第十二章 无穷级数

第一节 常数项级数的概念和性质

一、 常数项级数的概念

定义: 将数列$\{u_n, n\geq 1\}$的项相加得到的表达式$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

称为(数项)**级数**，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n$称为**通项**，$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n, n\geq 1$称为级数的**部分和数列**，显然，

$u_n=s_n-s_{n-1}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$.

若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=s$(常数)，则称**级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**，且和为s；若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，则称**级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **发散**.

例 1 讨论**等比级数**(又称**几何级数**) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$，(其中$a\neq 0$, q称为公比)的敛散性.

解: $s_n=a+aq+aq^2+aq^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a-aq^n}{1-q}, q\neq 1,\\ na, \quad q=1\end{cases}$,

当$|q|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{a}{1-q}$； 当$|q|>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-aq^n}{1-q}=\infty$；

当$q=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}na=\infty$； 当$q=-1$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-aq^n}{1-q}$不存在.

因此，$|q|<1$, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$收敛，且和为$\dfrac{a}{1-q}$；当$|q|\geq 1$, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$发散.

例 2 讨论级数的敛散性

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$；

(2) $\ln(1+1)+\ln(1+\dfrac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\dfrac{1}{n})+\cdots$.

解: (1) $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$， $s_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$；$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=1$；

故原级数收敛，且和为 1;

(2) $s_n=\ln(1+1)+\ln(1+\dfrac{1}{2})+\ln(1+\dfrac{1}{3})+\cdots+\ln(1+\dfrac{1}{n})=\ln 2+\ln\dfrac{3}{2}+\ln\dfrac{4}{3}+\cdots+\ln\dfrac{n+1}{n}$

$=\ln(2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdots\cdots\dfrac{n+1}{n})=\ln(n+1)$， $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$；故原级数发散.

例 3. 讨论**调和级数** $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性.

解：假设调和级数收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$，$u_n = \dfrac{1}{n}$. 注意到

$s_{2n} - s_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \underbrace{\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n} + \cdots + \dfrac{1}{2n}}_{n\text{项}} = \dfrac{1}{2}, n \ge 1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) \ge \dfrac{1}{2}$，但

$\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} - \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$，出现矛盾. 故调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散.

二、 常数项级数的性质

性质 1 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则对任意常数 k , $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k u_n$ 收敛; 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则对任意非零常数 k , $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k u_n$ 仍发散.

证：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k u_n$ 的部分和分别为 s_n 和 σ_n，则 $\sigma_n = k s_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} k s_n$.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，设 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = ks$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k u_n$ 收敛；

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，则 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，从而对非零常数 k，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ 不存在，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k u_n$ 发散.

例 4 (1) 由于 $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots$ 发散, 故 $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3n} + \cdots$ 发散;

(2) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0.5^n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0.5^{n+1}$ 也收敛.

性质 2 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛;

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散.

证：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的部分和分别为 s_n, σ_n 和 τ_n，则 $\tau_n = s_n \pm \sigma_n$.

(1) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛时，设 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s, \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma,$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = s \pm \sigma$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛;

(2) (反证法) 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛，且由已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则由性质 2 的前一结论，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n - u_n) = \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散矛盾，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散.

例 5 (1) 级数 $(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}) + (\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}) + (\dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3}) + \cdots + (\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}) + \cdots$ 收敛; (2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{1}{3^n} + \dfrac{8}{n})$ 发散；(3) 级数 $(\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2}) + (\dfrac{1}{3^2} - \dfrac{3^2}{2^2}) + (\dfrac{1}{3^3} - \dfrac{3^3}{2^3}) + \cdots$ 发散；

<u>注</u> 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 可能收敛可能发散，如两个级数 $1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$ 和 $-1 - 1 - \cdots - 1 - \cdots$ 均发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)) = 0$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2$ 发散.

性质 3 去掉、添加或改变级数的有限项，新级数不改变敛散性.

证：因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 为一确定常数. 在级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 中去掉、添加或改变级数的有限项后，新级数仍是一确定常数，即新级数仍收敛；反之，同样讨论.

性质 4 收敛级数的项任意加括号后新级数仍为收敛级数，且和不变.

证：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的项任意加括号后新级数为

$(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{(k-1)}}+u_{n_{(k-1)}+1}+\cdots+u_{n_k})$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和设为 s_n. 则

新级数第一项 $A_1=u_1+u_2+u_{n_1}=s_{n_1}$， $n_1\geq 1$；

新级数前二项和 $A_2=(u_1+u_2+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+u_{n_2})=s_{n_2}$， $n_2\geq 2$；

新级数前三项和 $A_3=(u_1+u_2+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+u_{n_2})+(u_{n_2+1}+u_{n_2+2}+u_{n_3})=s_{n_3}$， $n_3\geq 3$；

$\vdots$

新级数前 k 项和 $A_k=(u_1+u_2+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{(k-1)}}+u_{n_{(k-1)}+2}+u_{n_k})=s_{n_k}, n_k\geq k$；

可得数列 $\{A_k, k\geq 1\}$ 是数列 $\{s_n, n\geq 1\}$ 的一个子列. 现已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，设 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则

$\lim_{k\to\infty} A_k=\lim_{k\to\infty} s_{n_k}=\lim_{n_k\to\infty} s_{n_k}=s$，即新级数的部分和极限存在，从而新级数收敛，且和不变.

