



重慶理工大學

CHONGQING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

明德篤行
自強日新



工程电磁场

Engineering Electromagnetics

沈启平

电气与电子工程学院



时变电磁场

5.1 电磁感应定律

5.2 全电流定律

5.3 电磁场的基本方程 分界面边界条件

5.4 坡印廷定理和坡印廷矢量

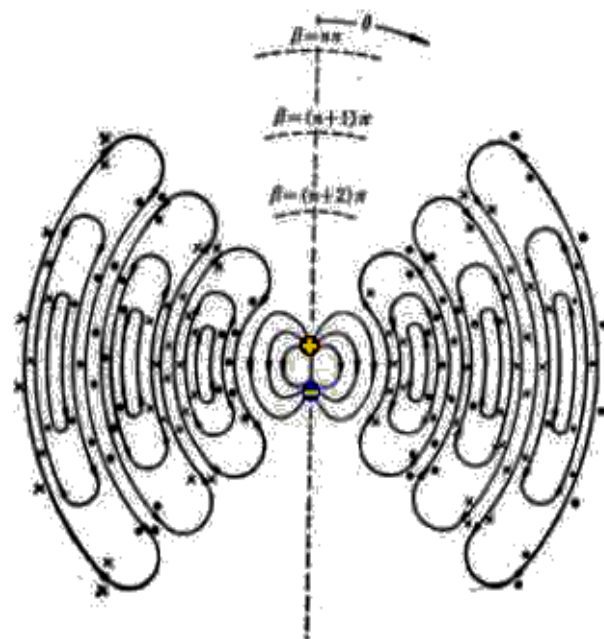
5.5 正弦电磁场

5.6 动态位

5.7 达朗贝尔方程的解答

5.8 准静态电磁场

5.9 集肤效应、涡流、邻近效应及电磁屏蔽



第 5 章 时变电磁场

- 在时变电磁场中，电场与磁场都是时间和空间的函数；变化的磁场会产生电场，变化的电场会产生磁场，电场与磁场相互依存，构成统一的电磁场。

时变场源：

时变电场 ① 时变电荷 $q(t)$ ② 时变磁场 $\partial B / \partial t$

时变磁场 ① 时变电流 $i(t)$ ② 时变电场 $\partial D / \partial t$

- 英国科学家麦克斯韦将静态场、恒定场、时变场的电磁基本特性用统一的电磁场基本方程组高度概括。电磁场基本方程组是研究宏观电磁场现象的理论基础。

- 时变场的知识结构框图

表征静态场的基本方程

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

5.1 电磁感应定律

5.1.1 电磁感应定律

可能产生感应电流的5种情况：

- 1、电流的变化
- 2、磁场的变化
- 3、通有恒稳电流的导线的变化
- 4、磁铁的运动
- 5、导体在磁场中运动

$$e = -\frac{d\psi}{dt}$$

当与回路交链的磁通发生变化时，回路中会产生感应电动势，这就是法拉第**电磁感应定律**（Faraday's Law of Electromagnetic Induction）。

$$\varepsilon = - \frac{d\Psi}{dt}$$

负号表示感应电流产生的磁场总是阻碍原磁场的变化

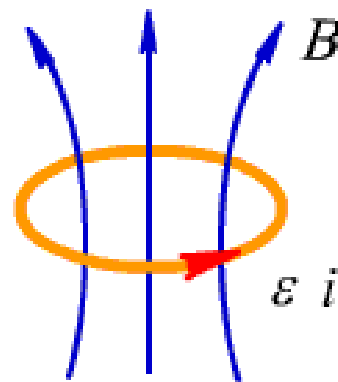


图5.1.1感生电动势的参考方向

电磁感应定律 1、2、3、4

引起磁通变化的原因分为三类：

- 回路不变，磁场随时间变化

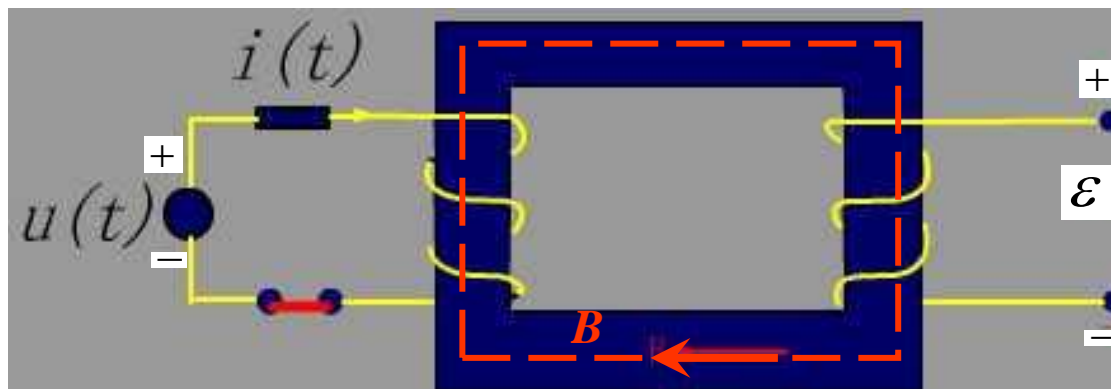


图5.1.2 感生电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

称为感生电动势，这是变压器工作的原理，又称为变压器电势。

- 回路切割磁力线，磁场不变

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = \oint_l (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

称为动生电动势，这是发电机工作原理，又称为发电机电势。

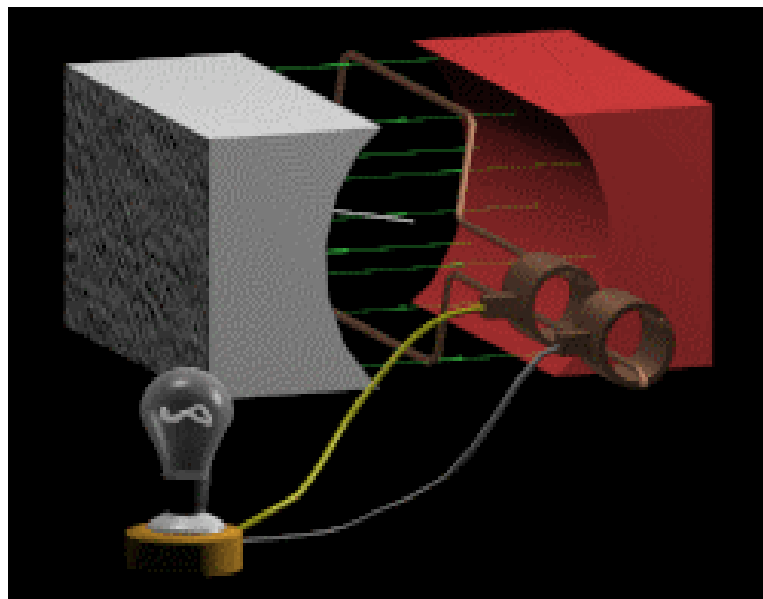


图5.1.3 动生电动势

- 磁场随时间变化，回路切割磁力线

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = \oint_l (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) d\mathbf{l} - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

实验表明：感应电动势 ε 与构成回路的材料性质无关（甚至可以是假想回路），只要与回路交链的磁通发生变化，回路中就有感应电动势。当回路是导体时，才有感应电流产生。



电荷为什么会运动呢？即为什么产生感应电流呢？

5.1.2 感应电动势与感应场强的计算

麦克斯韦假设，变化的磁场在其周围激发着一种电场，该电场对电荷有作用力（产生感应电流），称之为**感应电场**（Electric Field of Induction）。

感应电动势与感应电场的关系为

$$\varepsilon = \oint_l \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} = \int_s (\nabla \times \mathbf{E}_{ind}) \cdot d\mathbf{S} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_{ind} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

说明：

1、感应电场是有旋场

2、 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ 是 \mathbf{E}_{ind} 的旋涡源密度

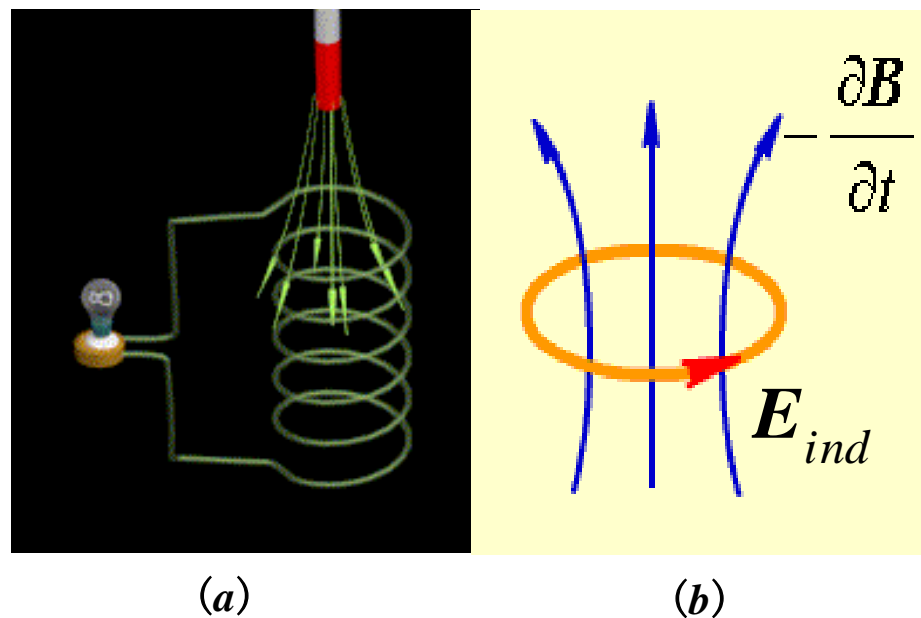


图5.1.4 变化的磁场产生感应电场

5.1.3 感应电场的有散有旋性

感应电场是非保守场，电力线呈闭合曲线，变化的磁场 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 是产生 \mathbf{E}_{ind} 的涡旋源。

若空间同时存在库仑电场，即 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{ind}$ ，则

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}_0 + \nabla \times \mathbf{E}_{ind} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}_0 + \nabla \cdot \mathbf{E}_{ind} = \rho / \varepsilon$$

说明时变电场是有散有旋场，这里主要强调电场不再是无旋场。

电磁感应定律更一般的表达式：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

体现了变化的磁场产生电场，时变电场不满足守恒性

例 5.1.1 一个 $h \times w$ 的单匝矩形线圈放在时变磁场 $B = e_y B_0 \sin \omega t$ 中。

开始时，线圈面的法线 e_n 与 y 轴成 α 角，如图所示。求：

(a) 线圈静止时的感应电动势；

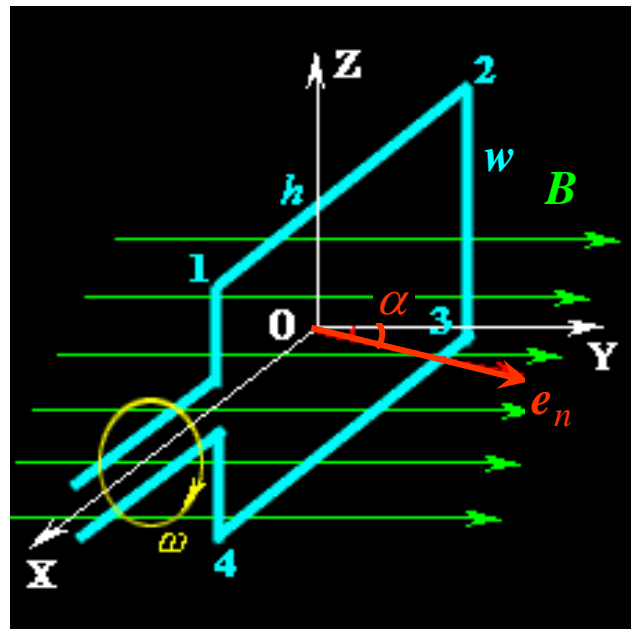
(b) 线圈以角速度 ω 绕 x 轴旋转时的感应电动势。

解：

(a) 线圈静止时，感应电动势是由磁场随时间变化引起的

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{e}_y B_0 \sin \omega t) \cdot (\mathbf{e}_n hw) \\ &= B_0 hw \sin \omega t \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega B_0 hw \cos \omega t \cos \alpha$$



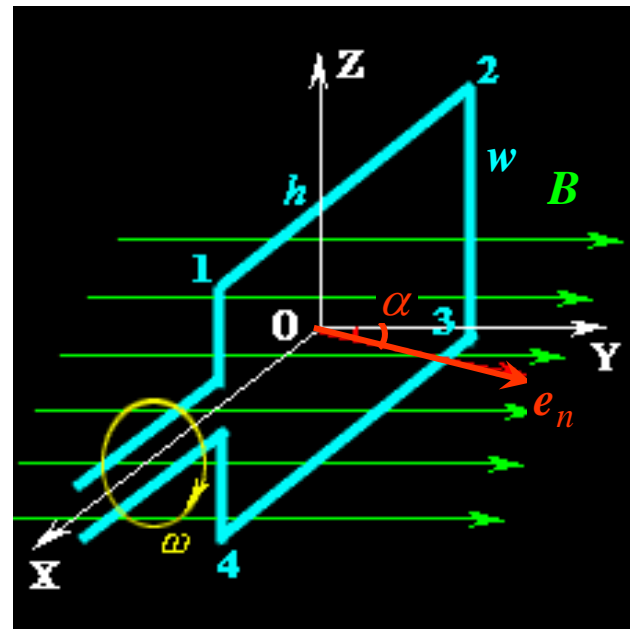
(b) 线圈以角速度 ω 旋转时，穿过线圈的磁通变化既有因磁场随时间变化引起的又由因线圈转动引起的。此时 $\alpha = \omega t$

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_n S = (B_0 \sin \omega t \mathbf{e}_y) \cdot (\mathbf{e}_y h w \cos \alpha)$$

$$= B_0 h w \sin \omega t \cdot \cos \omega t$$

$$= \frac{1}{2} B_0 h w \sin 2\omega t$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega B_0 h w \cos 2\omega t$$



5.2 全电流定律

1. 安培环路定律的局限性

由电容器的充放电来说明该问题，
作闭合曲线 l 与导线交链，应用安培环
路定律

$$\text{经过 } S_1 \text{ 面} \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = i$$

$$\text{经过 } S_2 \text{ 面} \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = i \\ \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{cases}$$

