习题一

一．填空题

1．$\overline{ABC}$　　2、$0\cdot5$　　3、$0\cdot2$　　4、$0\cdot6$

二．单项选择题

1、B　　2、C　　3、C　　4、A　　5、B

三．计算题

1．（1）略

（2）A、$A_1A_2A_3$　　B、$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$

C、$\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}$　　D、$\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1A_2A_3$

2．解　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

$P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{3}{8}$

$P(\overline{AB})=1-P(AB)=\frac{7}{8}$

$P[(A\cup B)(\overline{AB})]=P(A\cup B)-P(AB)=\frac{1}{2}$

3．解：最多只有一位陈姓候选人当选的概率为$1-\frac{C_2^2C_4^2}{C_6^4}=\frac{3}{5}$

4．$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=\frac{5}{8}$$

5．解：（1）$P(A)=\frac{n!}{N^n}$

（2）$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}$、

（3）$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}$

习题二

一．填空题

1．$\frac{2}{3}$　　2、$0\cdot5$　　3、$\frac{2}{3}$　　4、$\frac{3}{7}$　　5、$\frac{3}{4}$

二．单项选择题

1、D　　2、B　　3、D　　4、B

三．计算题

1． 解：设 A_i：分别表示甲、乙、丙厂的产品（i=1，2，3）

B：顾客买到正品

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)$$

$$=\frac{2}{5}\times0.9+\frac{2}{5}\times0.85+\frac{1}{5}\times0.65=0.83$$

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)}=\frac{34}{83}$$

2．解：设 A_i：表示第 i 箱产品（i=1，2）

B_i：第 i 次取到一等品（i=1，2）

（1） $P(B_1)=P(A_1)P(B_1/A_1)+P(A_2)P(B_1/A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=0.4$

（2）同理 $P(B_2)=0.4$

（3） $P(B_1B_2)=P(A_1)P(B_1B_2/A_1)+P(A_2)P(B_1B_2/A_2)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}=0.19423$$

$$P(B_2/B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{0.19423}{0.4}=0.4856$$

（4） $P(B_1/B_2)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_{21})}=\frac{0.19423}{0.4}=0.4856$

3． 解：设 A_i：表示第 i 次电话接通（i=1，2，3）

$$P(A_1)=\frac{1}{10}\qquad P(\overline{A_1}A_2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}\qquad P(\overline{A_1}\,\overline{A}_2A_3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$$

所以拨号不超过三次接通电话的概率为$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=0.3$

如已知最后一位是奇数，则

$P(A_1)=\frac{1}{5}$　　$P(\overline{A_1}A_2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$　　$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

所以拨号不超过三次接通电话的概率为

4．解：$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$

$$=1-\frac{4}{5}\frac{2}{3}\frac{3}{4}=0.6$$

5．解：设B_1,B_2分别表示发出信号“A”及“B”

A_1,A_2分别表示收到信号“A”及“B”

$$P(A_1)=P(B_1)P(A_1/B_1)+P(B_2)P(A_1/A_2)$$

$$=\frac{2}{3}(1-0.02)+\frac{1}{3}0.01=\frac{197}{300}$$

$$P(B_1/A_1)=\frac{P(A_1B_1)}{P(A_1)}=\frac{P(B_1)P(A_1/B_1)}{P(A_1)}=\frac{196}{197}$$

第一章 复习题

一．填空题

1．0.3，0.5　　2、0.2　3、$\frac{20}{21}$　4、$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$　5、$\frac{8}{15}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$

6．$1-(1-p)^4$

二．单项选择题

1、B　2、B　3、 D　4、C,D　5、D 6　A

三．计算题

1． 解：设A_i： i个人击中飞机（i=0，1，2，3）

则$P(A_0)=0.09$　　$P(A_1)=0.36$　　$P(A_2)=0.41$　　$P(A_3)=0.14$

B：飞机被击落

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)++P(A_0)P(B/A_0)$$

$$=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1+0.09\times0=0.458$$

2．解：设A_i： i局甲胜（i=0，1，2，3）

（1）甲胜有下面几种情况：

打三局，概率0.6^3

打四局，概率$C_3^1 0.4\cdot 0.6^2\cdot 0.6^1$

打五局，概率$C_4^2 0.4^2\cdot 0.6^2\cdot 0.6^1$

P（甲胜）$=0.6^3+C_3^1 0.4\cdot 0.6^2\cdot 0.6^1+C_4^2 0.4^2\cdot 0.6^2\cdot 0.6^1$=0.68256

（2）

$$P(A/A_1A_2)=\frac{P(AA_1A_2)}{P(A_1A_2)}=\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1\ A_2)}=\frac{0.6^3+0.6^2*0.4*0.6+0.6^2*0.4^2*0.6}{0.6^2}=0.936$$

3．解：设 A ：知道答案　　　　B：填对

$$P(B)=P(A)P(B/A\ )+P(\overline{A})P(B/\overline{A})=0.3\times 1+0.7\times\frac{1}{4}=0.475$$

$$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}B\ )}{P(B)}=\frac{P(\overline{A})P(B/\overline{A})}{P(B)}=\frac{0.7\times\frac{1}{4}}{0.475}=\frac{7}{19}$$