注：(1) 一个级数的项加括号后新级数收敛，则原级数可能收敛可能发散.

(a) 如级数 $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 加括号后新级数 $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$ 收敛，

但级数 $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 发散，因为其部分和 $s_n=\begin{cases}0, n=2,4,6,\cdots\\ 1, n=1,3,5,\cdots\end{cases}$ 的极限不存在;

(b) 级数 $0-0+0-0+0-0+\cdots$ 加括号后新级数 $(0-0)+(0-0)+(0-0)+\cdots+(0-0)+\cdots=0$ 收敛, 原级数 $0-0+0-0+0-0+\cdots=0$ 也收敛.

(2) 一个级数的项加括号后新级数发散，则原级数一定发散，因为如果原级数收敛，则根据性质 4 知，它的项任意加括号后新级数仍收敛，与已知矛盾.

性质 5 收敛级数的通项极限为 0.

证：设收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 s_n，且设 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则 $u_n=s_n-s_{n-1}, n\geq 1$，从而

$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty} s_n-\lim_{n\to\infty} s_{n-1}=s-s=0\cdot$

注：(1) 由性质 5 的逆否命题知，通项极限不等于 0 的级数必定发散，比如，

(a) 对级数 $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$，由于通项极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\neq 0$，故此级数发散

(b) 对级数 $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$，由于通项极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{6}\neq 0$，故此级数发散；

(c) 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})$，由于通项极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})=\ln\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\ln e=1\neq 0$，故此级数发散；

(2) 性质 5 的逆命题是不成立的，即通项极限为 0 的级数可能收敛可能发散，如调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的通项极限为 0 该级数发散，等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ 的通项极限为 0 该级数收敛.

第二节 常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

定义 每项非负的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 称为**正项级数**.

正项级数的审敛法(判别法)

1. 部分和数列有界法，即**对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{s_n,n\geq 1\}$ 有界**.

证 $\Rightarrow$ 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则部分和数列 $\{s_n,n\geq 1\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 存在，即部分和数列 $\{s_n,n\geq 1\}$ 收敛，从而必有界.

$\Leftarrow$ 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{s_n,n\geq 1\}$ 有界，即存在常数 $M>0$，使得 $0\leq s_n\leq M,n\geq 1$；又由于 $0\leq s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_n,n\geq 1$，由数列的单调有界原理知，部分和数列 $\{s_n,n\geq 1\}$ 收敛，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 存在，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2. 比较审敛法 **对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，若 $u_n\leq v_n,n=1,2,\cdots$，则**

(1) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；(2) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散；

证 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和分别为 s_n 和 σ_n，则

$0\leq s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leq v_1+v_2+\cdots+v_n=\sigma_n,n\geq 1$，所以，

(1) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，其部分和数列 $\{\sigma_n,n\geq 1\}$ 有界,即 $0\leq\sigma_n\leq$ 某正数 $M,n\geq 1$，从而 $0\leq s_n\leq$ 某正数 $M,n\geq 1$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(2) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散时,假设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，由(1)结论得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，矛盾，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

注 因为去掉或改变级数的前有限项，级数的敛散性不发生改变，故比较审敛法中条件 $u_n \le v_n, n=1,2,\cdots$ 改为 $u_n \le v_n, n \ge$ 某正整数 N，结论仍成立.

例 1 证明 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$，其中 p 是正常数

当 $0<p\le 1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛.

证 (1) 当 $0<p\le 1$ 时，因为 $0<n^p\le n^1, n\ge 1$，故 $\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^p}, n\ge 1$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散；

(2) 当 $p>1$ 时，$0<s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}<1+\int_1^n\frac{1}{x^p}dx<1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=1+\frac{1}{p-1}, n\ge 1$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛；

比较审敛法极限形式 **对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，**

(1)若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\in(0,+\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛，同时发散；

(2)若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$，则当 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(3)若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$，则当 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散；

证 (1) 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\in(0,+\infty)$，则对正数 $\varepsilon=\frac{l}{2}$，存在某正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon=\frac{l}{2}$，即 $\frac{l}{2}v_n<u_n<\frac{3l}{2}v_n$，讨论即得. (2), (3)易证.

注 **应用时 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 常取为调和级数、p 级数和等比级数等.**

例 3 讨论下列正项级数的敛散性 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{1+n^3}$ (发散)；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ (收敛)； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ (发散)； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^3+n+1}}$ (收敛)； (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ (收敛)；

注 $\varphi(n)\sim\sin\varphi(n)\sim\tan\varphi(n)\sim\ln(1+\varphi(n))$，当 $\varphi(n)\to 0$ 时.

3. 比值审敛法或达朗贝尔判别法 **对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ 时，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ 或 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；当 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛可能发散.**

<u>注</u> (1) 对调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$和$p$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$，但前者发散，后者收敛.

