НЕТОЛОГИЯ

Юстина Иванова

Специалист по анализу данных

Математика для data science:
Векторы. Операции с векторами.
Матрицы. Перемножение матриц.
Преобразования элементов в пространстве

Спикер

Юстина Иванова,

- Специалист по анализу данных «ОЦРВ», Сочи
- Инженер-программист МГТУ им. Баумана,
- Магистр по программе «Искуственный интеллект» Университета Саутгемптон

Вектор

Вектор — упорядоченный конечный список чисел.
Вектора обычно записываются как вертикальный список, например:

$$\begin{bmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{pmatrix}$$

Вектор может быть записан также в следующем виде:

$$(-1.1, 0.0, 3.6, -7.2)$$

Скаляр

Скаляр — число.

Число может являться целым натуральным и записывается как:

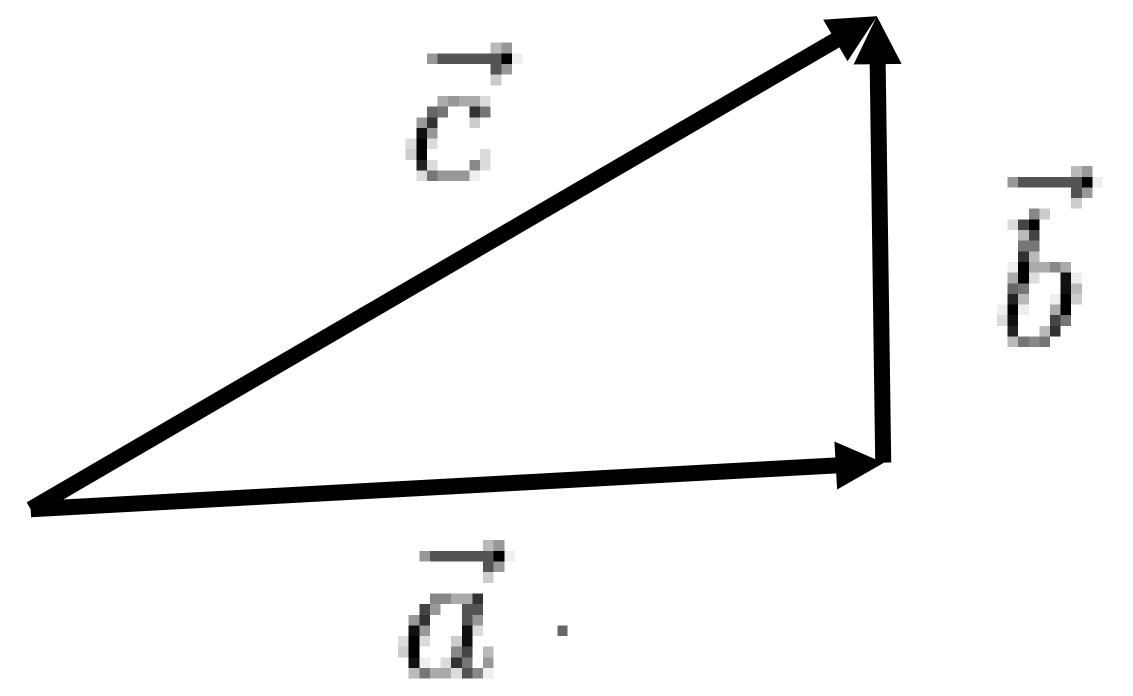
$$s \in \mathbb{N}$$

Число может быть десятичным и записываться как:

$$s \in \mathbb{R}$$

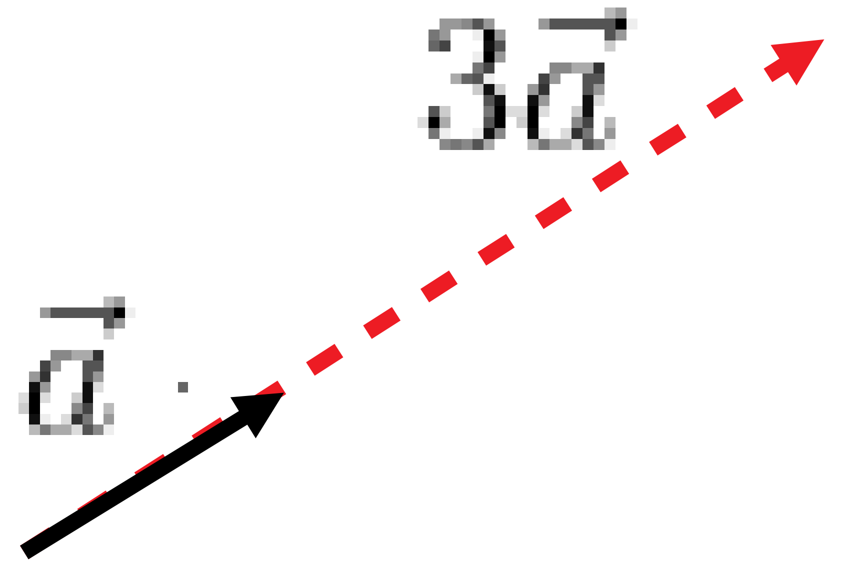
Операции с векторами.

