第三章 微分中值定理与导数的应用

第一节 微分中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

费马引理 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内函数值满足：$f(x)\geq f(x_0)$ 或 $f(x)\leq f(x_0)$，且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$，即函数在局部范围内的最大、最小值点处的导数存在则必为0.

证 设 $\forall x\in U(x_0)$，$f(x)\leq f(x_0)$，则

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\begin{cases}f'_-(x_0)\geq 0, x\to x_0^-\\ f'_+(x_0)\leq 0, x\to x_0^+\end{cases}，故 f'(x_0)=0。$$

罗尔定理 设函数 $y=f(x)$ (1)在 $[a,b]$ 上连续；(2)在 (a,b) 内可导；(3) $f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

证 因函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故在该区间上可取最大值 M 和最小值 m。
若 $M=m$，则在在 $[a,b]$ 上，$f(x)=M$,此时，任取 $\xi\in(a,b)$，有 $f'(\xi)=0$；
若 $M>m$，则由于 $f(a)=f(b)$，故 M 和 m 中至少有一个不等于端点值 $f(a)$、$f(b)$；
设 $M\neq f(a), f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ（最大值点），使得 $M=f(\xi)$，显然 ξ 是一个局部最大值点且 $f'(\xi)$ 存在,由费马定理，$f'(\xi)=0$；

几何意义 一条不间断的曲线弧 $y=f(x), x\in[a,b]$ 两端等高，且除端点外每点都有切线，则在弧上至少有一点 $(\xi,f(\xi))$ 处的切线水平。

罗尔定理的应用：证明在某区间内至少存在一点满足一个函数等式。
方法：将函数等式移项或变形移项使得等号一端为0一段不为0，在不为0的部分中将字母 ξ 或 c 换为 x 后得到的函数如果是某函数 $\varphi(x)$ 的导函数，则对辅助函数 $\varphi(x)$ (相当于定理中的 $f(x)$)验证罗尔定理条件，满足条件即可用罗尔定理证明。

例 设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1, f(1)=0$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$。

分析：即证在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$，等式左端不为零的部分 ξ 换为 x 得到的函数 $xf'(x)+f(x)=[xf(x)]'$。
证 构造辅助函数 $\varphi(x)=xf(x)$，则由于 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，故在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\varphi'(\xi)=0$，结论得证。

例 设方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 x_0，证明方程

$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根。

分析：即证在 $(0,x_0)$ 内存在一点 ξ，使得 $a_0n\xi^{n-1}+a_1(n-1)\xi^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$，等式左端不为零的部分 ξ 换为 x 得到的函数

$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x)'$。

证 构造辅助函数 $\varphi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$，则由于 $\varphi(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上满足罗尔定理条件，故在 $(0,x_0)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\varphi'(\xi)=0$，结论得证。

拉格朗日(lagrange)中值定理

设函数 $y=f(x)$ (1)在 $[a,b]$ 上连续；(2)在 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$（称为拉格朗日中值公式）。

分析：即证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，等式左端不为零的部分 ξ 换为 x 得到的函数 $f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=[f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x]'$。

证 构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，则由于 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\varphi(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\varphi(b)$，由罗尔定理结论得证。

几何意义 一条不间断的曲线弧 $y=f(x),x\in[a,b]$ 除端点外每点都有切线，则在弧上至少有一点 $(\xi,f(\xi))$ 处的切线平行于端点连线。

拉格朗日中值定理的应用：证明在某区间内至少存在一点满足一个函数等式或不等式。

方法：将函数等式或不等式变形出现 $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$，则对辅助函数 $\varphi(x)$（相当于定理中的 $f(x)$）在区间 $[a,b]$ 或 $[b,a]$ 上验证拉格朗日定理条件，满足定理条件即可用该定理证明。

例 证明 $\arcsin x=\dfrac{x}{\sqrt{1-\xi^2}},0<\xi<x\le 1$。

分析：即证在 $(0,x)$ 内存在一点 ξ，$\arcsin x=\dfrac{x}{\sqrt{1-\xi^2}}$，亦即 $\dfrac{\arcsin\ x-\arcsin\ 0}{x-0}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$。

证 构造函数 $\varphi(x)=\arcsin x$，则由于 $\varphi(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，故在 $(0,x)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\varphi'(\xi)=\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}$，结论得证。

例 证明 当$x>0$时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

分析：即证当$x>0$时，$\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1$，亦即$\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}<1$。

证 构造函数$\varphi(t)=\ln(1+t)$，则由于$\varphi(t)$在$[0,x]$上满足拉格朗日中值定理条件，故在$(0,x)$内至少存在一点ξ，使得$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}$，从而$\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}=\frac{\ln(1+x)}{x}<1$，结论得证。

推论 1 若函数$f(x)$在区间I上的导数恒为 0，则$f(x)$在区间I上是一个常数。

证 在区间I上任取两点$x_1,x_2(x_1<x_2)$，则在$[x_1,x_2]\subset I$上运用拉格朗日中值定理得，

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0, x_1<\xi<x_2$，由点$x_1,x_2$的任意性，结论成立。

推论 2 若$f(x),g(x)$在区间I上的导数处处相等，则$f(x)-g(x)$在区间I上是一个常数。

例 证明$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, x\in[-1,1]$。

证 当$x\in(-1,1)$时，$(\arcsin x+\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$，由推论 1，

$\arcsin x+\arccos x=C, x\in(-1,1)$。又$C=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$。

当$x=\pm1$时，$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$。结论得证。

注 同理可证$\arctan x+arc\cot x=\frac{\pi}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$。

柯西(Cauchy)中值定理

设函数$f(x)$及$F(x)$ (1)在$[a,b]$上连续；(2)在(a,b)内可导；(3)在(a,b)内，$F'(x)\neq 0$，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$。

分析：即证在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)=0$，等式左端不为零的部分$\xi$换为$x$得到的函数$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(x)-f'(x)=[\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)]'$。