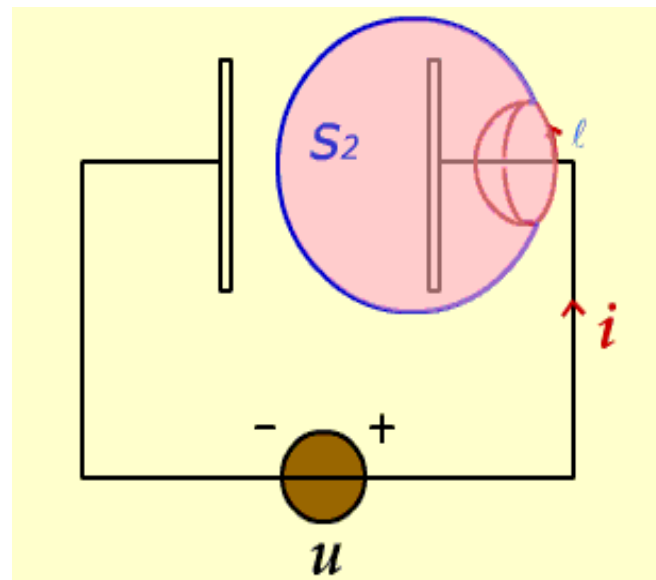


图5.2.1 交变电路用安培环路定律



思考

为什么相同的线积分结果不同？

由安培定理 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}_c$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = 0$$

2. 位移电流的引入

由电荷守恒定律

$$\oint_s \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial q}{\partial t} \xrightarrow{\text{应用高斯定律}} \int_v \nabla \cdot \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{v} = \int_v -\frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{v}$$

得 $\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (1) 电荷守恒定律微分形式

在恒定电场中, 因为任一点没有电荷的堆积, 所以有 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

因此 $\nabla \cdot \mathbf{J}_c = 0$ 说明传导电流连续是电荷守恒定律的特例。

再由高斯定律

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \xrightarrow{\text{在时变场中写成}} \nabla \cdot \mathbf{D}(t) = \rho(t)$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D}(t) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} \quad \text{代入 (1) 得}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} \quad \text{或} \quad \nabla \cdot \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} \right) = 0$$

称为**电流连续性方程微分形式**

安培环路定律在时变场中改写成

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2)$$

两边取散度 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$

恒定场的安培定律只是 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 时的退化形式。

定义位移电流密度 $\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t}$ 单位 A/m^2

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{s} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \int_s \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

上式称为全电流定律(积分形式)

$$\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v} \quad \text{称为运流电流}$$

全电流定律(微分形式)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

恒定场	时变场
$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c$ $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla \cdot (\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}$

全电流定律揭示不仅传导电流激发磁场，变化的电场也可以激发磁场。它与变化的磁场激发电场形成自然界的一个对偶关系。

例 5.2.1 已知平板电容器的面积为 S ，相距为 d ，介质的介电常数为 ε ，极板间电压为 $u(t)$ 。试求位移电流 i_D ，传导电流 i_C 与 i_D 的关系是什么？

解：忽略极板的边缘效应和感应电场

电场
$$E = \frac{u}{d}, \quad D = \varepsilon E = \frac{\varepsilon u(t)}{d}$$

位移电流密度

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{d} \left(\frac{du}{dt} \right)$$

位移电流

$$i_D = \int_S J_D dS = \frac{\varepsilon S}{d} \left(\frac{du}{dt} \right) = C \frac{du}{dt} = i_C$$

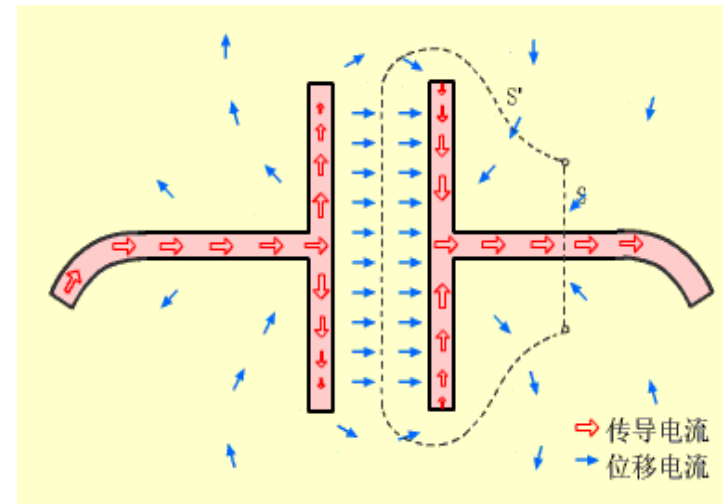


图5.2.2 传导电流与位移电流

结束

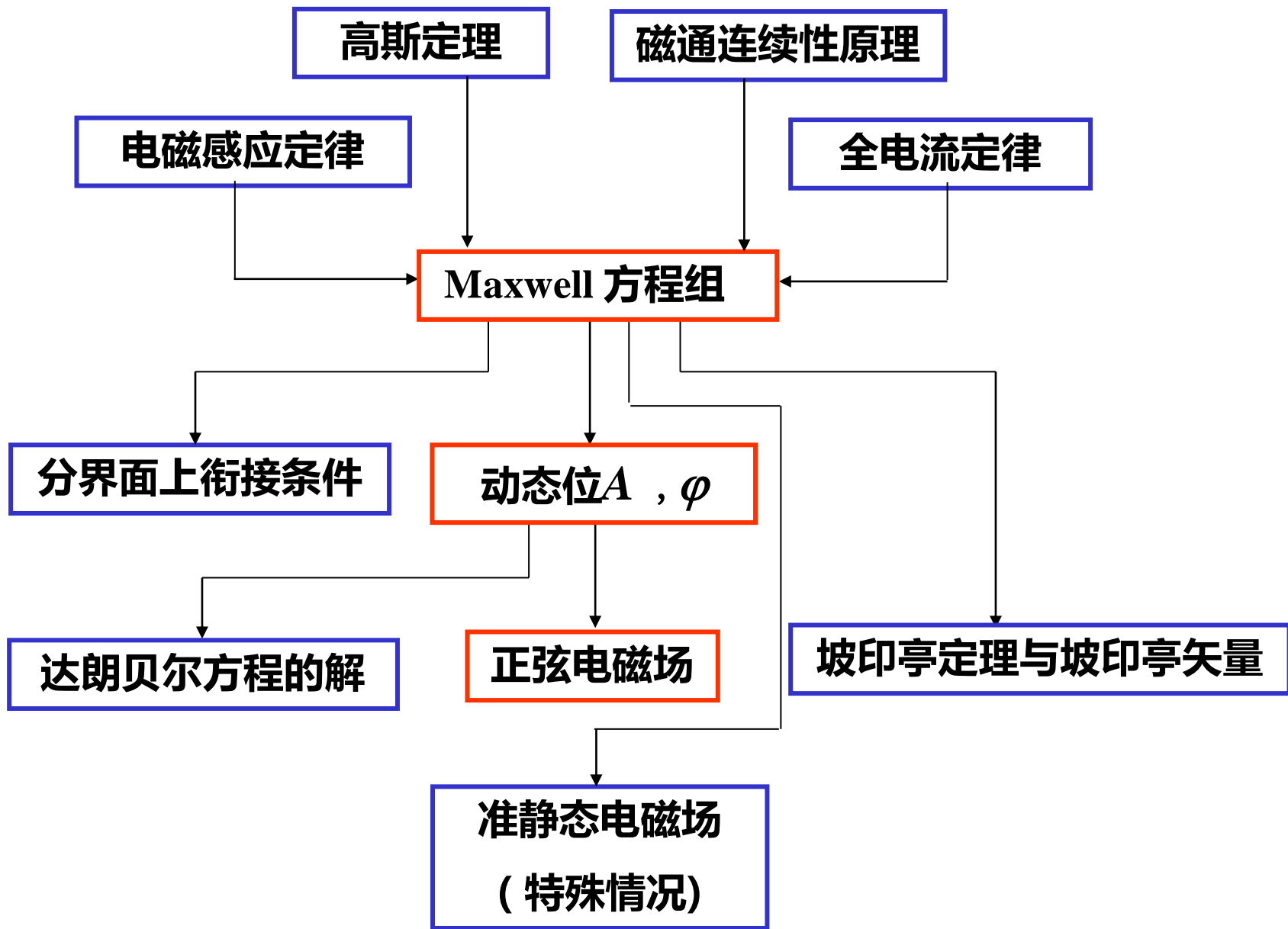


图5.0 时变场知识结构框图

返回

5.3 电磁场基本方程组·分界面上的衔接条件

5.3.1 电磁场基本方程组

综上所述,电磁场基本方程组 (Maxwell方程)为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c \text{ (或 } \rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_s \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{全电流定律}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{电磁感应定律}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{磁通连续性原理}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad \text{高斯定律}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad \text{性能方程}$$

- 全电流定律——**麦克斯韦第一方程**, 表明电流和变化的电场都能产生磁场;
- 电磁感应定律——**麦克斯韦第二方程**, 表明除电荷外, 变化的磁场也能产生电场;
- 磁通连续性原理——表明磁场是无源场, 磁力线总是闭合曲线;
- 高斯定律——表明电荷以发散的方式产生电场(变化的磁场以涡旋的形式产生电场)。

在无源自由空间中

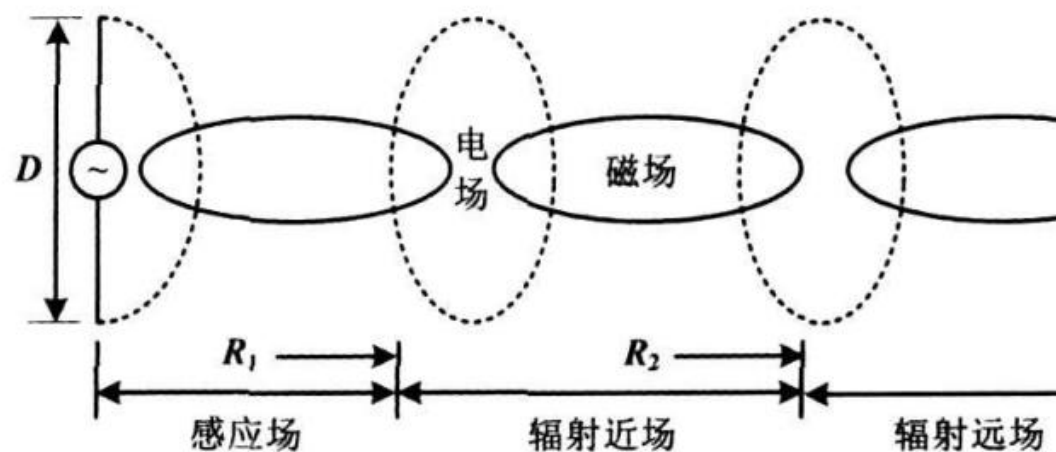
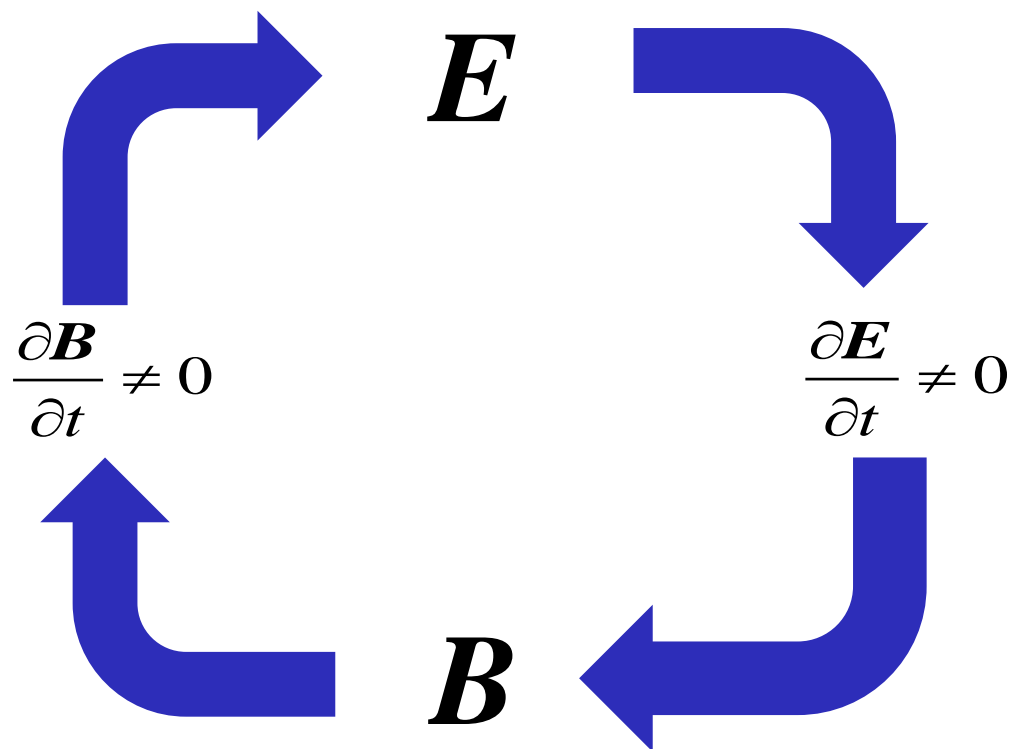
$$\vec{J}_C = 0, \rho_f = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$



- 麦克斯韦第一、二方程是独立方程，后面两个方程可以从中推得。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c \left(\text{或 } \rho \mathbf{v} \right) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

全电流定律

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

电磁感应定律

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

磁通连续性原理

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

高斯定律

- 静态场和恒定场是时变场的两种特殊形式。

5.3.2 分界面上的衔接条件

时变电磁场中媒质分界面上的衔接条件的推导方式与前三章类同，归纳如下：

磁场：

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

$$H_{2t} - H_{1t} = k$$

电场：

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

折射定律

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

例 5.3.1 试推时变场中理想导体与理想介质分界面上的衔接条件。

解：理想导体中 $J = \gamma E$ 为有限值，当 $\gamma \rightarrow \infty$ ， $E=0$ ；

$$\because \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \therefore \mathbf{B} = \mathbf{C}(\text{const})$$

若 $C \neq 0$ ， B 由 $0 \rightarrow C$ 的建立过程中必有 $\frac{\partial B}{\partial t} \neq 0$ ，即 $E \neq 0$

$J = \gamma E \rightarrow \infty$ ，所以只有 $B = C = 0$

为此：• 在理想导体内部没有时变电磁场，即 $E=0$ ， $B=0$ ；

• 分界面介质侧的衔接条件为

$$E_t = 0, \quad D_n = \sigma, \quad H_t = k, \quad B_n = 0$$

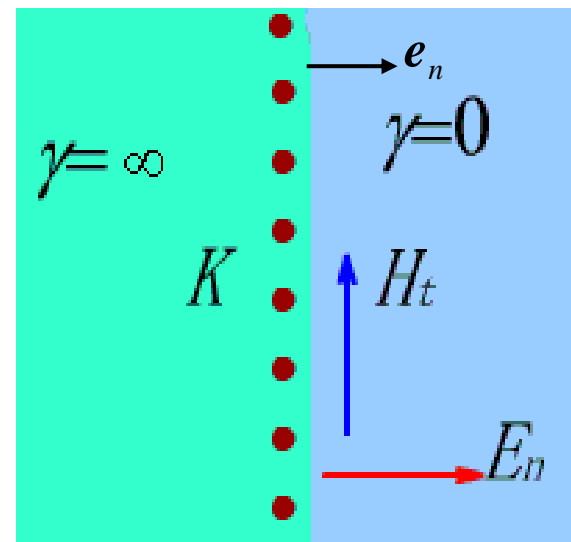


图5.2.1 媒质分界面

电磁波的全反射

5.4 坡印亭定理和坡印亭矢量

- 电磁能量符合自然界物质运动过程中能量守恒和转化定律,
坡印亭定理 反映了电磁场能量守恒与转换关系;
- 坡印亭矢量是描述电磁场能量流动的物理量。

5.4.1 坡印亭定理 (Poynting Theorem)

