多元函数微分学一章部分习题详解

P27 一 2 ×

解析：当动点(x,y)沿任意路径趋于（0，0）时，$f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$的极限都存在且都等于常数 A 时，重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$才存在且等于 A. 但本题中动点$(x,y)$沿 x 轴趋于（0，0）时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}=1;$ 当动点(x,y)沿 y 轴趋于（0，0）时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}=-1;$故重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$不存在。

P27 三

2 解析：应用到无穷小乘有界量仍为无穷小这个知识点

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2-2y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\lim_{(x,y)\to(0,0)}3y^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0-0=0.$$

习题七: 三、 3 解析：函数$f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)-1}$为多元初等函数，在能取函数值的点$(x,y)$处均连续。显然此函数在分母为 0 的点$(x,y)$处无函数值，故在这些点不连续，即间断。得

$f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)-1}$在点集$\{(x,y)|\sin(x^2+y^2)=1\}$的每一点都间断。

P29 一 2 ×

解析：对 $z=\dfrac{y^{16}}{x^2}$， $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2y^{16}}{x^3},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial z}{\partial x})=-\dfrac{32y^{15}}{x^3}$， 故

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=-32\cdot 2^{15}=-2^{20}。$$

三 1

解析：$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^6-9x^2y^3-2xy$，故 $z_x(1,1)=3-9-2=-8$。

四

1 解析：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sin\frac{x^2}{y^3}}\cos\frac{x^2}{y^3}\times(\frac{2x}{y^3})=\frac{2x}{y^3}\cot\frac{x^2}{y^3}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sin\frac{x^2}{y^3}}\cos\frac{x^2}{y^3}\times[x^2(-3)y^{-4}]=\frac{-3x^2}{y^4}\cot\frac{x^2}{y^3}。$$

习题八：四、 2

解析：$z=\sqrt{\ln^5(x^3+y^2)}$ 可看成 $z=\sqrt{u}$，$u=v^5, v=\ln w, w=x^3+y^2$ 复合得到，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{u}}5v^4\frac{1}{w}3x^2$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\ln^5(x^3+y^2)}}5\ln^4(x^3+y^2)\frac{1}{x^3+y^2}3x^2=\frac{15x\sqrt{\ln^3(x^3+y^2)}}{2(x^3+y^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{u}}5v^4\frac{1}{w}2y$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\ln^5(x^3+y^2)}}5\ln^4(x^3+y^2)\frac{1}{x^3+y^2}2y=\frac{5y\sqrt{\ln^3(x^3+y^2)}}{x^3+y^2}。$$

五 2

解析：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\ln(x^2+y)+x^2\frac{1}{x^2+y}2x$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{2x}{x^2+y}+2x^3\frac{-1}{(x^2+y)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y)^2}。$$

习题九：三、 3 即 P31 三 3

解析：$z=\arctan(x^3+e^{2x})$ 可看成 $z=\arctan u$，$u=x^3+e^{2x}$ 复合得到，故

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+u^2}(3x^2+2e^{2x})=\frac{3x^2+2e^{2x}}{1+(x^3+e^{2x})^2}$$

习题九 四、 1、3、4

1 解析：当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时 $z=\frac{y}{x}$ 的

全增量为

$$\Delta z = f(2+0.1,\ 1+(-0.2)) - f(2,\ 1) = \frac{0.8}{2.1} - \frac{1}{2} = \frac{1.6-2.1}{4.2} = \frac{-0.5}{4.2} = -\frac{5}{42},$$

全微分为

$$dz = f_x(2,1)\Delta x + f_y(2,1)\Delta y = \left.\frac{-y}{x^2}\right|_{\substack{x=2\\y=1}} \times 0.1 + \left.\frac{1}{x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}} \times (-0.2) = \frac{-0.1}{4} - 0.1 = -\frac{0.5}{4} = -0.125。$$

P32 3

解析：$\frac{\partial z}{\partial x} = f^{/}(x^2+y^3)\frac{\partial(x^2+y^3)}{\partial x} + yg^{/}(x+y)\frac{\partial(x+y)}{\partial x} = 2xf^{/}(x^2+y^3) + yg^{/}(x+y)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2xf^{//}(x^2+y^3)\frac{\partial(x^2+y^3)}{\partial y} + g^{/}(x+y) + yg^{//}(x+y)\frac{\partial(x+y)}{\partial y}$$

$= 6xy^2 f^{//} + g^{/} + yg^{//}$， 这里 $f^{/}$ 表示 f 对 x^2+y^3 求导数，$f^{//}$ 表示 f 对 x^2+y^3 求两次导数；$g^{/}$ 表示 g 对 $x+y$ 求导数，$g^{//}$ 表示 g 对 $x+y$ 求两次导数。

P32 4 解析：设 $u = 2x+y, v = 3x-2y$，则 $z = u^v$，复合结构为 $z = u^v$，$z\left\langle \begin{matrix} u\left\langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \\ v\left\langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1}\times 2 + u^v \ln u \times 3$$

$$= 2(3x-2y)(2x+y)^{3x-2y-1} + 3(2x+y)^{3x-2y}\ln(2x+y)$$

习题十: 二、2 即 P33 二 2 选（B）

解析：设 $F(x,y,z) = e^z - xyz$，则 $F_x(x,y,z) = -yz,\ F_y(x,y,z) = -xz,$

$F_z(x,y,z) = e^z - xy$，由隐函数存在定理结论得 $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_y}{F_x}\frac{-F_z}{F_y}\frac{-F_x}{F_z} = -1$

