**Цифровая обработка сигналов**

Лабораторная работа № 2

Моделирование работы ЛДС во временной и  -области (продолжение)

1. Краткие сведения из теории

1.1. В лабораторной работе № 2 мы начали моделировать работу ЛДС во временной области и исследовать её свойства с помощью формулы свёртки. Известно, однако, что соотношение «вход – выход» ЛДС кроме формулы свёртки может описываться разностным уравнением (РУ)



 (2.1)



РУ (1) задаётся вектором коэффициентов воздействия 

 (2.2)

и вектором коэффициентов реакции 

, (2.3)

причём первый элемент вектора  всегда равен 1 (*а0 = 1*, коэффициент при  в левой части (2.1)). ЛДС называется рекурсивной, если хотя бы один из коэффициентов РУ ***ak*** (2.1) неравен 0 хотя бы для одного из значений ***k***. Порядком рекурсивной ЛДС называют величину, максимальную из сочетания (***P-1, Q-1***). Для нерекурсивной ЛДС все коэффициенты ***ak*** кроме *а0* равны 0 и выражение (2.1) упрощается к виду



 (2.4)

Импульсная характеристика (ИХ)  нерекурсивной ЛДС имеет бесконечную длительность, поэтому рекурсивные ЛДС называют системами с Бесконечной Импульсной Характеристикой, или БИХ–системами (БИХ-фильтрами).

ИХ нерекурсивной ЛДС  имеет конечную длительность, причём значения отсчётов ИХ равны коэффициентам РУ. Нерекурсивные ЛДС называют системами с Конечной Импульсной Характеристикой, или КИХ–системами (КИХ-фильтрами).

1.2. С помощью РУ, также как и с помощью формулы свёртки, можно моделировать работу ЛДС во временной области (пп. 1.2, 1.3 этой лабораторной работы) и исследовать её свойства. Это можно сделать с помощью функции **filter,** формат которой имеет вид

>>filter(b,a,x), (2.5)

где b – вектор коэффициентов воздействия (2.2) в порядке их следования, a – вектор коэффициентов реакции (2.3) (*а0 = 1).*

**Пример 1.** Рассчитать реакцию КИХ-фильтра 2-го порядка, заданного РУ

 (2.6)

при  **Решение:**

>>b=[0.1,0.5,0.7];a=[1];n=0:32;x=sin(0.5.\*n);

>>y=filter(b,a,x);

>>plot(n,x,n,y,’—‘),grid

>>stem(n,x);gtext(‘Input signal’);

>>stem(n,y);gtext(‘Output signal’);

**Пример 2.** Рассчитать реакцию БИХ-фильтра 2-го порядка, заданного РУ (2.7)

 (2.7)

при  **Решение:**

>>b=[1,1,1];a=[1,0.7,–0.25];n=0:32;x=sin(0.5.\*n);

>>y=filter(b,a,х);

>>plot(n,x,n,y,’—‘),grid

>>stem(n,x);gtext(‘Input signal’);

>>stem(n,y);gtext(‘Output signal’);

**Пример 3.** Рассчитать импульсную характеристику  БИХ-фильтра 2-го порядка, заданного РУ (2.7) при исходных данных примера 2. При этом обозначить:  – импульсная характеристика,  – единичный цифровой импульс длиной 51 отсчёт (единица и 50 нулей). **Решение:**

>>b=[1,1,1];a=[1,0.7,–0.25];delta=[1;zeros(50,1)]’;

>>h=filter(b,a,delta);

>>stem(0:length(delta)–1,h);grid

1.3. ИХ может быть рассчитана не только с помощью функции **filter,** но и с помощью функции **impz,** формат которой имеет вид

>>[h,nT]=impz(b,a,N,FS), (2.8)

где b,a – согласно экспликации к формуле (2.5), N – рассчитываемое число отсчётов ИХ (т.к. она бесконечна), FS – частота дискретизации в Гц, h – вектор-столбец отсчётов ИХ, nT – вектор-столбец значений дискретного времени.

