1.4 独立性 (Independence)

1. 独立事件

2. 伯努利试验 Bernoulli trial

1. 独立事件

例 1: 已知某公司有 100 名员工, 其中 40 名青年员工. 公司每天早上随机抽取一名员工值班, 不论前一天是否值班. 求以下事件的概率:

(1). 第一天选出青年人, 第二天选出青年人的概率.

(2). 第一天选出的不是青年人, 第二天选出青年人的概率.

(3). 第二天选出青年人的概率.

解: 令 A_1, A_2 分别为第 1 、2 天选出青年人, $P(A_1) = 0.4$, $P(A_1A_2) = \frac{40\times40}{100\times100}$

(1) $P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{40\times40}{100\times100}}{0.4} = 0.4$

(2) $P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{P(\bar{A}_1A_2)}{P(\bar{A}_1)} = \frac{\frac{40\times60}{100\times100}}{0.6} = 0.4$

(3) $P(A_2) = P\big(A_2(A_1 \cup \bar{A}_1)\big) = P(A_2A_1 \cup A_2\bar{A}_1) = P(A_2A_1) + P(A_2\bar{A}_1) = 0.4$

定义: 事件 A_1 和 A_2 称为独立的，如果 $P(A_1|A_2) = P(A_1)$,
否则，称为不独立.

独立性的定义看起来似乎是“不对称的”，因为并未要求
$P(A_2|A_1) = P(A_2)$.

然而, 由条件概率、乘法公式，以及上述定义，我们有:

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1|A_2)P(A_2)}{P(A_1)} = P(A_2)$$

$$\Leftrightarrow P(A_1|A_2) = P(A_1).$$

定义：事件 A 和 B 是独立的，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$.

注: 假定 $P(A)>0$ 和 $P(B)>0$，我们有

1. **如果** A 和 B 独立, 那么 $P(AB)=P(A)P(B) \quad >0$

   $\boldsymbol{AB}$ **可以为** $\emptyset$吗？？ **不，$\boldsymbol{AB}$ 不可能**为 $\emptyset$!!!

   所以，A 和 B 不是互斥的, 它们可以同时发生.

2. **如果** A 和 B 互斥 $\Leftrightarrow AB=\emptyset \quad \Rightarrow P(AB)=0.$

   所以, $P(AB)\neq P(A)P(B)$. 因此, A 和 B 不独立

积事件的概率可以通过概率乘积得到（独立事件）

独立 VS 互斥（不相容）：如果事件A 和 B 都具有正的概率, 他们不可能既是独立的，又是互斥的

问题: 如果 A 和 B 独立, 那么 A 和 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 和 B, $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 是否也独立呢？如何证明？

证明 由于 A 和 B 独立, 那么 $P(AB) = P(A)P(B)$.
故,

$$P(A\bar{B}) = P(A-B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)(1-P(B)) = P(A)P(\bar{B})$$

定理: 如果 A 和 B 独立, 那么 $A, \bar{B}$; $\bar{A}, B$; $\bar{A}, \bar{B}$ 皆独立.

定义: 如果事件 A_1, A_2, A_3 满足,

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

那么 A_1, A_2, A_3 称为相互独立的。注：不是两两独立

注：如果 A_1, A_2, A_3相互独立, 那么

$\bar{A}_1, A_2, A_3$; $\bar{A}_1, \bar{A}_2, A_3$; $A_1, \bar{A}_2, A_3$; ⋯也相互独立

将任意一个事件替换成其对立事件，不影响独立性

定义: 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 被称为相互独立的，如果对每一个正整数 $(k = 2,3,\ldots,n)$ 以及相应的下标集 $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1,2,\ldots n\}$，有

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\cdots P(A_{i_k})$$

这些事件是相互独立的，如果 n 个事件中的任意事件交的概率等于其事件概率的积

如果一个或者多个事件 A_i' 被其对立事件替换，得到的事件依然是相互独立的

例 2: 有 4 张卡片, 上面印有如下字母 XXY, XYX, YXX, YYY 随机抽取一张卡片. 令 A_i $(i = 1,2,3)$ 表示卡片上的第 i 个字母是 X.

请说明 A_1, A_2, A_3 是两两独立的, 但不是相互独立的.

