高等数学

第一章 高等数学公式大汇总

1. 两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,推广形式 $\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$.

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$,推广形式$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=\mathrm{e}$.

2. 常用的等价无穷小量及极限公式

(1) 当 $x\to0$ 时,常用的等价无穷小量

①$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim\mathrm{e}^{x}-1$.

②$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^{2}$,$1-\cos^{b}x\sim\dfrac{b}{2}x^{2}(b\neq0)$.

③$a^{x}-1\sim x\ln a(a>0$,且 $a\neq1)$.

④$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x(\alpha\neq0)$.

(2) 当 $n\to\infty$ 或 $x\to\infty$ 时,常用的极限公式

① $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.

② $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m,\end{cases}$其中 a_n,b_m 均不为 0.

③ $\lim\limits_{n\to\infty}x^{n}=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1,\\ \text{不存在}, & x=-1;\end{cases}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{nx}=\begin{cases}0, & x<0,\\ +\infty, & x>0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

④ 若 $\lim g(x)=0$,$\lim f(x)=\infty$,且 $\lim g(x)f(x)=A$,则有

$$\lim[1+g(x)]^{f(x)}=\mathrm{e}^{A}.$$

3. $x\to0$ 时常见的麦克劳林公式

$\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^{3}+o(x^{3})$,　　$\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^{2}+\dfrac{1}{4!}x^{4}+o(x^{4})$,

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$，　　$\arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$，

$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$，　　$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$，

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$，

$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$.

当 $x \to 0$ 时，由以上公式可以得到以下几组“差函数”的等价无穷小代换式：

$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$，　　$\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$，　　$x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$，

$\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}$，　　$x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$.

4. 基本导数公式

$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$（μ 为常数），　　$(a^x)' = a^x \ln a\,(a>0, a\neq 1)$，

$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}\,(a>0, a\neq 1)$，　　$(\ln x)' = \frac{1}{x}$，

$(\sin x)' = \cos x$，　　$(\cos x)' = -\sin x$，

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，　　$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\tan x)' = \sec^2 x$，　　$(\cot x)' = -\csc^2 x$，

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$，　　$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$，

$(\sec x)' = \sec x \tan x$，　　$(\csc x)' = -\csc x \cot x$，

$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，　　$[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

注　变限积分求导公式.

设 $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可导函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的值域在 $[a,b]$ 上，则在函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的**公共定义域上**有

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t\right] = f[\varphi_2(x)]\varphi'_2(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi'_1(x).$$

5. 几个重要函数的麦克劳林展开式

①$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$.

②$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

③$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$.

④ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$，$|x| < 1$.

⑤ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$，$|x| < 1$.

⑥$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$，$-1 < x \leqslant 1$.

⑦$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

6. 曲率和曲率半径计算公式

（1）曲率

①（非参数方程）曲线 $y = f(x)$ 上任意一点$(x, f(x))$处的曲率为

$$K = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

②（参数方程）$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$上任意一点的曲率为

$$K = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

（2）曲率半径

$$R = \frac{1}{K}(K \neq 0).$$

7. 不定积分公式

$\int k\mathrm{d}x = kx + C$，　　$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$，

$\int x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C, k \neq -1$，　　$\begin{cases} \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C, \end{cases}$

$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$，　　$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$，

$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$，$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$，

$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$，$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$，

$\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$，

$\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$，

$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$，$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$，

$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$，$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$，

$$\begin{cases} \int \frac{1}{x^2 - a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \\ \int \frac{1}{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, \end{cases} \quad \begin{cases} \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C, \\ \int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C(a > 0), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C(\text{常见 } a = 1), \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C(|x| > |a|), \end{cases}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C(a > |x| > 0),$$

$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$，$\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$，

$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \tan x - x + C$，$\int \cot^2 x\mathrm{d}x = -\cot x - x + C$.

8. 定积分的重要公式

① $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{ 为大于 1 的奇数}, \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}. \end{cases}$$

② $\int_0^{\pi} \sin^n x \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x$，$n$ 为正整数.

③ $\int_0^{\pi} \cos^n x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x, & n \text{ 为正偶数}, \\ 0, & n \text{ 为正奇数}. \end{cases}$

④ $\int_0^{2\pi} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos^n x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 4 \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数}, \\ 0, & n \text{ 为正奇数}. \end{cases}$

9. 直线与直线的关系

设直线 $L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ 和 $L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$.

① 两直线平行 $\Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

② 两直线垂直 $\Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

③ 两直线夹角计算公式为

$$\cos\theta = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

10. 直线与平面的关系

设平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$，直线 $L: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$.

① 直线与平面平行 $\Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$.

② 直线与平面垂直 $\Leftrightarrow \dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$.

③ 直线与平面夹角计算公式为

$$\sin\theta = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

11. 平面与平面的关系

设平面 $\Pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ 和 $\Pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

① 两平面平行 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

② 两平面垂直 $\Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

③ 两平面之间的夹角计算公式为

$$\cos\theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

12. 方向导数和梯度

(1) 方向导数

① 函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微,则函数在该点沿任意方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在,且有$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$,其中 α,β 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向角.

② 函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微,则函数在该点沿任意方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在,且有$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$,其中 α,β,γ 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向角.

(2) 梯度

$$\mathbf{grad}\, f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

13. 重要的初等数学公式

在考研中这些初等数学公式经常会用到,因此必须牢记!

(1) 三角函数

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$,

$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,

$\tan^2 x=\sec^2 x-1$, $\cot^2 x=\csc^2 x-1$,

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$,

$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$, $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$,

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$.

万能公式:

若 $\tan\dfrac{x}{2}=u(-\pi<x<\pi)$,则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$,$\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

注 若积分中出现 $1+\cos x$,一般使用公式 $1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}$.

(2) 初等代数

① 乘法公式和因式分解公式.

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$,

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，　　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$（$n$ 为正整数）.

② 一元二次方程.

(a) 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 求根公式：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(b) 根与系数之间的关系（韦达定理）：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

(3) 不等式（一定要注意某些结论的成立条件）

① 设 a,b 为实数，则有 $|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$，$||a|-|b||\leqslant|a-b|$.

② $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a,b>0)$；

$\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}(a,b,c>0)$.

③$\sin x<x<\tan x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),\sin x<x(x>0)$.

④$\arctan x\leqslant x\leqslant\arcsin x(0\leqslant x\leqslant 1)$.

⑤$\mathrm{e}^x\geqslant x+1(\forall x),x-1\geqslant\ln x(x>0)$.

⑥ $\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}(x>0)$.

(4) 数列

① 等差数列.

(a) 通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$.

(b) 前 n 项和公式：$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$.

② 等比数列.

(a) 通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$.

(b) 前 n 项和公式：$S_n=\begin{cases}na_1, & q=1,\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1.\end{cases}$

③ 一些常见数列的前 n 项和.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(5) 阶乘与双阶乘

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$,规定 $0! = 1$;

$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$;

$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)$.

(6) 指数运算规则

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, (a^n)^m = a^{nm},$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

(7) 对数运算规则

$$\log_a NM = \log_a N + \log_a M, \log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M,$$

$$\log_a M^n = n\log_a M, \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M.$$

第二章　函数、极限、连续

一、函数

1. 函数的定义

设在某个数集中有两个变量 x 和 y，对变量 x，按照某一确定的法则 f，总有相应的值 y 与之对应，则称 y 为 x 的函数，记为 $y=f(x)$.

2. 几种常见函数类型

(1) 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R. 若对任意 $y\in R$，有唯一确定的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，则记为 $x=f^{-1}(y)$，称其为 $y=f(x)$ 的**反函数**.

注　不是任意函数都具有反函数，一个函数有对应的反函数前提是这个函数是单调的.

(2) 复合函数

设 $u=g(x)(x\in D)$，$y=f(u)(u\in M)$，且对于任意的 $x\in D$ 有 $g(x)\in M$，则由 $y=f[g(x)](x\in D)$ 确定的函数称为由 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的复合函数.

(3) 基本初等函数

下列函数统称为基本初等函数.

$y=C$(常数)；

$y=x^{\alpha}$(α 是常数)；

$y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

$y=\log_{a}x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

(4) 初等函数

由六类基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算得到的，并能用一个数学表达式表示的函数，称为初等函数.

(5) 分段函数

在定义域内的不同范围中用不同表达式表示的函数称为分段函数.

注 1 分段函数是一个函数,不能因为函数在各段中的表达式不同而认为它是多个函数.

注 2 以下是几个常见的分段函数,要求牢记于心.

① 绝对值函数:$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

② 符号函数:$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

③ 取整函数:$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

取整函数有以下常用结论:

$[x] \leqslant x$;

$[x+m] = [x]+m$(m 是整数).

