ образует ***действительную ось*** гиперболы, а отрезок $B_1B_2 = 2b$ – ***мнимую*** ось ($B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$), точка O – ***центр*** гиперболы.

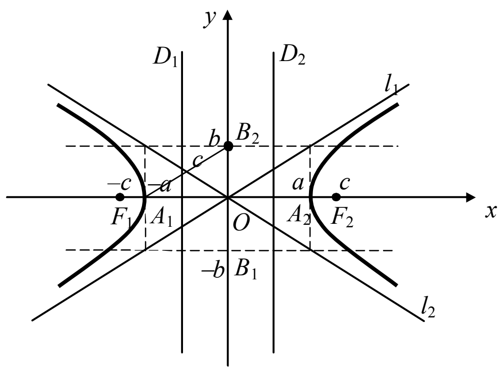


Рис. 9.10

Основные параметры гиперболы, характеризующие ее форму:

величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется ***эксцентриситетом гиперболы***, она характеризует меру «сжатости» гиперболы;

$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right|$, $r_2 = \left|\overline{F_2M}\right|$ – ***фокальные радиусы гиперболы*** (точка M принадлежит гиперболе), причем $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = -a + \varepsilon x$ – для точек правой ветви гиперболы, $r_1 = -(a + \varepsilon x)$, $r_2 = -(-a + \varepsilon x)$ – для точек левой ветви;

$D_1 : x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$, $D_2 : x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ – ***директрисы гиперболы***;

$l_{1,2} : y = \pm\dfrac{b}{a}x$ – ***асимптоты гиперболы***.

Для гиперболы справедливо: $\varepsilon > 1$, директрисы не пересекают границу и внутреннюю область гиперболы, а также обладают свойством $\dfrac{r_1}{d(M, D_1)} = \dfrac{r_2}{d(M, D_2)} = \varepsilon$.

Говорят, что уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (9.12)$$

задает ***уравнение гиперболы, сопряженной данной*** (рис. 9.11). Его можно записать также в виде

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В таком случае отрезок B_1B_2 образует действительную ось, а A_1A_2 – мнимую, вершины находятся в точках $B_1(0; -b)$ и $B_2(0; b)$, фокусы – $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$, эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$, уравнения директрис $D_{1,2} : y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$.

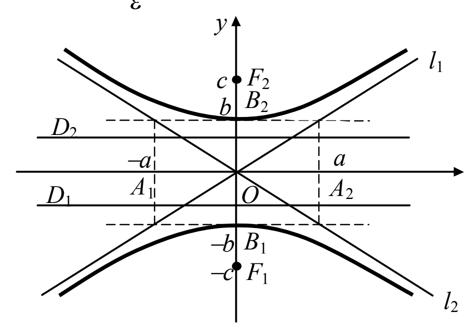


Рис. 9.11

Точки гиперболы обладают важным характеристическим свойством: абсолютное значение разности расстояний от каждой из них до фокусов есть величина постоянная, равная $2a$ (рис. 9.10) или $2b$ (рис. 9.11).

Для ***параметрического задания*** гиперболы в качестве параметра t может быть взята величина угла между радиус-вектором точки, лежащей на гиперболе, и положительным направлением оси Ox:

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in [0;\ 2\pi).$$

Пример 1. Привести уравнение гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$ к каноническому виду, найти ее параметры, угол между асимптотами, изобразить гиперболу.

Решение. Разделим левую и правую части заданного уравнения на 144: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Из последнего уравнения непосредственно следует: $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $O(0, 0)$ – центр гиперболы. Фокусы находятся в точках $F_1(-5, 0)$ и $F_2(5, 0)$, эксцентриситет $\varepsilon = 5/4$, директрисы D_1 и D_2 описываются уравнениями D_1: $x = -16/5$, D_2: $x = 16/5$, асимптоты l_1 и l_2 имеют уравнения $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Сделаем рисунок: на координатных осях Ox и Oy симметрично относительно точки $O(0, 0)$ отложим отрезки $A_1A_2 = 2a = 8$ и $B_1B_2 = 2b = 6$ соответственно (рис. 9.12). Через полученные точки $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$, $B_1(0, -3)$, $B_2(0, 3)$ проведем прямые, параллельные координатным осям. В результате получим прямоугольник, диагонали которого лежат на асимптотах гиперболы. Строим гиперболу.

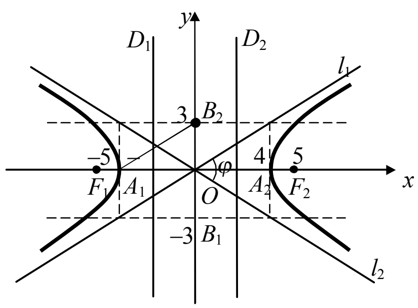


Рис. 9.12

Для нахождения угла φ между асимптотами гиперболы воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_{l_1} - k_{l_2}}{1 + k_{l_1} \cdot k_{l_2}}\right|.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}\right| = \frac{\frac{6}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{7} = \frac{24}{7},$$

откуда получаем $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{24}{7} \approx 73{,}7°$.

Пример 2. Определить тип, параметры и расположение на плоскости кривой, уравнение которой $x^2 - 6y^2 - 12x + 36y - 48 = 0$.

Решение. С помощью метода выделения полных квадратов упростим правую часть данного уравнения:

$$x^2 - 6y^2 - 12x + 36y - 48 = 0;$$

$$(x-6)^2 - 36 - 6(y^2 - 6y + 9) + 54 - 48 = 0.$$

Получаем уравнение

$$(x-6)^2 - 6(y-3)^2 - 30 = 0,$$

которое делением на 30 приводится к виду

$$\frac{(x-6)^2}{30} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1.$$

Это уравнение гиперболы, центр которой лежит в точке $C(6; 3)$, действительная полуось $a = \sqrt{30}$, мнимая полуось $b = \sqrt{5}$ (рис. 9.13).

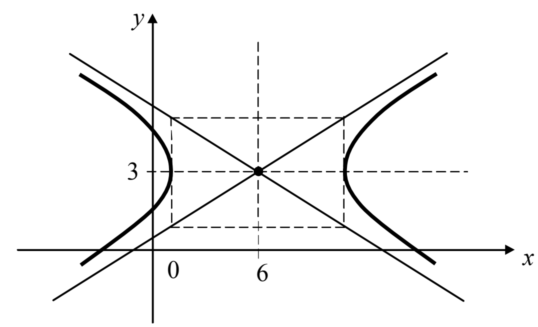


Рис. 9.13

Пример 3. Составить уравнение гиперболы, сопряженной относительно гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, определить ее параметры и сделать рисунок.

Решение. Уравнение гиперболы, сопряженной данной:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1 \text{ или } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

Действительная полуось $b = 3$, мнимая $a = 4$, половина междуфокусного расстояния $c = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Вершинами гиперболы служат точки $B_1(0, -3)$ и $B_2(0, 3)$; ее фокусы находятся в точках $F_1(0, -5)$ и $F_2(0, 5)$; эксцентриситет $\varepsilon = c/b = 5/3$; директрисы D_1 и

D_2 задаются уравнениями D_1: $y = –9/5$, D_2: $y = 9/5$; уравнения $y = \pm\frac{3}{4}x$ являются уравнениями асимптот (рис. 9.14).

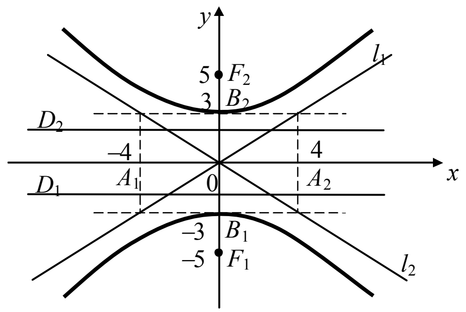


Рис. 9.14

Заметим, что для сопряженных гипербол общими элементами являются «вспомогательный прямоугольник» и асимптоты.

Пример 4. Написать уравнение гиперболы с полуосями a и b ($a > 0$, $b > 0$), если известно, что ее главные оси параллельны координатным осям. Определить основные параметры гиперболы.

Решение. Искомое уравнение можно рассматривать как уравнение гиперболы $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, которое получается в результате параллельного переноса заданной системы координат на вектор $\overline{OO_1} = (x_0, y_0)$, где (x_0, y_0) – центр гиперболы в «старой» системе координат. Тогда, используя соотношения между координатами произвольной точки M плоскости в заданной и преобразованной системах

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0, \end{cases}$$

получим уравнение гиперболы

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Определим параметры. Центр гиперболы определяет точка $O'(x_0; y_0)$, а значит, действительная ось задается уравнением $y = y_0$, а мнимая – уравнением $x = x_0$. Ее вершинами являются точки $A_1(-a + x_0; y_0)$, $A_2(a + x_0;\ y_0)$, а асимптотами являются прямые

$y = \pm\frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$. Половина междуфокусного расстояния $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-c + x_0; y_0)$, $F_2(c + x_0; y_0)$, эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} > 1.$$

Директрисы D_1 и D_2 задаются уравнениями:

$$D_{1,2} : x = \pm\frac{a}{\varepsilon} + x_0 \text{ или } D_1 :\ x = -\frac{a^2}{c} + x_0,\quad D_2 :\ x = \frac{a^2}{c} + x_0.$$

Пример 5. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, а фокусы – в вершинах этого эллипса.

Решение. Уравнение $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ означает, что фокусами эллипса являются точки $F_1^{Ý}(-4,\ 0)$, $F_2^{Ý}(4,\ 0)$, а вершины, лежащие на главной оси, находятся в точках $A_1^{Э}(-5, 0), A_2^{Э}(5,\ 0)$ (так как $a^{Э} = 5$, $b^{Э} = 3$, $c^{Э} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$).

Тогда для искомой гиперболы известно, что ее фокусы:

$F_1^{Ã}(-5,\ 0)$, $F_2^{Ã}(5,\ 0)$,

а вершины – $A_1^{Ã}(-4,\ 0)$, $A_2^{Ã}(4,\ 0)$.

Значит, основные параметры гиперболы следующие:

$a^{Г} = 4$, $c^{Г} = 5$, $b^{Г} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Используя данную информацию, приходим к уравнению гиперболы:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Задания

I уровень

1.1. Определите характеристики (центр, полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис и асимптот) гиперболы $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$. Выполните рисунок.

1.2. Составьте уравнение гиперболы, вершины которой находятся в точках $A_1(5, 0)$ и $A_2(5, 0)$, а расстояние между фокусами равно 14.

1.3. Составьте уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(2, 1)$ и имеющей асимптоты $y = \pm\frac{3}{4}x$.

1.4. Определите параметры гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$ и сделайте рисунок.

II уровень

2.1. Определите параметры (полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и асимптот) гиперболы $16x^2 - 9y^2 = -144$.

2.2. Составьте уравнение равносторонней ($a = b$) гиперболы, зная ее фокус $F(0, 1)$ и асимптоту $x + y = 0$.

2.3. Приведите общее уравнение к каноническому виду и определите множество точек, которое оно задает:
1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;
2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;
3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$;
4) $x^2 - y^2 - 10x - 6y + 16 = 0$.

2.4. Убедившись, что точка $A\left(-5; \frac{9}{4}\right)$ лежит на гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, найдите фокальные радиусы этой точки и ее расстояние до директрис.

III уровень

3.1. Гипербола касается прямых:
$5x - 6y - 16 = 0$, $13x - 10y - 48 = 0$.
Запишите уравнение гиперболы при условии, что ее оси совпадают с осями координат.

3.2. Составьте уравнения касательных к гиперболе

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

1) проходящих через точку $A(4, 1)$;
2) параллельных прямой $10x - 3y + 9 = 0$;
3) перпендикулярных прямой $10x - 3y + 9 = 0$.

У к а з а н и е. Уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0) имеет вид: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

9.4. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px, \ p > 0.$$

Параметры параболы

Точка $F(p/2, 0)$ называется ***фокусом параболы***, величина p – ***параметром***, точка $O(0, 0)$ – ***вершиной*** (рис. 9.15). При этом прямая OF, относительно которой парабола симметрична, задает ось этой кривой.

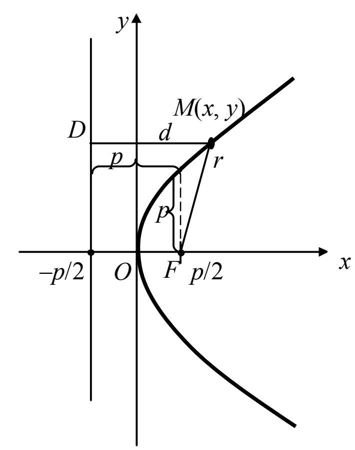


Рис. 9.15

Величина $r = \left|\overline{FM}\right| = x + \dfrac{p}{2}$, где $M(x, y)$ – произвольная точка параболы, называется ***фокальным радиусом***, прямая D: $x = -p/2$ – ***директрисой*** (она не пересекает внутреннюю область параболы). Величина $\varepsilon = \dfrac{r}{d(M, D)} = 1$ называется ***эксцентриситетом параболы.***

Основное характеристическое свойство параболы: все точки параболы равноудалены от директрисы и фокуса (рис. 9.15).

Существуют иные формы канонического уравнения параболы, которые определяют другие направления ее ветвей в системе координат (рис. 9.16):

а) $y^2 = -2px$, б) $x^2 = 2\text{ð}y$, в) $x^2 = -2\text{ð}y$.

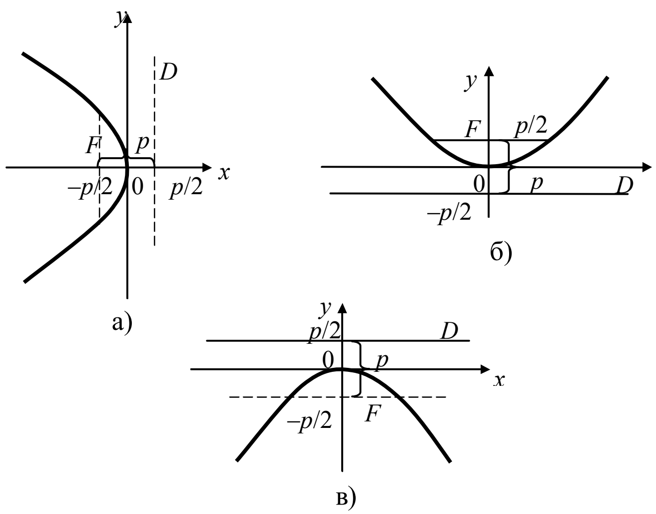


Рис. 9.16

Для ***параметрического задания параболы*** в качестве параметра t может быть взята величина ординаты точки параболы:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p}, \\ y = t, \end{cases}$$

где t – произвольное действительное число.

Пример 1. Определить параметры и форму параболы по ее каноническому уравнению:

1) $y^2 = -8x$; 2) $x^2 = -4y$.

Решение. 1) Уравнение $y^2 = -8x$ определяет параболу с вершиной в точке $O(0; 0)$, симметричную относительно оси Ox. Ее ветви направлены влево. Сравнивая данное уравнение с уравнением $y^2 = -2px$, находим: $2p = 8$, $p = 4$, $p/2 = 2$. Следовательно, фокус находится в точке $F(-2; 0)$, уравнение директрисы D: $x = 2$ (рис. 9.17).

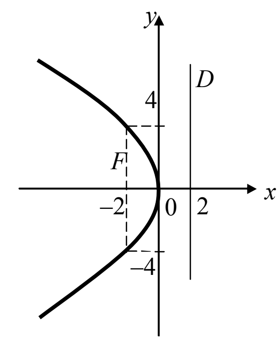


Рис. 9.17

2) Уравнение $x^2 = -4y$ задает параболу с вершиной в точке $O(0; 0)$, симметричную относительно оси Oy. Ее ветви направлены вниз. Сравнивая данное уравнение с уравнением $x^2 = -2py$, находим: $2p = 4$, $p = 2$, $p/2 = 1$. Следовательно, фокус находится в точке $F(0; -1)$, уравнение директрисы D: $y = 1$ (рис. 9.18).

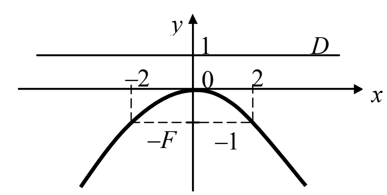


Рис. 9.18

Пример 2. Определить параметры и вид кривой $x^2 + 8x - 16y - 32 = 0$. Сделать рисунок.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, используя метод выделения полного квадрата:

$x^2 + 8x - 16y - 32 = 0$;

$(x+4)^2 - 16 - 16y - 32 = 0;$
$(x+4)^2 - 16y - 48 = 0;$
$(x+4)^2 - 16(y+3) = 0.$
В результате получим:
$(x+4)^2 = 16(y+3).$

Это каноническое уравнение параболы с вершиной в точке (–4; –3), параметром $p = 8$, ветвями, направленными вверх $(y \geq -3)$, осью $x = -4$. Фокус находится в точке $F(-4;\ -3 + p/2)$, т. е. $F(-4;\ 1)$ Директриса D задается уравнением $y = -3 - p/2$ или $y = -7$ (рис. 9.19).

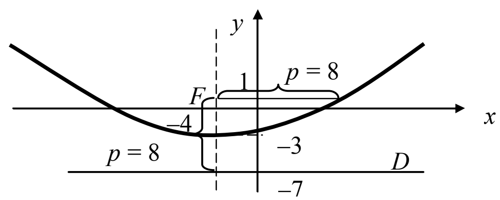


Рис. 9.19

Пример 3. Написать уравнение кривой, все точки которой равноудалены от прямой $y = -3$ и точки $F(0;\ 3)$.

Решение. Точка $F(0;\ 3)$ лежит на оси Oy и находится с прямой $y = -3$ по разные стороны от начала координат, причем на одинаковом расстоянии ($d = 3$). Это позволяет заключить, что искомой кривой является парабола $x^2 = 2py$ с параметром $p = 2 \cdot 3 = 6$, т. е. $x^2 = 12y$ (рис. 9.20).

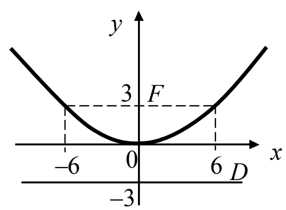


Рис. 9.20

Пример 4. Составить уравнение параболы с вершиной в точке $V(3;\ -2)$ и фокусом в точке $F(1;\ -2)$.

Решение. Вершина и фокус данной параболы лежат на прямой, параллельной оси Ox (одинаковые ординаты), ветви параболы направлены влево (абсцисса фокуса меньше абсциссы вершины), расстояние от фокуса до вершины равно $p/2 = 3 - 1 = 2$, $p = 4$. Следовательно, искомое уравнение

$(y+2)^2 = -2 \cdot 4(x-3)$ или $(y+2)^2 = -8(x-3).$

Задания

I уровень

1.1. Определите параметры параболы и постройте ее:

1) $y^2 = 2x;$ 2) $y^2 = -3x;$
3) $x^2 = 6y;$ 4) $x^2 = -y.$

1.2. Напишите уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что:
1) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и параметр $p = 4$;
2) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $M(4;\ -2)$.
3) директриса задана уравнением $3y + 4 = 0$.

1.3. Составьте уравнение кривой, все точки которой равноудалены от точки (2; 0) и прямой $x = -2$.

II уровень

2.1. Определите тип и параметры кривой:
1) $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0;$ 2) $x = 2y^2 - 12y + 14.$
Сделайте рисунок.

2.2. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, фокус которой находится в точке пересечения прямой $3x - 2y + 5 = 0$ с осью ординат.

2.3. Составьте уравнение параболы с вершиной в точке $V(3,\ -2)$ и фокусом $F(3;\ 0)$.

2.4. Составьте уравнение параболы с вершиной в точке (–1; 1) и уравнением директрисы $y - 1 = 0$.

2.5. Составьте уравнение параболы с фокусом $F(4;\ 3)$ и директрисой $y + 1 = 0$.

III уровень

3.1. Составьте уравнение параболы, проходящей через точки (–1; 1), (1; 3) и (31, 9).

3.2. Найдите расстояние от левого фокуса эллипса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$ до прямой, проходящей через точки его пересечения с параболой $y^2 = 12x$.

3.3. Составьте полярное уравнение параболы, приняв ее вершину за полюс, а ее ось – за полярную ось.

3.4. Докажите, что множество точек, равноудаленных от точки $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ и прямой $x=-\frac{p}{2}$, есть парабола $y^2=2px$ $(p>0)$.

3.5. Составьте параметрические уравнения параболы $y^2=2px$, принимая в качестве параметра ординату y.

3.6. Определите уравнение кривой в прямоугольных координатах и постройте ее, если она задана параметрически с помощью уравнений $\begin{cases} x=2p\operatorname{ctg}^2 t, \\ y=2p\operatorname{ctg} t, \end{cases}$ $t\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

10. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

10.1. Числовая последовательность

Числовой последовательностью называется функция, определенная на множестве натуральных чисел, которая каждому натуральному числу n ставит в соответствие число $x_n = f(n)$. Числовую последовательность обозначают (x_n), $n \in \mathbf{N}$, т. е. (x_n): $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n, \ldots$,

x_n – ***n-й член последовательности***, а формула $x_n = f(n)$ называется ***формулой общего члена последовательности***.

Зная функцию $f(n)$ и номер n, можно вычислить любой член последовательности.

Последовательность, у которой все члены равны между собой, называется ***постоянной***.

Последовательность может быть задана:

1) ***аналитическим способом*** (задается формула n-го члена последовательности, по которому могут быть найдены все остальные);

2) ***реккурентным способом*** (задается первый или несколько первых членов последовательности и указывается правило, позволяющее найти последующие члены последовательности через предыдущие);

3) ***геометрически*** (точками на числовой оси, соответствующими конкретным значениям n);

4) ***графическим способом*** (задаются точки $(n, f(n))$, $n \in \mathbf{N}$, на координатной плоскости);

5) ***словесным описанием***;

6) ***табличным способом***.

Последовательность называется ***возрастающей*** (строго), если $x_n = \varphi(n)$ является возрастающей (строго) числовой функцией, т. е. если $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

Последовательность называется ***убывающей*** (строго), если $x_n = \varphi(n)$ – убывающая (строго) числовая функция, т. е. $x_n > x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

Последовательность (x_n) называется ***неубывающей***, если каждый ее член, начиная со второго, не меньше предыдущего, т. е. $x_n \le x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

Последовательность (x_n) называется ***невозрастающей***, если каждый ее член, начиная со второго, не больше предыдущего, т. е. $x_n \ge x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

Возрастающая и убывающая последовательности называются ***монотонными последовательностями***.

Последовательность (x_n) называется ***ограниченной***, если существуют такие числа m и M, что выполняется неравенство $m \le x_n \le M$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

Если существует такое число M, что $x_n \le M$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то последовательность называется ***ограниченной сверху***; если существует такое число m, что $x_n \ge m$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то последовательность называется ***ограниченной снизу***.

Последовательность (x_n) ограничена тогда и только тогда, когда существует такое положительное число C, что выполняется неравенство

$|x_n| \le C$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

Пример 1. Определить, является ли число 28 членом последовательности (x_n), если $x_n = n^2 + 2n + 3$.

Решение. Число 28 является членом последовательности, если найдется такой номер $n \in \mathbf{N}$, для которого выполняется равенство $n^2 + 2n + 3 = 28$. Решим это квадратное уравнение $n^2 + 2n - 25 = 0$, т. е. $n_1 = -1 + \sqrt{26}$, $n_2 = -1 - \sqrt{26}$. Числа n_1, $n_2 \notin \mathbf{N}$, следовательно, число 28 не является членом данной последовательности.

Пример 2. Вычислить первые пять членов последовательности (a_n), если $a_n = 2 + \frac{3}{n}$. Определить, для каких членов последовательности (a_n) выполняется условие $a_n < \frac{15}{7}$.

Решение. Подставляя в формулу общего члена значение n = 1, 2, 3, 4, 5, получим:

$$a_1 = 2 + \frac{3}{1} = 5; \qquad a_2 = 2 + \frac{3}{2} = 3\frac{1}{2};$$

$$a_3 = 2 + \frac{3}{3} = 3; \qquad a_4 = 2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4};$$

$$a_5 = 2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}.$$

Решим неравенство $2 + \frac{3}{n} < \frac{15}{7}$:

$$\frac{14n + 21 - 15n}{7n} < 0,$$

$$\frac{21 - n}{7n} < 0.$$

Решением этого неравенства будут $n \in (0;\ 21)$. Поэтому, для любых членов последовательности с номерами от 1 до 20 включительно выполняется условие $a_n < \frac{15}{7}$.

Пример 3. Последовательность задана следующим образом (рекуррентно): $a_1 = 3$ и $a_n = \frac{2a_{n-1}}{n+3}$. Вычислить первые четыре ее члена.

Решение. Первый член последовательности известен: $a_1 = 3$. Для вычисления a_2 в заданной формуле для a_n положим $n = 2$. Получим:

$$a_2 = \frac{2 \cdot a_1}{2+3} = \frac{2 \cdot 3}{2+3} = \frac{6}{5}.$$

Для вычисления a_3 в формуле a_n выбираем $n = 3$. Тогда a_3 выразится через найденный член a_2 :

$$a_3 = \frac{2 \cdot a_2}{3+3} = \frac{2 \cdot \frac{6}{5}}{6} = \frac{2}{5}.$$

Аналогично:

$$a_4 = \frac{2 \cdot a_3}{4+3} = \frac{2 \cdot \frac{2}{5}}{7} = \frac{4}{35}.$$

Пример 4. Последовательность (a_n) задана формулой общего члена: $a_n = \frac{n+1}{n}$. Задать таблично первые восемь ее членов, изобразить их геометрически и графически.

