

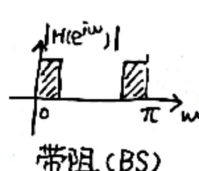
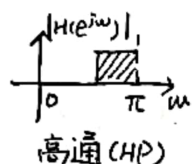
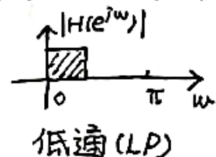
桂林航天工业学院备课纸

6-1

第6章 IIR 数字滤波器设计

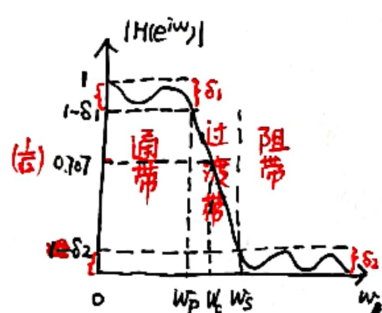
一. 数字滤波器基本概念 (56.1)

1. 滤波目的: 抑制输入信号的某些频率成分, 改变信号频谱中各频率分量的相对比例。
2. 滤波器设计: 根据给定的滤波器的频率特性指标 ($H(e^{j\omega})$), 求满足该特性的传输函数 $H(z)$ 。
3. 理想滤波器的频率响应 (IIR 滤波器 $h(n)$ 无限长, 只能逼近, 通带不完全平, 阻带未衰减到零, 通带和阻带间有过渡带)



PI64 图 6.1.2

4. 数字滤波器的技术指标 (低通)



- ① ω_p : 通带边界频率
- ② ω_s : 阻带截止频率
- ③ δ_1 : 通带波纹幅度
- ④ α_p : 通带允许最大衰减 $\alpha_p = 20 \lg \frac{\text{通带 max } |H(e^{j\omega})|}{\text{通带 min } |H(e^{j\omega})|} = 20 \lg \frac{1}{1-\delta_1} = -20 \lg (1-\delta_1) \text{ dB}$
- ⑤ δ_2 : 阻带波纹幅度
- ⑥ α_s : 阻带允许最小衰减 $\alpha_s = 20 \lg \frac{\text{通带 max } |H(e^{j\omega})|}{\text{阻带 max } |H(e^{j\omega})|} = 20 \lg \frac{1}{\delta_2} = -20 \lg \delta_2 \text{ dB}$
- ⑦ ω_c : 3dB 截止频率 $\alpha = -20 \lg |H(e^{j\omega_c})| = -20 \lg 0.707 = 3 \text{ dB}$

α_p 越小, 通带波纹越小, 通带逼近误差就越小 (δ_1 越小, $1-\delta_1$ 越大)

α_s 越大, 阻带波纹越小, 阻带逼近误差就越小 (δ_2 越小)

ω_p 与 ω_s 间距越小, 过渡带越陡峭。

ω_c : 滤波器幅频响应曲线形状与 ω_c 密切相关

5. 数字滤波器设计方法概述 ($H(z)$)

