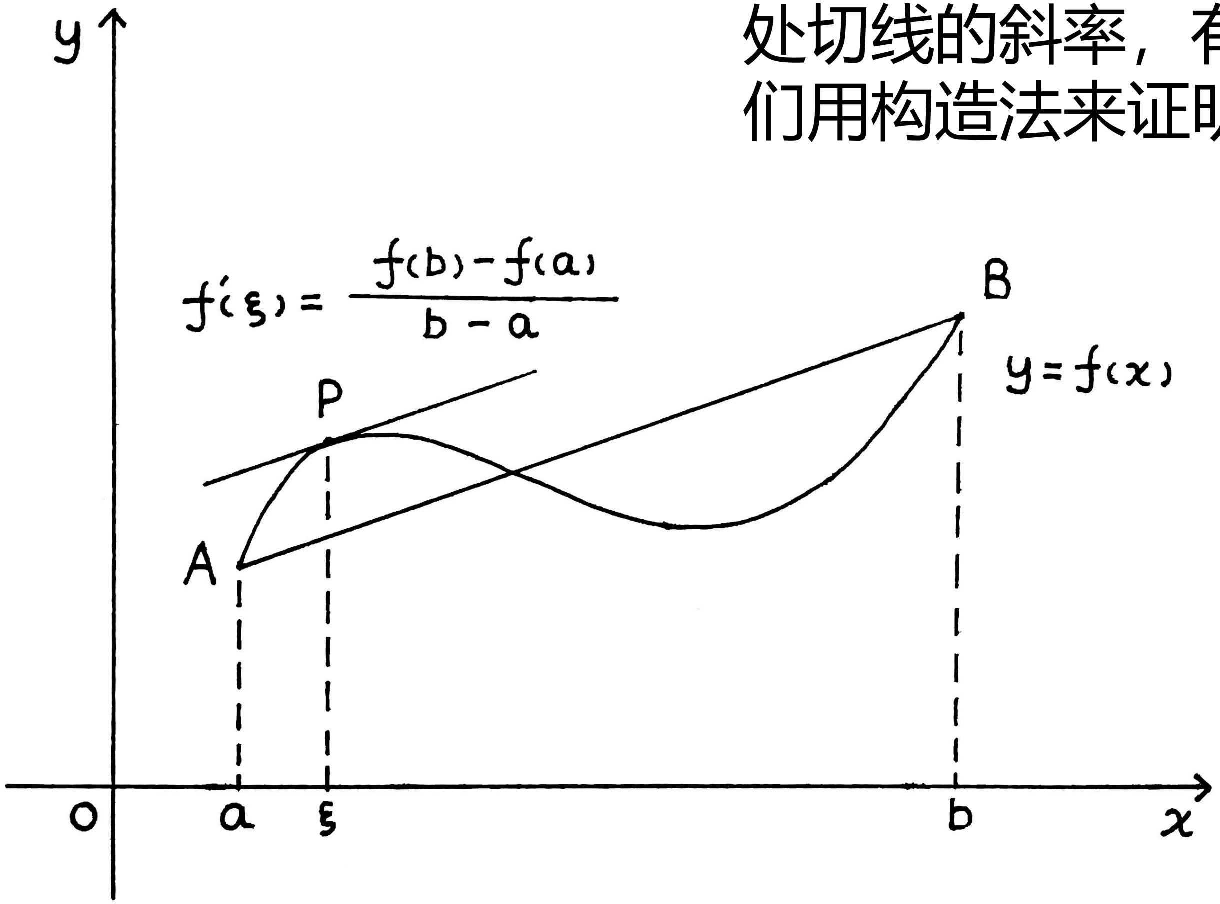
考研真题 > 中值问题

几何意义：A(a，f(a))，B(b，f(b))是 $y=f(x)$ 上的两点，存在异于A和B的点P(ξ，f(ξ))，$a<\xi<b$ 满足 $y=f(x)$ 在点P处的切线的斜率等于弦AB的斜率

基于这一几何意义，函数在某一点的导数即函数在某一点处切线的斜率，有时可以看作某一条弦的斜率，这对于我们用构造法来证明存在性问题有一定帮助



考研真题 > 中值问题

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$，证明：

两端点

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\ge M$

(2) 若对任意 $x\in(0,2)$，使得 $|f'(x)|\le M$，则 $M=0$ (2020年数一)