Решение. Вычислим первые восемь членов заданной последовательности и заполним таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{8}$

Для геометрической иллюстрации изобразим на числовой оси члены последовательности (рис. 10.1).

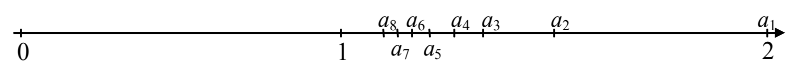


Рис. 10.1

В системе координат Oxy укажем точки плоскости, которые имеют координаты $(n, f(n))$ для $n = \overline{1, 8}$ (рис. 10.2).

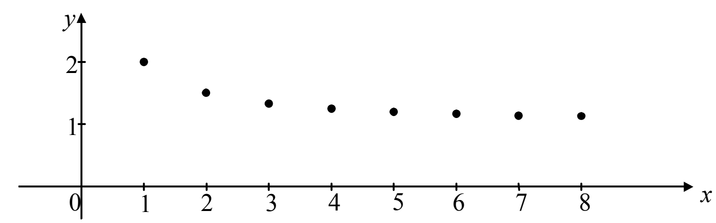


Рис. 10.2

Пример 5. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{1}{n^2 - 1}$ является строго убывающей.

Решение. Если последовательность строго убывающая, то выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$ или $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1\ \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Вычисляем:

$$x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 - 1} = \frac{1}{n^2 + 2n}.$$

Составим отношение:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{n^2 + 2n} : \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2n}.$$

Поскольку $2n > 0\ \ \forall n \in \mathbf{N}$, то верно неравенство

$n^2 - 1 < n^2 + 2n\ \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Получаем $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ для любых натуральных n.

Значит, последовательность является строго убывающей.

Пример 6. Исследовать последовательность $a_n = \frac{n}{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ на ограниченность.

Решение. Запишем формулу общего члена последовательности следующим образом:

$$a_n = \frac{n}{n-1} = \frac{n-1+1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Так как $n \in \mathbf{N}$ и $n \geq 2$, то $n - 1 \geq 1$, а поэтому

$$\frac{1}{n-1} \leq 1 \text{ и } 1 + \frac{1}{n-1} \leq 2.$$

Следовательно, последовательность является ограниченной сверху.

Поскольку неравенство $n > n - 1$ выполняется для всех $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, то $\frac{n}{n-1} > 1$.

Значит, последовательность является также ограниченной снизу.

Приходим к выводу, что (a_n) – ограниченная последовательность.

Задания

I уровень

1.1. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \frac{3n+2}{2n+3}$. Найдите a_{10}, a_{23}, a_{n+1}.

1.2. Запишите первые пять членов последовательности:

1) $x_n = \frac{5n^2+1}{n^2-2}$; 2) $x_n = \frac{n+3}{2n}$;

3) $x_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$; 4) $x_n = \frac{(-1)^n n^{n-1}}{n^2+4}$.

1.3. Последовательность задана формулой $x_n = \frac{n\,!}{2^n}$. Найдите x_2, x_4, x_5, $\frac{x_{n-1}}{x_n}$, x_{n+1}.

1.4. Найдите первые пять членов последовательности (a_n), заданной реккурентно:

1) $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n + 1$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 2}$;

3) $a_1 = a_2 = 2$ и $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$; 4) $a_1 = a_2 = -2$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}+1}$.

1.5. Докажите, что последовательность, заданная формулой общего члена, является возрастающей:

1) $a_n = 3n - 2$; 2) $a_n = 2n^2 + 5n - 1$; 3) $a_n = 3^n - 2$.

1.6. Докажите, что последовательность, заданная формулой общего члена, является убывающей:

1) $a_n = 27 - 9n$; 2) $a_n = n^2 - 3n + 1$; 3) $a_n = 7n^2 + 12n + 9$.

1.7. Изобразите первые семь членов последовательности (a_n) на числовой оси, если:

1) $a_n = \frac{2n}{n+3}$; 2) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; 3) $a_n = \frac{2}{n^2+1}$.

1.8. Известно, что членами последовательности являются числа, каждое из которых, начиная с 0, на две единицы больше предыдущего. Запишите первые пять членов этой последовательности.

II уровень

2.1. Запишите первые шесть членов последовательности (x_n):

$$1)\ x_n = \begin{cases} 2 + \frac{1}{n}, & \text{åñëè } n \text{ – ÷åòí î å}, \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{n}, & \text{åñëè } n - \text{í å÷åòí î å}; \end{cases}$$

2) $x_n = \begin{cases} n^3 - 2, & \text{åñëè } n - \text{÷åòí î å}, \\ 2^n, & \text{åñëè } n - \text{í å÷åòí î å}. \end{cases}$

2.2. Запишите первые шесть членов последовательности:
1) четных, натуральных чисел, кратных числу 3;
2) натуральных чисел, которые при делении на 7 дают остаток
3) натуральных чисел, кратных числам 3 и 4.

Укажите формулу n-го члена последовательности.

2.3. Определите, содержится ли среди членов числовой последовательности $x_n = n^2 - 17n$ число:
1) –30; 2) –72; 3) –100; 4) 60.

2.4. Исследуйте последовательность на ограниченность:

1) $x_n = \dfrac{n}{n-1}$; 2) $x_n = \dfrac{2n}{3n+3}$; 3) $x_n = n^n$;

4) $a_n = \dfrac{n-5}{n^2}$; 5) $a_n = 2^n$; 6) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

7) $a_n = 3^{-n}$; 8) $a_n = (-1)^n n^2$; 9) $a_n = (-1)^{n+1} n^3$.

2.5. Изобразите графически (в системе координат Oxy) 10 членов последовательности (x_n), если:

1) $x_n = \dfrac{1}{n}$; 2) $x_n = \dfrac{n^2-1}{n}$;

3) $x_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1$; 4) $x_n = \dfrac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n}$.

III уровень

3.1. Найдите первые девять членов последовательности Фибоначчи, заданной реккурентно:

$$x_1 = x_2 = 1 \text{ и } x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ \ n \in \mathbf{N},\ \ n > 2.$$

3.2. Запишите первые шесть членов последовательности приближенных значений $\sqrt{3}$ с точностью до $\dfrac{1}{10^n}$ (по недостатку).

3.3. Определите, для каких членов последовательности (x_n), заданной формулой $x_n = \left|n^2 - 4n - 5\right|$, не выполняется условие $x_n > 3$.

3.4. Последовательность (x_n) задана формулой

$$x_n = \frac{(-1)^n - 0{,}1n}{9n-8}.$$

Определите сколько членов этой последовательности принадлежит промежутку (0,03; 0,32).

3.5. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = 2^n - 3^n$. Установите, верно ли равенство $\dfrac{x_{n+1} - x_{n+2}}{6} - x_n = 3 \cdot 2^{n+1}$.

10.2. Предел последовательности

Число a называется ***пределом последовательности*** **(x_n),** если для любого положительного числа ε найдется такой номер $n(\varepsilon)$ (зависящий от ε), что, начиная с этого номера (т. е. для всех $n \geq n(\varepsilon)$), будет выполняться неравенство

$$\left|x_n - a\right| < \varepsilon. \tag{10.1}$$

Обозначают:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***, а не имеющая предела – ***расходящейся***.

Геометрическая интерпретация предела: если число a является пределом последовательности (x_n), то в произвольную, сколь угодно малую ε-окрестность точки a попадают все члены данной последовательности, начиная с некоторого номера $n(\varepsilon)$.

Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Всякая монотонная и ограниченная последовательность сходится.

Если последовательность не является ограниченной, то она не имеет предела.

Если предел последовательности равен нулю, то ее называют ***бесконечно малой***.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) сумма и произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью;

2) произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой;

3) для того чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $x_n = a + \lambda_n$, где (λ_n) – бесконечно малая последовательность.

Последовательность называется ***бесконечно большой***, если для любого сколь угодно большого числа M найдется такой номер $n(M)$, что для всех n, начиная с этого номера $n \ge n(M)$, выполняется неравенство

$|x_n| > M.$

Если последовательность (x_n) – бесконечно большая, то говорят, что она стремится к бесконечности, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Последовательность не имеет предела в двух случаях:

1) предел не определен;

2) последовательность является бесконечно большой.

Если (x_n) – бесконечно большая последовательность, то $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ – бесконечно малая последовательность.

Если (x_n) – бесконечно малая последовательность, то $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ – бесконечно большая.

Если последовательности (x_n), (y_n) имеют пределы, то справедливы следующие свойства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = C\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $C = const$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$.

Свойства 2) и 3) обобщаются, соответственно, на любое конечное число слагаемых и множителей.

При вычислении пределов числовых последовательностей могут возникнуть ***неопределенности вида*** $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 1^∞; 0^0; ∞^0. Для того чтобы вычислить предел в случае неопределенности, необходимо тождественно преобразовать выражение, стоящее под знаком предела.

Пример 1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = 3$.

Решение. Выбираем произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно определению, число 3 является пределом последовательности (x_n), если сможем указать такой номер $n(\varepsilon)$, что для всех членов последовательности с номерами $n \ge n(\varepsilon)$ выполняется неравенство (10.1), которое в нашем случае имеет вид:

$$\left|\frac{3n}{n+2} - 3\right| < \varepsilon. \tag{10.2}$$

Неравенство (10.2) равносильно неравенству

$\left|\frac{3n - 3n - 6}{n+2}\right| < \varepsilon$, т. е. $\left|\frac{-6}{n+2}\right| < \varepsilon$ или $\frac{6}{n+2} < \varepsilon$.

Поскольку $\varepsilon > 0$ и $n > 0$, из последнего неравенства получаем:

$n + 2 > \frac{\varepsilon}{6}$; $\quad n > \frac{\varepsilon}{6} - 2$.

В качестве номера $n(\varepsilon)$ члена последовательности, начиная с которого выполняется неравенство (10.2), может быть выбрано натуральное число

$n(\varepsilon) = \left[\frac{\varepsilon}{6} - 2\right] + 1.$

Этим мы доказали, что существует номер члена последовательности, начиная с которого выполняется неравенство (10.1) для заданной последовательности. Значит, число 3 – предел этой последовательности.

Пример 2. Вычислить предел последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+2n^2}{(n+1)^3-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+n!}{2n!+(n+2)!}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$.

Решение. 1) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, так как непосредственно вычисление приводит к неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+2n^3}{(n+1)^3-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1+2n^3}{n^3+3n^2+3n+1-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2+2n+1}{n^3+2n^2+3n+1}.$$

Разделим далее числитель и знаменатель дроби на старшую степень, т. е. на n^3, и получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=2,$$

так как при $n\to\infty$ последовательности $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ стремятся к нулю.

Таким образом, приходим к ответу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+2n^3}{(n+1)^3-n^2}=2.$$

2) Так как по определению факториала

$$(n-1)\;!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1),$$

$$n\;!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n=(n-1)!n,$$

$$(n+2)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=$$
$$=(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2),$$

то получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!+n!}{2n!+(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\cdot(1+n)}{(n-1)!\cdot\left(2n+n(n+1)\cdot(n+2)\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^3+3n^2+4n}.$$

Делением на старшую степень выражения, т. е. на n^3, убеждаемся, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!+n!}{2n!+(n+2)!}=0.$$

3) Поскольку при $n\to\infty$ имеем $\sqrt{\ddot{\imath}^3+2}\to+\infty$ и $\sqrt{\ddot{\imath}^3-1}\to+\infty$, то выражение $\sqrt{\ddot{\imath}^3+2}-\sqrt{\ddot{\imath}^3-1}$ дает неопределенность типа $\infty-\infty$. Умножив и разделив выражение $\sqrt{\ddot{\imath}^3+2}-\sqrt{\ddot{\imath}^3-1}$ на сопряженный множитель $\sqrt{\ddot{\imath}^3+2}+\sqrt{\ddot{\imath}^3-1}$, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+8}\cdot\left(\sqrt{\ddot{\imath}^3+2}-\sqrt{\ddot{\imath}^3-1}\right)\cdot\left(\sqrt{\ddot{\imath}^3+2}+\sqrt{\ddot{\imath}^3-1}\right)}{\sqrt{\ddot{\imath}^3+2}+\sqrt{\ddot{\imath}^3-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+8}\left(n^3+2-n^3+1\right)}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+8}}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}}.$$

Разделим числитель и знаменатель на старшую степень, т. е. на $n^{\frac{3}{2}}$, тогда:

$$3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+8}}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{8}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^3}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}}}=3\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Таким образом, получаем ответ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-2}\right)=\frac{3}{2}.$$

Задания

I уровень

1.1. Пользуясь определением числовой последовательности, докажите, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{5n+5}=\dfrac{2}{5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n}{2+n}=-1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+1}{2n^2+5}=\dfrac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}=0$.

1.2. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+2}{3n-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{3n+1}{2n+1}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{2}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-2)^3}{(3n-2)(2n+1)}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{\sqrt{4n^2+1}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n+1}{\sqrt{n^2+3n+10}+3n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+n+1}-2n$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+3)}-n\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+3n+1}+n+1}{2n^2+\sqrt{4n+3}}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n-1)!+n!}{n!}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

II уровень

2.1. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-3n}{(n+2)^4-(n+1)^4}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^2+(3n-1)^2}{(n+5)^3-(n+2)^3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)^3+(2n+2)^3}{(3n+3)^3-(n-5)^3}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4-1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt[4]{n^4-3}+\sqrt{n+2}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[5]{n^8}-\sqrt{n-2}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[6]{n^{12}+n^5+1}-3n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{3n}-\sqrt[4]{16n^8+1}}{(n-5\sqrt{n})\sqrt{n^2+3}}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[5]{7n}+\sqrt[3]{64n^6-3}}{(n+2\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-2}}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+3)-(n-2)!}{n!+(n-1)!}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2(n+1)!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+2)!}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+(n+1)^2(n-2)!}{3n!-(n-1)!}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n\cdot n!-2(n-1)!}{3(n-1)!-4n!}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)!}{(2n+3)!+2n!}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n-2)!+(n-1)!}{2n!-(n-1)!}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3^{-n}}{1+4^{-n}}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n}{5^{n+3}}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3^{-n}+4\cdot 5^{-n}}{6+3^{-n}+11^{-n}}$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+2}+6\cdot 3^n}{14\cdot 5^{n-1}+2^n}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+3}$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

2.2. Докажите, что последовательность (x_n) не имеет предела:

1) $\tilde{o}_{ï}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{ï}$;

2) $\tilde{o}_{ï}=1+2+\ldots+ï$.

III уровень

3.1. Задана последовательность $u_1=\dfrac{1}{2}$; $u_2=\dfrac{5}{4}$; $u_3=\dfrac{7}{8}$; $u_4=\dfrac{17}{16}$; …; $u_{2n-1}=\dfrac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}}$; $u_{2n}=\dfrac{2^{2n}+1}{2^{2n}}$; … Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$. Определите, каким должно быть n, для того чтобы разность между u_n и ее пределом по абсолютной величине не превзошла 10^{-4}.

3.2. Вычислите предел последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt[3]{3n^3+2n+1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+9+\ldots+3^{n+1}}{2\cdot 3^{n+2}+(-2)^n}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{5}+\dfrac{5}{25}+\ldots+\dfrac{1+2^n}{5^n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^n-8\cdot 4^{n-1}+2^{-n}}{1+3+9+\ldots+3^n}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{10}+\dfrac{13}{100}+\ldots+\dfrac{2^n+3^n}{10^n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-5+4-7+\ldots+2n-(2n+3)}{2n+1}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{10}+(n+2)^{10}+\ldots+(n+100)^{10}}{n^{10}+10^{10}}$.

3.3. Найдите предел последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2-5x_n+6}{x_n-3}$, если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если $x_n=\dfrac{x_{n-1}^2-16}{5}$, $x_1=6$.

3.4. Вычислите предел числовой последовательности (x_n), заданной формулой общего члена, при различных значениях параметров a, b, c:

1) $x_n=\dfrac{ax^3+bx^2-2x+1}{cx^2+7}$; 2) $x_n=\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-x\right)$.

10.3. Предел функции

Рассмотрим функцию $\acute{o}=f(\tilde{o})$, определенную в некоторой окрестности точки $x=x_0$ (в самой точке x_0 данная функция может быть не определена).

Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0 (по Гейне), если для любой последовательности (x_n), сходящейся к x_0 $(x_n\neq x_0)$, последовательность $\left(f(x_n)\right)$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначают:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ или $f(x)\to A$ при $x\to x_0$.

Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, то он единственный.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке x_0, то справедливы формулы:

$$\lim_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim_{x\to x_0}f(x),\text{ где } C=const; \qquad (10.3)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x); \qquad (10.4)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x); \qquad (10.5)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}. \qquad (10.6)$$

Если непосредственное вычисление предела по формулам (10.3)–(10.6) приводит к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$; 1^∞; 0^0; ∞^0, то необходимо вначале тождественно преобразовать выражение, стоящее под знаком предела.

Для всех элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right)=f(x_0), \qquad (10.7)$$

которое означает, что операции вычисления предела и функции переставимы.

Кроме предела функции в точке рассматривают ***предел функции на бесконечности***: число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (или $x\to-\infty$), если для всякой последовательности (x_n), $x_n\to+\infty$ (или $x_n\to-\infty$) при $n\to\infty$ последовательность $\left(f(x_n)\right)$ соответствующих значений функции сходится к числу A.

Обозначают:

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}f(x)=A.$

Для предела функции на бесконечности также справедливы формулы (10.3)–(10.6).

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** функцией при $x\to x_0$ (или $x\to\pm\infty$), если

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}f(x)=0.$

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$, если для всякой последовательности (x_n), $x_n\to x_0$ при $n\to\infty$, $x_n\neq x_0$ (или $x_n\to\pm\infty$) последовательность соответствующих значений функции $\left(f(x_n)\right)$ является бесконечно большой.

Обозначают:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x)=\pm\infty. \qquad (10.8)$$

Если $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$, то она не имеет предела (предел – это число!). Запись формулы (10.8) следует воспринимать лишь как обозначение бесконечно большой функции.

Пример 1. Пользуясь определением предела функции по Гейне, доказать, что $\lim\limits_{x\to3}(2x+4)=10$.

Решение. Пусть (x_n) – произвольная последовательность, которая сходится к 3 $(x_n\neq3,\ n\in\mathbf{N})$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

Тогда $\lim\limits_{x\to3}(2x+4)=\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+4)=2\lim\limits_{n\to\infty}x_n+4=2\cdot3+4=10$.

Пример 2. Вычислить предел функции в точке:

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x^2-4}$.

Решение. 1) При непосредственном использовании формул (10.3)–(10.6) получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь на общий множитель. Получим:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+5x-14}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\cdot(x+7)}{(x-2)\cdot(x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{x+7}{x-1}=\frac{2+7}{2-1}=9.$$

2) Непосредственное вычисление приводит к неопределенности типа $\infty-\infty$. Для раскрытия приведем выражение в скобках к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Далее разлагаем числитель и знаменатель на множители. Получаем:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+2)\cdot(x-1)}{-(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{3}{-3}=-1.$$

3) Непосредственное вычисление предела при $x\to2$ приводит к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы выражений $\sqrt[3]{4x}$ и 2, чтобы в числителе получить разность кубов:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt[3]{4x}-2\right)\cdot\left(\sqrt[3]{16x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4\right)}{\left(x^2-4\right)\cdot\left(\sqrt[3]{16x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{4x-8}{\left(x^2-4\right)\cdot\left(\sqrt[3]{16x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4\right)}.$$

Поскольку неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ сохранилась, разложим многочлены на множители и сократим:

$$\lim_{x\to2}\frac{4(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(\sqrt[3]{16x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4\right)}=\lim_{x\to2}\frac{4}{(x+2)\cdot\left(\sqrt[3]{16x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4\right)}.$$

Переход к пределу при $x\to2$ дает:

$$\frac{4}{(2+2)\cdot\left(\sqrt[3]{16\cdot4}+2\sqrt[3]{4\cdot2}+4\right)}=\frac{4}{4\cdot(4+4+4)}=\frac{1}{12}.$$

Пример 3. С помощью вычислений определить, является ли функция $f(x)$ бесконечно малой или бесконечно большой при $x\to+\infty$:

1) $f(x)=\dfrac{2\cdot3^x+5^x}{2-3^x}$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)$.

Решение. 1) Чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо рассмотреть $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cdot3^x+5^x}{2-3^x}$.

Непосредственное вычисление этого предела приводит к неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Вынесем в числителе и знаменателе старшее основание, т. е. 5^x, за скобки:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot3^x+5^x}{2-3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\left(2\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right)}{5^x\left(2\left(\frac{1}{5}\right)^x-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\frac{3}{5}\right)^x+1}{2\left(\frac{1}{5}\right)^x-\left(\frac{3}{5}\right)^x}.$$

Так как показательная функция $y = a^x$ при $0 < a < 1$ является убывающей, то при $x \to +\infty$ получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot 0+1}{2\cdot 0-0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Тогда, согласно определению, функция $f(x) = \dfrac{2\cdot 3^x + 5^x}{2-3^x}$ является бесконечно большой.

2) Вычислим $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)$. При $x \to \infty$ выражение в скобках представляет собой разность двух бесконечно больших величин $(\infty - \infty)$. Умножив и разделив функцию на выражение $x+\sqrt{x^2-4}$, получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}{x+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\left(x^2-\left(x^2-4\right)\right)}{x+\sqrt{x^2-4}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{x^2-4}}.$$

В результате преобразований возникла неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, а поэтому разделим числитель и знаменатель на старшую степень, т. е. на x. Получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^{\frac{1}{3}-1}}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \frac{4}{2\sqrt[3]{x^2}} = 0.$$

Следовательно, по определению функция $f(x) = \sqrt[3]{x}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)$ является бесконечно малой.

Задания

I уровень

1.1. Пользуясь определением предела функции в точке по Гейне, докажите, что:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+3}{x-1} = 7$;

3) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x+2}{x^2-x+1} = 3$.

1.2. Найдите предел функции в точке:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x}{2x-x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+6x+8}{x^2-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{12}{x^3+8}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{5}{x^2-4}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x^2-49}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; 10) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

II уровень

2.1. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-x^2-1}{x^2-4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x^3-2x^2-2x-1}{x^2+4x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to -8} \left(\dfrac{1}{x+8} - \dfrac{5}{x^2+6x-16}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{6}{x^2-3x-4}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; 12) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1+x^2-3x}{x^3+2x^2-x+1}$;

13) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x-4}+x-1\right)$; 14) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{2x-1}{4x^2-1}\right)$.

2.2. Определите, является ли функция $f(x)$ бесконечно малой или бесконечно большой при $x \to x_0$, если:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-9x}$, $x_0=3$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-9x}$, $x_0=\infty$;

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+2x}}{x+2}$, $x_0=-2$; 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+2x}}{x+2}$, $x_0=\infty$.

Ш уровень

3.1. Пользуясь определением предела функции в точке по Гейне, докажите, что предел не существует:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(2\cdot(-1)^x)$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cos\dfrac{2\pi x}{3}\right)$.

3.2. Вычислите предел функции в точке:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^4-5x^3-51x^2+20x+12}{3x^4+24x^3+70x^2+87x+38}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^6-3x^5-x^4+2x^3+3x^2+x-3}{x^3-8x-3}$.

3.3. Вычислите предел при всех возможных значениях p и g:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+px+g}{(x-2)\cdot(x+1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+px+g}$.

3.4. Вычислите $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+4x+a}{x-a}$.

3.5. При каких a и b $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+bx+1}{x+1}$ равен:

1) ∞; 2) 0; 3) $\dfrac{1}{2}$.

3.6. Вычислить предел при всех возможных значениях p и q

$$\lim_{x\to 4}\frac{-x^2+5x-4}{x^2+px+q}.$$

10.4. Первый и второй замечательные пределы

При вычислении пределов часто используются первый и второй замечательные пределы.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1; \tag{10.9}$$

Если $u(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то верна более общая формула первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(u(x))}{u(x)}=1; \tag{10.10}$$

Первый замечательный предел позволяет устранить неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\ \text{ãäå}\ e=2{,}71828... \tag{10.11}$$

или

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{10.12}$$

Если $u(x)\to\infty$ при $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$, то обобщением формулы (10.11) является формула

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e. \tag{10.13}$$

Если $u(x)\to 0$ при $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$, то обобщением формулы (10.12) является формула

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}=e. \tag{10.14}$$

Второй замечательный предел позволяет устранить неопределенность типа 1^∞.

Для того чтобы использовать, например, формулу (10.13), необходимо быть уверенным, что реализованы следующие пять условий (*акцентируем их подчеркиванием*):

$$1)\ \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e;\qquad 2)\ \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e;$$

$$3)\ \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e;\qquad 4)\ \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e;$$

5) $u(x)\to\infty$, при $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$.

Эти условия достигаются тождественным преобразованием выражения, стоящего под знаком предела.

Пример 1. Вычислить предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\sin x}{x^2}$;   2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+2x}{4+2x}\right)^x$;   4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^3\sqrt[3]{2x}\right)^{\frac{1}{3x}}$.

Решение. 1) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

Последний предел, согласно формуле (10.9), равен 1.

Так как при $x\to 0$ выражение $2x$ также стремится к нулю, то, умножая числитель и знаменатель на 2 и используя первый замечательный предел, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2\cdot\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\sin x}{x^2}=2.$

2) При непосредственном вычислении предела получаем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$.

