第2章

确 知 信 号

张辉 曹丽娜 编著

本章内容:

- **信号类型**

  ——— 周期~非周期型 能量~功率型

- **信号频域性质**

  ——— 频谱 频谱密度 能量谱密度 功率谱密度

- **信号时域性质**

  ——— 自相关函数 互相关函数

§2.1

确知信号的类型

■ 何谓确知信号?

—— 在定义域内的任意时刻都有确定的函数值。否则，为随机信号或不确知信号。

■ 确知信号分类

—— 根据信号的不同特征，可将信号进行不同的分类。

1. 按照是否具有周期重复性区分

- **周期信号：** 每隔一定的时间间隔按相同规律重复 且 无始无终。

$$\boxed{s(t) = s(t + T_0), \qquad -\infty < t < +\infty}$$

满足上式的最小T_0 （$T_0 > 0$） 称为信号的基波周期。

- **非周期信号：**

2. 按照信号能量是否有限区分

能量 $$E=\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$$

功率 $$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt$$

- **能量信号**：若 $0<E<\infty$ 和 $P\to 0$，则称**s(t)**为**能量**(有限)**信号**。
  例如，单个矩形脉冲。
- **功率信号**：若 $0<P<\infty$ 和 $E\to\infty$，则称**s(t)**为**功率**(有限)**信号**。
  例如：直流信号、周期信号和随机信号。

§2.2

确知信号的频域性质

—— 信号最重要、最本质的性质之一

—— 反映信号各频率分量的分布情况

—— 涉及占用的频带宽度、滤波性能等

2.2.1 功率信号的频谱

■ **周期性功率信号的频谱**

对于周期（T_0）功率信号**s(t)**，可展成**指数型**傅里叶级数：

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi nt/T_0}$$

其中，傅里叶级数的系数：

$$\boxed{C_n=C(nf_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{-j2\pi nf_0 t}dt}$$

称为信号的**频谱**。∵ 它反映了信号中各次谐波的幅度值和相位值。

$$\boxed{C_n=|C_n|e^{j\theta_n}}$$

$|C_n|$--- 随频率（nf_0）变化的特性称为信号的 **幅度谱**

θ_n --- 随频率（nf_0）变化的特性称为信号的 **相位谱**

$$\boxed{C_n=C(nf_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{-j2\pi nf_0 t}dt}$$

式中，$f_0=1/T_0$ 称为信号的基频；

nf_0（$n=0，\pm1, \pm2，\pm3，\ldots$）称为信号的$n$次谐波频率 。

当 $n=0$ 时，有

$$C_0=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)dt$$

它表示信号的时间平均值，即直流分量。

■ 周期功率信号频谱的性质

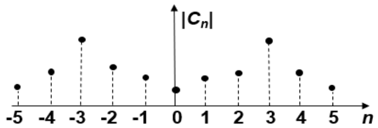
◆ 对于物理可实现的实信号，有

$$C_{-n}=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)e^{+j2\pi nf_0t}dt=\left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt\right]^*=C_n^*$$

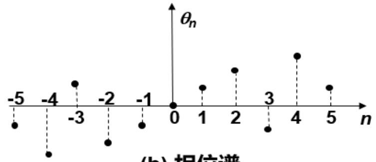
含义：**正**频率部分和**负**频率部分间存在**复数共轭**关系，即：

C_n的**模偶**对称

C_n的**相位奇**对称



(a) 振幅谱



(b) 相位谱

将式:

$$C_{-n}=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)e^{+j2\pi nf_0t}dt=\left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt\right]^*=C_n^*$$

代入式:

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{j2\pi nt/T_0}$$

可得**s(t)**的**三角形式**的傅里叶级数:

$$s(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(2\pi nt/T_0\right)+b_n\sin\left(2\pi nt/T_0\right)\right]$$

$$=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos\left(2\pi nt/T_0+\theta\right)\right]$$

式中 $\theta=\tan^{-1}(b_n/a_n)$ $\quad |C_n|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

$$\boxed{s(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos\left(2\pi nt/T_0+\theta\right)\right]}$$

上式表明:

① 实周期信号可分解为直流分量C_0、基波($n=1$时)和各次谐波($n=1, 2, 3, ...$)分量的线性叠加;