考虑 $M>0$ 的情形

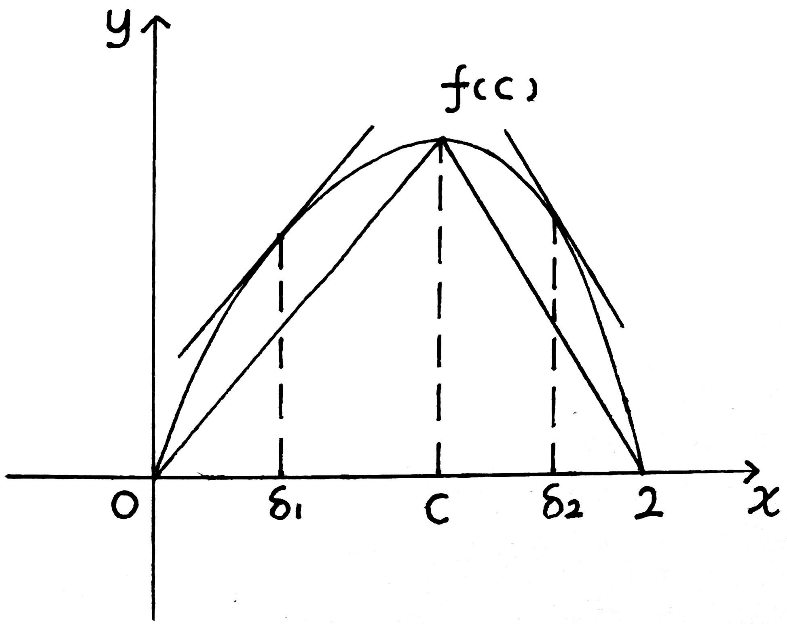
设 $|f(c)|=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$，$c\in[0,2]\Rightarrow c\in(0,2)$

由拉格朗日中值定理 $\exists\delta_1\in(0,c)$ 使得 $f'(\delta_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}\Rightarrow|f'(\delta_1)|=\dfrac{M}{c}$

由拉格朗日中值定理 $\exists\delta_2\in(c,2)$ 使得 $f'(\delta_2)=\dfrac{f(2)-f(c)}{2-c}\Rightarrow|f'(\delta_2)|=\dfrac{M}{2-c}$

$\dfrac{M}{c}$ 和 $\dfrac{M}{2-c}$ 必有一个 $\ge M$

$|f'(\delta_1)|$ 和 $|f'(\delta_2)|$ 必有一个 $\ge M$



$f'(\delta_1)=\dfrac{f(c)}{c}$ $f'(\delta_2)=\dfrac{f(c)}{c-2}$

$|f'(\delta_1)|=\dfrac{M}{c}$ $|f'(\delta_2)|=\dfrac{M}{2-c}$

考研真题 > 中值问题

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq M$

(2) 若对任意 $x\in(0,2)$，使得 $|f'(x)|\leq M$，则 $M=0$ (2020年数一) $f(c)$的最大值或上界是多少？

考虑 $M>0$ 的情形

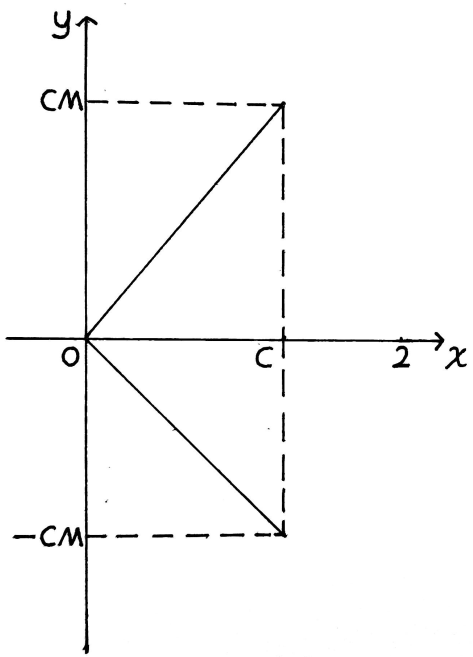
设 $|f(c)|=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$，$c\in[0,2]\Rightarrow c\in(0,2)$

