运算规则、作差法(拟合法)

加减凑项法(幂指函数求极限、套路：$f-g \sim f(\ln f-\ln g) \sim g(\ln f-\ln g)$)

强行拉格朗日(有理化技巧)

$\ln\alpha \sim \ln\beta(\alpha \sim \beta)$

差分法

积分的等价无穷小

泰勒展开之高阶无穷小的处理

极限的四则运算

若$\lim\alpha = A$，$\lim\beta = B$

则$\lim(\alpha\pm\beta) = \lim\alpha \pm \lim\beta$

则$\lim\alpha\beta = \lim\alpha \cdot \lim\beta$

则$\lim\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lim\alpha}{\lim\beta}(B \neq 0)$

二级结论

若$\lim\alpha = A(A>0)$，$\lim\beta = B$

则$\lim\alpha^{\beta} = A^{B}$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cdot 1}{x^3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{x-x\cdot\cos x}{x^3}$$

二级结论：分子或分母的非零因子可以直接进行计算

$\lim\gamma = C \neq 0$且$\lim\frac{f}{g}$存在

$$\lim\frac{f\cdot\gamma}{g} = \lim\frac{f\cdot C}{g} \quad \lim\frac{f}{g\cdot\gamma} = \lim\frac{f}{g\cdot C}$$

二级结论：分子或分母的因子可以进行等价无穷小(大)的替换

$\gamma \sim \gamma^*$

若$\lim\frac{f\cdot\gamma^*}{g}$存在，则$\lim\frac{f\cdot\gamma}{g} = \lim\frac{f\cdot\gamma^*}{g}$

若$\lim\frac{f}{g\cdot\gamma^*}$存在，则$\lim\frac{f}{g\cdot\gamma} = \lim\frac{f}{g\cdot\gamma^*}$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{e}\right]^{x}$$

作差法

$A = B + (A - B)$

比如我们要求limA，但是limA不太好直接求，可以考虑寻找一个与A相接近的式子B

并且limB好求，所以我们只要考虑求$\lim(A-B)$

这样的B如何去找呢？

将A中的非零因子直接计算，或者将A中的无穷小(大)等价替换得到B

注意了！这个方法的大前提是limB和$\lim(A-B)$都存在

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-xe^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{1+x^2}-e^{\sin x}}{x\arctan x}$$

作差法的子方法(拟合法)

$A=B+(A-B)$

比如我们要求limA，但是limA不太好直接求，可以考虑寻找一个与A相接近的式子B

并且limB好求并且我们猜测limB = limA，所以我们只要考虑证明lim(A − B) = 0

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\sin\frac{\pi}{k}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\sin\frac{\pi}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\pi}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\sin\frac{\pi}{k}-\frac{\pi}{k}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{nk}{n^2+n+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{1}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\xrightarrow{\text{联想}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2+n+k^2}-\frac{k}{n^2+k^2}\right)$$

加减凑项法

将原本不好求的极限通过凑中间项拆分成两个好求的极限

$$AB-CD=(AB-BC)+(BC-CD)$$

$$f(g)-h(r)=(f(g)-f(r))+(f(r)-h(r))$$

$$A^{B}-C^{D}=\left(A^{B}-C^{B}\right)+\left(C^{B}-C^{D}\right)$$

$$AB-CD=(AB-BC)+(BC-CD)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^{2}+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2$$

$$f(g)-h(r)=(f(g)-f(r))+(f(r)-h(r))$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$$

$$A^{B}-C^{D}=\left(A^{B}-C^{B}\right)+\left(C^{B}-C^{D}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^{x}-x^{\sin x}}{x^{3}\ln x}$$

套路：

$$A^{B}-C^{D}=e^{B\ln A}-e^{D\ln C}=e^{\xi}(B\ln A-D\ln C)$$

$$A^{B}-C^{D}=C^{D}\left(\frac{A^{B}}{C^{D}}-1\right)=C^{D}\left(e^{B\ln A-D\ln C}-1\right)$$

$$(\sin x)^{x}-x^{\sin x}=e^{x\ln\sin x}-e^{\sin x\ln x}=e^{\xi}(x\ln\sin x-\sin x\ln x)\sim x\ln\sin x-\sin x\ln x$$

$$(\sin x)^{x}-x^{\sin x}=x^{\sin x}\left(\frac{(\sin x)^{x}}{x^{\sin x}}-1\right)=x^{\sin x}\left(e^{x\ln\sin x-\sin x\ln x}-1\right)\sim x\ln\sin x-\sin x\ln x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^{x}-x^{\sin x}}{x^{3}\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\sin x-\sin x\ln x}{x^{3}\ln x}$$

$$\frac{x\ln\sin x-\sin x\ln x}{x^{3}\ln x}=\frac{x\ln\sin x-x\ln x}{x^{3}\ln x}+\frac{x\ln x-\sin x\ln x}{x^{3}\ln x}$$