Умножим числитель и знаменатель исходного выражения на $\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}$ и преобразуем его к виду, когда можно использовать первый замечательный предел (формула (10.10)):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1-\cos}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}{\sin^2 3x\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-(1+\cos x)}{\sin^2 3x\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 3x\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 3x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin 3x\cdot\sin 3x}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}}{\sin 3x\cdot\sin 3x\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}}=$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{36}\right)=\frac{1}{36\sqrt{2}}.$$

3) Выделим целую часть в основании степени:

$$\frac{3+2x}{4+2x}=\frac{4+2x-4+3}{4+2x}=\frac{(4+2x)-1}{4+2x}=1+\frac{1}{-4-2x}.$$

Так как при $x\to\infty$ исходное выражение представляет собой неопределенность типа 1^∞, то, используя второй замечательный предел (формула (10.13)), имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+2x}{4+2x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-4-2x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-4-2x}\right)^{-4-2x}\right)^{\frac{x}{-4-2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-4-2x}\right)^{-4-2x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{-4-2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{-\frac{4}{x}-2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

4) В данном случае получаем неопределенность вида 1^∞. Преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел (формула (10.14)). Получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^3\sqrt[3]{2x}\right)^{\frac{1}{3x}}=\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^3\sqrt[3]{2x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^3\sqrt[3]{2x}}}\right)^{\frac{\operatorname{tg}^3\sqrt[3]{2x}}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^3\sqrt[3]{2x}}{3x}}.$$

Для вычисления $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3\sqrt[3]{2x}}{3x}$ применим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^3\sqrt[3]{2x}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^3\sqrt[3]{2x}\left(\sqrt[3]{2x}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{2x}\right)^3 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^3\sqrt[3]{2x}}{\left(\sqrt[3]{2x}\right)^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{2x}\right)^3}{3x}=1\cdot\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, получаем ответ: $e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^3\sqrt[3]{2x}}{3x}}=e^{\frac{2}{3}}$.

Задания

I уровень

1.1. Вычислите предел функции, используя первый замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 5x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3\mathrm{tg}3x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 5x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x-\sin 5x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+5x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{2x^2}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin 3x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\sin^2 x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x-\sin^2 2x}{3x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin 2x}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{5x^2}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin 3x}-\frac{1}{\mathrm{tg}3x}\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\mathrm{tg}2x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-1}$.

1.2. Вычислите предел функции, используя второй замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x-4}\right)^{4x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+5}\right)^{2x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{1-2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x}\right)^{-2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-3x}{2-3x}\right)^{2x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x-3}\right)^{x-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{2x+5}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-2x}{1-2x}\right)^{x^2-4}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{x+2}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{5x+1}\right)^{x^2}$.

II уровень

2.1. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$;

3) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$; 6) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\mathrm{tg}^2 2x}$.

2.2. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2-5x}{1-5x}\right)^{2x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x-1}\right)^{-x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x+1}{x^3+2}\right)^{2x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x^2+18x-15}{7x^2+11x+15}\right)^{x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2x+3}{2x^2+2x+1}\right)^{3x^2-7}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\cdot(\ln(x+2)-\ln(x+3))$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(2x-3)-\ln(2x-1))$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)(\ln(3x^2-1)-\ln(3x^2+4))$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3+3)\cdot(\ln(x^3+4)-\ln(x^3+1))$.

Ш уровень

3.1. Найдите предел функции, сделав соответствующую замену переменной:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(3-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(4x-\pi)\mathrm{tg}3x$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi}(x^2-\pi^2)\mathrm{ctg}x$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2-2\sin x}{\pi-2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-\sin 3x}{\pi-6x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$.

3.2. Вычислите предел функции с помощью второго замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{x^2}{x-3}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{4x}{x-2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-11)^{\frac{x+2}{x-4}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{5-x}{x-2}}$.

11. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

11.1. Понятие производной. Правила дифференцирования. Таблица производных

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности, x – точка из рассматриваемой окрестности. ***Приращением аргумента в точке*** x_0 называется величина $\Delta x = x - x_0$, ***приращением функции*** – величина $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Если выразить $x = x_0 + \Delta x$, то $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $f(x)$ ***в точке*** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, при условии, что предел существует.

Производную в точке обозначают $f'(x_0)$. По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (11.1)$$

или, что то же,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad (11.2)$$

при условии, что пределы (11.1) и (11.2) существуют.

Функция, имеющая производную в точке, называется ***дифференцируемой*** в этой точке. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Производная функции в точке – это число. Если функция дифференцируема на некотором множестве X из ее области определения, то $f'(x)$ также является функцией (ее обозначают также y').

Основные правила дифференцирования

Пусть $U = U(x)$, $V = V(x)$ – дифференцируемые функции. Справедливы формулы:

$$C' = 0, \text{ где } C = const; \qquad (11.3)$$

$$(CU)' = CU', \text{ где } C = const; \qquad (11.4)$$

$$(U \pm V)' = U' \pm V'; \qquad (11.5)$$

$$(UV)' = U'V + UV'; \qquad (11.6)$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}. \qquad (11.7)$$

Таблица производных основных элементарных функций

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, в частности:

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

$(a^x)' = a^x \ln a$, где $a > 0$, $a \neq 1$, в частности, $(e^x) = e^x$;

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, в частности

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$;

$(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

$(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

$(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

$$\left(\text{arcctg}x\right)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\left(\text{sh}x\right)' = \text{ch}x;$$

$$\left(\text{ch}x\right)' = \text{sh}x;$$

$$\left(\text{th}x\right)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x};$$

$$\left(\text{cth}x\right)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}.$$

Пример 1. Найти производную функции $y(x)$ в точке x_0, пользуясь определением, если:

1) $y(x) = 2x^2 + 3x + 4,\ \ x_0 = 2;$ 2) $y(x) = \sin x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}.$

Решение. 1) Используем определение производной в виде формулы (11.1):

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x) + 4 - 2x_0^2 - 3x_0 - 4}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2\Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 4 - 2x_0^2 - 3x_0 - 4}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x_0\Delta x + 2\Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}(4x_0 + 2\Delta x - 3) = 4x_0 - 3.$$

Поскольку по условию $x_0 = 2$, то $y'(2) = 4\cdot 2 - 3 = 5.$

2) По формуле (11.1) получаем:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0}{\Delta x}.$$

Далее, применив тригонометрическую формулу

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x_0\cos\Delta x - \cos x_0\sin\Delta x - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x_0\cos\Delta x}{\Delta x} -$$

$$- \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x_0\sin\Delta x}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x_0}{\Delta x}.$$

Так как при $\Delta x\to 0$ имеем $\cos\Delta x = \cos 0 = 1$ и, применив формулу первого замечательного предела, получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x_0}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0}\cos x_0 - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos x_0 = \cos x_0.$$

Поскольку по условию $x_0 = \frac{\pi}{4}$, то $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Пример 2. Вычислить производную функции $y = 2x^4,\ x\in\mathbf{R}$, пользуясь определением производной.

Решение. Пусть x – произвольная фиксированная точка из $D(y) = \mathbf{R}$. Пользуясь формулой (11.1), имеем:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^4 - 2x^4}{\Delta x} =$$

$$= 2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = 2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} =$$

$$= 2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4}{\Delta x} =$$

$$= 2\lim_{\Delta x\to 0}\left(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right) = 2\cdot 4x^3 = 8x^3.$$

Таким образом, операция дифференцирования ставит в соответствие функции $y = 2x^4,\ \ x\in\mathbf{R}$, функцию $y' = 8x^3,\ x\in\mathbf{R}$.

Пример 3. Найти производную функции:

1) $y = 4\cos x + \frac{\log_2 x}{3} - \text{arctg}x;$ 2) $y = 2\sqrt{x}\,\text{tg}x + 5;$ 3) $y = \frac{x^3}{x^5 - 1}.$

Решение. 1) Дифференцируем функцию и используем формулы (11.4), (11.5) и таблицу производных, получаем:

$$y' = \left(4\cos x + \frac{\log_2 x}{3} - \text{arctg}x\right)' = 4(\cos x)' + \left(\frac{\log_2 x}{3}\right)' - (\text{arctg}x)' =$$

$$= 4(\cos x)' + \frac{1}{3}(\log_2 x)' - (\text{arctg}x)' = -4\sin x + \frac{1}{3x\ln 2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

2) Дифференцируем функцию по формулам (11.3)–(11.6) и соответствующим формулам таблицы производных:

$$y' = \left(2\sqrt{x}\,\text{tg}x\right)' + 5' = 2\left(\sqrt{x}\,\text{tg}x\right)' + 0 = 2\left(\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\text{tg}x + \sqrt{x}\cdot(\text{tg}x)'\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\text{tg}x + \sqrt{x}\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{\text{tg}x}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{\cos^2 x}.$$

3) Дифференцируем функцию по формулам (11.7), (11.5), (11.3) и первой формуле таблицы производных:

$$y'=\left(\frac{x^3}{x^5-1}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'\cdot\left(x^5-1\right)-x^3\cdot\left(x^5-1\right)'}{\left(x^5-1\right)^2}=\frac{3x^2\cdot\left(x^5-1\right)-x^3\cdot\left(5x^4-0\right)}{\left(x^5-1\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^7-3x^2-5x^7}{\left(x^5-1\right)^2}=\frac{-2x^7-3x^2}{\left(x^5-1\right)^2}.$$

Пример 4. Вычислить производную функции, используя правила дифференцирования и таблицу производных:

1) $y=\log_2(x^5 2^x)^{\sin x}$; 2) $y=\ln\left(\dfrac{3x^2}{e^{\operatorname{th}x}}\right)$;

3) $y=\dfrac{\sqrt{2}\cos x-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}{\log_3 x\left(2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{2}\sin x\right)}$.

Решение. 1) Преобразуем функцию, пользуясь свойствами логарифма:

$$y=\log_2(x^5 2^x)^{\sin x}=\sin x\cdot\log_2(x^5 2^x)=\sin x(\log_2 x^5+\log_2 2^x)=$$
$$=\sin x(5\log_2 x+x).$$

Полученное выражение дифференцируем по формулам (11.4)–(11.6) и формулам таблицы производных:

$$y'=(\sin x(5\log_2 x+x))'=(\sin x)'\cdot(5\log_2 x+x)+\sin x\cdot(\log_2 x+x)'=$$
$$=\cos x(5\log_2 x+x)+\sin x\left(\frac{5}{x\ln 2}+1\right).$$

2) Перед дифференцированием преобразуем выражение, пользуясь свойствами логарифма:

$$y=\ln\left(\frac{3x^2}{e^{thx}}\right)=\ln(3x^2)-\ln e^{\operatorname{th}x}=\ln 3+\ln x^2-\operatorname{th}x\cdot\ln e=\ln 3+2\ln x-\operatorname{th}x.$$

Дальше воспользуемся формулами (11.3)–(11.5) и таблицей производных:

$$y'=(\ln 3+2\ln x-\operatorname{th}x)'=(\ln 3)'+2(\ln x)'-(\operatorname{th}x)'=\frac{2}{x}-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

3) Так как непосредственное дифференцирование вызывает значительные трудности, предварительно упростим выражение по формулам тригонометрии:

$$y=\frac{\sqrt{2}\cos x-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\log_3 x\left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{2}\sin x\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos x-2\cos\frac{\pi}{4}\cos x+2\sin\frac{\pi}{4}\sin x}{\log_3 x\left(2\sin\frac{\pi}{4}\cos x+2\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\sqrt{2}\sin x\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos x-\frac{2\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{2\sqrt{2}}{2}\sin x}{\log_3 x\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{2\sqrt{2}}{2}\sin x-\sqrt{2}\sin x\right)}=\frac{\sqrt{2}\sin x}{\log_3 x(\sqrt{2}\cos x)}=\frac{\operatorname{tg}x}{\log_3 x}.$$

Полученное выражение дифференцируем по формуле (11.7) и соответствующим формулам таблицы производных:

$$y'=\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\log_3 x}\right)'=\frac{(\operatorname{tg}x)'\cdot\log_3 x-\operatorname{tg}x\cdot(\log_3 x)'}{\log_3^2 x}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\log_3 x-\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{x\ln 3}}{\log_3^2 x}=$$

$$=\frac{x\ln 3\cdot\log_3 x-\operatorname{tg}x\cdot\cos^2 x}{x\ln 3\cdot\log_3^2 x\cdot\cos^2 x}.$$

Задания

I уровень

1.1. Пользуясь определением, найдите производную функции:

1) $y=3-2x$; 2) $y=4x^2+6x+5$; 3) $y=\dfrac{1}{2x-1}$.

1.2. Найдите производную функции:

1) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{5}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt[6]{x}+9$; 2) $y=\dfrac{x^3+3}{4+x+x^2}$;

3) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{x}}$; 4) $y=\dfrac{2\left(3x^3+4x^2-x-2\right)}{15\sqrt[3]{x}}$;

5) $y=\dfrac{\left(2x^2-1\right)\tilde{n}\operatorname{tg}x}{3x^3}$; 6) $y=\dfrac{\left(\sqrt[3]{x^2}+x^3-2\right)}{24\operatorname{ch}x\log_3 x}$;

7) $y = e^x(1+x^2)$;   8) $y = \ln x \arcsin x$.

1.3. Найдите $y'(0)$, если:

1) $y = 19x^6 + \sqrt[3]{x^5} - 9x^{30}$;   2) $y = (2x-3)\cdot(1-x^3)$;

3) $y = \sqrt{x}(2x^2 - x)$;   4) $y = \dfrac{\text{sh}x+1}{\text{ch}x}$;

5) $y = \dfrac{e^x - \text{tg}x}{e^x + \text{tg}x}$;   6) $y = \dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1}$.

1.4. Вычислите:

1) $f'(0) - g'(2)$, если $f(x) = 3x^3 - 4{,}5x^2 + 2x + 5$, $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$;

2) $f'(1) + g'(1)$, если $f(x) = 4x + 10 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{4}{x}$,

$g(x) = \sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - x)$;

3) $f'(1) + f'(-1)$, если $f(x) = x^5 + x^3 - 2x + 5$.

1.5. Вычислите $f'(2)$, если $f(x) = \dfrac{2\lg x}{\lg e} - \dfrac{1}{4}x + \log_5 2$.

1.6. Вычислите $f'(0)$, если $f(x) = \dfrac{x^3 + 1 + \sin x}{\cos x}$.

1.7. Решите уравнение:

1) $f'(x) = 0$, где $f(x) = \dfrac{8}{3}x^3 - 2x + \dfrac{10}{3}$;

2) $f'(x) = 0$, где $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{14}{3}x^3 - \dfrac{49}{2}x^2 + 2$.

II уровень

2.1. Найдите производную y', предварительно преобразовав выражение:

1) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{x-1}$;   2) $y = \dfrac{5x^2 + 4x - 1}{5x^2 - 6x + 1}$;

3) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;   4) $y = \dfrac{(x-2)^6 \cdot (x^3 + 2x^2 + 4x)^3}{(x^4 - 2x^3 - 8x + 16)^3} \cdot 9^{\log_3 x}$.

2.2. Для функции $f(x) = \ln x(1 + \ln^2 x)$ найдите $f'(1)$.

2.3. Известно, что $f(x) = 2\sin 2x + 3\cos x + \dfrac{\pi}{2}$. Найдите $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

2.4. Решите неравенство $f'(x) > g'(x)$, где $f(x) = x^2 + x - \sqrt{2}$, $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$.

III уровень

3.1. Вычислите $f'(x_0)$, если:

1) $f(x) = 2\cos x \cos(0{,}5 - x)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $f(x) = 2\sin x \sin(0{,}5\pi - x)$, $x_0 = \pi$.

3.2. Пользуясь определением производной, найдите $f'(x)$, если $f(x) = \begin{cases} e^{x\cdot\sin\frac{3}{5}x} - 1, & \text{åñëè } x \neq 0, \\ 0, & \text{åñëè } x = 0. \end{cases}$

3.3. Найдите значение производной функции $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ в точке $x = \alpha$, если $\text{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$.

3.4. Найдите сумму значений производной функции $y(x)$ в точках $x = 1$ и $x = 0$, если $y = \begin{cases} x^3 \cos x, & \text{ïðè } x \neq 0, \\ 0, & \text{ïðè } x = 0. \end{cases}$

11.2. Производная сложной функции

Если $y=f(u)$ и $u=g(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции $y=f\left(g(x)\right)$ вычисляется по формуле

$$y'_x=f_u{}'\cdot g'(x). \qquad (11.8)$$

Обобщенная таблица производных

$\left(u(x)^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}\cdot u'(x)$, где $\alpha\in\mathbf{R}$, в частности:

$\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}\cdot u'(x)$,

$\left(\dfrac{1}{u(x)}\right)'=-\dfrac{1}{u^2(x)}\cdot u'(x)$;

$\left(a^{u(x)}\right)'=a^{u(x)}\ln a\cdot u'(x)$, где $a>0$, $a\neq1$, в частности, $\left(e^{u(x)}\right)=e^{u(x)}\cdot u'(x)$;

$\left(\log_a u(x)\right)'=\dfrac{1}{u(x)\ln a}\cdot u'(x)$, где $x>0$, $a>0$, $a\neq1$, в частности, $\left(\ln u(x)\right)'=\dfrac{1}{u(x)}\cdot u'(x)$;

$\left(\sin u(x)\right)'=\cos u(x)\cdot u'(x)$;

$\left(\cos u(x)\right)'=-\sin u(x)\cdot u'(x)$;

$\left(\mathrm{tg}u(x)\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 u(x)}\cdot u'(x)$;

$\left(\mathrm{ctg}u(x)\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u(x)}\cdot u'(x)$;

$\left(\arcsin u(x)\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}}\cdot u'(x)$;

$\left(\arccos u(x)\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}}\cdot u'(x)$;

$\left(\mathrm{arctg}u(x)\right)'=\dfrac{1}{1+u(x)^2}\cdot u'(x)$;

$\left(\mathrm{arcctg}u(x)\right)'=-\dfrac{1}{1+u^2(x)}\cdot u'(x)$;

$\left(\mathrm{sh}u(x)\right)'=\mathrm{ch}u(x)\cdot u'(x)$;

$\left(\mathrm{ch}u(x)\right)'=\mathrm{sh}u(x)\cdot u'(x)$;

$\left(\mathrm{th}u(x)\right)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}u^2(x)}\cdot u'(x)$;

$\left(\mathrm{cth}u(x)\right)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}u^2(x)}\cdot u'(x)$.

Если для функции $y=f(x)$ существует обратная функция $x=\varphi(y)$, которая имеет производную $\varphi'(y)\neq0$, то верна формула

$$y'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}. \qquad (11.9)$$

Пример 1. Найти производную функции:

1) $y=\mathrm{sh}2^x$; 2) $y=\ln\sqrt{\dfrac{x^5-2\sin x}{x^4+3x}}$;

3) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; 4) $y=\ln\mathrm{tg}\dfrac{2x+1}{4}$;

5) $y=\arccos^2\sqrt{\lg(x+1)}$; 6) $y=\ln\dfrac{3\cos(x^2)\mathrm{arctg}\sqrt[3]{x}}{4\sqrt{\mathrm{sh}x}}$.

Решение. 1) Функцию $y=\mathrm{sh}2^x$ необходимо рассматривать как сложную функцию, где $y=f(u)=\mathrm{sh}u$ и $u=u(x)=2^x$ – дифференцируемые функции своих аргументов. Тогда, согласно формуле (11.8) и соответствующим формулам таблицы производных, получим:

$$y'=f'(u)\cdot u'(x)=(\mathrm{sh}u)'\cdot(2^x)'=\mathrm{ch}u\cdot2^x\cdot\ln2=\ln2\cdot2^x\cdot\mathrm{ch}2^x.$$

2) Сначала преобразуем функцию, используя свойства логарифмов:

$$y=\ln\sqrt{\frac{x^5-2\sin x}{x^4+3x}}=\frac{1}{2}\ln\left(x^5-2\sin x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^4+3x\right).$$

Вычисляем производную, используя правило дифференцирования суммы функций, формулу (11.8) и обобщенную таблицу производных:

$$y'=\frac{1}{2}\left(\ln\left(x^5-2\sin x\right)\right)'-\frac{1}{2}\left(\ln\left(x^4+3x\right)\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^5-2\sin x\right)'}{x^5-2\sin x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^4+3x\right)'}{x^4+3x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^5\right)'-2\left(\sin x\right)'}{x^5-2\sin x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^4\right)'+\left(3x\right)'}{x^4+3x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5x^4-2\cos x}{x^5-2\sin x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4x^3+3}{x^4+3x}.$$

3) Рассмотрим функцию как $y=\arcsin g\left(x\right)$, где $g\left(x\right)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ – также сложная функция. Применив формулу (11.8) дифференцирования сложной функции, обобщенную таблицу производных, а также правило дифференцирования частного двух функций, получим:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x-1+x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{2\cdot\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\left(1-x\right)'\cdot\left(1+x\right)-\left(1-x\right)\cdot\left(1+x\right)'}{\left(1+x\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-\left(1+x\right)-\left(1-x\right)}{\left(1+x\right)^2}=\frac{1+x}{2\sqrt{2x\left(1-x\right)}}\cdot\frac{-1-x+x-1}{\left(1+x\right)^2}=$$

$$=\frac{-2}{2\sqrt{2x\left(1-x\right)}\cdot\left(1+x\right)}=\frac{-1}{\left(1+x\right)\cdot\sqrt{2x\left(1-x\right)}}.$$

4) Пусть $g\left(x\right)=\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}$, тогда $y=\ln g\left(x\right)$. Согласно формуле (11.8), получим:

$$y'=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}\right)'=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{2x+1}{4}}\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)'=$$

$$=\frac{\cos\frac{2x+1}{4}}{\sin\frac{2x+1}{4}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{2x+1}{4}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{2x+1}{4}\cdot\cos\frac{2x+1}{4}}=\frac{1}{\sin\frac{2x+1}{2}}.$$

5) Рассмотрим функцию как $y=\left(g\left(x\right)\right)^2$, где $g\left(x\right)=\arccos\sqrt{\lg\left(x+1\right)}$.

Функцию $g\left(x\right)$ можно представить в виде $g\left(x\right)=\sqrt{h\left(x\right)}$, где $h\left(x\right)=\lg\left(x+1\right)$. Тогда:

$$y'=2\arccos\sqrt{\lg\left(x+1\right)}\cdot\left(\arccos\sqrt{\lg\left(x+1\right)}\right)'=$$

$$=\arccos\sqrt{\lg\left(x+1\right)}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\lg\left(x+1\right)}}\right)\cdot\left(\sqrt{\lg\left(x+1\right)}\right)'=$$

$$=-\frac{\arccos\sqrt{\lg\left(x+1\right)}}{\sqrt{1-\lg\left(x+1\right)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\lg\left(x+1\right)}}\cdot\left(\lg\left(x+1\right)\right)'=$$

$$=-\frac{\arccos\sqrt{\lg\left(x+1\right)}}{2\sqrt{\lg\left(x+1\right)}\cdot\sqrt{1-\lg\left(x+1\right)}}\cdot\frac{1}{\left(x+1\right)\ln 10}\cdot\left(x+1\right)'=$$

$$=\frac{-\arccos\sqrt{\lg\left(x+1\right)}}{2\left(x+1\right)\ln 10\sqrt{\lg\left(x+1\right)}\cdot\sqrt{1-\lg\left(x+1\right)}}.$$

6) Перед тем как дифференцировать функцию, преобразуем выражение, пользуясь свойствами логарифма:

$$y=\ln\frac{3\cos(x^2)\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}{4\sqrt{\operatorname{sh}x}}=\ln(3\cos(x^2)\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{3}}))-\ln(4\operatorname{sh}^{\frac{1}{2}}x)=$$

$$=\ln 3+\ln\cos(x^2)+\ln\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{3}})-\ln 4-\frac{1}{2}\ln\operatorname{sh}x.$$

Продифференцируем полученное выражение по формулам (11.3)–(11.5), (11.8) и соответствующим формулам таблицы производных:

$$y'=(\ln 3+\ln\cos(x^2)+\ln\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{3}})-\ln 4-\frac{1}{2}\ln\operatorname{sh}x)'=$$

$$=(\ln 3)'+(\ln\cos(x^2))'+(\ln\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{3}}))'-(\ln 4)'-(\frac{1}{2}\ln\operatorname{sh}x)'=$$

$$=0+\frac{(\cos(x^2))'}{\cos x^2}+\frac{(\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{3}}))'}{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}-0-\frac{(\operatorname{sh}x)'}{2\operatorname{sh}x}=$$

$$=\frac{-\sin x^2\cdot(x^2)'}{\cos x^2}+\frac{(x^{\frac{1}{3}})'}{(1+\sqrt[3]{x^2})\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}-\frac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}x}=$$

$$=\frac{-2x\sin x^2}{\cos x^2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}-\frac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}x}.$$

Применив далее формулы тригонометрии, окончательно получим:

$$y'=-2x\operatorname{tg}x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}\operatorname{cth}x.$$

Пример 2. Вычислить $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $y=\cos^3\varphi$.