4．解：设A_i：分别表示乘火车、轮船、汽车、飞机（i=1，2，3，4）

　　　B：迟到

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)++P(A_4)P(B/A_4)$$

$$=\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{5}\times 0=\frac{3}{20}$$

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B_1/A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{20}}=\frac{1}{2}$$

同理$P(A_2/B)=\frac{4}{9}$　　　　$P(A_3/B)=\frac{1}{18}$

5．解：A：甲袋中取红球；B：乙袋中取红球

$$P(AB\cup\overline{A}\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}\overline{B})=P(A)P(B)+P(\overline{A})P(\overline{B})$$

$$=\frac{4}{10}\times\frac{6}{16}+\frac{6}{10}\times\frac{10}{16}=\frac{21}{40}$$

习题三 第二章 随机变量及其分布

一、填空题

1、$\frac{19}{27}$　2、2　3、$\frac{1}{3}$　4、0.8　5、$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0.2 & 1\le x<2\\ 0.5 & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$　6、$X\sim\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{bmatrix}$

二、单项选择题

1、B　2、A

三、计算题

1、解：由已知$X\sim B(15,0.2)$，其分布律为：$P(X=k)=C_{15}^{k}0.2^{k}0.8^{15-k}(k=0,1,2,...,15)$

至少有两人无任何保险的概：$P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=0.833$

多于 13 人的概率：$P(X>13)=P(X=14)+P(X=15)=0$

2、解　设击中的概率为 p，则 X 的分布率为

X	1	2	3	4	5	6
p_k	p	$(1-p)\,p$	$(1-p)^2 p$	$(1-p)^3 p$	$(1-p)^4 p$	$(1-p)^5 p+(1-p)^6$

3、解：X 的分布律为：

X	3	4	5
p_k	0.1	0.3	0.6

X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ 0.1, & 3\le x<4\\ 0.4, & 4\le x<5\\ 1, & x\ge 5\end{cases}$

4、不做　略

习题四　第二章　一维随机变量及其分布

一、填空题

1、$P\{X=1\}=0$　（连续型随机变量等于任意值的概率都为 0）

2、$P\{2 < X \le 5\} = \Phi(\frac{5-3}{2}) - \Phi(\frac{2-3}{2}) = \Phi(1) - \Phi(-0.5)$

$= \Phi(1) - [1 - \Phi(0.5)] = 0.8413 - 1 + 0.6915 = 0.5328$

3、$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{3X + 1 \le y\} = P\left\{X \le \frac{y-1}{3}\right\} = F_X(\frac{y-1}{3})$

$f_Y(y) = F'(y) = \frac{1}{3} f_X(\frac{y-1}{3})$

二、单项选择题

1、$\because \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad \therefore \int_0^{\pi} A\sin x dx = A(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = A(-\cos\pi + \cos 0) = 2A = 1$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$ 故选（B）

2、$\because f(-x) = f(x) \qquad \therefore f(x)$是偶函数

$F(-a) = 1 - F(a) = 1 - (\frac{1}{2} + \int_0^a f(x)dx) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x)dx$ 故选（B）

三、计算题

1、解：由已知 X 的密度函数为：$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, -3 \le x \le 3 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$

此二次方程的$\Delta = (4x)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (x+2) = 16(x^2 - x - 2)$

（1）当$\Delta \ge 0$时，有实根，即$(x^2 - x - 2) \ge 0 \Rightarrow x \ge 2$或$x \le -1$

所以$P\{\text{方程有实根}\} = P\{X \ge 2\text{或}X \le -1\} = P\{X \ge 2\} + P\{X \le -1\}$

$$= \int_2^3 \frac{1}{6}dx + \int_{-3}^{-1} \frac{1}{6}dx = \frac{1}{2}$$

（2）当$\Delta = 0$时，有重根，即$(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$或$x = -1$

所以$P\{\text{方程有重根}\} = P\{X = 2\text{或}X = -1\} = P\{X = 2\} + P\{X = -1\} = 0$

（3）$P\{\text{方程无实根}\} = 1 - P\{\text{方程有实根}\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2、解： 设 X 为电子元件寿命，则由已知 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 100\\ \dfrac{100}{x^2} & x>100\end{cases}$

$$P(X\le 150)=\int_{-\infty}^{150}f(x)dx=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}dx=\frac{1}{3}$$

设 Y 为 5 个同类型的元件中寿命不超过 150 小时的元件个数，则 $Y\sim B(5,\frac{1}{3})$

$$P\{Y=2\}=C_5^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3=\frac{80}{243}$$

3、解： $P\{4<X\le 8\}=\Phi(\frac{8-5}{4})-\Phi(\frac{4-5}{4})=\Phi(0.75)-\Phi(-0.25)=0.3721$

$$P\{|X|>3\}=1-P\{-3<X<3\}=1-\Phi(\frac{3-5}{4})+\Phi(\frac{-3-5}{4})=0.7143$$

4、解： $P\{X<d\}=\Phi(\frac{d-10}{2})=0.0668=1-0.9332=\Phi(-1.5)$

$$\therefore \frac{10-d}{2}=1.5\Rightarrow d=7$$

5、解： $P\{2<X\le 4\}=\Phi(\frac{4-2}{\sigma})-\Phi(\frac{2-2}{\sigma})=\Phi(\frac{2}{\sigma})-\Phi(0)=\Phi(\frac{2}{\sigma})-0.5=0.3$

$$\Rightarrow \Phi(\frac{2}{\sigma})=0.8$$

$$P\{X<0\}=\Phi(\frac{0-2}{\sigma})=1-\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.2$$