(2) (适用范围) 当正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的通项中含阶乘或次方时，使用效果较好！

例 4 讨论下列正项级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$(发散)；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$(收敛)；(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$(收敛)； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$(收敛)；

二、交错级数及其审敛法

定义 称数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$或$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots$为<u>**交错级数**</u>，其中，$u_n>0,n\ge 1$. 因后者除以(-1)即得前者故两者敛散性相同，且收敛时两者的和为相反数，故只讨论前者.

<u>交错级数的审敛法</u>(莱布尼兹定理) **若交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足(1) $u_n\ge u_{n+1},n=1,2,\cdots$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则级数收敛，且其和$s\in[0,u_1]$，其余项$r_n=s-s_n$的绝对值$|r_n|\le u_{n+1}$.**

证 (a) 级数的前$2n$项的和$s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})\ge 0$，故部分和数列$\{s_{2n},n\ge 1\}$单增；$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}\le u_1$，所以，$0\le s_{2n}\le u_1$，于是由数列的单调有界原理，极限$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}=s$，则$0\le s\le u_1$；又$s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n+1}=s$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s\in[0,u_1]$；

(b) 余项$r_n=s-s_n=(-1)^n u_{n+1}+(-1)^{n+1}u_{n+2}+(-1)^{n+2}u_{n+3}+\cdots=(-1)^n(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots)$，括号内的交错级数是与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$同一类型的交错级数，且满足(1)和(2)，故由(a)部分结论知其和$\sigma\in[0,u_{n+1}]$，所以$|r_n|=|(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots)|=|\sigma|=\sigma\le u_{n+1}$.

例 5 对交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，由于$u_n=\frac{1}{n},n\ge 1$满足莱布尼兹定理条件，所以收敛且其和$s\in[0,1]$，其余和$|r_n|=|s-s_n|\le\frac{1}{n+1}$.

三、一般项级数的绝对收敛、条件收敛和发散的审敛法

定义 对一般项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$(它的各项均为实常数)，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛；** 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛；**

例 1 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 条件收敛；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3^n}{2^n}$ 绝对收敛；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(1+n)}$ 条件收敛；

注 (i) **收敛的正项级数必绝对收敛.**

(对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$; $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛).

(ii) **若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则它本身必收敛.**

证 因 $u_n\le|u_n|, n\ge1$, 所以 $0\le v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)\le|u_n|, n\ge1$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛(即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛)及正项级数的比较审敛法知，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，于是得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)$ 收敛.

一般项级数绝对收敛、条件收敛和发散的审敛法

(iii) **对一般项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ，若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能绝对收敛、可能条件收敛、可能发散；**

证 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$ ，则存在正整数 N ，当 $n>N$ 时，有 $|u_{n+1}|>|u_n|>\cdots>|u_{N+1}|\ge0$，所以，$\lim_{n\to\infty}|u_n|\ne0,$ 从而 $\lim_{n\to\infty}u_n\ne0,$ 得到 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n,$ 都有 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$ ，但第一个级数绝对收敛，第二个级数条件收敛，第三个级数发散.

上述审敛法适用于一般项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 通项中含阶乘或次方，比如，

例 2 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 绝对收敛；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^3}$ (a 为常数);

解 (2) 设 $u_n=\frac{a^n}{n^3}, \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{a^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|a|\frac{n^3}{(n+1)^3}=|a|$，所以，当 $|a|<1$ 时，原级数绝对收敛；当 $|a|>1$ 时，原级数发散；当 $a=1$ 时，原级数收敛(绝对收敛)；当 $a=-1$ 时，原级数条件收敛；

第三节 幂级数

一、幂级数及其收敛性

1. 定义 称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 为**幂级数**. 若 $x = x_0$ 时，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则称 x_0 为幂级数的**收敛点**，所有收敛点的集合称为**收敛域**，记为 I；任取 $x \in I$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，其和为 x 的函数，记为 $s(x)$，称为**和函数**，即**和函数定义为** $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, x \in I$.

2. 幂级数的收敛、发散性质

阿贝尔定理 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 点收敛，则在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内绝对收敛；

若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 点发散，则在 $(-\infty, -|x_0|) \cup (|x_0|, +\infty)$ 内发散；

注 由阿贝尔定理知，**幂级数** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ **的收敛域**为开区间 $(-R, R)$ 并上收敛的端点 $-R$ 或 R，称 $(-R, R)$ 为**收敛区间**，R 称为**收敛半径**，这里 R 为某正数或 0.

定理 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.

例 1 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ 的收敛半径与收敛域.

解：设 $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$，得收敛半径为 $R = 1$，收敛区间为 $(-1,1)$. 对端点 $x = -1$, 幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n}$ 发散，对端点 $x = 1$, 幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛. 故收敛域为 $(-1,1]$.

例 2 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n \cdot n}$ 的收敛半径与收敛域.

解：设 $t = x-1, a_n = \dfrac{1}{2^n \cdot n}$, 则得新幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{2^n \cdot n}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n \cdot n}{2^{n+1}\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{2}$，得新幂级数收敛半径为 $R = 2$，收敛区间为 $(-2,2)$. 对端点 $t = -2$, 新幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛，对端点 $t = 2$, 新幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散. 故新幂级数收敛域为 $[-2,2)$. 所以原幂级数的收敛半径为 $\dfrac{2-(-2)}{2} = 2$，收敛区间为 $(-1,3)$，收敛域为 $[-1,3)$.