分析: 令 $C_j(j = 1,2,3,4)$ 表示抽到第 j 张卡片, 则 $P(C_j) = \frac{1}{4}$

$$P(A_1) = P(A_1C_1 \cup A_1C_2) = P(A_1C_1) + P(A_1C_2)$$
$$= P(A_1|C_1)P(C_1) + P(A_1|C_2)P(C_2)$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2)=P(A_2C_1\cup A_2C_3)=P(A_2C_1)+P(A_2C_3)=\frac{1}{2}$$

$$P(A_3)=P(A_3C_2\cup A_3C_3)=P(A_3C_2)+P(A_3C_3)=\frac{1}{2}$$

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_2),$$

$$P(A_2A_3)=\frac{1}{4},$$

$P(A_1A_3)=\frac{1}{4},$　　而 $P(A_1A_2A_3)=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

所以，A_1,A_2,A_3 中任意两个都是独立的，但是 A_1,A_2,A_3 不相互独立.

注: 在实际应用中, 独立事件并不是应用定义来验证, 而是用其实际意义验证。

例 3: 设高射炮击中飞机的概率是 0.2. 问至少需要多少门高射炮同时发射（每门只发射一次）才能使飞机被击中的概率达到95%以上?

解: 设至少需要 n 门高射炮. A 表示飞机被击中,

A_i 表示第 i 门高射炮击中飞机 $(i=1,2,\ldots,n)$.

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})$$

$$=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$

$$=1-(1-0.2)^n$$

令 $1-(1-0.2)^n\geq 0.95$, 则 $0.8^n\leq 0.05$

或者 $\ln 0.8^n\leq \ln 0.05$, 或 $n\ln 0.8\leq \ln 0.05$

$n\ln 0.8\leq \ln 0.05$ or $n\geq \dfrac{\ln 0.05}{\ln 0.8}\approx\dfrac{-2.9957}{-0.2231}\approx 13.4$. 所以, $n\geq 14$

例 1.24 设电路如图 1-9 所示，其中 1,2,3,4,5 为继电器接点，设各继电器接点闭合与否相互独立，且每一继电器闭合的概率为 p，求 L 至 R 为通路的概率.

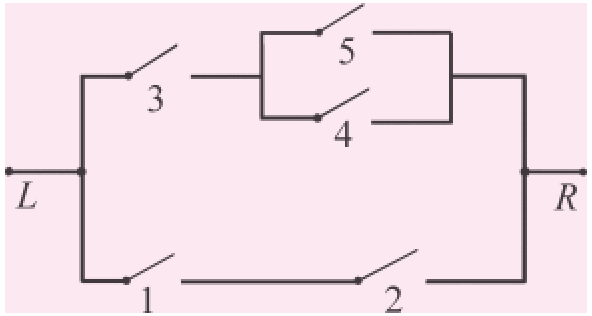

图 1-9

解 设事件 $A_i(i=1,2,3,4,5)$ 表示"第 i 个继电器接点闭合"，A 表示"L 至 R 为通路"，于是

$$A=(A_1A_2)\cup(A_3A_4)\cup(A_3A_5),$$

$$\begin{aligned}P(A)&=P((A_1A_2)\cup(A_3A_4)\cup(A_3A_5))\\&=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)+P(A_3A_5)-P(A_1A_2A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_5)\\&\quad-P(A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5).\end{aligned}$$

由 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 的相互独立性可知 $\quad P(A)=3p^2-2p^4-p^3+p^5.$

2. 伯努利试验 Bernoulli trial

伯努利试验是这样一个随机试验，其中只有两种可能的结果: A 和 $\bar{A}$ (成功、失败)

$$P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = 1 - p, \ 0 < p < 1.$$

n-重伯努利试验: 一个伯努利试验在相同条件下被独立地重复进行 n 次.

每次试验的结果都是独立的.

5重伯努利试验中，事件A发生3次的概率为多少？ $C_5^3 p^3 (1-p)^2$

n 重伯努利试验中，事件 A 发生 k 次的概率为多少？

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0,1,\dots,n$$

例 4: 设车间有5 台机床, 每台机床使用电力是间歇性的, 平均每小时约有6 分钟使用电力, 假设车工们工作是相互独立的, 求在同一时刻:

(1) 恰有 2 台车床使用电力的概率

$$P_1 = C_5^2 p^2 (1-p)^3 = 0.0729.$$

(2) 至少 3 台车床使用电力的概率

$$P_2 = C_5^3 0.1^3 0.9^2 + C_5^4 0.1^4 0.9^1 + C_5^5 0.1^5 0.9^0$$

(3) 至多 3 台车床使用电力的概率

$$P_3 = C_5^0 0.1^0 0.9^5 + C_5^1 0.1^1 0.9^5 + C_5^2 0.1^2 0.9^3 + C_5^3 0.1^3 0.9^2$$

$$P_3 = 1 - C_5^4 0.1^4 0.9^1 - C_5^5 0.1^5 0.9^0$$

(4) 至少 1 台车床使用电力的概率

$$P_4 = 1 - C_5^0 0.1^0 0.9^5$$

例 5: 一张试卷有10道选择题, 每题 4个备选答案中仅有一个是正确答案. 某同学上课不认真听讲， 想投机取巧随机勾选一个碰碰运气. 试求他至少答对6道题（及格）的概率有多大?