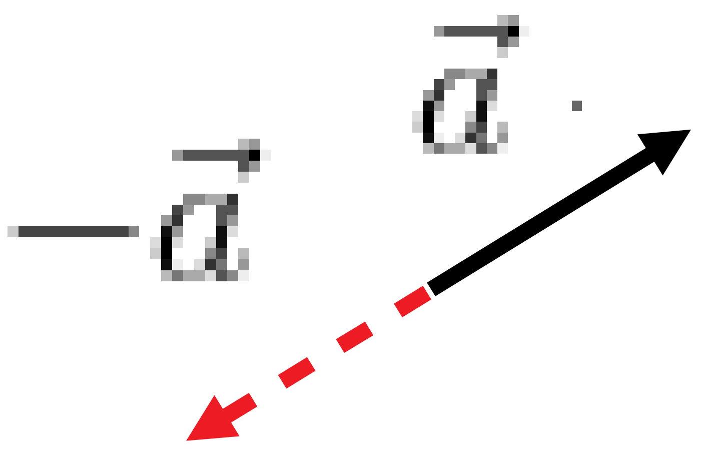
Сложение векторов:



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Умножение вектора на число:





Подсчет длины вектора.

Длина вектора может быть подсчитана по формуле евклидова расстояния:

$$|x| = \sqrt{\sum_i \left(|x_i|^2\right)}$$

где *p* — размерность вектора.

Для двумерного вектора данная формула становится следующего вида и называется L^2 нормой:

$$|a| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

где a — вектор с координатами (x,y).

Скалярное произведение векторов.

Скалярное произведение векторов (dot product по англ.) - это скаляр (число), полученное в результате перемножения длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos(\alpha)$$

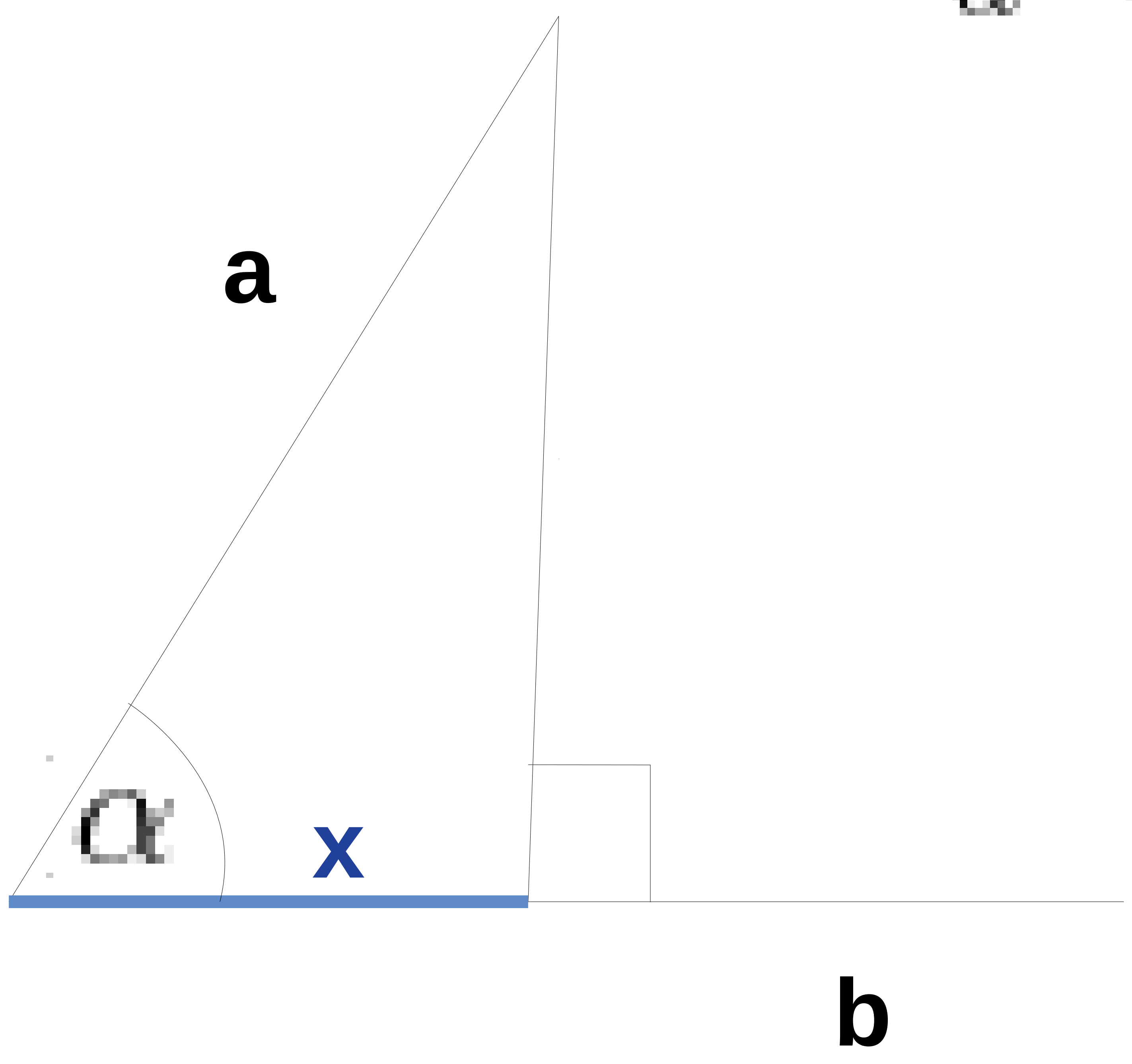
Если известны координаты векторов, то скалярное произведение можно посчитать по формуле:

$$\vec{a}\vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

где $\vec{a}(x_a; y_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b)$ вектора в двумерном пространвнстве

Проекция вектора на вектор.

Длина вектора x, полученного в результате проекции вектора a на вектор b, равна делению скалярного произведения вектора **a** на вектор **b** на длину b.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos(\alpha)$$

$$cos(\alpha) = \frac{|x|}{|a|}$$

$$|x| = cos(\alpha) \cdot |a|$$

$$cos(\alpha) \cdot |a| = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|b|}$$

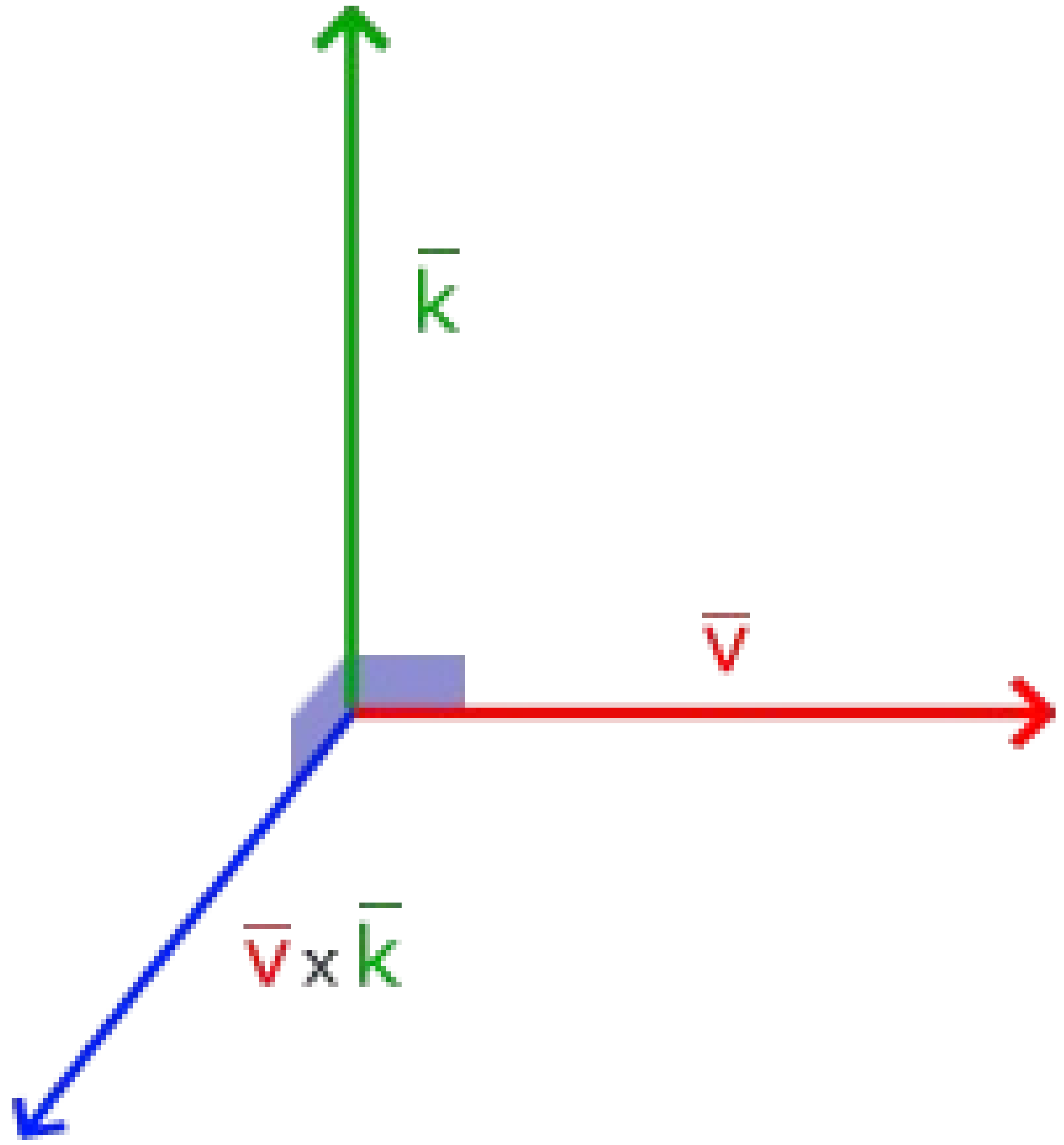
$$|x| = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|b|}$$

