3.5. 两个离散型随机变量函数的分布

例: 已知 (X,Y) 的联合概率分布律如下. 求随机变量 $Z=X+Y$ 和 $Z=XY$的分布律

$Y \backslash X$	-1	2
-1	0.25	0.15
1	0.10	0.15
2	0.30	0.05

由 (X,Y) 的联合概率分布，得

p_k	0.25	0.10	0.30	0.15	0.15	0.05
(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$X+Y$	-2	0	1	1	3	4
XY	1	-1	-2	-2	2	4

$Y \backslash X$	-1	2	$P(Y=y_j)$
-1	0.25	0.15	0.40
1	0.10	0.15	0.25
2	0.30	0.05	0.35
$P(X=x_i)$	0.65	0.35	

随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律为

$X+Y$	-2	0	1	3	4
p_k	0.25	0.10	0.45	0.15	0.05

随机变量 $Z=XY$ 的分布律为

XY	-2	-1	1	2	4
p_k	0.45	0.10	0.25	0.15	0.05

X 和 Y 是否独立?　　$P(X=-1,Y=-1) \neq P(X=-1)P(Y=-1)$

故不独立

例: 已知 (X,Y) 的联合概率分布律如下. 求随机变量 $Z=X+Y$ 和 $Z=XY$的分布律

$Y \backslash X$	-1	2	
-1	0.30	0.20	
1	0.12	0.08	
2	0.18	0.12	

求随机变量 $Z=X+Y$ 和 $Z=XY$的分布律

解 由联合分布律得:

p_k	0.30	0.12	0.18	0.20	0.08	0.12
(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$X+Y$	-2	0	1	1	3	4
XY	1	-1	-2	-2	2	4

$Y \backslash X$	-1	2	$P(Y=y_j)$
-1	0.30	0.20	0.50
1	0.12	0.08	0.20
2	0.18	0.12	0.30
$P(X=x_i)$	0.60	0.40	

随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律为

$X+Y$	-2	0	1	3	4
p_k	0.30	0.12	0.38	0.08	0.12

随机变量 $Z=XY$ 的分布律为

XY	-2	-1	1	2	4
p_k	0.38	0.12	0.30	0.08	0.12

X 和 Y 是否独立?

独立

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

例: 设 $X_i \sim P(\lambda_i), i = 1,2$ 。若 X_1 和 X_2 相互独立，则

$$X = X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

证明 $P(X = k) = P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i, X_2 = k - i)$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i) P(X_2 = k - i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!} \frac{\lambda_2^{k-i} e^{-\lambda_2}}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$ 故 $X = X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

类似地: 设 $X_1 \sim b(n_1, p), X_2 \sim b(n_2, p)$。若 X_1 和 X_2 相互独立，则

$$X = X_1 + X_2 \sim b(n_1 + n_2, p)$$

二维连续型随机变量函数的分布

设 (X,Y) 为 二维连续型随机变量，其连续函数 $Z=\varphi(X,Y)$ 仍然是连续型随机变量。

问题：如何求解 Z 的 概率密度 $f_Z(z)$？

首先求出 Z 的分布函数：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\varphi(X,Y)\le z)=P\big((X,Y)\in G\big)$$

$$=\iint_G f(x,y)dxdy$$

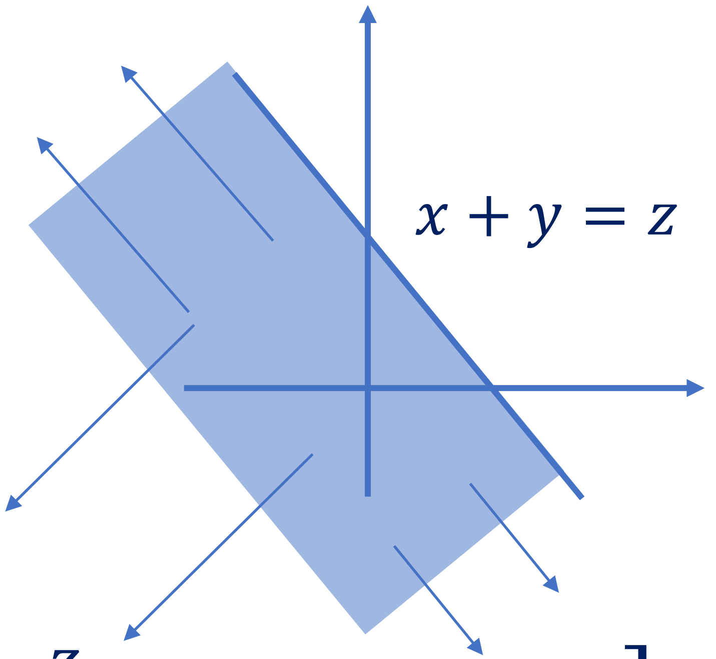
则 Z 的概率密度：$f_Z(z)=F_Z{}'(z)$

1: $Z=X+Y$ 的分布。设(X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$

则 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy.$$



这里 $\displaystyle\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx \xRightarrow{x=u-y} \int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du$

那么，$\displaystyle F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du\right]dy$

$\displaystyle=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy\right]du.$ 故 $\displaystyle f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$

令 $z-y=x$, 则 $y=-x+z$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy \quad =\int_{+\infty}^{-\infty} f(x,z-x)(-dx)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$

Z 的概率密度 $f_Z(z)$ 为 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$

特别地, 如果 X 和 Y 是独立的， 即 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

Z 的概率密度 $f_Z(z)$ 为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

称为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 的卷积 (convolution)，记为

$$f_X(x)*f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

例: 假设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且都服从标准正态分布 $N(0,1)$. 求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

解: X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\qquad -\infty<x,y<\infty.$$

由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

即 $Z\sim N(0,2)$.

