1. $\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos^4 x+1)dx=$ ________________.

解 $\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos^4 x+1)dx=\int_{-\pi}^{\pi}x\cos^4 xdx+\int_{-\pi}^{\pi}1dx=0+2\pi=2\pi$.

2. 对正常数 a, $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=$ ________________.

解 原式$=\frac{1}{-a}\int_0^{+\infty}e^{-ax}d(-ax)=\frac{1}{-a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{-a}(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{ax}}-e^0)=\frac{1}{a}$.

3. $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^3}dx=$ ________________.

解 $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^3}dx=-\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}e^{-x^3}d(-x^3)=\frac{-1}{3}e^{-x^3}\Big|_0^{+\infty}=\frac{-1}{3}(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^3}}-e^0)=\frac{1}{3}$。

4. $\int_0^{2\pi}|\cos x|dx=$ ________________.

解 $\int_0^{2\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos x)dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos xdx$

$$=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=(1-0)-(-1-1)+[0-(-1)]=4\text{。}$$

5. 设函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}+x^2\int_0^1 f(x)dx$**，则** $\int_0^1 f(x)dx=$ ________________.

解 因为$\int_0^1 f(x)dx$为常数，故在$f(x)=\frac{1}{1+x}+x^2\int_0^1 f(x)dx$两边对$x$从 0 到 1 积分得，

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx+\int_0^1[x^2\int_0^1 f(x)dx]dx=\ln|1+x|\Big|_0^1+\int_0^1 f(x)dx)\int_0^1 x^2dx,$$

$=\ln 2+\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx$，故$\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}\ln 2$。

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}=$ ________________.

解 因为$x\to 0$时，$\cos x\to 1$，从而$\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt\to 0$，故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$是$\frac{0}{0}$型极限。注意到$\frac{d}{dx}(\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt)=e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)'=-\sin xe^{-\cos^2 x}$，于是由洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{-\sin xe^{-\cos^2 x}}{2x}=\lim_{x\to 0}e^{-\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=e^{-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}.$$

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi<x<0, \\ xe^{-x^2}, & x\geq 0, \end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)dx$

解 令 $t=x-2$，则 $dx=dt$，

$$\int_1^4 f(x-2)dx=\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0 tdt+\int_0^2 te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^0-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}d(-t^2)$$

$$=\frac{1}{2}(0-1)-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(e^{-4}-e^0)=-\frac{1}{2e^4}$$

8. 计算 $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

解 $$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^2}\frac{d\ln|x|}{\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^2}\frac{d\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^2}\frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}=2\int_1^{e^2}\frac{d(1+\ln x)}{2\sqrt{1+\ln x}}$$

$$\overset{u=1+\ln x}{=\!=\!=\!=\!=} 2\int_1^3\frac{du}{2\sqrt{u}}=2\sqrt{u}\Big|_1^3=2(\sqrt{3}-1)=2(\sqrt{3}-1)$$

9. 计算 $\int_0^4\frac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}}$.

解 $$\int_0^4\frac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}}\overset{t=\sqrt{x}}{=\!=\!=\!=}\int_0^2\frac{t\cdot 2tdt}{1+t^2\cdot t}=2\int_0^2\frac{t^2dt}{1+t^3}=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{dt^3}{1+t^3}=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{dt^3}{1+t^3}=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{d(1+t^3)}{1+t^3}$$

$$=\frac{2}{3}\ln\left|1+t^3\right|\Big|_0^2=\frac{2}{3}(2\ln 3-0)=\frac{4}{3}\ln 3$$

10. 求函数 $f(x)=\int_{-1}^x(1-2t)dt$ 的极值及 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最值.

解 由函数 $f(x)=\int_{-1}^x(1-2t)dt$ 得 $f(x)=(t-t^2)\Big|_{-1}^x=x-x^2-(-1-1)=2+x-x^2$，于是 $f'(x)=1-2x$， $f''(x)=-2$，驻点 $x=\frac{1}{2}$；因为 $f''(\frac{1}{2})=-2<0$， 故根据极值判定的第二充分条件知， $f(x)$ 有极大值 $f(\frac{1}{2})=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$。

又 $f(-1)=0$， $f(2)=2+2-2^2=0$，故函数最大值为 $\frac{9}{4}$， 最小值为 0。

11. 设函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = xe^{-x}$，求 $f(x)$ 的极值.