④ 狄利克雷函数:$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ 是有理数}, \\ 0, & x\text{ 是无理数}. \end{cases}$

(6) 隐函数

如果在方程 $F(x,y)=0$ 中,当 x 取某区间内的任一值时,相应地,总有满足这一方程的唯一的 y 值存在,那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$,虽然不一定能将 y 明显地解出来.

3. 函数的性质

(1) 有界性

设 $y=f(x)(x\in D)$,若存在 $M>0$,对任意的 $x\in D$,总有 $|f(x)|\leqslant M$,称函数 $f(x)$ 在 D 上有界.

注 1 若 $f(x)\geqslant M_1(x\in D)$,则称函数在 D 上有下界,若 $f(x)\leqslant M_2(x\in D)$,则称函数在 D 上有上界. $f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 D 上既有下界又有上界.

注 2 以下为关于函数有界的相关结论,请务必牢记.

① 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

② 设 $f(x)$ 在区间 D 上有最大值(最小值),则 $f(x)$ 在 D 上有上界(下界).

③ 有界函数与有界函数的和、积都是有界函数.

④ 若$\lim\limits_{x \to *} f(x)=\infty$,则 $f(x)$ 在 $*$ 的去心邻域内是无界的.

$*$ 代表 $x_0, x_0^-, x_0^+, \infty, -\infty, +\infty$ 中的任意一种.

(2) 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若存在 $T>0$,对任意的 $x \in I$,必有 $x \pm T \in I$,并且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数.使得上述关系式成立的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期,简称为函数 $f(x)$ 的周期.

(3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称,如果对于 I 内任意一点 x,恒有 $f(x)=f(-x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;如果恒有 $f(x)=-f(-x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

注 以下是关于奇偶函数的一些性质,请务必牢记.

① 奇 ± 奇 = 奇;偶 ± 偶 = 偶.

② 奇 × 奇 = 偶(奇函数的偶数个积(商)是偶函数;奇函数的奇数个积(商)是奇函数).

③ 偶 × 偶 = 偶;奇 × 偶 = 奇.

④ 奇函数与奇函数复合是奇函数(外奇内奇为奇函数).

⑤ 偶函数和偶函数复合是偶函数(外偶内偶为偶函数).

⑥ 偶函数与奇函数复合为偶函数(外偶内奇为偶函数、外奇内偶为偶函数).

⑦ 奇函数在对称区间上的积分为零.

⑧ 奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.

⑨ 奇函数的绝对值为偶函数;偶函数的绝对值为偶函数.

⑩ 如果奇函数 $f(x)$ 在原点有定义,则 $f(0)=0$.

⑪ 任何一个定义在对称于原点的数集 M 的函数 $f(x)$,必可分解成一奇一偶的函数之和.

(4) 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义,如果对于该区间内的任意两点 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 I 内单调增加(或单调减少).

二、极限

1. 数列极限

设数列$\{x_n\}$，若对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，当$n>N$时，恒有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称常数A为数列$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

2. 函数极限

(1) 当$x\to\infty$时函数的极限

设函数$f(x)$在$|x|$充分大时都有定义，若对于任意给定的正数ε，总存在正数X，当$|x|>X$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为**当$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限**，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(2) 当$x\to x_0$时函数的极限

设函数$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有定义，若对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为**当$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限**，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注　关于函数极限有必要作出以下说明，请考生做到理解并牢记.

① 对于$x\to x_0$要明确$x\neq x_0$，其中包括了$x\to x_0^-$和$x\to x_0^+$.

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$f(x)$在$x=x_0$处有无定义无关.

③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是$f(x_0^-)$和$f(x_0^+)$都存在且相等，即$f(x)$在$x=x_0$处的左、右极限存在且相等.

3. 极限的性质

(1) 唯一性

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则$A=B$.（极限存在必唯一）

(2) 局部保号性

① 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，则存在$x_0$的一个去心邻域，在该邻域内恒有$f(x)>0$.

② 若存在x_0的一个去心邻域，在该邻域内$f(x)\geqslant 0$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant 0$.

(3) 有界性

① 收敛数列的有界性.

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则存在$M>0$，使得$|a_n|\leqslant M$，即若数列收敛，那么数列一定有界. 但是数列有界不一定收敛.

② 函数极限的局部有界性.

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则存在$\delta>0$，使$f(x)$在$U=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$内有界.

4. 极限存在准则

(1) 夹逼准则

设在x_0的某个去心邻域内恒有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

同理，若存在$M>0$，使得$|x|>M$时，恒有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(2) 单调有界准则

单调有界数列(函数)必有极限.

注 ① 夹逼准则对于数列极限也成立. 夹逼准则往往配合着"放缩法"使用.

② 在夹逼准则中虽然有$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，但是不能理解为$\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)-h(x)]=0$.(这是常出现的错误，一定要注意)

③ 对于一个数列，若它的极限存在，那么其任意一个子列都有相同的极限. 但是子列极限存在，数列极限不一定存在.

④ 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

⑤ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$存在的充要条件为$f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$.

5. 洛必达法则

① 求"$\dfrac{0}{0}$"型未定式极限的洛必达法则.

(a) 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

(b) $f(x)$，$g(x)$在x_0的某去心邻域内都可导，且$g'(x)\neq 0$；

(c) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$或为$\infty$，

则有$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

② 求“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式极限的洛必达法则.

(a) 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$;

(b) $f(x)$,$g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内都可导,且 $g'(x)\neq 0$;

(c) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或为 ∞,

则有$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

注 若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在,并不能确定$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$的极限不存在,只能说明洛必达法则失效,要寻求其他方法求极限.

6. 两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,推广形式 $\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$.

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$,推广形式$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=\mathrm{e}$.

7. 极限的运算法则

(1) 极限的四则运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.

① $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$.

② $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$.

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$.

④ $\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=kA$($k$ 为常数).

(2) 一些特殊情形下的运算结论

① 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$,则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=+\infty.$$

② 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$,则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=-\infty.$$

③ 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,$g(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有界,则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=0.$$

④ 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$g(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有界，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\infty.$$

⑤ 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

8. 无穷小量和无穷大量

(1) 无穷小量的定义

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

注 关于无穷小量的概念一定要理解透彻！当自变量 x 无限接近 x_0（或 x 的绝对值无限增大）时，函数值 $f(x)$ 与 0 **无限接近**. 这里是函数值无限接近 0 而不是等于 0，和 $x=x_0$ 时 $f(x_0)=0$ 具有不同的意义，一定要理解清楚. 特别要指出的是，切不可把很小的数与无穷小量混为一谈（这在选择题中考查概念时常常出现）.

(2) 无穷小量的运算法则

① 有限多个无穷小量的和、差、积仍然是无穷小量.

② 有界函数与无穷小量的乘积还是无穷小量. 特别地，常数和无穷小量的乘积也为无穷小量.

(3) 无穷小量的比较

设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是在同一自变量变化过程中的无穷小量，$\beta(x)\neq 0$，且 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也是在此变化过程中的极限，则

① 若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$（$C$ 为常数，且 $C\neq 0$），则称 $\alpha(x)$ 与$\beta(x)$ 为**同阶无穷小量**；

② 若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为**等价无穷小量**，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

③ 若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **高阶的无穷小量**，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

④ 若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **低阶的无穷小量**.

注 在无穷小量的比较中一定要注意一个前提条件：$\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是**在同**

一自变量变化过程中的无穷小量.

(4) 无穷小量与极限的关系

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $f(x) - A = \alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

(5) 无穷大量的定义

任给 $M > 0$，存在正数 δ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的**无穷大量**，记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

(6) 无穷小量和无穷大量的关系

① 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$；

② 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，且 $f(x) \neq 0$，则$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

三、连续与间断

1. 连续的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 左、右连续的定义

设 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧(或右侧)某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0^- \\ (\text{或} x \to x_0^+)}} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左连续(或右连续).

注 ① 函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续的充要条件是 $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

② 初等函数在其定义区间内都连续.

③ 若 $f(x)$ 在(a,b) 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在(a,b) 内部连续. 尤其注意，如果包含了端点，那么函数 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，其中函数 $f(x)$ 在端点 a 处右连续，在端点 b 处左连续.

3. 间断点

(1) 第一类间断点

左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点.

① 可去间断点.

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某去心邻域内有定义，如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $f(x_0)$ 无

定义，或有定义但是与$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不相等，则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

② 跳跃间断点.

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某去心邻域内有定义，如果$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在，但是不相等，则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

注　此时与 $f(x_0)$ 是否存在，存在时等于什么都无关.

(2) 第二类间断点

左、右极限至少有一个不存在的点称为第二类间断点.

① 无穷间断点.

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则这类间断点称为无穷间断点. 如点 $x = 0$ 为函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 的无穷间断点.

② 振荡间断点.

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 振荡不存在，则这类间断点称为振荡间断点.

4. 闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则它具有下列性质.

