练习册重积分一章部分习题详解

（注意二重积分的积分区域为圆域或圆域的一部分和三重积分的积分区域在 xoy 面的投影区域为圆域或圆域的一部分时，一般都要用极坐标变换，即必须用极坐标变换将这个圆域或圆域的一部分表示出来，这是考试必考的）

二重积分计算重点掌握积分区域是圆域或圆域的一部分时利用极坐标计算的情况。

三重积分计算期末考试重点掌握积分区域是圆锥体区域，即积分区域是由圆锥面和平面围成的立体区域 和椭圆抛物面和平面围成的立体区域两种。

P43 二 2 B

解析：在区域 D 内，因$0<\dfrac{1}{4}\le x+y\le 1<\dfrac{\pi}{2}$，故$\ln^3(x+y)\le 0<\sin^3(x+y)<(x+y)^3$.

根据重积分性质知，

$$I_1=\iint_D \ln^3(x+y)dxdy\le 0<I_3=\iint_D \sin^3(x+y)dxdy<I_2=\iint_D (x+y)^3dxdy.$$

P43 三

解析：在区域 D 内，因$0\le \sin^2 x\sin^2 y\le 1$，区域 D 的面积$S_D=\pi^2$，根据重积分性质知，

$$0\cdot S_D\le I=\iint_D \sin^2 x\sin^2 ydxdy\le 1\cdot S_D，即\ 0\le I\le \pi^2.$$

P45 一 1

解析：将 D 看成 Y 型区域，则$D:\begin{matrix}0\le y\le 1,\\ -\dfrac{\sqrt{y}}{2}\le x\le \sqrt{y},\end{matrix}$ 可算得

$$\iint_D (2x+y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{-\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}(2x+y)dx=\frac{23}{40}；$$

将 D 看成 X 型区域，则$D=D_1\cup D_2, D_1:\begin{matrix}0\le y\le \dfrac{1}{2},\\ x^2\le y\le 4x^2\end{matrix}$ $D_2:\begin{matrix}\dfrac{1}{2}\le y\le 1,\\ x^2\le y\le 1,\end{matrix}$ 也可算得

$$\iint_D (2x+y)dxdy=\iint_{D_1}(2x+y)dxdy+\iint_{D_2}(x-2y)dxdy=\frac{23}{40}.$$

P45 3

法一 将 D 看成 X 型区域，则$D:\begin{matrix}-1\le x\le 2,\\ x^2\le y\le x+2,\end{matrix}$

$$\iint_D (x-2y)dxdy=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}(x-2y)dy=\int_{-1}^{2}(x^4-x^3-2x-4)dx=-\frac{243}{20}.$$

法二 将 D 看成 Y 型区域，则 $D=D_1\cup D_2, D_1:\begin{matrix}0\le y\le 1,\\ -\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y},\end{matrix}\ D_2:\begin{matrix}1\le y\le 4,\\ y-2\le x\le\sqrt{y},\end{matrix}$ 也可算得

$$\iint_D (x-2y)dxdy=\iint_{D_1}(x-2y)dxdy+\iint_{D_2}(x-2y)dxdy=-\frac{243}{20}.$$

P46. 4

积分区域 $D:\begin{matrix}0\le y\le 2,\\ 0\le x\le y,\end{matrix}$（Y 型区域），或 $D:\begin{matrix}0\le x\le 2,\\ x\le y\le 2,\end{matrix}$（X 型区域），可算得

$\iint_D y\sin\frac{x}{y}dxdy=\int_0^2 ydy\int_0^y\sin\frac{x}{y}dx=\frac{8}{3}(1-\cos1).$ 同样也可算得

$$\iint_D y\sin\frac{x}{y}dxdy=\int_0^2 dx\int_x^2 y\sin\frac{x}{y}dy=\frac{8}{3}(1-\cos1).$$

P46 二

解析：由已知累次积分知积分区域 $D:\begin{matrix}0\le y\le 2,\\ y\le x\le 2,\end{matrix}$（Y 型区域），看成 X 型区域即

$D:\begin{matrix}0\le x\le 2,\\ 0\le y\le x,\end{matrix}$，交换积分顺序得 $\int_0^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx=\int_0^2 dx\int_0^x f(x,y)dy.$

（交换积分次序去年期末考试最后一题证明 6 分）

P47 一 **2**

解析：在极坐标变换下，积分区域 $D:\begin{matrix}-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\\ 0\le\rho\le R\cos\theta,\end{matrix}$，可算得

$$\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=\frac{2R^3}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}).$$