假设对任意 $x\in(0,2), |f'(x)|<M$

$f(c)=f(0)+cf'(\delta_1)$

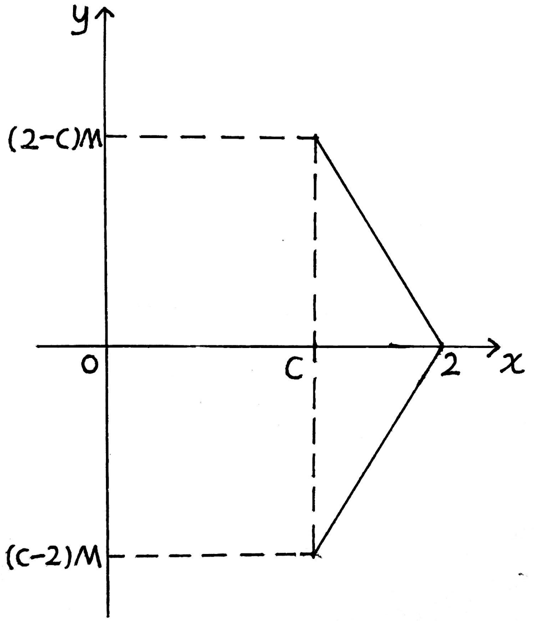
$|f(c)|=|f(0)+cf'(\delta_1)|=c|f'(\delta_1)|<cM$

$|f(c)|=|f(2)+(c-2)f'(\delta_2)|=(2-c)|f'(\delta_2)|<(2-c)M$



$|f(c)|<cM$

$1<c$



$|f(c)|<(2-c)M$

$c<1$

考研真题 > 中值问题

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq M$

(2) 若对任意 $x\in(0,2)$，使得 $|f'(x)|\leq M$，则 $M=0$ (2020年数一)

考虑 $M>0$ 的情形

设 $|f(c)|=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$，$c\in[0,2]\Rightarrow c\in(0,2)$

假设对任意 $x\in(0,2)$,$|f'(x)|<M$

$$f(c)-f(0)=\int_0^c f'(x)dx$$

$$|f(c)|=\left|f(0)+\int_0^c f'(x)dx\right|=\left|\int_0^c f'(x)dx\right|\leq\int_0^c|f'(x)|dx<cM$$

$$|f(c)|=\left|f(2)+\int_2^c f'(x)dx\right|=\left|\int_c^2 f'(x)dx\right|\leq\int_c^2|f'(x)|dx<(2-c)M$$

$$2M=2|f(c)|\leq 2M$$

假设 $M>0$ 设 $|f(c)|=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$，$c\in[0,2]\Rightarrow c\in(0,2)$

$$|f(c)|=\left|f(0)+\int_0^c f'(x)dx\right|=\left|\int_0^c f'(x)dx\right|\leq\int_0^c|f'(x)|dx\leq cM$$

$$|f(c)|=\left|f(2)+\int_c^2 f'(x)dx\right|=\left|\int_c^2 f'(x)dx\right|\leq\int_c^2|f'(x)|dx\leq(2-c)M$$

$$\int_0^c|f'(x)|dx=cM$$

$$\int_c^2|f'(x)|dx=(2-c)M$$

$|f'(x)|$ 在区间 $[0,2]$ 上连续

$|f'(x)|=M \quad x\in[0,2]$

$f'(\xi)=0 \quad \xi\in(0,2)$

考研真题 > 中值问题

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq M$

(2) 若对任意 $x\in(0,2)$，使得 $|f'(x)|\leq M$，则 $M=0$　　(2020年数一)

如果 $f(c)>0$

存在 $U(c,\delta)\subset[0,2]$，使得 $f(x)>0$　$x\in U(c,\theta)$

$|f(c)|\geq|f(x)|$　$x\in U(c,\delta)\Rightarrow f(c)\geq f(x)$　$x\in U(c,\delta)$

$f'(c)=0$

如果 $f(c)<0$

存在 $U(c,\delta)\subset[0,2]$，使得 $f(x)<0$　$x\in U(c,\theta)$

$|f(c)|\geq|f(x)|$　$x\in U(c,\delta)\Rightarrow f(c)\leq f(x)$　$x\in U(c,\delta)$