习题十: 四 3、即 P34 3

解析：设 $F(x,y,z) = e^{-2xy^2} - 2xz + ye^{-z}$，则 $F_x(x,y,z) = -2y^2e^{-2xy^2} - 2z,$

$F_y(x,y,z) = -4xye^{-2xy^2} + e^{-z}$，$F_z(x,y,z) = -2x - ye^{-z}$，由隐函数存在定理结论得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} = -\frac{2y^2e^{-2xy^2}+2z}{2x+ye^{-z}}，\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z} = \frac{-4xye^{-2xy^2}+e^{-z}}{2x+ye^{-z}}$$

习题十二 ：四 、1 即 P37 四 1

解析：$x_t=\dfrac{-1}{(1+t)^2}, y_t=\dfrac{-1}{t^2}, z_t=3t^2$。曲线 $x=\dfrac{t+2}{1+t}, y=\dfrac{1+3t}{t}, z=t^3$ 上参数 $t=1$ 对应的直角坐标点为 $(1.5,4,1)$，过该点的切线方向向量或法平面法向量为 $(x_t, y_t, z_t)\big|_{t=1}=(-\dfrac{1}{4}, -1, 3)$，所求切线方程为 $\dfrac{x-1.5}{\frac{-1}{4}}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$，法平面方程为

$$-\frac{1}{4}(x-1.5)-(y-4)+3(z-1)=0$$

P39 二 3 选 D

解析：注意到函数 $z=f(x,y)$ 的极值点只可能在驻点和偏导数不存在的点取得。本题中由于 $\begin{cases} z_x=3x^2-60x-9=0 \\ z_y=-9y^2+2y-1=0 \end{cases}$ 无解，即函数 $z=x^3-3y^3-30x^2+y^2-9x-y+6$ 无驻点，又偏导数 z_x, z_y 不存在的点也没有，故函数无极值。

P40 五 此题属于应用题，注意考试会考应用题

解析：设长方体容器的长、宽、高分别为 x, y, z（单位为 cm），则表面积 $S=xy+2(xz+yz)$，体积 $xyz=108$，问题即求在条件 $xyz=108$ 下，函数 $S=xy+2(xz+yz)$ 的最小点（**属于条件极值问题**）。应用拉格朗日函数法。

设拉格朗日函数 $L(x,y,z)=xy+2(xz+yz)+\lambda(xyz-108)$，$\lambda$ 为参数。下求可能的最值点即拉格朗日函数的极值点

$$令\begin{cases} L_x=y+2z+\lambda yz=0, & (1) \\ L_y=x+2z+\lambda xz=0, & (2) \\ L_z=2x+2y+\lambda xy=0, & (3) \\ xyz-108=0, & (4) \end{cases} \quad （这里（4）可看成 L_\lambda=0）$$

在（1）式中将 y 换成 x, (1) 式变成（2）式，在（2）式中将 x 换成 y, (2) 式变成（1）式，这说明 x=y. (5).

将（5）代入（3）得 $\lambda=\dfrac{-4}{x}$ （6）

将（6）代入（2）得 $z=\dfrac{x}{2}$ （7）

将（5）（7）代入（4）得 $\dfrac{x^3}{2}=108,$ 于是得 $x=y=6, z=3,$ 即长方体容器的长、宽、高

分别为 6，6，3 cm 时表面积最省（最小）。

注 由该实际问题知，最值点一定存在，而拉格朗日函数的可能极值点（6，6，3）唯一，因此该点必为最值点。在实际应用问题中，只要拉格朗日函数的驻点唯一，不必去讨论是否是极值点、最值点，立即下结论就是所求的最值点。

P41 三 2

解析：函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin(x^2+y^2)-1}$ 为多元初等函数，在可以取值的点（x,y）处都连续。

显然该函数在点集 $\{(x,y)|\sin(x^2+y^2)-1=0\}$ 里的每点处都取不到函数值，从而在这些点处不连续（间断）。

3 解析：函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\ln(6-x^2-y^2)}$ 的定义域即函数表达式有意义的点（x,y）的集合，从而函数定义域为 $\{(x,y)|1\le x^2+y^2<6, x^2+y^2\ne 5\}$。

复习题: 四、 2 即 P42 2

解析：1）. 因 $z=z(x,y)$ 是 x,y 的二元函数，故全微分 $dz=z_x dx+z_y dy$，下求 z_x, z_y。

2）. 注意到 $z=z(x,y)$ 是方程 $x^2z^3+2y^2z^2-x^2+y^3=0$ 确定的隐函数

于是设 $F(x,y,z)=x^2z^3+2y^2z^2-x^2+y^3$，得到

$$F_x=2xz^3-2x, F_y=4yz^2+3y^2, F_z=3x^2z^2+4y^2z$$

按隐函数求导公式

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2x-2xz^3}{3x^2z^2+4y^2z},\quad z_y=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-4yz^2-3y^2}{3x^2z^2+4y^2z},$$

于是

$$dz=\frac{2x-2xz^3}{3x^2z^2+4y^2z}dx+\ \frac{-4yz^2-3y^2}{3x^2z^2+4y^2z}dy。$$