在时变场中, 电、磁能量相互依存, 总能量密度为

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

体积 V 内储存的能量 $W = \int_V w dV = \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV$

设体积元 dV 中储存的能量 $w dV$ 随时间的变化率为

$$\begin{aligned} \frac{\partial(w dV)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dV \right] \\ &= \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = \left[\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}_c) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \right] dV \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(wdV)}{\partial t} = [E \cdot (\nabla \times H - J_c) - H \cdot (\nabla \times E)]dV = [E \cdot (\nabla \times H) - H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot J_c]dV$$

利用矢量恒等式 $\nabla \cdot (E \times H) = H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H)$

则有
$$\frac{\partial(wdV)}{\partial t} = -[\nabla \cdot (E \times H) + E \cdot J_c]dV$$

取体积分, 得
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V wdV = -\oint_S (E \times H) \cdot dS - \int_V E \cdot J_c dV - \int_V E \cdot J_v dV$$

若体积内含有电源则

$J_c = \gamma(E + E_e)$, 将 $E = J_c / \gamma - E_e$ 代入上式第二项, 整理得

$$\oint_S (E \times H) \cdot dS = \int_V E_e \cdot J_c dV - \int_V \frac{J_c^2}{\gamma} dV - \int_V E \cdot J_v dV - \frac{\partial W}{\partial t}$$

坡印亭定理

物理意义: 体积V内电源提供的功率, 除去电阻消耗的热功率和电荷运动消耗的机械功率, 减去电磁能量的增加率, 等于穿出闭合面S的电磁功率。

特殊情况

5.4.2 坡印亭矢量

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J}_c dV - \int_V \frac{J_c^2}{\gamma} dV - \frac{\partial W}{\partial t}$$

定义坡印亭矢量 (Poynting Vector)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{W/m}^2$$

它描述了空间一点电磁能量传输或流动特性。表示单位时间内流过与电磁波传播方向相垂直单位面积上的电磁能量，亦称为功率流密度， \mathbf{S} 的方向代表波传播的方向，也是电磁能量流动的方向。

例 5.4.1 用坡印亭矢量分析直流电源沿同轴电缆向负载传送能量的过程。设电缆为理想导体，内外半径分别为 R_1 和 R_2 。

解：理想导体内部电磁场为零。电磁场分布如图所示。

电场强度

$$E = \frac{U}{\rho \ln(R_2 / R_1)} e_\rho$$

磁场强度

$$H = \frac{I}{2\pi\rho} e_\phi$$

坡印亭矢量

$$S = E \times H = \frac{U}{\rho \ln(R_2 / R_1)} \cdot \frac{I}{2\pi\rho} e_z$$

单位时间内流入内外导体间的横截面 A 的总能量为

$$P = \int_A S \cdot dA = \int_{R_1}^{R_2} \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(R_2 / R_1)} 2\pi\rho d\rho = UI$$

这表明：

- 穿出任一横截面的能量相等，**电源提供的能量全部被**
- 电磁能量是通过导体周围的介质传播的，**导线只起导向作用。**

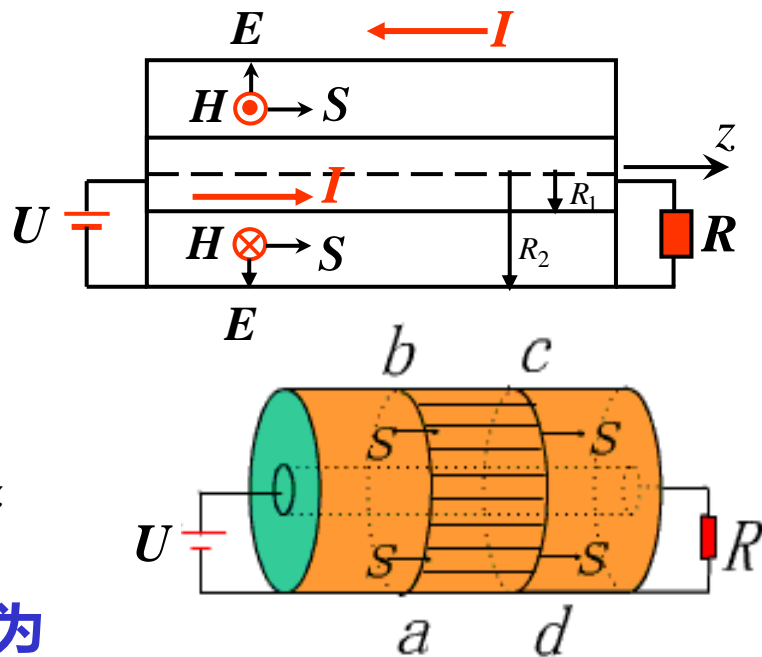
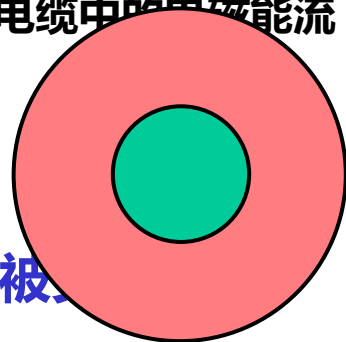


图5.4.1 同轴电缆中的电磁能流



例 5.4.2 导线半径为 a , 长为 l , 电导率为 γ , 通有电流 I , 试用坡印亭矢量计算导线损耗的能量。

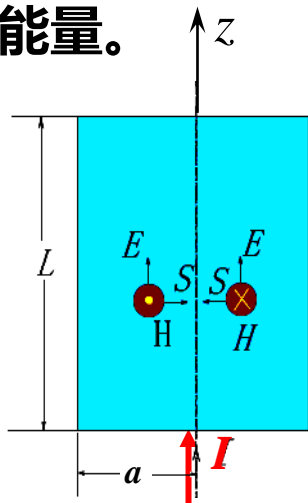


图5.4.2 计算导线损耗的量

解：思路： 由 $I \rightarrow E$, $H \rightarrow S \rightarrow P$ 。导体内

电场强度

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{\pi a^2 \gamma} e_z$$

磁场强度

$$H = \frac{I}{2\pi a^2} \rho e_\phi \quad 0 < \rho \leq a$$

以导体表面为闭合面，则导体吸收的功率为

$$P = -\oint_S (E \times H) \cdot dS = -\frac{I}{\pi a^2 \gamma} \frac{I}{2\pi a^2} a(-e_\rho) \cdot 2\pi a L e_\rho = I^2 \frac{L}{\pi a^2 \gamma} = I^2 R_0$$

表明，导体电阻所消耗的能量是由外部传递的。

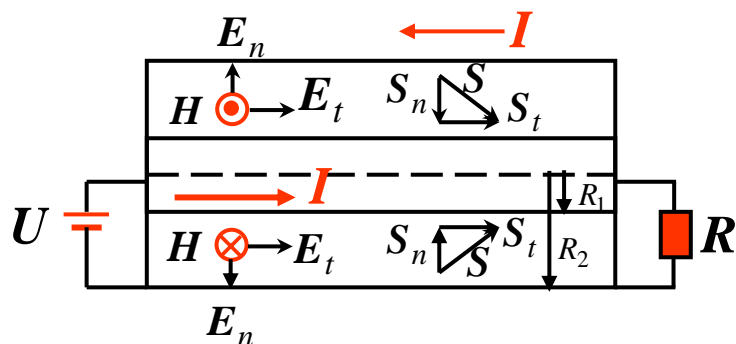


图5.4.3 导体有电阻时同轴电缆中的 E 、 H 与 S

电源提供的能量一部分用于导线损耗

$$S_n = E_t \times H$$

另一部分传递给负载

$$S_t = E_n \times H$$

5.5 正弦电磁场

5.5.1 电磁场基本方程的相量形式

1) 正弦时变场量的相量形式

正弦电磁场的相量形式与正弦稳态电路中的相量类同，后者有三要素：**振幅**(标量，常数)、**频率**和**相位**。

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad \dot{I} = Ie^{j\varphi}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2}I\omega\sin(\omega t + 90^\circ + \varphi) \quad \rightarrow \quad j\omega\dot{I} = j\omega Ie^{j\varphi}$$

前者也有三要素：**振幅**（矢量、空间坐标的函数），**频率**和**相位**。
如果 F 的三个分量初相位相同，则有

$$F(x, y, z, t) = \sqrt{2}F(x, y, z)\sin(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad \dot{F} = F(x, y, z)e^{j\varphi}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sqrt{2}F(x, y, z)\omega\sin(\omega t + 90^\circ + \varphi) \quad \rightarrow \quad j\omega\dot{F} = j\omega Fe^{j\varphi}$$

2) 正弦电磁场基本方程组的相量形式

$$\oint_l \dot{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + j\omega \dot{\mathbf{D}}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{J}_c + j\omega \dot{\mathbf{D}}$$

$$\oint_l \dot{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S j\omega \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}}$$

$$\oint_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0$$

$$\oint_S \dot{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{S} = \dot{q}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \dot{\rho}$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \varepsilon \dot{\mathbf{E}}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{\mathbf{H}}$$

$$\mathbf{J}_c = \gamma \dot{\mathbf{E}}$$

5.5.2 坡印亭定理的相量形式

在正弦电磁场中，坡印亭矢量的瞬时形式为

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi_E) \times \sqrt{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi_H) \\ &= 2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi_E) \sin(\omega t + \phi_H) \\ &= (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \left[\underset{0 \sim 1}{\cos(\phi_E - \phi_H)} - \underset{-1 \sim +1}{\cos(2\omega t + \phi_E + \phi_H)} \right] \end{aligned}$$

当 S 为正值时，表示在该点有能流沿 S 的正方向流动，为负则表示该点能流沿 S 的负方向流动。

S 在一个周期内的平均值为

$$S_{av}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T S(\mathbf{r}, t) dt = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cos(\phi_E - \phi_H)$$

称之为**平均功率流密度**。表明若要 $S_{av} \neq 0$ (需有 $\phi_E \neq \phi_H$ 即 $\mathbf{E} \neq 0^\circ \mathbf{H}$ 不平行，这时该点除了能量交换外，还有平均功率沿 S 正方向传递。

容易证明

$$S_{av}(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*)$$

证明 $S_{av}(\mathbf{r}) = \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*)$

$$\because \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi_E) \rightarrow \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\phi_E}$$

同理 $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\phi_H}$

$$\because \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\phi_E} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-j\phi_H} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) e^{j(\phi_E - \phi_H)}$$

$$\therefore \text{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cos(\phi_E - \phi_H) = S_{av}$$

定义

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*$$

坡印亭矢量的相量形式

其实部为平均功率流密度，虚部为无功功率流密度。

坡印亭定理的相量形式推导过程

\dot{S} 取散度，展开为

$$\nabla \cdot (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) = \dot{\mathbf{H}}^* \cdot (\nabla \times \dot{\mathbf{E}}) - \dot{\mathbf{E}} \cdot (\nabla \times \dot{\mathbf{H}}^*)$$

$$\because \nabla \times \dot{\mathbf{H}}^* = (\dot{\mathbf{J}}_c + j\omega \dot{\mathbf{D}})^* = \dot{\mathbf{J}}_c^* - j\omega \dot{\mathbf{D}}^*$$

$$\therefore \nabla \cdot (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) = -j\omega \dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^* - \dot{\mathbf{E}} \cdot (\dot{\mathbf{J}}_c^* - j\omega \dot{\mathbf{D}}^*)$$

取体积分，利用**高斯散度定理**，有

$$\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \frac{J_c^2}{\gamma} dV - j\omega \int_V (\mu H^2 - \varepsilon E^2) dV$$

$$\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \frac{J_c^2}{\gamma} dV - j\omega \int_V (\mu H^2 - \varepsilon E^2) dV + \int_V \dot{\mathbf{E}}_e \cdot \dot{\mathbf{J}}_c^* dV$$

当 V 内无电源时，闭合面 S 内吸收的功率为

$$-\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S} = \underbrace{\int_V \frac{J_c^2}{\gamma} dV}_{\text{有功功率}} + \underbrace{j\omega \int_V (\mu H^2 - \varepsilon E^2) dV}_{\text{无功功率}} = P + jQ$$

有功功率

无功功率

$$-\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{J_c^2}{\gamma} dV + j\omega \int_V (\mu H^2 - \varepsilon E^2) dV = P + jQ$$

此项可用于求解电磁场问题的**等效电路参数**

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{I^2} \text{Re} \left[-\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S} \right] = \frac{1}{I^2} \int_V \frac{J_c^2}{\gamma} dV$$

$$X = \frac{Q}{I^2} = \frac{1}{I^2} \text{Im} \left[-\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S} \right] = \frac{1}{I^2} \omega \int_V (\mu H^2 - \varepsilon E^2) dV$$

例 5.5.1 平板电容器如图所示，当两极板间加正弦**工频**交流电压 $u(t)$ 时，试分析电容器中储存的电磁能量。

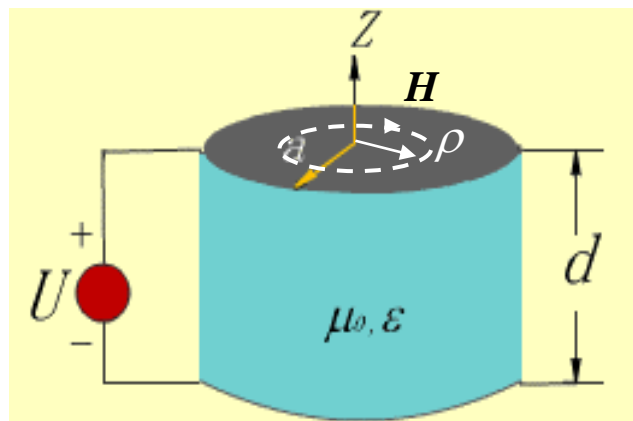


图5.5.1 两圆电极的平板电容器

解：忽略边缘效应及感应电场，则**电场**满足**无旋性质**，可表示为

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{U}}{d}(-\mathbf{e}_z)$$

根据**全电流定律**，由位移电流产生的磁场为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 2\pi\rho\dot{H} = \int_S j\omega\varepsilon \dot{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{S} = j\omega\varepsilon \frac{\dot{U}}{d} \pi\rho^2$$

