一、填空题

1. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2} =$ ___1___。

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{2-\sqrt{xy+4}} =$ ___-4___。

3. 函数 $f(x,y)=\dfrac{x+2}{3x+y}$ 的间断点集合为___$\{(x,y)|3x+y=0\}$___。

4. 曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴的正方向所成的角度

$\beta=$______。（$\tan\beta=f_y(1,1,\sqrt{3})=\dfrac{\partial(\sqrt{1+x^2+y^2})}{\partial x}\Big|_{(1,1,\sqrt{3})}=\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Big|_{(1,1,\sqrt{3})}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

故 $\beta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 30°）

5. 设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0, \quad x^2+y^2=0 \end{cases}$，则 $f_x(0,0)=$______。

（$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\dfrac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0^2}-0]\Big/\Delta x=0$）

6. 设 $z=xe^x\sin y$，则 $\dfrac{\partial z^2}{\partial y\partial x}=$______。

（$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^x\cos y, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(xe^x\cos y)=e^x\cos y+x\cos ye^x=e^x(\cos y+x\cos y)$）

7. 函数 $z=x^2+y^2$ 的全微分 $dz=$______。

（$dz=z_x dx+z_y dy=2xdx+2ydy$）

8. 设 $u=f(x^2-y^2,e^{xy})$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$______。

（$u=f(x^2-y^2,e^{xy})\left\langle\begin{matrix} x^2-y^2\left\langle\begin{matrix} x \\ y\end{matrix}\right. \\ e^{xy}\left\langle\begin{matrix} x \\ y\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot e^{xy}\cdot y=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$）

二、证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在。

证 当动点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，极限 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+kx}{x-kx}=\dfrac{1+k}{1-k}$ 随 k 的变动而变动，故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在。

三．计算

1. 设 $w=u^2+uv+v^2, u=x^2, v=2x+1$，求 $\dfrac{dw}{dx}$。

解： $w\left\langle\begin{array}{l} u=x^2---x \\ v=2x+1--x \end{array}\right.$，故 $\dfrac{dw}{dx}=\dfrac{\partial w}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{dx}=(2u+v)\cdot 2x+(u+2v)\cdot 2$

$=(2x^2+2x+1)\cdot 2x+2(x^2+4x+2)=\underline{4x^3+6x^2+10x+4}$。

2. 求 $z=(x^2+y^2)^{xy}$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

解：设 $u=x^2+y^2, v=xy$，则 $z=u^v$。

$z\left\langle\begin{array}{l} u=x^2+y^2\left\langle\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \\ v=xy\left\langle\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \end{array}\right.$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}\cdot 2x+u^v\ln u\cdot y$

$$=u^v\left(\frac{2v}{u}+y\ln u\right)=\underline{(x^2+y^2)^{xy}\left[\frac{2x^2y}{x^2+y^2}+y\ln(x^2+y^2)\right]}。$$