① 有界性：$f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

② 最值定理：$f(x)$ 在$[a,b]$上有最大值和最小值.

③ 介值定理：设 μ 满足 $m \leqslant \mu \leqslant M$，其中，$m = \min\{f(a), f(b)\}$，$M = \max\{f(a), f(b)\}$，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得$f(\xi) = \mu$；若 μ 满足 $m < \mu < M$，则 $\xi \in (a,b)$.

④ 零点定理：设 $f(a)f(b) < 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

注　下面总结本章一些非常重要的结论，这些结论将对解题起到很大的作用，请务必牢记.

① 若 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在且 $\lim g(x) = 0$，则 $\lim f(x) = 0$.

② 若 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ 且 $\lim f(x) = 0$，则 $\lim g(x) = 0$.

③ 如果 $\lim u^v$ 属于“1^∞”型未定式，则有一个重要且简单的计算方法：$\lim u^v = \mathrm{e}^{\lim v(u-1)}$.

④ 各函数增长速度比较(掌握这一点对我们计算极限有一定的帮助).

对数函数、幂函数、指数函数、阶乘、幂指函数的增长速度从左往右逐渐增快，即有

$\log_a n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$（"$\ll$"是远小于符号，$a > 1, k > 1, n \to \infty$）.

因此在计算极限时我们有以下结论：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^k} = 0(a > 1, k > 1);\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0(a > 1, k > 1);$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0;\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0.$$

第三章　一元函数微分学

一、导数

1. 函数在一点处的导数

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并设 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$. 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

若记 $x=x_0+\Delta x$，则上面可以写成 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

注　① 从上面的定义可以看出，导数是函数的局部性质，其本质就是利用极限的概念对函数进行局部的线性逼近.

② 不是所有的函数都有导数，一个函数也不一定在每个点都具有导数.

③ 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率.

④ 设 $f(x)$ 可导，若 $f(x)$ 是奇函数，那么 $f'(x)$ 为偶函数；若 $f(x)$ 是偶函数，那么 $f'(x)$ 为奇函数.

⑤ 若 $f(x)$ 可导，且有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$，则有 $f(a)=b,f'(a)=A$.

⑥ 连续是可导的前提，若题目说函数在某点可导，一定要知道函数在该点必然连续.

2. 左导数和右导数

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 分别称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的左导数和右导数，分别记为 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

注　① 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的充分必要条件是 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 存在且相等.

② 求分段函数在分段点的导数时要用定义来做，通常要分左、右导数来讨论.

3. 可导与连续的关系

如果函数 $f(x)$ 在 x 处可导,则函数 $f(x)$ 在该点一定连续. 但是函数在某一点连续却不一定在该点可导.

4. 导数的四则运算法则以及复合函数求导

① 设 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 可导,则

$(u\pm v)'=u'\pm v'$;$(uv)'=u'v+uv'$,$(Cu)'=Cu'$(C 为常数);$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

② 设 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导,$y=f(u)$ 在对应的 $u=\varphi(x)$ 处可导,则 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导,且

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$$

5. 特殊函数求导

(1) 隐函数求导

设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的可导函数,方程两端同时对 x 求导,遇到 y 的函数则视为复合函数,y 为中间变量,可得到一个含 y' 的方程,从中解出 y' 即可.

(2) 反函数求导

① 一阶导数.

设 $y=f(x)$ 可导,且 $f'(x)\neq 0$,又 $x=\varphi(y)$ 为其反函数,则 $x=\varphi(y)$ 可导,且

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

② 二阶导数.

设 $y=f(x)$ 二阶可导,且 $f'(x)\neq 0$,又 $x=\varphi(y)$ 为其反函数,则 $x=\varphi(y)$ 二阶可导,且

$$\varphi''(y)=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

(3) 幂指函数求导

幂指函数求导时,先将 $u(x)^{v(x)}$($u(x)>0,u(x)\neq 1$)化为 $e^{v(x)\ln u(x)}$,然后求导.

(4) 参数方程所确定的函数求导

设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定的函数.

① 一阶导.

若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 可导且 $\varphi'(t)\neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

② 二阶导.

若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导且 $\varphi'(t)\neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

6. 高阶导数

① 利用高阶求导公式.

设 $u=u(x),v=v(x)$,均 n 阶可导,则

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+\mathrm{C}_n^1u^{(n-1)}v'+\mathrm{C}_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}.$$

② 利用泰勒公式.

(a) 写出 $$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

或者 $$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

注 任何一个无穷阶可导的函数(在收敛的条件下)都可以写成上面这种形式.

(b) 把 $y=f(x)$ 写成幂级数展开的形式.

(c) 因为函数的展开式是唯一的,因此对比(a),(b) 中公式的系数获得 $f^{(n)}(x_0)$ 或 $f^{(n)}(0)$.

注 详细介绍可以参看《张宇考研数学基础 30 讲》第 59 页的内容,以及第 68 页的例 1.4.26.

③ 几个重要的 n 阶求导公式.

$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n(a>0,a\neq 1)$,特别地,$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$;

$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$($k$ 为常数);

$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$（$k$ 为常数）；

$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}(x>0)$；

$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}(x>-1)$；

$[(x+x_0)^m]^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$；

$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

二、微分

设函数 $y=f(x)(x\in D)$，$x_0\in D$，且 $x_0+\Delta x\in D$，称 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数在 $x=x_0$ 处的增量. 若 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，其中 $A\Delta x$ 称为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分，记为 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x$ 或 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\mathrm{d}x$.

注 ①$f(x)$ 可导和可微是等价的，但是在多元函数中可导和可微并不等价.

②$A\Delta x$ 中的 A 等于 $f'(x)$.

③ 若 $f(x)$ 处处可微，则 $y=f(x)$ 的微分为 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

④ 一元函数中可导、可微、连续的关系：

可微 $\Leftrightarrow$ 可导 $\Rightarrow$ 函数连续 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有界.

三、几何应用

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$ 且不在任何区间上取等号，则 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调增加（减少）的.

2. 极值

① 定义.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义. 如果对于该邻域内任何异于 x_0 的点 x，恒有 $f(x)<f(x_0)$（或 $f(x)>f(x_0)$），则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点**（或**极小值点**），称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**极大值**（或**极小值**）.

② 必要条件.

设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在点 x_0 处取极值，则 $f'(x_0)=0$.

③ 判断极值的第一充分条件.

设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，在 x_0 的某去心邻域内可导，则

(a) 若在 x_0 的左侧邻域内 $f'(x)>0$，右侧邻域内 $f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 为极大值.

(b) 若在 x_0 的左侧邻域内 $f'(x)<0$，右侧邻域内 $f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 为极小值.

(c) 若在 x_0 的左、右邻域内 $f'(x)$ 同号，则 $f(x_0)$ 不是极值.

④ 判断极值的第二充分条件.

设 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数，$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

(a) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

(b) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

⑤ 判断极值的第三充分条件.

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 2)$，则

(a) 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

(b) 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

注 ① 函数 $f(x)$ 在连续但是不可导的点处也有可能取得极值. 当在某点处的导数等于零时，函数在此点处也不一定取得极值.

② 驻点.

一阶导为零的点称为函数的驻点. 对于一个在定义域上处处可导的函数来说，极值点即为其驻点. 但是如果函数在定义域上并不处处可导，此结论不成立，且有以下结论：

极值点不一定是驻点. 如 $y=|x|$，在点 $x=0$ 处不可导，故不是驻点，但是极(小)值点；

驻点也不一定是极值点. 如 $y=x^3$，在 $x=0$ 处导数为0，是驻点，但不是极值点.

3. 最值

设 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，如果存在 $x_0\in I$，使对一切 $x\in I$ 有 $f(x)\geqslant(\leqslant)f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最小值(最大值).

求闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最值的步骤如下.

① 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的可疑点——驻点和不可导点,并求出可疑点的函数值;

② 求出端点的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$;

③ 比较①和②求出的函数值,其中最大的为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值,最小的为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

4. 凹凸性

① 定义.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导,x_0 是 (a,b) 内任一点.若在曲线弧 $y=f(x)$ 上点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线总位于曲线弧的下方,则称此曲线弧在 (a,b) 内是凹的;若在曲线弧上点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线总位于曲线弧的上方,则称此曲线弧在 (a,b) 内是凸的.

② 凹凸性判定.

设函数 $f(x)$ 在 I 上二阶可导.若在 I 上 $f''(x)>0$,则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的;若在 I 上 $f''(x)<0$,则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的.

5. 拐点

① 定义.

连续曲线 $f(x)$ 上凹弧和凸弧的分界点称为该曲线的拐点.

② 二阶可导点是拐点的必要条件.

设 $f''(x_0)$ 存在,且点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线上的拐点,则 $f''(x_0)=0$.

③ 判断拐点的第一充分条件.