Векторное произведение векторов.

Векторное произведение возможно только в трехмерном пространстве и принимает на вход два непараллельных вектора, а возвращает вектор, который ортогонален входным.

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y \\ A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z \\ A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x \end{pmatrix}$$

https://habr.com/ru/post/319144/



Если входные вектора ортогональны друг другу, то векторное произведение создаст 3 ортогональных вектора.

Матрица.

$$M = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}$$

Матрица — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы.

Диагональная матрица — квадратная матрица, все элементы которой, кроме диагональных, равны 0.

$$M = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Единичная матрица — квадратная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, остальные элементы равны 0.

Транспонирование матрицы.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Транспонирование матрицы — это замена строк на столбцы.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{\top} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \end{bmatrix}$$

Транспонирование матрицы можно рассматривать как отображение матрицы относительно главной диагонали.

https://www.deeplearningbook.org/contents/linear_algebra.html

Сложение и умножение матрицы на скаляр.

Сложение.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Умножение на скаляр.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot 5 = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 15 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Перемножение матриц.

Даны 2 матрицы: А и В. Умножение матрицы А на В можно выполнить, если количество столбцов матрицы А равно количеству строк матрицы В.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot4+2\cdot3+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot1+2\cdot5 \\ 3\cdot4+1\cdot3+1\cdot1 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4\cdot1+2\cdot3 & 4\cdot2+2\cdot1 & 4\cdot2+2\cdot1 \\ 3\cdot1+1\cdot3 & 3\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot2+1\cdot1 \\ 1\cdot1+5\cdot3 & 1\cdot2+5\cdot1 & 1\cdot2+5\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 6 & 7 & 7 \\ 16 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

https://www.math10.com/ru/vysshaya-matematika/matrix/umnozhenie-matric.html

Обратная матрица.

Обратная матрица к данной — это матрица при перемножении которой с текущей матрицей получается единичная матрица.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Например:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Свойства обратной матрицы. Детерминант.

Обратная матрица должна быть квадратной и невырожденной (определитель не равен нулю).

Детерминант (определитель) матрицы $A = (\alpha_{ij})$ -

$$\Delta A = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 1} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} \cdot \alpha_{1i_1} \alpha_{2i_2} \ldots \alpha_{ni_n},$$

$n \times n$ размер матрицы

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ все перестановки матрицы

$N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ число инверсий в перестановке

https://ru.wikipedia.org/wiki/Определитель

Определители матриц. Примеры.

Определитель матрицы для единичной матрицы:

$$\Delta = \left|\alpha_{11}\right| = \alpha_{11}$$

Определитель для квадратной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Определитель трехмерной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

https://ru.wikipedia.org/wiki/Определитель

Собственный вектор матрицы.

Ненулевой вектор $\bar{u}$, который при умножении на некоторую квадратную матрицу A превращается в самого же себя с числовым коэффициентом λ, называется собственным вектором матрицы:

$$A\bar{u} = \lambda\bar{u}$$

https://mathprofi.net/sobstvennye_znachenija_i_sobstvennye_vektory.html

Собственное значение матрицы.

Коэффициент λ в формуле и есть собственное значение:

$$A\bar{u} = \lambda\bar{u}$$

https://mathprofi.net/sobstvennye_znachenija_i_sobstvennye_vektory.html

Пример собственных вектора и значения.

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ собственный вектор

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$ матрица

Умножаем матрицу А на собственный вектор:

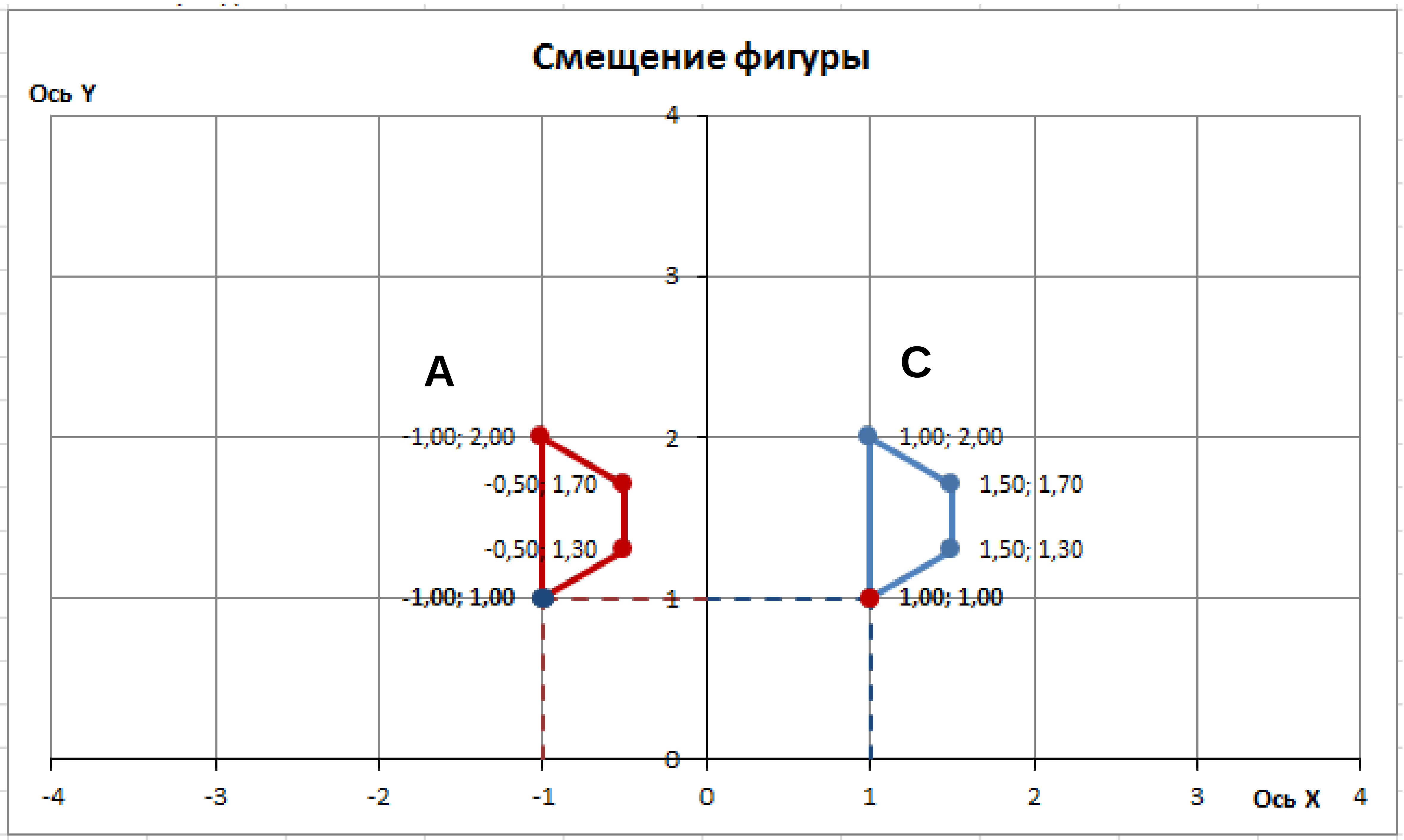
$$A\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2$$ собственное значение

https://mathprofi.net/sobstvennye_znachenija_i_sobstvennye_vektory.html

Смещение объекта с помощью сложения векторов.

Смещение объекта в пространстве:



$$A + B = C$$

A — исходный объект
B — вектор смещения
C — новое положение объекта

B = (2, 0)

https://excel2.ru/articles/transformaciya-figur-v-dvuhmernom-prostranstve-2d-transformation-v-ms-excel

Смещение объекта с помощью матричных преобразований

Смещение объекта как результат перемножения матрицы объекта на матрицу сдвига:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ z + T_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица сдвига

новое положение точки

координаты точки

https://habr.com/ru/post/319144/

Масштабирование объекта

Масштабирование объекта как результат перемножения матрицы объекта на матрицу масштабирования:

$$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \cdot x \\ S_2 \cdot y \\ S_3 \cdot z \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица масштабирования