- ① IIR 数字滤波器设计: 典型的模拟滤波器有完整的公式、图表供使用

间接法: 设计过渡模拟滤波器 $H_a(s)$ → 变换 → 数字滤波器 $H(z)$

直接法: 联立方程, 需计算机辅助设计。

- ② FIR 数字滤波器设计

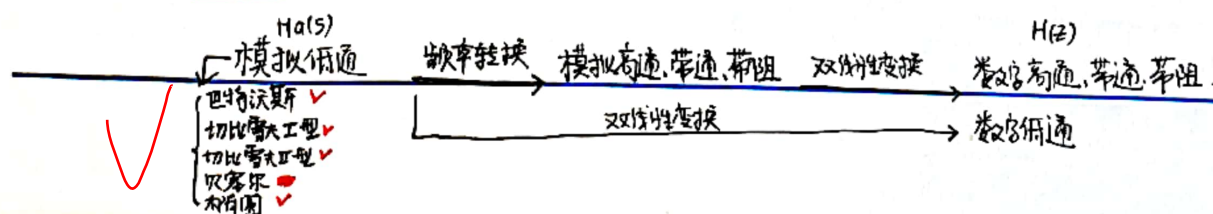
不能采用间接法, 常用方法: 窗函数法, 频率采样法, 切比雪夫等波纹逼近法。

- ③ 高通、带通、带阻滤波器设计方法。

(i) 将待设计滤波器技术指标转换为低通滤波器技术指标

(ii) 设计相应的低通滤波器

(iii) 采用频率变换法将低通滤波器转换成所希望的滤波器。



桂林航天工业学院备课纸

6-2

二、模拟滤波器设计 (5.6.2) 根据设计指标 $\omega_p, \omega_s, \omega_{lp}, \omega_{ls} \Rightarrow$ 求模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$

巴特沃兹
切比雪夫 I, II 型
椭圆

1. 模拟滤波器设计指标

- ① ω_p : 通带边界频率
- ② ω_s : 阻带截止频率

③ α_p : 通带最大衰减 $\alpha_p = -20 \lg |H_a(j\omega_p)| = -10 \lg |H_a(j\omega_p)|^2$ 幅度平方函数

④ α_s : 阻带最小衰减 $\alpha_s = -20 \lg |H_a(j\omega_s)| = -10 \lg |H_a(j\omega_s)|^2$

幅度平方函数 $|H_a(j\omega)|^2$: 各典型滤波器的 $|H_a(j\omega)|^2$ 都是确定表达式, 可用于逼近 $H_a(s)$ $|H_a(j\omega)|^2 = H_a(j\omega) \cdot H_a^*(j\omega) = H_a(s) \cdot H_a(-s)|_{s=j\omega}$

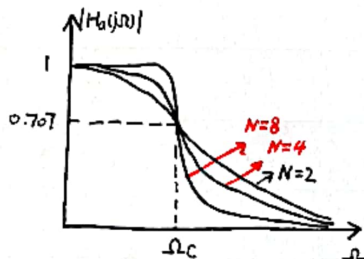
损耗函数 (衰减函数) $A(\omega)$: 描述归一化幅频响应特性, 更清晰分析波纹变化 $A(\omega) = -20 \lg |H_a(j\omega)| = -10 \lg |H_a(j\omega)|^2$

2. 巴特沃兹模拟低通滤波器设计: 根据设计指标求 N 和 $\omega_c \rightarrow |H_a(j\omega)|^2 \rightarrow H_a(s)$

① 基本原理: 幅度平方函数

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2N}}$$

- N : 整数, 滤波器阶数
- ω_c : 3dB 截止频率



P170 图 6.2.4

特征: (1) N 越大, 通带越平坦, 过渡带越窄, 越陡峭, 逼近误差越小

② 设计步骤:

(1) 根据技术指标 $\omega_p, \omega_s, \alpha_p, \alpha_s$, 求出滤波器的阶数 N 和 ω_c

$$N = \frac{1}{\lg \lambda_{sp}} \lg \frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1} \quad (6.2.18)$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\omega_s}{\omega_p}$$

(2) 根据 N 查表 (P151) 得归一化极点 p_k 和归一化低通原型系统函数 $G_{LP}(p)$ (N 用于查表或巴特沃兹多项式)

$$G_{LP}(p) = \frac{1}{B(p)} \quad B(p) \text{ 是表中分母多项式}$$

(3) 将 $G_{LP}(p)$ 去归一化, 得到实际滤波器系统函数 $H_a(s)$ (ω_c 用于去归一化)

$$H_a(s) = G_{LP}(p)|_{p=\frac{s}{\omega_c}}$$

若 ω_c 未给出

$$\begin{cases} \omega_c = \omega_p (10^{0.1\alpha_p/10} - 1)^{-\frac{1}{2N}} & (6.2.19) \text{ 通带满足要求, 阻带有盈余} \\ \omega_c = \omega_s (10^{0.1\alpha_s/10} - 1)^{-\frac{1}{2N}} & (6.2.20) \text{ 阻带满足要求, 通带有盈余} \end{cases}$$

P174 例 6.2.1

P176

6.2.2. MATLAB 实现

$[N, \omega_c] = \text{buttord}(\omega_p, \omega_s, \alpha_p, \alpha_s, 's');$ % 计算 N, ω_c