Решение. Это сложная функция с промежуточным аргументом $\cos\varphi$. Дифференцируем ее по формуле (11.8). При этом пользуемся первой формулой обобщенной таблицы производных при условии $\alpha=3$:

$$y'=\left(\cos^3\varphi\right)'=3\cos^2\varphi\left(\cos\varphi\right)'=-3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi.$$

Вычислим значение производной при $\varphi=\frac{\pi}{4}$:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 3. Вычислить $y'(1)-y'(-1)$, если $y=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Преобразуем функцию, используя свойства логарифмов:

$$y=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln x-\ln\sqrt{1+x^2}=\ln x-\ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Теперь продифференцируем выражение по формулам (11.3), (11.5), (11.8) и соответствующим формулам таблицы производных. Функцию $y=\ln(1+x^2)$ рассмотрим как $y=f(u)=\ln u$, где $u=1+x^2$.

$$y'=(\ln x)'-\frac{1}{2}(\ln(1+x^2))'=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{2(1+x^2)}\cdot 2x=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x(1+x^2)}.$$

Теперь вычислим

$$y'(1)=\frac{1}{1(1+1^2)}=\frac{1}{2}\ \text{ и }\ y'(-1)=\frac{1}{(-1)\cdot\left(1+(-1)^2\right)}=-\frac{1}{2}.$$

Тогда $y'(1)-y'(-1)=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$

Задания

I уровень

1.1. Найдите производную функции:

1) $y=(2x^2+4x-3)^8$;
2) $y=\sqrt{9-x^2}$;

3) $y=\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$;
4) $y=\sqrt[5]{(2x^2-4x^3)^4}$;
5) $y=\frac{\sqrt{5-x^2}}{5+x}$;
6) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
7) $y=\left(8x^3-21\right)\cdot\sqrt[3]{\left(7+4x^3\right)^2}$;
8) $y=3^{\ln x}$;
9) $y=3^{10^{\sqrt{x^2+4x}}}$;
10) $y=\frac{\cos 3x}{x}$;
11) $y=\sin^3 5x^2$;
12) $y=\mathrm{ctgtg}^2\,3x$;
13) $y=\arccos^2 2x$;
14) $y=(1+\mathrm{tg}^2 3x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$;
15) $y=x\arcsin 2x$;
16) $y=\arcsin\frac{x^2-2}{x^2+2}$;
17) $y=\arccos^3\frac{x}{2}$;
18) $y=\ln(e^{2x}+1)-2\mathrm{arctg}e^x$;
19) $y=\log_2^3 x^4$;
20) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(-x+2\right)^3}$.

1.2. Найдите производную функции при данном значении аргумента:

1) $f(t)=t^2+e^{2t}$, $t_0=0$;
2) $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$, $x_0=3$;
3) $f(x)=(x+1)\cdot\sqrt{x^2-1}$, $x_0=\sqrt{2}$;
4) $f(x)=\ln\cos x$, $x_0=-\frac{\pi}{3}$;
5) $f(t)=\sin t-\cos^2 t$, $t_0=0$;
6) $f(y)=e^{\cos 2y}$, $y_0=\frac{\pi}{4}$;
7) $f(x)=\mathrm{arctg}\sqrt{x}$, $x_0=\frac{1}{4}$;
8) $f(x)=\arccos\sqrt{1-x}$, $x_0=\frac{1}{2}$.

1.3. Решите неравенство $f'(x)>g'(x)$, если $f(x)=x+\ln(x-5)$ и $g(x)=\ln(x-1)$.

II уровень

2.1. Вычислите y', если

1) $y=\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-\ln(\sqrt{1+e^x}+1)$;
2) $y=\ln^2 x-\ln\ln x$;

3) $y=\ln\lg(3-2x^3)$;

4) $y=\log_3\ln(3x+2)$;

5) $y=\log_2\log_3\log_5 x$;

6) $y=\mathrm{tg}\sin^2\cos x$;

7) $y=\mathrm{ctg}\log_3\sin 2x$;

8) $y=(7x^2-2)\sin^3\dfrac{x}{2}$;

9) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin e^{-x}$;

10) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$;

11) $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{3x-1}}\log_3(x-2x^2)$;

12) $y=\dfrac{\mathrm{arcctg}(3x+4)}{(x+2)^3}$;

13) $y=(3x^2-4)\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}$;

14) $y=(x^3+3x)2^{\cos\frac{x}{3}}$.

2.2. Вычислите производную функции при заданном значении аргумента:

1) $y=x\mathrm{arctg}x+\ln(1+x^2)$, $x_0=1$;

2) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{5x-1}+x\ln x$, $x_0=1$;

3) $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right)$, $x_0=2$;

4) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}$, $x_0=1$;

5) $y=e^x(\mathrm{ch}2x+2\mathrm{sh}2x)$, $x_0=0$;

6) $y=\ln(1+x^4)+\mathrm{arctg}\sqrt{x}$, $x_0=1$;

7) $y=x\cdot\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\dfrac{x}{2}$, $x_0=0$;

8) $y=e^{x^2-1}+\ln(x^2+3)$, $x_0=1$.

2.3. Вычислите значение производной $f'(x_0)$, предварительно упростив выражение:

1) $f(x)=\dfrac{e^{-3x}-e^{3x}}{3}$, $x_0=0$;

2) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $x_0=0$;

3) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}}$, $x_0=1$;

4) $f(x)=\dfrac{xe^{x^2}+xe^{-x^2}}{4}$, $x_0=-1$.

2.4. Вычислите производную функции, предварительно упростив выражение:

1) $y=\ln\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}$;

2) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2+x}{2-x}-\dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}x$;

3) $y=\log_3\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}}{8\cos x}+\ln 3$;

4) $y=\ln\dfrac{e^{2x^4+3}\cdot\sqrt[4]{\mathrm{ctg}\left(x^3+4\right)}}{x^5-2}+\sin\ln 5$.

2.5. Известно, что $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^3+1}$ и $g(x)=x\cdot e^{-x}$. Найдите значение выражения $f'(x_0)$, где $x_0=g'(0)$.

2.6. Найдите производную функции $g(x)=f\left(f(x)\right)$, если $f(x)=\sin x^2$.

2.7. Найдите производную функции $g(x)=\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{-1}$, если $f(x)=\cos x^2$.

2.8. Докажите тождество:

1) $f'(x)=2xf(x)+\dfrac{f(0)}{3}-f'(0)=1$, если $f(x)=3e^{x^2}$;

б) $f'(x)+f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}=0$, если $f(x)=\ln x$.

Ш уровень

3.1. Найдите производную функции:

1) $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$;

2) $y=\dfrac{\mathrm{sh}x}{4\mathrm{ch}^4x}+\dfrac{3\mathrm{sh}x}{8\mathrm{ch}^2x}+\dfrac{3}{8}\mathrm{arctg}(\mathrm{sh}x)$;

3) $y=\cos\ln 2-\dfrac{1}{3}\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$;

4) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{\mathrm{th}x}}{1-\sqrt{\mathrm{th}x}}-\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{th}x}$.

3.2. Найдите производную функции, предварительно преобразовав выражение по тригонометрическим формулам:

1) $y = 4\cos 2x \sin 3x \cos x$; 2) $y = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}$;

3) $y = \frac{2(\cos x + \cos 3x)}{2\sin 2x + \sin 4x}$; 4) $y = \frac{2\sin x - \sin 3x + \sin 5x}{\cos x - 2\cos 2x + \cos 3x}$;

5) $y = \frac{\sin x + \sin\frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos\frac{x}{2}}\left(1 + \frac{1}{\cos 2x} + \mathrm{tg}2x\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{\cos 2x} + \mathrm{tg}2x\right)$;

6) $y = \sin(4x + x^2)\cos x - \cos(4x + x^2)\sin x + \sin^2\frac{x}{2}$.

3.3. Дана функция $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$. Определите, чему равно значение выражения

$$f'(0) - \frac{1}{2}f'(x)\cos 2x - 2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(x).$$

3.4. Даны функции $f(x) = 2x^2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ и $g(x) = x - x^2\sin x$. Найдите количество значений x на отрезке $[-\pi; \pi]$, для которых выполняется равенство $f'(x) = g(x)$.

11.3. Уравнение касательной и нормали. Физический смысл производной

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$:

$f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$,

где α – угол наклона касательной к оси Ox. В этом состоит ***геометрический смысл производной***.

Уравнение касательной, проведенной к графику функции

в точке $M_0(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид:

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0). \quad (11.9)$$

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(x)$ перпендикулярно касательной, проведенной в этой точке, называется ***нормалью*** к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 11.1). Уравнение нормали имеет вид:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0), \quad (11.10)$$

где $f'(x_0) \neq 0$.

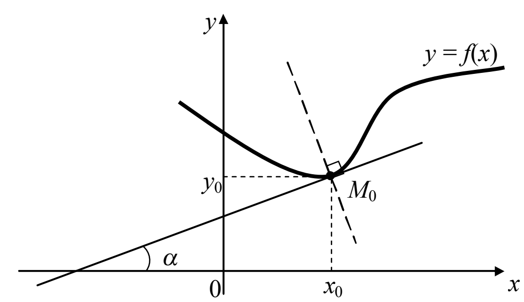


Рис. 11.1

Физические приложения производной

1. Если материальная точка M движется неравномерно по пути, заданному функцией $y = S(t)$, то *мгновенная скорость* движения в момент времени t_0 есть производная от пути S по времени t:

$$v(t_0) = S'(t_0). \quad (11.11)$$

2. Если функцией $y = v(t)$ описывается процесс изменения скорости неравномерного движения в зависимости от времени, то *мгновенное ускорение* материальной точки в момент времени t_0 есть производная от скорости v по времени t:

$$a(t_0) = v'(t_0). \quad (11.12)$$

3. Если $y = Q(T)$ – функция, описывающая процесс измене-

ния количества теплоты, сообщаемой телу при нагревании его до температуры T, то *теплоемкость тела* есть производная от количества теплоты Q по температуре T:

$$C(t_0) = Q'(T_0).$$

4. *Линейная плотность* неоднородного тонкого стержня в точке x_0 есть производная от массы m по длине l:

$$\rho(x_0) = m'(x_0).$$

5. *Мгновенное значение электродвижущей силы индукции* равно скорости изменения магнитного потока, т. е. производной от магнитного потока ϕ по времени t:

$$\varepsilon(t_0) = \phi(t_0).$$

6. *Сила тока в колебательном контуре в момент времени* t_0 равна производной заряда q по времени t:

$$I(t_0) = q'(t_0).$$

Пример 1. Написать уравнение касательной и нормали, проведенной к графику функции $y = \dfrac{4x-3}{3-2x}$ в точке с абсциссой $x = 2$.

Решение. Для нахождения уравнения касательной воспользуемся формулой (11.9). Сначала найдем ординату точки касания $f(x_0)$. Для этого значение $x = 2$ подставим в уравнение функции:

$$f(2) = \frac{4\cdot 2-3}{3-2\cdot 2} = -5.$$

Для нахождения углового коэффициента найдем производную y', используя формулу дифференцирования дроби:

$$y' = \frac{(4x-3)'\cdot(3-2x)-(4x-3)\cdot(3-2x)'}{(3-2x)^2} = \frac{4(3-2x)+2(4x-3)}{(3-2x)^2} =$$

$$= \frac{12-8x+8x-6}{(3-2x)^2} = \frac{6}{(3-2x)^2}.$$

Найдем значение производной при $x = 2$:

$$y'(2) = \frac{6}{(3-2\cdot 2)^2} = 6.$$

Подставив найденные значения в формулу (11.9), получаем уравнение касательной:

$y = 6(x-2)-5$, т. е. $y = 6x-17$.

Чтобы написать уравнение нормали, воспользуемся формулой (11.10):

$$y = -\frac{1}{6}(x-2)-5.$$

Получим, что уравнение нормали, проведенной к заданной кривой в заданной точке, имеет вид $y = -\dfrac{1}{6}x - 4\dfrac{2}{3}$.

Пример 2. Определить, в какой точке кривой $y = 3\sqrt[3]{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 45°.

Решение. Так как тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс равен значению производной в точке касания, найдем производную функции:

$$y' = \left(3x^{\frac{1}{3}}\right)' = 3\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

По условию $y'(x_0) = \mathrm{tg}45°$. Следовательно, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 1$.

Отсюда:

$$\sqrt[3]{x_0{}^2} = 1,\quad x_0{}^2 = 1,\quad x_0 = \pm 1.$$

Получили два значения абсциссы точки касания:

$$x_{01} = -1,\quad x_{02} = 1,$$

т. е. существуют две точки касания, в которых касательная образует угол 45° с осью Ox.

Найдем соответствующие ординаты точек касания, подставляя значения x_{01}, x_{02} в формулу функции:

$$y(x_{01}) = y(-1) = 3\sqrt[3]{-1} = -3;$$

$$y(x_{02}) = y(1) = 3\sqrt[3]{1} = 3.$$

Приходим к ответу: в точках $M_{01}(-1;\ -3)$ и $M_{02}(1;\ 3)$ касательная к заданной кривой образует с осью Ox угол 45°.

Пример 3. Найти острый угол между параболами $y = -3x^2$ и $y = x^2 - 4$ в точке их пересечения, имеющей отрицательную абсциссу.

Решение. Угол между двумя кривыми в точке их пересечения – это угол между касательными к этим кривым, проведенными в точке их пересечения. Тангенс этого угла вычислим по формуле

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1\cdot k_2}\right|, \tag{11.13}$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты касательных, проведенных к параболам в заданной точке.

Найдем точку пересечения этих парабол. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y=-3x^2, \\ y=x^2-4. \end{cases}$$

Отсюда $x=\pm1$. Условию задачи удовлетворяет точка $x_0=-1$. Найдем коэффициент k_1:

$y=-3x^2,\ y'(x)=-6x,\ y'(x_0)=y'(-1)=k_1=-6\cdot(-1)=6.$

Аналогично найдем k_2:

$y=x^2-4,\ y'(x)=2x,\ y'(x_0)=y'(-1)=k_2=-2.$

Воспользуемся формулой (11.13) и получим:

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{-2-6}{1+(-2)\cdot 6}\right|=\left|\frac{-8}{-11}\right|=\frac{8}{11},$$

откуда $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{8}{11}$.

Пример 4. Тело движется прямолинейно по закону

$$S(t)=-\frac{1}{6}t^3+3t^2-5.$$

Найти скорость движения тела в тот момент, когда ускорение равно нулю.

Решение. Согласно формуле (11.11), скорость есть производная функции $S(t)$, а, согласно формуле (11.12), ускорение $a(t)$ есть производная скорости $v(t)$.

Последовательно вычислим производные:

$$v(t)=S'(t)=-\frac{3}{6}t^3+6t=-\frac{1}{2}t^3+6t;$$

$$a(t)=v'(t)=-\frac{3}{2}t^2+6.$$

Найдем момент времени, когда ускорение равно нулю:

$$-\frac{3}{2}t^2+6=0;\ 3t^2=12;\ t=2.$$

Вычислим скорость движения тела в момент времени $t_0=2$:

$$v(t_0)=v(2)=-\frac{1}{2}\cdot 2^3+2\cdot 6=8.$$

Задания

I уровень

1.1. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке x_0:

1) $y=2x\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x_0=4;$ 2) $y=\cos x-\dfrac{x^2}{\pi}+\pi,\ x_0=\pi;$

3) $y=\dfrac{x^2}{x+1},\ x_0=1;$ 4) $y=2^x\cdot\dfrac{3}{\ln 2}+x^2-3,\ x_0=1.$

1.2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{1}{3}(x^3+1)$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

1.3. Найдите угол, под которым график функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат.

1.4. Определите, в какой точке касательная к графику функции $y=\dfrac{2x+2}{x-2}$ образует с осью абсцисс угол 45°.

1.5. Тело движется по закону $s(t)=2t^3-3t+4$. Найдите скорость и ускорение тела в момент времени $t=2$.

1.6. Металлический обруч катится по прямой. Угол φ поворота обруча за t секунд определяется уравнением $\varphi=\dfrac{1}{2}(2t+t^2)$. Найдите скорость и ускорение движения центра обруча.

II уровень

2.1. Найдите, при каких значениях a парабола $y=x^2+ax+4$ касается оси абсцисс, в точке $x=1$.

2.2. В точке $M(5;\ 0)$ проведена касательная к графику функции $y=\frac{30}{x}-\frac{6x}{5}$. Найдите длину отрезка касательной, заключенного между осями координат.

2.3. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\frac{x}{2x-1}$ в точке, ордината которой равна 1.

2.4. Дана кривая $y=2-x^2$. Найдите точку на этом графике, в которой касательная параллельна прямой $y=2x-3$, и напишите уравнение нормали, проведенной в этой точке.

2.5. Касательная к параболе $y=x^2+mx+6$ проходит через начало координат. Найдите значение параметра *m*, при котором абсцисса точки касания положительна, а ордината равна 8.

2.6. Снаряд массой *m* выпущен вертикально вверх из зенитного орудия с начальной скоростью 50 м/с. Найдите кинетическую энергию снаряда в момент времени $t_0=3$. Определите, на какой высоте кинетическая энергия равна нулю.

2.7. Напишите уравнение касательной к кривой $y=\sqrt{\frac{x^2-6x+8}{(x-2)^3}}$ в точке $x_0=5$. Найдите ординату точки пересечения этой касательной с прямой $x-16y-5-0$.

III уровень

3.1. Определите, при каких значениях параметра *m* прямая $x-y-1=0$ является касательной к графику функции $y=x^2+mx-m$.

3.2. К графику функции $f(x)=2x^4-x^3-\frac{4}{3}x+1$ в точке $x=0$ проведена касательная. Найдите расстояние от начала координат до этой касательной.

3.3. К графику функции $y=8x-x^2-10$ проведены две касательные. Первая проводится в точке с абсциссой $x_1=3$, а вторая – в точке, ордината которой равна 6. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и осью ординат.

3.4. Прямая пересекает параболу $y=-x^2+2x+4$ в двух точках $A(-2;\ -4)$ и $B(1;\ 5)$. Напишите уравнение касательной к параболе, параллельной этой секущей. Найдите угол, под которым нормаль, проведенная в точку касания, пересекает ось абсцисс.

3.5. Движения двух материальных точек по одной прямой заданы уравнениями $s(t)=24x^2+24x$ и $s(t)=4x^2-7$. Найдите скорости движения точек в те моменты, когда пройденные ими расстояния равны.

3.6. Масса неоднородного стержня длины *l* вычисляется по формуле $m(l)=50l-\frac{l^3}{3}$. Определите, при каком значении *l* плотность стержня будет втрое меньше, чем в начале стержня.

12. СТЕРЕОМЕТРИЯ

12.1. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

Параллельность прямых и плоскостей

Две прямые в пространстве называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Прямая и плоскость называются ***параллельными***, если они не пересекаются.

Две плоскости называются ***параллельными***, если они не пересекаются.

Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются ***скрещивающимися***.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Признак скрещивающихся прямых. Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещиваются.

Теоремы о параллельных прямых и параллельных плоскостях:

1. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.
2. Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.
3. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной, и только одну.
4. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.
5. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны.
6. Через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести плоскость, параллельную данной, и только одну.

7. Две плоскости, параллельные третьей, параллельны между собой.
8. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Углы между прямыми и плоскостями

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость (угол φ на рис. 12.1).

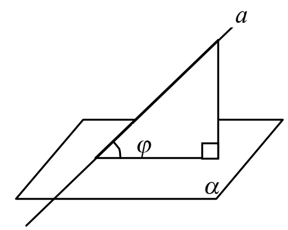


Рис. 12.1

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными соответственно данным скрещивающимся прямым.

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей прямой. Полуплоскости называются ***гранями***, прямая – ***ребром*** двугранного угла.

Линейным углом двугранного угла называется угол между полупрямыми, принадлежащими граням двугранного угла, исходящими из одной точки на ребре и перпендикулярными ребру (угол φ на рис. 12.2).

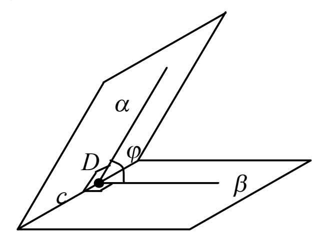


Рис. 12.2

Градусная (радианная) мера двугранного угла равна градусной (радианной) мере его линейного угла.

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Две прямые называются ***перпендикулярными***, если они пересекаются под прямым углом.

Прямая, пересекающая плоскость, называется ***перпендикулярной*** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости.

Две плоскости называются ***перпендикулярными***, если пересекаясь, они образуют прямые двугранные углы.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

Признак перпендикулярности двух плоскостей. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Теоремы о перпендикулярных прямых и плоскостях:

1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
2. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.
3. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.
4. Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Перпендикуляр и наклонная

Теорема. Если из одной точки вне плоскости проведены перпендикуляр и наклонные, то:

1) наклонные, имеющие равные проекции, равны;
2) из двух наклонных больше та, проекция которой больше;
3) равные наклонные имеют равные проекции;
4) из двух проекций больше та, которая соответствует большей наклонной.

Теорема о трех перпендикулярах. Для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной (рис. 12.3).

Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника на плоскость. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению площади многоугольника на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

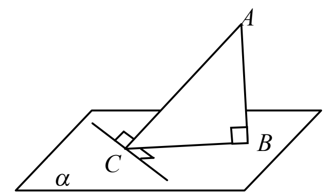


Рис. 12.3

Пример 1. Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости.

Решение. *Анализ.* Предположим, что прямая построена (рис. 12.4). Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости (по признаку параллельности прямой и плоскости). Две параллельные прямые лежат в одной плоскости. Значит, построив плоскость, проходящую через данную точку и произвольную прямую в данной плоскости, можно будет построить параллельную прямую.

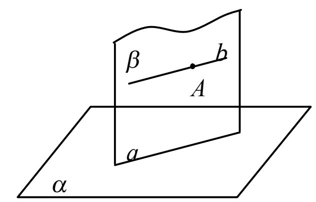


Рис. 12.4

Построение.

1. На плоскости α проводим прямую a.
2. Прямая a и точка A задают плоскость. Построим плоскость β.
3. В плоскости β через точку A проведем прямую b, параллельную прямой a.
4. Построена прямая b, параллельная плоскости α.

Доказательство. По признаку параллельности прямой и плоскости прямая b параллельна плоскости α, так как она параллельна прямой a, принадлежащей плоскости α.

Исследование. Задача имеет бесконечное множество решений, так как прямая a в плоскости α выбирается произвольно.

Пример 2. Определите, на каком расстоянии от плоскости находится точка A, если прямая AB пересекает плоскость под углом 45º, расстояние от точки A до точки B, принадлежащей плоскости, равно $3\sqrt{2}$ см.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.5):

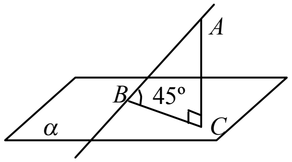


Рис. 12.5

AC – перпендикуляр к плоскости α, AB – наклонная, угол ABC – угол между прямой AB и плоскостью α. Треугольник ABC – прямоугольный, $\angle \tilde{N} = 90°$, так как AC – перпендикуляр. Искомое расстояние от точки A до плоскости – это катет AC прямоугольного треугольника. Зная угол $\angle \grave{A}\hat{A}\tilde{N} = 45°$ и гипотенузу $\grave{A}\hat{A} = 3\sqrt{2}$ ñì , найдем катет AC:

$$\grave{A}\tilde{N} = \grave{A}\hat{A} \cdot \cos 45° = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \quad (\text{ñì}).$$

В ответе получаем: AC = 3 см.

Пример 3. Определите, на каком расстоянии от плоскости равнобедренного треугольника находится точка, удаленная от каждой из вершин треугольника на 13 см, если основание и высота треугольника равны по 8 см.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.6). Точка S удалена от точек A, B и C на одинаковое расстояние. Значит, наклонные SA, SB и SC равные, SO – общий перпендикуляр этих наклонных. По теореме о наклонных и проекциях $AO = BO = CO$.

Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найдем ее радиус:

$$\hat{I}\,\hat{A} = \frac{\grave{A}\hat{A} \cdot \hat{A}\tilde{N} \cdot \grave{A}\tilde{N}}{4S}.$$

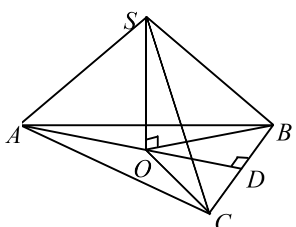


Рис. 12.6

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32 \quad \left(\text{ñì}^{\,2}\right),$$

где BC – основание; AD – высота данного равнобедренного треугольника.

Находим стороны треугольника ABC из прямоугольного треугольника ABD по теореме Пифагора:

$$\grave{A}\hat{A} = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \quad (\text{ñì}).$$

Теперь находим OB:

$$\hat{I}\,\hat{A} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 8}{4 \cdot 32} = 5 \quad (\text{ñì}).$$

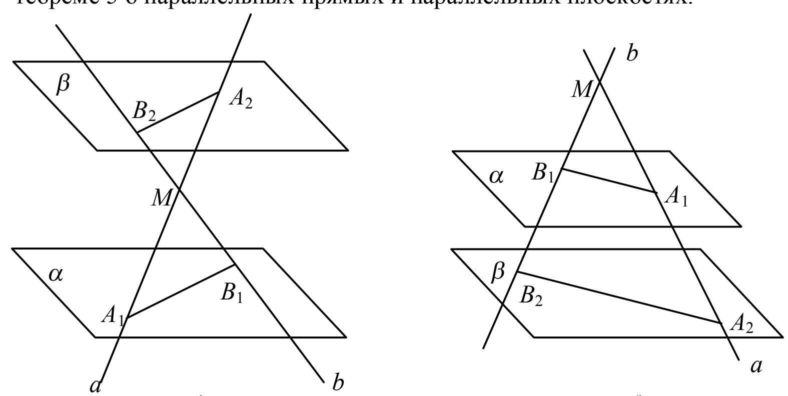
Рассмотрим треугольник SOB: $\angle \hat{I} = 90°$, SB = 13 см, OB = 5 см. Находим длину перпендикуляра SO по теореме Пифагора:

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \quad (\text{ñì}).$$

В ответе получаем: SO = 12 см.

Пример 4. Даны параллельные плоскости α и β. Через точку M, не принадлежащую ни одной из них, проведены прямые a и b, которые пересекают плоскость α в точках A_1 и B_1, а плоскость β – в точках A_2 и B_2. Найти A_1B_1, если известно, что MA_1 = 8 см, A_1A_2 = 12 см, A_2B_2 = 25 см.

Решение. Так как в условии не сказано, как расположена относительно обеих плоскостей точка M, то возможны два варианта: (рис. 12.7, а, б). Рассмотрим каждый из них. Две пересекающиеся прямые a и b задают плоскость. Эта плоскость пересекает две параллельные плоскости α и β по параллельным прямым A_1B_1 и A_2B_2 согласно теореме 5 о параллельных прямых и параллельных плоскостях.



