一. 填空

1. $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}dx =$ ____________________。（填$\dfrac{\pi}{2}$）

解 法一 由定积分的几何意义，该积分可看成曲线 $y=2x-x^2$，即半圆周曲线 $(x-1)^2+y^2=1, y\ge 0$，和直线 $x=0, x=2$ 以及 $x$ 轴围成的曲边梯形面积，由于该曲边梯形面积为$\dfrac{\pi}{2}$，故$\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}dx = \dfrac{\pi}{2}$。

法二

$$\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}dx = \int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}dx \xlongequal{u=x-1} \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}du \xlongequal{u=\sin t, t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\cos t dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{2}$$

2. (1) 若 $f(x)=\int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$，则 $f'(x)=$ _______________；

(2) 若 $f(x)=\int_0^x xf(t)dt$，则 $f'(x)=$ _______________.

解 (1) $f'(x)=(\int_x^{x^2} e^{-t^2}dt)' = (\int_x^a e^{-t^2}dt + \int_a^{x^2} e^{-t^2}dt)' = (-\int_a^x e^{-t^2}dt)' + (\int_a^{x^2} e^{-t^2}dt)'$

$$= -e^{-x^2} + e^{-x^4}\cdot(x^2)' = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$$

(2) 由于被积函数中 $x$ 不是积分变量，故可提到积分号为外，得 $f(x)=x\int_0^x f(t)dt$，于是 $f'(x)=(x\int_0^x f(t)dt)' = \int_0^x f(t)dt + x(\int_0^x f(t)dt)' = \int_0^x f(t)dt + xf(x)$。

3. 对连续函数 $f(x)$，若 $f(x)=x+3\int_0^1 f(t)dt$，则函数 $f(x)=$ _______________。

解 因为连续函数 $f(x)$ 必可积，故$\int_0^1 f(t)dt$是常数，在 $f(x)=x+3\int_0^1 f(t)dt$ 两边对 $x$ 定积分得，$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_0^1 (3\int_0^1 f(t)dt)dx$，而常数 $3\int_0^1 f(t)dt$ 可以提到积分号外，得 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xdx + 3\int_0^1 f(t)dt\int_0^1 1dx = x+3\int_0^1 f(t)dt$，于是$\int_0^1 f(t)dt = -\dfrac{1}{4}$，得到 $f(x)=x-\dfrac{3}{4}$。

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx =$ ________________ .

解 由定积分的积分中值定理知, $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx = \dfrac{\xi^n}{\sqrt{1+\xi}}(\dfrac{1}{2}-0) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\xi^n}{\sqrt{1+\xi}}, \xi\in[0,\dfrac{1}{2}]$，于

是$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi^n}{\sqrt{1+\xi}}=0$.

二. 选择题

1. 设$f(x)=\int_0^{\sin x}t^2dt, g(x)=x^3+x^4$，则当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的（ B ）

A. 等价无穷小　B. 同阶但非等价的无穷小　C. 高阶无穷小　D. 低阶无穷小

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}t^2dt}{x^3+x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3+4x}=\frac{1}{3}$，按无穷小阶的比较定义知，选 B.

三. 计算（写出计算过程）

1. 设$f(x)=\begin{cases}x^2, x<0,\\ e^{x+1}, x\geq 0\end{cases}$，求$\int_0^2 f(x-1)dx$

解 $\int_0^2 f(x-1)dx \underset{=\!=\!=\!=\!=}{t=x-1}\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 t^2dt+\int_0^1 e^{t+1}dt=\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{0}+e^{t+1}\Big|_0^1=\frac{1}{3}+e^2-e$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\sin xdx$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}xd(\cos x)=-(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos xdx)=-(\frac{\pi}{6}-\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}})$

$$=-\frac{\pi}{6}+(\frac{\sqrt{3}}{2}-0)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}。$$

3. 求由参数方程$\begin{cases}x=\int_0^t\sin u^2du\\ y=\int_0^t\cos u^2du\end{cases}$确定的函数$y=y(x)$的导数$\frac{dy}{dx}$。

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(\int_0^t\cos u^2du)'}{(\int_0^t\sin u^2du)'}=\frac{\cos t^2}{\sin t^2}=\cot t^2$.

4. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sin t^2dt}{x^2}$

解 当$x\to 0$时，$\frac{\int_0^x\sin t^2dt}{x^2}$是$\frac{0}{0}$型极限. 运用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x \sin t^2 dt)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0.$$

四. 证明题

1. 证明 对常数$a>0$，有$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$.

证　即证$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt$.

令$x^2=t$，因为$0\le x\le a$，所以$x=\sqrt{t}, dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$，于是

$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}} f(t)\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt==\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$，得证.