注 对缺项的幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，如$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-2}$等，可由正项级数的比值审敛法，从$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1$得到收敛区间$(a,b)$，则$\frac{b-a}{2}$为收敛半径，收敛区间$(a,b)$并上收敛的端点$a$或$b$即收敛域.

例 3 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛半径与收敛区间.

解：设$u_n(x)=\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$，由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)!\,x^{2n+2}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!\,x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x|^2$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x|^2=4x^2$，故当$4x^2<1$时幂级数收敛，当$4x^2>1$时幂级数发散，故收敛区间为$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，收敛半径为$\frac{1}{2}$.

二、幂级数的和函数性质

性质 1 **幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域$I$上连续；**

性质 2 **幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域$I$上可逐项积分，即**

$\int_0^x s(t)dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt, x\in I$，**且新幂级和原幂级数有相同的收敛半径；**

性质 3 **幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛区间$(-R,R)$上可逐项求导，即**

$s(x)'=(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n x^n)', x\in(-R,R)$，**且新幂级和原幂级数有相同的收敛半径.**

<u>幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x), x\in I$求法：</u>

1. 求$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛域$I$； 2. 对$\frac{s(x)}{x^m}$或$x^m s(x)$（$m$为某正整数)逐项求导或逐项积分得等比级数的和函数； 3. 从 0 到x积分或求导求出$\frac{s(x)}{x^m}$或$x^m s(x)$，即得$s(x), x\in I$的表达式.

注 逐项求导或逐项积分后新幂级数收敛区间不变；若新幂级数在收敛区间端点收敛，则收敛区间需并上收敛的端点. 比如，已知$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n, x\in(-1,1)$，

(1) 逐项求导得$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+\cdots+nx^{n-1}, x\in(-1,1)$(新幂级数在区间端点$x=\pm1$发散，故不需并上)；

(2)两边从 0 到x逐项积分得$-\ln(1-x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}, x\in[-1,1)$，(这里新幂级数收敛区间仍为$(-1,1)$，由于新幂级数在端点$x=-1$处收敛，在端点$x=1$处发散，故需并上端点$x=-1$).

例 4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

解：1. 设 $a_n=\frac{1}{n+1}$, 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$，得收敛半径为 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

对端点 $x=-1$, 幂级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ 收敛; 对端点 $x=1$, 幂级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散. 故收敛域为 $[-1,1)$.

2. 设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}, x\in[-1,1)$，得 $(xs(x))'=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, x\in(-1,1)$

(这里新幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 收敛区间仍为(-1,1). 此新幂级数在区间端点 $x=\pm1$ 处均发散，故不需并上 $x=\pm1$);

3. $xs(x)=\int_0^x(ts(t))'dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-x|=-\ln(1-x), x\in[-1,1)$

(这里新幂级数 $xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 收敛区间仍为 $(-1,1)$. 此新幂级数在区间端点 $x=-1$ 处收敛，在端点 $x=1$ 处发散，故需并上 $x=-1$)， 故和函数 $s(x)=\begin{cases}\frac{-1}{x}\ln(1-x), x\in[-1,1), x\neq0,\\ 1, \qquad x=0\end{cases}$.

例 5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$ 的和函数.

解：1. 设 $a_n=n$, 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，得收敛区间为 $(-1,1)$. 对端点 $x=\pm1$, 幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}n(\pm1)^{n+1}$ 发散. 故收敛域为 $(-1,1)$.

2.设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}, x\in(-1,1)$, 得 $\int_0^x\frac{s(t)}{t^2}dt=(\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}dt)'=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}, x\in(-1,1)$.

3. $\frac{s(x)}{x^2}=(\frac{x}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1), x\neq0$. 又 $s(0)=0$, 得 $s(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$.

例 6 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$ 的和函数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和.

解：1. 设$u_n(x)=\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2$，当$x^2<1$时，得收敛区间为$(-1,1)$. 对端点$x=-1$，幂级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{2n-1}$发散; 对端点$x=1$，幂级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$发散. 故收敛域为$(-1,1)$.

2.设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1},x\in(-1,1)$,得$(s(x))'=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1-x^2},x\in(-1,1)$.

3. $s(x)=\int_0^x(s(t))'dt=\int_0^x\dfrac{1}{1-t^2}dt=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|,x\in(-1,1)$ 即 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|,x\in(-1,1)$.