6、解：由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\Rightarrow\int_0^1 ax^b dx=1\Rightarrow\frac{a}{b+1}=1\Rightarrow a=b+1$

又由 $P(X>\frac{1}{2})=0.75$ ，有 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}ax^b dx=\frac{3}{4}$ ，即 $a-a2^{-(b+1)}=\frac{3}{4}(b+1)$

联立求解，得： $a=2,b=1$

7、解：（1） $\because F(x)$ 是右连续的 $\therefore$

$$F(-a)=\lim_{x\to -a+}F(x)=\lim_{x\to -a}(A+B\arcsin\frac{x}{a})=A+B\cdot(-\frac{\pi}{2})=0$$

$$F(a)=\lim_{x\to a+}F(x)=\lim_{x\to a}1=1=A+B\cdot\arcsin 1 \qquad \Rightarrow A=\frac{1}{2}, \quad B=\frac{1}{\pi}$$

（2）

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} & -a<x<a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

8、解：（1）

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dx=0 & x<0\\ \int_0^x tdt=\dfrac{x^2}{2} & 0\le x<1\\ \int_0^1 tdt+\int_1^x(2-t)dt=2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1\le x<2\\ \int_0^1 tdt+\int_1^2(2-t)dt=1 & x\ge 2\end{cases}$$

即

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{2} & 0\le x<1\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

（2）

$$P\left\{\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2}\right\}=F(\frac{3}{2})-F(\frac{1}{2})=(3-\frac{9}{8}-1)-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

$Y=2X^2-3$	-1	-3	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

9、解：

10、解：

$$X\sim f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad F_X(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{1}{2}x & 0<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ P\{-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\} & y>0\end{cases}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ F_X(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y}) & y>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \dfrac{\sqrt{y}}{2} & 0<y<4\\ 1 & y\ge 4\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F'(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \dfrac{f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & y>0\end{cases}=\begin{cases}0 & y\le 0或y\ge 4\\ \dfrac{1}{4\sqrt{y}} & 0<y<4\end{cases}$$

第二章　复习题

一、填空题

1、$P\left\{X\le \frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4}$　∴ $Y\sim B(3,\frac{1}{4})$　故 $P\{Y=2\}=C_3^2(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})=\frac{9}{64}$

2、$P\{x_1\le X<x_2\}=P\{X<x_2\}-P\{X<x_1\}=1-\beta-\alpha$

3、$\because F_Y(y)=P\{X^3\le y\}=P\{X\le \sqrt[3]{y}\}=F_X(\sqrt[3]{y})$

$$\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\sqrt[3]{y})\cdot\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} & 0<\sqrt[3]{y}<2\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{6}y^{-\frac{2}{3}} & 0<y<8\\ 0 & 其他\end{cases}$$

二、单项选择题　1、A　2、B　3、C　4、B　5、B

三、计算题

1、

X	0	1	2
P	1/5	3/5	1/5

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.2 & 0\le x<1\\ 0.8 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

2、解：（1）$P\{X=k\}=0.55^{k-1}\cdot 0.45\quad k=1,2,3,\cdots$

（2） $P(X=2n)=\sum_{n=1}^{\infty}0.55^{2n-1}0.45=\dfrac{0.55\times0.45}{1-0.55^2}=\dfrac{11}{31}$

3、解：（1） $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\Rightarrow\int_{-1}^{1}\dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}dx=c\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=c\pi=1\Rightarrow c=\dfrac{1}{\pi}$

（2） $P\left\{-\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{1}{2}\right\}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\dfrac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

4、解：（1） $F(-\infty)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}A+B\arctan x=A-\dfrac{\pi}{2}B=0$

$F(+\infty)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}A+B\arctan x=A+\dfrac{\pi}{2}B=1$ 故 $A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{\pi}$

（2） $P\{-1<X<1\}=F(1)-F(-1)=\dfrac{1}{\pi}(\arctan 1-\arctan(-1))=\dfrac{1}{2}$

（3） $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

5、解： $P\{X>96\}=1-\Phi(\dfrac{96-70}{\sigma})=0.023\Rightarrow\Phi(\dfrac{26}{\sigma})=0.977=\Phi(2)\Rightarrow\sigma=13$

$P\{60<X<84\}=\Phi(\dfrac{84-70}{13})-\Phi(\dfrac{60-70}{13})=\Phi(\dfrac{14}{13})-\Phi(-\dfrac{10}{13})=0.6393$

6、解： $F_Y(y)=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}=F_X(F^{-1}(y))$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(F^{-1}(y))\cdot\dfrac{1}{F'(x)}=f_X(F^{-1}(y))\cdot\dfrac{1}{F'(F^{-1}(y))}$