证 构造辅助函数$\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$，则由于$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且$\varphi(a)=\dfrac{F(a)f(b)-F(b)f(a)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$，由罗尔定理，在$(a,b)$内至少存在一点$\xi$，使得$\varphi'(\xi)=0$，结论得证。

注 柯西中值定理$\xrightarrow{F(x)=x}$拉格朗日中值定理$\xrightarrow{f(a)=f(b)}$罗尔定理；

柯西中值定理$\xrightarrow{F(x)=x,f(a)=f(b)}$罗尔定理。前二者都是构造辅助函数用罗尔定理证明。

柯西中值定理的应用：证明在某区间内至少存在一点满足一个函数等式。

方法：将函数等式移项或变形移项出现$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，则对辅助函数$f(x),F(x)$验证柯西中值定理条件，满足即可用该定理证明。

例 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=2\xi(f(1)-f(0))$。

分析：即证在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得$f(1)-f(0)=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$，亦即证

$\dfrac{f(1)-f(0)}{1^2-0^2}=\dfrac{f'(x)\big|_{x=\xi}}{(x^2)'\big|_{x=\xi}}$。

证 构造辅助函数$F(x)=x^2$，则由于$f(x),F(x)$在$[0,1]$上满足柯西中值定理条件，故在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得$\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\dfrac{f(1)-f(0)}{F(1)-F(0)}$,结论得证。

注 能用柯西中值定理证明的也能用罗尔定理证明，因为柯西定理是由罗尔定理推出来的。上题中，构造辅助函数$\varphi(x)=f(x)-x^2(f(1)-f(0))$在区间$[0,1]$上由罗尔定理一样可证。

练习

1. **函数$y=x^4$在区间$[1,2]$上满足拉格朗日中值定理条件，则中值$\xi=$_____**（$\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$）；

函数$y=\ln\sin x$在区间$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$上满足罗尔定理条件，则中值$\xi=$_____（$\dfrac{\pi}{2}$）

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$。（即证 $\sin\xi\cdot f'(\xi)+\cos\xi\cdot f(\xi)=0$，由 $\sin x\cdot f'(x)+\cos x\cdot f(x)=[\sin x\cdot f(x)]'$ 知构造辅助函数 $\varphi(x)=\sin xf(x)$）

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可导，$f(x_1)=f(x_2)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$。（即证 $e^{\xi}f'(\xi)+e^{\xi}f(\xi)=0$，由 $e^{x}f'(x)+e^{x}f(x)=[e^{x}f(x)]'$ 知构造辅助函数 $\varphi(x)=e^{x}f(x)$）

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$。（即证 $\xi^{n}f'(\xi)+n\xi^{n-1}f(\xi)=0$，由 $x^{n}f'(x)+nx^{n-1}f(x)=[x^{n}f(x)]'$ 知构造辅助函数 $\varphi(x)=x^{n}f(x)$）

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0, f(x)\neq 0, x\in(a,b)$，证明对任意实数 k，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=-kf(\xi)$。（即证 $f'(\xi)+kf(\xi)=0$，也即证 $e^{k\xi}f'(\xi)+ke^{k\xi}f(\xi)=0$，由 $e^{kx}f'(x)+ke^{kx}f(x)=[e^{kx}f(x)]'$ 知构造辅助函数 $\varphi(x)=e^{kx}f(x)$））

6. 证明：当 $0<a<b$ 时，$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$。（$\varphi(x)=\ln x, x\in[a,b]$）

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}$。（$\varphi(x)=xf(x), x\in[a,b]$）

8. 设 $a,b>0$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $ae^{b}-be^{a}=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)$。

（即证 $\dfrac{1}{b}e^{b}-\dfrac{1}{a}e^{a}=(1-\xi)e^{\xi}(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a})$，亦即证 $\dfrac{1}{b}e^{\frac{1}{\frac{1}{b}}}-\dfrac{1}{a}e^{\frac{1}{\frac{1}{a}}}=(1-\xi)e^{\frac{1}{\frac{1}{\xi}}}(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a})$，$\varphi(x)=xe^{\frac{1}{x}}, x\in[\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{a}]$）

9. $\forall 0 < x < \frac{\pi}{2}$，证明 $x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x}$。（即证 $1 < \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos^2 x}$，亦即证 $1 < \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = (\tan x)'\big|_{x=\xi} < \frac{1}{\cos^2 x}$，$0 < \xi < x$，$\varphi(x) = \tan x, x \in [0, x]$）

第二节 洛比达法则

洛必达法则 设 $\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$（即在 x 的同种趋向下分子分母的极限都是0或都是无穷 ∞），且 $\lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 是确定常数或为无穷 ∞，则 $\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$。

注 1)洛必达法则是求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限的一种方法，具体求极限时，可能多次运用洛必达法则，例如，对正实数 λ 和正整数 n，极限

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}} = 0。$$

例 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$。

例 $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}$。

例 对 $\mu > 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\mu} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} \underset{化简}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mu x^\mu} = 0$。

错误做法 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\mu} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mu x^\mu} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{0}{\mu^2 x^{\mu-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$。

注 2)洛必达法则是求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限的一种方法，具体求极限时，应尽可能与其他方法结合使用，如等价无穷小替换，通分、根式有理化，代数化简等，可简化求导运算。

例 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} \underset{\substack{\frac{0}{0} \\ \tan x \sim x}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\tan x - x}{x^2 \cdot x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \underset{化简}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} \underset{\tan x \sim x}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$。

错误做法 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} \underset{\tan x \sim x}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{x - x}{x^2 \cdot x} = \lim\limits_{x\to0} 0 = 0$。

例 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x} \underset{变形}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x} \underset{\substack{复合函数 \\ 求极限}}{=} \frac{1}{3}(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x})^2$

$$\underset{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{3}(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin 3x}{-\sin x})^2 = \frac{1}{3}(\frac{-3(-1)}{-1})^2 = 3$$