$[B, A] = \text{butter}(N, \omega_c, 's');$ % 计算滤波器系统函数 B, A 的多项式系数

$H_k = \text{freqs}(B, A, \omega_k);$ % 计算频率响应函数

频率

模拟滤波器

桂林航天工业学院备课纸

6-3

3. 切比雪夫滤波器设计

① 切比雪夫滤波器特点: 等波纹特性 P177 图6.2.7

切比雪夫I型: 通带内等波纹, 阻带单调下降

切比雪夫II型: 阻带内等波纹, 通带单调下降

② 等波纹特性由幅度平方函数中 ϵ, N 、切比雪夫多项式 $C_N(x)$ 决定

图6.2.8 4阶切比雪夫I型比巴氏更有更窄的过渡带

$$\text{幅度平方函数 } H_a(j\Omega)^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\frac{\Omega}{\Omega_p})} \quad \frac{\Omega}{\Omega_p}: \text{归一化频率, 对 } \Omega_p \text{ 归一化}$$

- (1) $C_N(x)$: N 阶切比雪夫多项式
 - $|x| \leq 1$ 具有等波纹特性
 - $|x| > 1$ 双曲线函数, 随 x 单调上升 $\rightarrow H_a(j\Omega)$ 单调下降
- (2) N : 阶数, N 越大, 波纹越多
- (3) ϵ : 小于1的正数, ϵ 越大, 波纹幅度愈大

③ 切比雪夫I型的设计步骤

- (1) 根据技术指标 $\omega_p, \lambda_s, \lambda_p \Rightarrow$ 求滤波器阶数 N 和 ϵ . 需计算反余弦, 双曲线函数等, 不求掌握.
- (2) 求归一化系数函数 $G_a(p)$
- (3) 去归一化, 得到 $H_a(s) = G_a(p) \big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}$

掌握 MATLAB 软件实现方法即可.

④ MATLAB 设计切比雪夫滤波器:

- $[N, \omega_{p0}] = \text{cheblord}(\omega_p, \omega_s, R_p, A_s, 's');$ % 计算切比I型模拟低通滤波器阶数 N 和通带边界频率 ω_{p0}
- $[B, A] = \text{cheby1}(N, R_p, \omega_{p0}, 's');$ % 计算滤波器系数
- $[N, \omega_{s0}] = \text{cheb2ord}(\omega_p, \omega_s, R_p, A_s, 's');$ % ω_{s0} : 阻带边界频率
- $[B, A] = \text{cheby2}(N, R_p, \omega_{s0}, A_s, 's')$

例6.2.4

4. 椭圆滤波器: P184. 图6.2.1.

① 椭圆滤波器特点

- (1) 通带和阻带都具有等波纹幅频特性.
- (2) 极点位置与经典的椭圆函数有关.
- (3) $\begin{cases} \text{通带、阻带波纹固定时}(\alpha_p, \alpha_s \text{ 固定}) \text{ 时, } N \text{ 越大, 过渡带越窄 (图6.2.1(a))} \\ \text{阶数 } N \text{ 固定时, 通、阻带波纹幅度越大} \rightarrow \text{过渡带越窄} \\ \text{越小} \rightarrow \text{过渡带越宽.} \end{cases}$

桂林航天工业学院备课纸

64

② MATLAB设计椭圆滤波器

$[N, Wp0] = \text{ellord}(Wp, Ws, Rp, As, 's')$ % 模拟椭圆滤波器阶数和通带边界频率

$[B, A] = \text{ellip}(N, Rp, As, Wp0, 's')$ % 计算椭圆模拟低通滤波器系统系数 (分子多项式, 分母多项式)

5. 四种类型模拟低通滤波器比较 (巴特, 切工, 切II, 椭圆, 考虑逼近幅度响应指标) (§6.2.5)