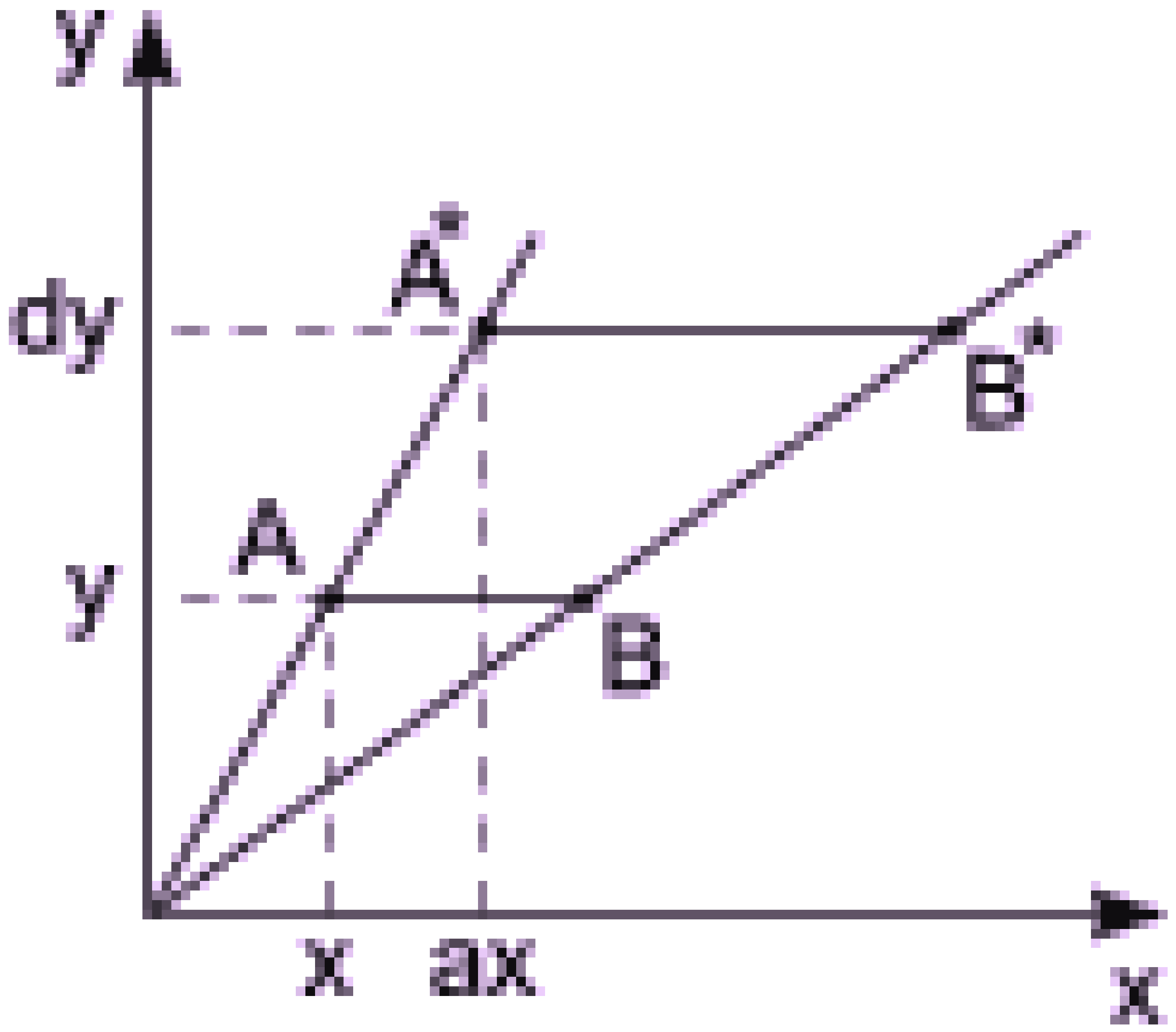
новое положение точки

координаты точки

https://habr.com/ru/post/319144/

Пример масштабирования объекта

Масштабирование объекта в пространстве:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & dy & 1 \end{vmatrix}$$

http://stratum.ac.ru/education/textbooks/kgrafic/lection01.html

НЕТОЛОГИЯ

Поворот объекта вокруг оси x

Поворот объекта как результат перемножения матрицы объекта на матрицу поворота:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \cos\theta \cdot y - \sin\theta \cdot z \\ \sin\theta \cdot y + \cos\theta \cdot z \\ 1 \end{pmatrix}$$

новое положение точки

матрица поворота вокруг оси x на угол θ

координаты точки

https://habr.com/ru/post/319144/

Поворот объекта вокруг оси y

Поворот объекта как результат перемножения матрицы объекта на матрицу поворота:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot z \\ y \\ -\sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot z \\ 1 \end{pmatrix}$$

новое положение точки

матрица поворота вокруг оси y на угол θ

координаты точки

https://habr.com/ru/post/319144/

Поворот объекта вокруг оси z

Поворот объекта как результат перемножения матрицы объекта на матрицу поворота:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y \\ \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица поворота вокруг оси y на угол θ