命题: 假设随机变量 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2,\dots,n$, 且相互独立，则

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n \sim \boldsymbol{N}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$$

思考: $X_1 \sim N(2,4^2)$， $X_2 \sim N(-3,5^2)$, 且相互独立, 则

1. $X_1 - X_2 \sim N(5,41)$
2. $X_1 + X_2 \sim N(-1,41)$
3. $X_2 - X_1 \sim N(-5,41)$

例: 假设随机变量 X 和 Y 相互独立, 概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$ 求 $Z=X+Y$ 的概率密度

解: 由于 X 和 Y 相互独立，由卷积公式得 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$

显然, 仅当 $0\le x\le 1$ 且 $z-x>0$, 我们有 $f_X(x)f_Y(z-x)\neq 0$

(1). 当 $z<0$, 如果 $x<0$, 那么 $f_X(x)=0$; 如果 $x\ge 0$, 那么 $z-x<0$

因此 $f_Y(z-x)=0$. 所以，我们总有 $f_X(x)f_Y(z-x)=0.$

(2). 当 $0\le z\le 1$, 如果 $0\le x<z$, 则 $f_X(x)f_Y(z-x)\neq 0$

(3). 当 $z>1$ 时，对所有的$0\le x\le 1$，都有 $f_X(x)f_Y(z-x)\neq 0$

综上，$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}0, & z<0,\\ \int_0^z e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z}, & 0\le z\le 1,\\ \int_0^1 e^{-(z-x)}dx=e^{-z}(e-1), & z>1,\end{cases}$$

例: 假设随机变量 X 和 Y 相互独立. Y 的概率密度为 $f_Y(y), -\infty < y < \infty$, X 的概率分布律如下

X	x_1	x_2
p_k	$1-p$	p

求 $Z = X + Y$ 的概率密度

解 Z 的分布函数如下

$$F_Z(z) = P(X + Y \le z)$$

$$= P(X = x_1)P(X + Y \le z | X = x_1) + P(X = x_2)\, P(X + Y \le z | X = x_2)$$

$$= P(X = x_1)P(Y \le z - x_1 | X = x_1) + P(X = x_2)\, P(Y \le z - x_2 | X = x_2)$$

$$= P(X = x_1)P(Y \le z - x_1) + P(X = x_2)\, P(Y \le z - x_2)$$

$$= (1-p)F_Y(z - x_1) + p\, F_Y(z - x_2)$$

故有, $f_Z(z) = F_Z'(z) = (1-p)f_Y(z - x_1) + p\, f_Y(z - x_2)$.

情形 2: $Z=\frac{X}{Y}$. 设 $f(x,y)$ 是二维随机向量 (X,Y) 的概率密度.

则 $Z=X/Y$ 的分布函数是

$$F_Z(z)=P(X/Y\le z)=\iint_{x/y\le z} f(x,y)dxdy$$

令 $u=y, v=\frac{x}{y}$, 则 $x=uv, y=u$,

相应的 Jacobian 矩阵为 $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} v & u\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-u$

$$F_Z(z)=P(X/Y\le z)=\iint_{x/y\le z} f(x,y)dxdy=\iint_{v\le z} f(uv,u)\,|J|dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(uv,u)\,|u|\,du\right]dv,$$

故有 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(uz,u)\,|u|du.$

例：假设随机变量 X 和 Y 相互独立，相应的概率密度分别为，

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0,\\ 0, 其他,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, y>0,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$$

求 $Z=X/Y$ 的概率密度.

解：当 $z>0$，Z 的概率密度是

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}e^{-uz}2e^{-2u}|u|du=\int_0^{+\infty}2ue^{-(2+z)u}du=\frac{2}{(2+z)^2}$$

当 $z\le 0$, 我们有 $f_Z(z)=0$.

$$\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(uz,u)\,|u|du.}$$

所以, $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2}{(2+z)^2}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$

例: 假设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且都服从标准正态分布 $X \sim N(0,1)$. 求 $Z = X/Y$.

