一、填空题

1. 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为______________; （答案填 $y=x-1$）

解析：设曲线 $y=\ln x$ 上的切点为 $(x_0,\ln x_0)$，则切线方程为 $y-\ln x_0=(\ln x)'\big|_{x=x_0}(x-x_0)$；

因为切线斜率为 $(\ln x)'\big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}$；又切线与直线 $x+y=1$ 垂直，故 $(-1)\times\dfrac{1}{x_0}=-1$，于是可

得切线方程为 $y-\ln 1=1\cdot(x-1)$，即 $y=x-1$.

2. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0, \\ 0, \qquad\qquad x=0 \end{cases}$，则 $f'(0)=$______________;（答案填 $\dfrac{\pi}{2}$）

解析：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}$.

3. 已知 $f'(x)=\dfrac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$，且 $f(-1)=1$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 的导数 $\varphi'(1)=$

______________(答案填-1)；

解析：由 $y=f(x)$ 及 $f(-1)=1$ 知， $y=1$ 时 $x=-1$；于是根据反函数求导公式

$\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ 得 $\varphi'(1)=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{-1}=-1$（这里 $f'(-1)=\dfrac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}\Big|_{x=-1}=-1$）.

4. 若 $f(\dfrac{1}{x})=e^{x+\frac{1}{x}}$，则 $f'(x)=$______________(答案填 $e^{x+\frac{1}{x}}(1-\dfrac{1}{x^2})$)。

解析：由 $f(\dfrac{1}{x})=e^{x+\frac{1}{x}}$ 知，$f(t)=e^{t+\frac{1}{t}}$，得 $f'(x)=(e^{x+\frac{1}{x}})'=e^{x+\frac{1}{x}}(x+\dfrac{1}{x})'=e^{x+\frac{1}{x}}(1-\dfrac{1}{x^2})$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 2x}{x})^{1+x}=$______________(答案填 2)；$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{2x+1})^{x^2}=$______________(答案填 0).

解析：(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$；故根据幂指函数的极限结论，得

$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 2x}{x})^{1+x}=2^1=2$；

(2) 法一 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}<1$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$， 故 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{2x+1})^{x^2}=0$；

法二 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{2x+1})^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\frac{x+1}{2x+1}}=0$.

二、选择题

1. 设函数 $y(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 是正整数，则 $y'(0)=$（　　）

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$;　B. $(-1)^{n}(n-1)!$;　C. $(-1)^{n-1}n!$;　D. $(-1)^{n}n!$

选 A.

解析: 注意到 $y(0)=0$，按函数在一点的导数定义知,

$$y'(0)=\lim_{x\to0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to0}(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列结论错误的是（　　）

A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$；

B. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$；

C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在;

D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

选 D.

解析: 由函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续知， $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$；显然, $\lim\limits_{x\to0}x=0$；

A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $0=\lim\limits_{x\to0}x\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}f(x)$，于是得 $f(0)=0$；

B. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $0=\lim\limits_{x\to0}x\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)+f(-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f(-x)]$. 又 $\lim\limits_{x\to0}f(-x)\overset{z=-x}{=\!=\!=}\lim\limits_{z\to0}f(z)=f(0)$，于是得到

$0=\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f(-x)]=\lim\limits_{x\to0}f(x)+\lim\limits_{x\to0}f(-x)=2f(0)$，得 $f(0)=0$；

C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则由选项 A 结论知， $f(0)=0$，　于是得到

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在。

三、计算（写出计算过程）

1. 计算 $\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$。

解析：　法一　注意到 $\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$ 是 1^∞ 型极限，于是

$$\lim_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}(x+2^x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{2^x-1}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{2^x-1}{x})}=e^{(1+\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x})}=e^{1+\ln2}=e^{\ln2e}=2e；$$

法二

$$\lim_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(x+2^x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x+2^x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}(x+2^x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{2^x-1}{x})}=e^{(1+\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x})}$$

$=e^{1+\ln2}=e^{\ln2e}=2e$；这里用到了 $x+2^x-1\to0$，$\ln(1+x+2^x-1)\sim(x+2^x-1)$ 及替换定理和极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\ln2$ 。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\le1,\\ax+b,x>1.\end{cases}$ 在点 $x=1$ 可导，求常数 a,b 的值.

解 由函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 可导，得 $f'_-(1)=f'_+(1)$，而

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{ax+b-1}{x-1}$，故得

$$\lim_{x\to1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=2 \qquad (1)$$

由函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 可导，得函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 连续，从而 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，而

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b)=a+b$，故有

$$a+b=1 \qquad (2)$$

(2)代入(1)得 $2=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}a=a$，$b=-1$.

3. 设 $y=\sqrt{\sin e^{x^2}}$，求 y'.

解析：函数 $y=\sqrt{\sin e^{x^2}}$ 可看成由外函数 $y=\sqrt{u}$ 和内函数 $u=\sin v,v=e^w,w=x^2$ 复合得到(内函数和外函数要尽量写成基本初等函数，因为基本初等函数有已知的求导公式)，于是由复合函数求导公式得

$$y'=(\sqrt{u})'(\sin v)'(e^w)'(x^2)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\cos v\cdot e^w\cdot2x=\frac{xe^{x^2}\cos e^{x^2}}{\sqrt{\sin e^{x^2}}};$$

另一种做法

如果熟悉了复合函数求导公式，可以不必写出中间变量，可直接求解如下

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\sin e^{x^2}}}(\sin e^{x^2})'=\frac{1}{2\sqrt{\sin e^{x^2}}}(\cos e^{x^2})(e^{x^2})'=\frac{1}{2\sqrt{\sin e^{x^2}}}(\cos e^{x^2})e^{x^2}(x^2)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\sin e^{x^2}}}(\cos e^{x^2})e^{x^2}2x=\frac{xe^{x^2}\cos e^{x^2}}{\sqrt{\sin e^{x^2}}}.$$