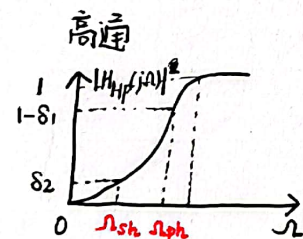
- N 相同
 Q 相同
 As 相同
指标下
- ① 巴特沃斯: 具有单调下降的幅频特性, 过渡带最宽
 - ② 切比雪夫I型: 通带具有等波纹幅频特性, 过渡带, 阻带单调下降
 - ③ 切比雪夫II型: 阻带具有等波纹幅频特性, 通带, 过渡带单调下降
 - ④ 椭圆: 过渡带最窄, 通带, 阻带都具有等波纹幅频特性
- 过渡带宽度相等
比巴特沃斯窄, 椭圆最宽

复杂性比较: 在相同幅频响应指标条件下, 巴特沃斯阶数最高, 椭圆所需最低 (性价比最高, 应用最广泛)

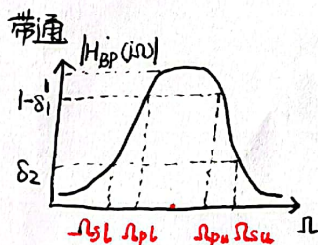
6. 频率变换与模拟高通、带通、带阻滤波器设计 (§6.2.6)

① 性能指标与设计步骤概观

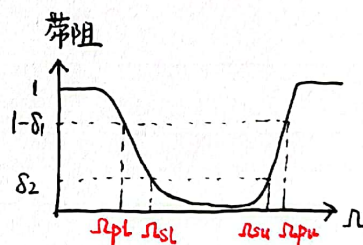
(1) 性能指标 (P186 图6.2.12)



Ω_{sh} : 阻带截止频率
 Ω_{ph} : 通带边界频率



Ω_{pl} : 通带下边频率
 Ω_{pu} : 通带上边频率



Ω_{sl} : 阻带下边频率
 Ω_{su} : 阻带上边频率

(2) 设计高通、带通、带阻滤波器一般过程

- 步骤1: 将待设计滤波器指标、频率转换 \rightarrow 低通滤波器指标
- 步骤2: 设计低通滤波器系统函数 $Q(p)$
- 步骤3: 低通系统函数 $Q(p)$ $\xrightarrow{\text{频率转换}} \rightarrow$ 待设计滤波器系统函数 $H_d(s)$
p域 \rightarrow s域

(3) 归一化模拟低通滤波器 (目的: 简化计算)

- 归一化巴特沃斯低通滤波器: 关于截止频率归一化 $\frac{\Omega}{\Omega_c} \rightarrow \Omega_c$ 归一化频率用 λ 表示
- 归一化切比雪夫椭圆低通滤波器: 关于通带边界频率归一化 $\frac{\Omega}{\Omega_p} \rightarrow \lambda_p$

(4) 各种频率变换公式 不求计算, 重在掌握频率变换对应关系

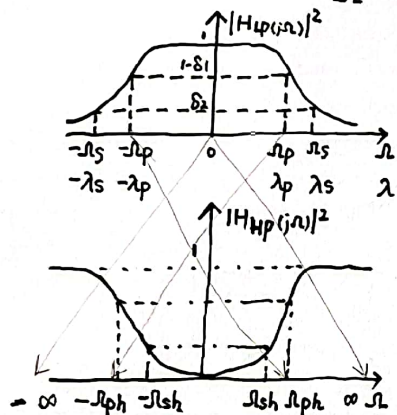
各种变换有一对变换公式: 滤波器指标变换
p域和s域变换 > 代数代换也会实现上述变换

桂林航天工业学院备课纸

6-5

② 低通到高通的频率变换

(1) 频率变换 $\lambda = \frac{-\lambda_p \Omega_{ph}}{\Omega}$ (6.2.51)



确保低通通带的幅度值出现在高通通带上

低通通带 $[0, \lambda_p]$ $[-\lambda_p, 0]$
高通通带 $[-\infty, -\Omega_{ph}]$ $[\Omega_{ph}, \infty]$

(2) 系统函数变换 $H_{HP}(S) = G(p) \big|_{p = \frac{\lambda_p \Omega_{ph}}{S}}$ (6.2.50)

