1. $\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos^4 x+1)dx=$__________________.

解 $\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos^4 x+1)dx=\int_{-\pi}^{\pi}x\cos^4 x dx+\int_{-\pi}^{\pi}1dx=0+2\pi=2\pi$.

2. **对正常数** a, $\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}dx=$__________________.

解 原式$=\dfrac{1}{-a}\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}d(-ax)=\dfrac{1}{-a}e^{-ax}\Big|_{0}^{+\infty}=\dfrac{1}{-a}(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{ax}}-e^{0})=\dfrac{1}{a}$.

3. $\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x^3}dx=$__________________.

解 $\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x^3}dx=-\dfrac{1}{3}\int_{0}^{+\infty}e^{-x^3}d(-x^3)=\dfrac{-1}{3}e^{-x^3}\Big|_{0}^{+\infty}=\dfrac{-1}{3}(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x^3}}-e^{0})=\dfrac{1}{3}$。

4. $\int_{0}^{2\pi}|\cos x|dx=$__________________.

解 $\int_{0}^{2\pi}|\cos x|dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos x)dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos xdx$

$$=\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=(1-0)-(-1-1)+[0-(-1)]=4\text{。}$$

5. **设函数** $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+x^2\int_{0}^{1}f(x)dx$**，则** $\int_{0}^{1}f(x)dx=$__________________.

解 因为 $\int_{0}^{1}f(x)dx$ 为常数，故在 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+x^2\int_{0}^{1}f(x)dx$ 两边对 x 从 0 到 1 积分得，

$$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}dx+\int_{0}^{1}[x^2\int_{0}^{1}f(x)dx]dx=\ln|1+x|\Big|_{0}^{1}+\int_{0}^{1}f(x)dx)\int_{0}^{1}x^2dx,$$

$=\ln 2+\dfrac{1}{3}\int_{0}^{1}f(x)dx$，故 $\int_{0}^{1}f(x)dx=\dfrac{3}{2}\ln 2$。

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}=$__________________.

解 因为 $x\to0$ 时，$\cos x\to1$，从而 $\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt\to0$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限。注意到 $\dfrac{d}{dx}(\int_{1}^{\cos x}e^{-t^2}dt)=e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)'=-\sin xe^{-\cos^2 x}$，于是由洛必达法则得

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{\int_{1}^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{-\sin xe^{-\cos^2 x}}{2x}=\lim_{x\to0}e^{-\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=e^{-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}.$$

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi<x<0, \\ xe^{-x^2}, & x\geq 0, \end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)dx$

解 令 $t=x-2$，则 $dx=dt$，

$$\int_1^4 f(x-2)dx=\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0 tdt+\int_0^2 te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^0-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}d(-t^2)$$

$$=\frac{1}{2}(0-1)-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(e^{-4}-e^0)=-\frac{1}{2e^4}$$

8. 计算 $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

解 $$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^2}\frac{d\ln|x|}{\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^2}\frac{d\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^2}\frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}=2\int_1^{e^2}\frac{d(1+\ln x)}{2\sqrt{1+\ln x}}$$

$$\underset{\overline{\overline{\qquad\qquad}}}{u=1+\ln x}\quad 2\int_1^3\frac{du}{2\sqrt{u}}=2\sqrt{u}\Big|_1^3=2(\sqrt{3}-1)=2(\sqrt{3}-1)$$

9. 计算 $\int_0^4\frac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}}$.

解 $$\int_0^4\frac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}}\ \underset{\overline{\overline{\qquad\qquad}}}{t=\sqrt{x}}\ \int_0^2\frac{t\cdot 2tdt}{1+t^2\cdot t}=2\int_0^2\frac{t^2dt}{1+t^3}=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{dt^3}{1+t^3}=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{dt^3}{1+t^3}=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{d(1+t^3)}{1+t^3}$$

$$=\frac{2}{3}\ln\left|1+t^3\right|\Big|_0^2=\frac{2}{3}(2\ln 3-0)=\frac{4}{3}\ln 3$$

10. 求函数 $f(x)=\int_{-1}^x(1-2t)dt$ 的极值及 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最值.

解 由函数 $f(x)=\int_{-1}^x(1-2t)dt$ 得 $f(x)=(t-t^2)\Big|_{-1}^x=x-x^2-(-1-1)=2+x-x^2$，于是 $f'(x)=1-2x$， $f''(x)=-2$，驻点 $x=\frac{1}{2}$；因为 $f''(\frac{1}{2})=-2<0$， 故根据极值判定的第二充分条件知， $f(x)$ 有极大值 $f(\frac{1}{2})=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$。

又 $f(-1)=0$， $f(2)=2+2-2^2=0$，故函数最大值为 $\frac{9}{4}$，最小值为 0。

11. 设函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = xe^{-x}$，求 $f(x)$ 的极值.

解 由于积分变量是t，故相对于t，x可看成常数。于是

$\int_0^x (x-t)f(t)dt = \int_0^x [xf(t)-tf(t)]dt = \int_0^x xf(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$。在 $x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = xe^{-x}$ 两边对 x 求导得 $\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = (1-x)e^{-x}$，两边再对 x 求导得 $f(x)=(x-2)e^{-x}$，于是 $f'(x)=(3-x)e^{-x}$，$f''(x)=(x-4)e^{-x}$，驻点 $x=3$；因为 $f''(3)=-e^{-3}<0$，故由极值判定的第二充分条件知，$f(x)$ 有极大值 $f(3)=e^{-3}$。

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\le 0$，$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$。证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\le 0$。

证（1）$F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$。

（2）由积分中值定理，得 $\int_a^x f(t)dt = f(\xi)(x-a),\ \xi\in[a,x]$，再由拉格朗日中值定理得，$F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}=\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-a}=\dfrac{f'(\eta)(x-\xi)}{x-a}\le 0,$

这里 $\eta\in(\xi,x)\subseteq(a,x)\subseteq(a,b)$。

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证 由积分中值定理知，存在 $\eta\in[\frac{2}{3},1]$，使得 $f(0)=3f(\eta)(1-\frac{2}{3})=f(\eta)$，再由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subseteq(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$。