函数连续性部分

知识点 1： $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，

注意到恒等式 $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$，故 $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$，所以从这些知识点可立即得到

练习册 **p25-26 一判断题** 1（√） 2（×） 3（√） 4（√）

及**二选择题的**

1（A） 2(C)

知识点 2：

设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点,

一．当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都为常数时，则称 x_0 为 $f(x)$ 的<u>第一类间断点</u>，其中

（1）当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 为常数（即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都为常数且相等时），则称 x_0 为 $f(x)$ 的<u>可去间断点</u>;

（2）当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都为常数，但不相等，则称 x_0 为 $f(x)$ 的<u>跳跃间断点</u>

二．除开第一类间断点的间断点 x_0 称为 $f(x)$ 的<u>第二类间断点，其中</u>

（1）当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 为 ∞ 时，则称 x_0 为 $f(x)$ 的<u>无穷间断点</u>;

（2）当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 在某区间内变动振荡时，则称 x_0 为 $f(x)$ 的<u>振荡间断点</u>;

练习册 **p25-26**

二选择题的 3 选（A）

解析：因 $f(x)$ 在 $x=0$ 无意义，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点；注意到 sinx 是 $x\to 0$ 时的无穷小，$\sin\frac{1}{x}$ 为有界函数，故由无穷小性质，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0$。综上知 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

练习册 **p25**

二选择题的 4 选（A）

解析：注意到 $x>1$ 和 $x<1$ 时 $f(x)$ 表达式不同，故考虑单侧极限。因为

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x=2$，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ 又 $f(1)=2$，故由知识点 1 知 $x=1$ 为 $f(x)$ 的连续点。

练习册 **p25 二选择题的 5 选（A）**

解析：注意 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}[(1-x)^{-\frac{1}{x}}]^{\frac{-x\cos x}{\sin x}}=e^{-1}$，故由知识点 1 知 $f(0)=e^{-1}$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续。

练习册 **p25 二选择题的 6 选（C）**

解析：函数的间断点一般在无意义的点考虑，该题中 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 处无意义，另外注意到 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0,\ \lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，得到 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$，故 $x=0,1$ 均为无穷间断点，是第二类间断点。

p26 三（2）解析：

因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无意义，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点；另外注意到

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$，故由知识点 2 知 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点。

p26 四 解析：注意到 $x>0$ 和 $x<0$ 时 $f(x)$ 表达式不同，故考虑单侧极限。因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{b}{x}\sin x+1=b+1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$f(0)=a$，故由知识点 1 知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续时，$b+1=0=a$，故 $b=-1,a=0$。

p26 五 解析

注意到 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$，$|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=+\infty$，$|x|=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=1$，故得到 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ -x, & |x|>1,\end{cases}$ 分段函数间断点一般考虑函数无意义的点和分段点。此函数分段点为 $x=-1,1$，因为 $x>-1(1)$ 和 $x<-1(1)$ $f(x)$ 表达式不同，故考虑单侧极限。因为 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}-x=1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$，故由知识点 2 知 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点。同理，$x=1$ 也为 $f(x)$ 的跳跃间断点。

练习册 **p27-29**

知识点 3：$f(x), g(x)$ 在点 x_0（区间 I）连续 $\Rightarrow f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 均在点 x_0（区间 I）连续

一判断题 1（√）

若 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 连续，则由 $f(x)$ 在点 x_0 连续及知识点 3 得到

$g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$ 在点 x_0 连续，矛盾，故画×

2（×） 因 $f(x)=x$ 在点 $x_0=0$ 连续，$g(x)=\operatorname{sgn} x$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但

$f(x)g(x)=x\operatorname{sgn} x=|x|$ 在点 $x_0=0$ 连续。

知识点 4：**1)** $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可取最大最小值、有界，可取到端点函数值间任一实数至少一次；

2) $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且端点函数值异号，$\Rightarrow f(x)$ 在区间 (a,b) 内至少一点处值为零或至少取到一个零点;

3)若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续、单调且端点函数值异号，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内零点唯一。事实上，练习册 p28 第四大题证明即用到这个结论。

另外，$f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，上述结论可能成立可能不成立，于是可得

P27 一判断题的 3（×）5（√）**二选择题的** 1（A） 2 (C)