② 实信号$s(t)$的各次谐波的振幅等于 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

③ 实信号$s(t)$的各次谐波的相位等于$\theta=\tan^{-1}(b_n/a_n)$

} 称为**单边谱**

④ 频谱函数C_n又称为双边谱，$|C_n|$的值是单边谱的振幅之半。

◆ 若s(t)是实偶信号，则 C_n为实函数。

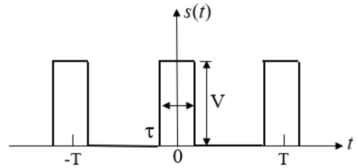
◆ 若s(t)不是偶信号，则 C_n为复函数。

例 【2-1】试求下图所示周期性方波的频谱。

解 该周期性方波的周期T，脉宽τ，脉福**V**。可表示为：

$$s(t)=\begin{cases}V, & -\tau/2\le t\le\tau/2\\ 0, & \tau/2<t<(T-\tau/2)\end{cases}$$

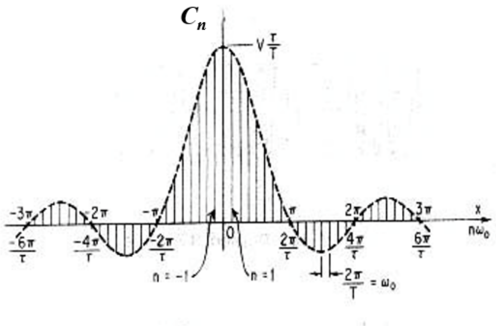
$$s(t)=s(t-T),\qquad -\infty<t<\infty$$



其频谱:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}Ve^{-j2\pi nf_0t}dt=\frac{1}{T}\left[-\frac{V}{j2\pi nf_0}e^{-j2\pi nf_0t}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$=\frac{V}{T}\frac{e^{j2\pi nf_0\tau/2}-e^{-j2\pi nf_0\tau/2}}{j2\pi nf_0}=\frac{V}{\pi nf_0T}\sin\pi nf_0\tau=\frac{V\tau}{T}Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$



可见：因为**s(t)**是**实偶**信号，所以 C_n为**实**函数。

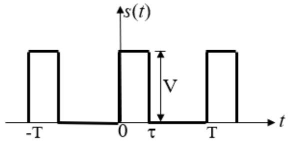
$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{j2\pi n f_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{V\tau}{T}Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)e^{j2\pi n f_0 t}$$

例【2-2】试求下图所示周期性方波的频谱。

解 该信号可表示为：

$$s(t)=\begin{cases}V, & 0\le t\le\tau \\ 0, & \tau<t<T\end{cases}$$

$$s(t)=s(t-T),\qquad -\infty<t<\infty$$



其频谱：

$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^{\tau}Ve^{-j2\pi n f_0 t}dt=\frac{1}{T}\left[-\frac{V}{j2\pi n f_0}e^{-j2\pi n f_0 t}\right]_0^{\tau}$$

$$=\frac{V}{T}\frac{1-e^{-j2\pi n f_0\tau}}{j2\pi n f_0}=\frac{V}{j2\pi n}\left(1-e^{-j2\pi n\tau/T}\right)$$

可见：此信号不是偶函数，所以其频谱C_n是 复函数 。

2.2.2 能量信号的频谱密度

- **频谱密度的定义：**

—— 能量信号$s(t)$ 的傅里叶变换：

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$S(f)$的逆傅里叶变换为原信号：

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)e^{j2\pi ft}df$$

- **$S(f)$和C_n的主要区别：**
  - $S(f)$是连续谱，C_n是离散谱；
  - $S(f)$的单位是V/Hz，而C_n的单位是V。

- **实能量信号频谱密度和实功率信号频谱的共同特性：**

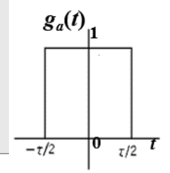
—— 负频谱和正频谱的模偶对称，相位奇对称，即复数共轭。因为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j2\pi ft}dt=\left[\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{+j2\pi ft}dt\right]^*,\qquad S(f)=[S(-f)]^*$$

例【2-3】试求单位门函数:

$$g_a(t)=\begin{cases}1 & |t|\le\tau/2 \\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}$$