整理得

$$\dot{H} = j\omega\varepsilon \frac{\dot{U}}{2d} \rho(-\mathbf{e}_\phi)$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{U}}{d}(-\mathbf{e}_z) \quad \dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon \frac{\dot{U}}{2d} \rho(-\mathbf{e}_\phi)$$

复坡印亭矢量

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* = \frac{\dot{U}}{d} (-\mathbf{e}_z) \times \left[-j\omega\varepsilon \frac{\dot{U}^*}{2d} \rho(-\mathbf{e}_\phi) \right]$$

$$= j\omega\varepsilon \frac{U^2}{2d^2} \rho \mathbf{e}_\rho$$

电容器吸收功率

$$-\oint_S \dot{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{S} = -j\omega\varepsilon \frac{U^2}{2d^2} a \mathbf{e}_\rho \cdot 2\pi a d \mathbf{e}_\rho$$

$$= -j\omega \frac{\varepsilon \pi a^2}{d} U^2 = -j\omega C U^2$$

(无功功率)

显然，电容器中储存电场能量，磁场能量忽略不计，电磁场近似为EQS场。

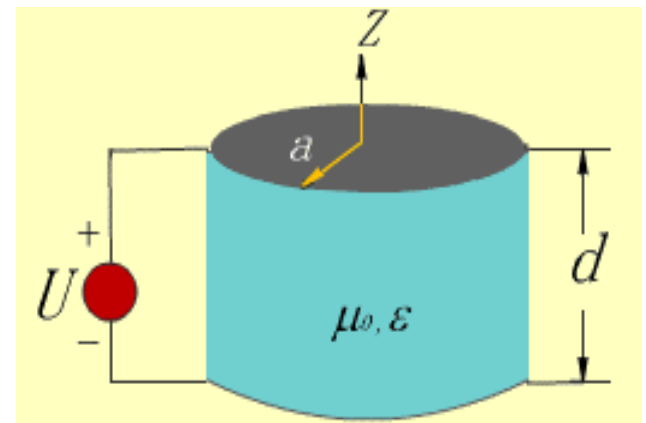


图5.5.1 两圆电极的平板电容器

例5.5.2 N 匝长直螺线管，通有**正弦**交流电流 $i(t)$ 。试分析螺线管储存的电磁能量。

解：忽略边缘效应及位移电流，则时变磁场可用**恒定磁场的方法**计算（为什么？）。

从**安培环路定律**，得 $\dot{H} = \frac{\dot{I} N}{d} e_z$

从**电磁感应定律**，得 $\oint_l \dot{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega\mu_0 \int_S \dot{H} \cdot d\mathbf{S}$

$$\dot{E} 2\pi\rho = -j\omega\mu_0 \dot{H} \pi\rho^2 \rightarrow \dot{E} = -j\omega \frac{\mu_0}{2} \dot{H} \rho e_\phi$$

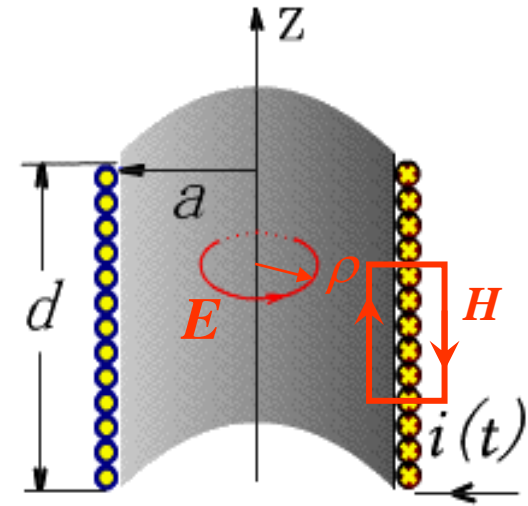


图5.5.2 长直螺线管

复坡印亭矢量 $\dot{S} = \dot{E} \times \dot{H}^* = -j\omega \frac{\mu_0}{2} H^2 \rho e_\rho = -j\omega\mu_0 \frac{I^2 N^2}{2d^2} \rho e_\rho$

螺线管吸收的功率

$$-\oint_S \dot{S} \cdot d\mathbf{S} = j\omega\mu_0 \frac{I^2 N^2}{2d^2} a \cdot 2\pi a d = j\omega \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{d} I^2 = j\omega L I^2$$

(无功功率)

显然，螺线管中储存磁场能量，电场能量忽略不计，**电磁场近似为MQS场**。

结束

5.6 动态位

5.6.1 动态位的引入

考察 maxwell 方程组的微分形式

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad \text{性能方程}$$

由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$

由 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \rightarrow \boxed{\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi}$

$$\mathbf{E} = -\left(\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{ind}$$

\mathbf{A}, φ 称为**动态位** (potential of Kinetic State) 。

5.6.2 动态位的微分方程 —— 达朗贝尔方程

$$\text{由 } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}_c - \mu \varepsilon \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

经整理后, 得

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left((\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{J}_c \quad (1)$$

$$\text{由 } \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \rightarrow \nabla \cdot \varepsilon \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) = \rho$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2)$$

定义 \mathbf{A} 的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

洛伦兹条件 (规范)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

达朗贝尔方程 (D'Alembert Equation)

$$\nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

这是非齐次波动方程



讨论与引伸

洛伦兹条件 (Lorentz Condition)的重要意义

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

- 确定了 ∇ 的值, 与 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 共同唯一确定 \mathbf{A} ;
- 简化了动态位与场源之间的关系, 使得 \mathbf{A} 单独由 \mathbf{J}_c 决定, φ 单独由 ρ 决定, 给解题带来了方便;
- 洛伦兹条件是电流连续性原理的体现。
- 在静电场中, 洛伦兹条件蜕化成库仑规范

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

5.7 达朗贝尔方程的解答

达朗贝尔方程 (D'Alambert Equation)

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu\mathbf{J} \\ \nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon}\end{aligned}$$

非齐次波动方程

1) 若场不随时间变化, 波动方程蜕变为泊松方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}_c \quad \nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon$$

2) 在时变场中的无源区, 达朗贝尔方程变为齐次波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

因此可以推测, 达朗贝尔方程的解既应有泊松方程的解答形式, 又应有波动性。

5.7.1 点源动态位的解答

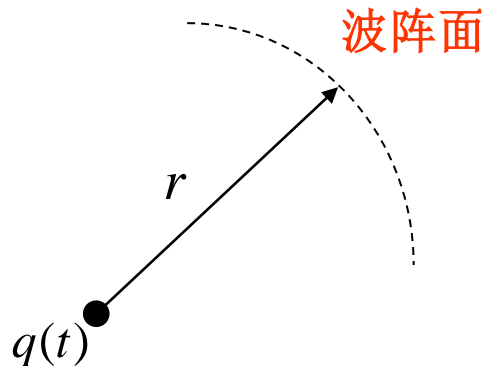
以位于坐标原点时变点电荷为例，然后推广到连续分布场源的情况。

$$\nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{除 } q \text{ 点外})$$

在球坐标系中，具有球对称性的展开式为

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \quad \text{代入上式得}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{式中 } v = 1/\sqrt{\mu \varepsilon} \text{ 具有速度的量纲}$$



做函数代换，令 $\varphi(r, t) = \frac{u(r, t)}{r}$

代入上式得一维齐次波动方程：
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

通解为
$$u = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right) \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

式中， f_1, f_2 是具有二阶连续偏导数的任意函数， $t - r/v$ ，称为组合变量。

通解的特点：

- (1) φ 的振幅与 r 成反比，随着 r 的增大振幅越来越小，到无穷远，振幅为零，波便消失。
- (2) φ 作为时间的函数，随 r 的增大以速度 v 落后。即在时间上滞后。

1) 通解的物理意义:

$f_1(t - \frac{r}{v})$ 的物理意义

当时间从 $t \rightarrow t + \Delta t$, 信号从 $r \rightarrow r + v\Delta t$

$$\text{有 } f_1(t + \Delta t - \frac{r + v\Delta t}{v}) = f_1(t - \frac{r}{v})$$

f_1 在 时间内经过 距离后不变,说明它是以有限速度 v 向 r 方向传播,称之为**入射波**或**正向行波**。

$f_2(t + \frac{r}{v})$ 的物理意义

当时间从 $t \rightarrow t + \Delta t$, 信号从 $r \rightarrow r - v\Delta t$ 时, 有

$$f_2(t + \Delta t + \frac{r - v\Delta t}{v}) = f_2(t + \frac{r}{v})$$

它表明: f_2 在 Δt 时间内, 以速度 v 向 $(-r)$ 方向前进了

在无限大均匀媒质中没有反射波, 即 $f_2=0$ 。

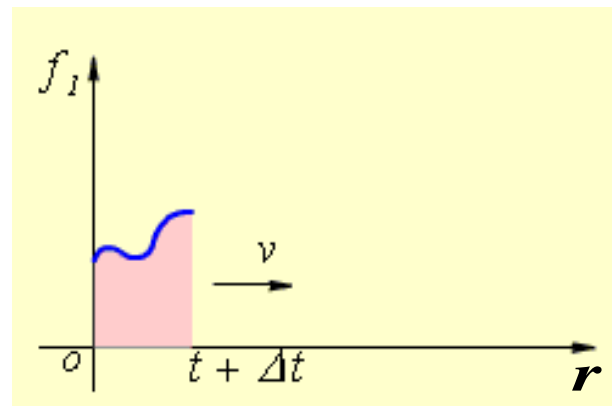


图5.6.1 f_1 的物理意义

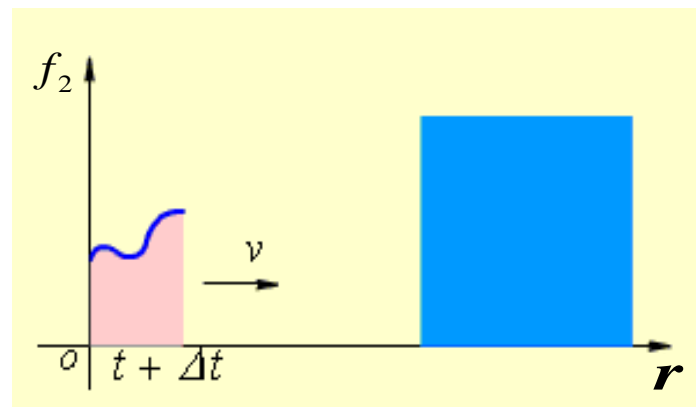


图5.6.2 波的入射、反射与透射
距离,故称之为**反射波**。

5.7.2 达朗贝尔方程的解答和推迟位

当点电荷不随时间发生变化时，波动方程蜕变为 $\nabla^2 \varphi$ 其特解为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad (\text{无限大均匀媒质, 点电荷位于原点})$$

由此推论，时变点电荷的动态标量位为

$$\varphi(r, t) = \frac{q(t - \frac{r}{v})}{4\pi\epsilon r} \quad (\text{位于原点, 无反射})$$

可以证明：该解满足**齐次波动方程**。

$$\varphi(r, t) = \frac{q(r', t - \frac{r}{v})}{4\pi\epsilon r} \quad (\text{位于} r' \text{点, 无反射})$$

连续分布电荷产生的标量位可利用**迭加原理**获得

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dV'$$

无反射

若激励源是时变电流源时，仿上述方法推导，得到A的表达式

$$A(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_c(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dV' \quad (\text{无反射})$$

当场源不随时间变化时，蜕变为恒定磁场中的磁矢位A。



讨论与引伸

• 达朗贝尔方程解的形式表明： t 时刻的响应取决于 $t - \frac{r}{v}$ 时刻激励源的情况。
故又称 A、 φ 为**滞后位**（Retarded Potential）。

- **电磁波是以有限速度传播的**，这个速度称为**波速** $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ m/s
- 电磁波在真空中的波速与光速相等。**光也是一种电磁波。**

为何将达朗贝尔方程中 $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 定义为速度？

• 它具有速度的量纲；且通解中的 $f_1(t - \frac{r}{v})$ 经过 $\frac{r}{v}$ 后得以保持不变，必有自变量不变，即

$$t - \frac{r}{v} = \text{const} \rightarrow r = v(t - \text{const}) \rightarrow \frac{dr}{dt} = v$$

它表明： f_1 是一个以速度 v 沿 r 方向前进的波。

5.7.3 达朗贝尔方程解答的相量形式

在正旋电磁场中，达朗贝尔方程的相量形式为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad \nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{v^2} \phi = -\dot{\rho} / \epsilon$$

令 $\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$ 单位为rad/m。表示波沿传波方向行进单位距离时，

因此，达朗贝尔方程变为

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + \beta^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu \dot{\mathbf{J}}_c \quad \text{和} \quad \nabla^2 \dot{\phi} + \beta^2 \dot{\phi} = -\dot{\rho} / \epsilon$$

由于

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right) = \sqrt{2} \rho(\mathbf{r}') \sin\left[\omega\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right) - \psi\right] = \text{Im}\left[\sqrt{2} \rho(\mathbf{r}') e^{-j\psi} e^{-j\beta|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{j\omega t}\right]$$

源的相量表示式为

$$\dot{\rho}(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}') e^{-j\psi}$$

所以动态位相量表达式为

$$\dot{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}') e^{-j\beta|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad \text{同理} \quad \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\dot{\mathbf{J}}_c(\mathbf{r}') e^{-j\beta|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\dot{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}') e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

$$\dot{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\dot{\mathbf{J}}_c(\mathbf{r}') e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$



讨论与引伸

- $e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ 体现了时变场推迟位的特点，位比源在空间相位上**滞后** 故称为**空间相位因子**，亦称**滞后因子**。

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v$ —— 滞后时间，

$\omega t = \omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v} = \beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ —— 滞后相位，故 $\beta = \omega/v$ —— **相位常数**。

- $\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 1$ 或 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$ 称为**似稳条件**。

$$\dot{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

$$\dot{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\dot{\mathbf{J}}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

瞬时值 $\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

表明时变电磁场的瞬时分布规律分别与静电场和恒定磁场相同，称为**似稳场**，**时变场中满足似稳条件的区域称为似稳区**，**似稳区内的时变场为似稳场**。

在正弦稳态电磁场中，若已求得 \dot{A} ，可求其它场量。

$$\dot{\phi} = \frac{\nabla \cdot \dot{A}}{-j\omega\mu\varepsilon} \quad \text{洛伦兹条件}$$

$$\dot{B} = \nabla \times \dot{A}$$

$$\dot{E} = -j\omega \dot{A} - \nabla \phi = -j\omega \dot{A} + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \dot{A})$$

说明在正弦态电磁场中，其它场量可仅由 \dot{A} 表示

结束

对达朗贝尔方程 (1) 两边取散度

$$\nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \nabla \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \nabla \cdot \mathbf{J}_c \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \nabla \cdot \mathbf{J}_c$$

