**Задание**

Для СМО заданной конфигурации построить имитационную модель и исследовать ее (разработать алгоритм и написать имитирующую программу, предусматривающую сбор и статистическую обработку данных для получения оценок заданных характеристик СМО). Распределение интервалов времени между заявками во входном потоке и интервалов времени обслуживания – геометрическое с соответствующим параметром (ρ, π1, π2). Если ρ не задано, то входной поток – регулярный (с указанным в обозначении источника числом тактов между заявками).

Ротк – вероятность отказа;

Рбл – вероятность блокировки;

Lоч – средняя длина очереди; Q – относительная пропускная способность;

А – абсолютная пропускная способность.

**Теория**

В общем виде вероятностный автомат (англ. Probabilistic automat) можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано статистически. *Состояние преобразователя считывается каждый такт.*

Следовательно, при выполнении моделирования работы схемы будем задавать количество анализируемых тактов (≈10000).

Распределение интервалов времени между интервалами времени обслуживания – **геометрическое** с соответствующим параметром (π1, π2).

***Просеянный поток*** – регулярный поток, в котором удалены события с вероятностью q и оставлены с вероятностью 1-q.

***Геометрическому распределению*** соответствует выражение:

Pi = qi-1(1- q) – вероятность того, что величина интервала между событиями ***в просеянном потоке*** окажется равным i тактам:

Следовательно, **вероятность того что заявка будет обслужена за 1 такт** составит P1 = (π)1-1·(1-π) = 1-π, где π – вероятность необслуживания заявки.

**Процедура выполнения**

На примере В-7

1) Исходные данные

Р-схема

2

π

π

2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *ρ* | *π*1 | *π*2 | Цель исследования |
| - | 0,75 | 0,6 | Lоч, А |

2) Анализ задания

Схема содержит источник с блокировкой и фиксированным временем ожидания выдачи заявки (2 такта до выдачи), накопитель на 2 заявки два канала с вероятностями просеивания (не обслуживания заявки) π1 и π2.

Граф состояний кодируется четырехкомпонентным вектором *TN1К2К3,* где

*T* – время до выдачи очередной заявки источником, *T*={2,1,0}

2 – два такта до выдачи заявки

1 – один такт до выдачи заявки (по окончании такта заявка поступит в канал обслуживания)

0 – означает, что источник заблокирован (заявка заблокирована в источнике);

*N1* – количество заявок, находящихся в накопителе (длина очереди), *N1*={0,1,2}

0 – заявок в очереди на обслуживание нет

1 – одна заявка в очереди

2 – заявки в очереди;

*К2* и *К3* – состояние каналов обслуживания, *К2* (*К3*)={0,1}

0 – канал свободен

1 – канал занят обслуживанием заявки.

3) Рассмотрев все возможные состояния системы, строим матрицу переходов, в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| zk | zk | | | | |
| z1 | z2 | … | zk-1 | zk |
| z1 | р1,1 | р1,2 | … | р1,k-1 | р1,k |
| z2 | р2,1 | р2,2 | … | р2,k-1 | р2,k |
| … | … | … | … |  | … |
| zk | рk,1 | рk,2 | … | рk,k-1 | рk,k |

Где 

Переход из состояния S1 в состояние S1 не возможен, следовательно вероятность перехода равна 0

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 2000 | 1000 | 2010 | 1010 | 2011 | 1011 | 1001 | 2111 | 1111 | 2211 | 1211 | 0211 |
| 1 | 2000 | 0 | р1,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1000 | 0 | 0 | р2,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2010 | 0 | р3,2 | 0 | р3,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1010 | 0 | 0 | р4,3 | 0 | р4,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 2011 | 0 | р5,2 | 0 | р5,4 | 0 | р5,6 | р5,7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1011 | 0 | 0 | р6,3 | 0 | р6,5 | 0 | 0 | р6,8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 1001 | 0 | 0 | р7,3 | 0 | р7,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 2111 | 0 | 0 | 0 | р8,4 | 0 | р8,6 | 0 | 0 | р8,9 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 1111 | 0 | 0 | 0 | 0 | р9,5 | 0 | 0 | р9,8 | 0 | р9,10 | 0 | 0 |
| 10 | 2211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | р10,6 | 0 | 0 | р10,9 | 0 | р10,11 | 0 |
| 11 | 1211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | р11,8 | 0 | р11,10 | 0 | р11,12 |
| 12 | 0211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | р12,8 | 0 | р12,10 | 0 | р12,12 |

Граф состояний представлен на рисунке 1.