P48 二 **2**

解析：被积函数和积分区域中都含 x^2+y^2，需用极坐标变换计算二重积分，积分区域 D 用极坐标系下表示为 $D:0\le\theta\le 2\pi$， $a\le\rho\le b$，于是原二重积分

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b\rho\cdot\rho d\rho=\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3).$$

P48 四

解析：按二重积分的几何意义，所求体积即曲顶方程在圆周区域上的二重积分，按极坐标变换计算得

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \rho^2 \rho d\rho = \frac{3\pi a^4}{32}.$$

P49 二 2

解析：将 $z = x^2 + 2y^2, z = 2 - x^2$ 消去 z 得曲面围成的闭区域（三重积分区域）在 xoy 面上投影曲线为 xoy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 投影区域（二重积分区域）为 $x^2 + y^2 \le 1$, 用垂直于 xoy 面的直线去穿三重积分区域，第一次遇到的曲面为 $z = x^2 + 2y^2$, 第二次遇到的曲面为 $z = 2 - x^2$, 因此在直角坐标系下三重积分区域可表示为 $\begin{matrix} -1 \le x \le 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \\ x^2 + 2y^2 \le z \le 2 - x^2 \end{matrix}$ 于是三重积分转换为三次积分为

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)dz.$$

P49 三 1

解析：首先，三重积分区域在 xoy 面的投影区域 $D: \begin{matrix} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1-x, \end{matrix}$ 用垂直于 xoy 面的直线去穿三重积分区域，第一次遇到的曲面为 xoy 面 z=0, 第二次遇到的曲面为平面 z=1-x-y, 故积分变量 z 的范围为 $0 \le z \le 1-x-y$, 故三重积分

$$\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}. = \frac{-5}{16}$$ （重点是积分限必须写正确）

P49 三 2

解析：首先，三重积分区域在 xoy 面的投影区域是一个正方形区域 $D: \begin{matrix} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \end{matrix}$ 用垂直于 xoy 面的直线去穿三重积分区域 Ω，第一次遇到的曲面为 xoy 面 z=0, 第二次遇到的曲面为平面 $z = x^2 + y^2$, 故积分变量 z 的范围为 $0 \le z \le x^2 + y^2$, 故三重积分

$\iiint_\Omega zdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} zdz = \frac{4}{15}$（重点是积分限必须写正确）

P50 2

解析：三重积分区域Ω是一个底面为正方形区域$D: \begin{matrix} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \end{matrix}$，曲顶方程为$z = x^2 + y^2$的曲顶柱体区域，用垂直于 xoy 面的直线去穿三重积分区域，第一次遇到的曲面为 xoy 面 z=0, 第二次遇到的曲面为$z = x^2 + y^2$, 故积分变量 z 的范围为$0 \le z \le x^2 + y^2$, 故三重积分

$\iiint_\Omega zdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} zdz. = \frac{14}{45}$。（重点是积分限必须写正确）

P51 二 1 （投影区域是圆域或圆域的一部分时要用极坐标表示出来）

解析：三重积分区域Ω是一个底面为圆形区域$D: \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \le \rho \le 2\cos\theta, \end{matrix}$ 的柱体区域，用垂直于 xoy 面的直线去穿该区域，第一次遇到的曲面为平面 z=0, 第二次遇到的曲面为平面$z = 1$, 故积分变量 z 的范围为$0 \le z \le 1$, 故三重积分

$\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho d\rho \int_0^1 z \int_0^{2\cos\theta} z\rho dz. = \frac{16}{9}$。（重点是积分限必须写正确）

P52 四 2

解析：三重积分区域Ω是一个球面和抛物面围成的立体区域。该区域在 xoy 面上的投影曲线为 xoy 面上的圆$x^2 + y^2 = 4$（由曲面方程$x^2 + y^2 + z^2 = 8, 2z = x^2 + y^2$消去 z 即得）从而投影区域为$x^2 + y^2 \le 4$, 用极坐标表示即$\begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi, \\ 0 \le \rho \le 2, \end{matrix}$，用垂直于 xoy 面的直线去穿该三重积分区域，第一次遇到的曲面为$z = \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{\rho^2}{2}$，第二次遇到的曲面为平面$z = \sqrt{8 - x^2 - y^2} = \sqrt{8 - \rho^2}$，故积分变量 z 的范围为$\frac{\rho^2}{2} \le z \le \sqrt{8-\rho^2}$, 故三重积分