а) б)

Рис. 12.7

Треугольники MA_1B_1 и MA_2B_2 подобны (углы A_2MB_2 и A_1MB_1 – вертикальные, углы MA_1B_1 и MA_2B_2 – внутренние накрест лежащие при параллельных прямых A_1B_1 и A_2B_2 и секущей A_1A_2). Из подобия треугольников следует пропорциональность сторон:

$$\frac{MA_1}{MA_2} = \frac{MB_1}{MB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}.\ \text{Отсюда}\ A_1B_1 = \frac{MA_1 \cdot A_2B_2}{MA_2}.$$

Вариант а):

$$A_1A_2 = A_1M + MA_2 \Rightarrow MA_2 = A_1A_2 - A_1M = 12 - 8 = 4\ (\text{см}).$$

$$A_1B_1 = \frac{8 \cdot 25}{4} = 50\ (\text{см}).$$

Вариант б):

$$MA_2 = MA_1 + A_1A_2 = 8 - 12 = 20\ (\text{см}).$$

$$A_1B_1 = \frac{8 \cdot 25}{20} = 10\ (\text{см}).$$

Получаем ответ: 10 см и 50 см.

Пример 5. Через точку A плоскости γ проведена прямая AB, образующая с плоскостью угол α. Через прямую AB проведена плоскость ρ, образующая с плоскостью γ угол β. Найти угол между проекцией прямой AB на плоскость γ и плоскостью ρ.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.8). Из точки B опустим перпендикуляр на плоскость γ. $\angle BAC = \alpha$. Линейный угол двугранного угла между плоскостями γ и ρ – это угол $\angle BDC = \beta$. Прямая AD перпендикулярна плоскости треугольника DBC, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, так как $AD \perp DB$ и $AD \perp DC$. По признаку перпендикулярности плоскостей плоскость ρ перпендикулярна плоскости треугольника DBC, так как она проходит через прямую AD. Искомый угол построим, опустив перпендикуляр из точки C на плоскость ρ, обозначим его $x = \angle CAM$. Найдем синус этого угла прямоугольного треугольника CAM. Введем вспомогательный отрезок $BC = a$. Из треугольника ABC: $AC = BC \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Из треугольника BMC ($\angle M = 90°$, $\angle B = 90° - \beta$, $BC = a$) найдем:

$$MC = BC \cdot \sin(90° - \beta) = BC \cdot \cos \beta.$$

$$\sin x = \frac{MC}{AC} = \frac{BC \cdot \cos \beta}{BC \cdot \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{a \cdot \cos \beta}{a \cdot \operatorname{ctg} \alpha} = \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда искомый угол $x = \arcsin(\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha)$.

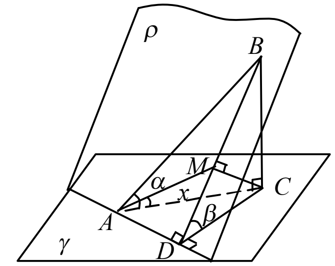


Рис. 12.8

Получаем ответ: $\arcsin(\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha)$.

Задания

I уровень

1.1. Через точку проведите прямую, перпендикулярную двум заданным скрещивающимся прямым.

1.2. Определите, сколько различных плоскостей можно провести:

1) через три различные точки;

2) через четыре различные точки, никакие три из которых не лежат на одной плоскости.

1.3. Через вершины треугольника ABC, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

1.4. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ восставлен перпендикуляр AM к его плоскости.

1) докажите, что треугольники MBC и MDC – прямоугольные;

2) укажите среди отрезков MB, MC, MD и MA отрезок наибольшей и наименьшей длины.

1.5. Грани одного двугранного угла соответственно параллельны граням другого. Определите, какова зависимость между величинами этих двугранных углов.

1.6. Найдите величину двугранного угла, если расстояние от точки, взятой на одной грани, до ребра в 2 раза больше расстояния от точки до плоскости второй грани.

1.7. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние $7\sqrt{2}$, проведены две равные наклонные, образующие угол 60º. Проекции наклонных взаимно перпендикулярны. Найдите длины наклонных.

1.8. Из вершины B квадрата $ABCD$ восставлен перпендикуляр BE к плоскости квадрата. Угол наклона плоскости треугольника ACE к плоскости квадрата равен φ, сторона квадрата равна a. Найдите площадь треугольника ACE.

II уровень

2.1. Через точку, которая не принадлежит ни одной из двух скрещивающихся прямых, проведите прямую, пересекающую обе данные прямые.

2.2. Параллельные прямые a, b и c не лежат в одной плоскости. Через точку A на прямой a проведены перпендикуляры к прямым b и c, пересекающие их соответственно в точках B и C. Докажите, что прямая BC перпендикулярна прямым b и c.

2.3. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная BC. Катеты треугольника AC = 20 см, BC = 15 см. Проекция одного из катетов на плоскость равна 12 см. Найдите проекцию гипотенузы.

2.4. В одной из граней двугранного угла, равного 30º, расположена точка M. Расстояние от нее до ребра угла равно 18 см. Найдите расстояние от проекции точки M на вторую грань до первой грани.

2.5. Концы отрезка AB принадлежат граням двугранного угла, равного 90º. Расстояние от точек A и B до ребра равны соответственно AA_1 = 3 см, BB_1 = 6 см, расстояние между точками на ребре – $\grave{A}_1\hat{A}_1 = \sqrt{55}$ ñì . Найдите длину отрезка AB.

2.6. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы 45º и 30º, а между собой угол 90º. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

2.7. Стороны треугольника равны 15 см, 21 см и 24 см. Точка M удалена от плоскости треугольника на 73 см и находится на одинаковом расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.

2.8. Из центра O окружности, вписанной в треугольник ABC, к плоскости треугольника восставлен перпендикуляр OM. Найдите расстояние от точки M до сторон треугольника, если $AB = BC$ = 10 см, AC = 12 см, OM = 4 см.

2.9. Расстояния от точки M до сторон и вершины прямого угла соответственно равны 4 см, 7 см и 8 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости прямого угла.

2.10. Через основание AB равнобедренного треугольника ABC проведена плоскость под углом β к плоскости треугольника. Вершина C удалена от плоскости на расстояние a. Найдите площадь треугольника ABC, если основание AB равнобедренного треугольника равно его высоте.

III уровень

3.1. Макет прямоугольника $ABCD$ со сторонами a и b перегнут по диагонали BD так, что плоскости треугольников BAD и BCD стали взаимно перпендикулярны. Найдите длину отрезка AC.

3.2. Две прямоугольные трапеции с углами 60º лежат в перпендикулярных плоскостях и имеют большее общее основание. Большие боковые стороны равны 4 см и 8 см. Найдите расстояние между вершинами прямых и вершинами тупых углов трапеций, если вершины их острых углов совпадают.

3.3. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой CD_1 и плоскостью BDC_1.

3.4. На ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P – середина этого ребра. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки C_1, P, D, и найдите площадь этого сечения, если ребро куба равно a.

3.5. Через сторону AD прямоугольника $ABCD$ проведена плоскость α так, что диагональ BD составляет с этой плоскостью угол 30°. Найдите угол между плоскостью прямоугольника и плоскостью α, если $AB = a$, $AD = b$. Определите, при каком соотношении a и b задача имеет решение.

3.6. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от прямых, определенных сторонами треугольника.

12.2. Призма. Параллелепипед

Призмой называется многогранник, две грани которого – равные n-угольники ***(основания)***, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней – параллелограммы ***(боковые грани)***. ***Боковым ребром*** призмы называется сторона боковой грани, не принадлежащая основанию.

Призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскостям оснований, называется ***прямой*** призмой (рис. 12.9). Если боковые ребра не перпендикулярны плоскостям оснований, то призма называется ***наклонной***. ***Правильной*** призмой называется прямая призма, основания которой – правильные многоугольники.

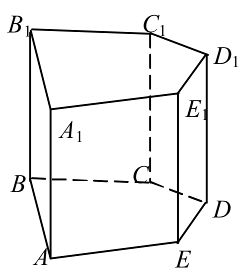


Рис. 12.9

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями оснований. ***Диагональю*** призмы называется отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани. ***Диагональным сечением*** называется сечение призмы плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани. ***Перпендикулярным сечением*** называется сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру призмы.

Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей всех боковых граней. ***Площадью полной поверхности*** называется сумма площадей всех граней призмы (т. е. сумма площадей боковых граней и площадей оснований).

Для произвольной призмы верны формулы:

$$S_{\text{áî ê}} = Pl,$$
$$S_{\text{ïîëí}} = S_{\text{áî ê}} + 2S_{\text{î ñí}}, \qquad (12.1)$$
$$V = S_{\text{î ñí}}H,$$
$$V = Ql,$$

где $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; P – периметр перпендикулярного сечения; l – длина бокового ребра; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; $S_{осн}$ – площадь основания; V – объем призмы; H – высота; Q – площадь перпендикулярного сечения.

Для прямой призмы верны формулы:

$$S_{\text{áî ê}} = pl,$$
$$S_{\text{áî ê}} = pH,$$

где p – периметр основания; l – длина бокового ребра; H – высота.

Параллелепипедом называется призма, основанием которой служит параллелограмм. Параллелепипед, у которого боковые ребра перпендикулярны к основаниям, называется ***прямым*** (рис. 12.10). Если боковые ребра не перпендикулярны основаниям, то параллелепипед называется ***наклонным***. Прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник, называется ***прямоугольным.*** Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется ***кубом.***

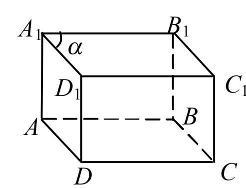


Рис. 12.10

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются ***противолежащими***. Длины ребер, исходящих из одной вершины, называются ***измерениями*** параллелепипеда. Так как параллелепипед – это призма, то основные его элементы определяются аналогично тому, как они определены для призм.

Теоремы:

1. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.
2. В прямоугольном параллелепипеде квадрат длины диагонали равен сумме квадратов трех его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
3. Все четыре диагонали прямоугольного параллелепипеда равны между собой.

Для произвольного параллелепипеда верны формулы:

$S_{бок} = Pl,$

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн},$

$V = S_{осн}H,$

$V = Ql,$

где $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; P – периметр перпендикулярного сечения; l – длина бокового ребра; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; $S_{осн}$ – площадь основания; V – объем призмы; H – высота; Q – площадь перпендикулярного сечения.

Для прямого параллелепипеда верны формулы:

$$S_{бок} = pl, \quad S_{бок} = pH, \qquad (12.2)$$

где p – периметр основания; l – длина бокового ребра; H – высота прямого параллелепипеда.

Для прямоугольного параллелепипеда верны формулы:

$$S_{бок} = pH, \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad V = abc, \qquad (12.3)$$

где p – периметр основания; H – высота; d – диагональ; a, b, c – измерения параллелепипеда.

Для куба верны формулы:

$d = a\sqrt{3},$

$S_{полн} = 6a^2,$

$V = a^3,$

где d – диагональ куба; a – длина ребра.

Пример 1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 33 дм, а его измерения относятся, как 2 : 6 : 9. Найти измерения параллелепипеда.

Решение. Для нахождения измерений параллелепипеда воспользуемся формулой (12.3), т. е. тем фактом, что квадрат гипотенузы прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений. Обозначим через k коэффициент пропорциональности. Тогда измерения параллелепипеда будут равны $2k$, $6k$ и $9k$. Запишем формулу (12.3) для данных задачи:

$33^2 = (2k)^2 + (6k)^2 + (9k)^2$, т. е. $33^2 = 4k^2 + 36k^2 + 81k^2$;

$33^2 = 121k^2.$

Решая это уравнение относительно k, получим:

$33^2 = (11k)^2, \quad k = 3.$

Значит, измерения параллелепипеда равны 6 дм, 18 дм и 27 дм.

Пример 2. Найти объем наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной 8 см, если боковое ребро равно стороне основания и наклонено под углом 60º к основанию.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.11).

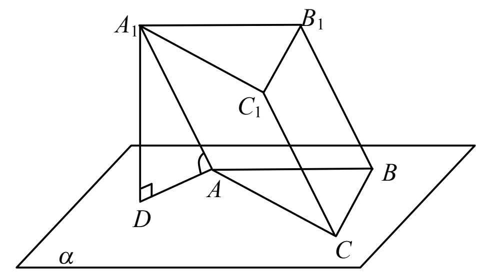


Рис. 12.11

Для того чтобы найти объем наклонной призмы, необходимо знать площадь ее основания и высоту. Площадь основания данной призмы – это площадь равностороннего треугольника со стороной 8 см. Вычислим ее:

$$S_{\hat{\imath}\,\tilde{n}\acute{\imath}} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \quad \left(\text{ñì }^2\right).$$

Высотой призмы является расстояние между ее основаниями. Из вершины A_1 верхнего основания опустим перпендикуляр на плоскость нижнего основания A_1D. Его длина и будет высотой призмы. Рассмотрим ΔA_1AD: $\angle D = 90°$, $\angle A = 60°$, так как это угол наклона бокового ребра A_1A к плоскости основания, A_1A = 8 см. Из этого треугольника находим A_1D:

$$A_1D = AA_1 \cdot \sin\angle A = 8 \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \quad (\text{ñì }).$$

Теперь вычисляем объем по формуле (12.1):

$$V = S_{\hat{\imath}\,\tilde{n}\acute{\imath}} \cdot H = 16\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 192 \quad \left(\text{ñì }^3\right).$$

Получаем ответ: 192 см^3.

Пример 3. Боковое ребро правильной шестиугольной призмы равно 14 см. Площадь наибольшего диагонального сечения равна 168 см^2. Найти площадь полной поверхности призмы.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.12)

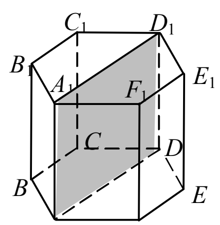


Рис. 12.12

Наибольшее диагональное сечение – прямоугольник AA_1D_1D, так как диагональ AD правильного шестиугольника $ABCDEF$ является наибольшей. Для того чтобы вычислить площадь боковой поверхности призмы, необходимо знать сторону основания и длину бокового ребра.

Зная площадь диагонального сечения (прямоугольника), найдем диагональ основания.

Поскольку $168 = AD \cdot AA_1$, то $AD = \dfrac{168}{AA_1} = \dfrac{168}{14} = 12 \quad (\text{ñì })$.

Так как $AD = 2 \cdot AB$, то AB = 6 см.

Тогда периметр основания равен: $p = 6 \cdot AB = 6 \cdot 6 = 36 \quad (\text{ñì })$.

Найдем площадь боковой поверхности призмы:

$$S_{\acute{a}\hat{\imath}\,\hat{e}} = \eth \cdot \grave{A}\grave{A}_1 = 36 \cdot 14 = 504 \quad \left(\text{ñì }^2\right).$$

Площадь правильного шестиугольника со стороной 6 см равна:

$$S = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot 6^2 = 54\sqrt{3} \quad \left(\text{ñì }^2\right).$$

Находим площадь полной поверхности призмы:

$$S_{\ddot{\imath}\,\hat{\imath}\,\ddot{e}\acute{\imath}} = S_{\acute{a}\hat{\imath}\,\hat{e}} + 2S_{\hat{\imath}\,\tilde{n}\acute{\imath}} = 504 + 2 \cdot 54\sqrt{3} = 504 + 108\sqrt{3} \quad \left(\text{ñì }^2\right).$$

Получаем ответ: $504 + 108\sqrt{3}$ ñì ^{2}.

Пример 4. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Площади диагональных сечений 300 см^2 и 875 см^2. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.13).

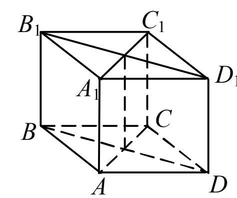


Рис. 12.13

Обозначим сторону ромба через a, диагонали ромба d_1 и d_2, высоту параллелепипеда h. Чтобы найти площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда, необходимо периметр основания умножить на высоту: $S_{\acute{a}\hat{\imath}\,\hat{e}} = \eth\acute{I}$ (формула (12.2)). Периметр основания $p = AB + BC + CD + DA = 4AB = 4a$, так как $ABCD$ – ромб. $H = AA_1 = h$. Таким образом $S_{\acute{a}\hat{\imath}\,\hat{e}} = 4ah$. Необходимо найти a и h.

Рассмотрим диагональные сечения. AA_1C_1C – прямоугольник, одна сторона которого диагональ ромба $AC = d_1$, вторая – боковое ребро $AA_1 = h$, тогда

$$S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1 = h \cdot d_1 = 300 \quad \left(\text{ñì }^2\right).$$

Аналогично для сечения BB_1D_1D получим:

$$S_{BB_1D_1D} = BD \cdot BB_1 = d_2 \cdot h = 875 \quad \left(\text{ñì }^2\right).$$

Используя свойство параллелограмма такое, что сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон, т. е. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$, получаем:

$$\begin{cases} h\cdot d_1 = 300, \\ h\cdot d_2 = 875, \\ 4a^2 = d_1^2 + d_2^2, \\ S_{\text{áî ê}} = 4ah. \end{cases}$$

Из первых двух равенств выразим $d_1^2 + d_2^2$ и подставим в третье. Получим:

$$d_1^2 = \left(\frac{300}{h}\right)^2, \quad d_2^2 = \left(\frac{875}{h}\right)^2, \quad d_1^2 + d_2^2 = \frac{300^2 + 875^2}{h^2},$$

$$4a^2 = \frac{300^2 + 875^2}{h^2} \text{ и далее}$$

$$4a^2h^2 = 300^2 + 875^2 \Rightarrow 2ah = \sqrt{300^2 + 875^2}.$$

Тогда $S_{\text{áî ê}} = 4ah = 2\sqrt{300^2 + 875^2} = 1850 \ \left(\text{ñì}^{\ 2}\right)$.

Получаем ответ: 1850 см^2.

Пример 5. На ребрах CC_1, AD и AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, M, R – середины этих ребер. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, M, R. Считая ребро куба равным 24 см, найти площадь полученного сечения.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.14).

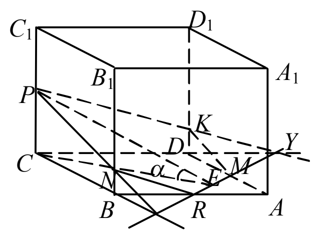


Рис. 12.14

Построение. Прямая MR – след секущей плоскости на плоскости нижнего основания. $MR \cap CB = X$, $PX \cap BB_1 = N$. $MR \cap CD = Y$, $PY \cap DD_1 = K$. Получается искомое сечение куба $PNRMK$. Для вычисления его площади воспользуемся теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника на плоскость. Рассмотрим многоугольник $PNRMK$, его ортогональная проекция – $CBRMD$, определим, где угол между плоскостями этих многоугольников. Ребром двугранного угла является прямая MR. Из точки P опустим перпендикуляр на прямую MR: $PE \perp MR$, точка E – середина отрезка MR. $CE \perp MR$. $\angle PEC = \alpha$ – угол между плоскостью многоугольника и его проекцией. Теорему запишем в виде

$$S_{CBRMD} = S_{PNRMK} \cdot \cos\angle PEC.$$

Тогда $S_{PNRMK} = \dfrac{S_{CBRMD}}{\cos\alpha}$.

Вычислим S_{CBRMD}. Так как $ABCD$ – квадрат, а треугольник AMR – равнобедренный $\left(AR = AM = \dfrac{1}{2}AB\right)$, то

$$S_{CBRMD} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMR} = AB^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot\frac{1}{2}AB = AB^2\left(1 - \frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{7}{8}AB^2 = \frac{7}{8}\cdot 24^2 = 504 \ \left(\text{ñì}^{\ 2}\right).$$

Вычислим $\cos\alpha$:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{PC}{CE} \text{ из } \Delta\, PCE.$$

$$PC = \frac{1}{2}CC_1 = 12 \ (\text{ñì}), \quad CE = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}\cdot 24\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \ (\text{ñì}),$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{18\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Площадь сечения: $S_{PNRMK} = \dfrac{504}{\frac{3}{\sqrt{11}}} = 168\sqrt{11} \ \left(\text{ñì}^{\ 2}\right)$.

Получаем ответ: $168\sqrt{11}$ ñì$^{\ 2}$.

Задания

I уровень

1.1. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 25 см, а диагональ ее боковой грани – 20 см. Найдите высоту призмы.

1.2. Сечение железнодорожной насыпи имеет вид трапеции, нижнее основание которой 14 м, верхнее 8 м и высота 3,2 м. Определите, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.

1.3. В наклонной треугольной призме проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру, равному 12 см. В полученном треугольнике две стороны с длинами $6\sqrt{2}$ см и 8 см образуют угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

1.4. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной 4 см и острым углом 60°. Найдите диагонали параллелепипеда, если длина бокового ребра равна 10 см.

1.5. Основанием прямого параллелепипеда является квадрат с диагональю, равной $8\sqrt{2}$ см. Боковое ребро параллелепипеда 5 см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

1.6. Основанием наклонного параллелепипеда является прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Боковое ребро, равное $6\sqrt{3}$ см, наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем параллелепипеда.

1.7. Вычислите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если два ребра и диагональ, исходящие из одной вершины, равны соответственно 11 см, $\sqrt{23}$ см и 13 см.

1.8. Определите вес каменной колонны, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, с размерами 0,3 м, 0,3 м и 2,5 м, если удельный вес материала равен 2,2 г/см^3.

1.9. Найдите площадь диагонального сечения куба, если диагональ его грани равна $13\sqrt{2}$ дм.

1.10. Найдите объем куба, если расстояние между двумя его вершинами, не лежащими в одной грани, равно $5\sqrt{2}$ см.

II уровень

2.1. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной $4\sqrt{3}$ см. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и высоту призмы,

если известно, что одна из вершин верхнего основания проектируется на середину стороны нижнего основания.

2.2. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник ABC со стороной, равной 3 см. Вершина A_1 проектируется в центр треугольника ABC. Ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2.3. Вычислите объем наклонной треугольной призмы, если стороны основания 7 см, 5 см и 8 см, а высота призмы равна меньшей высоте треугольника-основания.

2.4. Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к боковой грани под углом 30°. Найдите угол наклона к плоскости основания.

2.5. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 14 см, а диагональ – 15 см. Две боковые грани призмы – квадраты. Найдите площадь полной поверхности призмы.

2.6. Диагонали правильной шестиугольной призмы равны 19 см и 21 см. Найдите ее объем.

2.7. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда, у которого диагональ равна 8 дм, и она образует с боковыми гранями углы 30° и 40°.

2.8. Диагонали основания прямого параллелепипеда равны 34 см и 38 см, а площади боковых граней – 800 см^2 и 1200 см^2. Найдите объем параллелепипеда.

2.9. Определите объем прямоугольного параллелепипеда, в котором диагонали боковых граней, выходящие из одной вершины, равны 4 см и 5 см и образуют угол 60°.

2.10. Найдите объем куба, если расстояние от его диагонали до непересекающегося с ней ребра равно $3\sqrt{2}$ мм.

III уровень

3.1. В правильной треугольной призме проведено сечение через сторону основания и середину противоположного бокового ребра. Площадь основания равна 18 см^2, а диагональ боковой грани наклонена к основанию под углом 60°. Найдите площадь сечения.

3.2. В основании призмы лежит квадрат $ABCD$, все вершины которого равноудалены от вершины A_1 верхнего основания. Угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60°. Сторона основания – 12 см. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через вершину C, перпендикулярно ребру AA_1, и найдите его площадь.

3.3. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция. Площадь диагонального сечения и площади параллельных боковых граней соответственно равны 320 см^2, 176 см^2 и 336 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

3.4. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 9 см^2, площади боковых граней 18 см^2, 20 см^2 и 34 см^2. Найдите объем призмы.

3.5. Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда, зная, что диагонали его граней равны 11 см, 19 см и 20 см.

3.6. Углы, образованные диагональю основания прямоугольного параллелепипеда со стороной основания и диагональю параллелепипеда, равны соответственно α и β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если его диагональ равна d.

3.7. Площадь того сечения куба, которое представляет собой правильный шестиугольник, равна $27\sqrt{3}$ см^2. Найдите площадь поверхности куба.

3.8. Измерения одного прямоугольного параллелепипеда относятся как 3 : 5 : 6, а измерения второго – как 3 : 6 : 7. Зная, что их площади полных поверхностей относятся как 7 : 9, найдите отношения объемов.

3.9. Основанием наклонного параллелепипеда является ромб со стороной, равной b, и углом 60°. Боковое ребро также равно b и образует с прилежащими сторонами основания углы по 45°. Найдите объем параллелепипеда.

12.3. Пирамида. Усеченная пирамида

Пирамидой называется многогранник, одна из граней которого – многоугольник (***основание***), а все остальные грани – треугольники с общей вершиной (***боковые грани***) (рис. 12.15). Пирамида называется ***правильной***, если ее основанием является правильный многоугольник и вершина пирамиды проектируется в центр основания (рис. 12.16). Треугольная пирамида, у которой все ребра равны, называется ***тетраэдром***.

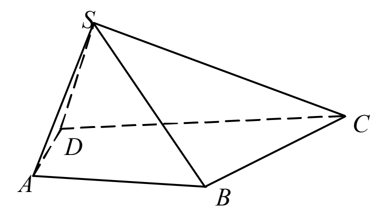


Рис. 12.15

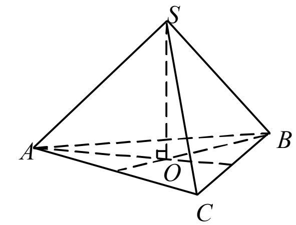


Рис. 12.16

Боковым ребром пирамиды называется сторона боковой грани, не принадлежащая основанию. ***Высотой*** пирамиды называется расстояние от ее вершины до плоскости основания. Все боковые ребра правильной пирамиды равны между собой, все боковые грани – равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины, называется ***апофемой***. ***Диагональным сечением*** называется сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей всех боковых граней. ***Площадью полной поверхности*** называется сумма площадей всех боковых граней и основания.