4) Определим вероятности переходов рi,j и заполним таблицу переходов числовыми значениями.

1. Полагаем, что после запуска генератора заявки будут гарантированно формироваться и поступать в канал обслуживания после прохождения двух тактов. Следовательно, вероятности перехода из состояния “2000” в состояние “1000” и состояния “1000” в состояние “2010” будут равны единице.
2. Наступление состояния “1010” зависит только от того, обслужит первый канал заявку или нет. Следовательно, переход из состояния “2010” в состояние “1010” определяется вероятностью необслуживания заявки π1 (р3,4 = π1).

Сумма вероятностей полной группы S несовместных событий составляет равна единице . Следовательно, вероятность того, заявка будет обслужена первым каналом, и система вернется из состояния “2010” в состояние “1000”, будет равна 1- π1 (р3,2 = 1-π1).

Аналогично р4,5 = π1, р4,3 = 1-π1.

1. Обслуживание заявки каждым каналом в данной системе представляет собой **независимое событие**. Для определения вероятностей переходов из состояния “2011” в состояние “1011” и состояние “1001” воспользуемся следующими правилами

***Теорема умножения вероятностей.***

Произведением двух событий р(А·В) называют событие АВ, состоящее в **совместном** появлении этих событий:

р(АВ) = р(А)·р(В|А) = р(В)·р(А|В),

где р(В|А) (р(А|В)) – условная вероятность события В (А), вычисленное в предположении того, что событие А (В) наступило.

Если события **независимы**, то р(В|А) = р(В), р(А|В) = р(А)

Тогда **вероятность наступления двух независимых событий**

р(АВ) = р(А)·р(В)

Значит, вероятность перехода состояния “2011” в “1011” можно определить как произведение вероятностей того, что заявки в обоих каналах не будут обслужены, т.е. р5,6 = π1·π2, а состояния “2011” в “1001” - как произведение вероятностей того, что первый канал завершит обслуживание заявки, а второй – еще нет, т.е. р5,7 = (1-π1)·π2.

1. Переход из состояния “1011” в состояние “2011” возможен в двух случаях:

- первый канал продолжит обслуживание заявки, в то время как второй, завершив обслуживание, перейдет к обслуживанию второй заявки;

- второй канал продолжит обслуживание заявки, в то время как первый, завершив обслуживание, перейдет к обслуживанию второй заявки.

Причем первый вариант развития событий исключает возможность появления другой.

События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

**Вероятность появления одного из двух несовместных событий** равна сумме вероятностей этих событий:

р(А+В) = р(А) + р(В)

Следовательно, вероятность перехода состояния “1011” в “2011” р6,5 можно определить следующим образом:

р6,5 = (1-π1)·π2 + π1·(1-π2) = π1 + π2 - 2π1π2.

1. Руководствуясь приведенными рассуждениями, определяем вероятности остальных переходов и заполняем таблицу переходов (см. Таблица 2.а)