注意到当$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，和函数$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$中会出现$\dfrac{1}{(2n-1)2^n}$，所以求得

$s(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{(2n-1)2^n}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|$，得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)2^n}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

第四节 函数展开成幂级数

泰勒中值定理(见上册) 若$f(x)$在x_0的某领域$U(x_0)$内具有直到$n+1$阶的导数，则

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),\quad x\in U(x_0),\tag{1}$$

其中$P_n(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$介于$x$和$x_0$之间。公式（1）称为**$n$阶泰勒公式**，$x_0=0$时称为**$n$阶麦克劳林公式**。

推论 设$f(x)$在x_0的某领域$U(x_0)$内有任意阶导数，则

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots\tag{2}$$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in U(x_0)\cap(a,b)$，$(a,b)$是公式(2)右端幂级数的收敛区间。公式(2)称为$f(x)$的**$(x-x_0)$的幂级数展开式**。特别地，

设 $f(x)$ 在原点的某领域 $U(0)$ 内有任意阶导数，则

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \tag{3}$$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,\ \ x\in U(0)\cap(-R,R)$，$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$ ξ 介于 x 和 0 之间。

$(-R,R)$ 是公式(3)右端幂级数的收敛区间。公式(3)称为 $f(x)$ **展开成的 x 的幂级数展开式**或 **$f(x)$ 的麦克劳林级数展开式**。

将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数或求 $f(x)$ 的麦克劳林级数展开式的方法：

一、直接法

其步骤为：

1. 求 $f^{(n)}(x), x\in U(0), f^{(n)}(0), n\ge 1$；　**2**. 写 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 及其收敛区间 $(-R,R)$；

3. 对 $U(0)\cap(-R,R)$ 内的任意有限值 x，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$；

4. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n,\ \ x\in U(0)\cap(-R,R)$。

例 1 求 $f(x)=e^x$ 的 x 的幂级数展开式或麦克劳林级数展开式.

解：$f^{(n)}(x)=e^x,\ \ x\in(-\infty,\infty),\ \ f^{(n)}(0)=1, n\ge 1,$ 得幂级数

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

其收敛半径 $R=+\infty$，收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$。对 $(-\infty,+\infty)$ 内任意有限值 x，

$|R_n(x)|=\left|\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|\dfrac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le\dfrac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$，$\xi$ 介于 x 和 0 之间。因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$。因此，

$$f(x)=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \ x\in(-\infty,\infty)。$$

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 的 x 的幂级数展开式或麦克劳林级数展开式.

解：$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2}), x\in(-\infty,\infty)$，$f^{(n)}(0)=\begin{cases}1,-1,1,-1,\cdots, n=1,3,5,7,\cdots,\\ 0, \qquad n=2,4,6,8,\cdots\end{cases}$ 得幂级数

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

其收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$。对 $(-\infty,+\infty)$ 内任意有限值 x，

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|\frac{\sin(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$，ξ 介于 x 和 0 之间。因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$，从而 $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0,\ \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$，因此，

$$f(x)=\sin x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, x\in(-\infty,\infty)。$$

二、间接法——即通过已知函数的幂级数展开式求其他函数的幂级数展开式

需要熟记，1. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,\infty)$；

2. $\sin x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, x\in(-\infty,\infty)$；

3. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,1)$.

4. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad x\in(-1,1)$

例 3 求下列函数的 x 的幂级数展开式或麦克劳林级数展开式.

(1) $e^{x^2}\quad(=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}, x\in(-\infty,+\infty))$；　(2) $a^x\quad(=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n, x\in(-\infty,+\infty))$；

(3) $\cos x\quad(=(\sin x)'=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2k}}{(2k)!}, x\in(-\infty,+\infty))$；

例 4　(1) 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数;

解 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3})=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2+x-1}-\dfrac{1}{4+x-1})$.

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{4}})$· $\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-1}{2})^n$，$\dfrac{x-1}{2}\in(-1,1)$，

$\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{4}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-1}{4})^n$，$\dfrac{x-1}{4}\in(-1,1)$，故

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{2})^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{4})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{2^{2+n}}-\frac{1}{2^{3+2n}}](x-1)^n, x\in(-1,3)\cdot$$

(2) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数;

解 $f(x)=\dfrac{1}{x-3+3}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-3}{3})^n$，$\dfrac{x-3}{3}\in(-1,1)\cdot$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}(x-3)^n,\quad x\in(0,6)\cdot$$

(3) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数.

解 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{1}\cdot(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{2+x})=\dfrac{1}{-3+x+4}-\dfrac{1}{-2+x+4}$

$=\dfrac{1}{-3}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x+4}{3}}-\dfrac{1}{-2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x+4}{2}}=\dfrac{1}{-3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{x+4}{3})^n+\dfrac{1}{2}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{x+4}{2})^n$，$\dfrac{x+4}{3},\dfrac{x+4}{2}\in(-1,1)$

$$=\frac{1}{-3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n,\quad x\in(-6,-2)\cdot$$

第七节 以 2π 为周期的周期函数的傅里叶级数

定义 称$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$为三角函数系.

性质 1. 以 2π 为周期;

性质 2.(正交性) 任两个函数的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分为 0，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx=0,\quad k,n=1,2,3,\cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nxdx=0,\quad k\neq n,\quad k,n=1,2,3,\cdots$$

性质 3. 任一正弦函数或余弦函数的平方在$[-\pi,\pi]$上的积分等于π，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\pi,\quad n=1,2,3,\cdots$$

例 1 设 $f(x)$ **以** 2π **为周期，且能展开成三角级数，即** $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,

求 a_0,a_n **和** $b_n,n\ge 1$.