或者 $\dfrac{(\sin x)^{x}-x^{\sin x}}{x^{3}\ln x}=\dfrac{(\sin x)^{x}-x^{x}}{x^{3}\ln x}+\dfrac{x^{x}-x^{\sin x}}{x^{3}\ln x}$

套路：A^B-C^D是分子或分母的因子

$$A^B-C^D=e^{B\ln A}-e^{D\ln C}=e^{\xi}(B\ln A-D\ln C)$$

$$A^B-C^D=C^D\left(\frac{A^B}{C^D}-1\right)=C^D\left(e^{B\ln A-D\ln C}-1\right)$$

套路延伸：$f-g$是分子或分母的因子

f，g有一个是幂指函数A^B或者含有幂指函数A^B或者是连乘的形式$a_1\cdots a_n$

$$f-g=e^{\ln f}-e^{\ln g}=e^{\xi}(\ln f-\ln g)$$

$$f-g=g\left(\frac{f}{g}-1\right)=g\left(e^{\ln f-\ln g}-1\right)$$

作用就是降低运算等级

特别的当$g=1$

$$f-1=e^{\ln f}-e^{0}=e^{\xi}\ln f\sim\ln f$$

$$f-1=e^{\ln f}-1\sim\ln f$$

若$f\sim g$

则$f-g\sim f(\ln f-\ln g)\sim g(\ln f-\ln g)$

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^{2}}$

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n!x^{n}-\sin x\sin 2x\cdots\sin nx}{x^{n+2}}$

$$x^{x^x}\sim x,\ \ x^{x^{\sin x}}\sim x, \lim_{x\to0^+}x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}=0(\alpha>0)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\sin x)^{x^{\sin x}}-x^{(\sin x)^x}}{x^3}=\frac{(\sin x)^{x^{\sin x}}-x^{x^{\sin x}}}{x^3}+\frac{x^{x^{\sin x}}-x^{x^x}}{x^3}+\frac{x^{x^x}-x^{(\sin x)^x}}{x^3}$$

$$(\sin x)^{x^{\sin x}}-x^{x^{\sin x}}=x^{x^{\sin x}}\left(e^{x^{\sin x}\ln\frac{\sin x}{x}}-1\right)\sim x\cdot x^{\sin x}\ln\frac{\sin x}{x}\sim x\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\sim-\frac{x^3}{6}$$

$$x^{x^{\sin x}}-x^{x^x}=x^{x^x}\left(e^{\left(x^{\sin x}-x^x\right)\ln x}-1\right)\sim x\left(x^{\sin x}-x^x\right)\ln x=x\cdot x^x\left(e^{(\sin x-x)\ln x}-1\right)\ln x$$

$$\sim x(\sin x-x)(\ln x)^2\sim-\frac{x^3}{6}\cdot x(\ln x)^2$$

$$x^{x^x}-x^{(\sin x)^x}=x^{x^x}\left(1-e^{\left((\sin x)^x-x^x\right)\ln x}\right)\sim-x\left((\sin x)^x-x^x\right)\ln x=-x\left((\sin x)^x-x^x\right)\ln x$$

$$=-x\cdot x^x\left(e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1\right)\ln x\sim-x\cdot x\ln\frac{\sin x}{x}\ln x\sim-x\cdot x\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\ln x\sim\frac{x^3}{6}\cdot x\ln x$$

夜雨教你数学竞赛

套路：$\lim f(x)^{g(x)}$ 幂指函数极限取对数

x^{x^x}，$x^{x^{\sin x}}\sim x$，x^x，$x^{\sin x}\to 1,\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}=0(\alpha>0)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{1}{\tan x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{e}\right]^{x}$$

强行拉格朗日

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sin x}{x\arctan x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x+2\sin x}-1-x}{x\tan x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos x+3\sin x}-1-x}{x\tan x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{\cos x+n\sin x}-1-x}{x\tan x}(n\geq3)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$$

有理化技巧

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^n-b^n}{a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}}$$

差分法$\lim_{x\to 0} f_n(x)$

$$f_n=\sum_{k=2}^{n}(f_k-f_{k-1})+f_1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(f_k-f_{k-1}),\lim_{x\to 0} f_1$$

求极限$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$

求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\tan\tan x-x}{\tan x-x}$

求极限$\lim_{x\to 0}\frac{n!x^n-\sin x\sin 2x\cdots\sin nx}{x^{n+2}}$

$0\le m\le n, 0\le p\le q$，a_m，$b_p\ne 0$

$f(x)=a_m x^m+\cdots+a_n x^n+o(x^n)\quad f_0=a_m x^m+\cdots+a_n x^n$

$g(x)=b_p x^p+\cdots+b_q x^q+o(x^q)\quad g_0=b_p x^p+\cdots+b_q x^q$

(1)乘积的展开

$f(x)g(x)=f_0 g_0+o(x^{\min\{n+p,\ q+m\}})$

$\left(a_m x^m+\cdots+a_n x^n+o(x^n)\right)\left(b_m x^m+\cdots+b_n x^n+o(x^n)\right)$