错误做法 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}\underset{\substack{\tan x\sim x\\ \tan 3x\sim 3x}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

注 3)运用洛必达法则可求 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 型未定式极限，需转化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限再用洛必达法则求解。

例 对 $\mu>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\mu}\ln x\underset{0\cdot\infty}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\mu}}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}\underset{\text{化简}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{\mu}}{-\mu}=0$

例 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)\underset{\substack{\infty-\infty\\ \text{代数变形}}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin x}=0$

例 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x\underset{\substack{0^0\\ \text{代数变形}}}{====}\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^0=1$

例 $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}\underset{\substack{1^\infty\\ \text{代数变形}}}{====}\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{1-x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}}=e^{-1}$

例 $\lim\limits_{x\to0^+}\cot x^{\frac{1}{\ln x}}\underset{\substack{\infty^0\\ \text{代数变形}}}{====}\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{\ln x}\ln\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\times\frac{-1}{\sin^2x}}{\frac{1}{x}}}\underset{\text{化简}}{=}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-x}{\cos x\sin x}}=e^{-1}$

注 4) 当 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不是确定常数或 ∞ 时，不能断言 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 不存在，需用其他求极限方法求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{F(x)}$。 例如，对 $f(x)=x+\cos x,F(x)=x$，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1}$ 不是确定常数或 ∞，不能说 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 不存在，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x}\cos x)=1$ 存在。

再比如，对 $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x},F(x)=\sin x$，极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不是确定常数或 ∞，不能说 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 不存在，因为

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\underset{\substack{\frac{0}{0}\\ \sin x\sim x}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 存在。

第三节 泰勒公式

泰勒公式解决了一个函数 $f(x)$ 在什么条件下可以用一个 n 次多项式来近似，并且给出了误差。

泰勒中值定理 1 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 具有 n 阶导数时，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), x\in U(x_0), \tag{1}$$

其中 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ 称为皮亚诺(Peano)余项，公式(1)称为 $f(x)$ 在点 x_0 的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式，记 $P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，称为 $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶泰勒多项式。证明略

定理 1 中的误差 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ 是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小，不知道具体表达式，无法计算误差范围。下述定理给出了 $R_n(x)$ 的具体表达式，可用来计算误差范围。

泰勒中值定理 2 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个领域 $U(x_0)$ 内具有 $n+1$ 阶导数时，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), x\in U(x_0), \tag{2}$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日(Lagrange)余项，这里 ξ 介于 x 和 x_0 之间，可表示为 $\xi=x_0+\theta(x-x_0), 0<\theta<1$。公式(2)称为 $f(x)$ 在点 x_0 的带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式。证明略

注 1）当 $n=0$ 时，公式(2)即拉格朗日中值公式；

2）在公式(2)中，由于出现了 $f^{(n+1)}(\xi)$，ξ 介于 x_0 与 x 之间，故要求函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个领域 $U(x_0)$ 内具有 $n+1$ 阶导数；在公式(1)中，由于只出现了 $f^{(n)}(x_0)$，故只要求函数 $f(x)$ 在点 x_0 具有 n 阶导数。

3）当 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le$ 某正数 M，$x\in U(x_0)$ 时，可得 $\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$，已知 x_0, n 的值可求出误差范围。

特别地，当 $x_0=0$ 时公式(1)和(2)称为**麦克劳林公式**，于是得到

$f(x)$ 的带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^n+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n), x\in U(0), \tag{3}$$

$f(x)$ 的带拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, x\in U(0), \tag{4}$$

这里 ξ 介于 x 和 0 之间，也可表示为 $\xi=\theta x, 0<\theta<1$。

例 1 求 $f(x)=e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式，并估算用 10 次多项式近似 e^x 时的误差。

解 $f^{(n)}(x)=e^x, f^{(n)}(0)=1, n=0,1,2,\cdots$，得 $f(x)=e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式为

$$e^x=f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\begin{cases} o(x^n) \\ \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1 \end{cases}$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\begin{cases} o(x^n) \\ \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1 \end{cases}$$，这里 $\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1$。

用 10 次多项式近似 e^x 时，$e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{10}}{10!}$，误差 $\left|\dfrac{e^{\theta x}}{11!}x^{11}\right|\le\dfrac{e^{\theta|x|}}{11!}|x|^{11}\le\dfrac{e^{|x|}}{11!}|x|^{11}$。

当 $x=1$ 时，$e\approx 1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{10!}$，误差 $|R_{10}(1)|\le\dfrac{e}{11!}<\dfrac{3}{11!}<10^{-6}$。

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 的 $2m$ 阶麦克劳林公式，并估算用 3 次多项式近似 $\sin x$ 时的误差。

解 $f^{(n)}(x)=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2}), f^{(n)}(0)=\sin(\dfrac{n\pi}{2})$，$f^{(2m)}(0)=\sin(m\pi)=0,$

$f^{(2m-1)}(0)=\sin(\dfrac{(2m-1)\pi}{2})=\sin((m-1)\pi+\dfrac{\pi}{2})=\cos((m-1)\pi)=(-1)^{m-1}$，$m=1,2,3,\cdots$

于是得 $\sin x$ 的 n 阶麦克劳林公式为

$$\sin x=f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\begin{cases} o(x^n) \\ \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\text{取 } n=2m}}\; x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{m-1}x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\begin{cases} o(x^{2m}) \\ \dfrac{(-1)^m\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1},0<\theta<1 \end{cases}$$，其中拉格朗日余项 $\dfrac{f^{(2m+1)}(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}=\dfrac{\sin(\theta x+\dfrac{2m+1}{2}\pi)}{(2m+1)!}x^{2m+1}=\dfrac{(-1)^m\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1},0<\theta<1$，这里