知识点 5：初等函数在定义区间内是连续函数，故可得**二选择题的** 4（A）

P27 三（**1**）**解析：**

注意到三角恒等式 $\cos x-\cos a=-2\sin\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}$ 及重要极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=1$，故

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos^2 x-\cos^2 a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}(\cos x+\cos a)}{\frac{x-a}{2}}=-\sin a(2\cos a)=-\sin 2a\text{。}$$

也可以用后面学的洛必达法则计算。

（**3**）注意到函数分子中有根号，考虑分子有理化化简，另外注意到 $x\to 0, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，

运用乘除运算时等价无穷小替换得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{\cos x}}=0$$

（4）注意

$\phi(x)\to 0,\sin\phi(x)\sim\phi(x),1-\cos\phi(x)\sim\frac{1}{2}\phi(x)^2,e^{\phi(x)}-1\sim\phi(x)$，运用乘除运算时等价无穷小替换得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{x^3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{e^{x^3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{(e^{x^3}-1)\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\frac{1}{2}x^2)}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}$$

(6) 解析：注意到底数和指数都有自变量，考虑无理数 e 的重要极限和幂指函数的极限结论。

再注意到$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{\frac{1}{2}x^2}=2$，故得

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x^2e^x)^{\frac{1}{x^2e^x}}\right]^{\frac{x^2e^x}{1-\cos x}}=e^2$$

五 解析

注意到证明结论中在区间(a,b)内至少存在一点ξ，使$f(\xi)=\xi$而没出现$f'(\xi)$，故考虑闭区间上连续函数的零点定理， 运用这个定理证明一般要由证明结论出发设一个辅助函数证明其满足零点定理条件。

本题中，根据结论作辅助函数$F(x)=f(x)-x$，根据已知显然$F(x)$在$[a,b]$上连续，端点函数值$F(a)=f(a)-a>0,F(b)=f(b)-b<0$异号，由零点定理知，在区间$(a,b)$内至少存在一点$\xi$，使$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$证毕。

练习册 **p29**

一填空题

1. $\underline{(e^{-1}-1,+\infty)}$ 解析：$f(f(x))=\ln[\ln(x+1)+1]$，其定义域由$\begin{cases}x+1>0\\ \ln(x+1)+1>0\end{cases}$得到。

二选择题 2 选（B）

取$f(x)=x,g(x)=-x$，显然二函数满足题意，但不满足选项（A）、(C)和(D)，故选（B）。

二选择题 3 选（A）

主要应用到乘除运算时无穷小替换求极限，因$\varphi(x)\to 0,\sqrt[n]{\varphi(x)}-1\sim\frac{1}{n}\varphi(x)$，于是由题意，函数$f(x)$在$x=0$连续时，得到$k=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x}=\frac{3}{2}$。

二选择题 5 选（C）

注意到$x>0$和$x<0$时$f(x)$表达式不同，故考虑单侧极限。因为$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\cos\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+\frac{1}{x}\sin x)=1$，故$x=0$为$f(x)$的跳跃间断点。

P30 三计算题 1

解析：运用乘除运算等价无穷小替换求极限，因$\varphi(n)\to 0,\sin\varphi(n)\sim\varphi(n)$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\frac{x}{2^{n-1}}=2x$，这里用到$n\to\infty,\sin\frac{x}{2^{n-1}}\sim\frac{x}{2^{n-1}}$。

2. 解析：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cot x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\frac{1}{\sin x})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x(\sin x-1)}{x\sin x}$，注意到分子极限为-1，分母大于 0 且趋于 0，从而整个极限为$-\infty$

5 解析：分子分母分解因式再求极限得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{8\cos^2x-2\cos x-1}{2\cos^2x+\cos x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{(4\cos x+1)(2\cos x-1)}{(2\cos x-1)(\cos x+1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\cos x+1}{\cos x+1}=2$$

P30 四 解析：

由已知，$\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}+ax-b)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(a+1)+(a-b)x-b+1}{x+1}$（此极限等于$x$的最高次系数比），于是得到$a+1=0$（否则$a+1\neq 0$时极限等于无穷，矛盾），从而得到$-1-b=\frac{1}{2}$（这里$-1-b\neq 0$，若$-1-b=0$则极限等于 0，矛盾），得$a=-1,b=-\frac{3}{2}$。

五 2 单调有界原理证明数列极限存在

（1）先用数学归纳法证$x_n>a,n=1,2,...$即数列有下界a.