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,在点 $x=x_0$ 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内二阶导数存在,且在该点的左、右邻域内 $f''(x)$ 变号,则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线上的拐点.

注 当 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点时,并不要求 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处导数存在.

④ 判断拐点的第二充分条件.

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内三阶可导,且 $f''(x_0)=0$,$f'''(x_0)\neq 0$,则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

⑤ 判断拐点的第三充分条件.

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导,且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\cdots,n-1)$,

$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 3)$，则当 n 为奇数时，$(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

6. 渐近线

① 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=C$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=C$），则直线 $y=C$ 叫作曲线 $y=f(x)$ 的一条**水平渐近线**.

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$），则直线 $x=x_0$ 叫作曲线 $y=f(x)$ 的一条**铅垂渐近线**.

③ 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax-b]=0$）$(a\neq 0)$，则直线 $y=ax+b$ 叫作曲线 $y=f(x)$ 的一条**斜渐近线**.

7. 曲率、曲率半径

(1) 弧微分

设 $y=f(x)$ 是平面内的光滑曲线，则弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x;$$

若曲线方程为 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ 则弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

(2) 曲率的计算公式

设 $f(x)$ 二阶可导，则曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $(x, f(x))$ 处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}};$$

曲线 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ 上任一点处的曲率为

$$K=\frac{|x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)|}{\{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

(3) 曲率半径

$$R=\frac{1}{K}(K\neq 0).$$

四、微分中值定理

1. 费马定理

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，$f'(x_0)$ 存在，若对任意的 $x\in$

$U(x_0)$，有 $f(x) \leqslant f(x_0)$（或 $f(x) \geqslant f(x_0)$），则 $f'(x_0) = 0$.

2. 罗尔定理

设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，若 $f(a) = f(b)$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

3. 拉格朗日中值定理

设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

注 在拉格朗日中值定理中，区间的端点可以是一个动点，这一点一定要引起重视，在考试中经常用到这个特性. 改写如下：

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a).$$

另外在考题中还会出现使用两次拉格朗日中值定理的情况，需要多看多练.

4. 柯西中值定理

设 $f(x)$，$g(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $g'(x) \neq 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

注 柯西中值定理中只要 $g'(x)$ 在(a,b)中不等于0，即使 $g'(a)=0$ 或者 $g'(b) = 0$，柯西中值定理依然成立.

5. 泰勒公式

① 带拉格朗日余项的泰勒公式.

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有直到 $n+1$ 阶的导数，则对该邻域内的任意点 x，都有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 介于 x，x_0 之间.

② 带皮亚诺余项的泰勒公式.

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有直到 n 阶的导数，则对该邻域内的任意点 x，都有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$
$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

6. 中值定理的几个推广公式

① 导数零点定理.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

② 导数介值定理.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$，不妨设 $f'_+(a)<f'_-(b)$，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，对于任意的 $\eta\in(f'_+(a),f'_-(b))$，使得 $f'(\xi)=\eta$.

7. 导函数的零点存在定理(非常好用的结论)

设以下提到的函数导数均存在.

① 若 $f(x)$ 有 $k(k\geqslant 2)$ 个零点，则 $f'(x)$ 至多有 $k-1$ 个零点，…，$f^{(k-1)}(x)$ 至多有 1 个零点.

② 如果 $f'(x)$ 没有零点，则 $f(x)$ 至多有 1 个零点；

如果 $f'(x)$ 只有 1 个零点，则 $f(x)$ 至多有 2 个零点；

……

如果 $f'(x)$ 只有 k 个零点，则 $f(x)$ 至多有 $k+1$ 个零点.

③ 如果 $f''(x)$ 没有零点，则 $f'(x)$ 至多有 1 个零点，$f(x)$ 至多有 2 个零点，…，依次类推.

第四章　一元函数积分学

一、原函数

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于一切 $x\in I$ 有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

注　这些结论请务必记住.

① 连续函数一定具有原函数，反之不对.

② 存在第一类间断点的函数，一定不存在原函数；但存在第二类间断点的函数可能有原函数，其中有无穷间断点的一定没有原函数，但是有振荡间断点的函数可能存在原函数.

③ 若函数具有原函数，那么它有无数个原函数，特别地，任意两个原函数之差为一个常数.

④ 奇函数的原函数（如果存在）一定为偶函数；偶函数的原函数（如果存在）不一定为奇函数.

⑤ $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$，$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

二、定积分存在的条件

注　定积分的存在性也称为一元函数的可积性.

1. 充分条件

① 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

② 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

③ 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

注　可积和存在原函数是不同的. 比如，如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有有限个第一类间断点，可以得出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，但是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无原函数.

2. 必要条件

可积函数必有界,即若定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上必有界.

三、定积分的精确定义

定积分的精确定义主要是用来计算一些特殊形式的数列极限,所以一定要记住:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}$. 下面给出 1 个特殊情况:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

"凑定积分定义" 的步骤如下.

先提出$\frac{1}{n}$,再凑出$\frac{i}{n}$,由于$\frac{i}{n}=0+\frac{1-0}{n}i$,因此可以把$\frac{i}{n}$读作"0 到 1 上的 x",且$\frac{1}{n}=\frac{1-0}{n}$,读作"0 到 1 上的 $\mathrm{d}x$".

四、定积分的性质

设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$ 上可积,则

①$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

②$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

③$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

④ 若 $f(x)$ 在由 a,b,c 构成的最大的区间上可积,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

⑤ 若在$[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

⑥(**估值定理**) 如果 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上的最大值与最小值分别为 M,m,则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

⑦(**积分中值定理**) 如果 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续,则在$[a,b]$ 上至少存

在一点 ξ,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

称$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $y=f(x)$ **在闭区间$[a,b]$上的平均值.**

五、定积分的特殊性质

① 设函数 $f(x)$ 在$[-a,a](a>0)$上连续.

(a) 若 $f(x)$ 是偶函数,则有$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;

(b) 若 $f(x)$ 是奇函数,则有$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

② 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x;$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x;\ \int_0^{2\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x;$$

$$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

结合第一章的点火公式(华里士公式).

③ 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内是以 T 为周期的连续的周期函数,则有

(a)$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$;

(b)$\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$;

(c) 周期函数求导后依然是周期函数,且周期不变;

(d) 周期函数的原函数不一定是周期函数,但是如果$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = 0$,那么该周期函数的原函数就是周期函数.

六、牛顿-莱布尼茨公式

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

七、不定积分的计算

1. 换元积分法

(1) 第一类换元法(凑微分法)

设 $f(u)$ 的原函数为 $F(u)$,又 $u=\varphi(x)$ 为可导函数,则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}[\varphi(x)].$$

(2) 第二类换元法

第二类换元积分法常用"三角代换"和"倒代换".

三角代换:被积函数中包含平方和或者平方差时常用三角代换.

a^2-x^2	令 $x=a\sin t$,则 $a^2-x^2=a^2\cos^2 t$
a^2+x^2	令 $x=a\tan t$,则 $a^2+x^2=a^2\sec^2 t$
x^2-a^2	令 $x=a\sec t$,则 $x^2-a^2=a^2\tan^2 t$

倒代换:一般令 $x=\dfrac{1}{t}$.

2. 分部积分法

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有连续导数,则

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

或

$$\int f(x)\mathrm{d}[g(x)]=f(x)g(x)-\int g(x)\mathrm{d}[f(x)].$$

注　常用的分部积分的几种类型.

①$\int x^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x,\int x^n\sin x\mathrm{d}x,\int x^n\cos x\mathrm{d}x$ 改写为

$$\int x^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x^n\mathrm{d}(\mathrm{e}^x),\int x^n\sin x\mathrm{d}x=-\int x^n\mathrm{d}(\cos x),$$

$$\int x^n\cos x\mathrm{d}x=\int x^n\mathrm{d}(\sin x).$$

②$\int x^n\ln x\mathrm{d}x,\int x^n\arctan x\mathrm{d}x,\int x^n\arcsin x\mathrm{d}x$ 改写为

$$\int x^n\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int\ln x\mathrm{d}(x^{n+1}),\int x^n\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int\arctan x\mathrm{d}(x^{n+1}),$$

$$\int x^n\arcsin x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int\arcsin x\mathrm{d}(x^{n+1}).$$

③ 特别地，$\int e^x \sin x\mathrm{d}x$，$\int e^x \cos x\mathrm{d}x$ 这两种类型，要用两次分部积分法，然后再进行移项解出结果.

3. 有理函数积分

设 $P_n(x)$，$Q_m(x)$ 分别是 x 的 n 次和 m 次多项式，称 $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x\,(n<m)$ 为有理函数积分.

