留数

1. 孤立奇点

(1) Def

若函数$f(z)$在z_0不解析，但在其去心邻域内解析，则称z_0为$f(z)$的孤立奇点。

(2) 分类

首先，我们认为$f(z)$在孤立奇点z_0的去心邻域内的洛朗展开式为：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot(z-z_0)^n \tag{1}$$

而对于孤立奇点的类型分类，我们依据的是此式的负幂项。

① **可去奇点：**上式中不含z_0的负幂项，即$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$，此时称$z_0$为$f(z)$的**可去奇点。**

② **极点：**上式中仅含有限项$(z-z_0)$的负幂项。

若$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(z-z_0)^n$，则称$z_0$为$f(z)$的$m$**级极点。**

③ **本性奇点：** 上式中含无穷多项$z-z_0$的负幂项，即$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot(z-z_0)^n$，此时称$z_0$为$f(z)$的**本性奇点。**

(3) 辨别方法

下面的$f(z)$均在z_0的去心邻域内解析，且认为都在z_0的去心邻域内成立。

① 可去奇点的判别

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$，$c_0$为复常数 $\Leftrightarrow$ z_0是$f(z)$的可去奇点。
- $f(z)$在比z_0的去心邻域更小的去心邻域内有界 $\Leftrightarrow$ z_0是$f(z)$的可去奇点

② 极点的判别

- $f(z)$可表示为$\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$ $\Leftrightarrow$ z_0是$f(z)$的m级极点。

$g(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^n+m$，在$z_0$处解析，$g(z_0)\neq 0$，$m$为正整数。

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty \Leftrightarrow z_0$是$f(z)$极点

③ 本性奇点的判别

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在且不为$\infty$ $\Leftrightarrow$ z_0为$f(z)$的本性奇点。

> 若z_0是非零函数$f(z)$的解析点或极点，同时z_0又是$g(z)$的本性奇点，则z_0一定是$f(z)g(z)$，$\frac{f(z)}{g(z)}$，$\frac{g(z)}{f(z)}$的本性奇点。

2. 函数零点与极点的关系

(1) 零点

若解析函数$f(z)$在z_0的领域内可表示为：

$$f(z)=(z-z_0)^m\phi(z) \tag{2}$$

且$\phi(z)$在z_0解析，$\phi(z_0)\neq 0$，m为正整数，则称z_0为$f(z)$ 的m级零点

---

z_0是$f(z)$的m级零点$\Leftrightarrow f^{(n)}(z_0)=0$，$(n=0,1,2,\cdots,m-1)$，但$f^{(m)}(z_0)\neq 0$

(2) 零点与极点的表示

- z_0是$f(z)$的m级零点$\Leftrightarrow z_0$是$\frac{1}{f(z)}$的m级极点

（使分子为0的是零点；使分母为0的是极点）

若z_0是$\phi(z)$的m级零点，$\psi(z)$的n级零点，则满足：

- z_0是$\phi(z)\cdot\psi(z)$的$m+n$级零点
- $m>n$时，z_0是$\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$的$m-n$级零点
- $m<n$时，z_0是$\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$的$n-m$级极点
- $m=n$时，z_0是$\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$的可去奇点

3. 函数在无穷远点的性态

(1) Def

> 设函数$f(z)$在无穷远点∞的邻域$R<|z|<+\infty$内解析，则称无穷远点的∞为函数$f(z)$的孤立奇点

一般无穷远点为孤立奇点，我们通过$f(\frac{1}{z})$进行判断：

设$\phi(z)=f(\frac{1}{z})$，判断$z=0$是$\phi(z)$的何种孤立奇点，可对应于$f(z)$，比如$z=0$是$\phi(z)$的可去奇点，表明$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点。

(2) 判别

依据$f(z)$在$|R|<z<+\infty$的洛朗展开式判断：(其实原理是根据$\phi(z)$的展开式)

- 不含正幂项$\Rightarrow z=\infty$ 为$f(z)$的**可去奇点**
- 有限多个正幂项，且z^m为最高正幂$\Rightarrow z=\infty$ 为$f(z)$的m**级极点**
- 无穷多个正幂项，$\Rightarrow z=\infty$ 为$f(z)$的**本性奇点**

