2012-2013 学年第二学期高等[机电]A 卷参考答案及评分标准

一、判断题

1	2	3	4	5
√	×	√	×	×

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分）。

1. $(y+\frac{1}{y})dx+(x-\frac{x}{y^2})dy$　2. $6x^2y-9y^2+1$　3. $\frac{\pi}{2}$　4. 0

5. $\int_1^2 dx\int_1^x f(x,y)dy$　6. $x^2+y^2=z-1$　7. $\frac{1}{2}$　8. $2\pi a^7$

三、求解下列各题（本大题共 8 小题，每小题 7 分，共 56 分）。

1.求通过点 $P(-1,2,-2)$ 且又通过直线 L：$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 的平面方程。

解：取直线L上的一点$P_0(-1,0,2)$,则所求平面的法向量$\vec{n}=\overrightarrow{P_0P}\times\vec{l}$ ($\vec{l}$为L的方向向量)……（2分）

又∵ $\overrightarrow{P_0P}=(0,2,-4)=2(0,1,-2),\vec{l}=(2,-1,3)$; ∴ $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(1,-4,-2)$……（3分）

故所求平面方程为:$(x+1)-4(y-2)-2(z+2)=0$,即$x-4y-2z+3=0$……（2分）

2. 设 $z=f(\frac{x}{y},x^2\text{y})$，且 f 具有二级连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解:$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_2\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot f_1+2xy\cdot f_2$………(3分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y}\cdot f_1+2xy\cdot f_2)\text{………(1分)}$$

$$=\frac{-1}{y^2}\cdot f_1+\frac{1}{y}\cdot(f_{11}\cdot\frac{-x}{y^2}+f_{12}\cdot x^2)+2x\cdot f_2+2xy\cdot(f_{21}\cdot\frac{-x}{y^2}+f_{22}\cdot x^2)\text{……(2分)}$$

$$=\frac{-1}{y^2}\cdot f_1+2x\cdot f_2-\frac{x}{y^3}\cdot f_{11}-\frac{x^2}{y}\cdot f_{12}+2x^3y\cdot f_{22}\text{………(1分)}$$

3. 求曲线 $x=t-\frac{\pi}{2}\sin t, y=1-\cos t, z=4\sin t$，在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程与法平面方程。

解:∵ $x'=1-\frac{\pi}{2}\cos t, y'=\sin t, z'=4\cos t$………（1分）

∴曲线在$t=\frac{\pi}{2}$处即$P_0=(0,1,4)$处的切向量$\vec{T}=(1,1,0)$………（2分）

则所求曲线的切线方程为:$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{0}$,即$\begin{cases}x=y-1\\ z-4=0\end{cases}$………（2分）

法平面方程为：$x+y-1=0$………（2分）

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} zdv$，其中$\Omega$是由直线$\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$绕 z 轴旋转而成的曲面与 $z=1$围成的区域。

解：$\because$ 直线$\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$绕z轴旋转而成的曲面为一圆锥面$z^2 = x^2 + y^2$ $\therefore \Omega$由$z^2 = x^2 + y^2$和$z = 1$围成………（1分）

则 $\iiint\limits_{\Omega} zdv = \iint\limits_{D} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} zdz = \frac{1}{2}\iint\limits_{D}(1-(x^2+y^2))dxdy$………（2分）

$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D}(1-\rho^2)\rho d\rho d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho$………（2分）

$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot (\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4}$………（2分）

5. 计算 $I = \oint_L x^2ydx - y^2xdy$，其中$L$是曲线$x^2+y^2=2x$的正向。

解：$I = \oint_L x^2ydx - y^2xdy = -\iint\limits_{D}(y^2+x^2)dxdy$………(4分)

$= -\iint\limits_{D}\rho^3 d\rho d\theta = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 d\rho$………(1分)

$= -\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)^4 d\theta = -8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = -\frac{3\pi}{2}$………(2分)

6. 求$\oiint\limits_{\Sigma} xzdydz - y^2dzdx + yzdxdy$，其中$\Sigma$是平面$x=0, y=0, z=0, x=1, y=2, z=3$所围成的长方体的整个表面的外侧。

解：$\oiint\limits_{\Sigma} xzdydz - y^2dzdx + yzdxdy = \iiint\limits_{\Omega}(z-y)dv$………(4分)

$= \iint\limits_{D} dxdy \int_0^3 (z-y)dz = \frac{3}{2}\iint\limits_{D}(3-2y)dxdy$………(1分)

$= \frac{3}{2}\int_0^1 dx \int_0^2 (3-2\,\mathrm{y})dy = 3$………(2分)

7. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n+2^n}$的敛散性，如果收敛，是条件收敛？还是绝对收敛？

解：$\because \frac{1}{3^n+2^n} \le \frac{1}{2^{n+1}}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$ 收敛，………（4分）

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2^n}$ 收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n+2^n}$ 绝对收敛。………（3分）

8. 将函数$\dfrac{1}{x}$展开成$x-2$的幂级数，并给出其收敛域。

解：$\because \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2+(x-2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{2}}$………（2分）

而 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(-1<x<1)$………（2分）

$\therefore$ $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-2}{2})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$………（2分）

其中,$0<x<4$………（1分）

四、应用题和证明题（**每小题6分，共18分**）

1．求函数$f(x,y)=xe^x+y^2-6y$的极值点和极值。

解：令 $f_x=xe^x+e^x=0, f_y=2y-6=0,$解得驻点P(−1, 3)………(2分)

又 $\because A=f_{xx}=xe^x+2e^x, \mathrm{B}=f_{xy}=0, \mathrm{C}=f_{yy}=2$

$\therefore$ 在P(−1, 3)点处，$AC-B^2=2e^{-1}>0,$且$A=e^{-1}>0$………(2分)

则 函数在该点处有极小值 $f(-1,3)=-e^{-1}-9$………(2分)

2．求双曲面$z=xy$被柱面$x^2+y^2=1$截下部分$(y\ge 0)$的面积。

解： $\because z_x=y, z_y=x$

$\therefore$ 所求面积 $A=\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$………(2分)

$=\iint\limits_D\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho d\theta=\int_0^\pi d\theta\int_0^1\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho$………(2分)

$=\dfrac{\pi}{2}\int_0^1\sqrt{1+\rho^2}d(1+\rho^2)=\dfrac{\pi}{3}(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$………(2分)

3. 证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n\cdot b_n|$也收敛。

证： $\because 2a_nb_n\le a_n^2+b_n^2, 2a_nb_n\ge-(a_n^2+b_n^2)$………(2分)

$\therefore 2|a_nb_n|\le a_n^2+b_n^2,$而由条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛………(2分)

则 由比较审敛法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛。………(2分)