$\iiint_\Omega zdv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^{\sqrt{8-\rho^2}} zdz. = \frac{28\pi}{3}$。（重点是积分限必须写正确）

P53 二

解析：按二重积分的物理意义，所求薄片质量即薄片的面密度函数$u = x|y|$在薄片所占平面区域上的二重积分，而薄片所占区域 D 为圆域的一部分，用极坐标表示为 $\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 1 \le \rho \le 2cox\theta, \end{array}$

故薄片质量

$$M = \iint_D u d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} \rho^2 \cos\theta |\sin\theta| \rho d\rho = \frac{9}{8}.$$

P53 三

解析：假设该均匀扇形薄片顶点在坐标原点，且关于 y 轴对称，则该均匀薄片的面积$A = \frac{1}{2}a^2(2\alpha) = a^2\alpha$，该均匀薄片所占区域为圆域一部分，用极坐标可表示为

$\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} - \alpha \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} + \alpha, \\ 0 \le \rho \le a, \end{array}$ 由对称性知质心的第一个坐标$\bar{x} = 0$。由二重积分应用中质心坐标公式计算第二个坐标得

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{1}{a^2\alpha} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} d\theta \int_0^a \rho \sin\theta \rho d\rho = \frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}.$$

故质心为$(0, \dfrac{2a\sin\alpha}{3\alpha})$。（本次期末考试不考质心）

P54 四

解析：假设该密度为 1 半径为 R 的圆盘顶点在坐标原点，且关于 y 轴相切，则该圆盘区域可表示为

$D: \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le \rho \le 2R\cos\theta, \end{array}$ 于是该圆盘对其切线（y 轴）的转动惯量按二重积分应用中转动惯量的计算公式得

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\cos\vartheta} \rho^2 \cos^2\theta \rho d\rho = \frac{5\pi R^4}{4}.$$（本次期末考试不考转动惯量）

P54 五

解析：该密度为 ρ 的均匀物体在空间占有的立体区域是一个底面区域为正方形区域

$D:\begin{matrix} -a \le x \le a, \\ -a \le y \le a, \end{matrix}$ 曲顶方程为 $z = x^2 + y^2$ 的曲顶柱体区域。

（1） 法一：按二重积分的几何意义，该物体的体积为曲顶方程在底面区域上的二重积分

$$V = \iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} (x^2+y^2)dy = \frac{8a^4}{3}..$$

法二：按三重积分的性质：三重积分被积函数为 1 时积分值等于积分区域的体积

$$V = \iiint_V dxdydz = \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{8a^4}{3}..$$

（2）因该物体密度均匀且其占的立体区域具有对称性，从而该物体质心的第一第二个坐标均为 0. 按重积分应用中质心坐标的计算公式得质心的第三个坐标为

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_V zdv = \frac{3}{8a^4}\int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy \int_0^{x^2+y^2} zdz = \frac{7a^2}{15}.$$

故该均匀物体质心为 $(0,0\dfrac{7a^2}{15})$.（本次期末考试不考质心）

(3) 按重积分应用中物体关于 z 轴的转动惯量的计算公式得

$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\rho dv = \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy \int_0^{x^2+y^2} (x^2+y^2)\rho dz = \frac{112a^6}{45}\rho.$$（本次期末考试不考转动惯量）

P55 三

解析：积分区域为圆域的一部分且被积函数中含有 x^2+y^2，典型的极坐标计算二重积分

积分区域 $D:\begin{matrix} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1 \le \rho \le 3, \end{matrix}$ 注意到 $arctg(tg\theta) = \theta,$ 于是积分

$$\iint_D \frac{arctg\dfrac{y}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^3 \frac{arctg(tg\theta)}{\rho}\rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^3 d\rho = \frac{\pi^2}{16}.$$

P56 四

解析：由空间解析几何知识，平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0, \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周得到的曲面方程为 $x^2+y^2 = 2z$，由题意三重积分区域 Ω 是由椭圆抛物面曲面 $x^2+y^2=2z$ 和平面 $z=8$ 围

成，它在 xoy 面上的投影曲线为 xoy 面上的上半圆周 $x^2+y^2=16$（由曲面方程 $x^2+y^2=2z$ 和平面方程 $z=8$ 消去 z 即得），投影区域为 D: $x^2+y^2\le 16$，用极坐标表示该区域为

$D:\begin{matrix}0\le\theta\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le 4,\end{matrix}$ 用垂直于 xoy 面的直线去穿三重积分区域Ω，第一次遇到的曲面为锥面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{\rho^2}{2}$，第二次遇到的曲面为平面 $z=8$，故积分变量 z 的范围为 $\dfrac{\rho^2}{2}\le z\le 8$