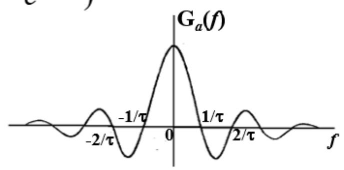
的频谱密度。



解 其傅里叶变换为

$$G_a(f)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{-j2\pi ft}dt=\frac{1}{j2\pi f}\left(e^{j\pi f\tau}-e^{-j\pi f\tau}\right)$$

$$=\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}=\tau Sa(\pi f\tau)$$



评注：矩形脉冲的带宽等于其脉冲持续时间的倒数，即 $(1/\tau)$ Hz 。

例 【2-4】试求单位冲激函数 (δ函数) 的频谱密度。

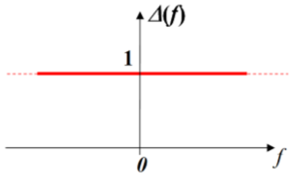
解

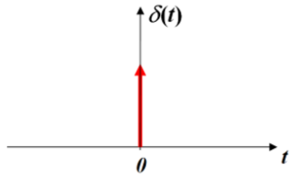
δ函数的定义：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \qquad \text{且}\ \delta(t)=0,\quad t\neq 0$$

δ函数的频谱密度：

$$\Delta(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j2\pi ft}dt=1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$





δ函数的物理意义：

一个高度为无穷大、宽度为无穷小、面积为1的脉冲。

δ 函数的性质①

—— δ函数可用抽样函数的极限表示。

$$\boxed{\delta(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}Sa(kt)}$$

δ 函数的性质②

$$\boxed{f(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt}$$

δ 函数的性质③

—— δ函数也可以看作是单位阶跃函数的导数。

$$u(t)=\begin{cases}0, & \text{当}\ t<0,\\ 1, & \text{当}\ t\geq 0\end{cases} \qquad \boxed{u'(t)=\delta(t)}$$

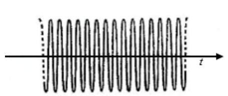
例 【2-5】试求无限长余弦波的频谱密度。

解 设余弦波的表示式为 $s(t)=\cos 2\pi f_0 t$，则其频谱密度$S(f)$为

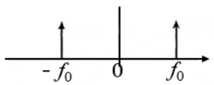
$$S(f)=\lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos 2\pi f_0 t e^{-j2\pi ft}dt=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2}\left\{\frac{\sin[\pi(f-f_0)\tau]}{\pi(f-f_0)\tau}+\frac{\sin[\pi(f+f_0)\tau]}{\pi(f+f_0)\tau}\right\}$$

$$=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2}\{Sa[\pi\tau(f-f_0)]+Sa[\pi\tau(f+f_0)]\}$$

利用 $$\boxed{\delta(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}Sa(kt)}$$ 则有 $$\boxed{S(f)=\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]}$$



(a) 余弦波形



(b) 频谱密度

可见：利用冲激函数，可以把频谱密度的概念推广到功率信号上。

2.2.3 能量信号的能量谱密度

——用来描述信号的能量在频域上的分布情况。

- **定义：** 设能量信号$s(t)$的傅里叶变换（即频谱密度）为$S(f)$，

则其**能量谱密度**$G(f)$为：

$$\boxed{G(f)=|S(f)|^2}$$

- **能量——Parseval定理**

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2df=\int_{-\infty}^{\infty}G(f)df=2\int_0^{\infty}G(f)df$$

能量守恒

对于实函数 $|S(f)|$是偶函数

例 【2-6】试求例【2-3】中矩形脉冲的能量谱密度。

解 在例【2-3】中，已经求出其频谱密度：

$$S(f)=G_a(f)=\tau Sa(\pi f\tau)$$

故其能量谱密度为：

$$G(f)=|S(f)|^2=|\tau Sa(\pi f\tau)|^2=\tau^2|Sa(\pi f\tau)|^2$$

2.2.4 功率信号的功率谱密度

——用来描述信号的功率在频域上的分布情况。

■ **定义：** 信号$s(t)$的功率谱密度 $P(f)$定义为：

$$\boxed{P(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|S_T(f)|^2}$$

式中，$S_T(f)$ 为截断信号 $s_T(t)$ 的傅里叶变换。

■ **功率——Parseval定理**

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}P(f)df$$

■ **周期信号的Parseval定理**

$$P=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$$

$$P=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$$

式中 $|C_n|^2$ 为第 n 次谐波的功率。

■ **周期信号的功率谱密度**

$$\boxed{P(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2\delta(f-nf_0)}$$