解 由三角函数系的性质知，

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx)=\pi a_0,$$

而且，对任意正整数k，

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kxdx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nxdx)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx=a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\pi a_k,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin kxdx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nxdx)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nxdx=b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\pi b_k,$$ 所以

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n\ge 1.$$

定义 对以2π为周期的周期函数$f(x)$，称$\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$为$f(x)$**的傅里叶级数**，其中，$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$，$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n\ge 1$,

称为$f(x)$**的傅里叶系数**.

注 当$f(x)$为奇函数时，$a_n=0,n\ge 0$；当$f(x)$为偶函数时，$b_n=0,n\ge 1$；

<u>$f(x)$ **的傅里叶级数的收敛性**</u>

定理(收敛定理) 对以2π为周期的周期函数$f(x)$，若它满足: (1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点; 在一个周期内至多只有有限个极值点, 则$f(x)$的傅里叶级数收敛,且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), & \text{当}x\text{是}f(x)\text{的连续点}\\ \dfrac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)], & \text{当}x\text{是}f(x)\text{的间断点}\end{cases}.$$

例 2 **设** $f(x)$ **以** 2π **为周期，它在** $[-\pi,\pi)$ **上的表达式为** $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi\le x<0,\\ 1, \quad 0\le x<\pi\end{cases}$ **，求** $f(x)$ **的傅里叶级数在** $f(x)$ **的间断点的收敛性.**

解 因 $f(x)$ 在点 $x=0$ 间断. 根据收敛定理，$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 点收敛于(等于) $\dfrac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\dfrac{-1+1}{2}=0$，因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，所以 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pm 2\pi,\pm 4\pi,\pm 6\pi\cdots$ 点均收敛于(等于)0；

同理，$f(x)$ 的傅里叶级数在左端点 $x=-\pi$ 点收敛于(等于) $\dfrac{f(-\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}$ $=\dfrac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\dfrac{1+(-1)}{2}=0$ (因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，所以 $f(-\pi^-)=f(\pi^-)$)，因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，所以 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pm\pi,\pm 3\pi,\pm 5\pi\cdots$ 点均收敛于(等于)0.

综上，$f(x)$ 的傅里叶级数在其间断点 $x=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\cdots$ 点均收敛于(等于)0.

例 3 **设** $f(x)$ **以** 2π **为周期，它在** $[-\pi,\pi)$ **上的表达式为** $f(x)=\begin{cases}x,-\pi\le x<0,\\ 0, \quad 0\le x<\pi\end{cases}$ **，求** $f(x)$ **的傅里叶级数在** $f(x)$ **的间断点的收敛性.**

解 因 $f(x)$ 在点 $x=-\pi$ 间断. 根据收敛定理，$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=-\pi$ 点收敛于(等于) $\dfrac{f(-\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\dfrac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\dfrac{0+(-\pi)}{2}=\dfrac{-\pi}{2}$ (因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，所以 $f(-\pi^-)=f(\pi^-)$)，因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，所以 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pm\pi,\pm 3\pi,\pm 5\pi\cdots$ 点均收敛于(等于) $\dfrac{-\pi}{2}$.

例 4 **设** $f(x)$ **以** 2π **为周期，它在** $[-\pi,\pi)$ **上的表达式为** $f(x)=x$ **，求** $f(x)$ **的傅里叶级数在** $f(x)$ **的间断点的收敛性.**

解 因 $f(x)$ 在点 $x=-\pi$ 间断. 根据收敛定理，$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=-\pi$ 点收敛于(等于) $\dfrac{f(-\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\dfrac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\dfrac{\pi+(-\pi)}{2}=0$ (因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，所以

$f(-\pi^-)=f(\pi^-)$)，因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，所以 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pm\pi,\pm 3\pi,\pm 5\pi\cdots$ 点均收敛于(等于)0.

例 5 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，它在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0,\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，求 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 收敛于何值？

解 根据收敛定理，$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 点收敛于(等于) $\dfrac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}$

$=\dfrac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\dfrac{1+\pi^2+(-1)}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$(因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，所以 $f(\pi^+)=f(-\pi^+)$).

注 由收敛定理知，以 2π 为周期的周期函数 $f(x)$ 满足两个收敛条件时在连续点处可展开成傅里叶级数，即 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$， x 为 $f(x)$ 的连续点.

$f(x)$ 的傅里叶级数展开式

1. 以 2π 为周期的周期函数的傅里叶级数展开式

例 6 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$，求 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式.

解 从 $f(x)$ 的图形知，$f(x)$ 在点 $0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\cdots$ 均间断. 因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi)$ 上只有两个间断点 $x=0,\pi$，无极值点，所以根据收敛定理，$f(x)$ 在其连续点处可展开成傅里叶级数。计算可得 $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0,\ \ n=0,1,2,\cdots$；

$b_n=\dfrac{2}{n\pi}[1-\cos n\pi]=\dfrac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, n=1,3,5,\cdots\\ 0,\ \ n=2,4,6,\cdots\end{cases}$，所以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{k=1}^{\infty}b_{2k-1}\sin(2k-1)x$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x,\ \ x\in(-\infty,+\infty),\ \ x\ne 0,\ \ \pm2\pi,\ \ \pm3\pi,\cdots$$

