Домашнее задание

Айдана Муратова

12 июня 2020 г.

Промежуточный экзамен 2017-2018

1.
$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$
$$(\mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + \mathbb{E}(X))^2 = 10$$

$\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100)$ $X^2 \geqslant 0$ всегда, используем эквивалентную формулу из следствия неравенства Маркова.

$$\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{100} = 0.1$$

- верхняя граница диапозона

Следовательно, $\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100)$ принадлежит $[0, 0.1]$

Ответ: A

2.
$$\mathbb{E}(\xi) = \lambda$$
$$\operatorname{Var}\xi) = \lambda$$

$$\operatorname{Var}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2$$
$$\mathbb{E}(\xi^2) = \operatorname{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda \cdot (1 + \lambda)$$

Ответ: E

3.
$$\operatorname{Corr}(X + Y, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X + Y, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X + Y) \cdot \operatorname{Var}(Y)}} = \frac{6}{\sqrt{7 \cdot 9}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\cdot\mathrm{Cov}(X,Y) = 4+9+2\cdot(-3) = 7$$

$$\mathrm{Cov}(X+Y,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) = -3+9 = 6$$

Ответ: C

4. Функция плотности для случайной величины с нормальным распределением:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma = 1$ $\mu = 0$

Ответ: B

5. $$f_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{S} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Ответ: A

6. События A, B и C независимы в совокупности, если

$$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

Ответ: B

7. Построили график функции плотности ξ прямоугольник с h $= \frac{1}{4}$ Интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции плотности равен единице, следовательно, площадь всего прямоугольника равна единице:

$$\mathbb{P}(\xi\in[3,6]) = \frac{1}{4}$$

Ответ: B

8. X, Y – случайные величины

$$\mathbb{P}(X=-5) = \ldots = \mathbb{P}(X=5) = \frac{1}{11}$$

$$\mathbb{P}(Y=-1)=\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{3}$$

Так как $X+Y^2=2$, то допускаются следующие значения:

$$Y=1, X=1$$

$$Y=0, X=2$$

$$Y=-1, X=1$$

Так как случайные величины независимые, следует:

$$\mathbb{P}(X+Y^2=2)=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3=\frac{1}{11}$$

Ответ: C

9. Кол-во секторов:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$$

Зачения точек круга равновероятны, следовательно:

$$\mathbb{P}(\text{«красный»})=\frac{1}{6}$$

Ответ: E

10.
$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$$

$$0.6=0.3+\mathbb{P}(B)-0.2$$

Следует:

$$\mathbb{P}(B)=0.5$$

Ответ: B

11. Если a, b, c — константы, X, Y — случайные величины:

$$\operatorname{Var}(aX + bY + c) = a^2 \operatorname{Var}(X) + b^2 \operatorname{Var}(Y) + 2ab \operatorname{Cov}(X,Y)$$

Тогда:

$$\operatorname{Var}(2X - Y + 1) = 4 \cdot \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) - 4 \cdot \operatorname{Cov}(X,Y)$$

$$\operatorname{Var}(2X - Y + 1) = 4 \cdot 4 + 9 - 4 \cdot (-3) = 37$$

Ответ: B

12. По закону больших чисел:

$$\operatorname*{plim}_{n \to +\infty} \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} = \mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 1$$

Ответ: B

13. Условная функция плотности:

$$f\left(x \mid y = \frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(x, \frac{1}{2}\right)}{f_y\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{6x \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 2x$$

$$f_y(y) = \int_0^1 6 \cdot x \cdot y^2 dx = 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \Big|_0^1 = 3 \cdot y^2, y \in [0; 1]$$

$$f_y\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Ответ: C

14. Неизвестно, чему равно n. Можно решить методом подбора

Ответ: ?