$\sin(\theta x+\dfrac{2m+1}{2}\pi)=\cos(\theta x+m\pi)=(-1)^m\cos(\theta x)$。

用 3 次多项式近似 $\sin x$ 时，$\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{3!}$，误差 $|R_4(x)|=\dfrac{|\cos\theta x|}{5!}|x|^5\le\dfrac{|x|^5}{5!}$，

当 $x=1$ 时，$\sin 1\approx 1-\dfrac{1}{3!}$，误差 $|R_4(1)|\le\dfrac{1}{5!}=\dfrac{1}{120}<0.01$。

同理可得，$\cos x$ 的 $2m+1$ 阶麦克劳林公式为

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+\begin{cases} o(x^{2m+1}) \\ \dfrac{(-1)^{m+1}\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2},0<\theta<1 \end{cases}$$

事实上，设 $f(x)=\cos x$，则 $f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n\pi}{2}), f^{(n)}(0)=\cos(\frac{n\pi}{2}),$

$f^{(2m-1)}(0)=0$，$f^{(2m)}(0)=\cos(m\pi)=(-1)^m, m=1,2,3,\cdots$，于是得 $\cos x$ 的 n 阶麦克劳林公式为

$$\cos x=f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\begin{cases} o(x^n) \\ \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1 \end{cases}$$

$$\xlongequal{\text{取}n=2m+1} 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+\begin{cases} o(x^{2m+1}) \\ \frac{(-1)^{m+1}\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2},0<\theta<1 \end{cases}$$

，其中拉格朗日余项 $\frac{f^{(2m+2)}(\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+2}=\frac{\cos(\theta x+\frac{2m+2}{2}\pi)}{(2m+2)!}x^{2m+2}=\frac{(-1)^{m+1}\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2},0<\theta<1$，这里

$\cos(\theta x+\frac{2m+2}{2}\pi)=\cos(\theta x+(m+1)\pi)=(-1)^{m+1}\cos(\theta x)$。

例 3 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 的 n 阶麦克劳林公式。

解 $f'(x)=\frac{1}{x+1}$，$f^{(n)}(x)=(f'(x))^{(n-1)}=(\frac{1}{x+1})^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$，

$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$，$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$，

于是得 $\ln(1+x)$ 的 n 阶麦克劳林公式为

$$\ln(1+x)=f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\begin{cases} o(x^n) \\ \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1 \end{cases}$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\begin{cases} o(x^n) \\ \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1},0<\theta<1 \end{cases}$$

，其中拉格朗日余项

$\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1},0<\theta<1$。

例 4 求 $f(x)=(1+x)^\alpha, x>-1$（α 为实数）的 n 阶麦克劳林公式。

解 $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$，$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), n=1,2,3,\cdots$，

$$(1+x)^\alpha=f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\begin{cases} o(x^n) \\ \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1 \end{cases}$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2-\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\begin{cases} o(x^n) \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} \end{cases},$$

其中拉格朗日余项 $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}$，$0<\theta<1$。

注 由于 $\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{\alpha}-1]=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\alpha x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}=1$（将上面的麦克劳林公式代入极限式子易得），所以 $x\to 0$ 时，$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$（$\alpha$ 为实数），特别地，$x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$。

小结：1. $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\begin{cases}o((x-x_0)^n)\\ \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\end{cases},$$

$$x\in U(x_0),\quad \xi=x_0+\theta(x-x_0),0<\theta<1$$

2. $f(x)$ 的 n 阶麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\begin{cases}o(x^n)\\ \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\end{cases},\quad x\in U(0),\quad \xi=\theta x,0<\theta<1$$

3. 5 个常见函数的麦克劳林公式(带皮亚诺余项）：

（1）$\sin x$ 的 $2m$ 阶麦克劳林公式 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+\dfrac{(-1)^{m-1}x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$，

（2）$\cos x$ 的 $2m+1$ 阶麦克劳林公式 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+\dfrac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$。

另外 3 个函数的 n 阶麦克劳林公式

（3）$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n),$

（4）$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^2}{3}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o(x^n),$

（5）$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2-\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$，（$\alpha$ 为实数）

上述 $o(x^n)$ 是 $x\to 0$ 时的 x^n 的高阶无穷小，所以 x 的范围都是 $x\in U(0)$。

一、单项选择题

1、函数 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式中 $(x-x_0)^2$ 项的系数是（　　　　）

A、$\dfrac{1}{2!}$　　B、$\dfrac{f''(x_0)}{2!}$　　C、$f''(x_0)$　　D、$\dfrac{1}{2!}f''(\xi)$

2、e^x 的麦克劳林公式为（　　　　）

A、$1+x+x^2+o(x^2)$　　B、$1+x+x^2+o(x^n)$

C、$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$　　D、$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^n)$

3、函数 $f(x)=\sin x^2$ 在 $x=0$ 点的麦克劳林公式为（　　　　）

A、$x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$　　　　B、$x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$

C、$x^2-\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^{4n-2}}{(2n-1)!}+o(x^{4n-2})$　　　　D、$x^2+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}+o(x^{4n-2})$

4、（填空）函数 $f(x)=\sin x^2$ 的麦克劳林公式中 x^6 的系数为____________。（$-\frac{1}{6}$）

二、求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有皮亚诺型余项的 n 阶泰勒公式

解： 令 $t=x-2$，则 $f(x)=\ln x=\ln(t+2)=\ln(1+\frac{t}{2})+\ln 2$，根据带皮亚诺余项的 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林公式 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o(x^n)$，立刻可得

$$\ln(1+\frac{t}{2})=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^n+o(\left(\frac{t}{2}\right)^n)$$

$$=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{t^n}{2^n}+o(t^n)$$

$$=\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-2)^3}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(x-2)^n}{2^n}+o((x-2)^n)$$　（变量还原）