把 $Q_m(x)$ 进行因式分解，分解原则如下：

①$Q_m(x)$ 的一次单因式 $ax+b$ 产生一项 $\frac{A}{ax+b}$；

②$Q_m(x)$ 的 k 重一次因式 $(ax+b)^k$ 产生 k 项，分别为

$$\frac{A_1}{ax+b},\frac{A_2}{(ax+b)^2},\cdots,\frac{A_k}{(ax+b)^k};$$

③$Q_m(x)$ 的二次单因式 px^2+qx+r 产生一项 $\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$；

④$Q_m(x)$ 的 k 重二次因式 $(px^2+qx+r)^k$ 产生 k 项，分别为

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r},\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2},\cdots,\frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}.$$

八、反常积分

1. 无穷区间反常积分

每个被积函数只能有一个无穷限，若上限、下限均为无穷限，则分区间积分，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 无界函数反常积分

即瑕积分，每个被积函数在积分区间上只能有一个瑕点，若有多个瑕点，则分区间积分.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一个瑕点 c，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to c^-}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{x\to c^+}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

3. 混合反常积分

对于上限、下限均为无穷限，或被积函数存在多个瑕点，或上述两类的混合，称为混合反常积分. 对混合反常积分，必须拆分成多个积分区间，使原积分

分为无穷区间和无界函数两类单独的反常积分之和.

4. Γ 函数

在广义积分中 Γ 函数非常有用,需要熟练的掌握,Γ 函数的定义为 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x(\alpha>0)$. 其具有的性质:

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha);\Gamma(n+1)=n!;\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

九、定积分的应用

(1) 求平面图形的面积

① 由曲线 $y=f(x),x=a,x=b(a<b)$ 及 x 轴所围成的封闭平面图形的面积为

$$S=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

② 由曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 及直线 $x=a,x=b\ (a<b)$ 所围成的封闭平面图形的面积为

$$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$

③ 要求由曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 所围成的封闭平面图形的面积,需先求出两条曲线的交点,即求解方程组 $\begin{cases}y=f(x),\\y=g(x)\end{cases}$ 得出解中 x 的最小值记为 a,解中 x 的最大值记为 b,则

$$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$

④ 在极坐标系下,如果曲线 $r=r(\theta),\theta=\alpha,\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 围成的封闭平面图形面积为 S,则

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

如果曲线 $r=r_1(\theta),r=r_2(\theta),\theta=\alpha,\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 围成的封闭平面图形面积为 S,则

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)|\mathrm{d}\theta.$$

⑤ 曲边由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$ 给出的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b y\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 求平行截面面积已知的立体体积

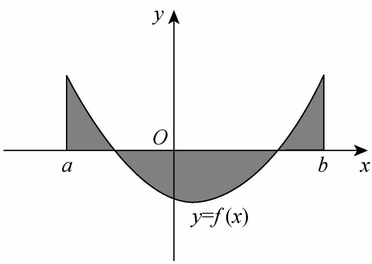
若垂直于 x 轴的平面截立体 Ω 所得截面积是 x 的连续函数 $A(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则 Ω 的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x\text{，其中 } a<b.$$

(3) 求旋转体的体积

① 如下图所示的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

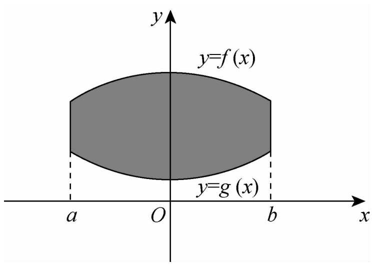
$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x\text{，其中 } a<b.$$



② 如下图所示的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

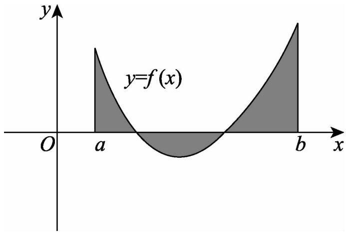
$$V=\pi\int_a^b [f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x,$$

其中 $a<b, f(x)\geqslant g(x)\geqslant 0$.



③ 如下图所示的平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

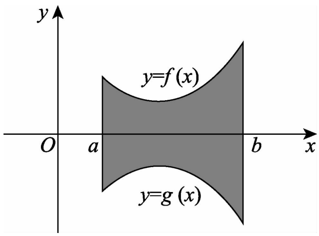
$$V=2\pi\int_a^b x\mid f(x)\mid\mathrm{d}x\text{，其中 } 0\leqslant a<b.$$



④ 如下图所示的平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,$$

其中 $0\leqslant a<b, f(x)\geqslant g(x)$.



（4）求旋转曲面的面积

① 如下图所示的曲线弧绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的面积为

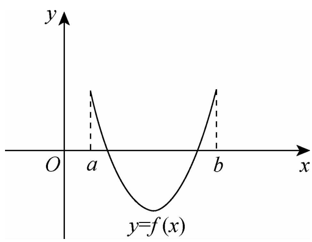
$$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x,$$

其中 $a<b$.

② 如下图所示的曲线弧绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x,$$

其中 $0\leqslant a<b$.



(5) 求平面曲线段的弧长

① 曲线段 $y=f(x)$,$a\leqslant x\leqslant b$,设 $f(x)$ 有连续导数,则所给平面曲线段的弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

② 如果曲线弧$\overset{\frown}{AB}$ 的方程可表示为 $x=x(t)$,$y=y(t)$($\alpha\leqslant t\leqslant\beta$),其中 $x=x(t)$,$y=y(t)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上有连续导数且不同时为零,则曲线弧$\overset{\frown}{AB}$ 的长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

③ 如果曲线弧$\overset{\frown}{AB}$ 可以用极坐标表示为 $r=r(\theta)$ ($\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$),其中 $r(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上有连续导数,则曲线弧$\overset{\frown}{AB}$ 的长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

第五章　向量代数和空间解析几何

一、向量代数

1. 向量的数量积、向量积与混合积

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$.

(1) 数量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

(2) 向量积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

(3) 混合积

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

2. 两向量的夹角

(1) 两向量夹角的余弦

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

(2) 两非零向量平行与垂直的条件

① 垂直.

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

② 平行.

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

(3) 方向余弦

① 计算公式.

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

② 关系.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

二、空间平面与直线

1. 平面的方程

(1) 平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

(2) 平面的一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

(3) 平面的截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

2. 点到平面的距离公式

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. 直线的方程

(1) 直线的标准式(对称式) 方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

(2) 直线的一般式方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

(3) 直线的参数式方程

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt.\end{cases}$$

(4) 直线的两点式方程

过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4. 点到直线的距离公式

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ 的距离为

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m & n & p\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

三、空间曲面与曲线

1. 空间曲面的方程

(1) 空间曲面的一般式方程

$$F(x,y,z)=0.$$

(2) 空间曲面的参数式方程

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v).\end{cases}$$

2. 空间曲线的方程

(1) 空间曲线的一般式方程

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

(2) 空间曲线的参数式方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t).\end{cases}$$

(3) 空间曲线在坐标面上的投影曲线的方程

空间曲线 Γ: $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在 xOy 坐标面上的投影曲线,可以采取以下

方法来求.

从方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$中消去 z,得方程

$$H(x,y)=0,$$

于是 Γ 在 xOy 坐标面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases}H(x,y)=0,\\z=0.\end{cases}$$

3. 常见曲面

(1) 球面

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

(2) 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(3) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(4) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(5) 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q\text{ 同号}).$$

(6) 双曲抛物面(马鞍面)

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z(p,q\text{ 同号}).$$

(7) 二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

第六章　多元函数微分学

一、多元函数的极限

多元函数的极限比较复杂，要使得$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$存在，要求函数$f(x,y)$沿着所有可能的路径趋近于点$(x_0,y_0)$时，函数值都趋于同一个值. 只要有哪怕一条路径趋于(x_0,y_0)时与其他路径得到的值不同，则该极限不存在.

注　多元函数的极限的运算和性质(保号性、唯一性等)与一元函数一致.

二、多元函数的连续

设$z=f(x,y),(x,y)\in D$，且$(x_0,y_0)\in D$，若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处连续.

注　一元函数在一点连续的充要条件是左、右极限存在且都等于该点处的函数值. 但是在多元函数中并没有类似的结论，读者一定要予以重视.

三、偏导数

①$f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$.

由上面可以看出偏导数的本质其实就是一元函数的导数. 固定一个变量，只有另一个变量在变化.

② 判断多元函数在某一点处偏导数是否连续是考研的重点，求解步骤如下：

(a) 用定义法求出$f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$；

(b) 用公式法求出$f'_x(x,y),f'_y(x,y)$；

(c) 计算$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f'_x(x,y),\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f'_y(x,y)$.

看$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f'_x(x,y)=f'_x(x_0,y_0),\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f'_y(x,y)=f'_y(x_0,y_0)$是否成立，如果成立，那么$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处偏导数连续.