习题五　第三章 多维随机变量及其分布

一、　填空题

1、 $P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{1<Y\le 2\}=\int_1^2 e^{-x}dx=e^{-1}-e^{-2}$

2、 $f(x,y)=\begin{cases}4 & -\dfrac{1}{2}<x<0,\ 0<y<2x+1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$P\left\{X<-\frac{1}{8}, Y\le\frac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{x<-\frac{1}{8},y<\frac{1}{2}} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{-\frac{1}{8}}4\,dx=\frac{1}{2}$$

3、$Z\sim N(0,\ 5)$

4、$\because\ 2X_1+3X_2-X_3\sim N(0,36)$

$\therefore\ P(0\le 2X_1+3X_2-X_3\le 6)=\Phi(\frac{6-0}{6})-\Phi(\frac{0-0}{6})=0.3413$

5、$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\le x\le 1, y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$　　　　6、$\alpha=\frac{2}{9}$，$\beta=\frac{1}{9}$

二、单项选择题

1、$P\{X_1X_2=0\}=1\Rightarrow P\{X_1X_2\ne 0\}=0\Rightarrow$

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2-1\}=P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=-1,X_2=-1\}=0$

又 $\because P\{X_1=1\}=\frac{1}{4}$　$P\{X_1=-1\}=\frac{1}{4}$　$P\{X_2=1\}=\frac{1}{4}$　$P\{X_2=-1\}=\frac{1}{4}$

$\therefore P\{X_1=1,X_2=0\}=\frac{1}{4}$　$P\{X_1=-1,X_2=0\}=\frac{1}{4}$

$P\{X_1=0,X_2=1\}=\frac{1}{4}$　$P\{X_1=0,X_2=-1\}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow P\{X_1=0,X_2=0\}=0$

故(X_1,X_2)的联合概率分布率为下表：

X_1 X_2	-1	0	1	X_1
-1	0	0.25	0	0.25
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
X_2	0.25	0.5	0.25	

$P\{X_1=X_2\}=0$

2、$P\{X=3,Y=1\}=P\{X=3\}\cdot P\{Y=1|X=3\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

3、$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=F_X(z)F_Z(z)$

三、计算题

1、解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1\Rightarrow A\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\cdot\int_0^{+\infty}e^{-2y}dy=\frac{A}{4}=1\Rightarrow A=4$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}4e^{-2x-2y}dy & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

同理，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}2e^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

（3）$P\{X<1,\ Y<2\}=\iint_{x<1,y<2}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^2 4e^{-2x-2y}dy=(1-e^{-2})(1-e^{-4})$

（4）$P\{X+Y<1\}=\iint_{x+y<1}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{1-x}4e^{-2x-2y}dy=3e^{-2}-1$

2、解：（1）$A=0.1$

（2）

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

Y	0	1
P	0.5	0.5

(3) $P\{X=0,Y=0\}=0.1\ne P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=0.15$ 故X与Y不独立

（4）

$Z=X+Y$	0	1	2	3
P	0.1	0.5	0.3	0.1

X 3、

Y	0	1	2	3
1	0	$3/8$	$3/8$	0

3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

4、解：（1）

Y	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

（2）$P\{X=0|Y=0\}=\frac{1}{4}$ $\quad P\{X=1|Y=0\}=\frac{2}{4}$ $\quad P\{X=2|Y=0\}=\frac{1}{4}$

5、$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 0<x<2,\ 0<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

方程$k^2+Xk+Y=0$有实根$\Leftrightarrow \Delta=X^2-4Y\geq 0$

$P\{X^2-4Y\geq 0\}=\iint\limits_{x^2-4y\geq 0} f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{4}}\frac{1}{4}dy=\frac{1}{6}$

6、$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ $\qquad f_Y(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{z-1}^{z+1}\frac{1}{2\pi(1+y^2)}dy=\frac{1}{2\pi}(\arctan(z+1)-\arctan(z-1))$

第三章　　复习题

一、填空题

1、$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{5}$，(X,Y)的联合分布律为：

$P\{X=1,Y=-1\}=\frac{1}{15}$，$P\{X=1,Y=-2\}=\frac{4}{15}$，

$P\{X=2,Y=-1\}=\frac{2}{15}$, $P\{X=2,Y=-2\}=\frac{8}{15}$

$Z=X+Y$ 的分布律为: $P\{Z=0\}=\frac{9}{15}$, $P\{Z=-1\}=\frac{4}{15}$, $P\{Z=1\}=\frac{2}{15}$

2、$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 2x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\frac{1}{\pi}dy & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{2x-x^2} & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx & -1\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

3、$P\{Z=X+Y=k\}=\sum_{m=0}^{k}P\{X=m,Y=k-m\}=\sum_{m=0}^{k}P\{X=m\}\cdot P\{Y=k-m\}$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{\lambda_1^{\ m}e^{-\lambda_1}}{m!}\cdot\frac{\lambda_2^{\ k-m}e^{-\lambda_2}}{(k-m)!}=\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}\cdot\frac{\lambda_1^{\ m}\lambda_2^{\ k-m}e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m\lambda_1^{\ m}\lambda_2^{\ k-m}\cdot\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\Rightarrow Z=X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$$