于是 $f(x)=\ln x$ 按 $x-2$ 的幂展开的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式为

$$f(x)=\ln x=\ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-2)^3}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(x-2)^n}{2^n}+o((x-2)^n)。$$

第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

一、函数单调性定理

定理 1 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，
⑴若在 (a,b) 内 $f'(x) \ge 0$，且等号仅在有限多个点处成立，则函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；
⑵若在 (a,b) 内 $f'(x) \le 0$，且等号仅在有限多个点处成立，则函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少。

证 仅证明⑴，⑵的证明类似。设在 (a,b) 内有限多个点 $c_1, c_2, \cdots, c_n (a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < b)$ 处，有 $f'(c_i) = 0, i = 1,2,\cdots,n$。则在 $(a,c_1),(c_1,c_2),(c_2,c_3),\cdots,(c_{n-1},c_n),(c_n,b)$ 内，均有 $f'(x) > 0$。

任取 $x_1, x_2 \in [c_i, c_{i+1}], i = 1,2,\cdots,n-1,\ \ x_1 < x_2$，由拉格朗日中值定理，有 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,\ \ x_1 < \xi < x_2$，故 $f(x_1) < f(x_2)$，由 x_1, x_2 的任意性，得 $f(x)$ 在 $[c_i, c_{i+1}], i = 1,2,\cdots,n-1$ 上单调增加；同理可证 $f(x)$ 在 $[a, c_1]$ 和 $[c_n, b]$ 上单调增加，结论得证.

注 将定理 1 中的闭区间 $[a,b]$ 换成其他区间，结论仍成立，比如函数 $y = x^3$ 在 $(-2,4]$ 上连续、在 $(-2,4)$ 内可导，$f'(x) = 3x^2 \ge 0, x \in (-2,4)$，等号仅在 $x = 0$ 成立，按定理 1，函数 $y = x^3$ 在 $(-2,4]$ 上单增；函数 $y = x^5 + x^3 - 1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续、可导，$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 \ge 0$，$x \in (-\infty,+\infty)$，等号仅在 $x = 0$ 成立，按定理 1，函数 $y = x^5 + x^3 - 1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内单增。

函数单调性定理的应用

1. 单调区间划分：用所有 $f'(x) = 0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点将函数 $f(x)$ 的定义域分成几个开区间，则每个开区间内无 $f'(x) = 0$ 的点，当 $f'(x)$ 在这些开区间内连续时，则 $f'(x)$ 在这些开区间内定号，从而由单调性定理可确定单调区间。

例 确定 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间。

解 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，令 $y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2) = 0$ 得 $x = 1,2$。
当 $x < 1$ 时，$y' > 0$，故 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 在 $(-\infty,1]$ 单增；
当 $1 < x < 2$ 时，$y' < 0$，故 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 在 $[1,2]$ 单减；
当 $2 < x$ 时，$y' > 0$，故 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 在 $[2,+\infty)$ 单增；

例 确定 $y = \sqrt[3]{x-1}$ 的单调区间。

解 $y = \sqrt[3]{x-1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$y' = \dfrac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ 不存在的点为 $x = 1$。

当 $x < 1$ 时，$y' > 0$，故 $y = \sqrt[3]{(x-1)}$ 在 $(-\infty,1]$ 单增；

当 $x > 1$ 时，$y' > 0$，故 $y = \sqrt[3]{(x-1)}$ 在 $[1,+\infty)$ 单增；综上，$y = \sqrt[3]{x-1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单增。

例 确定 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间。

解 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$y'=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$ 等于 0 的点为 $x=\dfrac{2}{5}$，不存在的点为 $x=0$。

当 $x<0$ 时，$y'>0$，故 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\infty,0]$ 单增；

当 $0<x<\dfrac{2}{5}$ 时，$y'<0$，故 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[0,\dfrac{2}{5}]$ 单减；

当 $x>\dfrac{2}{5}$ 时，$y'>0$，故 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[\dfrac{2}{5},+\infty)$ 单增。

2. 证明不等式

方法：将要证明的不等式移项，使得一端为 0 一端不为 0，不为 0 的函数设为辅助函数，对辅助函数运用单调性定理。

例 证明 当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$。

证 设 $f(x)=2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}-3$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}(x\sqrt{x}-1)>0,\ \ x>1$，又 $f(x)=2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}-3$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，根据定理 1，所以 $f(x)=2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}-3$ 在 $[1,+\infty)$ 单增，故当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，即证。

例 证明 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$。

证 设 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$，则 $f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2=\dfrac{\cos^3 x+1-2\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x(\cos x-1)+1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x-\cos^2 x)}{\cos^2 x}>0,\ \ 0<x<\frac{\pi}{2},$$

又 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 上连续，根据定理 1，所以 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 单增，

故当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即证。

二、曲线的凹凸性与拐点

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，$\forall x_1,x_2\in I$，

(1)若恒有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 <u>$f(x)$ 在区间 I 上的图形是凹弧(向上凹的)</u>；

(2)若恒有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 <u>$f(x)$ 在区间 I 上的图形是凸弧(向上凸的)</u>；

定理 2（凹凸性定理） 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

(1)若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹弧；

(2)若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸弧。

注 1) 可通过 $f'(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 的切线斜率单增、单减来理解；

2）将定理 2 中的闭区间$[a,b]$换成其他区间，结论仍成立，比如函数$y=\ln x$在$(2,4]$上连续，$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0, x\in(2,4)$，按定理 2，曲线$y=\ln x$，$(2,4]$是凸弧；函数$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内连续，$y''=2>0,\ -\infty<x<+\infty$，按定理 2，曲线$y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$是凹弧。

定义 曲线$y=f(x)$上凹凸弧的分界点$(x_0,f(x_0))$称为**曲线$y=f(x)$拐点**。比如原点(0, 0)分别是曲线$y=x^3$和$y=\sqrt[3]{x}$的拐点。