故三重积分

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\rho^2\cdot\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^8\rho\sin\theta zdz.=\frac{4^5}{3}\pi \text{。}$$

P56 五

解析：根据二重积分的应用中求曲面面积公式 $\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$，其中 $z=z(x,y)$ 是要求面积的曲面，D 是该曲面在 xoy 面的投影区域。

该题中要求面积的曲面为平面，其方程为 $z=c(1-\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b})$，它在 xoy 面的投影区域为三角形区域 D，其面积为 $\dfrac{ab}{2}$，因 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+(\dfrac{c}{a})^2+(\dfrac{c}{b})^2}$， 因此所求面积为

$$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+(\frac{c}{a})^2+(\frac{c}{b})^2}\iint_D dxdy=\frac{ab}{2}\sqrt{1+(\frac{c}{a})^2+(\frac{c}{b})^2}\text{。}$$

P56 六

解析：本题的三重积分区域Ω是球面和锥面围成，它在 xoy 面上的投影曲线为 xoy 面上的上半圆周 $x^2+y^2=1, y\ge 0$（由曲面方程 $x^2+y^2+z^2=2, z=\sqrt{x^2+y^2}, y\ge 0$ 消去 z 即得），投影区域为 D: $x^2+y^2\le 1, y\ge 0$，用极坐标表示该区域为

$D:\begin{matrix}0\le\theta\le\pi,\\ 0\le\rho\le 1,\end{matrix}$ 用垂直于 xoy 面的直线去穿三重积分区域Ω，第一次遇到的曲面为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}=\rho$，第二次遇到的曲面为球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}=\sqrt{2-\rho^2}$，故积分变量 z 的范围为 $\rho\le z\le\sqrt{2-\rho^2}$ 故三重积分

$$\iiint_\Omega yzdxdydz=\int_0^\pi d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho\sin\theta zdz.=\frac{4}{15}\text{。}$$（该题可不掌握）

P60 2

解析：有向弧 L 的参数方程为$L:\begin{matrix} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{matrix}$ t 从 0 到π，于是

$$\int_L xy^2dy--x^2ydx=\int_0^{\pi}\cos t\sin^2 t\cos tdt-\cos^2 t\sin t(-\sin t)dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\cos^2 t\sin^2 t+\cos^2 t\sin^2 t)dt=\frac{2}{4}\int_0^{\pi}\sin^2 2tdt=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 4t)dt=\frac{\pi}{4}.$$

P60 3（**格林公式期末考试必考考点**）

注意，格林公式

$$\oint_L Pdx+Qdy=\begin{cases} \iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy, & \text{当L取逆时针方向(正向）时，} \\ -\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy, & \text{当L取顺时针方向（负向）时} \end{cases}$$

这里 D 是 L 围成的平面区域

解析：$P(x,y)=xy,Q(x,y)=0$，L 围成的平面区域为圆域，故用极坐标表示为

$D:\begin{matrix} -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, \\ 0\le\rho\le 2a\cos\theta, \end{matrix}$ 由格林公式，注意这里 L 取的是顺时针方向，得

$$\oint_L xydx=-\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D xdxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cos\theta\rho d\rho=\pi a^3$$

P61 一 1

解析：根据第二型曲线积分即对坐标的曲线积分的物理意义，变力沿弧段做的功就等于变力在该弧段上的第二型曲线积分。因此

变力$\vec{F}=(3x+y,2y-x)$沿椭圆$C:4x^2+y^2=4$正向（即逆时针方向）运动一周对质点做的功$W=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C(3x+y)dx+(2y-x)dy$，这里向量$d\vec{r}=(dx,dy)$。由格林公式

$W=\int_C(3x+y)dx+(2y-x)dy=\iint_D(-1-1)dxdy=\text{-2倍}\cdot(\text{D的面积})=-4\pi$ 。

这里 D 是椭圆周围成的平面区域即椭圆域，其面积为$\pi\cdot 1\cdot 2=2\pi$

P61 一 2

解析：根据教材 206 页定理 2， 曲线积分$\int_C F(x+y)(xdx+ydy)$与路径无关，这里

$P(x,y)=xF(x+y),\ Q(x,y)=yF(x,y)$，等价于 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，即 $y\frac{\partial F}{\partial x}=x\frac{\partial F}{\partial y}$，从而

