> ✍️:Roy
> ❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️
> 💊⭐

一、信号分解为正交函数

1、信号正交

【定义】在 (t_1,t_2)区间的两个函数$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$，若满足$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_1(t)\varphi_2(t)dt=0$（两个函数的内积为0）

则称 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 在 (t_1,t_2) 区间内正交。

2、正交函数集

若 n 个函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 构成一个函数集，当这些函数在区间 (t_1,t_2) 内满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt=\begin{cases}0, & i\neq j\\ K_i\neq 0 & i=j\end{cases}$$

若为复函数集，则$\varphi_j^*(t)$为$\varphi_j(t)$的共轭复函数。
则称此函数集为在 (t_1,t_2) 区间上的正交函数集。

3、完备正交函数集

如果在正交函数集 $\{\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)\}$ 之外，不存在任何函数 $\varphi(t)$ 满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\varphi_i(t)dt=0,(i=1,2,\cdots,n)$$

则称此函数集为完备正交函数集。

3.1典型完备正交函数集

两组典型的在区间$(t_0,t_0+T)(T=2\pi/\Omega)$ 上的完备正交函数集

（1）三角函数集 $\{1,\cos(n\Omega t),\cdots,\sin(n\Omega t),\cdots,n=1,2,...\}$

（2）虚指数函数集 $\{e^{jn\Omega t},n=0,\pm1,\pm2,...\}$

4、信号的正交分解y与最小均方差

4.1正交函数的线性组合

设 n 个函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t)$ 在区间 (t_1,t_2) 构成一个正交函数空间。将任意函数 $f(t)$ 用这 n 个正交函数的线性组合来近似表示，可表示为：

$$f(t)\approx C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+...+C_i\varphi_i(t)+...+C_n\varphi_n(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)$$

说明：存在误差，但是当 $n\to\infty$ 时（完备正交函数集），误差为零。

二、傅里叶级数

$Dirichlet$条件
在一个周期内：
（1）如果间断点存在，则间断点的数目应是有限个
（2）极大值和极小值的数目应是有限个
（3）信号满足绝对可积

1、三角形式

直流分量 + $n(n \to \infty)$个正交函数的线性组合。
说明：这里的正交函数属于完备正交函数集（三角函数集）

周期信号 $f(t)$ 其周期为 T 角频率 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ 当满足 $Dirichlet$ 条件时，它可以分解成如下三角级数：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

a_0, a_n, b_n 称为傅里叶系数,分别代表了直流分量、余弦分量和正弦分量的震荡幅度

$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$

$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t)dt$

$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t)dt$

同频率项合成：

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

辅助角公式：$asinx + bcosx = \sqrt{a^2 + b^2} cos(x + \varphi_n)$

式中：$A_0 = a_0, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$

$a_n = A_n \cos\varphi_n, b_n = -A_n \sin\varphi_n, n = 1, 2, ...$

$\frac{A_0}{2}$ ：直流分量；

$A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$：基波或一次谐波

$A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$：$n$次谐波

1.1、波形的对称性与谐波特性

对称条件	展开式中所包含成分	a_n	b_n
偶函数	直流项+余弦项	$\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t)dt$	0
奇函数	正弦项	0	$\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t)dt$
偶谐函数$f(t) = f(t \pm \frac{T}{2})$	只含偶次谐波	$\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t)dt$	$\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t)dt$
奇谐函数$f(t) = -f(t \pm \frac{T}{2})$	只含奇次谐波	$\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t)dt$	$\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t)dt$

2、指数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}$$

复傅里叶系数$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

3、函数对称性与傅立叶系数的关系

3.1、$f(t)$为偶函数

$\begin{cases} a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} consn\omega_0 tdt \quad n=0,1,2,\cdots \\ b_n = 0 \end{cases}$

进而有：$\begin{cases} A_n = |a_n| \quad n=0,1,2,\cdots \\ \varphi_0 = 0 \end{cases}$

则傅立叶级数可化简为：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n consn\omega_0 t$$

即，偶函数的傅立叶级数只含余弦项和直流项。

3.2、$f(t)$为奇函数

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sinn\omega_0 t$$

即，奇函数的傅立叶级数中只含正弦。

3.3、$f(t)$为半波镜像信号

如果函数$f(t)$的前半周期波形移动$\frac{T}{2}$后，与后半周期波形成轴对称，即满足

$$f(t) = -f(t \pm \frac{T}{2})$$

此时傅立叶级数中只含奇次谐波，不含偶次谐波，故又称为奇谐函数。即有

$$a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = b_2 = b_4 = b_6 = \cdots$$

3.4、$f(t)$为半波重叠信号

此时只含有偶次谐波，不含有奇次谐波,故称为偶谐函数。即：

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = b_1 = b_2 = \cdots$$