函数凹凸性定理的应用

划分凹凸区间、确定拐点：用所有$f''(x)=0$和$f''(x)$不存在的点将函数$f(x)$的定义域分成几个开区间，则每个开区间内无$f''(x)=0$的点，当$f''(x)$在这些开区间内连续时，则$f''(x)$在这些开区间内定号，从而由凹凸性定理确定凹凸区间；凹凸区间公共端点x_0对应的点$(x_0,f(x_0))$即拐点(画图即知)。

注 从这个划分方法知拐点$(x_0,f(x_0))$横坐标x_0处的二阶导数值$f''(x)=0$或$f''(x)$不存在。

例 判定曲线$y=3x^4-4x^3+1$的凹凸性并求拐点。

解 $y=3x^4-4x^3+1$在$(-\infty,+\infty)$内连续，令$y''=36x(x-\dfrac{2}{3})=0$，得$x=0,\dfrac{2}{3}$。

当$x<0$，$y''>0$，函数$y=3x^4-4x^3+1$在$(-\infty,0]$上的图形是凹的；

当$0<x<\dfrac{2}{3}$，$y''<0$，函数$y=3x^4-4x^3+1$在$[0,\dfrac{2}{3}]$上的图形是凸的；

当$x>\dfrac{2}{3}$，$y''>0$，函数$y=3x^4-4x^3+1$在$[\dfrac{2}{3},+\infty]$上的图形是凹的。

$(0,f(0))=(0,1)$和$(\dfrac{2}{3},f(\dfrac{2}{3}))=(\dfrac{2}{3},\dfrac{11}{27})$均是拐点。

例 判定曲线$y=\sqrt[3]{x}$的凹凸性。

解 $y=\sqrt[3]{x}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，$y''=\dfrac{-2}{9x\cdot\sqrt[3]{x^2}}$等于 0 的点没有，不存在的点为$x=0$。当$x<0$，

当$x<0$，$y''>0$，函数$y=\sqrt[3]{x}$在$(-\infty,0]$内的图形是凹的；当$x>0$，$y''<0$，函数$y=\sqrt[3]{x}$在$[0,+\infty)$内的图形是凸的；原点(0, 0)是曲线$y=\sqrt[3]{x}$的拐点。

例 已知点$(1,3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点，求常数的值。

解 $y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$，由点$(1,3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点，得

$\begin{cases} y''(1)=0 \\ y(1)=3 \end{cases}$，即$\begin{cases} 6a+2b=0 \\ a+b=3 \end{cases}$ 解得$a=-\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{9}{2}$。

第五节 函数的极值与最大最小值

一、函数的极值及其求法

定义 若 x_0 左右附近的函数值都比 $f(x_0)$ 小，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值，x_0 称为函数的一个极大值点；若 x_0 左右附近的函数值都比 $f(x_0)$ 大，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值；x_0 称为函数的一个极小值点。极大值极小值统称为极值，极大值点极小值点统为极值点。

例 $x=0$ 为 $y=x^2$ 的极小值点，也为 $y=-|x|$ 的极大值点，但不是 $y=x^3$ 的极值点。

注 1)按定义，x_0 为 $f(x)$ 的极大值(极小值)点 $\Leftrightarrow$ 点 x_0 附近的函数值比点 x_0 的函数值都小(都大)；

2)区间端点不是极值点，因为定义要求极值点左右两侧附近都要能取函数值；极值是局部范围内的最大最小值，最值是定义域内的最大最小值，所以极值可能是最值，最值不一定是极值,因为最值可能在区间端点取到，而区间端点不是极值点；

3)对连续函数的曲线，由定义，波峰或尖峰 $\leftrightarrow$ (极大值点，极大值)，波谷或尖谷 $\leftrightarrow$ (极小值点，极小值)；极值可能有多个；极大值可能大于、也可能小于极小值，极小值可能小于、也可能大于极大值；

定理 1(极值的必要条件或费马引理) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$ 。

由定理 1 的逆否命题知，$f'(x_0)$ 存在且 $f'(x_0)\neq 0$ 的点 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点；又 $f'(x_0)$ 存在且 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 (我们称为**驻点**)可能为 $f(x)$ 的极值点，如 $x_0=0$ 为函数 $y=-x^2$ 的驻点也是极大值点；$f'(x_0)$ 不存在的点 x_0 也可能为 $f(x)$ 极值点，如 $x_0=0$ 为函数 $f(x)=|x|$ 的极小值点，$f'(x_0)$ 不存在；因此，极值点只能在一阶导数等于 0 和一阶导数不存在的点去找。如何判定？

定理 2(第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，

(1) 若在 x_0 左侧附近, $f'(x)>0$， 在 x_0 右侧附近，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

(2) 若在 x_0 左侧附近, $f'(x)<0$， 在 x_0 右侧附近，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

(3) 若在 x_0 左右两侧附近, $f'(x)$ 不变号，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值。

注 由第一充分条件和单调性定理知，极值点就是单增、单减区间的公共端点，因此运用单调性定理确定单调区间的同时，也确定了极值，再运用第一充分条件可确定是极大值还是极小值。

例 求函数 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的单调区间和极值。

解 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续；$f'(x)=\dfrac{5(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{x+1}}$，当 $x<-1$，$f'(x)>0$，当 $-1<x<1, f'(x)<0$，当 $x>1, f'(x)>0$，故函数的单减区间为 $[-1,1]$，单增区间为 $(-\infty,-1],[1,+\infty)$，极大值为 $f(-1)=0$，极小值为 $f(1)=-3\cdot\sqrt[3]{4}$ 。

对驻点是否为极值点还可用第二充分条件判断。

定理 3(第二充分条件) 设 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$，

⑴ 当 $f''(x_0)<0$ 时, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

⑵ 当 $f''(x_0)>0$ 时, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

证 只证⑴, ⑵类似证明。由 $f''(x_0)<0$，即 $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$，根据极限的局部保号性，在 x_0 的某去心领域 $U^0(x_0,\delta)$ 内，$\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$。若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值。