4. 留数的概念

(1)Def

假定z_0为$f(z)$的孤立奇点，且$f(z)$在z_0的去心邻域内解析，有展开式：
$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot(z-z_0)^n$

我们将c_{-1}，即$(z-z_0)^{-1}$的系数，称为$f(z)$在z_0的**留数**，记作：$\operatorname{Res}[f(z),z_0]$，有

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz \tag{3}$$

C为z_0的去心邻域内包含z_0的任一正向简单闭曲线

(2) 留数定理

若函数$f(z)$在区域D内除有限个孤立奇点，$z_1, \cdots, z_n$外解析，且C为D内包含这些孤立奇点的一条正向简单闭曲线，有：

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z), z_k\right] \tag{4}$$

5. 留数的计算

针对不同孤立奇点，有以下方法。

① 可去奇点：z_0

- $\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = 0$

② m级极点：z_0

- 准则I、准则II：$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m \cdot f(z)\right]$
- 准则III：若$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$与$Q(z)$在z_0处解析，且$P(z_0) \neq 0$，$Q(z_0) = 0$，$Q'(z_0) \neq 0$，则z_0是$f(z)$的一级极点，且

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \tag{5}$$

③ 本性奇点z_0

- 用洛朗展开式，看$(z-z_0)^{-1}$的系数c_{-1}

6. 无穷远点的留数

(1) Def

与留数定义基本相同，区域变为$R < |z| < +\infty$，有$f(z)$在$z = \infty$处的留数：

$$Res[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z)\, dz \tag{6}$$

此处C为圆环域，$R < |z| < +\infty$内绕$z = 0$的任一条简单正向简单闭曲线。

若$f(z)$在区域内洛朗展开式为：$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n \cdot z_n$，则$\operatorname{Res}\left[f(z), \infty\right] = -c_{-1}$

(2) 定理

“忘了介绍扩充复平面，简单来讲就是在复平面的基础上引入了无穷远点：∞”

以下为定理内容：

若$f(z)$在扩充复平面上只有有限个孤立奇点：$z_1 \cdots, z_n, \infty$，则$f(z)$在各奇点的留数总和为零，即：

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z), z_k\right] + \operatorname{Res}\left[f(z), \infty\right] = 0 \tag{7}$$

(3) 计算方法

- 准则IV :$\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]=-\mathrm{Res}\left[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$

7. 留数在定积分计算中的应用

(1) 形如$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\ d\theta$的积分

利用$z=e^{i\theta}$，$0\leq\theta\leq 2\pi$，作代换$\begin{cases}\sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}\\ \cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}\end{cases}$

以此化为$\oint_{|z|=1}f(z)\ dz$，依据$|z|=1$中的孤立奇点，通过留数计算。

(2) 形如$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\ dx$的积分

要计算此积分，要求：

- $P(x)$与$Q(x)$为互质多项式
- 分母次数至少比分子次数高两次
- $Q(x)$在实轴上没有零点。

我们记$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，设其在上半平面内的所有极点为$z_k(k=1,2,\cdots,K)$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\ dx=2\pi i\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Res}\left[R(z),z_k\right]\tag{8}$$

(3) 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cdot e^{iax}\ dx$的积分

$a>0$，且要求：

- $P(x)$与$Q(x)$为互质多项式
- 分母次数至少比分子次数高一次
- $Q(x)$在实轴上没有零点。

设$R(z)$在上半平面内所有极点为z_k，$(k=1,2,\cdots,K)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}\ dx=2\pi i\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Res}\left[R(z)e^{iaz},z_k\right]\tag{9}$$

我们甚至可以依据欧拉公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

有如下结论：$(a>0)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos ax\ dx&=Re(2\pi i\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Res}\left[R(z)e^{iaz},z_k\right])\\ \int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\sin ax\ dx&=Im(2\pi i\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Res}\left[R(z)e^{iaz},z_k\right])\end{aligned}\tag{10}$$

其中Re代表实部，Im代表虚部

(4)注意：

以上三种形式的积分要求所构造的闭路上没有奇点。

特殊情况这里不予考虑，可能不会考