一、填空题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x_0=-1$ 处的 6 阶泰勒公式中 $(x+1)^3$ 的系数是____________。（填 -1）

解析： 根据 $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\begin{cases}o((x-x_0)^n)\\ \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\end{cases},$$

$$x\in U(x_0),\quad \xi=x_0+\theta(x-x_0),0<\theta<1$$

知，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x_0=-1$ 处的 6 阶泰勒公式中 x^3 的系数是 $\dfrac{f'''(x_0)}{3!}$，因为

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}=-x^{-2}, f''(x)=(-1)(-2)x^{-3}, f'''(x)=(-1)(-2)(-3)x^{-4}$，所以

$\dfrac{f'''(x_0)}{3!}=-1$。

2. 函数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的 6 阶麦克劳林公式中 x^2 的系数是______________。（填 $\dfrac{1}{2}$）

解析： 根据 e^x 的 n 阶麦克劳林公式： $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$ 知，

函数**函数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的 2 阶麦克劳林公式为**

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\{1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)+[1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+o((-x)^2)]\}$$

$$=\frac{1}{2}\{2+x^2+o(x^2)\}.$$

二、单调性证明不等式（写出证明过程）

1. 证明 当 $x>0$ 时，$1+\dfrac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$。

证 设 $f(x)=1+\dfrac{x}{2}-\sqrt{1+x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}>0, x>0$。得

$f(x)=1+\dfrac{x}{2}-\sqrt{1+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 单增，所以当 $x>0$ 时， $f(x)>f(0)=0$，结论得证。

2. 证明当 $0<x<1$ 时， $e^{-x}+\sin x<1+\dfrac{x^2}{2}$。

证 设 $f(x)=e^{-x}+\sin x-\dfrac{x^2}{2}-1$，则 $f'(x)=-e^{-x}+\cos x-x, f''(x)=e^{-x}-\sin x-1$。因

为当$0<x<1$时，$f''(x)=e^{-x}-\sin x-1<0,$ 故 $f'(x)=-e^{-x}+\cos x-x$ 在$[0,1]$单减，得当$0<x<1$时，$f'(x)<f'(0)=0$，所以 $f(x)=e^{-x}+\sin x-\dfrac{x^2}{2}-1$ 在$[0,1]$单减。于是当$0<x<1$时，$f(x)<f(0)=0$，结论得证。

三、解答题（写出计算过程）

1. 求常数a的值，使得 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，它是极大值还是极小值？并求出此极值。

解析：因为 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，所以导函数

$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处等于 0 或不存在。注意到导函数

$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$ 在任何实数点都存在，故 $f'(\dfrac{\pi}{3})=a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 3\cdot\dfrac{\pi}{3}=0$，得 $\dfrac{a}{2}-1=0$，得$a=2$。

又 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x, f''(\dfrac{\pi}{3})=-2\sin\dfrac{\pi}{3}-3\sin 3\cdot\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}<0$，由极值第二充分条件得 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 为极大值点，$f(\dfrac{\pi}{3})=2\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{3}\sin 3\cdot\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 为极大值。

2. 求函数 $y=2xe^{-x}$ 的单调区间、极值、凹凸区间和拐点。

解析：函数 $y=2xe^{-x}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$y'=2e^{-x}(1-x), y''=2e^{-x}(x-2)$。

$y'=0$的点即驻点为$x=1$，当$x<1$时，$y'>0$；当$x>1$时，$y'<0$；得函数 $y=2xe^{-x}$ 的单增区间为$(-\infty,1]$，单减区间为$[1,+\infty)$；极大值为$y(1)=\dfrac{2}{e}$；

$y''=0$的点为$x=2$，当$x<2$时，$y''<0$；当$x>2$时，$y''>0$；得函数 $y=2xe^{-x}$ 的凸区间为$(-\infty,2]$，凹区间为$[2,+\infty)$；拐点为$(2,y(2))=(2,\dfrac{4}{e^2})$。