例 判断 $f(0)=0$ 是否是 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值，当是极值时是极大值还是极小值？

解 $f'(x)=3(x^2-1)^2\cdot 2x$，$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$，

法一 因 $f'(0)=0, f''(0)=6>0$，故根据第二充分条件，$f(0)=0$ 为极小值。

法二 因 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，在 $x=0$ 左侧附近，$f'(x)<0,$ 在 $x=0$ 右侧附近，$f'(x)>0,$ 故根据第一充分条件，$f(0)=0$ 为极小值。

注 极值第一充分条件解决了求极值,对驻点和一阶导数不存在的点均适用,第二充分条件只能对驻点使用。

二、最大值最小值问题

类型 1 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点为有限个，求 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大最小值。

求法，设 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的有限个点为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值

$f_{\max}=\max(f(a),f(b),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m))$, 最小值 $f_{\min}=\min(f(a),f(b),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m))$.

解析 闭区间上的连续函数必在该区间上取最大最小值；最大最小值可能在区间端点取到，也可能在区间内部取到，若在区间内部取到，则最大最小值也是极大极小值，只能在驻点和一阶导数不存在的点取到。

例 求函数 $y=x+\sqrt{1-x},-5\le x\le 1$ 的最大最小值。

解 $y'=1+\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$, 驻点 $x=\dfrac{3}{4}$ 和不可导点为 $x=1$, 比较 $y(-5)=-5+\sqrt{6}, y(\dfrac{3}{4})=1.25, y(1)=1$，

得 $f_{\max}=2.15, f_{\min}=-5+\sqrt{6}$。

类型 2 设函数 $y=f(x)$ 在一个区间 I 内(I 是有限区间或无限区间，或开区间或闭区间)可导，且驻点 x_0 唯一，则 $f(x_0)$ 为极大值时也是该区间上的最大值，$f(x_0)$ 为极小值时也是该区间上的最小值。

解析 根据函数图形从直观上易知。

例 求函数 $y=x^2-\dfrac{54}{x},x<0$ 的最小值。

解 $y'=2x+\dfrac{54}{x^2}$，$x<0$，驻点 $x=-3$（唯一）。当 $x<-3$ 时，$y'<0$；当 $-3<x<0$ 时，$y'>0$，故 $y(-3)=2$ 为极小值，也为最小值。

例 求函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1},x\geq 0$ 的最大值。

解 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，$x\geq 0$，驻点 $x=1$（唯一）。当 $0\leq x<1$ 时，$y'>0$；当 $x>1$ 时，$y'<0$，故 $y(1)=\dfrac{1}{2}$ 为极大值，也为最大值。

类型 3　实际问题中，根据问题的性质可断定可导函数有最大值或最小值，且在区间内部取得。如果区间内驻点唯一，则驻点处的函数值就是最大值或最小值。

解析 可导函数在区间内的最大最小值也是极大极小值，只能在驻点处取得，如果区间内驻点唯一，则就是最大值点或最小值点，其函数值就是最大值或最小值。

例 某车间靠墙要盖一长方形小屋，现有存砖只够砌 20 米长的墙壁。问怎样围成的长方形才能使小屋的面积最大。

解 设长方形小屋的宽为 x 米, 其面积 $S=x(20-2x)$，$0<x<10$, $S'(x)=20-4x$，驻点 $x=5$. 根据问题的实际意义，其面积有最大值，故长方形小屋的宽为 5 米时面积最大。

例 构造一个体积为 V 且有盖的圆柱形油罐，当底面半径 r 和高 h 各为多少时材料用得最省？此时的直径和高之比是多少？

解 圆柱形油罐的体积 $V=\pi r^2\cdot h$，材料最省即表面积最小，其表面积

$S=2\pi r^2+2\pi r\cdot h=2\pi r(r+\dfrac{V}{\pi r^2}),r>0$，$\dfrac{dS}{dr}=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2},r>0$，驻点 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. 根据问题的实际意义，体积一定的圆周形油罐其表面积有最小值，故底圆半径 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时表面积最小，此时底圆直径和高之比为 $2r:h=2r:\dfrac{V}{\pi r^2}=\dfrac{2\pi r^3}{V}=1$。

第六节 函数图形的描绘

渐近线

定义 曲线 $y=f(x)$ 上的动点 $(x,f(x))$ 无限远离原点时，若动点 $(x,f(x))$ 与某直线无限接近，则称此直线为曲线 $y=f(x)$ 的一条**渐近线**。

确定渐近线的方法如下：

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty,-\infty,+\infty$，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty} f(x)=A$，则称直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线；

(3) 若 $\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k,\ \lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}(f(x)-kx)=b,$ 则称直线 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**斜渐近线**。

（事实上，当 $\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k,\ \lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}(f(x)-kx)=b$ 时， 则 $\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}[f(x)-(kx+b)]$ $=\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}[f(x)-kx]-b=b-b=0$，反之，当 $\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$ 时，则 $0=\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}x[\dfrac{f(x)}{x}-(k+\dfrac{b}{x})]=\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}[\dfrac{f(x)}{x}-k]\Big/\dfrac{1}{x}$，得到 $\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}[\dfrac{f(x)}{x}-k]=\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}\dfrac{1}{x}[(\dfrac{f(x)}{x}-k)\Big/\dfrac{1}{x}]=0$，得 $k=\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$。另外，易得 $b=\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty}(f(x)-kx)$）

注 寻找垂直渐近线 $x=x_0$ 时，一般 x_0 是函数 $f(x)$ 无定义的点。

例 (1) 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，故 $x=0$ 为曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的垂直渐近线；因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，故 $y=0$ 为曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的水平渐近线；(2) 因 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\infty$，故 $x=1$ 为曲线 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的垂直渐近线；因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=0$，故 $y=0$ 为曲线 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的水平渐近线；