новое положение точки

координаты точки

https://habr.com/ru/post/319144/

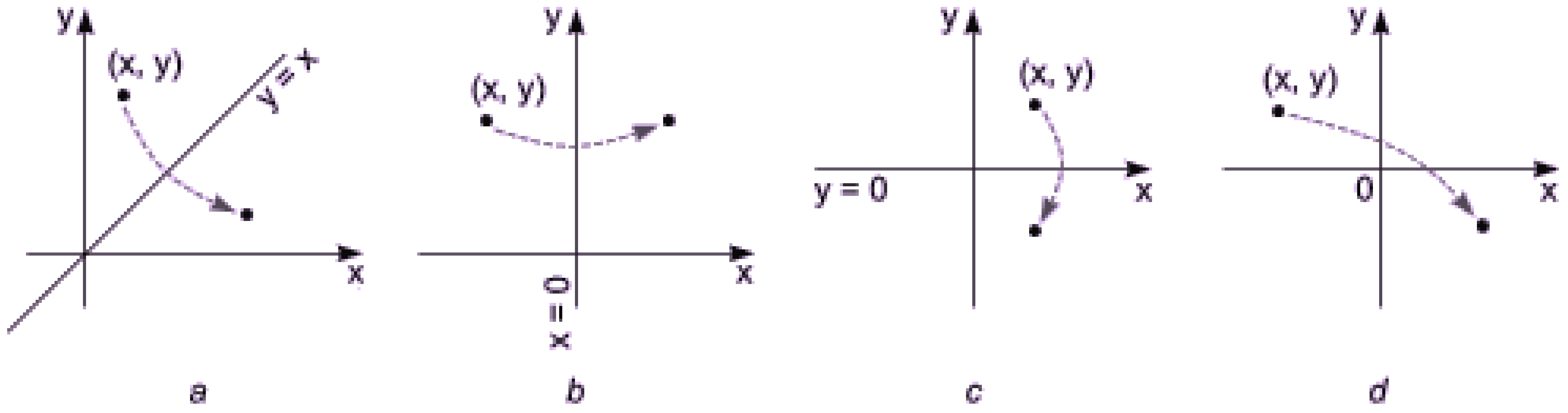
Матрица вращения вокруг произвольной оси

Матрица поворота вокруг произвольной оси: (Rx, Ry, Rz) — это ось вращения::

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + R_x{}^2(1-\cos\theta) & R_xR_y(1-\cos\theta) - R_z\sin\theta & R_xR_z(1-\cos\theta) + R_y\sin\theta & 0 \\ R_yR_x(1-\cos\theta) + R_z\sin\theta & \cos\theta + R_y{}^2(1-\cos\theta) & R_yR_z(1-\cos\theta) - R_x\sin\theta & 0 \\ R_zR_x(1-\cos\theta) - R_y\sin\theta & R_zR_y(1-\cos\theta) + R_x\sin\theta & \cos\theta + R_z{}^2(1-\cos\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

https://habr.com/ru/post/319144/

Зеркалирование или отображение объекта



вокруг прямой y=x

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 1 \end{vmatrix}$$

вокруг оси y=0

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -y & 1 \end{vmatrix}$$

вокруг оси x

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & y & 1 \end{vmatrix}$$

вокруг относительно начала координат

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & -y & 1 \end{vmatrix}$$

Комбинирование матриц

Несколько операций над объектом могут быть объединены с помощью умножения матриц трансформаций.

$$Trans.Scale = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрица смещения

матрица трансформации

матрица масштабирования

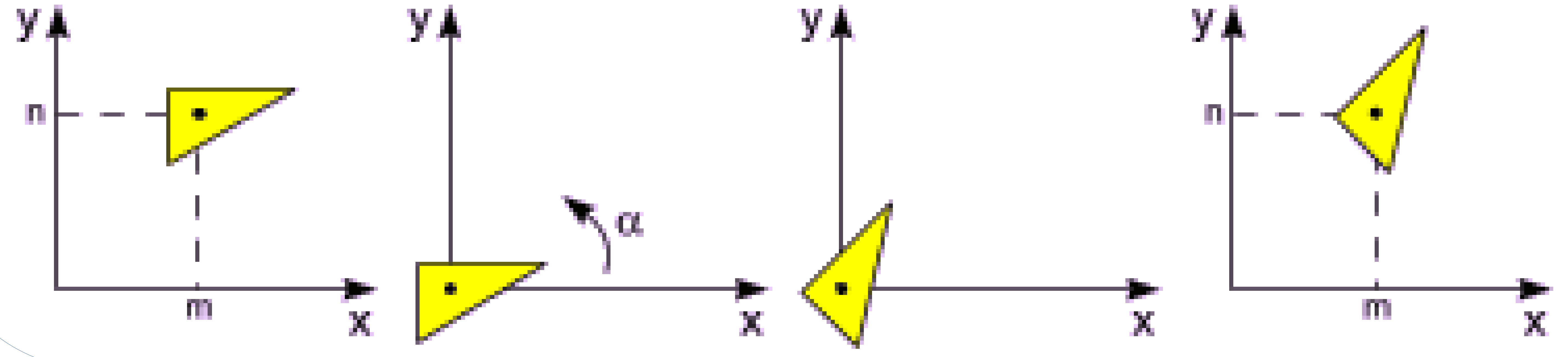
http://stratum.ac.ru/education/textbooks/kgrafic/lection01.html

НЕТОЛОГИЯ

Поворот вокруг произвольной точки.