（事实上，假设$x_n>a>0,n=1,2,...$，则$x_{n+1}=\sqrt{ax_n}>\sqrt{a\cdot a}=a$）

（2）证明数列单减

（事实上由$x_n>a>0,n=1,2,...$得$x_{n+1}=\sqrt{ax_n}<\sqrt{x_n\cdot x_n}=x_n$）

根据（1）（2）和单调有界原理知数列收敛即极限存在，设$\lim_{n\to\infty} x_n = A$，则由收敛数列的保号性知$A \ge a > 0$。在等式$x_{n+1} = \sqrt{a x_n}$两边让$n \to \infty$得$A = \sqrt{aA}$解得$A = a$。

P30 六 证明 解析：注意到证明结论中在区间$[a,b]$内至少存在一点ξ，使$f(\xi) = f(a+\xi)$而没出现$f'(\xi)$，故考虑闭区间上连续函数的零点定理， 但这里ξ存在的区间是$[a,b]$，需要讨论。运用零点定理证明一般要由证明结论出发设一个辅助函数证明其满足零点定理条件。

本题中，根据结论作辅助函数$F(x) = f(x) - f(x+a)$，根据已知条件显然$F(x)$在$[0,a]$上连续，端点函数值$F(0) = f(0) - f(a), F(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0)$，它们可能异号可能相等，需讨论。

（1）当$f(0) - f(a) \ne 0$时，端点函数值$F(0), F(a)$异号，于是由零点定理得在区间(a,b)至少存在一点ξ，使$F(\xi) = f(\xi) - f(\xi + a) = 0$

（2）当$f(0) - f(a) = 0$时，取$\xi = 0$或a也有$F(\xi) = 0$

综上，结论得证。

函数的导数部分

知识点 1： $f(x)$ 在点 x_0 可导 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在（即等于常数）$\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 的左右导数存在且相等。另外，

$f(x)$ 的导函数定义为 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$。于是可得

p31 二选择题 4 选（C） 注意到 $\varphi(x)\to 0,\ \ e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$。由知识点 1 并应用乘除运算时等价无穷小替换，得到

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-(\Delta x)^2}-1}{(\Delta x)^2}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}=1,$$

这里用到 $\Delta x\to 0,\ \ e^{-(\Delta x)^2}-1\sim-(\Delta x)^2$。

p31 三填空题 1

由已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导即 $f'(0)$ 存在且为常数，于是由知识点 1 得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(-3h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)-[f(-3h)-f(0)]}{h}$$
$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(0+2h)-f(0)}{2h}+3\lim_{h\to 0}\frac{f(0+(-3h))-f(0)}{-3h}=5f'(0)$$，这里 $2h,-3h$ 都相当于知识点 1 中的 Δx；

2 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x+2)...(x+n)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)...(x+n)=n!$$

P41 一填空题的 1

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1$ ，这里的 $-h$ 相当于知识点 1 中的 Δx；

P41 一填空题的 2 因 $f'(0)$ 存在且 $f(0)=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$。

P41 二选择题的 2 选（D）

解析：求 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导的充分条件选项，即哪个选项可推出 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导或哪个选项可推出 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)$ 存在(为常数)。

注意到选项(A) $\lim\limits_{h\to\infty} h\left[f(a+\frac{1}{h})-f(a-\frac{1}{h})\right]=\lim\limits_{h\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{h})-f(a)}{\frac{1}{h}}+\frac{f(a-\frac{1}{h})-f(a)}{-\frac{1}{h}}\right]$

存在(即为常数)，推不出 $\lim\limits_{h\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{h})-f(a)}{\frac{1}{h}}=f'(a)$ 存在或 $\lim\limits_{h\to\infty}\frac{f(a-\frac{1}{h})-f(a)}{-\frac{1}{h}}=f'(a)$

存在(这里的 $\frac{1}{h},-\frac{1}{h}$ 都相当于知识点 1 中的 Δx)；同理选项(B)、(C)存在也推不出 $f'(a)$ 存在，而选项（D）