Таблица 2.а

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | **∑** |
| 2000 | 1000 | 2010 | 1010 | 2011 | 1011 | 1001 | 2111 | 1111 | 2211 | 1211 | 0211 |
| 1 | 2000 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1000 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 2010 | 0 | 1-π1 | 0 | π1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 1010 | 0 | 0 | 1-π1 | 0 | π1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 2011 | 0 | (1-π1)(1-π2) | 0 | π1(1-π2) | 0 | π1π2 | (1-π1)π2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1011 | 0 | 0 | (1-π1)(1-π2) | 0 | π1+π2-2π1π2 | 0 | 0 | π1π2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 1001 | 0 | 0 | 1-π2 | 0 | π2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 8 | 2111 | 0 | 0 | 0 | (1-π1)(1-π2) | 0 | π1+π2-2π1π2 | 0 | 0 | π1π2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1111 | 0 | 0 | 0 | 0 | (1-π1)(1-π2) | 0 | 0 | π1+π2-2π1π2 | 0 | π1π2 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 2211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | (1-π1)(1-π2) | 0 | 0 | π1+π2-2π1π2 | 0 | π1π2 | 0 | 1 |
| 11 | 1211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | (1-π1)(1-π2) | 0 | π1+π2-2π1π2 | 0 | π1π2 | 1 |
| 12 | 0211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | (1-π1)(1-π2) | 0 | π1+π2-2π1π2 | 0 | π1π2 | 1 |

В последнем столбце для самопроверки просуммируем построчно вероятности переходов.

Подставим числовые значения

Таблица 2.б

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | **∑** |
| 2000 | 1000 | 2010 | 1010 | 2011 | 1011 | 1001 | 2111 | 1111 | 2211 | 1211 | 0211 |
| 1 | 2000 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1000 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 2010 | 0 | 0,25 | 0 | 0,75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 1010 | 0 | 0 | 0,25 | 0 | 0,75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 2011 | 0 | 0,1 | 0 | 0,3 | 0 | 0,45 | 0,15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1011 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0,45 | 0 | 0 | 0,45 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 1001 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 8 | 2111 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0,45 | 0 | 0 | 0,45 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1111 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0 | 0,45 | 0 | 0,45 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 2211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0 | 0,45 | 0 | 0,45 | 0 | 1 |
| 11 | 1211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0,45 | 0 | 0,45 | 1 |
| 12 | 0211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0,45 | 0 | 0,45 | 1 |

1

1

1-π1

π1(1-π2)

π2

π1

1-π1

π1

π2(1-π1)

π1π2

π1+π2-2π1π2

(1-π1)(1-π2)

1-π2

(1-π1)(1-π2)

π1π2

π1π2

π1π2

π1π2

π1π2

π1+π2-2π1π2

π1+π2-2π1π2

π1+π2-2π1π2

π1+π2-2π1π2

π1π2

(1-π1)(1-π2)

(1-π1)(1-π2)

(1-π1)(1-π2)

(1-π1)(1-π2)

π1+π2-2π1π2

(1-π1)(1-π2)

Рисунок 1 - Граф состояний

6) Расчет параметров данной системы с использованием построенной модели.

**а.** Исходя из графа состояний, построим систему уравнений для нахождения **вероятностей состояний**, воспользовавшись выражением:



дополнив систему нормировочным уравнением 



**б.** Исключим из системы уравнение , подставим значения *π*1=0,75 и *π*2=0,6 и приведем к каноническому виду:



**в.** Решив данную систему, получим значения вероятностей состояний:



Просуммировав для самопроверки вероятности состояний получим единицу.

**г.** Определим значения величин, являющихся целью исследования:

– средняя длина очереди *Lоч*:

,

где *i* – номер состояния,  *j* - число заявок в очереди в *i*-том состоянии, s – число состояний системы



– абсолютная пропускная способность (интенсивность потока обработанных заявок) – среднее число заявок, обслуживаемое СМО в единицу времени:

,

где *Ро* – вероятность того, что канал обрабатывал заявку(и) ,  – сумма вероятностей состояний, при которых не происходит обслуживание заявок; *Рз* – вероятность того, что обработка закончилась, Т – единица времени, за которую источник выдает 1 заявку.