二、单项选择题

1、(X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

故 (X,Y) 服从矩形区域 $\{(x,y)|0<x<1,0<y<1\}$ 上的均匀分布。

而 $Z=X+Y$ 的概率密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z dx & 0<z<1\\ \int_{z-1}^{1}dx & 1<z<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}z & 0<z<1\\ 2-z & 1<z<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$Z=X-Y$ 的概率密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_{-Y}(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^{z+1}dx & -1<z<0\\ \int_z^1 dx & 0<z<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}z+1 & -1<z<0\\ 1-z & 0<z<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$Z=X^2$ 的概率密度函数

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right]=\frac{1}{2\sqrt{y}} & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

故选 A

2、$X+Y\sim N(1,2)$，$(X-Y)\sim N(-1,2)$，故选 B

3、$F(0.5,2)=\int_{-\infty}^{0.5}dx\int_{-\infty}^{2}f(x,y)dy=\int_0^{0.5}dx\int_0^1 4xydy=\frac{1}{4}$，故选$B$

4、$P\{X<0.5,Y<0.6\}=\int_{-\infty}^{0.5}dx\int_{-\infty}^{0.6}f(x,y)dy=\int_0^{0.5}dx\int_0^{0.6}dy=0.3$，故选 B

三、计算题

1、$P(A|B)=P(B|A)\Rightarrow P(A)=P(B)=\frac{1}{4}$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{A\text{发生，}B\text{发生}\}=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{A\text{发生，}B\text{不发生}\}=P(A)P(\overline{B}|A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{A\text{不发生，}B\text{发生}\}=P(B)P(\overline{A}|B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

2、（1）解：由联合概率密度函数，可求边缘密度函数：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^2 xydy & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 xydx & 0<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{y}{2} & 0<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

因为$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 相互独立

（2）解：由联合概率密度函数，可求边缘密度函数：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 8xydy & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}4x(1-x^2) & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 8xydx & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}4y^3 & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

因为$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立

3、解：(1)由联合分布函数得边缘分布函数：

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.5x} & x\geq 0\\ 0 & 其它\end{cases},\quad F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y} & y\geq 0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

可见$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，所以 X、Y 独立

（2）$P(X>0.1,Y>0.1)=F(+\infty,+\infty)-F(0.1,+\infty)-F(+\infty,0.1)+F(0.1,0.1)=e^{-0.1}$

4、解：（1）$\because\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，$\therefore\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}ke^{-3x-4y}dxdy=1$，解得 k= 12

（2）$P(0<X<1,0<Y<2)=\int_0^1dx\int_0^2 f(x,y)dy=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$

5、解：$Z=X+Y$ 的概率密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z e^{-(z-x)}dx & 0<z<1\\ \int_0^1 e^{-(z-x)}dx & z\geq 1\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-z} & 0<z<1\\ e^{1-z}-e^{-z} & z\geq 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

习题六　随机变量的数字特征

一．1、$EY=E(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n})=\frac{E(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{n}=\frac{na}{n}=a$

$$DY=D(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n})=\frac{D(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{n^2}=\frac{nb}{n^2}=\frac{b}{n}$$

2、$\left.\begin{array}{l}EX=np=12.8\\ DX=np(1-p)=2.56\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}p=0.8\\ n=16\end{cases}$

3、$D(2X-Y)=D(2X)+D(-Y)=4DX+DY=5\sigma^2$

4、$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin x + b)dx = a + \frac{\pi b}{2} = 1$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{\pi+4}{8} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(a\sin x + b)dx = a + \frac{\pi^2 b}{8} = \frac{\pi+4}{8}$$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\pi}$

二．单项选择题　　1、C　　2、B

三．计算题

1、解：$EX = -\frac{1}{2}$　　$EX^2 = \frac{7}{6}$　　$DX = \frac{11}{12}$　　$E(|X-1|) = \frac{3}{2}$

2、解：（1）$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 3x^4 dx = \frac{3}{5}$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{3}{5} - (\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{80}$$

（2）$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)dx = 1$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^2(2-x)dx = \frac{7}{6}$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

3．解：

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.3	0.2

$$EX = -1\times0.2 + 0\times0.3 + 1\times0.3 + 2\times0.2 = 0.5$$

$$EX^2 = (-1)^2\times0.2 + 0\times0.3 + 1\times0.3 + 2^2\times0.2 = 1.3$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 1.3 - 0.5^2 = 1.05$$

4．解：$EX = -1\times(0.1+0.2+0.3) + 2\times(0.2+0.1+0.1) = 0.2$

$$E(XY) = (-1)(-1)\times0.1 + (-1)\times1\times0.2 + (-1)\times2\times0.3 + \cdots + 2\times2\times0.1 = -0.5$$

5．解：$EX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x x\cdot 12y^2 dy = \int_0^1 4x^4 dx = 0.8$

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 12y^2dy=\int_0^1 3x^5dx=0.5$$

6．解：$E(X)=10\times0.2+11\times0.3+12\times0.3+13\times0.1+14\times0.1=11.6$

$$E(X^2)=10^2\times0.2+11^2\times0.3+12^2\times0.3+13^2\times0.1+14^2\times0.1=136$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=136-11.6^2=1.44$$

$$E(Y)=E[11000(12-X)]=1000(12-EX)=400$$

$$D(Y)=D[1000(12-X)]=1000^2\times DY=1.44\times10^6$$

7．证明：$E(X-c)^2-DX=E(X^2-2cX+c^2)-(EX^2-E^2X)=(EX)^2-2cEX+c^2$

$=(EX-c)^2\geq0$ 当且仅当 $EX=c$ 时等号成立.