例 7 **设 $f(x)$ 以 2π 为周期，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$，求 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式.**

解 从 $f(x)$ 的图形知， $f(x)$ 在点 $\pm\pi,\pm3\pi,\pm5\pi,\cdots$ 均间断. 因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi)$ 上只有一个间断点 $x=-\pi$ ，无极值点，所以根据收敛定理， $f(x)$ 在其连续点处可展开成傅里叶级数。计算可得 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx=0,\quad n=0,1,2,\cdots$；

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{-2}{n\pi}\int_0^{\pi}xd\cos nx=\frac{-2}{n\pi}[\pi conn\pi-\int_0^{\pi}\cos nxdx]=\frac{-2}{n\pi}[\pi(-1)^n-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}]$$

$$=\frac{-2}{n\pi}[\pi(-1)^n-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}]=\frac{2}{n}(-1)^{n+1},n=1,2,3,\cdots$$，所以

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx,\quad -\infty<x<+\infty,\quad x\neq\pm\pi,\pm3\pi,\pm5\pi,\cdots$$

例 8 **设 $f(x)$ 以 2π 为周期，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=|x|$，求 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式.**

解 从 $f(x)$ 的图形知，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续. 因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi)$ 上连续，只一个极值点，所以根据收敛定理， $f(x)$ 在其连续点处可展开成傅里叶级数。计算可得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nxdx=0,\quad n=1,2,3,\cdots;$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}xd\sin nx=\frac{2}{n\pi}[\pi\sin n\pi-\int_0^{\pi}\sin nxdx]=\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\dfrac{-4}{n^2\pi},n=1,3,5,\cdots\\0,\qquad n=2,4,6\cdots\end{cases}$$，所以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x,\quad -\infty<x<+\infty.$$

注 **由例 7、8 知，以 2π 为周期的周期函数，当它在 $[-\pi,\pi)$ 上为奇函数时，它的傅里叶级数展开式为正弦级数，当它在 $[-\pi,\pi)$ 上为偶函数时，它的傅里叶级数展开式为余弦级数。**

2. 非周期函数的傅里叶级数展开式

2.1. 只在$[-\pi,\pi]$上有定义且满足收敛定理的函数的傅里叶级数展开式

设$f(x)$只在$[-\pi,\pi]$上有定义且满足收敛条件。我们可将$[-\pi,\pi]$上的图形向左右平移2π整数倍得到一个以2π为周期的周期函数$F(x),-\infty<x<+\infty$(此过程称为**周期延拓**)，则在一个周期$[-\pi,\pi]$上$F(x)$满足收敛条件定义，从而在连续点处$F(x)$有傅里叶级数展开式。由于在$[-\pi,\pi]$上有$F(x)=f(x)$，从而可得$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶级数展开式，其中，傅里叶系数$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$，

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n\geq 1$.

例 9 求$u(t)=E\left|\sin\frac{t}{2}\right|,-\pi\leq t\leq\pi$ **的傅里叶级数展开式，其中**E**是正常数**.

解 将$[-\pi,\pi]$上$u(t)$的图形向左右平移2π整数倍得到一个以2π为周期的周期函数$U(t),-\infty<t<+\infty$，且在一个周期$[-\pi,\pi]$上$U(t)$满足收敛条件定义，计算可得

$$\underline{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(t)\cos ntdt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos ntdt=\frac{2E}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin\frac{t}{2}\cos ntdt=\frac{-4E}{(4n^2-1)\pi}, n=0,1,2,\cdots}$$

$\underline{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(t)\sin ntdt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\sin ntdt=0, n=1,2,3,\cdots}$，<u>所以$u(t)$在$[-\pi,\pi]$上</u>(即$U(t)$在$[-\pi,\pi]$上)<u>的傅里叶级数展开式为</u>

$$\underline{u(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt=\frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nt\right),\quad -\pi\leq t\leq\pi}.$$ **(画下划线为书写内容)**

例 10 求$f(x)=e^x,-\pi\leq x\leq\pi$ **的傅里叶级数展开式**.

解 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=(-1)^n\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{(1+n^2)\pi}, n=0,1,2,\cdots$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=(-1)^{n-1}\frac{n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{(1+n^2)\pi}, n=1,2,3,\cdots$，所以$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶

级数展开式为 $f(x)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}\sin nx\right]\right\},-\pi<x<\pi.$

2.2. 只在$[0,\pi]$上有定义且满足收敛定理的函数的正弦(余弦)级数展开式

设 $f(x)$ 只在 $[0,\pi]$ 上有定义且满足收敛条件，要求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的正弦(余弦)级数展开式。我们可将 $[0,\pi]$ 上 $f(x)$ 的图形按原点(y 轴)对称得 $[-\pi,\pi]$ 上一个奇(偶)函数 $\tilde{f}(x)$ 的图形(称此过程为**奇(偶)延拓**)，再将 $[-\pi,\pi]$ 上奇(偶)函数 $\tilde{f}(x)$ 的图形向左右平移 2π 整数倍得到一个以 2π 为周期的周期函数 $F(x),-\infty<x<+\infty$ (此过程称为**周期延拓**),则在一个周期 $[-\pi,\pi]$ 上 $F(x)$ 满足收敛条件定义，从而在连续点处 $F(x)$ 有正弦(余弦)级数展开式。由于在 $[-\pi,\pi]$ 上，$F(x)=\tilde{f}(x)$，在 $[0,\pi]$ 上，$F(x)=\tilde{f}(x)=f(x)$，从而可得 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的正弦(余弦)级数展开式，其中，傅里叶系数

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx,n\geq 1.$

$(a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx,n=0,1,2,\cdots.)$

例 11 将 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi\end{cases}$ **展开成正弦级数**.