$=\left(a_m x^m+\cdots+a_n x^n\right)\left(b_m x^m+\cdots+b_n x^n\right)+o(x^{m+n})$

(2)连乘的展开

$f^{(i)}(x)=a_m^{(i)} x^m+\cdots+a_n^{(i)} x^n+o(x^n)\quad f_0^{(i)}(x)=a_m^{(i)} x^m+\cdots+a_n^{(i)} x^n$

$f^{(1)}(x)\cdots f^{(k)}(x)=f_0^{(1)}\cdots f_0^{(k)}+o(x^{n+m(k-1)})$

(3)幂的展开

$f^k(x)=\left(a_m x^m+\cdots+a_n x^n+o(x^n)\right)^k=f_0^k+o(x^{n+m(k-1)})$

(4)复合函数泰勒展开

$f(g(x))=\left(a_m g^m+\cdots+a_n g^n+o(g^n)\right)=\left(a_m g^m+\cdots+a_n g^n+o(x^{pn})\right)$

泰勒展开多少阶？

分子(分母)是多少阶，分母(分子)就展开到多少阶的高阶无穷小

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)\ln(1-x)-2\ln(\cos x)}{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{n!x^n-\sin x\sin 2x\cdots\sin nx}{x^{n+2}}$$

变限积分的等价无穷小

$f(x)$，$f^*(x)$连续且$f(x)\sim f^*(x)$，则$\int_0^x f(t)dt\sim\int_0^x f^*(t)dt$

$f(x)$，$f^*(x)$连续且$f(x)\sim f^*(x)$，$h(x)\to 0$且$\neq 0(x\to 0)$，则$\int_0^{h(x)} f(t)dt\sim\int_0^{h(x)} f^*(t)dt$

若$f(x)\sim ax^n\ (a\neq 0，n\geq 0)$

$f(x)$，$f^*(x)$连续且$f(x)\sim f^*(x)$(不一定无穷小)，$h(x)\sim h^*(x)$(无穷小)，则$\int_0^{h(x)} f(t)dt\sim\int_0^{h^*(x)} f^*(t)dt$

$\alpha=\int_0^x \cos t^2 dt \quad \beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt \quad \gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt$

求α，β，γ阶数$\left(x\to 0^+\right)$2004

$A=\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt \quad B=\int_0^x\ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt \quad C=\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt \quad D=\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}dt$

A，B，C，D阶数谁最高$\left(x\to 0^+\right)$2020

变限积分的等价无穷小

$f(x)$，$f^*(x)$连续且$f(x)\sim f^*(x)$，则$\int_0^x f(t)dt\sim\int_0^x f^*(t)dt$

$f(x)$，$f^*(x)$连续且$f(x)\sim f^*(x)$，$h(x)\to 0$且$\neq 0(x\to 0)$，则$\int_0^{h(x)} f(t)dt\sim\int_0^{h(x)} f^*(t)dt$

若$f(x)\sim ax^n$ $(a\neq 0$，$n\geq 0)$

$f(x)$，$f^*(x)$连续且$f(x)\sim f^*(x)$(不一定无穷小)，$h(x)\sim h^*(x)$(无穷小)，则$\int_0^{h(x)} f(t)dt\sim\int_0^{h^*(x)} f^*(t)dt$

$$\alpha=\int_0^{(\sin x-\tan x)\ln x}\frac{\sin t}{\ln(1+t)}dt\quad\beta=\int_0^{(\sin x)^2\ln x+x^2}\frac{\ln(\cos t)}{\arctan t}dt$$

α，β趋于0的速度谁更快$\left(x\to 0^+\right)$

$$\alpha=\int_{\sin x-x}^{\sin x-\tan x}\ln(\cos t)dt$$

求α的阶数$\left(x\to 0^+\right)$

$f(x)$连续且$h(x)\sim h^*(x)$(无穷小)$\not\Rightarrow\int_0^{h(x)} f(x)dx\sim\int_0^{h^*(x)} f(x)dx$

例如$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$，$h(x)=x$，$h^*(x)=\sin x$

夜雨教你数学竞赛

$\alpha \sim \beta$(大或小)(α，$\beta > 0$) $\Rightarrow \ln\alpha \sim \ln\beta$(大)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln\left(x+2e^{x}\right)}{\ln\left(x+e^{x^{2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\lim_{x\to0^{+}}(\tan x)^{\sin 3x}$$

$\infty-\infty$型极限

α，$\beta\to+\infty$

若$\alpha\sim\beta$，则$\lim(\alpha-\beta)=\lim\beta(\ln\alpha-\ln\beta)=\lim\alpha(\ln\alpha-\ln\beta)$

$\lim(\alpha-\beta)$可推$\alpha\sim\beta$

$\infty-\infty$型极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right]$$

$$\alpha<1,\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]$$

$\alpha\geq5$，k未知，若$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^{\alpha}+8x^{4}+2\right)^{k}-x\right]$存在，求I

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^{3}+2x^{2}+1}-xe^{\frac{1}{x}}$$