习题七　随机变量的数字特征

一．填空题

1、$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=D(X)+D(Y)$

2、$D(2X-Y)=D(2X)+D(Y)-2E\{[2X-E(2X)][Y-EY]\}=4\times3+6=18$

二．单项选择题

1、$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\Leftrightarrow E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=0\Leftrightarrow\rho=0$ 故选 A

2、$\operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$ 故选 A

3、$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{5}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\neq0\Rightarrow\rho\neq0$ 故选 B

三．计算题

1、解：（1）$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{\text{抽到三等品}\}=0.1$

$$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{\text{抽到一等品}\}=0.8$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{\text{抽到二等品}\}=0.1$$

X_2 \ X_1	0	1	X_2

0	0.1	0.8	0.9
1	0.1	0	0.1
X_1	0.2	0.8	

（2）$EX_1 = 0.8$，$EX_2 = 0.1$　　$EX_1^2 = 0.8, DX_1 = EX_1^2 - (EX_1)^2 = 0.16, DX_2 = 0.09$

$EX_1X_2 = 0, \operatorname{cov}(X_1, X_2) = EX_1X_2 - EX_1EX_2 = -0.08$

所以，$\rho = \dfrac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}} = -\dfrac{2}{3}$

2．解：$EX = EY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^1 x(2-x-y)dy = \dfrac{5}{12}$

$$EXY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^1 xy(2-x-y)dy = \frac{1}{6}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{144}$$

$$DX = E(X^2) - E^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy - (\frac{5}{12})^2 = \int_0^1 dx\int_0^1 x^2(2-x-y)dy - \frac{25}{144} = \frac{11}{144}$$

同理，$D(Y) = \dfrac{11}{144}$

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{-\frac{1}{144}}{\frac{11}{144}} = -\frac{1}{11}$$

3．解：设X_i表示第i个骰子掷出的点数，则 6 个骰子点数之和 $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$

又X_i的分布律为：$P\{X_i = k\} = \dfrac{1}{6}$，$k = 1$，2，3，4，5，6

故 $E(X_i) = 1\times\dfrac{1}{6} + 2\times\dfrac{1}{6} + 3\times\dfrac{1}{6} + 4\times\dfrac{1}{6} + 5\times\dfrac{1}{6} + 6\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{2}$

$$E(X_i^2) = 1\times\frac{1}{6} + 2^2\times\frac{1}{6} + 3^2\times\frac{1}{6} + 4^2\times\frac{1}{6} + 5^2\times\frac{1}{6} + 6^2\times\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$DX_i = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$EX = E(\sum_{i=1}^{6} X_i) = 21 \qquad DX = D(\sum_{i=1}^{6} X_i) = \frac{36}{2}$$

$$P\{15 < X < 27\} = P\{|X-21| < 6\} \ge 1 - \frac{D(X)}{6^2} = \frac{37}{72}$$

4．解：

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = \rho_{XY} \cdot \sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY} = -0.5 \times 1 \times \sqrt{4} = -1$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = -2 + 2 = 0$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y) = 1 + 4 + 2 \times (-1) = 3$$

$$P\{|X+Y| \ge 6\} \le \frac{D(X+Y)}{6^2} = \frac{1}{12}$$

第四章 复习题

一 • 填空题

1　2,0 或-2 2　1/36　1/2

2　-0.2　2.8　13.4　24.84

3　97

4　5

5　18.4

6　25.6

7　0.0228

二　选择题

A　B　D　D　A

三

1

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 300\mathrm{X}e^{-\frac{1}{4}} - 200$$

2　E（2X)=2

$$\mathrm{E}(e^{-2X}) = \frac{1}{3}$$

3

$$\mathrm{D}(\mathrm{X}_1) = 4(a^2+b^2) + 8abe$$

$$\mathrm{D}(\mathrm{X}_2) = 4(c^2+d^2) + 8cde$$

$$\mathrm{cov}(\mathrm{X}_1\ \mathrm{X}_2) = 4(ac+bd) + 4e(ad+bc)$$

4

E（X）=$\frac{2}{3}$

E（Y）=0

E（XY）=0

cov(X Y) = E（XY）−E（X）E（Y）=0

$\rho_{XY} = 0$

5　　　　　8/9

6　　　0

习题八　样本及抽样分布

一、1、$$P\{\overline{X} > 70\} = 1 - \Phi\left\{\frac{70-72}{10/\sqrt{n}}\right\} = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{5}) \geq 0.9 = \Phi(1.28) \Rightarrow n \geq 40.96 \Rightarrow n \geq 42$$

2、$$\sqrt{a}(X_1 - 2X_2) \sim N(0,20a) = N(0,1) \Rightarrow a = \frac{1}{20}$$

$$\sqrt{b}(3X_3 - 4X_4) \sim N(0,100b) = N(0,1) \Rightarrow b = \frac{1}{100} \qquad n = 2$$