**Пример 4.** Рассчитать импульсную характеристику  БИХ-фильтра 2-го порядка, заданного РУ (2.7) при исходных данных примера 2 и N=50, FS=2000 Гц. **Решение:**

>>b=[1,1,1];a=[1,0.7,–0.25];N=50;FS=2000;

>>[h,nT]=impz(b,a,N,FS);

>>stem(nT,h);grid

Если вместо оси nT необходима ось n, удобнее использовать другой формат функции **impz**

h=impz(b,a,n), (2.9)

Решение примера 4 в этом случае будет иметь вид:

>>b=[1,1,1];a=[1,0.7,–0.25];n=0:32;

>>h=impz(b,a,n);

>>stem(n,h); grid

1.4. Моделирование работы ЛДС в -области предполагает вычисление передаточной функции (ПФ) в одном из следующих её видов:

1.4.1. Общий – дробно-рациональная функция

. (2.10)

Её общий вид в **MATLAB** представляется вектором коэффициентов числителя (числитель – numerator) длиной 

num==[b0,b1,b2,…bP–2,bP–1] (2.11)

и вектором коэффициентов знаменателя (знаменатель – denominator) длиной 

den==[1,a1,a2,…aQ–2,aQ–1], (2.12)

причём коэффициенты в векторах располагаются в порядке убывания отрицательных степеней, начиная с коэффициента при нулевой степени.

1.4.2. Произведение простейших множителей 1-й степени



, (2.13)

где *К* – коэффициент усиления,  – соответственно вещественный или комплексный корень числителя (нуль), вещественный или комплексный корень знаменателя (полюс), количество нулей, количество полюсов.

1.4.3. Произведение простейших множителей 2-й степени

 (2.14)

где *k* – номер комплексно-сопряжённой пары нулей или полюсов, *К* – коэффициент усиления, *L –* количество комплексно-сопряжённых пар нулей или полюсов, 

1.4.4. Сумма простых дробей

, (2.15)

или через отрицательные степени (2.16)



где  – константа числителя,  – целая часть .

1.5. Если ПФ ЛДС задана в общем виде (2.10), то для её представления в виде произведения простейших множителей 1-й степени необходимо вычислить нули (корни числителя) и полюсы (корни знаменателя), которые в свою очередь являются корнями полиномов, заданных векторами num (2.11) и den (2.12). Это можно сделать в **MATLAB** с помощью функции **tf2zp,** формат которой имеет вид

>>[q,p,K]=tf2zp(num,den), (2.17)

где параметры функции **tf2zp** описаны в экспликациях к формулам (2.11)-(2.13).

**Пример 5.** Найти нули и полюсы БИХ-фильтра 2-го порядка, имеющего ПФ вида  **Решение:**  (2.18)

>>num=[1,1,1];den=[1,-0.7,0.25]

>>[q,p,K]=tf2zp(num,den)

После ввода последней команды (нажатия «Ввод») компьютер выдаст ответ в виде

q=

…–0.5000+0.8660i

…–0.5000–0.8660i

p=

…0.3500+0.3571i

…0.3500–0.3571i

Запишем ПФ в виде произведения (2.13) через найденные нули и полюсы

 (2.19)

**MATLAB** позволяет найти нули и полюсы не только для записи ПФ в виде (2.19), но и выраженными через модуль и аргумент (радиус и угол). Для этого обозначим радиус нуля и полюса соответственно через , а угол нуля и полюса соответственно через .

Тогда на запрос **MATLAB** выдаёт ответ, напечатанный здесь и далее ниже и правее запроса

>>r0=abs(q(1))

r0=1.0000

>>f01=angle(q(1))

f01=2.0944

>>f02=angle(q(2))

f02=–2.0944

>>rp=abs(p(1))

rp=0.5000

>>fp1=angle(p(1))

fp1=0.7954

>>fp2=angle(p(2))

fp2=–0.7954

Запишем ПФ через выраженные таким образом (через модуль и аргумент) нули и полюсы

 (2.20)

1.6. Обратная описанной в п. 1.5 процедура – преобразование ПФ, представленной через нули и полюсы в виде произведения простейших множителей 1-й степени, в дробно-рациональную функцию общего вида (2.10) – выполняется с помощью обратной функции **zp2tf,** формат которой имеет вид

>>[num,den]=zp2tf(q,p,K) (2.21)

Для примера 5 диалог с компьютером приведен ниже:

>>q=[(–0.5000+0.8660i) (–0.5000–0.8660i)]; p=[(0.3500+0.3571i) (0.3500–0.3571i)];K=1;

>>[num,den]=zp2tf(q,p,K)

num=1.0000 1.0000 1.0000

den=1.0000 –0.7000 0.2500

1.7. Для получения карты нулей и полюсов в случае, если ПФ представлена в виде произведения простейших множителей 1-й степени, используется функция **zplane**, формат которой имеет вид

>>zplane(num,den) (2.22)

Для примера 5 запрос к компьютеру приведен ниже (ответ выдаётся в виде карты:

>> num=[1,1,1];den=[1,-0.7,0.25]

>>zplane(num,den)

1.8. Если ПФ ЛДС задана в общем виде (2.10), то для её представления в виде произведения простейших множителей 2-й степени (формула (2.14)) используется функция **tf2sos**, формат которой имеет вид

>>[sos,K]=tf2sos(num,den), (2.23)

где вектор коэффициентов **sos** равен  Для примера 5 диалог с компьютером приведен ниже:

>>num=[1,1,1];den=[1,-0.7,0.25]

>>[sos,K]=tf2sos(num,den)

sos=1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 –0.7000 0.2500

K=1

Запишем векторы коэффициентов  и :

, 

По полученным коэффициентам найдём нули и полюсы, решая последовательно квадратные уравнения для числителя и знаменателя:

>>num=[1,1,1];

>>z=roots(num)

z=

…–0.5000+0.8660i

…–0.5000–0.8660i

и аналогичным образом знаменателя

>>den=[1,-0.7,0.25]

>>z=roots(den)

z=

…0.3500+0.3571i

…0.3500–0.3571i

1.9. Если ПФ ЛДС выражена через нули и полюсы в форме (2.13), то для её представления в виде произведения простейших множителей 2-й степени (формула (2.14)) используется функция **sp2sos**, формат которой имеет вид

>>[sos,G]=sp2sos(q,p,K), (2.23)

где *К* – коэффициент усиления в формуле (2.13), ***G*** – коэффициент усиления в формуле (2.14). Для примера 5 диалог с компьютером приведен ниже:

>>q=[(–0.5000+0.8660i) (–0.5000–0.8660i)]; p=[(0.3500+0.3571i) (0.3500–0.3571i)];K=1;

>>[sos,G]=sp2sos(q,p,K)

sos=1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 –0.7000 0.2500

G=1

Для выполнения обратных операций: представления ПФ в виде произведения простейших множителей 2-й степени, в общем виде или через нули и полюсы используются соответственно функции **sos2tf, sos2sp**, формат которых имеет вид

>>[num,den]=sos2tf(sos,G)

>>[q,p,K]=sos2sp(sos,G) (2.24)

1.10. Если ПФ ЛДС задана в общем виде (2.10), то для её представления в виде суммы простых дробей применяется функция **residuez** следующего формата

>>[r,p,c]=residuez(num,den), (2.25)

где r – вектор коэффициентов числителя в (2.15), p – вектор полюсов в (2.15), c – вектор коэффициентов полинома  в (2.15). Для примера 5 диалог с компьютером приведен ниже:

>>num=[1,1,1];den=[1,-0.7,0.25]

>>[r,p,c]=residuez(num,den)

r=

…–1.5000–3.8508i

…–1.5000+3.8508i

p=

…0.3500+0.3571i

…0.3500–0.3571i

с=4

Полученная в виде суммы простых дробей ПФ имеет вид

 (2.26)

Обратная процедура выполняется с помощью функции **residuez** очевидного формата

>>[num,den]=residuez(r,p,c) (2.27)

2. Практическая часть (порядок выполнения лабораторной работы)

2.1. Рассчитать реакцию КИХ-фильтра 2-го порядка при , заданного РУ вида . Варианты исходных данных к заданию 2.1 приведены в таблице ниже.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Исходные данные | Варианты индивидуальных заданий | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |
|  | 0,5 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,2 | 0,3 |
|  | 0,8 | 0,9 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,6 | 0,8 |
|  | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,1 |

2.2. Рассчитать реакцию БИХ-фильтра 2-го порядка при , заданного РУ вида. Варианты исходных данных к заданию 2.2 приведены в таблице ниже.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Исходные данные | Варианты индивидуальных заданий | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | –0,5 | –0,6 | –0,4 | –0,5 | –0,6 | –0,6 | –0,7 | –0,8 | –0,2 | –0,3 |
|  | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 | 0,55 | 0,60 |
|  | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,1 |

2.3. Рассчитать импульсную характеристику  БИХ-фильтра 2-го порядка, заданного РУ (2.7) при исходных данных п. 2.2 и N=50, FS=2000 Гц с помощью функции **filter** и с помощью функции **impz.**

2.4. Найти нули и полюсы БИХ-фильтра 2-го порядка, имеющего ПФ вида . Варианты исходных данных к заданию 2.4 приведены в таблице к п. 2.2. Записать ПФ в виде произведения (2.19), а также (2.20). Выполнить обратную процедуру, т.е. в соответствии с п. 1.6 по ПФ в виде произведения (2.19) записать ПФ ЛДС в общем виде (2.10).