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\overset{\Delta x=-h}{=}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 存在即 $f'(a)$ 存在。

p32 六计算题

由 $\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 连续从而 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$（为常数），从而 $f(a)=(a-a)\varphi(a)=0$，于是 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$。

p33 一判断题的 5（√）6（√）

事实上，设 $f(x)$ 为偶函数，则其导数

$f'(-x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x)$，即偶函数的导数为奇函数，同理可证奇函数的导数为偶函数；

若设 $f(x)$ 为周期函数（周期为 T），则其导数

$f'(x+T)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$，即周期函数的导数也是相同周期的周期函数。

知识点 2： $f(x)$ 在点 x_0 可导 $\Rightarrow f(x)$ 在点 x_0 连续 其逆否命题“$f(x)$ 在点 x_0 不连续 $\Rightarrow f(x)$ 在点 x_0 不可导” 也成立。但 $f(x)$ 在点 x_0 连续时，$f(x)$ 在点 x_0 可能可导也可能不可导，必须由定义判断是否可导。由此知识点可得

p31 一判断题的 2（√）3（×）

二选择题的 1 选（A）

二选择题的 3 选（B）事实上，由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$不存在知，$f(x)$在点$x=0$连续但不可导。

p32 五计算题

当$f(x)$在点$x=1$可导时则它也在点$x=1$连续。注意到$x\le 1$和$x>1$ $f(x)$表达式不同，故考虑单侧极限。

当$f(x)$在点$x=1$可导时它也在点$x=1$连续，从而左右极限存在且相等，故由

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1,\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}ax+b=a+b$得到$a+b=1$；

当$f(x)$在点$x=1$可导时则左右导数存在且相等，故

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2,\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}\overset{\text{代入}a+b=1}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

从而$a=2$，$b=-1$。另外**p42 四计算题**做法和该题也完全类似。

p41 二选择题的 4 选(D)

当$f(x)$可导时则它也连续。从而$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$，于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^2(x+\Delta x)-f^2(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)+f(x)][f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}=2f(x)f'(x).$$

知识点 3： $f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$上点$(x_0,f(x_0))$处的切线斜率$\tan\alpha$，这里α是切线与x轴的倾斜角。当$f'(x_0)=+\infty$时（此时$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$），得切线方程为$x=x_0$，垂直于x轴，这个时候存在切线$x=x_0$，但$f'(x_0)$不存在。由该知识点可得

p31 的一判断题 4（×） 5（√）

P41 二选择题 1 选（D）

解析：曲线$y=\dfrac{1}{x}$和$y=x^2$的交点为（1，1），设在该点处曲线$y=\dfrac{1}{x}$和$y=x^2$的切线倾斜角分别为α,β，则画出图形易知二切线的夹角$\varphi=\alpha-\beta$；另由知识点 3，

$\tan\alpha=\left(\dfrac{1}{x}\right)'\Big|_{x=1}=-1,\tan\beta=\left(x^2\right)'\Big|_{x=1}=2$，于是由高中三角知识

$\tan\varphi=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=3$，这里$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$可百度查看。

知识点 4

（1）反函数 $y=f(x)$ 的导数等于直接函数 $x=\varphi(y)$ 的导数的倒数，即 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$，再变量还原。

（2） 较复杂函数的求导都要用到复合函数求导，复合函数求导关键是弄清楚复合结构，按内外函数导数乘积，逐步进行求导；

（3）方程确定的隐函数求导即在方程两边对自变量求导，应用复合函数求导最后解出所求的导数；

（4）参数方程确定的函数求导掌握一阶及二阶导数公式，即设参数方程 $\begin{cases} x=x(\theta) \\ y=y(\theta) \end{cases}$,($\theta$ 为参数） 确定了函数 $y=f(x)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}$；如果参数方程 $\begin{cases} x=x(\theta) \\ y=y(\theta) \end{cases}$,($\theta$ 为参数） 确定了函数 $x=g(y)$，则 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dy}{d\theta}}$，$\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dx}{dy}\right)}{\frac{dy}{d\theta}}$。