例 对曲线 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$，因 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{6}{x}-1)^{\frac{1}{3}}=-1,$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to\infty}[x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}+x]=\lim_{x\to\infty}[\frac{(\frac{6}{x}-1)^{\frac{1}{3}}+1}{\frac{1}{x}}]=\lim_{x\to\infty}[\frac{\frac{1}{3}(\frac{6}{x}-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-\frac{6}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}]=2,$$

故 $y=-x+2$ 为曲线 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$ 的斜渐近线。

例 见教材

第七节 曲率

一、弧微分(有向弧的值的微分)

定义 设曲线 $y=f(x)$ 上定点 $M_0(x_0,y_0)$ 和动点 $M(x,y)$ 间的弧长为 $\left|\widehat{M_0M}\right|$，当点 M 在点 M_0 右侧时，规定有向弧 $\widehat{M_0M}$ 的值 s 等于 $\left|\widehat{M_0M}\right|$；当点 M 在点 M_0 左侧时，规定有向弧 $\widehat{M_0M}$ 的值 s 等于 $-\left|\widehat{M_0M}\right|$。

记曲线 $y=f(x)$ 上两点 $M(x,y)$ 和 $M'(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 间的弦长为 $\left|\overrightarrow{MM'}\right|$，则 $\lim\limits_{M'\to M}\dfrac{\left|\widehat{MM'}\right|}{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}=1$。

对应于自变量 x 产生的增量 Δx，有向弧的值 s 产生的增量 $\Delta s=\pm\left|\widehat{MM'}\right|$，且

$$\Delta s=\begin{cases}\left|\widehat{MM'}\right|,\text{当}M'\text{在}M\text{右侧}\ (\Delta x>0)\\ -\left|\widehat{MM'}\right|,\text{当}M'\text{在}M\text{左侧}\ (\Delta x<0)\end{cases}。\quad \frac{ds}{dx}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\left|\widehat{MM'}\right|}{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}\cdot\dfrac{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}{\Delta x},\Delta x>0\\ \lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-\left|\widehat{MM'}\right|}{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}\cdot\dfrac{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}{\Delta x},\Delta x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\left|\widehat{MM'}\right|}{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}\cdot\dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x},\Delta x>0\\ \lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-\left|\widehat{MM'}\right|}{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}\cdot\dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x},\Delta x<0\end{cases}=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x},\Delta x>0\\ \lim\limits_{\Delta x\to0}\left(-\dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x}\right),\Delta x<0\end{cases}=\lim_{\Delta x\to0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$ 当

M' 在 M 右侧或左侧均成立，于是得到有向弧的值 s 的微分(弧微分) $ds=\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$。

二、曲率及其计算公式

容易知道(图 3-28，3-29)，弧长相等时，弧的弯曲程度与弧的切线转过的角度成正比；弧的切线转过的角度相等时，弧的弯曲程度与弧的长度成反比。

对光滑曲线 $y=f(x)$ 上两点 $M(x,y)$ 和 $M'(x+\Delta x,y+\Delta y)$。对应于自变量 x 产生的增量 Δx，有向弧的值 s 产生的增量 $\Delta s=\pm\left|\widehat{MM'}\right|$，切点从 M 到 M' 转过的角度设为 $\Delta\alpha$。

定义 $\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 表示弧段 $\widehat{MM'}$ 的平均弯曲程度，称为**弧段 $\widehat{MM'}$ 的平均曲率**；若 $\lim\limits_{\Delta s\to0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\dfrac{d\alpha}{ds}$ 存在，则称 $\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$ 为**曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率**，记为 K，即 $K=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$。

因为 $\tan\alpha=y'$（α 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的切线倾斜角），则 $\sec^2\alpha\cdot\dfrac{d\alpha}{dx}=y''$，

$\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{y''}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{y''}{1+(y')^2}$，故 $d\alpha=\dfrac{y''}{1+(y')^2}dx$，除以弧微分公式

$ds=\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ 得**曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率** $K=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$。

例 直线 $y=ax+b$ 上任一点的曲率 $K=0$；

例 求圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上任一点的曲率。

解 方程两端对 x 求导得 $2x+2y\cdot y'=0$，得到 $y'=-x/y$，

$$y''=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y-x(-\frac{x}{y})}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{R^2}{y^3},$$

曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{R^2}{|y|^3}\Big/(1+\dfrac{x^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}=\dfrac{R^2}{(|y|\sqrt{1+\dfrac{x^2}{y^2}})^3}=\dfrac{1}{R}$.

例 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪点的曲率最大？

解 $y'=2ax+b,\ \ y''=2a$，曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{|2a|}{(1+(2ax+b)^2)^{\frac{3}{2}}}$，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$，曲率最大，即在抛物线顶点 $(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$ 处曲率最大，最大曲率为 $K=|2a|$。

三、曲率圆与曲率半径

设曲线 $y=f(x)$ 上点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $K(K\neq 0)$，在点 $M(x,y)$ 处的法线上，凹的一侧取一点 D 为圆心，以 $|DM|=\dfrac{1}{K}=\rho$ 为半径作圆，该圆称为**曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率圆**，$\rho=\dfrac{1}{K}$ 称为曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径。

例 抛物线 $y=x^2-4x+3$ 上顶点处的曲率 $K=|2a|=2$，曲率半径为 $\dfrac{1}{2}$。

例 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases},(a>0)$ 上 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处对应点的曲率和曲率半径。

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$；$\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\sin t}{1-\cos t})=\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}=\dfrac{-1}{1-\cos t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{\sin t}{1-\cos t})\Big/a(1-\cos t)=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}。$$

$y'\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$，$y''\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{-1}{a}$，$t=\dfrac{\pi}{2}$ 处对应点的曲率为 $K\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2a}}$，曲率半径为 $2\sqrt{2a}$.