代入洛伦兹条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

得
$$-\mu\epsilon \nabla^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \mu^2 \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \nabla \cdot \mathbf{J}_c$$

交换微分次序

$$-\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \varphi) + \mu^2 \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = -\mu \nabla \cdot \mathbf{J}_c$$

整理得

$$-\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = -\mu \nabla \cdot \mathbf{J}_c$$

将达朗贝尔方程 (2) 代入上式, 得

$$\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\rho}{\epsilon} \right) = \mu \nabla \cdot \mathbf{J}_c$$

即

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

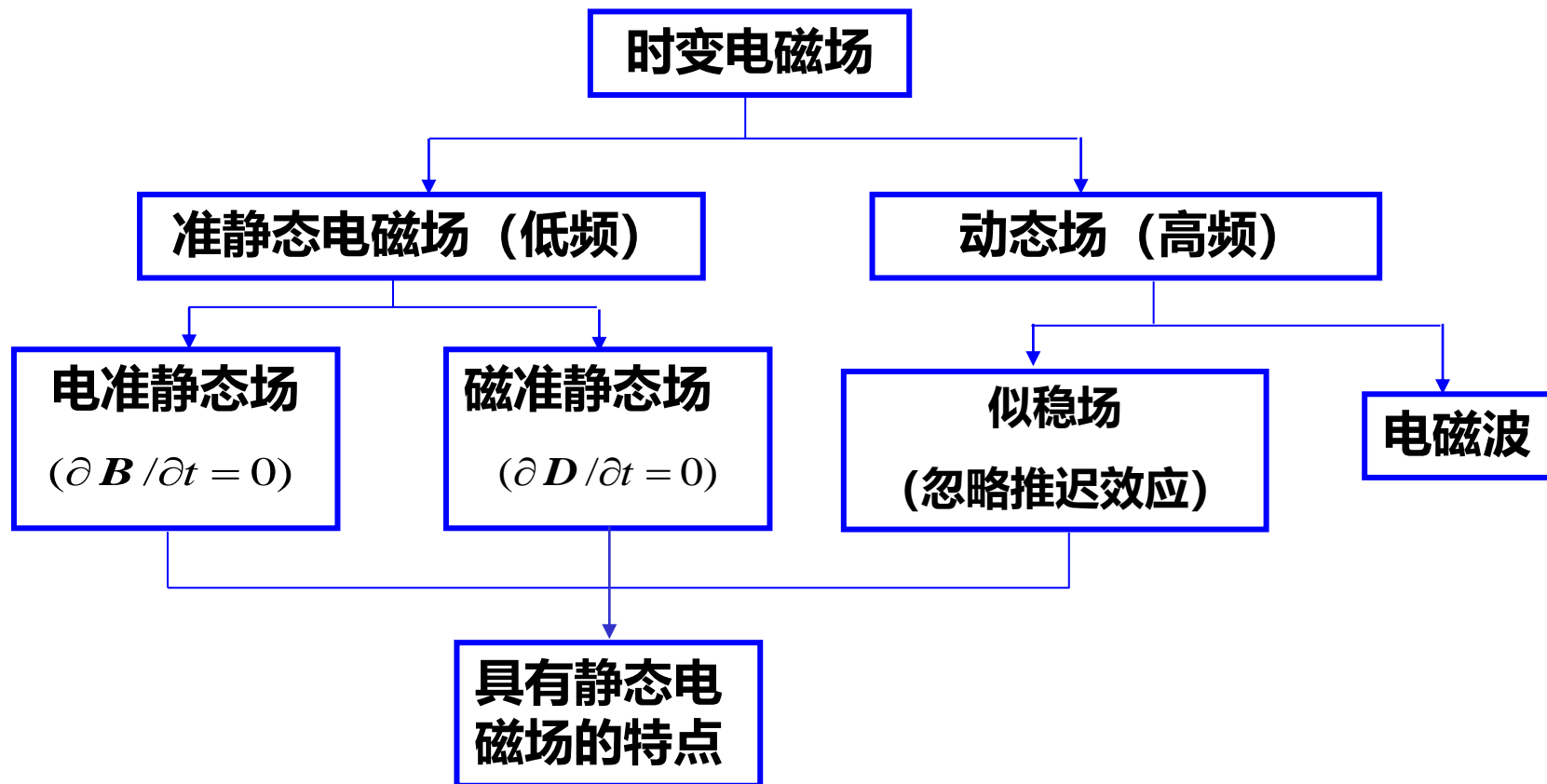
电流连续性方程

它表明洛伦兹条件 ($\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$) 隐含着重要的物理意义。

证毕。

返回

5.8 准静态电磁场



- 电准静态场——Electroquasistatic 简写 EQS
- 磁准静态场——Magnetostatic 简写 MQS
- 任意两种场之间的空间尺度和时间尺度没有绝对的分界线。
- 工程应用（电气设备及其运行、生物电磁场等）

5.8.1 电准静态电磁场

低频时，忽略二次源 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} (=0)$ 的作用，即 $E_{\text{ind}} \approx 0$,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{\text{ind}}) \approx \nabla \times \mathbf{E}_c = 0 \text{ 电场呈近似无旋}$$

电磁场基本方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} \approx 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

特点：电场的有源无旋性与静电场相同，称为电准静态场（EQS）。

用洛仑兹规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\partial \varphi / \partial t$ ，得到动态位满足的微分方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad \nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon$$

例5.8.1 有一圆形平行板电容器，极板半径 $a=10\text{cm}$ 。边缘效应可以忽略。现设有频率为50Hz、有效值为0.1A的正弦电流通过该电容器。求电容器中的磁场强度。

解： 电容器中位移电流密度为

$$i_d = i_c \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{J}_d = \frac{i_c}{\pi a^2} (-\mathbf{e}_z)$$

式中电流 $i = 0.1\sqrt{2}\sin 314t$ A。设圆柱坐标系的 z 轴与电容器的轴线重合。由全电流定律有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = J_d \pi \rho^2 \quad \Longrightarrow \quad 2\pi \rho H = \frac{\pi \rho^2}{\pi a^2} i_c$$

$$H = \frac{\rho}{2\pi a^2} i_c (-\mathbf{e}_\phi) = 2.25 \rho \sin 314 t (-\mathbf{e}_\phi) \quad \text{A/m}$$

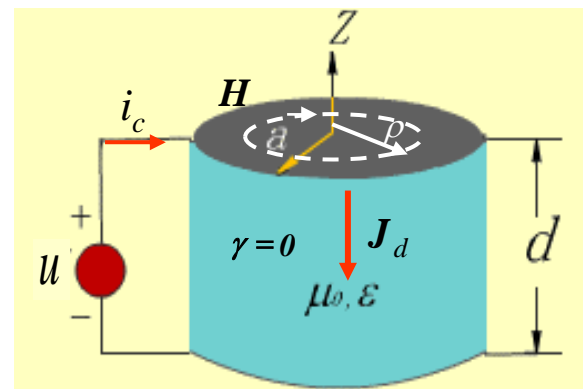


图5.8.1 两圆电极的平板电容器

5.8.2 磁准静态电磁场

低频时，忽略二次源 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 的作用，即 $H_D \approx 0$ ，电磁场基本方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} \approx \mathbf{J}_c, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = 0$$

特点：磁场的有旋无源性与恒定磁场相同，称为磁准静态场（MQS）。

用库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，得到动态位满足的微分方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad \nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon$$



EQS 与 MQS 的共性与个性

- φ, A 满足泊松方程, 说明 EQS 和 MQS 忽略了滞后效应和波动性, 属于似稳场。
- EQS和MQS 场中, 同时存在着电场与磁场, 两者相互依存。
- EQS场的电场与静电场满足相同的基本方程, 在任一时刻 t , 两种电场的分布一致, 解题方法相同。EQS的磁场按 $\nabla \times H = J + \partial D / \partial t$ 计算。
- MQS的磁场与恒定磁场满足相同的基本方程, 在任一时刻 t , 两种磁场的分布一致, 解题方法相同, MQS的电场按 $\nabla \times E = -\partial B / \partial t$ 计算。
- φ, A 在两种场中满足相同的微分方程, 描述不相同的场, 为什么?
 - a) A 的散度不同, A 必不相同, $B = \nabla \times A$ 也不相同;
 - b) $E = -\nabla \varphi$ (EQS) 和 $E = -\nabla \varphi - \partial A / \partial t$ (MQS), 表明 E 不相同。

似稳场判别条件:

(1) 对于导体内的时变电磁场, 由传导电流与位移电流的相对大小决定似稳条件, 忽略位移电流的条件是:

$$\frac{\omega \varepsilon}{\gamma} \ll 1 \quad \text{或} \quad \omega \varepsilon \ll \gamma$$

例: 纯金属 $\gamma \approx 10^7 \text{ S/m}$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ 则 $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = \frac{10^7}{8.85 \times 10^{-12}} \approx 10^{18} \text{ 弧/秒}$

(2) 对于理想电介质中的时变电磁场而言, 似稳条件由场点与源点之间的距离决定。假定在场源处产生了随时间作正弦变化的电场 $E = \text{Im} [E_0 e^{j\omega t}]$ 那么在与场源相距 R 处的电场对时间的相依关系如下

$$E \approx \text{Im} [E_0 e^{j\omega(t-R/v)}]$$

如果忽略推迟效应, 则要求 $e^{-j\omega R/v} \approx 1$

即 $\frac{\omega R}{v} = \frac{2\pi R}{\lambda} \ll 1$ 或 $R \ll \lambda$

5.8.3 磁准静态场与电路

基尔霍夫电流定律可表述为：任一瞬时任一节点的电流的代数和恒等于零。即流入该节点的电流必等于流出的电流，即

$$\sum_{j=1}^N i_j = 0$$

在MQS场中， $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 即 $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 故有

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_3} \mathbf{J}_3 \cdot d\mathbf{S} = i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

即电路的基尔霍夫电流定律

$$\sum_{j=1}^3 i_j = 0$$

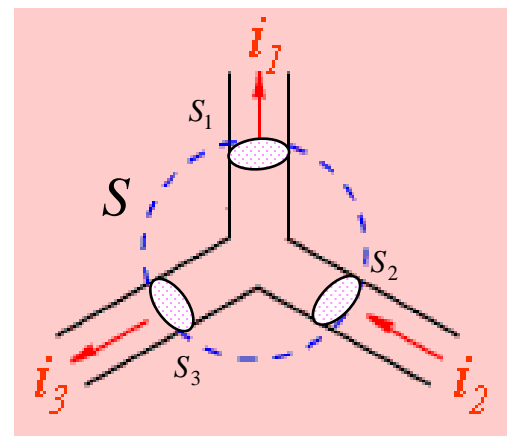


图 5.8.2 节点电流

基尔霍夫电压定律指出：任一瞬时网络中任一回路内部的电压降的代数和恒等于零，即

$$\sum_{j=1}^N u_j = 0$$

时变场中 $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{E}_R + \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_e) \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$

电阻 (MQS) $\int_{L_R} \mathbf{E}_R \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_R} \frac{\mathbf{J}}{\gamma} \cdot d\mathbf{l} = \frac{L_R}{\gamma S} i = Ri = u_R$

电容 (EQS) $\int_{L_c} \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_c} \frac{q(t)}{\epsilon S} \cdot d\mathbf{l} = \frac{L_c}{\epsilon S} q(t) = \frac{1}{C} \int i dt = u_c$

电感 (MQS) $\int_{L_L} \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} = -u_L$

电源 $\int_{L_s} \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = \epsilon = -u_s$

有 $u_s = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u_R + u_L + u_C$

即电路的基尔霍夫电压定律

$$\sum u = 0。$$

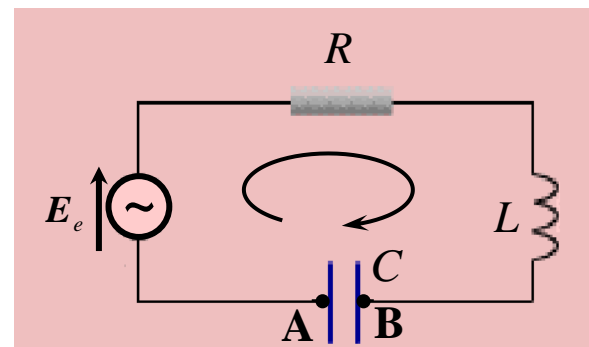


图 5.8.3 环路电压

例5.8.2 用磁准静态场的方法处理同轴电缆内的电磁问题。

解：考虑一根同轴电缆传送交变的电磁功率，假如从电源到负载的距离远小于六分之一波长。忽略边缘效应,同轴线中的电场、磁场强度分别是：

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{U}}{\rho \ln b/a} \mathbf{e}_\rho \quad \dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{I}}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$

内外导体之间的坡印亭矢量是

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* = \frac{\dot{U} \dot{I}^*}{2\pi\rho^2 \ln b/a} \mathbf{e}_z$$

同轴线传输的平均功率应是坡印亭矢量在内外导体之间横截面上的面积分，即

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{Re} \left[\int_S \frac{\dot{U} \dot{I}^*}{2\pi\rho^2 \ln b/a} ds \right] & ds &= 2\pi\rho d\rho \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{\dot{U} \dot{I}^*}{\ln b/a} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \right] = \operatorname{Re} [\dot{U} \dot{I}^*] \end{aligned}$$

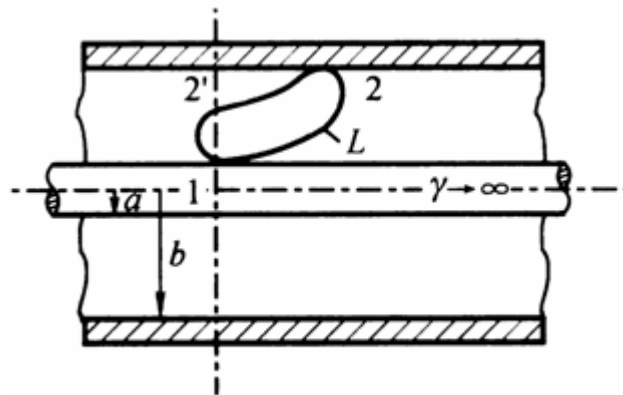


图5.8.4 同轴线中的磁准静态场

说明:

电压的概念只适用于同轴线的同一个横截面上的两点。

因为在磁准静态场中

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\oint_L \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} - \oint_L \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