(5)高阶导数按定义只能从一阶导数开始一阶一阶的求，或将要求高阶导数的函数代数变形再借助高阶导数运算法则和一些常见函数的高阶导数来求。

P35 二选择题 2 选（B）

解析：由 $y=\varphi(x)$、$x=f(y)$ 互为反函数且 $f(y)$ 单调可导，则 $y=\varphi(x)$ 单调性一样且可导，且由 $f(2)=4$ 知 $y=2$ 时 $x=4$，于是得到 $\varphi(4)=2$ 即 $x=4$ 时 $y=2$, 于是由知识点 4 的（1）知

$$\varphi'(4)=\varphi'(x)\Big|_{x=4}=\frac{1}{f'(y)\big|_{y=2}}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{\sqrt{5}}。$$

P33 二选择题 3 选（D）

解析：由知识点 4 的（1），即反函数求导公式知 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}\cos x}=\dfrac{2}{2-\cos x}$。同理可得 **P37 一选择题 2 选（B）**

P35 一判断题 1（×）

解析：注意到由 $y=f(x),x=\varphi(y)$ 互为反函数且 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$。再由知识点 4 的(1)知

$$\varphi''(y)=\frac{d}{dy}\left(\varphi'(y)\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(\varphi(y))}\right)=\frac{-\dfrac{d}{dy}[f'(\varphi(y)]}{\{f'[\varphi(y)]\}^2}=\frac{-f''(\varphi(y))\varphi'(y)}{\{f'[\varphi(y)]\}^2}$$

$$=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^2f'(x)}=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}。$$

复合函数求导

P33 二选择题 4 选（D）

$$y'=\frac{d}{dx}\left(f(e^x)e^{f(x)}\right)=\frac{d}{dx}\left(f(e^x)\right)e^{f(x)}+f(e^x)\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right)=f'(e^x)(e^x)'e^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)$$

$$=f'(e^x)e^{1+f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)$$

P36 二选择题 5 选（D）

$$\frac{d}{dx}f(\sin^2x)=f^{'}(\sin^2x)(\sin^2x)^{'}=f^{'}(\sin^2x)(2\sin x)(\sin x)^{'}=f^{'}(\sin^2x)\sin 2x=\sin 2xg(\sin^2x)$$

P34 三计算题（2）

解析：

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)=\frac{(1-\sqrt{x})'(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}})(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{(-1)(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}=-\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

（5）

解析：

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2\right)'\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

（6）解析：

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'$$，而

$$\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'=1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(x+\sqrt{x}\right)'=1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$，故

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

P34 四 计算题（2）

解析：

$$y'=\frac{d}{dx}\left(f(x^2)+\ln f(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(f(x^2)\right)+\frac{d}{dx}\left(\ln f(x)\right)=f'(x^2)(x^2)'+\frac{1}{f(x)}f'(x)$$

P35 三 计算题 1

解析：

$$y'=\frac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$；

$$y''=\left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{(2-2x)(1-x)^2-(2x-x^2)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=\frac{(2-2x)(1-x)+2(2x-x^2)}{(1-x)^3}$$

$$=\frac{2}{(1-x)^3}$$。

P36 三 计算题 4

解析：由 **P34 三计算题（5）知**

$$y'=\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$，

$$y''=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{-\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{(\sqrt{1+x^2})^2}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2\right)'}{(\sqrt{1+x^2})^2}=\frac{-(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}=\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$$。

P41 一填空题 7

解析：$\frac{dy}{dx}=\left(\sin^2 x^4\right)'=2\sin x^4\left(\sin x^4\right)'=2\sin x^4\cos x^4\left(x^4\right)'=8x^3\sin x^4\cos x^4=4x^3\sin 2x^4$；

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(4x^3\sin 2x^4\right)=4\left(x^3\right)'\sin 2x^4+4x^3\left(\sin 2x^4\right)'=12x^2\sin 2x^4+4x^3\cos 2x^4\left(2x^4\right)'$$
$$=12x^2\sin 2x^4+32x^6\cos 2x^4$$