$f'(c)=0$

假设 $M>0$　设 $|f(c)|=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$，$c\in[0,2]\Rightarrow c\in(0,2)$

$$|f(c)|=\left|f(0)+\int_0^c f'(x)dx\right|=\left|\int_0^c f'(x)dx\right|\leq\int_0^c|f'(x)|dx\leq cM$$

$$|f(c)|=\left|f(2)+\int_c^2 f'(x)dx\right|=\left|\int_c^2 f'(x)dx\right|\leq\int_c^2|f'(x)|dx\leq(2-c)M$$

$f'(c)=0$

$2M=2|f(c)|\leq 2M$

$$\int_0^c|f'(x)|dx=cM$$

$$\int_c^2|f'(x)|dx=(2-c)M$$

$|f'(x)|$ 在区间 $[0,2]$ 上连续

$|f'(x)|=M$　$x\in[0,2]$

考研真题 > 中值问题

(1)证明拉格朗日中值定理：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

(2)证明：若函数$f(x)$在$x=0$处连续，在$(0,\delta)(\delta>0)$内可导，且$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$则$f'_+(0)$存在且$f'_+(0)=A$　　(2009年数一)

常数K值法

$f(b)-f(a)=K(b-a)$

将b换成$x\Rightarrow f(x)-f(a)=K(x-a)\Rightarrow f(x)-f(a)-K(x-a)=0$

构造函数$G(x)=f(x)-f(a)-K(x-a)$

$G(b)=G(a)=0$

由罗尔定理存在$\xi\in(a,b)$，使得$G'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=K$

任取$x\in(0,\delta)$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi_x)\qquad 0<\xi_x<x$$

$$\lim_{x\to0^+}f'(\xi_x)=A$$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$存在且$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=A$

$f'_+(0)$存在且$f'_+(0)=A$

考研真题 > 中值问题

(1)证明积分中值定理：若函数$f(x)$在$[a，b]$上连续，则至少存在一点$\eta\in[a，b]$，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$

(2)若函数$\varphi(x)$具有二阶导数，且满足$\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点$\xi\in(1,3)$，使得$\varphi''(\xi)<0$

(2008年数二)

$$\int_a^b f(x)dx=K(b-a)$$

将b换成$x\Rightarrow\int_a^x f(x)dx=K(x-a)\Rightarrow\int_a^x f(x)dx-K(x-a)=0$

$$G(x)=\int_a^x f(x)dx-K(x-a)$$

$$G(a)=G(b)=0$$

由罗尔定理存在$\eta\in(a，b)$，使得$G'(\eta)=0\Rightarrow f(\eta)=K$

$$h(x)=\int_a^x f(x)dx$$

$$h(b)-h(a)=f(\eta)(b-a)\quad a<\eta<b$$

设M和m是$f(x)$在$[a，b]$上的最大值和最小值

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$$

$\exists\eta\in[a，b]$，使得$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\eta)$

考研真题 > 中值问题

(1)证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续，则至少存在一点 $\eta\in[a，b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$

(2)若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$

(2008年数二)