说明 \mathbf{E} 和积分路径有关。

只有在同轴线的同一个横截面上才有 $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

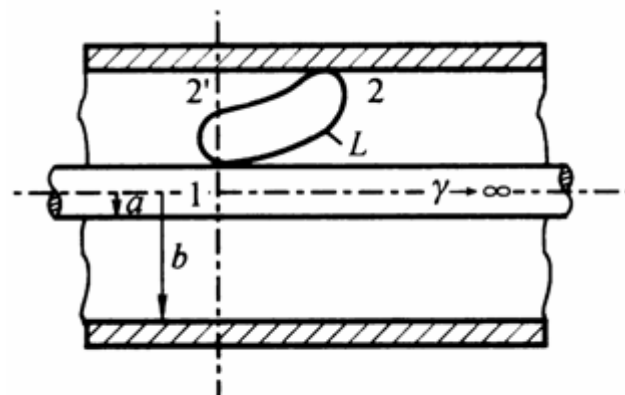


图5.8.4 同轴线中的磁准静态场

试证明在EQS场中, A, φ 满足

$$\nabla^2 A = -\mu J \quad \text{和} \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

证明: 在EQS场中

$$\nabla \times E \approx 0 \rightarrow E = -\nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot D = \rho \rightarrow \nabla \cdot \varepsilon (-\nabla \varphi) = \rho \rightarrow$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

同理 $\nabla \cdot B = 0 \rightarrow B = \nabla \times A$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \nabla \times A = \mu J - \mu \varepsilon \frac{\partial (\nabla \varphi)}{\partial t}$$

$$\text{即} \quad \nabla^2 A = -\mu J + \nabla (\nabla \cdot A) + \mu \varepsilon \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

取洛伦兹规范 $\nabla \cdot A = -\mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

有 $\nabla^2 A = -\mu J$

证毕。

返回

试证明在MQS场中 A, φ 满足

$$\nabla^2 A = -\mu J \quad \text{和} \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

证明: 在MQS场中

$$\nabla \cdot B = 0 \rightarrow B = \nabla \times A$$

$$\nabla \times H \approx J \rightarrow \nabla \times \nabla \times A = \mu J$$

即 $\nabla^2 A = -\mu J + \nabla (\nabla \cdot A)$

取库伦规范 $\nabla \cdot A = 0$

$$\nabla^2 A = -\mu J$$

同理

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow \nabla \times (E + \frac{\partial A}{\partial t}) = 0 \\ &\rightarrow E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned}$$

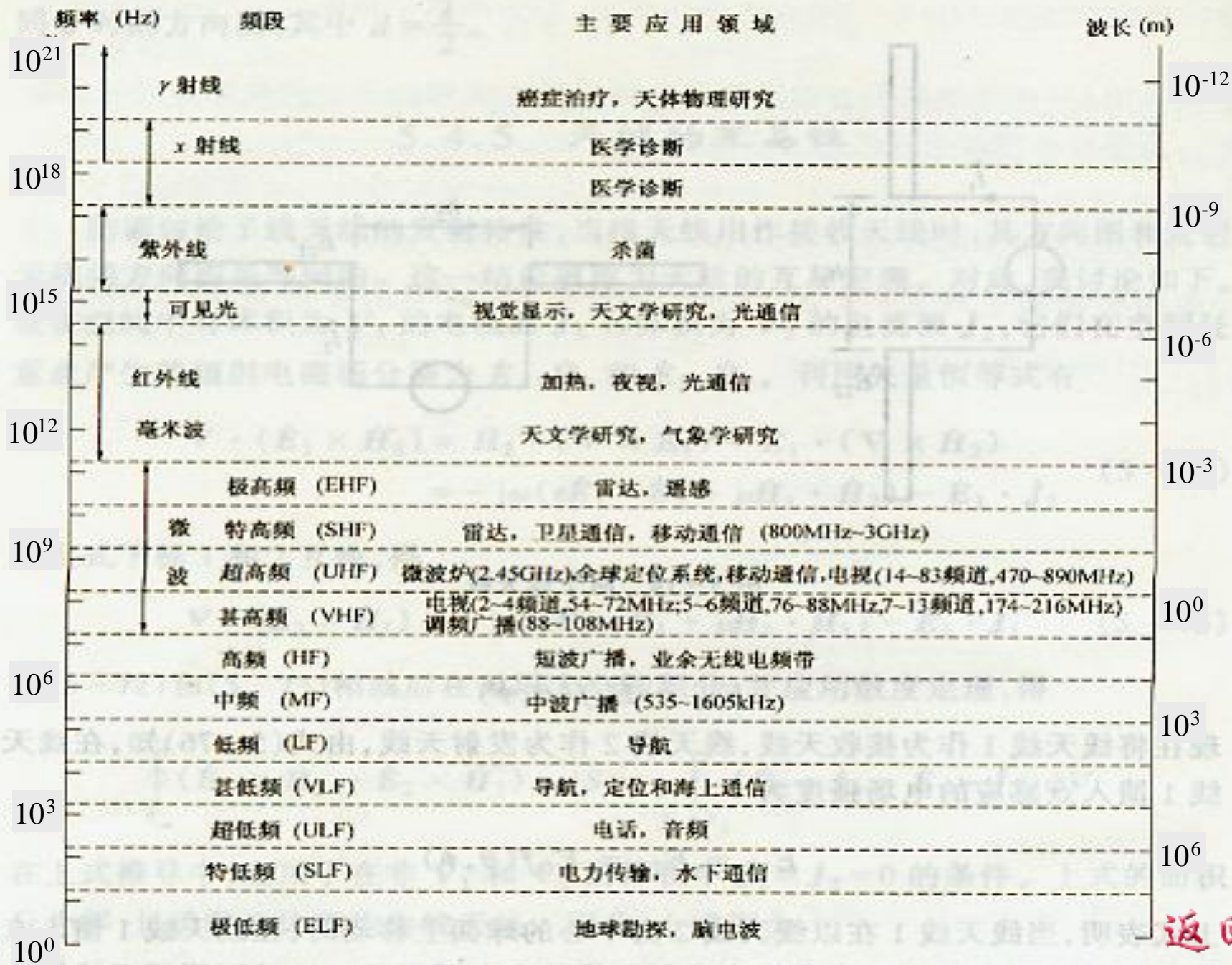
$$\begin{aligned} \nabla \cdot D = \rho &\rightarrow \nabla \cdot \varepsilon (-\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}) = \rho \\ &\rightarrow \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot A = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned}$$

取 $\nabla \cdot A = 0$, 得

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

证毕。

返回



返回

5.9 集肤效应、涡流、邻近效应及电磁屏蔽

5.9.1 集肤效应

在正弦电磁场中, $\dot{J} = \dot{J}_C + \dot{J}_D = \gamma \dot{E} + j\omega \varepsilon \dot{E}$, 满足 $\gamma \gg \omega \varepsilon$ 的材料称为良导体, 良导体中可以忽略位移电流, 场为 MQS:

$$\nabla \times \dot{H} = \dot{J}_C$$

和

$$\nabla \times \dot{E} = -j\omega \mu \dot{H}$$

在导体中, MQS场中同时存在自由电流和感应电流。靠近轴线处, 场量减小; 靠近表面处, 场量增加, 称为集肤效应 (skin effect)。

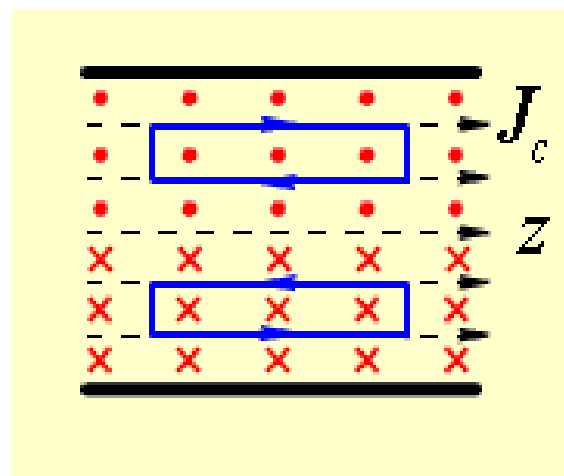


图5.9.1 电流的集肤效应

在正弦稳态下, 电流满足扩散方程 (热传导方程)

$$\nabla^2 \dot{J} = k^2 \dot{J}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{J}} = k^2 \dot{\mathbf{J}}$$

式中 $k = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = \sqrt{\omega\mu\gamma} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} (1 + j)$
 $= \alpha + j\beta$

以半无限大导体为例，电流沿 y 轴流动，则有

$$\nabla^2 \dot{J}_y(x) = k^2 \dot{J}_y(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \dot{J}_y(x) = k^2 \dot{J}_y(x) \quad \text{通解形式} \quad \dot{J}_y(x) = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

当 $x \rightarrow \infty$ 有限，故 $C_2 = 0$ ， $C_1 = \dot{J}_y(0) = \dot{J}_0$ ，则

$$\dot{J}_y(x) = \dot{J}_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

由 $\dot{\mathbf{J}} = \gamma \dot{\mathbf{E}}$ ，

由 $\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}}$

$$\dot{E}_y(x) = \frac{1}{\gamma} \dot{J}_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

$$\dot{H}_z(x) = -j \frac{k \dot{J}_0}{\mu \gamma \omega} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

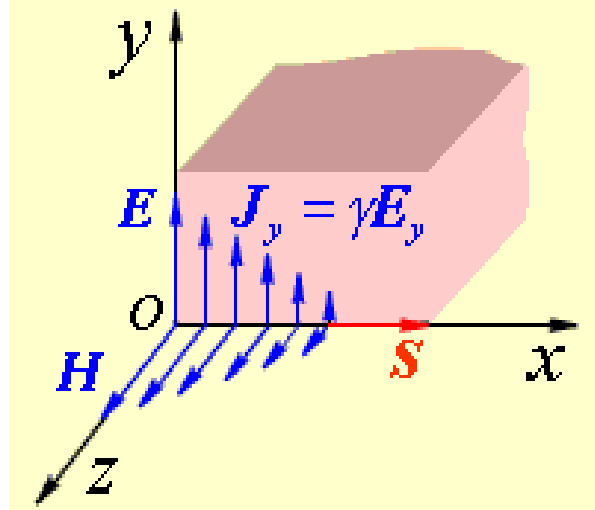


图5.9.2 半无限大导体中的电流 J_y 的分布



讨论与引伸

令 $d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}$ 称为透入深度 (Skin depth), d 的大小反映电磁场衰减的快慢。

当 $x=0$ 时, 幅值 $J_y(0) = J_0 e^{\alpha \cdot 0} = J_0$

当 $x=d$ 时, 幅值

$$J_y(d) = J_0 e^{-\alpha d} = J_0 e^{-1} \\ = J_y(0) \times 36.8\%$$

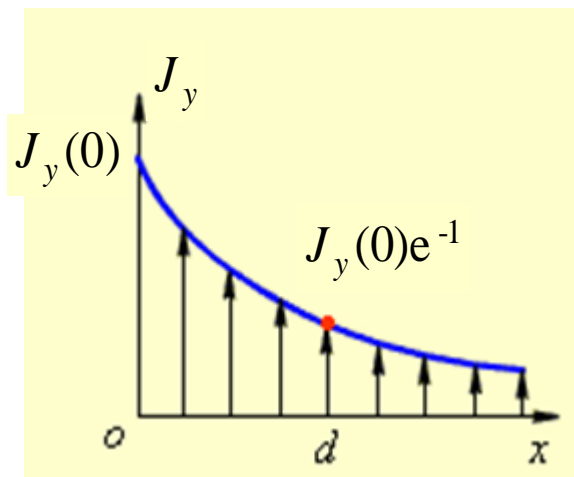


图5.9.3透入深度

d 表示电磁场衰减到表面值的 36.8% 或 $1/e$ 时所经过的距离。

当材料确定后, $\omega \uparrow \rightarrow \alpha \uparrow$ 衰减快 电流不均匀分布。

$$\dot{J}_y(x) = \dot{J}_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

式中, 通常满足 $\beta x \ll 1$ 不计滞阻效应, 因此, 此电流场属于似稳场。 (在工频情况下) $\beta \approx 1.047 \times 10^{-6}$

5.9.2 涡流及其损耗

1) 涡流

当导体置于交变的磁场中，与磁场正交的曲面上将产生闭合的感应电流，即涡流 (eddy current)。其特点：

- **热效应** 涡流是自由电子的定向运动，有与传导电流相同的热效应。
- **去磁效应**，涡流产生的磁场反对原磁场的变化。

工程应用：叠片铁芯（电机、变压器、电抗器等）、电磁屏蔽、电磁炉等。

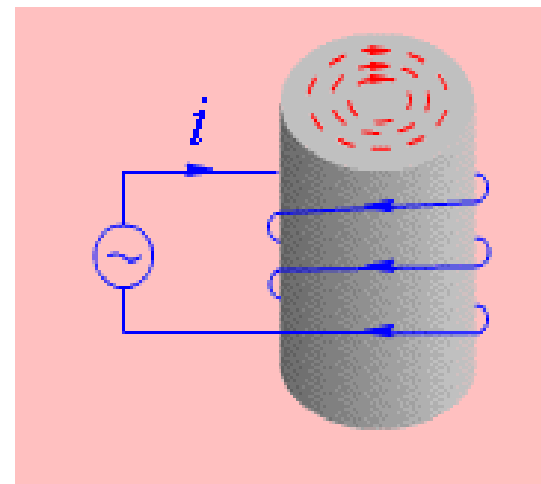


图5.9.4 涡流

2) 涡流场分布

以变压器铁芯叠片为例，研究涡流场分布。

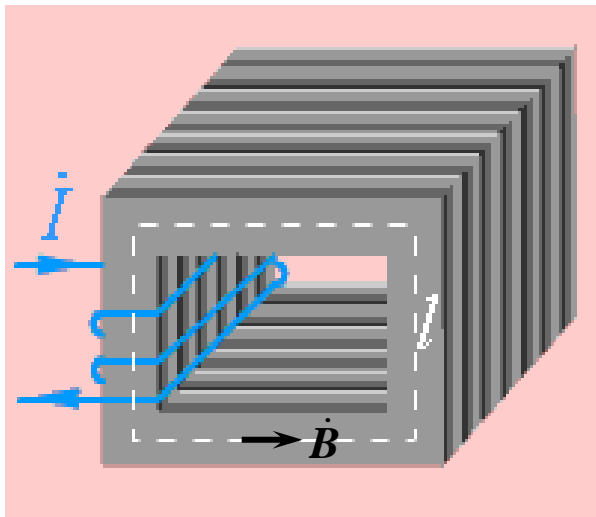


图5.9.5 变压器铁芯叠片

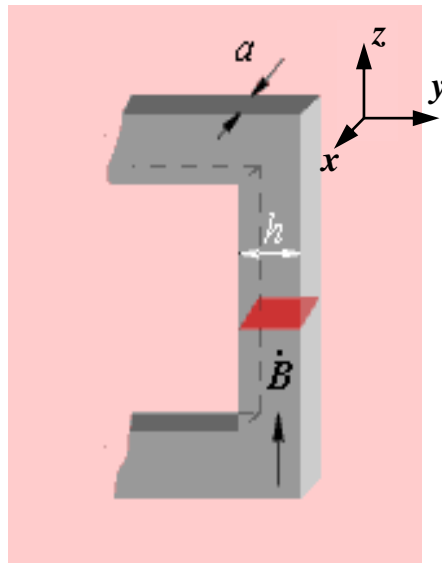


图5.9.6 薄导电平板

- 假设：
- $l, h \gg a$ ，场量 H 、 E 和 J 近似与 y 、 z 无关，仅是 x 的函数；
 - $B = B_z e_z$ ，故 E, J 分布在 xoy 平面，且仅有 y 分量；
 - 磁场呈 y 轴对称，且 $x=0$ 时， $\dot{B}_z = \dot{B}_0$