15.

$$\operatorname{Cov}(X+2Y, 2X+3) = \operatorname{Cov}(X+2Y, 2X) = \operatorname{Cov}(X, 2X) + \operatorname{Cov}(2Y, 2X)$$

$$\operatorname{Cov}(X+2Y, 2X+3) = 2 \cdot \operatorname{Cov}(X,X) + 4 \cdot \operatorname{Cov}(X,Y) = 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = -4$$

Ответ: A

16.
$$\mathbb{E}((X-1)Y) = \mathbb{E}(XY-Y) = \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)+\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}((X-1)Y) = -3 + (-2) - 2 = -7$$

Ответ: B

17. $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{5}{6}$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0)$$
$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{10}{36}$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_1 + X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 0 \cap X_1 + X_2 = 1)}{X_1 + X_2 = 1}) = \frac{1}{2}$$

Ответ: B

18.
$$X + Y \sim \mathbb{N}(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y), \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y))$$
$$X + Y \sim \mathbb{N}(3{,}7)$$
$$\mathbb{P}(X + Y \leqslant 3) = \mathbb{P}\left(\frac{X+Y-3}{\sqrt{7}} < \frac{3-3}{\sqrt{7}}\right) = (\mathbb{Z} \leqslant 0) = \frac{1}{2}$$

Ответ: C

19.
$$\mathbb{P}(i = 1{,}2{,}3 \mid «6») = \frac{\mathbb{P}(i = 1{,}2{,}3 \cap «6»)}{\mathbb{P}(«6»)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{11}{50}} = \frac{5}{11}$$

Ответ: C

20. A) $1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 < 0$
B) $1 \cdot 9 - 4 \cdot 4 < 0$
C) $9 \cdot 6 - 7 \cdot 7 > 0$
D) отрицательная
E) несимметричная
Ответ: C

21.

$$\mathbb{E}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha\,\mathbb{E}(X) + (1-\alpha)\,\mathbb{E}(Y) = -\alpha + 2\cdot(1-\alpha) = 0$$

$$2 - 3\cdot\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

Ответ: A

22.

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = (1-p)^n = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

Ответ: B

23.

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(k = 0) = 1 - e^{-4}$$

Ответ: C

24.

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \mathrm{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = p\cdot(1-p) + p^2 = p$$

Ответ: B

25.

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \mathrm{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ответ: A

26. Кол-во секторов:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

$$\mathbb{P}(\text{«красный»}) = \mathbb{P}(\text{«синий»}) = \frac{1}{6}$$

Ответ: E

27.

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y \cdot 6 \cdot x \cdot y^2 dxdy = \int_0^1 2 \cdot x^3 \cdot y^3 \Big|_0^1 dy = \frac{2 \cdot y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ответ: A

28.

$$\operatorname{Var}(\alpha X+(1-\alpha)Y) = \alpha^2 \operatorname{Var}(X)+(1-\alpha)^2 \operatorname{Var}(Y)+2\cdot\operatorname{Cov}(X,Y)\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)$$

$$\operatorname{Var}(\alpha X+(1-\alpha)Y) = 4\cdot\alpha^2+9\cdot(1-\alpha)^2-6\cdot\alpha\cdot(1-\alpha) = 4\cdot\alpha^2+9-18\cdot\alpha+9\cdot\alpha^2-6\cdot\alpha+6\cdot\alpha^2$$

$$\operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = 19 \cdot \alpha^2 - 24 \cdot \alpha + 9$$

Точка минимума:

$$\alpha^* = \frac{24}{38} = \frac{12}{19}$$

Ответ: нет верного ответа

29.

$$\mathbb{P}(\text{«без багажа»}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\text{«с рюкзаком»} \mid \text{«без багажа»}) = 0.5$$

$$\mathbb{P}(\text{«с рюкзаком»} \mid \text{«с багажом»}) = \frac{55}{150}$$

$$\mathbb{P}(\text{«без рюкзака»}) = \mathbb{P}(\text{«без рюкзака»} \mid \text{«без багажа»})\,\mathbb{P}(\text{«без багажа»})+$$

$$+\mathbb{P}(\text{«без рюкзака»} \mid \text{«с багажом»})\,\mathbb{P}(\text{«с багажом»}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{95}{150}\cdot\frac{3}{4} = 0.6$$

Ответ: A

30.

$$\mathbb{P}(|X-2| \geqslant 10) \leqslant \frac{\operatorname{Var}(X)}{100}$$

$$\mathbb{P}(|X-2| \leqslant 10) \geqslant 1 - \frac{\operatorname{Var}(X)}{100} = 0.94$$

Ответ: C