(3) MATLAB实现 P88 131 6.2.6 代码

方法- ①' 设计低通

间接 ②' `lp2hp(B,A,wph)` % w_{ph} 高通边界频率

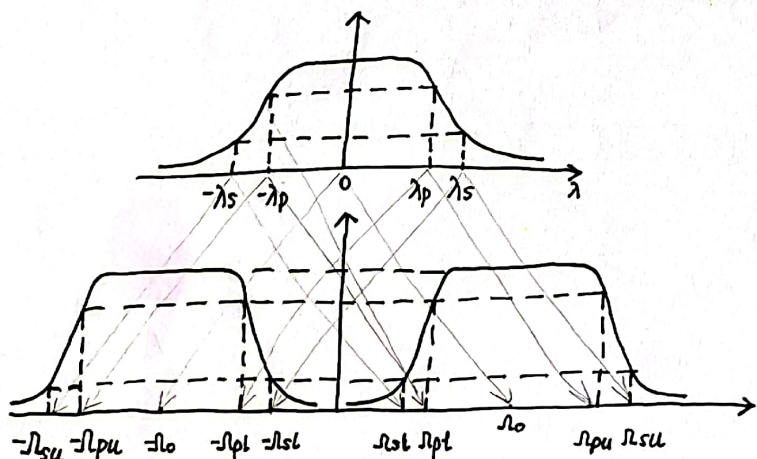
`lp2bp(B,A,w0,Bw)` % w_0 中心频率, Bw 带宽
`lp2bs(B,A,w0,Bw)` % w_0 中心频率, Bw 带宽

方法= $\begin{cases} [N, Wc] = \text{butterd}(w_p, w_s, R_p, A_s, 's'); \end{cases}$ % 阶数 N , 3dB截止频率 Wc

直接 $\begin{cases} [B, A] = \text{butter}(N, Wc, 'high', 's'); \end{cases}$ % $f_{type} = 'high'$

③ 低通到带通频率变换

(1) 频率变换 $\lambda = -\lambda_p \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega BW}$ (6.2.54) Ω_0 中心频率
 BW 通带宽度 $BW = \Omega_{pu} - \Omega_{pl}$



每一个低通原型的边界频率对应带通滤波器两个相应边界频率

低通的通带 $[-\lambda_p, \lambda_p]$

带通的通带: $[-\Omega_{pu}, -\Omega_{pl}]$ $[\Omega_{pl}, \Omega_{pu}]$

(2) 系统函数变换

$H_{BP}(S) = G(p) \big|_{p = \lambda_p \frac{S^2 + \Omega_0^2}{BW \cdot S}}$ (6.2.53)

(3) MATLAB实现 P191. 131 6.2.7

$\begin{cases} [N, Wc] = \text{butterd}(w_p, w_s, R_p, A_s, 's'); \end{cases}$ % Wc 为一维向量

$\begin{cases} [B, A] = \text{butter}(N, Wc, 's'); \end{cases}$ % 默认缺省。

★ $\begin{cases} Wc \text{ 为一维, 是标量, } f_{type} = 'high' \text{ 高通} \\ \text{默认缺省. 低通} \\ Wc \text{ 为一维, 是向量, } f_{type} = 'stop' \text{ 带阻} \\ \text{默认缺省: 带通} \end{cases}$

桂林航天工业学院备课纸

6-6

④ 低通到带阻转换

(1) 频率转换

$$\lambda = -\lambda_s \frac{\Omega_{BW}}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \quad \lambda \rightarrow \Omega \text{ 双值映射}$$

(2) 系数转换

$$H_{BS}(s) = G(p) \Big|_{p = \lambda_s \frac{B_{WS}}{s^2 + \Omega_0^2}}$$

低通 $\omega' : -\infty \rightarrow -\lambda_s \rightarrow -\lambda_p \rightarrow 0$ 负半平面 (左半平面)