解: Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zu) f_Y(u)|u|du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2(1+z^2)}{2}}|u|du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{u^2(1+z^2)}{2}}udu$$

$$= \frac{1}{\pi(1+z^2)}, \quad -\infty < z < \infty.$$

情形 3: 假设随机变量 X 和 Y 相互独立, 分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$. 求 $\boldsymbol{M} = \mathbf{max}\,\{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}$ 和 $\boldsymbol{N} = \mathbf{min}\,\{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}$ 分布函数

解:

$$F_M(z) = P(M \le z) = P(X \le z, Y \le z)$$

$$= P(X \le z)P(Y \le z) = F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_N(z) = P(N \le z) = 1 - P(N > z) = 1 - P(X > z, Y > z)$$

$$= 1 - P(X > z)P(Y > z)$$

$$= 1 - \big(1 - F_X(z)\big)\big(1 - F_Y(z)\big)$$

假设 X_i 相互独立 $(i=1,2,\dots,n)$，分布函数分别为 $F_{X_i}(x)$

求 $\boldsymbol{M}=\max\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\dots,\boldsymbol{X}_n\}$ 的分布函数

$$F_M(z)=P(M\le z)=P(X_1\le z,X_2\le z,\dots,X_n\le z)$$
$$=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_N(z)=P(N\le z)=1-P(N>z)=1-P(X_1>z,X_2>z,\dots,X_n>z)$$
$$=1-\left(1-F_{X_1}(z)\right)\left(1-F_{X_2}(z)\right)\cdots\left(1-F_{X_n}(z)\right)$$

特别地，如果分布函数皆为 $F(x)$，

$$F_M(z)=[F(z)]^n,\qquad F_N(z)=1-[1-F(z)]^n.$$

例: 假设随机变量 X 和 Y 相互独立，且服从参数为1 的指数分布.

求 $\boldsymbol{Z} = \mathbf{max}\,\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\}$ 的密度函数.

解: X 和 Y 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, x > 0, \\ 0, \quad\quad 其他, \end{cases}$

$\boldsymbol{Z}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X \le z, Y \le z)$$

$$= P(X \le z) \cdot P(Y \le z)$$

$$= F^2(z)$$

独立事件积的概率等于单个事件概率的积

$$f_Z(z) = F_Z{}'(z) = 2F_Z(z)F_Z{}'(z) = \begin{cases} 2e^{-z}(1 - e^{-z}), & z \ge 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

例 (X,Y) 的联合概率分布如下，求 $M=\max\{X,Y\}$，$N=\min\{X,Y\}$概率分布

$Y \backslash X$	-2	3
-1	0.25	0.15
2	0.10	0.15
4	0.30	0.05

p_k	0.25	0.10	0.30	0.15	0.15	0.05
(X,Y)	$(-2,-1)$	$(-2,2)$	$(-2,4)$	$(3,-1)$	$(3,2)$	$(3,4)$
$M=\max\{X,Y\}$	-1	2	4	3	3	4
$N=\min\{X,Y\}$	-2	-2	-2	-1	2	3

随机变量 $M=\max\{X,Y\}$的分布律为

M	-1	2	3	4
p_k	0.25	0.10	0.30	0.35

随机变量 $\mathrm{N}=\min\{X,Y\}$的分布律为

N	-2	-1	2	3
p_k	0.65	0.15	0.15	0.05

例 如果随机变量 X_1 和 X_2 均服从参数为 λ 的指数分布，且相互独立，求 $Z=\min\{X_1,X_2\}$ 的概率密度函数

解 X_i 的分布函数为
$$F_{X_i}(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

故 Z 的分布函数为

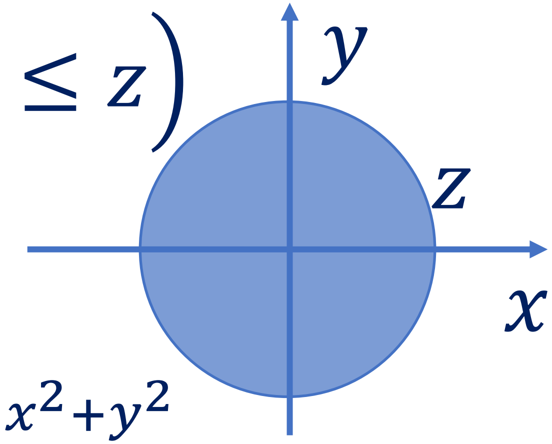
$$F_Z(z)=P(Z\le z)=1-P(Z>z)=1-P(X_1>z,X_2>z)$$
$$=1-\left(1-F_{X_1}(z)\right)\left(1-F_{X_2}(z)\right)=\begin{cases}1-e^{-2\lambda z}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda z}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$Z\sim E(2\lambda)$$

例: 设随机变量 X和 Y 均为服从 $N(0,\sigma^2)$ 的正态分布，且相互独立. 求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度.

解　Z 的分布函数 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right)$



(1) 当 $z\le 0$, $F_Z(z)=0$;

(2) 当 $z>0$ 时

$$F_Z(z)=\iint_{x^2+y^2\le z^2} f(x)f(y)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr$$

$$=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

故, $f_Z(z)=F_Z{}'(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\ge 0\\ 0, & z<0\end{cases}$

注: 该分布称为 瑞利分布，在噪声、海浪等领域应用广泛。再比如，炮弹着地点的坐标为(X,Y)， X和 Y 均为服从 $N(0,\sigma^2)$, X和 Y 相互独立.那么，炮弹着地点到原点的距离服从瑞利分布