7) Разработка алгоритма и имитирующей программы работы СМО

**Реализация цепи Маркова*.***

События Р2000 – Р0211 представляют собой полную группу S несовместных событий. Реализация таких событий производится следующим образом:

1. Для каждой j-ой строки интервал [0,1] разбивается на S частей с длинами pj1, pj2,...,pjs. Точки деления интервала имеют координаты:

,

2. Генерируется случайная величина *ξ* – случайная величина, равномерно распределенная в интервале [0,1]. Если  то считают, что произошло событие Ak, то есть был осуществлен переход из j-го в k-е состояние.

3. Далее генерируется случайная величина в интервале [0,1] и процедура повторяется k-ой строки.

Состояние системы считывается через каждый такт.

Из состояния ‘2000’ в состояние ‘1000’ система по окончании такта переходит с вероятностью равной 1. Из состояния ‘1000’ в состояние ‘2010’ система также переходит с вероятностью равной 1.

Для дальнейшего определения состояния системы в последующие такты воспользуемся методом реализация цепи Маркова таблицей 2.б.

Таблица 2.б

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | **∑** |
| 2000 | 1000 | 2010 | 1010 | 2011 | 1011 | 1001 | 2111 | 1111 | 2211 | 1211 | 0211 |
| 1 | 2000 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1000 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 2010 | 0 | 0,25 | 0 | 0,75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 1010 | 0 | 0 | 0,25 | 0 | 0,75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 2011 | 0 | 0,1 | 0 | 0,3 | 0 | 0,45 | 0,15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1011 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0,45 | 0 | 0 | 0,45 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 1001 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 8 | 2111 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0,45 | 0 | 0 | 0,45 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1111 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0 | 0,45 | 0 | 0,45 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 2211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0 | 0,45 | 0 | 0,45 | 0 | 1 |
| 11 | 1211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0,45 | 0 | 0,45 | 1 |
| 12 | 0211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0,45 | 0 | 0,45 | 1 |

Для состояния ‘2010’ интервал [0,1] разобьем на 2 части с длинами 0,25 и 1,0 и единственной точкой деления 0,25. Пусть ξ = 0,37, ξ < 1,0, значит, система перешла из состояния ‘2010’ в состояние ‘1010’.

Теперь для 4-ой строки (состояние ‘1010’) интервал [0,1] разобьем на 2 части с длинами 0,25 и 1,0 и единственной точкой деления 0,25. Пусть ξ = 0,81, ξ < 1,0, значит, система перешла из состояния ‘1010’ в состояние ‘2011’.

Для 5-ой строки (состояние ‘2011’) интервал [0,1] разобьем на 4 части с длинами 0,1; 0,3; 0,45; 0,15 и точками деления 0,1; 0,4; 0,75. Пусть ξ = 0,63, ξ < 0,75, значит, система перешла из состояния ‘2011’ в состояние ‘1011’.

……

Параметры системы (*Lоч* и А) будем определять:

– средняя длина очереди : ,

где *i* – номер состояния,  *j* - число заявок в очереди в *i*-том наступившем состоянии.

– абсолютная пропускная способность (интенсивность потока обработанных заявок) – среднее число заявок, обслуживаемое СМО в единицу времени:

,

где *Ро* – вероятность того, что канал обрабатывал заявку(и) ,  – сумма вероятностей наступивших состояний, при которых не происходит обслуживание заявок; *Рз* – вероятность того, что обработка закончилась, Т – общее количество тактов.

***Для справки***

А – абсолютная пропускная способность СМО – среднее число заявок, обслуживаемое СМО в единицу времени;

Q – вероятность обслуживания поступившей заявки Q или относительная пропускная способность СМО: Q = А/λ;

Pобсл – сумма вероятностей всех состояний, в которых происходит обслуживание заявки;

Ротк – сумма вероятностей всех состояний, в которых происходит отказ в обслуживании заявки;

Рбл– сумма вероятностей всех состояний, в которых происходит блокировка заявки;

Lоч – средняя длина очереди – сумма вероятностей всех состояний, в которых заявка находится в очереди, умноженных на количество заявок в данных состояниях.