解 由于积分变量是t，故相对于t，x可看成常数。于是 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = \int_0^x [xf(t)-tf(t)]dt = \int_0^x xf(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$。在 $x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = xe^{-x}$ 两边对x求导得 $\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = (1-x)e^{-x}$，两边再对$x$求导得 $f(x)=(x-2)e^{-x}$，于是 $f'(x)=(3-x)e^{-x}$，$f''(x)=(x-4)e^{-x}$，驻点$x=3$；因为 $f''(3)=-e^{-3}<0$，故由极值判定的第二充分条件知，$f(x)$有极大值 $f(3)=e^{-3}$。

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\le 0$，$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$。证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\le 0$。

证（1）$F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$。

（2）由积分中值定理，得 $\int_a^x f(t)dt = f(\xi)(x-a),\ \xi\in[a,x]$，再由拉格朗日中值定理得，$F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}=\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-a}=\dfrac{f'(\eta)(x-\xi)}{x-a}\le 0,$

这里$\eta\in(\xi,x)\subseteq(a,x)\subseteq(a,b)$。

13. 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$，证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证 由积分中值定理知，存在$\eta\in[\frac{2}{3},1]$，使得 $f(0)=3f(\eta)(1-\frac{2}{3})=f(\eta)$，再由罗尔定理知，至少存在一点$\xi\in(0,\eta)\subseteq(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$。

14. 设 $f(x)=\int_0^{1-x} e^{t(2-t)}dt$，求 $\int_0^1 f(x)dx$。

解 遇到积分上限函数 $f(x)=\int_0^{1-x} e^{t(2-t)}dt$，一般要用到其求导公式 $f'(x)=-e^{1-x^2}$，求 $\int_0^1 f(x)dx$ 怎么才会用到 $f'(x)$？这里只有分布积分才会用到。故

$$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xdf(x) = f(1)-\int_0^1 xf'(x)dx = \int_0^1 xe^{1-x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{1-x^2}d(1-x^2) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(e^0-e^1)=\frac{1}{2}(e-1)。$$

15. 设 $f(x)$ 是连续函数，证明 $\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt$。

分析 遇到积分上限函数，一般要用到其求导公式；证明 $\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt$ 即证明 $\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt - \int_0^x (x-t)f(t)dt = 0$，故设等号左端为一个辅助函数 $F(x)$，即证 $F(x)=0$.

证明 设 $F(x)=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt - \int_0^x (x-t)f(t)dt$，$\Phi(t)=\int_0^t f(u)du$，则

$$F(x)=\int_0^x \Phi(t)dt - \int_0^x (x-t)f(t)dt = \int_0^x \Phi(t)dt - x\int_0^x f(t) - \int_0^1 tf(t)dt,$$

$$F'(x)=\Phi(x)-\int_0^x f(t)dt - xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du - \int_0^x f(t)dt = 0$$，故 $F(x)=C$，由 $C=F(0)=0$，得 $F(x)=0$，结论的证。

16. 设 $F(x)=\sin x^2\int_0^1 f(t\sin x^2)dt$，求 $\frac{dF}{dx}$。

分析 观察 $F(x)$ 中 $\int_0^1 f(t\sin x^2)dt$ 是 x 的函数，但无法计算出来，注意到 $F(x)=\int_0^1 f(t\sin x^2)d(t\sin x^2)$，故可以做变换 $u=t\sin x^2$ 将 x 变到积分限上去，利用积分上限函数求导公式即可求 $\frac{dF}{dx}$。

解 $F(x)=\int_0^1 f(t\sin x^2)d(t\sin x^2) \overset{u=t\sin x^2}{=\!=\!=\!=\!=} \int_0^{\sin x^2} f(u)du$，故

$$\frac{dF}{dx}=f(\sin x^2)(\sin x^2)'=2x\cos x^2 f(\sin x^2)。$$

<u>类似的题</u>，求 $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+t)dt$，（答案 $f(x+b)-f(x+a)$）

17. 计算 $\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}dx$。

解 $\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}dx=\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{d(\sin x)}{\sqrt{\sin x}}-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx=2\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{d\sin x}{2\sqrt{\sin x}}-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx$

$=2\int e^{-\frac{x}{2}}d(\sqrt{\sin x})-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}-2\int\sqrt{\sin x}d(e^{-\frac{x}{2}})-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx$

$=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}+\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}+C$.

18. 讨论函数 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-xe^{nx}}{x+e^{nx}}$ 的间断点及其类型。

解　注意到 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0,\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty,$ 及无穷大的倒数是无穷小，得

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1-xe^{nx}}{x+e^{nx}}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-xe^{nx}}{x+e^{nx}}, & x>0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{-nx}-x}{xe^{-nx}+1}, & x>0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ -x, & x>0\end{cases}$$ 。

分段函数的分段点有可能为间断点。

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0,\quad f(0)=1$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点，且为第二类间断点。

19. 求 $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$。

解　若令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, 则 $x=\frac{t^2-1}{t^2+1},dx=\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt$，$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=4\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$，不易求！

注意函数 $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ 的定义域为 $-1\le x<1$，所以 $0\le1+x<2$，所以

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx\overset{}{\underset{x=\sin t,-\frac{\pi}{2}\le t<\frac{\pi}{2}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\int\frac{1+\sin t}{\cos t}\cos tdt=t-\cos t+C$$

$=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$。或者

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x-\int\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \arcsin x - \sqrt{1 - x^2} + C$$