Теоремы:

1. Если в пирамиде все боковые ребра равнонаклонены к плоскости основания, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.

2. Если в пирамиде все боковые ребра имеют равные длины, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.

3. Если в пирамиде все грани равнонаклонены к плоскости основания, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание.

Для вычисления объема произвольной пирамиды верна формула:

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H\ ,$$

где V – объем; $S_{осн}$ – площадь основания; H – высота пирамиды.

Для правильной пирамиды верны формулы:

$$S_{\text{бок}}=\frac{1}{2}ph_a,$$

$$S_{\text{полн}}=S_{\text{бок}}+S_{\text{осн}}\ ,$$

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H\ ,$$

где $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; p – периметр основания; h_a – апофема; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; $S_{осн}$ – площадь основания; V – объем правильной пирамиды; H – высота.

Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию пирамиды (рис. 12.17). ***Правильной усеченной пирамидой*** называется часть правильной пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию пирамиды.

Основания усеченной пирамиды – подобные многоугольники. ***Боковые грани*** – трапеции. ***Высотой*** усеченной пирамиды называется расстояние между ее основаниями. ***Диагональю*** усеченной пирамиды называется отрезок, соединяющий ее вершины, не лежащие в одной грани. ***Диагональным сечением*** называется сечение усеченной пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.

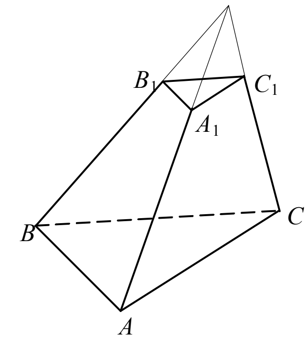


Рис. 12.17

Для усеченной пирамиды справедливы формулы:

$$S_{\text{полн}}=S_{\text{бок}}+S_1+S_2,$$

$$V=\frac{1}{3}H\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right), \qquad (12.4)$$

где $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; S_1, S_2 – площади верхнего и нижнего оснований; V – объем усеченной пирамиды; H – высота.

Для правильной усеченной пирамиды верна формула:

$$S_{\text{бок}}=\frac{1}{2}\left(p_1+p_2\right)h_a,$$

где p_1 , p_2 – периметры оснований; h_a – апофема правильной усеченной пирамиды.

Пример 1. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен 60º. Найти тангенс угла наклона бокового ребра к плоскости основания.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.18).

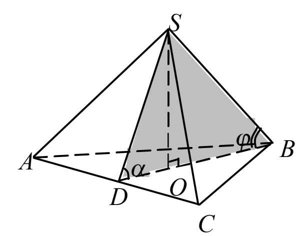


Рис. 12.18

Пирамида правильная, значит в основании лежит равносторонний треугольник и все боковые грани – равные равнобедренные треугольники. Двугранный угол при основании – это угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания. Линейным углом будет угол α между двумя перпендикулярами: $BD \perp AC$ и $SD \perp AC$, т. е. $\alpha = \angle SDB = 60°$. Вершина пирамиды проектируется в центре треугольника (центр описанной окружности и вписанной окружности в треугольник ABC). Угол наклона бокового ребра (например SB) – это угол между самим ребром и его проекцией на плоскость основания. Для ребра SB этим углом будет угол SBD. Чтобы найти тангенс $\angle SBO = \varphi$, необходимо знать катеты SO и OB. Пусть длина отрезка BD равна $3a$. Точкой O отрезок BD делится на части: $BO = \frac{2}{3}BD$ и $DO = \frac{1}{3}BD$. Из $\Delta\ SOD$ находим SO:

$$SO = DO \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \operatorname{tg} 60° = a\sqrt{3}.$$

Из $\Delta\ SBO$ находим: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{SO}{BO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\frac{2}{3} \cdot 3a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Получаем ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 2. Найти объем правильной усеченной четырехугольной пирамиды, если диагонали ее оснований равны $2\sqrt{2}$ см и $8\sqrt{2}$ см, а высота – 4 см.

Решение. Для нахождения объема усеченной пирамиды воспользуемся формулой (12.4). Чтобы найти площади оснований, необходимо найти стороны квадратов-оснований, зная их диагонали. Стороны оснований равны соответственно 2 см и 8 см. Значит, площади оснований равны $S_1 = 4$ см^2 и $S_2 = 64$ см^2. Подставив все данные в формулу, вычислим объем усеченной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \left(4 + 64 + \sqrt{4 \cdot 64}\right) = 112 \ \left(\text{см}^3\right).$$

Получаем ответ: 112 см^3.

Пример 3. Найти площадь боковой грани правильной треугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 10 см и 4 см, а высота пирамиды – 2 см.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.19).

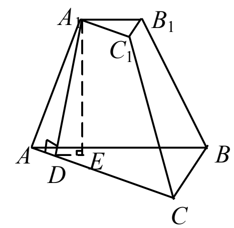


Рис. 12.19

Боковой гранью данной пирамиды является равнобокая трапеция. Для вычисления площади трапеции необходимо знать основания и высоту. Основания даны по условию, остается неизвестной только высота. Ее найдем из $\Delta\ A_1ED$, где A_1E – перпендикуляр из точки A_1 на плоскость нижнего основания, A_1D – перпендикуляр из точки A_1 на AC. $A_1E =$ 2 см, так как это высота пирамиды. Для нахождения DE сделаем дополнительно рисунок, на котором изобразим вид сверху (рис. 12.20). Точка O – проекция центров верхнего и нижнего оснований. $OM \perp A_1C_1$, $OK \perp AC$, $A_1D = MK$, так как $A_1D = ED$ (рис. 12.20) и $ED \perp AC$, $MK \perp AC$. С другой стороны, OK – радиус вписанной в $\Delta\ ABC$ окружности и $OK = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ (см). OM – радиус вписанной в $\Delta\ A_1B_1C_1$ окружности:

$$OM = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ (\text{см}).$$

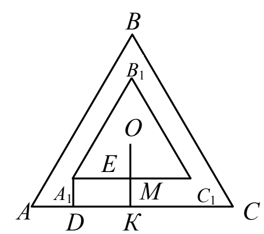


Рис. 12.20

$$MK = OK - OM = \frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \ (\text{см}).\ MK = DE.$$

По теореме Пифагора из $\Delta\ A_1DE$:

$$A_1D = \sqrt{A_1E^2 + DE^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}\ \ (\text{ñì}\ ).$$

Площадь боковой грани: $S = \frac{1}{2}(10+4)\cdot\sqrt{7} = 7\sqrt{7}\ \ \left(\text{ñì}^{\ 2}\right).$

Получаем ответ: $7\sqrt{7}\ \ \text{ñì}^{\ 2}$.

Пример 4. В основании пирамиды лежит равнобокая трапеция, основания которой a и b ($a > b$). Каждая боковая грань образует с плоскостью основания пирамиды угол, равный φ. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.21).

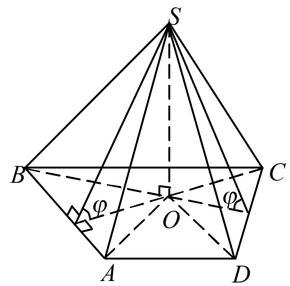


Рис. 12.21

Площадь полной поверхности пирамиды $SABCD$ равна сумме площадей $\Delta\ SAB$, $\Delta\ SAD$, $\Delta\ SBC$, $\Delta\ SDC$ и площади трапеции $ABCD$.

Воспользуемся утверждением, что если все грани пирамиды равнонаклонены к плоскости основания, то вершина проектируется в центр вписанной в основание окружности. Точка O – проекция вершины S на основание пирамиды. Треугольник SOD является ортогональной проекцией треугольника CSD на плоскость основания. По теореме о площади ортогональной проекции плоской фигуры имеем:

$S_{\Delta COD} = S_{\Delta CSD}\cdot\cos\varphi$, откуда получаем: $S_{\Delta CSD} = \frac{S_{\Delta COD}}{\cos\varphi}$.

Аналогично $S_{\Delta SAD} = \frac{S_{\Delta OAD}}{\cos\varphi}$, $S_{\Delta SBD} = \frac{S_{\Delta OBA}}{\cos\varphi}$, $S_{\Delta SBC} = \frac{S_{\Delta OBC}}{\cos\varphi}$ и, значит, $S_{\text{ï î ëí}} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\varphi} + S_{ABCD}$. Таким образом, задача свелась к нахождению площади трапеции $ABCD$. Изобразим трапецию $ABCD$ отдельно (рис. 12.22). Точка O – центр вписанной в трапецию окружности.

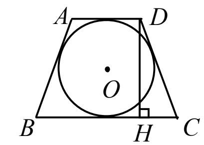


Рис. 12.22

Так как в трапецию можно вписать окружность, то $\grave{A}D + BC = AB + DC$ или $a + b = 2DC$. Из $\Delta\ DCH$ по теореме Пифагора имеем:

$$DH = \sqrt{DC^2 - HC^2},\ \ DC = \frac{a+b}{2},\ \ HC = \frac{a-b}{2}.$$

Тогда $DH = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$

Площадь трапеции: $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot DH = \frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{ab}.$

Следовательно,

$$S_{\text{ï î ëí}} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2\cos\varphi} + \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2\cos\varphi}(1+\cos\varphi).$$

Получаем ответ: $\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2\cos\varphi}(1+\cos\varphi).$

Пример 5. Основание пирамиды – равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней – равнобедренный прямоугольный треугольник, плоскость которого перпендикулярна плоскости основания. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.23).

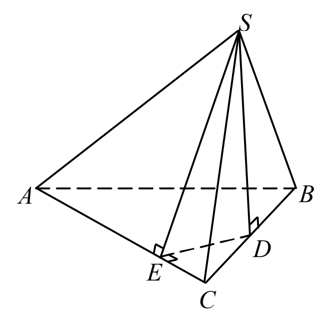


Рис. 12.23

Площадь боковой поверхности данной пирамиды $SABC$ состоит из суммы площадей ее боковых граней. Боковые грани – треугольники, один из которых прямоугольный и равнобедренный ($\Delta\ SCB$, $\angle\ S = 90°$), два других – равные треугольники $(\Delta\ SAC = \Delta\ SAB)$. Рассмотрим $\Delta\ SCB$, $\angle\ S = 90°$, $BC = a$, $SC = SB$ – по условию. Вычислим его площадь: $S_{\Delta SBC} = SD \cdot DB$. Так как $\Delta\ SCB$ равнобедренный, то $DC = DB = \dfrac{a}{2}$, а так как $\angle\ S = 90°$, то $\angle\ C = \angle\ B = 45°$ и, следовательно, в $\Delta\ SDB$ $\angle\ S = \angle\ B = 45°$, $SD = DB = \dfrac{a}{2}$.

Тогда $S_{\Delta SBC} = SD \cdot DB = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{4}$.

Рассмотрим $\Delta\ SAC$. $S_{\Delta SAC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot SE$. SE найдем из $\Delta\ SDE$, $\angle\ D = 90°$. По теореме Пифагора имеем $SE^2 = SD^2 + DE^2$. Найдем DE. Для этого рассмотрим равносторонний треугольник основания (рис. 12.24). $BH \perp AC$, $AH = CH$. $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. В $\Delta\ BHC$ отрезок DE является средней линией, следовательно, $DE = \dfrac{1}{2} BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Находим SE:

$$SE = \sqrt{SD^2 + DE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{\sqrt{7a^2}}{16} = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

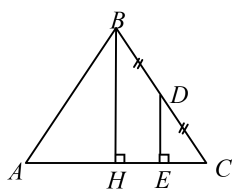


Рис. 12.24

Теперь $S_{\Delta SAC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot SE = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{8}$.

Площадь боковой поверхности пирамиды равна:

$$S_{âî\,ê} = S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SAC} + S_{\Delta SAB} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{7}}{8} + \frac{a^2\sqrt{7}}{8} =$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{7}}{4} = \frac{a^2}{4}\left(1 + \sqrt{7}\right).$$

Получаем ответ: $\dfrac{a^2}{4}\left(1 + \sqrt{7}\right)$.

Задания

I уровень

1.1. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно диагонали основания, длина которой $3\sqrt{2}$ см. Найдите высоту пирамиды и сторону ее основания.

1.2. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60º. Найдите высоту пирамиды.

1.3. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной пирамиды, зная, что апофема равна 10 см, а радиус окружности, описанной около основания, равен 6 см.

1.4. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, сторона которой 6 см, если ее объем равен объему куба со стороной 4 см.

1.5. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны b. Найдите объем пирамиды.

1.6. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 8 см и 4 см. Боковое ребро равно $\sqrt{17}$ см. Найдите высоту пирамиды.

1.7. Боковые ребра правильной усеченной шестиугольной пирамиды наклонены к плоскости нижнего основания под углом 45º. Стороны оснований равны 10 см и 5 см. Найдите длину бокового ребра и высоту пирамиды.

1.8. Боковая грань правильной семиугольной усеченной пирамиды – равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна 13 см, а высота – 8 см. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

1.9. Площадь полной поверхности правильной треугольной усеченной пирамиды равна $34\sqrt{3}+48$ см^2. Стороны оснований – 10 см и 6 см. Найдите тангенс угла между боковым ребром и стороной нижнего основания.

1.10. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 5 см и 17 см, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45º. Вычислите объем пирамиды.

II уровень

2.1. По стороне основания, равной 5 см, и высоте, равной 12 см, найдите апофему и боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды.

2.2. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в смежные боковые грани тетраэдра. Радиус окружности равен $2\sqrt{3}$ дм.

2.3. Основание пирамиды – ромб со стороной 6 см и углом 45º, все двугранные углы при сторонах основания пирамиды равны 30º. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

2.4. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 8 см, а плоский угол при вершине – 30º. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

2.5. Одно из самых грандиозных сооружений древности – пирамида Хеопса – имеет форму правильной четырехугольной пирамиды высотой ≈ 150 м и боковым ребром ≈ 220 м. Найдите объем этой пирамиды.

2.6. Определите объем правильной треугольной пирамиды, если боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60º и удалена от противоположной вершины на расстояние, равное 3 см.

2.7. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 15 дм и 5 дм. Площадь диагонального сечения равна $120\sqrt{2}$ дм^2. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

2.8. Основания усеченной пирамиды – равнобедренные треугольники, их равные стороны – 8 см и 4 см, углы при вершинах треугольников равны по 120º. Ребро, проходящее через вершины данных углов, перпендикулярно плоскости оснований и равно 3 см. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

2.9. Правильная четырехугольная пирамида, сторона основания которой 1500 см и высота 2000 см, пересечена плоскостью, параллельной основанию. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота равна 1400 см.

2.10. В правильной усеченной треугольной пирамиде стороны оснований равны 7 см и 3 см, а апофема – 5 см. Найдите объем пирамиды.

III уровень

3.1. Основанием пирамиды является равносторонний треугольник. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания, две другие образуют с плоскостью основания угол α. Найдите косинус угла между этими гранями.

3.2. Все диагональные сечения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равновелики. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью сечения SAC.

3.3. Точка M – середина ребра SB пирамиды $SABC$, основанием которой является правильный треугольник ABC, а боковое ребро SC перпендикулярно плоскости ABC и $SC = 2AB$. Найдите расстояние от точки M до прямой AC, если $AB = a$.

3.4. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3.5. Основанием пирамиды является равнобокая трапеция, острый угол которой α, а площадь Q. Каждая боковая грань образует с основанием угол β. Найдите объем пирамиды.

3.6. Основание усеченной пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 7 см. Вершина верхнего основания проектируется в точку пересечения диагоналей нижнего основания. Найдите длины остальных боковых ребер и угол наклона большего бокового ребра к плоскости основания.

3.7. Основания усеченной пирамиды – квадраты со сторонами 8 см и 4 см. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и является равнобедренной трапецией. Противолежащая ей грань образует с плоскостью основания угол 60º. Найдите площади боковых граней пирамиды.

3.8. Стороны оснований и высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как 7 : 4 : 2, площадь боковой поверхности равна 110 дм^2. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

3.9. Найдите объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований равны 3 м и 2 м, а площадь боковой поверхности равна сумме площадей оснований.

3.10. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 см и 1 см, высота – 3 см. Через точку пересечения диагоналей пирамиды, параллельно основаниям пирамиды, проведена плоскость, делящая пирамиду на две части. Найдите объем каждой из полученных частей.

12.4. Цилиндр

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная всеми прямыми, проходящими через каждую точку данной кривой параллельно данной прямой (рис. 12.25).

Данная кривая называется ***направляющей***, а прямые – ***образующими*** цилиндрической поверхности.

Прямой круговой цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная всеми прямыми, проходящими через каждую точку данной окружности перпендикулярно плоскости этой окружности. В дальнейшем эту поверхность будем кратко называть цилиндрической (рис. 12.26).

Цилиндром (прямым круговым цилиндром) называется геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, которые перпендикулярны образующим поверхности (рис. 12.27).

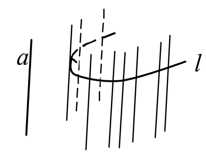


Рис. 12.25

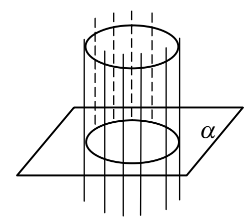


Рис. 12.26

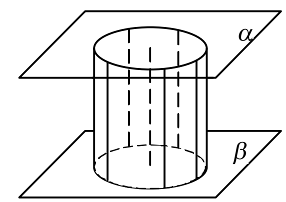


Рис. 12.27

Цилиндр можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей одну из сторон прямоугольника.

Два круга, ограничивающие цилиндр, называются его ***основаниями***. Прямая, проходящая через центры данных кругов, называется ***осью*** цилиндра. Отрезки, образующие цилиндрическую поверхность, называются ***образующими*** цилиндра. ***Высотой*** цилиндра называется расстояние между его основаниями. ***Осевым сечением*** называется сечение, проходящее через ось цилиндра. ***Разверткой боковой поверхности*** цилиндра называется прямоугольник со сторонами, равными длине окружности основания и длине образующей цилиндра.

Для цилиндра верны формулы:

$S_{осн} = \pi R^2,$

$S_{бок} = 2\pi RH,$

$$S_{полн} = 2\pi RH + \pi R^2, \qquad (12.5)$$

$$V = \pi R^2 H, \qquad (12.6)$$

где $S_{осн}$ – площадь основания; R – радиус основания; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; H – высота; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; V – объем цилиндра.

Пример 1. Найти радиус основания цилиндра, если его высота равна 8 см, а диагональ осевого сечения составляет угол 45º с плоскостью основания.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.28).

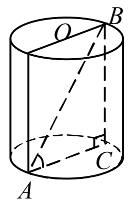


Рис. 12.28

Осевое сечение цилиндра – это прямоугольник, одна сторона которого – образующая (высота) цилиндра, вторая сторона – диаметр основания цилиндра. Рассмотрим треугольник ABC, у которого катетами являются диаметр основания AC и высота BC, а гипотенузой – диагональ сечения AB. Так как $\angle\, \text{ÂÀÑ} = 45°$, то $\Delta\, \text{ÀÂÑ}$ – равнобедренный и $AC = BC = 8$ см. AC – диаметр, значит, радиус $\frac{\text{ÀÑ}}{2} = 4$ ñì .

Получаем ответ: 4 см.

Пример 2. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси. Найти площадь сечения, если радиус основания и высота цилиндра соответственно равны 5 см и 10 см, а расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения – 3 см.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.29).

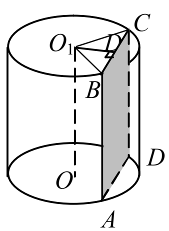


Рис. 12.29

Сечением цилиндра является прямоугольник, одна из сторон которого – хорда окружности основания (BC), вторая – образующая цилиндра (BA). Образующая равна высоте, значит $BA = 10$ см. Необходимо найти хорду BC. Расстояние от оси OO_1 до плоскости сечения – это перпендикуляр, опущенный из точки O_1 на хорду BC. Проведя радиусы O_1C и O_1B, получим равнобедренный треугольник $\hat{I}_1\hat{A}\tilde{N}$. Высота O_1D является его медианой, значит $BD = DC$. Из $\Delta\, \hat{I}_1 D\hat{A}$ найдем BD:

$$BD = \sqrt{O_1B^2 - O_1D^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \ \left(\text{ñì}\right).$$

Тогда $BC = 2BD = 8$ см. Площадь сечения:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 10 \cdot 8 = 80 \ \left(\text{ñì}^2\right).$$

Получаем ответ: 80 см^2.

Пример 3. Диагональ сечения цилиндра, параллельного его оси, равна d и образует угол α с образующей цилиндра. Найти площадь полной поверхности цилиндра, если секущая плоскость отсекает от окружности основания $\frac{1}{3}$ часть.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.30).

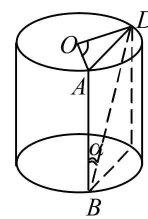


Рис. 12.30

Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле (12.5).

Чтобы найти высоту H (образующую), рассмотрим ΔABD. В нем $\angle A = 90°$, $\angle B = \alpha$, $BD = d$. Тогда

$$AB = BD \cdot \cos\alpha = d \cdot \cos\alpha;$$

$$AD = BD \cdot \sin\alpha = d \cdot \sin\alpha.$$

Для нахождения радиуса рассмотрим равнобедренный ΔAOD, в котором $OA = OD = R$. Так как по условию сечение отсекает от окружности основания $\frac{1}{3}$ часть, значит $\angle AOD = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$. По теореме косинусов найдем радиус:

$$AD^2 = AO^2 + DO^2 - 2AO \cdot OD \cdot \cos 120°,$$

т. е. $d^2 \sin^2\alpha = 2R^2 - 2R^2 \cos 120°$.

Тогда $R^2 = \dfrac{d^2 \sin^2 \alpha}{2\left(1-\cos 120°\right)}$, откуда получаем:

$$R^2 = \frac{d^2 \sin^2 \alpha}{3};\ R = \frac{d \sin \alpha}{3}.$$

Вычисляем:

$$S_{полн} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi \frac{d^2 \sin^2 \alpha}{3} + 2\pi \frac{d \sin \alpha}{3} \cdot d \cos \alpha =$$

$$= \frac{2}{3}\pi d^2 \sin \alpha \left(\sin \alpha + \cos \alpha\right) = \frac{\pi d^2}{3}\left(1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha\right).$$

Получаем ответ: $\frac{1}{3}\pi d^2 \left(1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha\right)$.

Пример 4. Диагонали развертки боковой поверхности цилиндра образуют острый угол, равный α. Высота цилиндра равна h. Найти объем цилиндра.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.31).

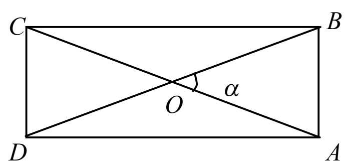


Рис. 12.31

Чтобы найти объем, необходимо знать радиус основания цилиндра. Рассмотрим развертку боковой поверхности цилиндра – прямоугольник $ABCD$: $AD = h$, $BC = 2\pi R$, где R – неизвестный радиус основания. Точка O – середина диагоналей. Из точки O опустим перпендикуляр OD, и вычислим:

$OD = \frac{1}{2} BC = \pi R$, с другой стороны

$$OD = \frac{AD}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = AD \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} AB \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} h \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Приравнивая выражения для нахождения OD, находим R:

$$\pi R = \frac{1}{2} h \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\ \text{т. е. } R = \frac{h \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\pi}.$$

Вычисляем объем цилиндра по формуле (12.6):

$$V = \pi R^2 H = \pi \cdot \frac{h^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{4\pi^2} \cdot h = \frac{h^3 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{4\pi}.$$

Получаем ответ: $\dfrac{h^3 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{4\pi}$.

Задания

I уровень

1.1. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра, высота которого равна 8 см, а радиус основания – 3 см.

1.2. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого 64 см^2. Найдите площадь основания цилиндра.

1.3. Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Найдите площадь его боковой поверхности.

1.4. Высота цилиндра равна 12 см, диагональ осевого сечения – 13 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

1.5. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $6\sqrt{2}$ см и составляет угол 45º с плоскостью основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

1.6. Цилиндр образован вращением прямоугольника вокруг меньшей из сторон. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ прямоугольника равна 6 см и наклонена к большей стороне под углом 30º.

1.7. Определите давление кирпичной цилиндрической колонны на фундамент, если высота колонны равна 2 м, диаметр основания равен 0,75 м. Вес одного кубического метра кирпича необходимо принять равным 1,8 т.

1.8. Развертка боковой поверхности цилиндра – квадрат со стороной 18 см. Найдите объем цилиндра.

1.9. Как изменится объем цилиндра, если радиус основания увеличить в три раза, а высоту уменьшить в четыре раза?

1.10. Два различных цилиндра имеют равные площади боковых поверхностей. Найдите отношение радиусов оснований, если их высоты относятся как 3 : 1.

II уровень

2.1. Цилиндр, радиус основания которого равен 13 см, а высота – 10 см, пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Определите, на каком расстоянии от оси цилиндра проведено сечение.

2.2. Через образующую цилиндра проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Площадь каждого из полученных сечений равна 71 дм^2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

2.3. Радиус основания цилиндра в три раза меньше его высоты. Найдите угол между диагоналями осевого сечения цилиндра.

2.4. Цилиндрическая дымовая труба диаметром 60 см имеет высоту 20 м. Определите, сколько квадратных метров листового железа потребуется на ее изготовление, если на заклепки уходит 10 % всего необходимого количества железа.