在MQS场中，磁场满足涡流场方程 (**扩散方程**)

$$\nabla^2 \vec{H} = k^2 \dot{\vec{H}} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} = j\omega\mu\gamma \dot{H}_z = k^2 \dot{H}_z$$

$$\frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} = j\omega\mu\gamma \dot{H}_z = k^2 \dot{H}_z$$

解方程，代入假设条件，可以得到

$$\dot{H}_z = \frac{\dot{B}_0}{\mu} ch(kx) \quad \dot{B}_z = \dot{B}_0 ch(kx) \quad \dot{J}_y = \dot{J}_0 sh(kx)$$

\dot{B}_z 和 \dot{J}_y 的幅值分别为

$$B_z = |\dot{B}_0| \left[\frac{1}{2} (ch 2\alpha x + \cos 2\alpha x) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad J_y = |\dot{J}_0| \left[\frac{1}{2} (ch 2\alpha x - \cos 2\alpha x) \right]^{\frac{1}{2}}$$

式中 $\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} \quad k = \alpha + j\beta = \alpha(1 + j)$

可见 • **去磁效应**，薄板中心处磁场最小；

• **集肤效应**，电流密度奇对称于 y 轴，表面密度大，
中心处 $J_y = 0$

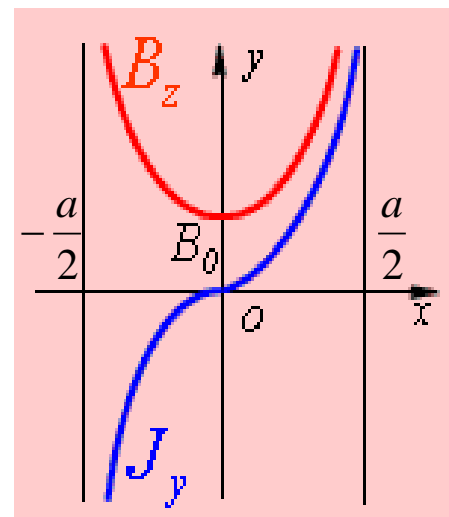


图5.9.7 B_z 模值分布曲线

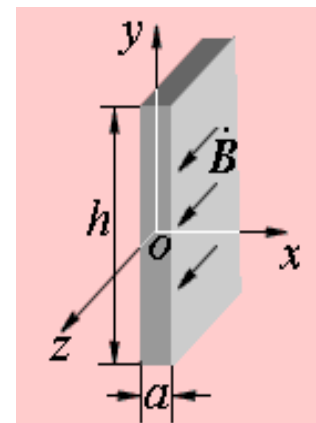
3) 涡流损耗

涡流在导体中引起的损耗，称为涡流损耗。在体积 V 内的损耗可按式计算

$$P = \int_V \gamma |\dot{E}|^2 dv$$

代入 E 得

$$P = \int_V \gamma \left| \frac{\dot{B}_0 k}{\mu \gamma} \operatorname{sh} kx \right|^2 dv = \int_V \frac{B_0^2 \omega}{\mu} |\operatorname{sh} kx|^2 dv$$
$$= 2hl \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{B_0^2 \omega}{\mu} \left[\frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\alpha x) \right] dx = \frac{hl B_0^2 \omega}{2\alpha \mu} (\operatorname{sh} \alpha a - \sin \alpha a)$$
$$k = \sqrt{j\omega\mu\gamma}$$



引入磁感应强度沿截面的平均值

$$\dot{B}_{zav} = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \dot{B}_z dx = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \dot{B}_0 \operatorname{ch} kx dx$$

$$= \frac{\dot{B}_0}{ak} \operatorname{sh} kx \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{2\dot{B}_0}{ak} \operatorname{sh} \frac{ka}{2}$$

解出 \dot{B}_0

$$\dot{B}_0 = \dot{B}_{zav} \frac{\frac{ak}{2}}{\operatorname{sh} \frac{ka}{2}}$$

则可得涡流损耗

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{hl\omega B_{zav}^2}{2\alpha\mu} (\text{sh}\alpha a - \sin\alpha a) \left| \frac{\frac{ka}{2}}{\text{sh}\frac{ka}{2}} \right|^2 \\
 &= \frac{hl\omega B_{zav}^2}{2\alpha\mu} (\text{sh}\alpha a - \sin\alpha a) \times \left(\frac{\omega\mu\gamma a^2}{4} \right) \bigg/ \left(\frac{(\text{ch}\alpha a - \cos\alpha a)}{2} \right) \\
 &= \frac{hl\gamma\omega^2 a^2 B_{zav}^2}{4\alpha} \cdot \frac{(\text{sh}\alpha a - \sin\alpha a)}{(\text{ch}\alpha a - \cos\alpha a)}
 \end{aligned}$$

当 $\alpha a = \frac{a}{d} \ll 1$, 即低频时, 将 $\text{sh}\alpha a$ 、 $\sin\alpha a$ 、 $\text{ch}\alpha a$ 和 $\cos\alpha a$ 各项用幂级数表示, 并略去高阶无穷小项, 可得:

$$P \approx \frac{hl\gamma\omega^2 a^2 B_{zav}^2}{4\alpha} \cdot \frac{(\alpha a)^3/3}{(\alpha a)^2} = \frac{hl\gamma\omega^2 a^3 B_{zav}^2}{12} = \frac{\gamma\omega^2 a^2 B_{zav}^2}{12} V$$

其中, $V = h l a$ 为薄板体积, $P \propto a^2, \gamma, \omega^2$ 。

为了降低涡流损耗, 必须减小 γ (采用硅钢), 减小 a (采用叠片)。

但当频率高到一定程度后， $\alpha a = \frac{a}{d} \gg 1$ 则有

$$\frac{(\operatorname{sh} \alpha a - \sin \alpha a)}{(\operatorname{ch} \alpha a - \cos \alpha a)} \approx 1$$

得
$$P = \frac{h l \omega \alpha a}{2 \mu} B_{zav}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma \omega^3}{2 \mu}} B_{zav}^2 V$$

这时薄板形式也不适宜了，而应该用粉状材料压制而成的铁芯。由上式可知，降低涡流损耗的有效办法是提高材料的导磁率、减小导电率。

研究涡流问题具有实际意义（高频淬火、涡流的热效应和电磁屏蔽等）。

工程应用： $B_z / B_0 \sim$ 曲线表示材料的集肤程度。以电工钢片为例，设

$$\mu = 1000\mu_0, \gamma = 10^7 \text{ S/m} \text{ , 则}$$

$$\frac{B_z}{B_0} = \sqrt{\frac{1}{2}(ch2\alpha x + cos 2\alpha x)}$$

$$\alpha = \sqrt{\omega\mu\gamma / 2} \quad x = a / 2$$

注： a 为钢片厚度。

$f(\text{Hz})$	$a(\text{mm})$	$\alpha a = \frac{a}{d}$	B_z / B_0
50	0.5	0.7	1
500	0.5	2.2	2.3
2000	0.5	4.4	4.5

当 $a = 0.5\text{mm}$ $f = 2000\text{Hz}$ 时,集肤效应严重, 若频率不变, 必须减小钢片厚度, 如 $\alpha a = 0.4$ $a = 0.05\text{mm}$ $B_z / B_0 \approx 1$ 。

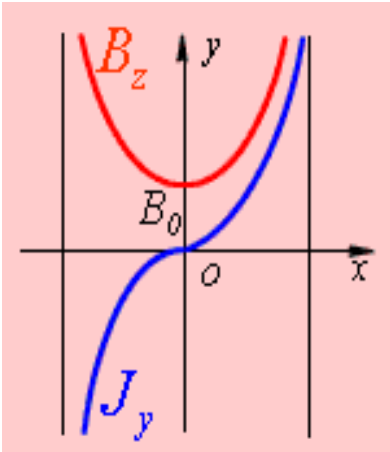


图5. 9. 8 B_z, J_y 模值分布曲线

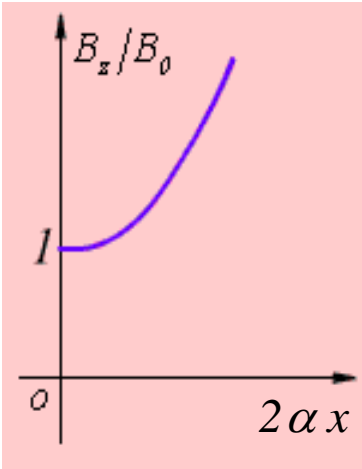


图5. 9. 9 电工钢片的集肤效应

5.9.3 邻近效应

相互靠近的导体通有交变电流时,会受到邻近导体的影响, 这种现象称为邻近效应 (Proximate effect) 。

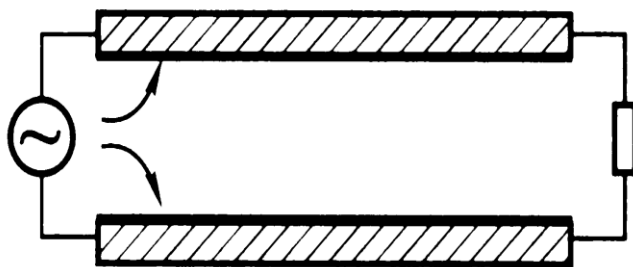


图5.9.10 二线传输线中的邻近效应

频率越高, 导体靠得越近, 邻近效应愈显著。邻近效应与集肤效应共存, 它会使导体的电流分布更不均匀。

例5.9.1 有一对通以交流电流的汇流排，已知其中电导率 γ 和磁导率 μ ，两汇流排的厚度、宽度和长度分别是 a 、 b 、 l ，且 $a \ll b \ll l$ ，板间距离为 d 。分析电流密度的分布。

解：在MQS近似下，导体区域内有微分方程

$$\frac{d\dot{H}_y}{dx^2} = k^2 \dot{H}_y$$

通解为 $\dot{H}_y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$

因为 $a \ll b \ll l$ ，所以有近似边界条件：

$$\dot{H}_y \left(\frac{d}{2} + a \right) = 0 \quad \text{和} \quad \dot{H}_y \left(\frac{d}{2} \right) = \frac{\dot{I}}{b}$$

代入上式通解，得

$$\begin{cases} 0 = C_1 e^{-k \left(\frac{d}{2} + a \right)} + C_2 e^{k \left(\frac{d}{2} + a \right)} \\ \frac{\dot{I}}{b} = C_1 e^{-k \frac{d}{2}} + C_2 e^{k \frac{d}{2}} \end{cases}$$

解出

$$C_1 = \frac{\dot{I} e^{k \left(\frac{d}{2} + a \right)}}{2b \operatorname{sh}(ka)} \quad C_2 = \frac{-\dot{I} e^{-k \left(\frac{d}{2} + a \right)}}{2b \operatorname{sh}(ka)}$$

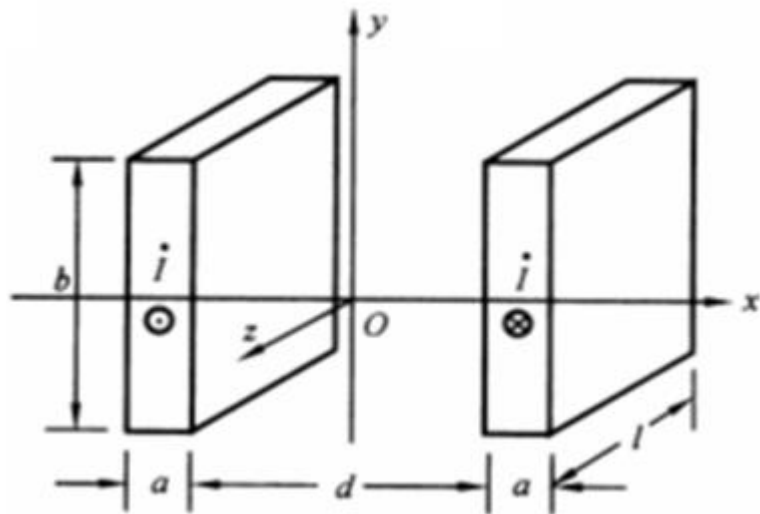


图5.9.11 两根交流汇流排的邻近效应

$$\oint_l \dot{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{l} = \dot{I} \Rightarrow \dot{H}_y \left(\frac{d}{2} \right) b = \dot{I}$$