2.5. Построить карту нулей и полюсов при исходных данных п. 2.2.

2.6. Для ПФ ЛДС, заданной в общем виде (2.10) при исходных данных п. 2.2 определить ПФ, представленную в виде произведения простейших множителей 2-й степени (п. 1.8). Записать полученную ПФ.

2.7. Для ПФ ЛДС, заданной в общем виде (2.10) при исходных данных п. 2.2 определить ПФ, представленную в виде суммы простых дробей (п. 1.10). Записать полученную ПФ.

3. Содержание отчёта.

3.1. Название курса, название и номер лабораторной работы, ф. и. о. и номер группы студента, дату выполнения работы.

3.2. Запись своих индивидуальных заданий и диалога с ЭВМ по пп. 2.1-2.7, записи вычисленных ПФ, карту нулей и полюсов.

3.3. Вывод по работе в целом

4. Задания для самоподготовки и самопроверки

4.1.Какими способами можно описать соотношение «вход-выход» ЛДС во временной области? Приведите примеры.

4.2. В чём отличие рекурсивной ЛДС от нерекурсивной?

4.3. В чём отличие КИХ от БИХ фильтра?

4.4. Чем определяется порядок (степень) фильтра и ЛДС?

4.5. Какие операции можно выполнить с помощью функции **filter?**

4.6. Какие операции можно выполнить с помощью функции **impz?**

4.7. Приведите примеры связи характеристик ЛДС во временной и -области.

4.8. Что является аналогом импульсной характеристики для -области?

4.9. В какие виды ПФ может быть преобразована ПФ общего вида (2.10)? Приведите примеры.

4.10. Изобразите карту нулей и полюсов ПФ.

4.11. Что такое нуль и что такое полюс ПФ?

4.12. Как найти нули и полюса для ПФ, представленной в виде произведения простейших множителей 1-й степени (2.13)?

4.13. Как найти нули и полюса для ПФ, представленной в виде произведения простейших множителей 2-й степени (2.14)?

4.14. Что такое num и den?

4.15. Для чего используется функция abs? Приведите формат функции.

4.16. Для чего используется функция angle? Приведите формат функции.

4.17. Какую функцию следует использовать для представления ПФ в виде произведения простейших множителей 2-й степени (формула (2.14)), если ПФ ЛДС выражена через нули и полюсы в форме (2.13)? Приведите формат функции.

4.18. Какую функцию следует использовать для представления ПФ в виде произведения простейших множителей 2-й степени (формула (2.14)), если ПФ ЛДС задана в общем виде дробно-рациональной функции (2.10)? Приведите формат функции.

4.19. Какую функцию следует использовать для представления ПФ в виде суммы простых дробей, если ПФ ЛДС задана в общем виде (2.10)? Приведите формат функции.

4.20. Что делает команда **z=roots(den)** ? Дайте пример использования команды.

4.21. Что будет, если в команде по п. 4.20 заменить **den** на **num**?

4.22. Что означает понятие комплексно-сопряжённой пары нулей или полюсов? Дайте пример.

4.23. Как применить функцию **impz**, если вместо оси nT необходима ось n? Дайте пример.

4.24. Докажите свойство линейности -преобразования.

4.25. Докажите теорему запаздывания -преобразования.

4.26. Чему равно -преобразование свёртки двух числовых последовательностей? Докажите.

4.27. Чему равно -преобразование числовой последовательности, умноженной на экспоненту? Докажите.

4.28. С помощью таблицы соответствия определите -изображение единичного импульса.

4.29. С помощью таблицы соответствия определите -изображение задержанного единичного импульса.

4.30. С помощью таблицы соответствия определите -изображение единичного скачка..

4.31. С помощью таблицы соответствия определите -изображение задержанного единичного скачка..

4.32. С помощью таблицы соответствия определите -изображение знакопостоянной убывающей дискретной экспоненты.

4.33. С помощью таблицы соответствия определите -изображение знакопеременной убывающей дискретной экспоненты.

4.34. С помощью таблицы соответствия определите -изображение числовой последовательности



4..35. С помощью таблицы соответствия определите -изображение числовой последовательности



4.35. С помощью таблицы соответствия и обратного * –* преобразования восстановите оригинал по известному изображению, если изображение имеет вид



4.36. С помощью теоремы о вычетах восстановите оригинал по известному изображению вида, указанного в п. 4.35.

4.37. С помощью разложения на простые дроби восстановите оригинал по известному изображению вида 