$F(x,y)$ 应满足 $y\frac{\partial F}{\partial x}=x\frac{\partial F}{\partial y}$。

变力 $\vec{F}=(3x+y,2y-x)$ 沿椭圆 $C:4x^2+y^2=4$ 正向（即逆时针方向）运动一周对质点做的功 $W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C (3x+y)dx+(2y-x)dy$，这里向量 $d\vec{r}=(dx,dy)$。由格林公式

$W=\int_C (3x+y)dx+(2y-x)dy=\iint_D(-1-1)dxdy=\text{-}2\text{倍}\cdot(\text{D的面积})=\text{-}4\pi$ 。

这里 D 是椭圆周围成的平面区域即椭圆域，其面积为 $\pi\cdot 1\cdot 2=2\pi$

P62 3

解析：看到封闭曲线上的第二型曲线积分（对坐标的曲线积分），考虑格林公式。这里 $P(x,y)=2x-y+4,Q(x,y)=3x+5y-6$，L 围成的平面区域 D 为三角形区域, 其面积为 $\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$。 由格林公式，注意这里 L 取的是正向即逆时针方向，得

$$\oint_L (2x-y+4)dx+(3x+5y-6)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D 4dxdy=4\cdot(D\text{的面积})=12$$

P62 四

解析：$P(x,y)=2x\cos y-y^2\sin x,Q(x,y)=2y\cos x-x^2\sin y$，因

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-2y\sin x$ 在整个 xoy 平面上都成立，故

在整个 xoy 平面上，曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(2,3)}\text{Pdx}+\text{Qdy}$ 只与起点 O(0,0)和终点 B（2，3）有关，而与 O 到 B 的路径无关无关，故为了计算方便，选 O 到 B 的折线段路径 OAB, 其中 A(2,0)

有向线段 OA 的参数方程: $\begin{matrix} x=x, \\ y=0, \end{matrix}\ x\text{从}0\text{到}2$；

有向线段 AB 的参数方程: $\begin{matrix} x=2, \\ y=\text{y}, \end{matrix}\ y\text{从}0\text{到}3$，于是第二型曲线积分

$\int_{(0,0)}^{(2,3)}\text{Pdx}+\text{Qdy}=\int_{OA}Pdx+Qdy+\int_{AB}Pdx+Qdy$,代入 P, Q 的表达式转化为定积分得

$\int_{(0,0)}^{(2,3)} \mathrm{Pdx}+\mathrm{Qdy}=\int_0^2 2x dx+\int_0^3 (2y\cos 2-4\sin y)dy=9\cos 2+4\cos 3$。（这类题不掌握）

P69 二选 B

解析：**注：**当 L 上从起点（0,0）到终点（1,1）的曲线积分 $\int_{L((0,0),(1,1))} \mathrm{xy}^2\mathrm{dx}+\mathrm{y}\varphi(x)\mathrm{dy}$ 的值只与起点（0,0）和终点（1,1）有关，与起点到终点的路径 L 无关时，通常记 $\int_{L((0,0),(1,1))} \mathrm{xy}^2\mathrm{dx}+\mathrm{y}\varphi(x)\mathrm{dy}=\int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathrm{xy}^2\mathrm{dx}+\mathrm{y}\varphi(x)\mathrm{dy}$。

因曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathrm{xy}^2\mathrm{dx}+\mathrm{y}\varphi(x)\mathrm{dy}$ 与路径无关只与起点 O(0,0)和终点 B（1，1）有关，而与 O 到 B 的路径无关无关，故为了计算方便，选 O 到 B 的折线段路径 OAB(因易写参数方程)，其中 A(0,1)。

有向线段 OA 的参数方程: $\begin{matrix} x=0, \\ y=y, \end{matrix}$ y从0到1；

有向线段 AB 的参数方程: $\begin{matrix} y=1, \\ x=\mathrm{x}, \end{matrix}$ x从0到1，于是对坐标的曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathrm{xy}^2\mathrm{dx}+\mathrm{y}\varphi(x)\mathrm{dy}=\int_{OA} xy^2dx+y\varphi(x)dy+\int_{AB} xy^2dx+y\varphi(x)dy$$

转化为定积分得

$$\int_{OA} xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_0^1 0yd0+y\varphi(0)dy=\int_0^1 y0dy=0,$$

$$\int_{AB} xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_0^1 xdx+1\varphi(x)d1=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},$$ 于是

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathrm{xy}^2\mathrm{dx}+\mathrm{y}\varphi(x)\mathrm{dy}=\frac{1}{2}。$$

（这类题不掌握）