例 【2-7】试求例【2-1】中周期性信号的功率谱密度。

解 在例【2-1】中，已经求出该信号的频谱：

$$C_n=\frac{V\tau}{T}Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$

由式

$$P(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2\delta(f-nf_0)$$

可得该信号的功率谱密度：

$$P(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{V\tau}{T}\right)^2Sa^2(\pi\tau f)\delta(f-nf_0)$$

§2.3

确知信号的时域性质

——可由自相关函数或互相关函数来描述

2.3.1 能量信号的自相关函数

- **定义：**

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)s(t+\tau)dt \qquad -\infty<\tau<\infty$$

- **性质：**
  - 自相关函数 $R(\tau)$ 和时间 t 无关，只和时间差 τ 有关；
  - 当 $\tau=0$ 时，$R(0)$ 等于信号的能量：

$$R(0)=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt=E$$

  - $R(\tau)$是 τ 的偶函数：$R(\tau)=R(-\tau)$
  - 自相关函数$R(\tau)$ 和其能量谱密度 $|S(f)|^2$ 是一对傅里叶变换：

$$|S(f)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \qquad R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2e^{j2\pi f\tau}df$$

2.3.2 功率信号的自相关函数

- **定义：**

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)s(t+\tau)dt \qquad -\infty<\tau<\infty$$

对于周期功率信号

$$R(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)s(t+\tau)dt \qquad -\infty<\tau<\infty$$

- **性质：**
  - 当 $\tau=0$ 时，$R(0)$ 等于信号的平均功率：

$$R(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s^2(t)dt=P$$

  - $R(\tau)$也是 τ 的偶函数；
  - $R(\tau)$ 和 功率谱密度 $P(f)$ 是一对傅里叶变换：

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P(f)e^{j2\pi f\tau}df \qquad P(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

例 【2-8】试求周期性余弦信号 $s(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$ 的自相关函数、功率谱密度和平均功率。

解 自相关函数：

$$\omega_0=2\pi f_0=2\pi/T_0$$

$$R(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)s(t+\tau)dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}A^2\cos(\omega_0 t+\theta)\cos[\omega_0(t+\tau)+\theta]dt$$

利用积化和差三角函数公式，上式变为:

$$R(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau\cdot\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}dt+\frac{A^2}{2}\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\theta)dt=\boxed{\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau}$$

对上式作傅里叶变换，则可得此余弦信号的功率谱密度:

$$\boxed{P(\omega)=\frac{A^2}{2}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]} \qquad \boxed{P(f)=\frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]}$$

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

信号的平均功率:

$$\boxed{P=R(0)=\frac{A^2}{2}}$$

2.3.3 能量信号的互相关函数

- **定义：**

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t+\tau)dt, \qquad -\infty<\tau<\infty$$

- **性质：**
  - $\boldsymbol{R_{12}(\tau)}$和时间 t 无关，只和时间差 τ 有关；
  - $\boldsymbol{R_{12}(\tau)}$ 和两个信号相乘的前后次序有关：

$$R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau)$$

  - 互相关函数$\boldsymbol{R_{12}(\tau)}$ 和互能量谱密度$S_{12}(f)$是一对傅里叶变换：

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(f)e^{j2\pi f\tau}df \qquad S_{12}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

互能量谱密度的定义: $S_{12}(f)=S_1^*(f)S_2(f)$

2.3.4 功率信号的互相关函数

- **定义：**

$$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)s_2(t+\tau)dt, \qquad -\infty<\tau<\infty$$

- **性质：**
  - $R_{12}(\tau)$和时间 t 无关，只和时间差 τ 有关；
  - $R_{12}(\tau)$ 和两个信号相乘的前后次序有关： $R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau)$
  - 若两个周期性功率信号的周期相同，则其互相关函数可以写为:

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s_1(t)s_2(t+\tau)dt, \qquad -\infty<\tau<\infty$$

  - $R_{12}(\tau)$和其互功率谱C_{12}之间也有傅里叶变换关系：

$$R_{12}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[C_{12}]e^{j2\pi nf_0\tau} \quad R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} C_{12}(f)\delta(f-nf_0)e^{j2\pi nf_0}df$$

互功率谱定义: $C_{12}=(C_n)_1^*(C_n)_2$

谢谢！