令 $u=x^2$，则 $y=\sin^2 x^4=\sin^2 u^2$，

$$\frac{dy}{dx^2}=\frac{dy}{du}=\left(\sin^2 u^2\right)'_u=2\sin u^2\left(\sin u^2\right)'_u=2\sin u^2\cos u^2\left(u^2\right)'_u=4u\sin u^2\cos u^2=2u\sin 2u^2$$

$$=2x^2\sin 2x^4\text{。}$$

P36 五 计算题

解析：

$$y'=\left(\sin[f(x^2)]\right)'=\cos[f(x^2)]\left(f(x^2)\right)'=\cos[f(x^2)]f'(x^2)(x^2)'=2x\cos[f(x^2)]f'(x^2)$$

$$y''=\left(2x\cos[f(x^2)]f'(x^2)\right)'=(2x)'\cos[f(x^2)]f'(x^2)+2x\left(\cos[f(x^2)]\right)'f'(x^2)$$

$$+2x\cos[f(x^2)]\left(f'(x^2)\right)'$$

$$=2\cos[f(x^2)]f'(x^2)+2x\left(-\sin[f(x^2)]\right)\left(f(x^2)\right)'f'(x^2)+2x\cos[f(x^2)]f''(x^2)(x^2)'$$

$$=2\cos[f(x^2)]f'(x^2)+2x\left(-\sin[f(x^2)]\right)f'(x^2)\left(x^2\right)'f'(x^2)+4x^2\cos[f(x^2)]f''(x^2)$$

$$=2\cos[f(x^2)]f'(x^2)-4x^2\sin[f(x^2)][f'(x^2)]^2+4x^2\cos[f(x^2)]f''(x^2)$$

解析：用到$\left(\sin ax\right)^{(n)}=a^n\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$, $\left(\cos ax\right)^{(n)}=a^n\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$**P35 二 选择题 2**

及

$$\left(u(x)\pm v(x)\right)^{(n)}=\left(u(x)\right)^{(n)}\pm\left(v(x)\right)^{(n)},$$

$$f^{(n)}(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)^{(n)}=\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{(n)}+\left(\cos 2x\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin(\frac{x}{2}+\frac{n\pi}{2})+2^n\cos(2x+\frac{n\pi}{2})$$

故$f^{(27)}(\pi)=2^{27}\cos\frac{31\pi}{2}=0$。同理可得 **P42 三 计算题 4**

$$y^{(n)}=\left(\sin x\cos x\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^{(n)}=\frac{1}{2}2^n\sin(2x+\frac{n\pi}{2}),$$

$$y^{(50)}=\frac{1}{2}2^{50}\sin(2x+\frac{50\pi}{2})=-2^{49}\sin 2x.$$

P36 四 计算题

解析：$y=\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)$，注意到$(\frac{1}{x+C})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+C)^{n+1}}$，于是$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left((\frac{1}{x-3})^{(n)}-(\frac{1}{x-1})^{(n)}\right)=\frac{1}{2}(-1)^n n!\left((x-3)^{-(n+1)}-(x-1)^{-(n+1)}\right)$。

P37 一 单选题 1 选（D）

解析：由题意质点的轨迹曲线方程 $y=y(x)$ 由时间 t 为参数的参数方程 $x=t^2+t-2$，

$y=3t^2-2t-1$ 确定，在参数 $t=1$ 对应点处的速度矢量设为 $\vec{v}=(v_x,v_y)$，按高中物理知识知

v_x,v_y 分别是水平位移 $x=t^2+t-2$ 和垂直位移 $y=3t^2-2t-1$ 对时间 t 的导数在 $t=1$ 处的

值，即 $v_x=x_t'\big|_{t=1}=3, v_y=y_t'\big|_{t=1}=4$，于是时间 $t=1$ 时的速度大小（即速度矢量的模）

$|\vec{v}|=\sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2}=5$。

P37 一 单选题 3 选（A）

解析：这是求参数 t 的方程确定的函数 $x=x(y)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$，由知识点 4 的（4）的公

式 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\dfrac{2a}{3bt}$，$\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dy}\right)}{\frac{dy}{dt}}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{2a}{3bt}\right)}{\frac{dy}{dt}}=\dfrac{\frac{-2a}{3bt^2}}{3bt^2}=\dfrac{-2a}{9b^2t^4}$。

类似由知识点 4 的（4）的公式可求 **P38 四 2** 参数 t 的方程确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t-e^t}{\frac{1}{t}}=2t^2-te^t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4t-e^t-te^t}{\frac{1}{t}}=4t^2-te^t(1+t)$.