3、$$X_i \sim N(0,0.25) \Rightarrow \frac{X_i - 0}{0.5} = 2X_i \sim N(0,1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{7} 4{X_i}^2 \sim \chi^2(7)$$

$$\Rightarrow P\left\{\sum_{i=1}^{7} {X_i}^2 > 4\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{7} 4{X_i}^2 > 16\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{7} 4{X_i}^2 > \chi^2{}_{0.025}(7)\right\} = 0.025$$

4、$$k(X_1 + X_2) \sim N(0,2k^2) = N(0,1) \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad {X_3}^2 + {X_4}^2 + {X_5}^2 \sim \chi^2(3)$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)}{\sqrt{{X_3}^2 + {X_4}^2 + {X_5}^2 / 3}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}(X_1 + X_2)}{\sqrt{{X_3}^2 + {X_4}^2 + {X_5}^2}} \sim T(3) \Rightarrow c = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

二、1、由于统计量不能含未知参数σ，故选 C

2、$$T = \frac{X - \mu}{\sqrt{Y}}\sqrt{n} = \frac{X - \mu}{\sqrt{Y/n}} \sim T(n)$$，故选 B

3、P—143 页定理二可知，$\overline{X}$ 与 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 相互独立，故选 D

4、P—143 页定理二可知，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且$\sigma=1$，故选 D

5、$\sum_{i=1}^{4}X_i\sim N(4,4)\Rightarrow\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{4}X_i-4)\sim N(0,1)\Rightarrow\frac{1}{4}(\sum_{i=1}^{4}X_i-4)^2\sim\chi^2(1)$

$\Rightarrow a=\frac{1}{4},n=1$，故选 A

三、1、$\because\ \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}(\overline{X}-12)\sim N(0,1)$

$\therefore P\{\overline{X}-12>1\}=P\left\{\frac{\sqrt{5}}{2}(\overline{X}-12)>\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}=1-\Phi(\frac{\sqrt{5}}{2})=1-\Phi(\frac{2.236}{2})=0.1314$

2、（1）$\because\ \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i-0}{0.5/\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}\sum_{i=1}^{10}X_i\sim N(0,1)$

$\therefore\ P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i\geq 4\right\}=P\left\{\frac{\sqrt{10}}{5}\sum_{i=1}^{10}X_i\geq\frac{4}{5}\sqrt{10}\right\}=1-\Phi(\frac{4}{5}\sqrt{10})=0.0057$

（2）$\because\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2}{0.25}\sim\chi^2(9)$

$\therefore\ P\left\{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\geq 2.85\right\}=P\left\{\frac{1}{0.5^2}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\geq 11.4\right\}$=0.25

3、$\because\ \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-1000}{100/\sqrt{9}}=\frac{3}{100}(\overline{X}-1000)\sim t(8)$

$\therefore\ P\{\overline{X}>1062\}=P\left\{\frac{3}{100}(\overline{X}-1000)>\frac{3\times 62}{100}\right\}=P\left\{\frac{3}{100}(\overline{X}-1000)>1.86\right\}$

$$=P\left\{\frac{3}{100}(\overline{X}-1000)>t_{0.05}(8)\right\}=0.05$$

习 题 九　　　参数估计

一、1、$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$　2、$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$　3、$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

二、1、$D(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{3}X_3+\frac{1}{6}X_4)=\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{36}\sigma^2+\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{36}\sigma^2=\frac{10}{36}\sigma^2$

$$D(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{12}X_3+\frac{1}{12}X_4)=\frac{1}{4}\sigma^2+\frac{1}{36}\sigma^2+\frac{1}{144}\sigma^2+\frac{1}{144}\sigma^2=\frac{7}{24}\sigma^2$$

$$D(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{9}X_3+\frac{7}{18}X_4)=\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{36}\sigma^2+\frac{1}{81}\sigma^2+\frac{49}{324}\sigma^2=\frac{115}{324}\sigma^2$$

$D(\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3+\frac{1}{4}X_4)=\frac{1}{16}\sigma^2+\frac{1}{16}\sigma^2+\frac{1}{16}\sigma^2+\frac{1}{16}\sigma^2=\frac{1}{4}\sigma^2$ 最 小

故选 D

2、$E(\hat{\lambda})=E(a\overline{X}+(2-3a)S^2)=aE\overline{X}+(2-3a)ES^2=a\lambda+(2-3a)\lambda=\lambda\Rightarrow\lambda=0.5$

故选 C

3、$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是σ^2的无偏估计，所以 A,B 不对，

又$E(X^2)=D(X)+E(X)^2=\sigma^2+0$，故选 C

4、当σ^2已知时，μ的置信区间为$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$，长度$L=2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$，

$1-\alpha$缩小时，α增大，$z_{\alpha/2}$缩小，故选 A

5、当σ^2未知时，μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$(\overline{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2})$，长

度$L=2\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}$，故选 D

三、1、（1）似然函数$L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{n\overline{x}}{\theta}}$

$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{n\overline{x}}{\theta}$　　$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{n\overline{x}}{\theta^2}=0\Rightarrow\hat{\theta}=\overline{x}$

