1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{5}{x})^x=$________________; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=$________________.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{5}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{5}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{5}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{5}{x}}=e^5$；这里用到

$\varphi(x)\to 0,\ \ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2})^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{2}$，或

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$，这里用到$\varphi(x)\to 0,\ \sqrt[n]{1+\varphi(x)}-1\sim\frac{1}{n}\varphi(x)$。

2. 设函数 $f(x)=(1-x)^{\frac{1}{x}}$，则定义 $f(0)=$______________时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

解 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续时，

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1-x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(-x)}=e^{-1}$。

3. 设 $f(x)$ 可导，$y=f(\sin^2 x)$，则 $\frac{dy}{dx}=$________________。

解 $\frac{dy}{dx}=f'(\sin^2 x)\cdot(\sin^2 x)'=2\sin x\cos xf'(\sin^2 x)=\sin 2xf'(\sin^2 x)$。

4. 已知 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{2h}=$_______________。

解 由函数在一点的导数定义，得 $2=f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$，这里 Δx 是取实数值的变量。当 $\Delta x=-h$ 时，得 $2=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}=(-2)\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{2h}$，故 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{2h}=-1$。

下述做法： $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-f'(1-h)}{2}=\frac{1}{2}(-f'(1))=-1$，结果正确，但过程错误，因 $f'(x)$ 在 $x=1$ 附近取函数值已知条件没有，另 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处连续已知条件也没有。

5. 当$x \to 0, \sqrt[3]{1+Ax}-1$与$\sin x$是等价无穷小时，常数$A=$____________。

解 由$x \to 0, \sqrt[3]{1+Ax}-1$与$\sin x$是等价无穷小时，故$1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+Ax}-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}Ax}{x}=\dfrac{1}{3}A$，故$A=3$。

6. $f(x)=\cos x$按$x-\pi$的幂展开的6阶泰勒公式中，$(x-\pi)^3$项的系数是______________。

解 因为$f(x)$按$x-x_0$的幂展开的n阶泰勒公式中$(x-x_0)^m,(m<n)$项的系数是$\dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$，故所求$(x-\pi)^3$项的系数是$\dfrac{\cos^{(3)}(\pi)}{3!}$，由于

$(\cos x)'=-\sin x,(\cos x)''=-\cos x,\ (\cos x)'''=\sin x$，故所求系数为$\dfrac{\sin\pi}{3!}=0$。

7. 曲线$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$的水平渐近线方程为____________，垂直渐近线方程为____________。

解 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x}=1$，故曲线$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$的水平渐近线方程为$y=1$；

因为$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{1+x}=\infty$，故曲线$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$的垂直（铅直）渐近线方程为$x=-1$；

8. 方程$e^y+xy-e=0$确定的隐函数$y=y(x)$表示的曲线在点$(0,1)$处的切线方程为______________，法线方程为______________。

解 在方程$e^y+xy-e=0$两边对x求导，得$e^y\cdot y'+y+xy'=0$，得$y'=\dfrac{-y}{e^y+x}$。于是隐函数$y=y(x)$表示的曲线在点$(0,1)$处的切线斜率为$y'\big|_{x=0}=\dfrac{-y}{e^y+x}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=\dfrac{-1}{e}$，故所求切线方程为$y-1=\dfrac{-1}{e}(x-0)$，法线方程为$y-1=e(x-0)$。

9. 参数方程$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2} \\ y=1-t \end{cases}$确定的函数$y=y(x)$的二阶导数值$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$____________。

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-1}{t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{d}{dt}(\frac{-1}{t})}{t}=\dfrac{\frac{1}{t^2}}{t}=\dfrac{1}{t^3}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=1$。

10. 设xe^x-e^x是$f(x)$的一个原函数，则$\int f'(x)dx=$__________，$\int f(5x)dx=$_______。

解 由xe^x-e^x是$f(x)$的一个原函数，则$f(x)=(xe^x-e^x)'=e^x+xe^x-e^x=xe^x$，

$\int f(x)dx=xe^x-e^x+C$，于是$\int f'(x)dx=f(x)+C=xe^x+C$，

$\int f(5x)dx=\dfrac{1}{5}\int f(5x)d5x=\dfrac{1}{5}(5xe^{5x}-e^{5x}+C)$。

11. 函数xe^x的积分曲线族中过点$(0,-1)$的积分曲线方程为____________。

解 函数xe^x的积分曲线族方程为$y=\int xe^xdx=\int xde^x=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C$，代入$x=0,y=-1$得$C=0$，故所求积分曲线方程为$y=xe^x-e^x$。

12. 求$\int\dfrac{1}{(3+2x)^2}dx$，$\int\dfrac{x}{(x+1)^2}dx$。

解 由常用凑微方法$\int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax)=\dfrac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$，得

$$\int\frac{1}{(3+2x)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(3+2x)^2}d(3+2x)\underset{u=3+2x}{=}\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2}du=\frac{-1}{2u}+C=\frac{-1}{2(3+2x)}+C.$$

由常用凑微方法$\int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax)=\dfrac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$，得

$$\int\frac{x}{(x+1)^2}dx=\int\frac{x}{(x+1)^2}d(x+1)\underset{u=x+1}{=}\int\frac{u-1}{u^2}du=\int(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2})du=\ln|u|+\frac{1}{u}+C$$

$$=\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

13. 设曲线 $y^3 = x$ 和 $y = x^3$ 在第一象限围成的平面图形为 G，则 G 的面积 $S =$____________，G 绕 x 轴旋转一周形成的旋转体体积 $V =$____________。

解 G 的面积 $S = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3)dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$；

G 绕 x 轴旋转一周形成的旋转体体积

$$V = \pi\int_0^1 [(\sqrt[3]{x})^2 - (x^3)^2]dx = \pi[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^1 - \frac{x^7}{7}\Big|_0^1] = \pi(\frac{3}{5} - \frac{1}{7}) = \frac{21-5}{35}\pi = \frac{16}{35}\pi\text{。}$$

14. 曲线段 $y = \int_{-1}^{x} \sqrt{t}dt$，$0 \le x \le 1$ 的弧长 $s =$____________。

解 弧长 $s = \int_0^1 \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,d(x+1)$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)\text{。}$$