2018～ 2019 学年第一学期高等数学[(1)机电]
期末试卷 A 参考答案及评分标准

一、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

(1) e^3	**(2)** 5	**(3)** $\frac{3}{2}$	**(4)** $f'(\tan x)\sec^2 x$	**(5)** $\frac{1}{2}$
(6) 4	**(7)** $\frac{e}{6}$	**(8)** $x=1$	**(9)** $y=-\cos x$	**(10)** $\frac{1}{2}e^{-4x^2}+C$
(11) 2π	**(12)** $\frac{1}{2}$	**(13)** 4	**(14)** $\frac{\pi}{3}$	**(15)** 4

二、求解下列各题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

（16）解： 在方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 两边同时对 x 求导，得

$5y'y^4+2y'-1-21x^6=0$， $y'=\dfrac{1+21x^6}{5y^4+2}$， （**4** 分）

当 $x=0$ 时，由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 得 $y=0$，得 $y'(0)=\dfrac{1}{2}$ （**2** 分）

得所求切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，法线方程为 $y=-2x$ （**2** 分）

（17）解：因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^t}{-3e^{-t}}=-\dfrac{2}{3}e^{2t}$，（**3** 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(-\frac{2}{3}e^{2t})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{4}{3}e^{2t}}{-3e^{-t}}=\frac{4}{9}e^{3t}$$ （**4** 分）， 故 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\dfrac{4}{9}$。 （**1** 分）

（18）解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\int_{1}^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-\cos^2 x}(-\sin x)}{2x}$$ （**4** 分）

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}e^{-\cos^2 x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2e}$$ （**4** 分）

（19）解:令 $t=x+2$，得

$$\int\frac{x^2}{(x+2)^3}dx=\int\frac{(x+2-2)^2}{(x+2)^3}d(x+2)=\int\frac{(t-2)^2}{t^3}dt=\int(\frac{1}{t}-4\frac{1}{t^2}+4\frac{1}{t^3})dt$$ （**5** 分）

$$=\ln|t|+\frac{4}{t}-2t^{-2}+C=\ln|x+2|+\frac{4}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}+C。$$ （**3** 分）

(20) 解：令 $t=\sqrt{x}$，得 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 e^t\cdot 2tdt=2\int_0^1 tde^t$ 。（5 分）

$$=2(te^t\big|_0^1-\int_0^1 e^t dt)=2[e-(e-1)]=2\text{。}$$（3 分）

(21) 解：令 $t=x-1$，得 $\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 e^t dt+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt$（5 分）

$$=e^t\big|_{-1}^0+\ln|1+t|\big|_0^1=1-e^{-1}+\ln 2\text{。}$$（3 分）

(22) 解：由已知条件得

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=x(x-2)e^x+2x$，$\int_0^x f(t)dt=(x^2-2)e^x+2$，$f(x)=(x^2+2x-2)e^x$，

$f'(x)=(x^2+4x)e^x$，$f''(x)=(x^2+6x+4)e^x$，驻点 $x=0,x=-4$；（5 分）

因为 $f''(0)=4>0,f''(-4)=-4e^{-4}<0$，

故 $f(x)$ 有极小值 $f(0)=-2$，极大值 $f(-4)=6e^{-4}$。（3 分）

(23) 解：曲线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 与直线 $3x-2y-4=0$ 的交点坐标为 $(2,1),(4,4)$，

(1) $S=\int_2^4(\frac{3}{2}x-2-\frac{1}{4}x^2)dx=\frac{1}{3}$；（4 分）

(2) $V=\int_2^4\pi[(\frac{3}{2}x-2)^2-(\frac{1}{4}x^2)^2]dx=\frac{8}{5}\pi$ 。（4 分）

三、证明题（本大题共 1 小题，共 6 分）

证　由 $f(0)=2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$，则根据积分中值定理，存在 $\xi_1\in[\frac{1}{2},1]$，使得 $f(0)=f(\xi_1)$，（4 分）

再由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,\xi_1)\subseteq(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$ 。（2 分）