即θ的最大似然估计值$\hat{\theta}=\overline{x}$

（2）由于总体X服从参数为θ的指数分布，$EX=\theta$，$E\hat{\theta}=E(\overline{X})=\theta$，

故$\hat{\theta}$是θ的无偏估计

2、（1）$\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=(\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$

令$\mu_1=A_1=\overline{X}\Rightarrow\frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$　　故 θ 的 矩 估 计 量 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$，

（2）似然函数$L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}$

$=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta}$　　$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\ln\prod_{i=1}^{n}x_i$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\ln\prod_{i=1}^{n}x_i=0\Rightarrow\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

即θ的最大似然估计量$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

3、似然函数$L(\theta)=\theta^4\times(2\theta(1-\theta))^3\times(1-\theta)^2=8\theta^7(1-\theta)^5$

$$\ln L(\theta)=\ln 8+7\ln\theta-5\ln(1-\theta)$$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{7}{\theta}+\frac{5}{1-\theta}=0\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{7}{2}$　　即θ的最大似然估计值$\hat{\theta}=\frac{7}{2}$

4、（1）当总体方差未知时，μ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为$\left(\overline{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$，

由已知$\bar{x}=8.34\%$，$s=0.03\%$，$n=4$，$\alpha=0.05$，$t_{0.05/2}(3)=3.1824$，

故μ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为（8.29%，8.39%）

（2）σ^2 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

由已知$\bar{x}=8.34\%$，$s=0.03\%$，$n=4$，$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.025}(3)=9.348$，$\chi^2_{0.975}(3)=0.215$

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(0.000289\%^2, 0.0125\%^2\right)$

5、当总体方差未知时，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

由已知 $\bar{x} = \frac{1}{4}(1550+1540+1530+1565) = 1545^0$，

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{3}(5^2+5^2+15^2+15^2) = \frac{500}{3}$$

$n=4$，$\alpha=0.05$，$t_{0.05/2}(3)=3.1824$

故 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为（1523.131，1566.869）

习 题 十

一、1、$\frac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)} \sim t(n-1)$

2、$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \le \mathrm{t}_{\alpha}^{\,n-1}$

3、$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，$t-$分布，$n-1$

二、B B A

三 计算题

1、假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 500$，$H_1: \mu \ne \mu_0$，

选检验量 $\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ~N(0,1);

作拒绝域 $\mathrm{P}\left\{ \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \ge \mathrm{K} \right\} = \alpha = 0.05$；

取 $\mathrm{K}=\mathrm{Z}_{0.025}=1.96$ 得拒绝域 $\left\{ \left| \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \ge 1.96 \right\}$

代入 $\overline{X}=510$ 得 $\frac{\overline{X}-500}{10/\sqrt{9}}=3>1.96$ 落在拒绝域里 拒绝 H_0

2、（1）假设 $H_0: \mu = 70$， $H_1: \mu \neq 70$，

选检验量 $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

作拒绝域 $P\left\{ \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq K \right\} = \alpha = 0.05$；

取 $K = t_{0.025}{}^{35} = 2.0301$ 得拒绝域 $\left\{ \left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq 2.0301 \right\}$

代入 $\overline{X} = 66.5$ 得 $\dfrac{\overline{X} - 70}{15/\sqrt{36}} = 1.6 > 2.0301$ 接受 H_0

（2）假设 $H_0: \sigma^2 = 16^2$， $H_1: \sigma^2 \neq 16^2$，

选检验量 $\dfrac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

作拒绝域 $P\left\{ \dfrac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \geq K_1 \right\} + P\left\{ \dfrac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \leq K_2 \right\} = \alpha = 0.05$；

取 $K_1 = \chi^2{}_{0.025}{}^{35} = 53.203$ $K_2 = \chi^2{}_{0.975}{}^{35} = 20.569$

得拒绝域 $\left\{ \dfrac{35S^2}{16^2} \leq 20.569 \right\} \bigcup \left\{ \dfrac{35S^2}{16^2} \geq 53.203 \right\}$

代入 $S^2 = 15^2$ 得 $\dfrac{35S^2}{16^2} = 30.7617$ 接受 H_0

3、选检验量 $\dfrac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

作拒绝域 $P\left\{ \dfrac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \geq K_1 \right\} + P\left\{ \dfrac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \leq K_2 \right\} = \alpha = 0.05$；

取 $K_1 = \chi^2{}_{0.025} 9 = 19.022$ $K_2 = \chi^2{}_{0.975}{}^{9} = 2.7$

得拒绝域 $\left\{ \dfrac{9S^2}{8^2} \leq 2.7 \right\} \bigcup \left\{ \dfrac{9S^2}{8^2} \geq 19.022 \right\}$

代入 $S^2=68.16$ 得 $\frac{9S^2}{8^2}=9.585$ 接受 H_0

4、略

统计部分复习题

一、1、

$$\left[\frac{\sigma^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{\sigma^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

2、$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，接受

二、BADA

三、1、 $n\le 98.2$

2、$n-1,2(n-1),2(n-1)$

3、(1)拒绝；(2)接受

4、(1)拒绝；(2)接受