解: 令 B 表示他至少答对6道题. 对每一个问题, A 表示答对, 则

$$p=P(A)=\frac{1}{4}, \qquad P(B)=\sum_{k=6}^{10} C_{10}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{10-k}=0.01973.$$

注: 概率很小的事件在一次试验中实际上是几乎不发生的.

例6: 三名士兵同时独立向某坦克发起射击，每人只射击一次。假定坦克被击中的概率分别为 0.9, 0.8, 0.7. 求坦克被击中的概率。

解: 令 A, B, C 分别表示坦克被三名士兵击中, 则 $A \cup B \cup C$ 表示坦克被击中, 那么 $P(A) = 0.9, \quad P(B) = 0.8, \quad P(C) = 0.7$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$= 0.9 + 0.8 + 0.7 - 0.9 \times 0.8 - 0.9 \times 0.7 - 0.8 \times 0.7 + 0.9 \times 0.8 \times 0.7$$

$$= 0.994$$

或

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$$

$$= 1 - 0.1 \times 0.2 \times 0.3$$

$$= 0.994.$$

例 7: 三名士兵同时独立地向飞机发起射击，每人只射击一次。假定飞机被击中的概率分别为 0.9, 0.8, 0.7. 假设飞机被击中1次和2次后而被击落的概率分别为0.2和0.6；如果飞机被击中3次, 则一定被击落. 求飞机被击落的概率.

解: 令 A, B, C 分别表示飞机被三名士兵击中。A_1, A_2, A_3 分别表示飞机被射中 1 次, 2 次 和 3 次，D 表示飞机被击落.

由题意，有 $P(A) = 0.9,\ P(B) = 0.8,\ P(C) = 0.7$

$$P(D|A_1) = 0.2, \quad P(D|A_2) = 0.6, \quad P(D|A_3) = 1$$

$$P(A_1) = P(A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) = P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})$$
$$= 0.9 \times 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.8 \times 0.3 + 0.1 \times 0.2 \times 0.7 = 0.092.$$

$$P(A_2) = P(AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC) = P(A)P(B)P(\bar{C}) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(\bar{A})P(B)P(C)$$
$$= 0.9 \times 0.8 \times 0.3 + 0.9 \times 0.2 \times 0.7 + 0.1 \times 0.8 \times 0.7 = 0.398.$$

$$P(A_3) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0.9 \times 0.8 \times 0.7 = 0.504.$$

由全概率公式

$$P(D) = P(A_1)P(D|A_1) + P(A_2)P(D|A_2) + P(A_3)P(D|A_3) = 0.7612.$$

P31: Question 57. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $\boldsymbol{P(B)=0.5, P(A-B)=0.3}$. 求 $\boldsymbol{P(B-A)}$.（2014研考）

解，有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)\left(1-P(B)\right)$

或者 $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$

即 $0.3=P(A)\,0.5$, 故有 $P(A)=0.6$

$P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B)P(\bar{A})=0.5\times 0.4=0.2$

P31: Question 56. 设随机事件 A 与 B，且 $\boldsymbol{P(A|B)=1}$, $\boldsymbol{P(A\cup B)}$与 $\boldsymbol{P(A)}$ 的大小 （2006研考）

解 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=1$, 得 $P(AB)=P(B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$$

P30: Question 52. 设随机事件 A 与 B 相互独立，A 和 B 都不发生的概率为 1/9，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，求$P(A)$（2000研考）

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=1/9$$

$$P(A\bar{B})=P(\bar{A}B) \quad \Leftrightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB) \quad \Leftrightarrow P(A)=P(B)$$

$$\Rightarrow P(\bar{A})=P(\bar{B})=\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow P(A)=P(B)=2/3$$

33. 3人独立地破译一个密码，他们能破译的概率分别为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，求将此密码破译出的概率.

重要术语及主题

随机试验	样本空间	随机事件
基本事件	频率	概率
古典概型	A 的对立事件 $\overline{A}$ 及其概率	
两个互不相容事件的和事件的概率		概率的加法公式
条件概率	概率的乘法公式	全概率公式
贝叶斯公式	事件的独立性	n 重伯努利试验