一、选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+2e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0, \\ 2, \qquad x=0 \end{cases}$ ，则 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的（　　）

A. 可去间断点;　 B. 跳跃间断点;　　C. 无穷间断点;　　D. 连续点　　　选(B).

解析: 1. 函数无意义的点 x_0 是间断点；分段函数函数的分段点 x_0 可能是间断点，求出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $f(x_0)$，看是否相等判断。

2. 对间断点 x_0，

1）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 为确定常数，则 x_0 为可去间断点，属于第一类间断点；

2）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 等于无穷，则 x_0 为无穷间断点，属于第二类间断点；

3）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 在某个范围内振荡无极限，则 x_0 为振荡间断点，属于第二类间断点；

4）若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 不相等，则 x_0 为跳跃间断点，属于第一类间断点

第一类间断点 x_0 是指 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都是确定常数的间断点 x_0；

第二类间断点 x_0 是指 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 有一个不是确定常数的间断点 x_0

该题中,函数无意义的点没有；$x=0$ 是 $f(x)$ 的分段点，可能是间断点，通过求极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}}$ 和 $f(0)$ 和来判断，注意到 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0, \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，故考虑单侧极限，因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+2e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+2e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}+2}{2e^{-\frac{1}{x}}+1}=2$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 因不存在，从而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)=2$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点，且为跳跃间断点.

2. 设 n 为正整数，则函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$（　　）

A. 存在间断点 $x=1$； B. 存在间断点 $x=-1$； C. 存在间断点 $x=0$； D. 不存在间断点.

选(A).

解析：因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ +\infty, & |x|>1\end{cases}$，所以，当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\dfrac{1+x}{1+0}=1+x$；

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^{2n}}+\dfrac{x}{x^{2n}}}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1}=0$（利用无穷大的倒数是无穷小处理）；

当 $|x|=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{2}=\dfrac{1+x}{2}=\begin{cases}0, & x=-1\\ 1, & x=1\end{cases}$，于是

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<1,\\ 0, & x=-1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x>1, x<-1.\end{cases}$$ 。

因为 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}0=0,\ \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(1+x)=0,$ 故

$\lim\limits_{x\to(-1)}f(x)=0=f(-1)$，所以 $x=-1$ 为该函数的连续点；

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(1+x)=2,\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}0=0,$ 故 $x=1$ 为该函数的跳跃间断点.

二、填空题

1. 当定义 $f(0)=$__________时，函数 $f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处连续； (答案填 0)

解析：由函数 $f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\sin x\sin\dfrac{1}{x}=0$

(最后一个等号是因为 $x\to0$ 时，$\sin x$ 为无穷小；函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，从而 $x\to0$ 时，$\sin x\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小，从而极限为 0)

2. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-c^2, x<4,\\ cx+20, x\ge4\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则常数 $c=$____________; (答案填-2)

解析：函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-c^2, x<4,\\ cx+20, x\ge4\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则在分段点 $x=4$ 处连续，故

$f(4)=\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}f(x)$，因为 $f(4)=4c+20$，

$\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}(x^2-c^2)=16-c^2$，所以得 $4c+20=16-c^2$，即 $(x+2)^2=0$，得 $c=-2$.

3. 解析: 已知 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{e^{2x}+a}{x}$ 的第一类间断点，则极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}+a}{x}, \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{2x}+a}{x}$ 均存在，从而 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{2x}+a=0$，得到 $1+a=0$，得 $a=-1$。

三、解答题（写出过程）

（1）指出函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点并判断其类型。

解:因为 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 在 $x=1, x=2$ 无定义,所以 $x=1, x=2$ 是该函数的间断点。

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=-2$，所以 $x=1$ 是可去间断点，属于第一类间断点;

因为 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$，所以 $x=2$ 是无穷间断点，属于第二类间断点。

(2) 解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}|\sin x|=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\sin x)=0$， $\lim\limits_{x\to 0^+}|\sin x|=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$，

得 $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0=|\sin 0|$，所以 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 连续。