第一讲：极限

求极限 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^{x^x}}$

降低运算等级

$$x^{x^{x^x}} = e^{x^{x^x}\ln x}$$

$$x^{x^x}\ln x = x^{x^x-\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\ln x$$

$$x^{x^x-\frac{1}{2}} \to 0^{\frac{1}{2}} \Leftarrow x^x-\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$$

$$x^{x^x}\ln x \to 0\cdot 0$$

$$x^{x^{x^x}} \to e^0$$

$$x^{x^{x^x}} = e^{x^{x^x-\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\ln x} = \left(e^{x^{\frac{1}{2}}\ln x}\right)^{x^{x^x-\frac{1}{2}}} = \left(x^{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{x^{x^x-\frac{1}{2}}}$$

$$x^{x^x-\frac{1}{2}} \to 0$$

$$x^{x^{\frac{1}{2}}} = \left(\sqrt{x}^{\sqrt{x}}\right)^2 \to 1^2$$

$$x^{x^{x^x}} \to 1^0$$

$$\alpha>0 \quad \lim_{x\to0^+} x^\alpha\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0$$

$$x^{x^{x^x}} \neq \left(x^x\right)^{x^x}$$

$$\left(x^x\right)^{x^x} = x^{x\cdot x^x} = x^{x^{x+1}}$$

第一讲：极限

$f_{2n}(x)=\underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{2n个x}$，证明 $\lim\limits_{x\to0^+} f_{2n}(x)=1$

数学归纳法

$n=1$ 成立 $\Leftarrow x^x\to1$

假设 $n=k$ 成立

$$f_{2(k+1)}(x)=x^{x^{f_{2k}(x)}}=x^{x^{\frac12}\cdot x^{f_{2k}(x)-\frac12}}=\left(x^{x^{\frac12}}\right)^{x^{f_{2k}(x)-\frac12}}$$

$x^{f_{2k}(x)-\frac12}\to0^{\frac12}$　　　$x^{x^{\frac12}}=\left(\sqrt{x}^{\sqrt{x}}\right)^2\to1$

$f_{2(k+1)}(x)\to1^0$　　　故 $n=k+1$ 成立

第一讲：极限

$\alpha,\beta>0$

如果α与β是等价无穷小或等价无穷大

则$\ln\alpha$与$\ln\beta$是等价无穷大

$$\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}-1=\frac{\ln\frac{\alpha}{\beta}}{\ln\beta}\to 0$$

$$\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}\to 1$$

第一讲：极限

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln(x+2e^{x})}{\ln(x+e^{x^{2}})}$

$$x+2e^{x}\sim 2e^{x}\Leftarrow\frac{x+2e^{x}}{2e^{x}}\to 1$$

$$\ln(x+2e^{x})\sim\ln(2e^{x})=\ln 2+x$$

$$x+e^{x^{2}}\sim e^{x^{2}}\Leftarrow\frac{x+e^{x^{2}}}{e^{x^{2}}}\to 1$$

$$\ln(x+e^{x^{2}})\sim\ln e^{x^{2}}=x^{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x+2e^{x})}{\ln(x+e^{x^{2}})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\ln 2+x)}{x^{2}}=1$$

第一讲：极限

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\underline{\quad e^{-1}\quad}$ （2010年数三）

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}$$

降低运算等级

$$x^{\frac{1}{x}}-1=e^{\frac{\ln x}{x}}-1\sim\frac{\ln x}{x}$$

$$\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)\sim\ln\frac{\ln x}{x}=\ln\ln x-\ln x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}-1\to 0-1$$

第一讲：极限 > 有理化

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+x+x^2+x^3}-x$

分子有理化

y^2+yx+x^2

记 $\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3}=y$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+x+x^2+x^3}-x=\lim_{x\to+\infty} y-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{y^3-x^3}{y^2+yx+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+x^2}{y^2+yx+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}{\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1}=\frac{1}{3}$$