Процесс поворота каждой точки фигуры вокруг произвольной точки A(m,n):

- смещение точки на вектор (-m,-n)
- поворот точки с помощью матрицы поворота
- смещение точки в исходное положение на вектор (+m,+n)



Матрица трансформаций = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}$

http://stratum.ac.ru/education/textbooks/kgrafic/lection01.html

Система линейных уравнений.

НЕТОЛОГИЯ

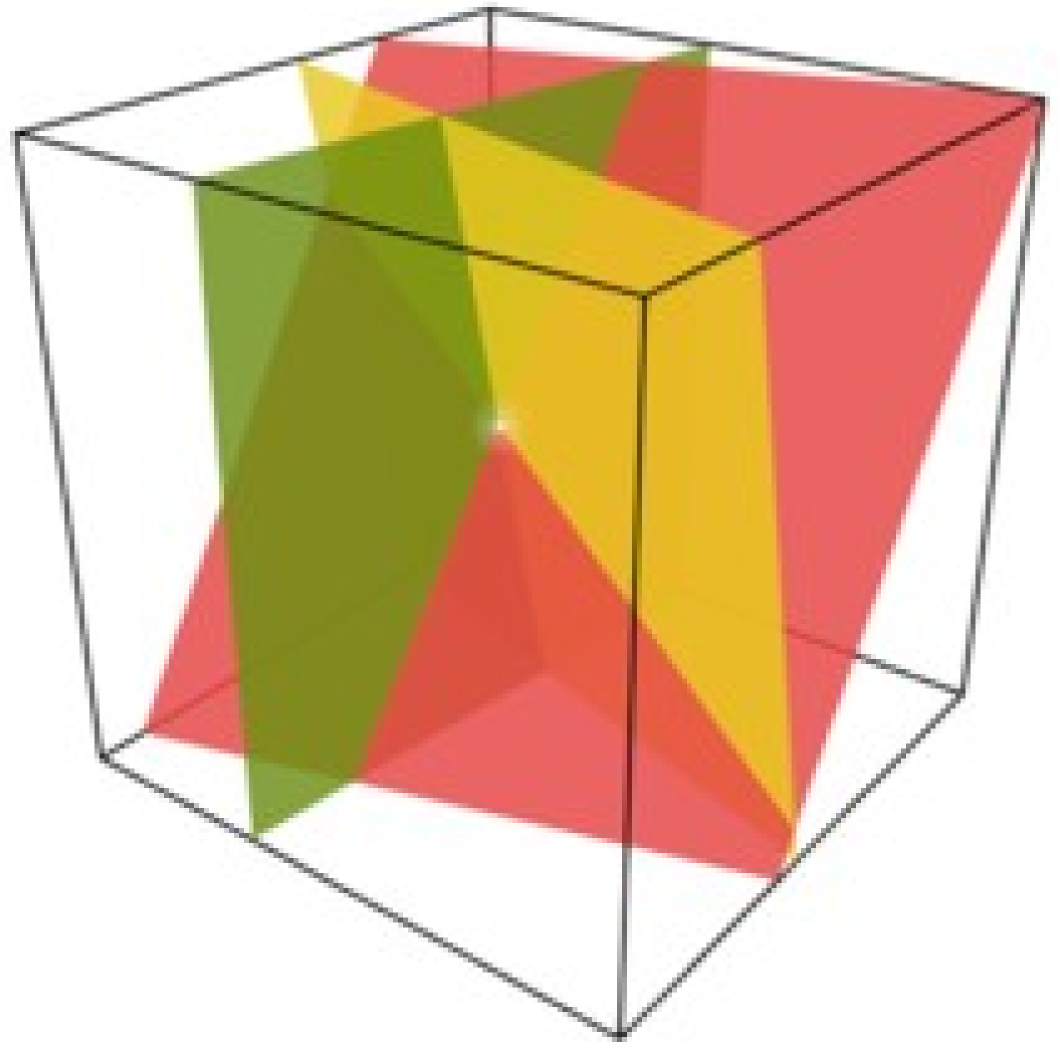
Систему линейных уравнений можно записать в виде перемножения и сложения матриц.

$$Ax + b = 0$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + b_1 = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + b_2 = 0 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0$$

Решение систем линейных уравнений.



Система линейных уравнений от трёх переменных определяет набор плоскостей. Точка пересечения является решением.

$$Ax + b = 0$$

Если матрица A невырожденная (определитель отличен от нуля), и для неё существует обратная матрица A^{-1},

то решение можно записать как

$$x = A^{-1}b$$

https://ru.wikipedia.org/wiki/Система_линейных_алгебраических_уравнений

НЕТОЛОГИЯ

Спасибо за внимание!

Юстина Иванова,
Data scientist
«ОЦРВ»