1. 计算 $\int_L xds$， L 为抛物线 $y=x^2$ 上 $0\le x\le 1$ 的弧段.

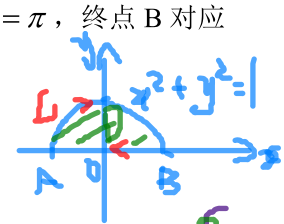
解 抛物线 $y=x^2$ 上 $0\le x\le 1$ 的弧段的参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases}, 0\le x\le 1$，弧微元

$ds=\sqrt{1+[(x^2)']^2}dx=\sqrt{1+4x^2}dx$，故积分

$$\int_L xds=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{8}\int_0^1\sqrt{1+4x^2}d(1+4x^2)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)。$$

2. 设曲线 L 是由 $A(-1,0)$ 到 $B(1,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=1$，计算 $\int_L xdy-ydx$。

解 法一 有向曲线 L 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t$, 起点 A 对应参数 $t=\pi$，终点 B 对应参数 $t=0$，故 $\int_L xdy-ydx=\int_\pi^0[\cos t\cdot\cos t-\sin t\cdot(-\sin t)]dt=-\pi$。



法二 $\int_L xdy-ydx=\oint_{L+\overrightarrow{BA}}xdy-ydx-\int_{\overrightarrow{BA}}xdy-ydx$

$\oint_{L+\overrightarrow{BA}}=\int_L+\int_{\overrightarrow{BA}}$

线段 $\overrightarrow{BA}$ 的参数方程为：$x=x, y=0, x$ 从 1 到-1，$\int_{\overrightarrow{BA}}xdy-ydx=\int_1^{-1}(x(0)'-0)dx=0$；

$P=-y$ $Q=x$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$, $\frac{\partial P}{\partial y}=-1$

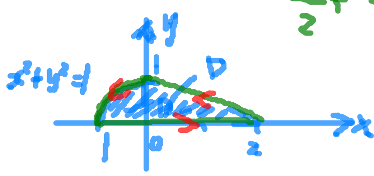
由格林公式，$\oint_{L+\overrightarrow{BA}}xdy-ydx=-\iint_D(1-(-1))dxdy=-2\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi$，其中 D 是顺时针方向的曲线 $L+\overline{BA}$ 围成的闭区域。

$=-2\iint_D dxdy$

3. 计算 $\oint_C(x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy$，其中 C 为由直线 $y=0$、$x+2y=2$ 及圆弧 $x^2+y^2=1$ 所围成的区域 D 的逆时针方向边界。

$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=3$, $\frac{\partial P}{\partial y}=-2$



解 $P=x^2-2y, Q=3x+ye^y$，根据格林公式，

$$\oint_C(x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy=\iint_D(3-(-2))d\sigma=5\iint_D d\sigma=5(\frac{\pi}{4}+1)=\frac{5\pi}{4}+5。$$

4.（选做题） 设 L 为 xoy 坐标平面上一条逆时针方向的不经过坐标原点的封闭光滑曲线，

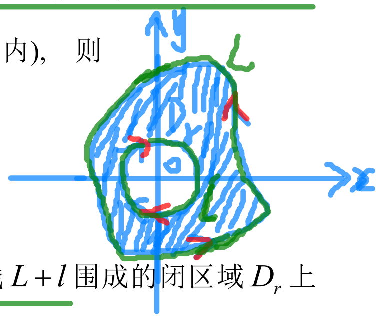
（1）当原点在封闭光滑曲线 L 外时，计算 $\oint_L\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$；

（2）当原点在封闭光滑曲线 L 内时，计算 $\oint_L\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$。

解：令 $P=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$，

（1）当原点在封闭光滑曲线 L 外时，因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在正向封闭光滑曲线 L 围成的闭区域上连续，由格林公式，$\oint_L \dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\iint_D 0d\sigma=0$；

（2）当原点在封闭光滑曲线 L 内时，因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在正向封闭光滑曲线 L 围成的闭区域上不连续，不能用格林公式．在 L 内作一顺时针方向圆周 $l: x^2+y^2=r^2, r$ 为充分小正数(保证该圆在曲线 L 围成的区域 D 内)， 则



$$\oint_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\oint_{L+l}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}-\int_l \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}\text{；}$$

因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在正向封闭曲线 $L+l$ 围成的闭区域 D_r 上连续(这里封闭曲线 $L+l$ 的正向是指 L 和 l 对于它们围成的闭区域 D_r 来说都是正向，具体指 L 是逆时针方向，l 是顺时针方向)，故由格林公式得 $\oint_{L+l}\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\iint_{D_r}0dxdy=0$；

顺时针方向

由于~~负向~~圆周 l 的参数方程为 $x=r\cos t, y=r\sin t$，t 从 2π 到 0，故得

$=\frac{1}{r^2}\int_l ydx-xdy$

$$\int_l \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\int_{2\pi}^{0}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\int_{2\pi}^{0}[r\sin t(-r\sin t)-r\cos t\cdot r\cos t]dt=2\pi\text{；}$$

从而 $\oint_L \dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=-2\pi$．