四、全微分

① 若 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$，则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微且 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

② 判断函数 $z=f(x,y)$ 是否可微，步骤如下：

(a) 写出全增量 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$；

(b) 写出线性增量 $A\Delta x + B\Delta y$，其中 $A = f'_x(x_0,y_0)$，$B = f'_y(x_0,y_0)$；

(c) 作极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，若该极限等于 0，那么 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，否则就不可微.

五、连续、可偏导和可微的关系

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{偏导数存在(某方向双侧)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \nearrow\\
\text{偏导数连续} \Rightarrow \text{可微} \Rightarrow \text{连续} \Rightarrow \text{极限存在(全方向)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \searrow\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{方向导数存在(某方向单侧)(仅数学一)}
\end{array}
$$

六、隐函数求导法

1. 一元隐函数求导法

设函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内能够唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

2. 二元隐函数求导法

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内能够唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

3. 方程组确定的二元隐函数求导法

设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$

时先对方程组两边求偏导，即$\begin{cases} F'_x + F'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F'_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ G'_x + G'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G'_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$然后解出$\dfrac{\partial u}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial x}$. 同样地，可以求出$\dfrac{\partial u}{\partial y}$和$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

七、多元函数的极值

1. 驻点

使得 $f'_x(x,y)=0, f'_y(x,y)=0$ 同时成立的点(x,y)称为函数 $f(x,y)$ 的驻点.

2. 多元函数取得极值的充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)的某邻域内具有二阶连续偏导数，并且设(x_0,y_0)是驻点，记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$. 则有

① 当 $AC-B^2>0, A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 取得极小值；

② 当 $AC-B^2>0, A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 取得极大值；

③ 当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值；

④ 当 $AC-B^2=0$ 时，不能确定 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值.

3. 多元函数取得极值的必要条件

设 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的一阶偏导数存在，且在点(x_0,y_0)处取得极值，则有 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$.

由此可见具有一阶偏导数的极值点一定是驻点，但驻点不一定是极值点.

4. 条件极值

求 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，一般方法：

① 构造拉格朗日函数，令

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y);$$

② 将 $F(x,y,\lambda)$ 分别对 x,y,λ 求偏导数，构造方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\ F'_y = f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ F'_\lambda = \varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

解出(x,y)，这是可能的极值点坐标；

③ 判断 ② 求出的点是否为极值点，如果是，则求出该点的函数值.

第七章　多元函数积分学

一、重积分的计算

1. 二重积分的计算

(1) 利用直角坐标系计算二重积分

① 若积分区域 D 是 X 型区域，其不等式表示为

$$D:\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \end{cases}$$

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

② 若积分区域 D 是 Y 型区域，其不等式表示为

$$D:\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \end{cases}$$

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 利用极坐标系计算二重积分

① 如果极点 O 在区域 D 内部，此时 D 可用不等式 $\begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant r(\theta) \end{cases}$ 表示，则

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

② 如果极点 O 在区域 D 的边界上，此时 D 可用不等式 $\begin{cases} \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \\ 0 \leqslant r \leqslant r(\theta) \end{cases}$ 表示，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r.$$

③ 如果极点O在区域D外部，此时D可用不等式$\begin{cases}\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\\ r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)\end{cases}$来表示，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r.$$

注 1　选取合适的坐标系将会给计算二重积分带来方便.

① 适合使用极坐标计算的二重积分**被积函数**一般具有形式

$$f(\sqrt{x^2+y^2}),f\left(\frac{x}{y}\right),f\left(\frac{y}{x}\right).$$

② 适合使用极坐标计算的二重积分**积分区域**一般具有下列形式：

圆心在原点的圆域、圆环或者扇形；圆心在坐标轴上且圆边界过原点的圆、或其一部分.

注 2　利用对称性和奇偶性也将会给计算二重积分带来方便.

① 若积分区域D关于y轴对称，且被积函数关于x有奇偶性，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \text{函数是关于 } x \text{ 的偶函数},\\ 0, & \text{函数是关于 } x \text{ 的奇函数},\end{cases}$$

D_1是D在y轴右侧的部分.

② 若积分区域D关于x轴对称，且被积函数关于y有奇偶性，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \text{函数是关于 } y \text{ 的偶函数},\\ 0, & \text{函数是关于 } y \text{ 的奇函数},\end{cases}$$

D_1是D在x轴上方的部分.

③ 轮换对称性.

若积分区域D关于直线$y=x$对称，也就是说将表达式中的x和y对调后原式不变，比如圆域：$x^2+y^2\leqslant R^2$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma,$$

即将被积函数中 x 和 y 对调后积分值不变.

2. 三重积分的计算

(1) 利用直角坐标系计算三重积分

①"先一后二",即将三重积分化为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}\iint\limits_{D_{xOy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z,\\ \iint\limits_{D_{yOz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}f(x,y,z)\mathrm{d}x,\\ \iint\limits_{D_{xOz}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)}f(x,y,z)\mathrm{d}y.\end{cases}$$

②"先二后一",即将三重积分化为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}\int_c^d\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ \int_a^b\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\\ \int_m^n\mathrm{d}y\iint\limits_{D(y)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z.\end{cases}$$

(2) 利用柱面坐标系计算三重积分

① 柱面坐标系下的体积元素

$$\mathrm{d}v=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

② 柱面坐标系下的三次积分的先后次序一般为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int\mathrm{d}\theta\int r\mathrm{d}r\int f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

③ 若空间区域 Ω 可以用不等式

$$\begin{cases}z_1(r,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(r,\theta),\\ r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\end{cases}$$

表示,则

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v\\ =&\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}r\mathrm{d}r\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

注　下面两种情况常用柱面坐标来计算.

① 积分区域表达式中含有 x^2+y^2.

② 被积函数中含 x^2+y^2.

(3) 利用球面坐标计算三重积分

① 球面坐标与直角坐标的关系：

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi.\end{cases}$$

② 球面坐标系下的体积元素

$$\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

③ 球面坐标系下三次积分的先后次序一般为

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int\mathrm{d}\theta\int\mathrm{d}\varphi\int f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r.$$

注 1　下面两种情况常用球面坐标来计算.

① 积分区域表达式中含有 $x^2+y^2+z^2$.

② 被积函数中含 $x^2+y^2+z^2$.

注 2　利用对称性和奇偶性也将会给计算三重积分带来方便.

若积分区域 Ω 关于 xOy 平面对称且被积函数关于 z 有奇偶性,则

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}v, & \text{函数是关于 } z \text{ 的偶函数},\\ 0, & \text{函数是关于 } z \text{ 的奇函数},\end{cases}$$

其中 Ω_1 为 Ω 在 xOy 平面上方的区域. 另外,当积分区域关于 xOz 和 yOz 平面对称且被积函数具有相应的奇偶性时,有完全类似的结论.

二、曲线积分

1. 第一类曲线积分 —— 对弧长的曲线积分

对弧长的曲线积分是将其化为**定积分**来计算的.

(1) 对于空间的情形

若空间曲线 Γ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t),(\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \\ z=z(t) \end{cases}$ 给出，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

且

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

(2) 对于平面的情形

① 若平面曲线 L 由 $y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

② 若平面曲线 L 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

③ 若平面曲线 L 由极坐标形式 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

2. 第二类曲线积分——对坐标的曲线积分(计算)

(1) 化为定积分

若平面有向曲线 L 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}(t:\alpha\to\beta)$ 给出，其中，当 $t=\alpha$ 时对应着起点 A，当 $t=\beta$ 时对应着终点 B，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t(\text{化为定积分}).$$

(2) 格林公式

设平面闭区域 D 由分段光滑闭曲线 L 围成，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上具有

一阶连续偏导数,L 取正向,则

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

注 1 何为"L 取正向".

假设你沿着 L 的正向前进,你的左手始终在 L 围成的区域 D 内部.

注 2 使用格林公式时必须要满足两个条件:

① 积分曲线 L 是一个闭环,且取正向;

② $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数.

若这两个条件有其中之一被"破坏",我们可以采用"补线法"或者"挖去法"创造出可以运用格林公式的条件,从而简化计算.

注 3 曲线积分与路径无关的判定.

若函数 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内具有连续的一阶偏导数,则以下四条等价.

① 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关.

② $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$,其中 C 是 D 中的任意一段光滑封闭曲线.

③ $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall\,(x,y)\in D$.

④ $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}F(x,y)$.

计算与路径无关的曲线积分时常用下列两种方法.

① 改换积分路径:通常取平行于坐标轴的折线.

② 利用原函数:设 $F(x,y)$ 是 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的原函数,即 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}F(x,y)$,则有

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1),$$

其中有向曲线 L 的起点是 $A(x_1,y_1)$,终点是 $B(x_2,y_2)$.

(3) 斯托克斯公式

$$\begin{aligned}&\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

注 ① Γ 为分段光滑空间有向闭曲线.

②Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑有向曲面(Γ 的方向和 Σ 的法向量符合右手法则).

③ 函数 P,Q,R 在 Σ 上有一阶连续偏导数.

三、曲面积分

1. 第一类曲面积分 —— 对面积的曲面积分

计算第一类曲面积分的一般方法是化为二重积分来计算,具体如下.

① 确定投影区域(投影点不能重合).

② 将 $z=z(x,y)$ 或者 $F(x,y,z)=0$ 代入 $f(x,y,z)$.

③ 计算 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

最终得到 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

注 以上是将曲面投影到 xOy 平面上,投影到另外两个平面上也是一样的做法.

2. 第二类曲面积分 —— 对坐标的曲面积分

计算第二类曲面积分的一般方法也是化为二重积分来计算,具体如下.

对于 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,可以将其拆分成三个积分(如果有的话) $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$\iint\limits_{\Sigma} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,$\iint\limits_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,分别投影到对应的坐标面上,化为二重积分计算,然后相加.

3. 高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v.$$

注 以上公式要满足以下条件才能成立.

①Ω 是由有向分片光滑的闭曲面 Σ 所围成的空间有界闭区域.

②$P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数.

如果 Σ 不是封闭的,或者 $P,Q,R,\dfrac{\partial P}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial y},\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 在 Ω 上不连续,对于第一种情况可以采用“补面法”,对于第二种情况可以采用“挖去法”(可以类比格林公式).

四、多元函数积分的应用

1. 质量

(1) 平面

$$m=\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 空间体

$$m=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

(3) 曲线

$$m=\int_{L}\rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

(4) 曲面

$$m=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

2. 质心

(1) 平面

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D}x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y},\bar{y}=\frac{\iint\limits_{D}y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

(2) 空间体

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}.$$

(3) 曲线

$$\bar{x}=\frac{\int_{L}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_{L}\rho(x,y,z)\mathrm{d}s},\bar{y}=\frac{\int_{L}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_{L}\rho(x,y,z)\mathrm{d}s},\bar{z}=\frac{\int_{L}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_{L}\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}.$$

(4) 曲面

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S},\bar{y}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S},\bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}.$$

注 在考研范围内质心就是**重心**,当密度为常数时重心就变成**形心**了.

3. 转动惯量

(1) 平面

$$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma, I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 空间体

$$I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v, I_y=\iiint\limits_\Omega (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$I_z=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

(3) 曲线

$$I_x=\int_L (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s, I_y=\int_L (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,$$

$$I_z=\int_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

(4) 曲面

$$I_x=\iint\limits_\Sigma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S, I_y=\iint\limits_\Sigma (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

$$I_z=\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

五、场论初步

1. 散度

向量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,则向量场$\boldsymbol{A}$的散度为

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

2. 旋度

向量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,则向量场$\boldsymbol{A}$的旋度为

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

第八章　无穷级数

一、级数的性质及其收敛的必要条件

1. 级数的性质

① 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，且其和分别为 A,B，则必有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = A \pm B.$$

注　若两个级数一个收敛一个发散，其和或差必然发散；若两个级数都发散，其和或差不一定发散.

② 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 S，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛，且其和为 kS.

特别地，若 k 是非零常数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 具有相同的敛散性.

③ 改变级数的前有限项，不会改变级数的敛散性.

④ 收敛的级数在不改变各项的前提下，任意加括号得到的新级数仍然收敛，且其和不变.

注　一个级数加括号后收敛，但是原级数不一定收敛. 一个级数加括号后发散，那么原级数一定发散.

2. 级数收敛的必要条件

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

注　若当 $n \to \infty$ 时，一般项 u_n 不趋于 0，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

二、两个重要级数

1. p 级数

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 称为 p 级数.

p 级数的敛散性：

① 当 $p\leqslant 1$ 时，该级数发散；

② 当 $p>1$ 时，该级数收敛.

注 当 $p=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 称为调和级数（发散）.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 称为交错调和级数（收敛）.

2. 几何级数

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^{n}(a\neq 0)$ 称为几何级数.

几何级数的敛散性：

① 当 $|q|\geqslant 1$ 时，该级数发散；

② 当 $|q|<1$ 时，该级数收敛，其和为 $S=\frac{a}{1-q}$.

三、级数的判敛法

1. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\geqslant 0)$

① 比较判别法.

设 $0\leqslant u_n\leqslant v_n$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

② 比较判别法的极限形式.

设 $v_n\geqslant 0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l(0<l<+\infty)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的敛散性.

注 当 $l=0$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $l=+\infty$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

③ 比值判别法.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则当 $\rho<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，当 $\rho>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，当 $\rho=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛也可能发散.

④ 根值判别法.

若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$,则当$\rho<1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,当$\rho>1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,当$\rho=1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛也可能发散.

⑤ 积分判别法.

若存在$[1,+\infty)$上单调减少的非负连续函数$f(x)$,使得$u_n=f(n)$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$的敛散性相同.

注 正数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$都收敛.

2. 交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$

莱布尼茨判别法:若$u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$收敛.

注 即使级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛,也不一定有$u_n\geqslant u_{n+1}$成立.

3. 任意项级数

① 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.

② 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛.

注 ① 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,反之不成立.

② 条件收敛的级数所有的正项(负项)构成的级数一定发散,即若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛,那么有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n+|u_n|}{2}$(所有正项,发散),$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n-|u_n|}{2}$(所有负项,发散).

四、幂级数

形如$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$或$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$即$x_0=0$的级数称为幂级数.

1. 阿贝尔定理

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$①若在点$x=x_1(x_1\neq 0)$处收敛，则对于满足$|x|<|x_1|$的一切$x$，幂级数绝对收敛；②若在点$x=x_2(x_2\neq 0)$处发散，则对于$|x|>|x_2|$的一切$x$，幂级数发散.

2. 收敛域的求法

若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$R$的表达式为

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty,\end{cases}$$ 则开区间$(-R,R)$为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间.

单独考查$x=\pm R$处的敛散性就可以确定其收敛域为$(-R,R)$或$[-R,R)$或$(-R,R]$或$[-R,R]$.

3. 运算法则

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$和$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径分别为$R_a$和$R_b$(二者不相等)，则有下列结论：

①$k\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}ka_nx^n$，$|x|<R_a$，$k$为常数；

②$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$，$|x|<R=\min\{R_a,R_b\}$.

4. 性质

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$，其和函数为$S(x)$，则有以下结论：

①$S(x)$在收敛区间上连续，若该幂级数在端点位置也收敛，那么$S(x)$在$[-R,R)$或$(-R,R]$连续；

②$S(x)$在收敛域上可积；

注 逐项积分后得到的幂级数和原幂级数有相同的收敛半径,但收敛域可能变大.

③$S(x)$ 在收敛域内可导,且可以逐项求导.

注 逐项求导后得到的幂级数和原幂级数有相同的收敛半径,但收敛域可能变小.

5. 泰勒级数和麦克劳林级数

① 泰勒级数.

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某一邻域内任意阶可导,则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的泰勒级数.

② 麦克劳林级数.

当 $x_0=0$ 时的泰勒级数称为麦克劳林级数.具体如下:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

注 求和函数时记住下列结论将会对解题起到很大的帮助(务必记住).

①$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),-1\leqslant x<1;\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},-1<x<1.$

②$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},-1<x<1;\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x},-1<x<1.$

③$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,-\infty<x<+\infty.$

④$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x),-1<x\leqslant 1.$

⑤$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x,-\infty<x<+\infty.$

⑥$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos x,-\infty<x<+\infty.$

⑦$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$

$$\begin{cases} x \in (-1,1), \text{当 } a \leqslant -1, \\ x \in (-1,1], \text{当 } -1 < a < 0, \\ x \in [-1,1], \text{当 } a > 0. \end{cases}$$

五、傅里叶级数

1. 三角函数及其正交性

在三角函数族 $\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx,\cdots\}$ 中任意挑选两个不同的函数，其乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分始终为零.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0,\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=0,\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\mathrm{d}x=0(m\neq n).$$

2. 周期为 2π 的傅里叶级数

$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 解释如下：

①$f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积；

② $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶级数；

③a_n 和 b_n 称为傅里叶系数，计算公式如下

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

3. 傅里叶级数的收敛定理(狄利克雷收敛定理)

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上：

① 连续或只有有限个第一类间断点；

② 至多只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 可以展开成：$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

①x 为 $f(x)$ 的连续点时，$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$；

②x 为 $f(x)$ 的间断点时，

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2};$$

③$x=\pm\pi$ 时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

4. 偶延拓和奇延拓

有些情况 $f(x)$ 并非定义在$[-\pi,\pi]$上，而是定义在$[0,\pi]$上，这就需要进行延拓，主要有两种.

① 偶延拓.