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{I}}{2b\text{sh}(ka)} \left[e^{k\left(\frac{d}{2}+a-x\right)} - e^{-k\left(\frac{d}{2}+a-x\right)} \right]$$

$$= \frac{\dot{I}}{b\text{sh}(ka)} \text{sh}k\left(\frac{d}{2}+a-x\right)$$

$$\dot{J}_z = (\nabla \times \dot{\mathbf{H}})_z$$

$$= -\frac{\dot{I}k}{b\text{sh}(ka)} \text{ch}k\left(\frac{d}{2}+a-x\right)$$

$$\frac{d}{2} < |x| < \frac{d}{2}+a$$

从电流密度模 $|\dot{J}_z|$ 的分布可以看出，靠近两板相对的内侧面，电流密度最大，呈现出较强的邻近效应。

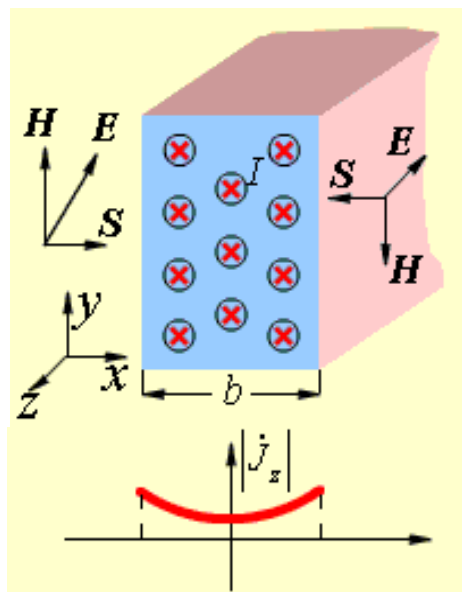


图5.9.12 单根交流汇流排的电流集肤效应

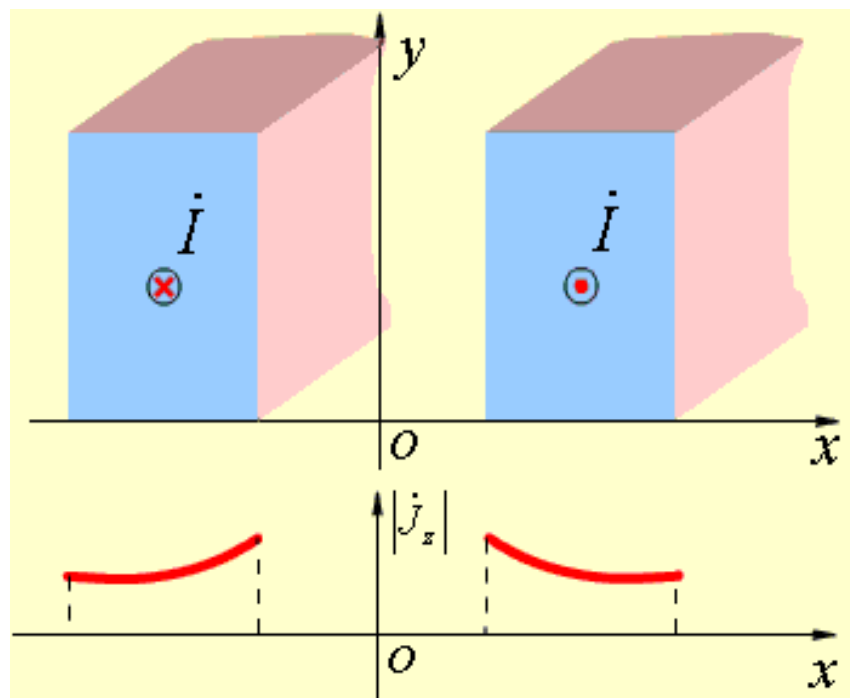


图5.9.13 两根交流汇流排的邻近效应

5.9.4 电磁屏蔽

为了得到有效的屏蔽作用，屏蔽罩的厚度 h 必须接近屏蔽材料透入深度的3 ~ 6倍，即 $h \approx 2\pi d$

表 6-1

	μ	γ (S/m)	d (mm)			
			$f=50\text{Hz}$	10^3 Hz	10^6 Hz	10^8 Hz
铜	μ_0	5.8×10^7	9.35	2.09	0.066	0.0066
铝	μ_0	3.54×10^7	11.96	2.68	0.084	0.0084
铁	$1000\mu_0$	1.62×10^7	0.559	0.125	—	—

电磁兼容简介

电磁兼容是在有限空间、时间、频谱资源条件下，各种用电设备（生物）可以共存，不致于引起降级的一门科学。即电磁干扰与抗电磁干扰问题。

自然干扰源 雷电、太阳黑子、磁暴、沙暴、地球磁场等

电力传输系统 高压传输线绝缘子的电晕放电；
高压传输线中电流与电压的谐波分量；
高压传输线之间的邻近效应；

电牵引系统 电气化铁道、有轨无轨电车上的受电弓与电网线间的放电和电力电子器件整流后的电流谐波分（ $0.1\sim 150\text{kHz}$ ）；

气体放电灯 荧光灯、高压汞灯、放电管等产生的放电噪音；

静电放电 身着化纤衣物、脚穿与地绝缘的鞋子的人运动时，会积累一定静电荷，当人接触金属后会放电；

通信系统 各种无线电广播、电视台、雷达站、通信设备等工作时，都要辐射强能量的电磁波。

核电脉冲 继电器接触开断、核磁共振检测……

电磁干扰源

人为干扰源

抗电磁干扰的两个主要措施：**接地**、**电磁屏蔽**。

接地

- 保护接地

在金属体（含设备外壳）与大地之间建立低阻抗电路，使雷电、过电流、漏电流等直接引入大地。

- 工作接地

系统内部带电体接参考点（不一定与大地相连），以保证设备、系统内部的电磁兼容。

电磁屏蔽

在高频电磁场中，利用电磁波在良导体中很快衰减的原理，选择 d 小且具有一定厚度 ($h \doteq 2$) 的屏蔽材料。

屏蔽

- 磁屏蔽

在低频或恒定磁场中，利用磁通总是走磁阻小的路径的原理，采用有一定厚度的铁磁材料。

- 电屏蔽

在任何频率下，利用金属感应电荷，通过接地线流入大地的原理，采用金属屏蔽材料，且接地。若是静电场，可实现全屏蔽；若允许磁场存在，金属选非磁性的。

屏蔽效能用分贝表示 (E_0, H_0 表示无屏蔽时的场量)

静电屏蔽效能

$$dB_{SEE} = 20 \lg \frac{E_0}{E_1}$$

静磁屏蔽效能

$$dB_{SEH} = 20 \lg \frac{H_0}{H_1}$$

屏蔽的谐振现象：当电磁波频率与屏蔽体固有频率相等时，发生谐振，使屏蔽效能急剧下降，甚至于加强原电磁场。

推导扩散方程:

对 $\nabla \times \mathbf{H}$ 两边取旋度,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}$$

利用 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 有

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} = -\nabla \times (\gamma \mathbf{E}) = \gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

所以

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

同理，对 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 两边取旋度

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}$$

利用导体中 $\rho = 0, \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\mu \nabla \times \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{J}) = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

所以

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \xrightarrow{\mathbf{E} = \mathbf{J} / \gamma} \boxed{\nabla^2 \mathbf{J} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}}$$

在正弦电磁场中，令 $k^2 = j\omega\mu\gamma$ ，有扩散方程

$$\boxed{\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = k^2 \dot{\mathbf{H}}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = k^2 \dot{\mathbf{E}}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \dot{\mathbf{J}} = k^2 \dot{\mathbf{J}}}$$

返回

推导涡流场方程及其解

$$\frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} = j\omega\mu\gamma \dot{H}_z = k^2 \dot{H}_z$$

通解形式

$$\dot{H}_z(x) = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

由对称条件 $\dot{H}_z(a/2) = \dot{H}_z(-a/2)$

$$C_1 e^{-\frac{a}{2}k} + C_2 e^{\frac{a}{2}k} = C_1 e^{\frac{a}{2}k} + C_2 e^{-\frac{a}{2}k}$$

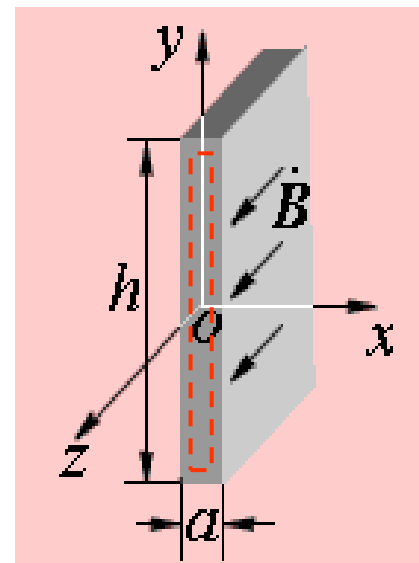
解得 $C_1 = C_2 = 0.5C$ 即 $\dot{H}_z(x) = C \operatorname{ch}(kx)$

当 $x = 0$ 时, $\dot{H}_z(0) = C = \dot{B}_0 / \mu$

所以 $\dot{H}_z(x) = \frac{\dot{B}_0}{\mu} \operatorname{ch}(kx)$ 和 $\dot{B}_z(x) = \dot{B}_0 \operatorname{ch}(kx)$

根据 $\vec{j} = \nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \vec{e}_y$ 和 $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ 可以得到

$$\dot{j}_y(x) = -\frac{k \dot{B}_0}{\mu} \operatorname{sh}(kx) \quad \text{和} \quad \dot{E}_y(x) = -\frac{k \dot{B}_0}{\mu\gamma} \operatorname{sh}(kx)$$



返回

求 \dot{B}_z 和 \dot{J}_y 的幅值

$$\dot{B}_z(x) = \dot{B}_0 \text{ch}(kx) \quad \dot{J}_y(x) = -\frac{k \dot{B}_0}{\mu} \text{sh}(kx) \quad \longrightarrow \quad \dot{J}_y(x) = \dot{J}_0 \text{sh}(kx)$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_z &= \dot{B}_0 \text{ch}[(\alpha + j\beta)x] = \dot{B}_0 (\text{ch}\alpha x \text{ch}j\beta x + \text{sh}\alpha x \text{sh}j\beta x) \\ &= \dot{B}_0 (\text{ch}\alpha x \cos\beta x + j \text{sh}\alpha x \sin\beta x) \end{aligned}$$

$$B_z = |\dot{B}_0| (\text{ch}^2\alpha x \cos^2\beta x + \text{sh}^2\alpha x \sin^2\beta x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\because \alpha = \beta, \quad \text{sh}^2\alpha = \text{ch}^2\alpha x - 1 \quad \text{代入上式}$$

$$\begin{aligned} B_z &= |\dot{B}_0| [\text{ch}^2\alpha x \cos^2\alpha x + (\text{ch}^2\alpha x - 1) \sin^2\alpha x]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\dot{B}_0| (\text{ch}^2\alpha x - \sin^2\alpha x)^{\frac{1}{2}} = |\dot{B}_0| \left[\frac{1}{2} (\text{ch}2\alpha x + \cos2\alpha x) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{同样可得} \quad J_y = |\dot{J}_0| \left[\frac{1}{2} (\text{ch}2\alpha x - \cos2\alpha x) \right]^{\frac{1}{2}}$$

返回

推导扩散方程:

对 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 两边取旋度,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}$$

利用 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 有

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} = -\nabla \times (\gamma \mathbf{E}) = \gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

所以

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = k^2 \dot{\mathbf{H}}$$

返回

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}}$$

$$\dot{E}_y(x) = \frac{1}{\gamma} \dot{J}_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial / \partial x & \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ 0 & \dot{E}_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_z$$

$$= -\frac{k \dot{J}_0}{\gamma} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \mathbf{e}_z = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}}$$

$$\dot{H}_z(x) = -j \frac{k \dot{J}_0}{\mu \gamma \omega} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

返回

$$\dot{H}_z(x) = \frac{\dot{B}_0}{\mu} \text{ch}(kx)$$

$$\mathbf{j} = \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \dot{H}_z(x) \end{vmatrix} = -\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \mathbf{e}_y$$

$$= -\frac{\dot{B}_0 k}{\mu} \text{sh}(kx) \mathbf{e}_y$$

$$j_y = -\frac{\dot{B}_0 k}{\mu} \text{sh}(kx)$$

$$\xrightarrow{\mathbf{j} = \gamma \dot{\mathbf{E}}}$$

$$\dot{E}_y = -\frac{\dot{B}_0 k}{\gamma \mu} \text{sh}(kx)$$

返回

对第一方程两边取散度

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c \left(\text{或 } \rho \mathbf{v} \right) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

左边为零，右边整理后得

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D}$$

将电荷守恒定律 $\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 带入上式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} - \rho = \text{const}$$

$$\therefore \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

返回

当 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

静电场

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

恒定电场

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$$

恒定磁场

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

返回

一般情况下的坡印亭定理

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J}_c dV - \int_V \frac{J_c^2}{\gamma} dV - \frac{\partial W}{\partial t}$$

在静态场中，场量是动态平衡下的恒定量，坡印亭定理为

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J}_c dV - \int_V \frac{J_c^2}{\gamma} dV$$

在静态场中，场域内无源即： $E_e = 0$ 坡印亭定理为

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{J_c^2}{\gamma} dV$$

在静态场中，场域内无源且为非导体即： $\gamma = 0$ 坡印亭定理为

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

注：磁铁与静电荷产生的磁、电场不构成能量的流动。

返回

求解绝缘介质中的电场，设介质中的漏电流为 I'

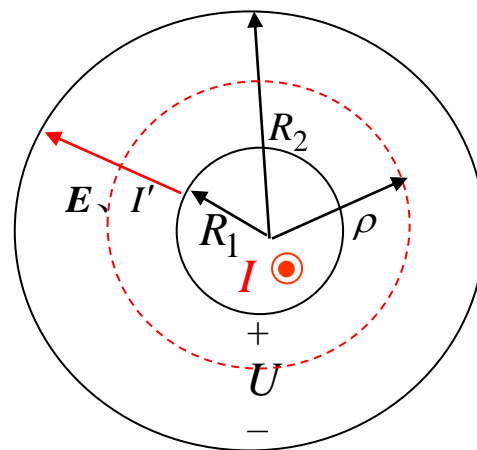
$$\because \int_s \mathbf{J}' \cdot d\mathbf{s} = J' 2\pi\rho l = I' \quad \therefore \mathbf{J}' = \frac{I'}{2\pi l\rho} \mathbf{e}_\rho \quad (R_1 < \rho < R_2)$$

则:
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}'}{\gamma'} = \frac{I'}{2\pi\gamma' l\rho} \mathbf{e}_\rho \quad (R_1 < \rho < R_2) \quad (1)$$

$$\text{又 } \because U = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I'}{2\pi\gamma' l\rho} d\rho = \frac{I'}{2\pi\gamma' l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

因此
$$\frac{I'}{2\pi\gamma' l} = U / \ln \frac{R_2}{R_1}$$
 代入 (1)

得
$$\mathbf{E} = \frac{U}{\rho \ln(R_2 / R_1)} \mathbf{e}_\rho$$



返回

设单位长度有 n 匝线圈,应用安培环路定律, 有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_i l_1 + H_0 l_1 = n l_1 I$$

$$H_i(\rho_i) + H_0(\rho_0) = nI \quad (1)$$

当 $\rho_0 \rightarrow \infty$ 时, 因 $H_0(\infty) = 0$

则由 (1) 得 $H_i(\rho_i) = nI \quad (2)$

ρ_i 为任意值, 再将 (2) 代入 (1) 可得

$$H_0(\rho_0) = 0 \quad (3)$$

管外处处成立

结合 (2)、(3) 考虑, 可知 (2) 式在管内处处成立, 即

$$\mathbf{H}_i(\rho_i) = nI \mathbf{e}_z$$

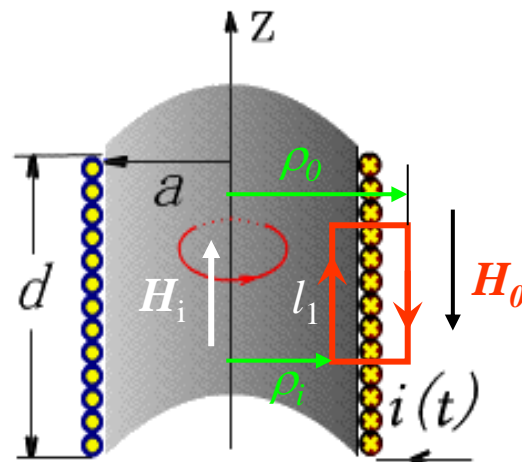


图5.5.2 无限长直螺线管