2.5. Развертка боковой поверхности цилиндра – квадрат. Найдите объем цилиндра, если радиус его основания на 3 см меньше высоты.

2.6. Площадь основания цилиндра равновелика площади развертки его боковой поверхности. Найдите тангенс угла наклона диагонали осевого сечения к плоскости основания цилиндра.

2.7. Прямоугольник со сторонами m и b является разверткой боковых поверхностей двух различных цилиндров. Найдите отношение объемов этих цилиндров.

2.8. Кусок льда, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, размером 0,6 м × 0,4 м × 0,5 м, помещен в цилиндрический сосуд диаметра 0,9 м. Определите, какова будет высота

слоя воды после того, как лед растает. Удельный вес льда необходимо считать равным 0,92 г/см^3.

III уровень

3.1. Точка окружности верхнего основания цилиндра соединена с точкой окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведенными в эти точки, равен α. Найдите угол между осью цилиндра и отрезком, соединяющим данные точки, если высота цилиндра равна его диаметру.

3.2. К цилиндру проведена касательная прямая под углом α к плоскости основания. Определите расстояние от центра нижнего основания до прямой, если расстояние от центра до точки касания равно d, а радиус основания равен R.

3.3. Высота цилиндра равна радиусу его основания и имеет длину a. Через ось цилиндра проведена вторая цилиндрическая поверхность, которая делит окружность основания на две дуги, длины которых относятся как 2 : 1. Найдите объем большей части цилиндра, на которые цилиндрическая поверхность делит цилиндр.

3.4. Два равных цилиндра, высоты которых больше их диаметров, расположены так, что их оси пересекаются под прямым углом и точка пересечения осей равноудалена от оснований цилиндров. Найдите объем общей части этих цилиндров, если радиус каждого из них равен 1 см.

12.5. Конус. Усеченный конус

Конической поверхностью называется поверхность, образованная всеми прямыми, проходящими через каждую точку данной кривой и точку вне кривой (рис. 12.32).

Данная кривая называется ***направляющей***, прямые – ***образующими***, точка – ***вершиной*** конической поверхности.

Прямой круговой конической поверхностью называется поверхность, образованная всеми прямыми, проходящими через каждую точку данной окружности и точку на прямой, которая перпендикулярна плоскости окружности и проходит через ее центр. В дальнейшем эту поверхность будем кратко называть ***конической поверхностью*** (рис. 12.33).

Конусом (***прямым круговым конусом***) называется геометрическое тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью, которая параллельна плоскости направляющей окружности (рис. 12.34).

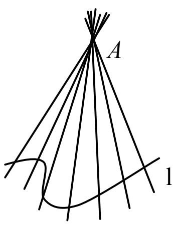


Рис. 12.32

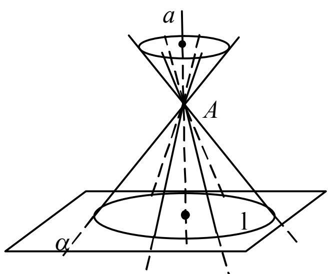


Рис. 12.33

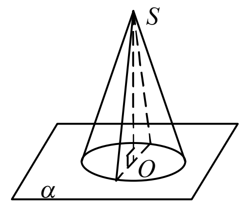


Рис. 12.34

Конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей один из катетов треугольника.

Круг, ограничивающий конус, называется его ***основанием***. Вершина конической поверхности называется ***вершиной*** конуса. Отрезок, соединяющий вершину конуса с центром его основания, называется ***высотой*** конуса. Отрезки, образующие коническую поверхность, называются ***образующими*** конуса. ***Осью*** конуса называется прямая, проходящая через вершину конуса и центр его основания. ***Осевым сечением*** называется сечение, проходящее через ось конуса. ***Разверткой боковой поверхности*** конуса называется сектор, радиус которого равен длине образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса.

Для конуса верны формулы:

$$S_{осн} = \pi R^2,$$
$$S_{бок} = \pi Rl,$$
$$S_{полн} = \pi Rl + \pi R^2, \qquad (12.7)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

где $S_{осн}$ – площадь основания; R – радиус основания; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; l – длина образующей; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; V – объем конуса; H – высота.

Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию конуса (рис. 12.35).

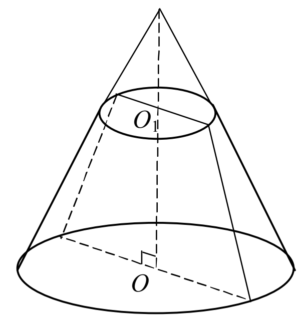


Рис. 12.35

Усеченный конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольной трапеции вокруг оси, содержащей боковую сторону трапеции, перпендикулярную основаниям.

Два круга, ограничивающие конус, называются его ***основаниями***. ***Высотой*** усеченного конуса называется расстояние между его основаниями. Отрезки, образующие коническую поверхность усеченного конуса, называются ***образующими***. Прямая, проходящая через центры оснований, называется ***осью*** усеченного конуса. ***Осевым сечением*** называется сечение, проходящее через ось усеченного конуса.

Для усеченного конуса верны формулы:

$$S_{бок} = \pi(R + r)l,$$
$$S_{полн} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2, \qquad (12.8)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr),$$

где $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; R – радиус нижнего основания; r – радиус верхнего основания; l – длина образующей; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; V – объем усеченного конуса; H – высота.

Пример 1. Сечение конуса, параллельное основанию, делит высоту в отношении 1 : 3, считая от вершины. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса, если радиус основания и высота конуса равны 9 см и 12 см.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.36).

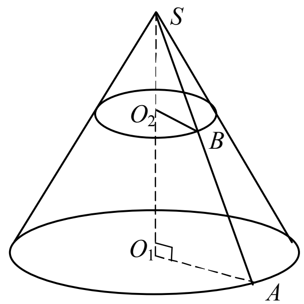


Рис. 12.36

Для вычисления площади боковой поверхности усеченного конуса используем формулу (12.8). Найдем радиусы оснований O_1A и O_2B и образующую AB.

Рассмотрим подобные треугольники SO_2B и SO_1A, коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$, тогда $\frac{SO_2}{SO_1} = \frac{1}{3} = \frac{SB}{SA} = \frac{O_2B}{O_1A}$.

Отсюда $O_2B = \frac{1}{3}OA = 3 \ (\text{ñì})$.

Из ΔSO_1A вычисляем: $SA = \sqrt{SO_1^2 + O_1A^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ (см).

Так как $SB = \frac{1}{3}SA$, то $AB = \frac{2}{3}SA = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10 \ (\text{ñì})$.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна:

$S_{\hat{a}\hat{i}\hat{e}} = \pi(O_1A + O_2B)AB = \pi(9+3)10 = 120\pi \ \left(\text{ñì}^2\right)$.

Получаем ответ: 120π см^2.

Пример 2. Четверть круга радиуса $R = 8$ ñì свернута в коническую поверхность. Найти радиус основания и высоту конуса.

Решение. Круговой сектор является разверткой боковой поверхности конуса. Обозначим r – радиус его основания, H – высота. Пло-

щадь боковой поверхности вычислим по формуле $S_{\hat{a}\hat{i}\hat{e}} = \pi rl$. Она равна площади четверти круга: $\frac{1}{4}\pi R^2$. Получим уравнение $\pi rl = \frac{1}{4}\pi R^2$ с двумя неизвестными r и l (образующая конуса). В данном случае образующая равна радиусу четверти круга R, значит, получим следующее уравнение: $\pi rR = \frac{1}{4}\pi R^2$, откуда $r = \frac{1}{4}R$. Зная радиус основания и образующую, найдем высоту конуса:

$$H = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{16}R^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}R = 2\sqrt{15} \ (\text{ñì}).$$

Получаем ответ: 2 см, $2\sqrt{15}$ см.

Пример 3. Прямоугольная трапеция с острым углом 45º, меньшим основанием 3 см и наклонной боковой стороной, равной $3\sqrt{2}$ ñì, вращается вокруг боковой стороны, перпендикулярной основаниям. Найти объем полученного тела вращения.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.37).

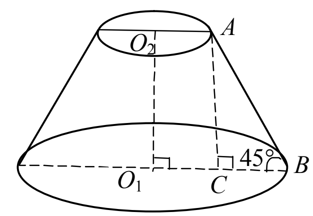


Рис. 12.37

В результате вращения получим усеченный конус. Чтобы найти его объем, вычислим радиус большего основания и высоту. В трапеции O_1O_2AB проведем $AC \perp O_1B$. В ΔABC имеем: $\angle C = 90°$, $\angle B = 45°$, $AB = 3\sqrt{2}$ ñì, значит, этот треугольник равнобедренный $AC = BC = 3$ см.

Так как $O_1C = O_2\grave{A} = 3$ ñì, $O_1B = 6$ ñì, вычислим объем:

$$V = \frac{1}{3}\pi AC(O_1B^2 + O_2A^2 + O_1B \cdot O_2A) = \frac{1}{3}\pi 3(36+9+18) = 63\pi \ \left(\text{ñì}^3\right).$$

Получаем ответ: 63π см^3.

Пример 4. Треугольник ABC со сторонами $BC = 13$ см, $AC = 37$ см и $AB = 40$ см вращается вокруг внешней оси, которая параллельна большей стороне и находится от нее на расстоянии 3 см (ось расположена в плоскости треугольника). Найти площадь поверхности полученного тела вращения.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.38).

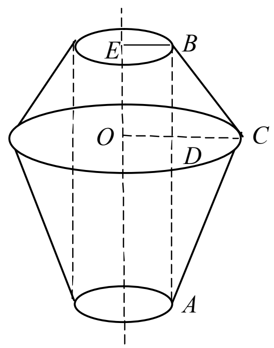


Рис. 12.38

Поверхность полученного тела вращения состоит из боковых поверхностей двух усеченных конусов и боковой поверхности цилиндра. Для того чтобы вычислить эти площади, необходимо знать радиусы оснований конусов и цилиндра (BE и OC), образующие конусов (BC и AC) и высоту цилиндра (AB). Неизвестной является только OC. $OC = OD + DC$. $\hat{I}\,D = 3$ ñì – это расстояние от стороны треугольника до оси вращения. Найдем DC. Площадь треугольника ABC, с одной стороны, равна произведению половины стороны AB на высоту, проведенную к ней DC, с другой стороны, зная все стороны треугольника, его площадь вычислим по формуле Герона

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{45 \cdot 32 \cdot 8 \cdot 5} = 240 \ \left(\text{ñì}^2\right).$$

Но $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot DC = \dfrac{1}{2} 40 DC = 20DC.$

Из этих равенств находим $D\tilde{N} = \dfrac{240}{20} = 12$ (ñì). Подставляя найденные значения, получаем:

$$S = \pi(OC + BE)BC + \pi(OC + BE)AC + 2\pi BE \cdot AB =$$

$$= \pi(15+3)13 + \pi(15+3)37 + 2\pi \cdot 3 \cdot 40 = 1140\pi \ \left(\text{ñì}^2\right).$$

Таким образом, площадь поверхности тела вращения равна 1140π ñì ^{2}.

Пример 5. Два конуса имеют общую высоту, но вершины их лежат в разных концах высоты. Образующая первого конуса равна l, а угол при вершине его осевого сечения равен 2α. Угол при вершине осевого сечения второго конуса равен 2β. Найти объем общей части конусов.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.39).

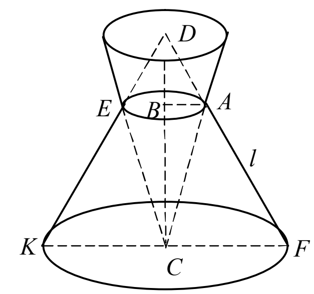


Рис. 12.39

Объем общей части конусов равен сумме объемов конуса с общим основанием радиуса BA, высотой BD и высотой BC соответственно. Получим следующее выражение для вычисления объема:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi AB^2 \cdot BD + \frac{1}{3}\pi AB^2 \cdot BC = \frac{1}{3}\pi AB^2 \cdot DC.$$

Рассмотрим первый конус, у которого образующая DF равна l, а угол при вершине осевого сечения $\angle KDF = 2\alpha$. Треугольник CDF – прямоугольный, $\angle CDF = \alpha$, $DF = l$, тогда $DC = DF\cos\alpha = l\cos\alpha$. Из треугольника BDA ($\angle B = 90°$, $\angle D = \alpha$) выразим DB: $DB = AB\operatorname{ctg}\alpha$. Из треугольника BCA ($\angle B = 90°$, $\angle \tilde{N} = \beta$) выразим BC: $BC = AB\operatorname{ctg}\beta$.

Получим следующее: $D\tilde{N} = l\cos\alpha$ или $DC = AB\operatorname{ctg}\alpha + AB\operatorname{ctg}\beta$. Из этих равенств следует: $l\cos\alpha = AB(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$, откуда имеем:

$$AB = \frac{l\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}.$$

Подставив найденные выражения в формулу для вычисления объема, получим:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{l\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}\right)^2 \cdot l\cos\alpha = \frac{\pi \cdot l^3\cos^3\alpha}{3(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)^2}.$$

Получаем ответ: $\dfrac{\pi \cdot l^3\cos^3\alpha}{3(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)^2}$.

Задания

I уровень

1.1. Площадь основания конуса равна 16π см^2, образующая – 5 см. Найдите высоту конуса.

1.2. Высота усеченного конуса 8 см, радиус нижнего основания на 6 см больше радиуса верхнего основания. Найдите длину образующей усеченного конуса.

1.3. Крыша флигеля имеет коническую форму. Диаметр башни равен 12 м, высота крыши – 8 м. Найдите площадь поверхности крыши.

1.4. Определите, как изменится площадь боковой поверхности конуса, если радиус основания уменьшить в два раза, а образующую увеличить в три раза.

1.5. Щебень укладывается в кучу, имеющую форму конуса с углом откоса 30°. Определите, какой высоты должна быть куча, чтобы ее объем был равен 25 120 м^3. (Число π принять равным 3,14).

1.6. Найдите объем конуса, высота которого 3 см, а осевое сечение – равносторонний треугольник.

1.7. В усеченном конусе через середину высоты, длина которой 5 см, проведено сечение, параллельное основаниям конуса. Найдите его площадь, если площадь осевого сечения усеченного конуса равна 30 см^2.

1.8. Высота усеченного конуса равна 6 см, радиусы оснований – 10 см и 2 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

1.9. Определите, сколько квадратных дециметров материала потребуется на изготовление ведра, если его размеры таковы: диаметр дна 20 см, высота 24 см, диаметр верхней части в два раза больше диаметра дна.

1.10. В усеченном конусе проведено осевое сечение, средняя линия которого равна 11 см. Высота усеченного конуса равна

8 см, а радиус одного из оснований больше другого на 3 см. Найдите объем усеченного конуса.

II уровень

2.1. Найдите высоту конуса, если площадь осевого сечения равна 13 см^2, а площадь основания – 14 см^2.

2.2. В конусе, радиус основания которого 5 см, проведено сечение, параллельное основанию на расстоянии 4 см от него. Площадь сечения равна 4π см^2. Найдите образующие конуса и усеченного конуса.

2.3. Угол развертки боковой поверхности конуса равен 120°. Образующая конуса равна 15 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

2.4. Образующая конуса равна 25 см, а середина его высоты отстоит от образующей на 6 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2.5. Площадь основания в два раза меньше площади боковой поверхности конуса. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

2.6. Для изготовления указки конической формы был взят брусок квадратного сечения размером 20 мм × 20 мм и длиной 500 мм. У полученной указки диаметр основания 18 мм и длина 500 мм. Найдите, какой процент материала пошел в отходы.

2.7. Найдите радиусы оснований усеченного конуса, если высота равна 12 см, образующая – 13 см, а диагональ осевого сечения – 20 см.

2.8. Длины окружностей оснований усеченного конуса равны 96π см и 66π см, а его высота – 20 см. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса.

2.9. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если его образующая равна 17 см, а площадь сечения, проходящего через середину высоты параллельно основаниям, равна 196π см^2.

2.10. Объем усеченного конуса равен 2580π дм^3, его высота равна 15 дм и составляет $\frac{3}{8}$ высоты полного конуса. Найдите радиусы оснований усеченного конуса.

III уровень

3.1. Радиус основания конуса равен R, образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В конусе через вершину под углом φ к его высоте проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.

3.2. Площади оснований усеченного конуса равны 81π см^2 и 225π см^2, образующая относится к высоте как 5 : 4. Найдите площадь осевого сечения.

3.3. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны. Площадь осевого сечения равна 324 см^2. Найдите площади оснований конуса, зная, что радиус одного основания на 2 см больше другого.

3.4. Дана трапеция $ABCD$, у которой AD = 15 см, BC = 9 см, AB = CD = 5 см. Трапеция вращается вокруг оси, проходящей через вершину A и перпендикулярно AD. Найдите площадь поверхности полученного тела вращения.

3.5. Прямая отсекает от сторон прямоугольного треугольника, угол между которыми 60°, отрезки, длины которых составляют четвертую часть длины гипотенузы, считая от вершины этого угла. Найдите отношение площади треугольника к площади поверхности тела, полученного при вращении этого треугольника вокруг прямой.

3.6. Конус лежит на плоскости и катится по ней, вращаясь вокруг своей неподвижной вершины. Высота конуса равна h, образующая – b. Найдите площадь поверхности, описываемой высотой конуса.

3.7. Два конуса имеют общее основание. В общем осевом сечении образующая одного из конусов перпендикулярна противолежащей образующей другого. Объем одного из них вдвое меньше объема другого. Найдите угол между образующей большего конуса и плоскостью оснований конусов.

3.8. Треугольник ABC, у которого AB = 13 см, BC = 20 см, AC = 21 см, вращается вокруг оси, проходящей через вершину A перпендикулярно AC. Найдите объем полученного тела вращения.

3.9. Параллелограмм вращается вокруг оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно большей диагонали. Найдите объем тела вращения, если стороны параллелограмма и его большая диагональ равны соответственно 15 см, 37 см и 44 см.

3.10. Образующая усеченного конуса, равная l, наклонена к плоскости основания под углом α. Отношение площадей оснований конуса равно 4. Найдите объем усеченного конуса.

12.6. Шар

Шар и сфера

Сферой называется множество всех точек пространства, равноудаленных от данной точки.

Данная точка называется ***центром*** сферы. Отрезок, соединяющий центр сферы с любой ее точкой, называется ***радиусом*** сферы. ***Хордой*** называется отрезок, соединяющий две точки сферы. ***Диаметром*** называется хорда, проходящая через центр сферы (рис. 12.40).

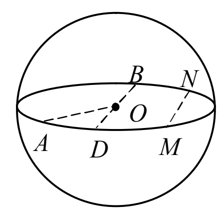


Рис. 12.40

Шаром называется геометрическое тело, ограниченное сферой. Центр, радиус, хорда и диаметр сферы называются соответственно ***центром***, ***радиусом***, ***хордой*** и ***диаметром*** шара (рис. 12.40).

Шар можно рассматривать как тело, полученное при вращении полукруга вокруг оси, содержащей диаметр полукруга.

Сферой также называется поверхность шара.

Плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется касательной ***плоскостью*** к сфере (шару). Общая точка называется ***точкой касания*** сферы (шара) и плоскости.

Теорема. Для того чтобы плоскость была касательной к сфере (шару), необходимо и достаточно, чтобы эта плоскость была перпендикулярна к радиусу сферы (шара), проведенному в точку касания.

Для шара верны формулы:

$S = 4\pi R^2$,

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$,

где S – площадь поверхности шара (площадь сферы); R – радиус шара; V – объем шара.

Шаровой сегмент и сферический сегмент

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью. Круг, получившийся в сечении, называется ***основанием*** сегмента. Отрезок, соединяющий центр основания сегмента с точкой поверхности шара, перпендикулярный основанию, называется ***высотой*** шарового сегмента (рис. 12.41). Поверхность сферической части шарового сегмента называется ***сферическим сегментом***.

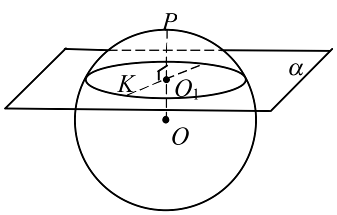


Рис. 12.41

Для шарового сегмента верны формулы:

$S = 2\pi Rh$,

$S_{\text{полн}} = 2\pi Rh + \pi r^2$,

$V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right)$,

где S – площадь сферической части шарового сегмента (площадь сферического сегмента); R – радиус шара; h – высота сегмента; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности шарового сегмента; r – радиус основания шарового сегмента; V – объем шарового сегмента.

Шаровой слой и сферический пояс

Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями. Круги, получившиеся в сечении, называются ***основаниями*** слоя. Расстояние между секущими плоскостями называется ***высотой*** слоя (рис. 12.42). Поверхность сферической части шарового слоя называется ***сферическим поясом***.

Шар, шаровой сегмент и шаровой слой можно рассматривать как геометрические тела вращения. При вращении полукруга вокруг оси, содержащей диаметр полукруга, получается шар, соответственно при вращении частей круга получаются части шара: шаровой сегмент и шаровой слой.

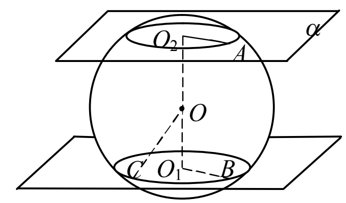


Рис. 12.42

Для шарового слоя верны формулы:

$S_1 = \pi R_1^2,\ \ S_2 = \pi R_2^2$,

$S = 2\pi Rh$,

$S_{\text{полн}} = 2\pi Rh + \pi R_1^2 + \pi R_2^2$,

$V = \dfrac{1}{6}\pi h^3 + \dfrac{1}{2}\pi h\left(R_1^2 + R_2^2\right)$,

где S_1, S_2 – площади оснований; R_1, R_2 – радиусы оснований; S – площадь сферической части шарового слоя (площадь сферического пояса); R – радиус шара; h – высота; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; V – объем шарового слоя.

Шаровой сектор

Шаровым сектором называется геометрическое тело, полученное при вращении кругового сектора (с углом меньше 90°) вокруг оси, содержащей один из боковых радиусов. Дополнение такого тела до шара также называется ***шаровым сектором***. Таким образом, шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса, либо из шарового сегмента без конуса (рис. 12.43 а, б).

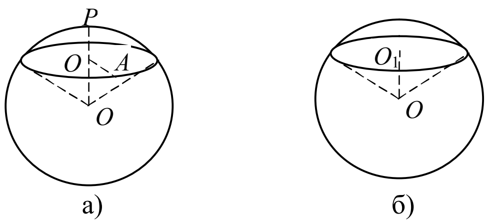


Рис. 12.43

Для шарового сектора верны формулы:

$$S = \pi R(r + 2h),$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где S – площадь поверхности шарового сектора; R – радиус шара; r – радиус основания сегмента; h – высота шарового сегмента; V – объем шарового сектора.

Пример 1. Радиус шара разделили на три равные части. Через точки деления провели два сечения, перпендикулярные радиусу. Найти площадь сферического пояса, если радиус шара равен 15 см.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.44).

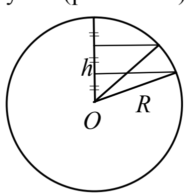


Рис. 12.44

Для того чтобы вычислить площадь сферического пояса, надо знать радиус шара и высоту. Радиус шара известен, а высоту найдем,

зная, что радиус разделен на три равные части: $h = \frac{1}{3}R = 5$ (ñì).

Тогда площадь $S = 2\pi 15 \cdot 5 = 150\pi$ (ñì ^{2}).

Пример 2. Шар пересечен двумя параллельными плоскостями, проходящими перпендикулярно диаметру и по разные стороны от центра шара. Площади сферических сегментов равны 42π см^2 и 70π см^2. Найти радиус шара, если расстояние между плоскостями равно 6 см.

Решение. Рассмотрим два сферических сегмента с площадями: $S_1 = 2\pi Rh$, $S_2 = 2\pi RH$, где R – радиус шара (сферы), h, H – высоты сегментов. Получим уравнения: $2\pi Rh = 42\pi$ и $2\pi RH = 70\pi$. Имеем два уравнения с тремя неизвестными. Составим еще одно уравнение. Диаметр шара равен $h + H + 6 = 2R$. Решим систему:

$$\begin{cases} 2\pi Rh = 42\pi, \\ 2\pi RH = 70\pi, \\ h + H + 6 = 2R. \end{cases}$$

Из двух первых уравнений системы выражаем:

$$\begin{cases} h = \dfrac{21}{R}, \\ H = \dfrac{35}{R}, \end{cases}$$

подставляем в третье уравнение системы: $\frac{21}{R} + \frac{35}{R} + 6 = 2R$. Решаем полученное уравнение: $2R^2 - 6R - 56 = 0$, получаем $R_1 = 7$, $R_2 = -4$.

По условию задачи подходит значение $R_1 = 7$ ñì .

Пример 3. Сечение шара плоскостью, перпендикулярной его диаметру, делит диаметр в отношении 1 : 2. Во сколько раз площадь сечения меньше площади поверхности шара?

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.45).

Рассмотрим диаметральное сечение шара: AD – диаметр, O – центр, $OE=R$ – радиус шара, BE – радиус сечения, перпендикулярного диаметру шара, $AB : BD = 1 : 2$.

Выразим BE через R: $OB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}AD = \frac{1}{6}\cdot 2R = \frac{1}{3}R$.