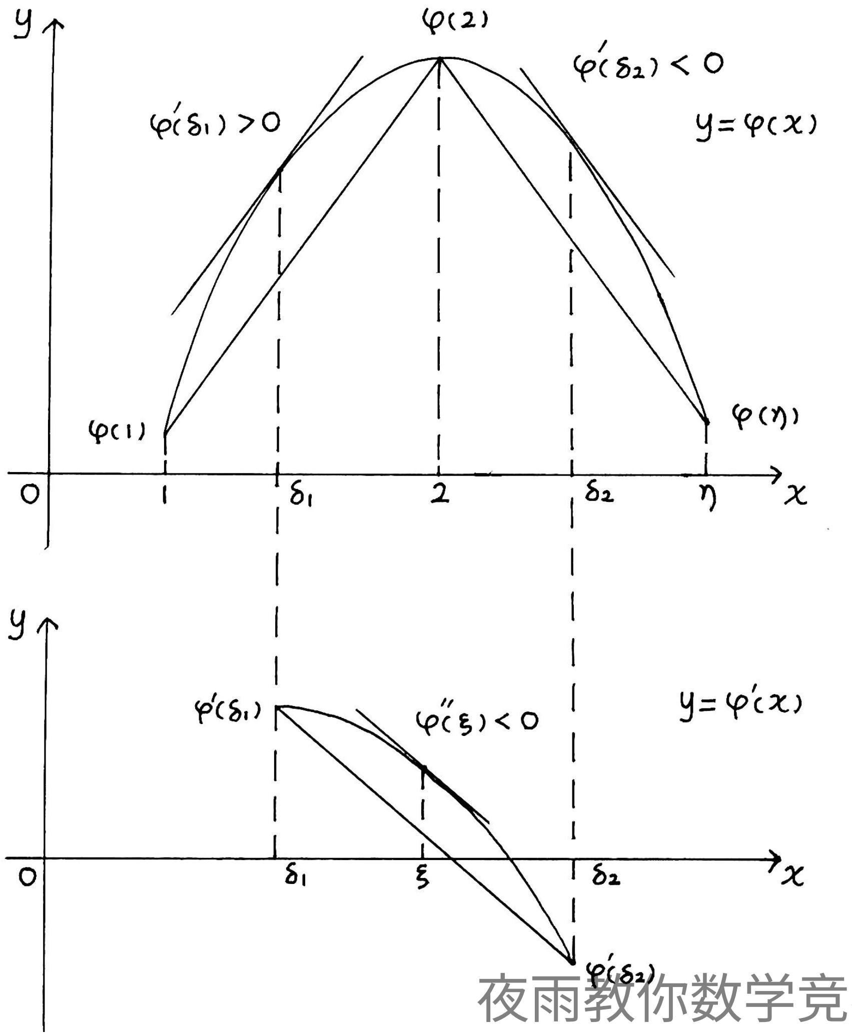
$\varphi(2)>\varphi(\eta)$

$\varphi(\eta)=\int_2^3\varphi(x)dx \quad \eta\in[2,3]\Rightarrow\eta\in(2,3]$

由拉格朗日中值定理 $\exists\delta_1\in(1,2)$ 使得 $\varphi'(\delta_1)=\dfrac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0$

由拉格朗日中值定理 $\exists\delta_2\in(2，\eta)$ 使得 $\varphi'(\delta_2)=\dfrac{\varphi(2)-\varphi(\eta)}{2-\eta}<0$

由拉格朗日中值定理 $\exists\xi\in(\delta_1，\delta_2)$ 使得 $\varphi''(\xi)=\dfrac{\varphi'(\delta_1)-\varphi'(\delta_2)}{\delta_1-\delta_2}<0$



从拉格朗日中值定理的几何意义去分析问题

考研真题 > 中值问题

设函数 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$，证明

(1) 存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$

(2) 存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot e^{\eta^2}$ (2020年数二)

万能构造

$$h'(x)+r(x)h(x)=0$$

$$F(x)=e^{\int r(x)dx}h(x)$$

$$f(x)=(2-x)e^{x^2}$$

$$f(x)=(2-x)f'(x)\Rightarrow f'(x)-\frac{1}{2-x}f(x)=0$$

$$\int -\frac{1}{2-x}dx=\ln(2-x)+C$$

构造函数 $G(x)=e^{\ln(2-x)}f(x)=(2-x)f(x)$

$$G(1)=G(2)=0$$

$$f(2)=\ln 2\cdot x\cdot e^{x^2}$$

$$f(2)=\ln 2\cdot x\cdot f'(x)\Rightarrow\frac{f(2)}{x}=f'(x)\ln 2$$

$$f(2)\ln x=f(x)\ln 2+C\Rightarrow f(2)\ln x-f(x)\ln 2=C$$

构造函数 $R(x)=f(2)\ln x-f(x)\ln 2$

$$R(1)=R(2)=0$$

原函数法

考研真题 > 中值问题

奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$　　(2013年数二)

$f'(x)=1\Rightarrow f(x)=x+C\Rightarrow f(x)-x=C$

$f(x)$ 是奇函数

原函数法

构造函数 $G(x)=f(x)-x$

$f(0)=0$

$G(0)=G(1)=0$

$f''(x)+f'(x)=1$

$f'(x)$ 是偶函数

万能构造

$f''(x)+f'(x)-1=0$

$f'(-\xi)=f'(\xi)=1$

$h'(x)+r(x)h(x)=0$

$(f'(x)-1)'+f'(x)-1=0$

$F(x)=e^{\int r(x)dx}h(x)$

$\int 1dx=x+C$

构造函数 $R(x)=e^{x}(f'(x)-1)$

$R(-\xi)=R(\xi)=0$