第一讲：极限 > 有理化

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$ 2011年数三

$\sqrt{1+2\sin x}+x+1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\sin x-(x+1)^2}{x\ln(1+x)\left(\sqrt{1+2\sin x}+x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-x^2-2x}{x\ln(1+x)\left(\sqrt{1+2\sin x}+x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-x^2-2x}{2x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\sin x-x=o(x^2)$$

第一讲：极限 > 有理化

已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$ ________ 2016年数三

$$\lim_{x\to0}\sqrt{1+f(x)\sin 2x}=1 \Leftarrow \lim_{x\to0}\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}\cdot\left(e^{3x}-1\right)=2\cdot0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin 2x}{\left(e^{3x}-1\right)\left(\sqrt{1+f(x)\sin 2x}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)2x}{3x\cdot2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{3}\quad\Rightarrow\lim_{x\to0}f(x)=6$$

$$\sqrt{1+f(x)\sin 2x}+1$$

第一讲：极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-\tan x^{\tan x}}{x^3}$$

$$x^x-\tan x^{\tan x}=(t^t)'\big|_{t=\xi_x}(x-\tan x)$$

ξ_x 介于 $x,\tan x$ 之间

$$(t^t)'=(e^{t\ln t})'=e^{t\ln t}(1+\ln t)=t^t(1+\ln t)$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$x^x-\tan x^{\tan x}=\xi_x^{\xi_x}(1+\ln\xi_x)(x-\tan x)\sim-\frac{1}{3}x^3(1+\ln\xi_x)$$

$$\frac{x-\tan x}{-\frac{1}{3}x^3}=1+o(1)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-\tan x^{\tan x}}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{3}(1+\ln\xi_x)=+\infty$$

第一讲：极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{x^x}-\tan x^{\tan x^{\tan x}}}{x^3}$$

$$(t^{t^t})'=(e^{t^t\ln t})'=e^{t^t\ln t}\left((t^t)'\ln t+t^t t^{-1}\right)=t^{t^t}t^t\left(\ln^2 t+\ln t+t^{-1}\right)$$

$$(t^t)'=(e^{t\ln t})'=e^{t\ln t}(1+\ln t)=t^t(1+\ln t)$$

$$x^{x^x}-\tan x^{\tan x^{\tan x}}=(t^{t^t})'\Big|_{t=\xi_x}(x-\tan x)\qquad \xi_x\text{介于}x,\tan x\text{之间}$$

$$x^{x^x}-\tan x^{\tan x^{\tan x}}=\xi_x^{\xi_x^{\xi_x}}\xi_x^{\xi_x}\left(\ln^2\xi_x+\ln\xi_x+\xi_x^{-1}\right)(x-\tan x)\sim-\frac{1}{3}\xi_x^{\xi_x^{\xi_x}-1}x^3$$

$$\ln^2\xi_x+\ln\xi_x+\xi_x^{-1}\sim\xi_x^{-1}\Leftarrow\frac{\ln^2\xi_x+\ln\xi_x+\xi_x^{-1}}{\xi_x^{-1}}=\xi_x\ln^2\xi_x+\xi_x\ln\xi_x+1\to 0+0+1$$

$$x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3\qquad\qquad \alpha>0\ \lim_{t\to 0^+}t^\alpha\ln^\beta t=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{x^x}-\tan x^{\tan x^{\tan x}}}{x^3}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\xi_x^{\xi_x^{\xi_x}-1}=-\frac{1}{3}\lim_{s\to 0^+}s^{s^s-1}\qquad \text{记}\xi_x=s$$

第一讲：极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{x^x}-\tan x^{\tan x^{\tan x}}}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{x^x}-\tan x^{\tan x^{\tan x}}}{x^3}=-\frac{1}{3}\lim_{s\to 0^+}s^{s^s-1}=-\frac{1}{3}$$

$$\alpha>0\quad \lim_{t\to 0^+}t^{\alpha}\ln^{\beta}t=0$$

$$s^{s^s-1}=e^{(s^s-1)\ln s}$$

降低运算等级

$$(s^s-1)\ln s=(e^{s\ln s}-1)\ln s\sim s\ln^2 s$$