解 将 $[0,\pi]$ 上 $f(x)$ 的图形按原点对称得 $[-\pi,\pi]$ 上一个奇函数 $\tilde{f}(x)$ 的图形，再将 $[-\pi,\pi]$ 上奇函数 $\tilde{f}(x)$ 的图形向左右平移 2π 整数倍得到一个以 2π 为周期的周期函数 $F(x),-\infty<x<+\infty$，则在一个周期 $[-\pi,\pi]$ 上 $F(x)$ 满足收敛条件定义，从而在连续点处 $F(x)$ 有正弦级数展开式。计算可得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin nxdx$$

$=\begin{cases}\frac{2}{\pi(n^2-1)}(n-\sin\frac{n\pi}{2}),n\geq 2,\\ \frac{1}{\pi}, \quad n=1\end{cases}$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上(即 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上)的正弦级数展开式为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nt=\frac{1}{\pi}\left[\sin x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}(n-\sin\frac{n\pi}{2})\sin nx\right],\ 0<x\leq\pi.$ (画下划线为书写内容)

例 12 将 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi\end{cases}$ **展开成余弦级数**.

解 计算可得 $a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos nxdx=\begin{cases}\dfrac{2(-1)^{k-1}}{\pi(4k^2-1)}, n=2k, & k\ge 1,\\ 0, \quad n=2k+1, & \end{cases}$，

$a_1=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\dfrac{1}{2}$，$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\dfrac{2}{\pi}$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的余弦级数展开式

为 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}\cos 2kx,\ 0\le x\le\pi.$

第八节 以 $2l$ 为周期的周期函数的傅里叶级数

定理(收敛定理) 对以 $2l$ 为(l 为某个正常数)周期的周期函数 $f(x)$，若它满足: (1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点; (2)在一个周期内至多只有有限个极值点, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\begin{cases}f(x), & \text{当}x\text{是}f(x)\text{的连续点}\\ \dfrac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)], & \text{当}x\text{是}f(x)\text{的间断点}\end{cases}.$$

其中，$a_0=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$，$a_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$，$b_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx, n\ge 1.$

注 当 $f(x)$ 为奇函数时，$a_n=0,n\ge 0$；当 $f(x)$ 为偶函数时，$b_n=0,n\ge 1.$

证明 令 $z=\dfrac{\pi x}{l}, F(z)=f(\dfrac{lz}{\pi})=f(x)$，则 $F(z)$ 是以 2π 为周期的周期函数，这是因为 $F(z+2\pi)=f(\dfrac{l(z+2\pi)}{\pi})=f(\dfrac{lz}{\pi}+2l)=f(\dfrac{lz}{\pi})=F(z)$. 由 $f(x)$ 在 $[-l,l)$ 满足收敛定理条件知 $F(z)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 满足收敛定理, 故 $F(z)$ 的傅里叶级数收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz)=\begin{cases}F(z), & z\text{为}F(z)\text{的连续点}\\ \dfrac{1}{2}[F(z^-)+F(z^+)], & z\text{为}F(z)\text{的间断点}\end{cases}，\text{这里}$$

$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)dz$，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nzdz$，$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nzdz, n\ge 1.$ 即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\begin{cases}f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点}\\ \dfrac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)], & x\text{为}f(x)\text{的间断点}\end{cases}，\text{这里}$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n\geq 1.$$

注 只在$[-l,l]$或$[0,l]$上有定义且满足收敛定理的函数$f(x)$的傅里叶级数展开式完全类似于只在$[-\pi,\pi]$或$[0,\pi]$上有定义且满足收敛定理的函数的傅里叶$f(x)$级数展开。

例 1 设$f(x)$以4为周期，它在$[-2,2)$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leq x<0,\\ h, & 0\leq x<2\end{cases}$，求$f(x)$的傅里叶级数展开式.

解 由$f(x)$的图形知，$f(x)$在点$x=0,\pm2,\pm4,\pm6,\cdots$间断，且在$[-2,2)$上满足收敛定理条件，所以在连续点处可展开成傅里叶级数。计算可得

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{h}{2}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{-h}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{-h}{n\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\dfrac{2h}{n\pi}, n=1,3,5,\cdots\\ 0,\quad n=2,4,6,\cdots\end{cases};\quad a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 hdx=h;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_0^2 h\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=\frac{h}{n\pi}\sin n\pi=0, n\geq 1.$$ 所以

$f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2})=\frac{h}{2}+\frac{2h}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2},$$

$-\infty<x<+\infty,\quad x\neq 0,\pm2,\pm4,\pm6,\cdots.$