一、选择题

1. 下列求极限的问题中，能使用洛必达法则的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$；　B. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\dfrac{k}{x})^x$；　C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；　D. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

选 B.

解析： A. 使用洛必达法则得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$不存在，但

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，故 A 不能使用洛必达法则；

C. 使用洛必达法则得

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$不存在，但

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{1}{x}\sin x}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$，故 C 不能使用洛必达法则；

D. 使用洛必达法则得

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，求不出极限值，但

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$。故 D 不能使用洛必达法则；

2. 某同学求极限得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(1+x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$，则此计算（　　）.

A. 正确；

B. 错误，因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1+x^2}$不是$\dfrac{0}{0}$型不定式；

C. 错误，因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(1+x^2)'}$不存在；

D. 错误，因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1+x^2}$是$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式。　　选 **B.**

3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin 5x}{\ln\sin 2x}=$（　　）.

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. 1　　D. ∞

选 C. 解析: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin 5x}{\ln\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\sin 5x}\cdot\cos 5x\cdot 5}{\dfrac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x\cdot\cos 5x\cdot 5}{\sin 5x\cdot\cos 2x\cdot 2}=\dfrac{5}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$

$$=\frac{5}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{5x}=1\text{。}$$

二、计算（写出计算过程）

1. 计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$ 。

解析： 运用洛必达法则，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{2(\pi-2x)(-2)}=(-\frac{1}{4})\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}=(-\frac{1}{4})\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-2}=-\frac{1}{8}\text{。}$$

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$ 。

解析：通分、等价无穷小替换再运用两次洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x-x}{x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^x}{2}=\frac{3}{2}\text{。}$$

3. 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln\dfrac{1}{x})^x$ 。

解析：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(\ln\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\ln\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln u)}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{\ln u}\cdot\dfrac{1}{u}=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln(\ln\frac{1}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(\ln\frac{1}{x})}=e^0=1$ 。