将函数 $f(x)$ 展开成余弦级数. 对 $f(x)$ 先进行区间偶延拓，再进行周期延拓，得到

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\sim f(x),$$

其中 $$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x, a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots).$$

② 奇延拓.

将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数. 对 $f(x)$ 先进行区间奇延拓，再进行周期延拓，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\sim f(x),$$

其中 $$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots).$$

5. 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数的收敛定理

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数，若 $f(x)$ 在$[-l,l]$上：

① 连续或只有有限个第一类间断点；

② 至多只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 可以展开成

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots).$$

①x 是 $f(x)$ 的连续点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=f(x)$；

②x 是 $f(x)$ 的间断点时，

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2};$$

③$x=\pm l$ 时，$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

6. 偶延拓和奇延拓(定义在$[0,l]$上的函数 $f(x)$)

① 偶延拓.

将函数 $f(x)$ 展开成余弦级数. 对 $f(x)$ 先进行区间偶延拓，再进行周期延拓. 得到

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x\sim f(x),$$

其中
$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots).$$

② 奇延拓.

将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数. 对 $f(x)$ 先进行区间奇延拓，再进行周期延拓. 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\sim f(x),$$

其中
$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots).$$

第九章　常微分方程

一、微分方程的解

若将函数代入微分方程,使得方程恒成立,则称该函数是微分方程的解.

若微分方程的解中含有的**独立常数**的个数等于微分方程的阶数,则该解称为微分方程的通解.

注　微分方程的阶等于微分方程中未知函数导数的最高阶数.

二、一阶微分方程的求解

1. 变量可分离

形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$的一阶微分方程称为变量可分离的一阶微分方程.

求通解方法如下,前提 $g(y)\neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x,$$

再同时对等式两端求积分有

$$\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

注　在计算过程中一定不要忘记常数项,建议添加上积分号后首先将常数项添上,因为是一阶微分方程,因此任意常数只有一个.

2. 齐次微分方程

微分方程可以化为形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$,则称该微分方程为齐次微分方程.

其解法:令 $u=\frac{y}{x}$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,于是原方程变为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)\Rightarrow x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u,$$

于是有$\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$,最后将 $u=\frac{y}{x}$ 代回.

3. 一阶线性微分方程

形如 $y'+p(x)y=q(x)$ 的微分方程称为一阶线性微分方程，其通解公式为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].$$

注　运用此公式后不用再添加任意常数，公式中已经涵盖.

4. 伯努利方程

形如 $y'+p(x)y=q(x)y^n(n\neq 0,n\neq 1)$ 的方程称为伯努利方程. 其解法：将原式化为 $y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y^{1-n}=q(x)$；再令 $z=y^{1-n}$，得到 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+p(x)z=q(x);$$

最后解此一阶线性微分方程即可.

三、二阶可降阶微分方程的求解

1. $y''=f(x)$ 型

特点：缺少 y 和 y'.

这种类型更一般的形式是 $y^{(n)}=f(x)$，求解时只需要将方程进行 n 次不定积分即可.

2. $y''=f(x,y')$ 型

特点：缺少 y.

解法：令 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，$y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，于是原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$，即将该类方程化为了一阶方程，再按照一阶微分方程求解即可.

3. $y''=f(y,y')$ 型

特点：缺少 x.

解法：令 $y'=p$，$y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p$，于是原方程化为 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$，同样该类方程化为了一阶方程，再按照一阶微分方程求解即可.

四、常系数微分方程的求解

1. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解

形如 $y''+py'+qy=0$ 称为二阶常系数齐次线性微分方程,其求解方法如下.

写出对应的特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$,然后求其特征根,有以下三种情况.

① 若 $p^2-4q>0$,设 λ_1,λ_2 是特征方程的两个不相等实根,则通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\text{(}C_1,C_2\text{ 是任意常数)}.$$

② 若 $p^2-4q=0$,设 λ_1,λ_2 是特征方程的两个实根且 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$,则通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{\lambda x}\text{(}C_1,C_2\text{ 是任意常数)}.$$

③ 若 $p^2-4q<0$,设 $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ 是特征方程的一对共轭复根,则通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\text{(}C_1,C_2\text{ 是任意常数)}.$$

2. 二阶常系数非齐次线性微分方程的通解

形如 $y''+py'+qy=f(x)$ 的方程称为二阶常系数非齐次线性微分方程,这类方程需要分两步来计算通解,首先,计算 $y''+py'+qy=f(x)$ 对应齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解,然后,求 $y''+py'+qy=f(x)$ 的特解.

求通解不再说明,以下是求特解的方法,特解根据自由项 $f(x)$ 的不同分为两种情况.

设 $P_n(x),P_m(x)$ 分别为 x 的 n 次和 m 次多项式.

① 当自由项 $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{ax}$ 时,特解设为 $y^*=\mathrm{e}^{ax}Q_n(x)x^k$,其中

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}\text{ 照抄},\\ Q_n(x)\text{ 为 }x\text{ 的 }n\text{ 次多项式},\\ k=\begin{cases}0, & a\text{ 不是特征根},\\ 1, & a\text{ 是单特征根},\\ 2, & a\text{ 是二重特征根}.\end{cases}\end{cases}$$

② 当自由项 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$时,特解设为

$$y^*=\mathrm{e}^{ax}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k,$$

其中$\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}\text{ 照抄},\\ l=\max\{m,n\},Q_l^{(1)}(x)\text{ 和 }Q_l^{(2)}(x)\text{ 分别为 }x\text{ 的两个不同的 }l\text{ 次多项式},\\ k=\begin{cases}0, & a\pm\beta\mathrm{i}\text{ 不是特征根},\\ 1, & a\pm\beta\mathrm{i}\text{ 是特征根}.\end{cases}\end{cases}$

注 在考研中还会涉及三阶常系数齐次微分方程

$$y''' + py'' + qy' + ry = 0,$$

特征方程为 $\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$,根据特征根不同情形的通解如下:

①$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 三者两两不等,则有

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}(C_1,C_2,C_3 \text{ 是任意常数});$$

②$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 其中有两个相等,但并不两两相等,假如 $\lambda_1 = \lambda_2$,则有

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}(C_1,C_2,C_3 \text{ 是任意常数});$$

③$\lambda_1 \in \mathbf{R}, \lambda_{2,3} = \alpha \pm \beta i(\beta \neq 0)$,则通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + e^{\alpha x}(C_2 \cos \beta x + C_3 \sin \beta x)(C_1,C_2,C_3 \text{ 是任意常数}).$$

五、高阶微分方程

1. n 阶齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \tag{*}$$

2. n 阶非齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \tag{**}$$

以上两个方程中 $a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x)$ 为已知的连续函数.

3. 高阶线性微分方程解的结构

重点掌握,这将给解题带来很多便利,具体如下.

① 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 是 n 阶齐次线性微分方程的解,则 $k_1\varphi_1(x) + k_2\varphi_2(x)$($k_1,k_2$ 是任意常数)也为该方程的解.

② 若 $\varphi_1(x)$ 是(*)的解,$\varphi_2(x)$ 是(**)的解,则 $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 为(**)的解.

③ 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 是(**)的解,则 $k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)$ 是(*)的解的充要条件是 $k_1 + k_2 = 0$.

六、欧拉方程

形如 $x^2\dfrac{d^2 y}{dx^2}+a_1 x\dfrac{dy}{dx}+a_2 y = f(x)$ 的方程称为欧拉方程,其中 a_1,a_2 为已知常数,$f(x)$ 为已知函数. 解此方程一般通过令 $x = e^t$ 化为以 t 为自变量的常系数线性微分方程,求解后代入原方程即可.

七、差分方程

1. 一阶差分

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t.$$

2. 二阶差分

$$\Delta^2 y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t.$$

3. 一阶线性齐次差分方程的解法

(1) 方程形式

$$y_{t+1} - ay_t = 0.$$

(2) 特征方程

$$r - a = 0.$$

(3) 通解

$$\tilde{y}_t = Ca^t (C \text{ 是任意常数}).$$

4. 一阶线性非齐次差分方程的解法

(1) 方程形式

$$y_{t+1} - ay_t = f(t).$$

(2) 通解形式

$$y_t = \tilde{y}_t + y_t^*.$$

(3) 特解形式

① 若 $f(t) = P_m(t)$,其中 $P_m(t)$ 是 t 的 m 次多项式,$y_t^* = t^k Q_m(t)$,其中 $Q_m(t)$ 是特定的 m 次多项式.

当 $a \neq 1$ 时,取 $k = 0$;

当 $a = 1$ 时,取 $k = 1$.

② 若 $f(t) = d^t P_m(t)$,$y_t^* = t^k d^t Q_m(t)$.

当 d 不是特征方程的根时,取 $k = 0$;

当 d 是特征方程的根时,取 $k = 1$.