Из $\Delta\ OBE$ выразим BE через R:

$$BE^2 = OE^2 - OB^2 = R^2 - \frac{1}{9}R^2 = \frac{8}{9}R^2.$$

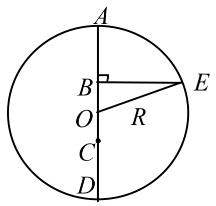


Рис. 12.45

Площадь сечения $S_1 = \pi \frac{8}{9} R^2$, площадь поверхности шара $S_2 = 4\pi R^2$. Получаем отношение $S_2 : S_1 = 9 : 2$.

Следовательно, S_1 меньше S_2 в 4,5 раза.

Пример 4. В шаре, радиус которого 13 см, проведены два взаимно перпендикулярных сечения на расстоянии 4 см и 12 см от центра. Найти длину их общей хорды.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.46).

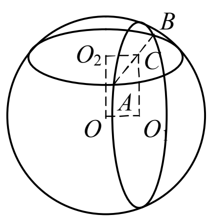


Рис. 12.46

Сечения перпендикулярны, так как $\angle O_2CO_1 = 90°$, OO_2 – расстояние и OO_1 – расстояние. Таким образом, $\angle OO_2C = 90°$ и $\angle OO_1C = 90°$, OC – диагональ прямоугольника OO_2CO_1 и равна

$$OC = \sqrt{OO_1^2 + O_1C^2} = \sqrt{OO_1^2 + OO_2^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \ (\text{ñì}).$$

$\Delta\ O_1AB$ – равнобедренный ($O_1A = O_1B$ – радиусы), тогда перпендикуляр O_1C является и медианой $AC = CB$.

Рассмотрим $\Delta\ OAC$: OA – радиус шара, $\angle OCA = 90°$ ($OC \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах). Находим:

$$AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{13^2 - 160} = 3 \ (\text{ñì}).$$

Общая хорда сечений $AB = 2AC = 6 \ (\text{ñì})$.

Получаем ответ: 6 см.

Пример 5. Площадь осевого сечения шарового сектора в три раза меньше площади большого круга шара. Найти отношение объемов сектора и шара.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.47).

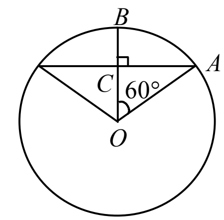


Рис. 12.47

Рассмотрим осевое сечение шара. Осевое сечение шарового сектора – это круговой сектор, площадь которого составляет $\frac{1}{3}$ площади круга. Значит, центральный угол равен 120°, следовательно, $\angle AOB = 60°$. Шаровой сектор можно рассматривать как тело, полученное при вращении сектора AOB вокруг бокового радиуса OB. Высотой данного сектора служит отрезок CB. Объем сектора вычисляется по формуле $V_c = \frac{2}{3}\pi OA^2 \cdot CB$, объем шара – $V_ø = \frac{4}{3}\pi Î Â^3$.

Из ΔAOC ($\angle Ñ = 90°$, $\angle Î = 60°$, OA – радиус) выразим $OC = OA \cos 60° = \frac{1}{2} OA$. Таким образом, $BC = \frac{1}{2} OA$. Следовательно, $V_c = \frac{2}{3}\pi OA^2 \cdot \frac{1}{2} OA$. Сравнивая объемы сектора и шара, получаем, что $V_c : V_ш = 1 : 4$.

Получаем ответ: 1 : 4.

Задания

I уровень

1.1. В шаре на расстоянии 9 см от центра проведено сечение, площадь которого равна 144π см^2. Найдите радиус шара.

1.2. Два равных шара радиусом R = 17 см, взаимно пересекаясь, образуют двояковыпуклую линзу. Найдите ее диаметр, если расстояние между центрами шаров равно R.

1.3. Найдите высоту шарового сегмента, если радиус его основания равен 15 см, а радиус шара – 25 см.

1.4. Шар, радиус которого 15 см, пересечен плоскостью на расстоянии 9 см от центра. Найдите площадь сферической части шарового сегмента.

1.5. Найдите площадь сферы, диаметр которой равен диагонали куба с ребром, равным 2 см.

1.6. Определите, во сколько раз объем Земли больше объема Луны. (Диаметр Земли следует принять за 13 тыс. км, диаметр Луны – 3,5 тыс. км.)

1.7. Объем стенок полого шара равен 876π см^3, а толщина стенок – 3 см. Найдите радиусы наружной и внутренней поверхностей шара.

1.8. Найдите объем шарового сектора, если радиус шара равен 10 см, а радиус основания соответствующего шарового сегмента – 6 см.

1.9. Объем одного шара в 8 раз больше объема другого шара. Определите, во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго.

II уровень

2.1. Стороны треугольника, равные 5 см, 5 см и 6 см, касаются шара, радиус которого 2,5 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

2.2. На поверхности шара даны три точки. Расстояния между ними равны по 7 см. Радиус шара равен 7 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через данные три точки.

2.3. Радиусы оснований шарового слоя равны 63 см и 39 см, его высота – 36 см. Найдите радиус шара.

2.4. Дан шар радиуса 12 см. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая поверхность касается шара, вторая – под углом 60° к радиусу, проведенному в точку касания. Найдите площадь сечения.

2.5. Определите, какую площадь имеет часть поверхности шара, которая видна наблюдателю, находящемуся на расстоянии 10 м от него, если радиус воздушного шара равен 15 м.

2.6. Шар пересечен двумя плоскостями, проходящими через одну точку поверхности шара и образующими угол 60°. Радиус шара равен 4 см. Найдите площади поверхностей отсекаемых сегментов, если окружности их оснований имеют равные радиусы.

2.7. Шар касается граней двугранного угла в 120°. Расстояние от центра шара до ребра угла равно 10 см. Найдите площадь поверхности шара.

2.8. Из шара вырезали шаровой слой, толщина которого равна 9 см, площади оснований – 400π см^2 и 49π см^2. Найдите объемы оставшихся шаровых сегментов.

2.9. Диаметр шара разделен на четыре равные части и через точки деления проведены секущие плоскости, перпендикулярные диаметру. Найдите объемы полученных частей шара, если его радиус равен R.

2.10. В шаре радиуса R просверлено цилиндрическое отверстие. Ось цилиндра проходит через центр шара, диаметр отверстия равен радиусу шара. Найдите объем оставшейся части шара.

III уровень

3.1. Плоскости двух сечений шара взаимно перпендикулярны. Одна из этих плоскостей проходит через центр шара, другая – удалена от него на 12. Общая хорда сечений равна 18. Найдите сумму площадей этих сечений.

3.2. Радиус шара равен 15 м. Вне шара дана точка A на расстоянии 10 м от его поверхности. Найдите радиус такой окружности на поверхности шара, все точки которой отстоят от точки A на 20 м.

3.3. Из точки, взятой на поверхности шара, проведены три равные хорды, угол между каждой парой которых равен α. Найдите длину хорды, если радиус шара равен R.

3.4. Два шара внутренне касаются в точке A, AB – диаметр большего из шаров, BC – касательная к меньшему из них. Найдите радиусы шаров, если $BC = 20$ см, а разность площадей поверхностей шаров равна 700π см^2.

3.5. Вычислите объем шара, радиус которого равняется ребру октаэдра, имеющего поверхность площадью $10\sqrt{75}$.

3.6. Круговой сектор с углом 60° и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов. Найдите объем полученного тела вращения.

12.7. Комбинации геометрических тел

Сфера, вписанная в многогранник или тело вращения

Сфера называется ***вписанной в многогранник***, если она касается всех граней многогранника.

Многогранник соответственно называется ***описанным*** около сферы.

Теоремы:

1. Сферу можно вписать в призму, если призма прямая и ее высота равна диаметру окружности, вписанной в основание призмы.
2. Сферу можно вписать в пирамиду, если в основание можно вписать окружность, а вершина пирамиды ортогонально проектируется в центр этой окружности.
3. Сферу можно вписать в любую правильную пирамиду.

Сфера называется ***вписанной в цилиндр***, если она касается оснований и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр соответственно называется описанным около сферы.

Теорема. Для того чтобы сферу можно было вписать в цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы высота цилиндра равнялась диаметру его основания.

Сфера называется ***вписанной в конус***, если она касается основания и боковой поверхности конуса. Конус соответственно называется ***описанным*** около сферы.

Теорема. Сферу можно вписать в любой конус.

Сфера называется ***вписанной в усеченный конус***, если она касается оснований и боковой поверхности конуса. Усеченный конус соответственно называется ***описанным*** около сферы.

Теорема. Для того чтобы сферу можно было вписать в усеченный конус, необходимо и достаточно, чтобы образующая усеченного конуса равнялась сумме радиусов оснований.

Теорема. Сферу можно вписать в тело вращения, если в осевое сечение можно вписать окружность.

Сфера, описанная около многогранника или тела вращения

Сфера называется ***описанной около многогранника***, если все вершины многогранника лежат на сфере. Многогранник соответственно называется ***вписанным*** в сферу.

Теоремы:

1. Для того чтобы сферу можно было описать около призмы, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и около основания можно было описать окружность.
2. Для того чтобы сферу можно было описать около пирамиды, необходимо и достаточно, чтобы около основания можно было описать окружность.
3. Сферу можно описать около любой правильной пирамиды.

Сфера называется ***описанной около цилиндра***, если окружности оснований цилиндра лежат на сфере. Цилиндр соответственно называется ***вписанным*** в сферу.

Теорема. Сферу можно описать около любого цилиндра.

Сфера называется ***описанной около конуса***, если окружность основания и вершина конуса лежат на сфере. Конус соответственно называется ***вписанным*** в сферу.

Теорема. Сферу можно описать около любого конуса.

Сфера называется ***описанной около усеченного конуса***, если окружности оснований конуса лежат на сфере. Усеченный конус соответственно называется ***вписанным*** в сферу.

Теорема. Сферу можно описать около любого усеченного конуса.

Многогранники и тела вращения

Цилиндр называется ***описанным около призмы***, если окружности оснований цилиндра описаны около оснований призмы, а боковые ребра призмы являются образующими цилиндра. Призма соответственно называется ***вписанной*** в цилиндр.

Теорема. Для того чтобы около призмы можно было описать цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и около ее основания можно было описать окружность.

Цилиндр называется ***вписанным в призму***, если окружности его оснований вписаны в основания призмы, а боковая поверхность касается боковых граней призмы.

Теорема. Для того чтобы в призму можно было вписать цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и в ее основание можно было вписать окружность.

Конус называется ***описанным около пирамиды***, если окружность основания конуса описана около основания пирамиды, а боковые ребра пирамиды являются образующими конуса. Пирамида соответственно называется ***вписанной*** в конус.

Теорема. Для того чтобы около пирамиды можно было описать конус, необходимо и достаточно, чтобы боковые ребра пирамиды были равны.

Конус называется ***вписанным в пирамиду***, если окружность его основания вписана в основание пирамиды, а боковая поверхность касается боковых граней пирамиды. Пирамида соответственно называется ***описанной*** около конуса.

Теорема. Для того чтобы в пирамиду можно было вписать конус, необходимо и достаточно, чтобы в основание пирамиды можно было вписать окружность, а вершина пирамиды ортогонально проектировалась в центр этой окружности.

Пример 1. Шар вписан в прямую призму, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему острым углом α. Найти объем призмы.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.48). Шар вписан в прямую призму, значит, высота призмы равна диаметру шара, а в треугольник основания вписана окружность, радиус которой равен радиусу шара. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, у которого катет $BC = a$, противолежащий ему $\angle BAC = \alpha$. Найдем катет AC и гипотенузу AB:

$$AC = a\cdot\operatorname{ctg}\alpha,\quad AB = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

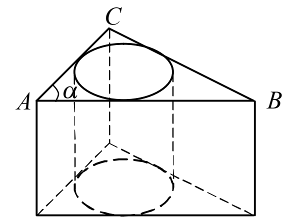


Рис. 12.48

Площадь треугольника ABC равна:

$$S = \frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Вычислим радиус окружности, вписанной в треугольник:

$$r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB+BC+AC} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha}{\frac{a}{\sin\alpha}+a+a\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha+1} =$$

$$= \frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}+1} = \frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}+1} = \frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1}.$$

Вычисляем объем призмы по формуле

$$V = S_{\text{осн}}\cdot H = \frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha\cdot 2\frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1} = \frac{a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1}.$$

Получаем ответ: $V = \dfrac{a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.

Пример 2. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно a. Двугранный угол, образованный смежными боковыми гранями, равен β. Найти радиус шара, описанного около этой пирамиды.

Решение. Сделаем рисунок (рис. 12.49): $ABCD$ – квадрат, SO – высота пирамиды, $\angle AEC = \beta$ – двугранный угол.

Рассмотрим диагональное сечение пирамиды – треугольник SBD ($SB = SD$). Радиусом шара, описанного около данной пирамиды, будет радиус окружности, описанной около треугольника SBD. Найдем его по формуле

$$R = \frac{SB \cdot SD \cdot BD}{4S_{\Delta SBD}} = \frac{SB^2 \cdot BD}{4 \cdot \frac{1}{2} SO \cdot BD} = \frac{SB^2}{2SO}.$$

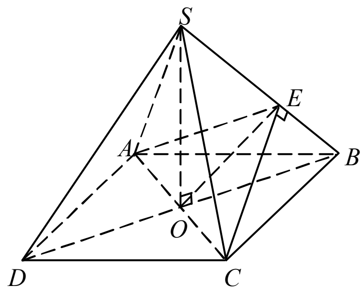


Рис. 12.49

Из подобия треугольников $\Delta OBS \infty \Delta EOS$ ($\angle SOB = \angle SEO = 90°$, $\angle BSO = \angle OSE$) следует пропорциональность сторон: $SB/SO = BO/OE$.

Из треугольника AEO $\left(\angle O = 90°,\ \angle E = \frac{\beta}{2}\right)$ найдем $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{AO}{OE}$.

Так как $AO = BO$, то $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{BO}{OE}$. Следовательно, $\frac{SB}{SO} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Вычисляем радиус окружности:

$$R = \frac{SB^2}{2SO} = \frac{SB}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Получаем ответ: $R = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Пример 3. В усеченный конус вписан шар радиуса R. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найти объем усеченного конуса.

Решение. Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 12.50).

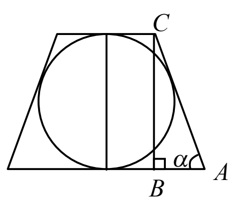


Рис. 12.50

Введем обозначения: R_1 – радиус нижнего основания конуса, R_2 – радиус верхнего основания. Высота данного усеченного конуса будет равна диаметру вписанного в него шара $2R$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC: $\angle B = 90°$, $\angle A = \alpha$, $BC = 2R$. Найдем катет BA и гипотенузу AC: $BA = BC \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, $AC = \frac{BC}{\sin\alpha}$. Так как в усеченный конус вписан шар, то образующая этого конуса равна сумме радиусов его оснований. Получим равенство:

$$R_1 + R_2 = AC = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{2R}{\sin\alpha}.$$

Заметим, что $R_1 - R_2 = BA = BC \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 2R \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

Решив систему $\begin{cases} R_1 + R_2 = \dfrac{2R}{\sin\alpha}, \\ R_1 - R_2 = 2R \cdot \operatorname{ctg}\alpha, \end{cases}$ найдем

$$R_1 = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right) = R \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$R_2 = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\right) = R \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Вычисляем объем усеченного конуса по формуле (12.8).

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2R\left(\left(R \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(R \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 + R \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot R \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \cdot R^3\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1\right) = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \cdot R^3\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}} - 1\right) = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3\left(\frac{4}{\sin^2\alpha} - 1\right).$$

Получаем ответ: $V = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3\left(\frac{4}{\sin^2\alpha} - 1\right)$.

Пример 4. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол φ. Найти площадь полной поверхности конуса.

Решение. Для вычисления площади полной поверхности конуса необходимо знать радиус основания и образующую конуса. Рассмотрим осевое сечение данного конуса – равнобедренный треугольник SAB: $SA = SB$ – образующие, SD – высота, DB – радиус основания конуса (рис. 12.51).

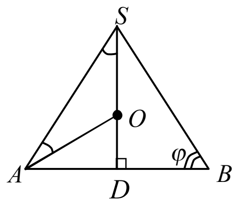


Рис. 12.51

По условию задачи $\angle SAD = \varphi$, следовательно, $\angle ASD = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$. Треугольник AOS – равнобедренный ($AO = OS = R$), поэтому $\angle ASO = \angle SAO = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$. Внешний угол этого треугольника при вершине O равен: $\angle AOD = \angle SAO + \angle ASO = \pi - 2\varphi$.

Из треугольника AOD ($\angle D = 90°$, $AO = R$, $\angle AOD = \pi - 2\varphi$) выразим AD:

$$AD = AO \cdot \sin \angle AOD = R \sin(\pi - 2\varphi) = R \sin 2\varphi.$$

Из треугольника ASD ($\angle D = 90°$, $AD = R \sin 2\varphi$) выразим SA:

$$SA = \frac{AD}{\cos\varphi} = \frac{R\sin 2\varphi}{\cos\varphi} = 2R\sin\varphi.$$

Подставив найденные выражения в формулу для вычисления площади полной поверхности конуса, получим:

$$S_{полн} = \pi R \sin 2\varphi \cdot 2R\sin\varphi + \pi\left(R\sin 2\varphi\right)^2 = \pi R^2 \sin 2\varphi\left(2\sin\varphi + \sin 2\varphi\right) =$$
$$= \pi R^2 \sin 2\varphi \cdot 2\sin\varphi\left(1 + \cos\varphi\right) = 4\pi R^2 \sin 2\varphi \sin\varphi \cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, $S_{полн} = 4\pi R^2 \sin 2\varphi \sin\varphi \cos^2 \dfrac{\varphi}{2}$.

Пример 5. В прямой параллелепипед вписан цилиндр, объем которого в m раз меньше объема параллелепипеда. Найти двугранные углы при боковых ребрах параллелепипеда.

Решение. Двугранными углами при боковых ребрах данного параллелепипеда являются углы параллелограмма, лежащего в его основании. В параллелепипед вписан цилиндр, значит, в параллелограмм основания вписана окружность. Если в четырехугольник вписана окружность, то суммы длин противолежащих сторон четырехугольника

равны. Таким образом, основанием параллелепипеда является ромб. Сделаем рисунок (рис. 12.52).

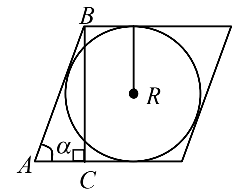


Рис. 12.52

Обозначим искомый угол α. Из треугольника ABC ($\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$) найдем сторону ромба AB и его высоту BC:

$$AB = \frac{2R}{\sin\alpha}, \quad BC = 2R.$$

Так как высоты цилиндра и параллелепипеда равны, то площадь основания цилиндра будет в m раз меньше площади основания параллелепипеда. Запишем равенство: $AB \cdot BC = m \cdot \pi R^2$ и выразим из него $\sin\alpha$: $\dfrac{2R}{\sin\alpha} \cdot 2R = m \cdot \pi R^2$, далее $\sin\alpha = \dfrac{4}{\pi m}$.

Двугранные углы при боковых ребрах параллелепипеда будут равны:

$$\alpha = \arcsin\frac{4}{\pi m} \text{ и } \alpha' = \pi - \arcsin\frac{4}{\pi m}.$$

Задания

I уровень

1.1. В правильную четырехугольную пирамиду с объемом $\dfrac{288}{\pi}$ вписан конус. Найдите его объем.

1.2. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписана пирамида. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Найдите объем пирамиды, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

1.3. Около цилиндра описана правильная четырехугольная призма, периметр основания которой равен 12 см, а площадь боковой поверхности равна 48 см^2. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

1.4. В равносторонний цилиндр, диагональ осевого сечения которого равна $14\sqrt{2}$, вписана правильная шестиугольная призма. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

1.5. Усеченный конус описан около правильной треугольной усеченной пирамиды. Радиус верхнего основания в 2 раза меньше радиуса нижнего основания конуса, высота равна 4 см, а образующая – 5 см. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

1.6. В куб вписан шар и около куба описан шар. Найдите отношение объемов этих шаров.

1.7. В сферу вписан цилиндр. Площадь основания цилиндра равна 16π см^2, тангенс угла наклона диагонали его осевого сечения к плоскости основания равен 3. Найдите площадь сферы.

1.8. В конус, площадь боковой поверхности которого в 2 раза больше площади основания, вписан шар. Найдите радиус шара, если образующая конуса равна 8 см.

1.9. В цилиндрическую мензурку, диаметр которой 2,5 см, заполненную водой до некоторого уровня, опускают четыре равных металлических шарика диаметром 1 см. Определите, на сколько изменится уровень воды в мензурке.

1.10. Основания шарового слоя и цилиндра совпадают. Объем тела, заключенного между их боковыми поверхностями, равен 36π см^3. Найдите высоту шарового слоя.

II уровень

2.1. Равносторонний треугольник, сторона которого равна a, вращается вокруг внешней оси, параллельной его высоте и удаленной от нее на $\frac{3}{2}\grave{a}$. Найдите площадь поверхности полученного тела вращения.

2.2. Усеченный конус вписан в четырехугольную усеченную пирамиду, основание которой – ромб со стороной a и углом α. Площадь боковой поверхности пирамиды равна S, боковые грани наклонены к основанию пирамиды под углом β. Найдите объем усеченного конуса.

2.3. В правильной треугольной призме боковое ребро равно стороне основания. Около призмы описан шар, а около шара описан конус. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем призмы.

2.4. В пирамиде, все боковые грани которой равнонаклонены к плоскости основания, через центр вписанного шара проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Отношение площади сечения пирамиды этой плоскостью к площади основания равно k. Найдите угол между боковой гранью и основанием пирамиды.

2.5. В шар радиуса R вписаны два конуса с общим основанием. Вершины конусов совпадают с противоположными концами диаметра шара. Шаровой сегмент, вмещающий меньший конус, имеет в осевом сечении дугу α. Найдите расстояние между центрами шаров, вписанных в эти конусы.

2.6. Шар касается всех боковых ребер правильной четырехугольной призмы и ее оснований. Найдите отношение площади поверхности шара, лежащей вне призмы, к площади полной поверхности призмы.

2.7. В правильную четырехугольную пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что одна из его образующих расположена на диагонали основания пирамиды, а окружность основания касается двух смежных боковых граней пирамиды. Найдите радиус основания цилиндра, если боковое ребро пирамиды равно b, а угол его наклона к плоскости основания равен α.

2.8. Ребро тетраэдра равно 8 см. Цилиндрическая поверхность проходит через одно из его ребер и через все его вершины. Найдите радиус основания цилиндра.

2.9. Ребра треугольной пирамиды, выходящие из вершины S, попарно перпендикулярны и равны a, b и c. Найдите объем куба, вписанного в пирамиду так, что одна из его вершин совпадает с вершиной S пирамиды.

2.10. В усеченный конус вписан шар, объем которого составляет $\frac{6}{13}$ объема конуса. Найдите угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса.

III уровень

3.1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и образует с плоскостью основания угол α. В пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что его нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите высоту цилиндра.

3.2. Сфера с центром в вершине конуса касается его основания и делит поверхность конуса на две части, имеющие равные площади. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

3.3. В куб, ребро которого равно a, вписан конус с углом между образующими в осевом сечении, равным α. Найдите длину образующей и радиус основания конуса, если его высота лежит на диагонали куба.

3.4. Шар касается трех граней куба, содержащих одну вершину, и проходит через вершину куба, противолежащую первой. Найдите радиус шара, если ребро куба равно a.

3.5. Цилиндр завершен сверху полушаром. Объем тела равен 45π. При каком радиусе полушара полная поверхность тела будет наименьшей?

3.6. В конус с радиусом основания R и высотой H вписан цилиндр. Найдите линейные размеры цилиндра, при которых его объем будет наибольшим.

3.7. Найдите наибольший объем правильной шестиугольной пирамиды вписанной в шар, радиус которого равен R.

3.8. В правильную четырехугольную пирамиду вписан цилиндр так, что окружность его верхнего основания касается всех боковых граней пирамиды, а нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды. Какую часть высоты пирамиды должна составлять высота цилиндра, чтобы объем цилиндра был наибольшим?

Содержание

Таблица 7.3

Свойства функции	Функция			
	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\mathrm{tg}x$	$f(x)=\mathrm{ctg}x$
1. Область определения функции	**R**	**R**	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \text{ї}\in\mathbf{Z}\right)$	$(\pi n;\ \pi+\pi n,\ \text{ї}\in\mathbf{Z})$
2. Область значений функции	[–1; 1]	[–1; 1]	**R**	**R**
3. Четность / нечетность	нечетная	четная	нечетная	нечетная
4. Наименьший положительный период	2π	2π	π	π
5. Координаты точек пересечения графика:				
с осью Ox	$(\pi n;\ 0,\ n\in\mathbf{Z})$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ 0,\ n\in\mathbf{Z}\right)$	$(\pi n;\ 0,\ n\in\mathbf{Z})$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ 0,\ n\in\mathbf{Z}\right)$
с осью Oy	(0; 0)	(0; 1)	(0; 0)	нет
6. Промежутки возрастания функции	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right)$	$(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n,\ n\in\mathbf{Z})$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right)$	нет
7. Промежутки убывания функции	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right)$	$(2\pi n;\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z})$	нет	$(\pi n;\ \pi+\pi n,\ n\in\mathbf{Z})$

Окончание табл. 7.3

Свойства функции	Функция			
	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\mathrm{tg}x$	$f(x)=\mathrm{ctg}x$
8. Экстремумы функций:				
точки минимума	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$\pi+2\pi n$	нет	нет
минимум функции	–1	–1	нет	нет
точки максимума	$\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	нет	нет
максимум функции	1	1	нет	нет
9. Промежутки знакопостоянства функции:				
промежутки, на которых функция принимает положительные значения	$(2\pi n;\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z})$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right)$	$\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right)$	$\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right)$
промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	$(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n,\ n\in\mathbf{Z})$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right)$