P42 三 2 参数 t 的方程确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}$：

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2}{\frac{1}{t}}=3t^3$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(3t^3\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{9t^2}{\frac{1}{t}}=9t^3$，所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=9$。

知识点 5

函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微 $\Leftrightarrow \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 $A=f'(x_0)$

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 可导。这里 $dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)dx$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的微分，也称为 Δy 的线性主部。这里 $dx=\Delta x$ 称为自变量的微分（是个变量）。

当 $|\Delta x|$ 较小时，$o(\Delta x)$ 可忽略不计，从而 $\Delta y\approx dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)dx$，

函数的微分定义为 $dy=f'(x)dx$。于是由该知识点可得

P39 一判断题的 1（√） 4（×）
二单选题的 1 选（D）3 选（B）

另外 P39 一判断题的 2（×）因为当 $f(x)$ 在点 x_0 可微即可导（也即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 为常数），从而连续，所以 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0,dy=f'(x_0)\Delta x\to 0$，于是

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{dy}=\dfrac{1}{f'(x_0)}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$，即 Δy 和 dy 是 $\Delta x\to 0$ 时的等价无穷小。

显然，由知识点 5 知 $\Delta y - dy=o(\Delta x)$ 是 $\Delta x\to 0$ 时 Δx 的高阶无穷小。故 **P39 二单选题的 2 选（A）**

另外，由知识点 5 知 $dx=\Delta x$ 是个变量，所以微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 是变量。故 **P39 一判断题的 3**（×）

P39 二单选题的 5 选（D）

解析：由知识点 5，若令 $x=x_0+\Delta x$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微

$\Leftrightarrow \Delta y=f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$，特别地，$f(x)$ 在点 $x=0$ 可微

$\Leftrightarrow \Delta y=f(x)-f(0)=f'(0)x+o(x)$，**从而当 $|x|$ 较小时，$o(x)$ 可忽略，得到 $f(x)-f(0)\approx f'(0)x$**，于是当 $|x|$ 较小时，$e^x-e^0\approx\left(e^x\right)'\big|_{x=0}x=x$，即 $|x|$ 较小时，$e^x\approx 1+x$。

P40 四 3 计算题

解析：由知识点 5 知，$dy\big|_{x=0}=f'(0)dx$，而 $f'(x)$ 是方程 $x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数，由隐函数求导法，在方程两边同时对 x 求导，利用复合函数求导法，得

$3x^2+3y^2y'-3\cos 3x+6y'=0$，解出 $y'=f'(x)=\dfrac{3\cos 3x-3x^2}{3y^2+6}$。将 $x=0$ 代入方程 $x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$ 得 $y=0$，于是 $f'(0)=\dfrac{3\cos 3x-3x^2}{3y^2+6}\Big|_{x=0,y=0}=\dfrac{1}{2}$，故得

$dy\big|_{x=0}=f'(0)dx=\dfrac{1}{2}dx$。

类似可得 **P41 一填空题 6**

解析：由知识点 5 知，函数微分 $dy = f'(x)dx$ 。

$$f'(x) = \left(\ln[\arctan(1-x)]\right)' = \frac{1}{\arctan(1-x)}\left(\arctan(1-x)\right)'$$

$$= \frac{1}{\arctan(1-x)} \cdot \frac{1}{1+(1-x)^2} \cdot \left(1-x\right)' = \frac{-1}{\arctan(1-x)\left[1+(1-x)^2\right]}$$，从而

$$dy = \frac{-dx}{\arctan(1-x)\left[1+(1-x)^2\right]}$$ 。

P42 五题

解 因为 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1,0)$ 有公共切线，且点 $(1,0)$ 在曲线 $y = x^2 - x$ 上，故曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 有公共切线和公共切点 $(1,0)$，所以 $f'(1) = (x^2 - x)\big|_{x=1} = 1$ 以及 $f(1) = 0$；由于 $1 = f'(1) = \lim\limits_{\varphi(n)\to 0} \dfrac{f(\varphi(n)+1) - f(1)}{\varphi(n)}$ 这里 $\varphi(n)$ 相当于导数定义中的 Δx，

故 $$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{n}{n+2})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{-2}{n+2}+1) - f(1)}{\frac{-2}{n+2} \cdot \frac{n+2}{-2} \cdot \frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{-2}{n+2}+1) - f(1)}{\frac{-2}{n+2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n+2}{-2} \cdot \frac{1}{n}} = -2f'(1) = -2$$ 。