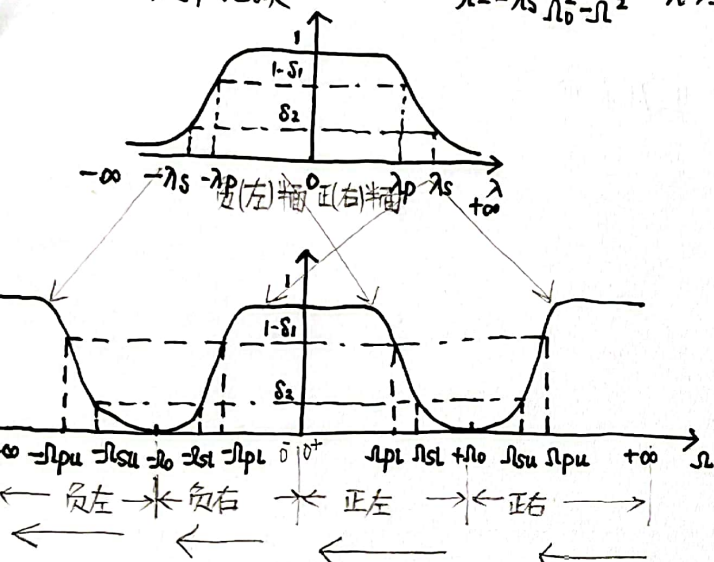
带阻 $-\Omega_0 \rightarrow -\Omega_{su} \rightarrow -\Omega_{pu} \rightarrow -\infty$ 负左

$\Omega_0 \rightarrow \Omega_{sl} \rightarrow \Omega_{pl} \rightarrow 0+$ 正左

③' $\omega \rightarrow \lambda_p \rightarrow \lambda_s \rightarrow +\infty$ 正半平面 (右半平面)

带阻 $0 \rightarrow -\Omega_{pl} \rightarrow -\Omega_{sl} \rightarrow -\Omega_0$ 负右

$+\infty \rightarrow \Omega_{pu} \rightarrow \Omega_{su} \rightarrow +\Omega_0$ 正右



(3) MATLAB实现

```
[N, Wc] = buttord(wp, ws, Rp, As, 's') % Wc 为截止频率
[BS, AS] = butter(N, Wc, 'stop', 's') % ftype='stop'
```

* T. 将模拟滤波器转换为数字滤波器的两种方法及各自优缺点 (6.3节-6.4节) 模拟滤波器 $H_a(s)$ $\xrightarrow{\text{转换}}$ 数字滤波器 $H(z)$

① 频率响应不变法 $H_a(s) \xrightarrow{LT^{-1}CT} h_a(t) \xrightarrow{\text{采样}} h(n) = h_a(nT) \xrightarrow{ZT} H(z)$

(1) $H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i} \rightarrow H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$ (6.3.1) (6.3.4) 将 $H_a(s)$ 的极点 s_i 映射到 z 平面极点 $e^{s_i T}$

(2) 优点: 模拟频率和数字频率之间具有很好的线性关系。
缺点: 会产生频率混叠失真, 不适合高通和带阻滤波器设计。

$[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}] \rightarrow [\pi, \pi] \rightarrow \omega = \Omega T$ 线性关系
模拟频率 Ω \rightarrow 数字频率 ω
 $\Omega_p = \frac{\omega_p}{T}$
 $\Omega_s = \frac{\omega_s}{T}$

(3) MATLAB实现. P200 134 6.3.2.

```
[Bz, Az] =impinvar(B, A, 1/T); % 用脉冲响应不变法将模拟滤波器转换成数字滤波器。
```

② 双线性变换法.

(频率预校正)

(1) 采用非均匀频率压缩法, 将整个模拟频率轴压缩到 $\pm \frac{\pi}{T}$ 之间, 再用 $z = e^{sT}$ 转换到 z 平面

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

(2) 优点: 可以避免频率混叠失真, 适合各种滤波器。
缺点: 模拟频率和数字频率之间非线性畸变。
 $\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} \tan \frac{\omega_p}{2}$
 $\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} \tan \frac{\omega_s}{2}$

(3) MATLAB实现 P205 134 6.4.2

```
[Bz, Az] = bilinear(B, A, Fs)
```

桂林航天工业学院备课纸

6-7

8. 数字高通、带通、带阻滤波器设计

① 设计思想

(1) 借助模拟滤波器 $\xrightarrow{\text{频率变换}}$ 过渡模拟滤波器

(2) 过渡模拟滤波器 $\xrightarrow{\text{双线性变换}}$ 所寄数字滤波器

例 6.5.1-6.5.3 代码.