

第七章 无限长单位冲激响应 (IIR)

数字滤波器的设计方法

7.1 引言

7.2 数字滤波器的实现步骤

7.3 数字滤波器的技术指标

7.4 IIR数字滤波器的设计方法分类

7.5 模拟滤波器的设计

7.7 冲激响应不变法

7.9 双线性变换法

7.1 引言

✘ 本章主要讨论找到一个满足技术指标要求的可实现的因果稳定的数字滤波器来逼近理想的滤波器幅度特性。

✘ IIR数字滤波器的特点

(1) 单位冲激响应 $h(n)$ 是无限长；

(2) 系统函数是有理分式的形式

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

$H(z)$ 在有限 z 平面上既有极点又有零点。极点应全在 z 平面单位圆内；

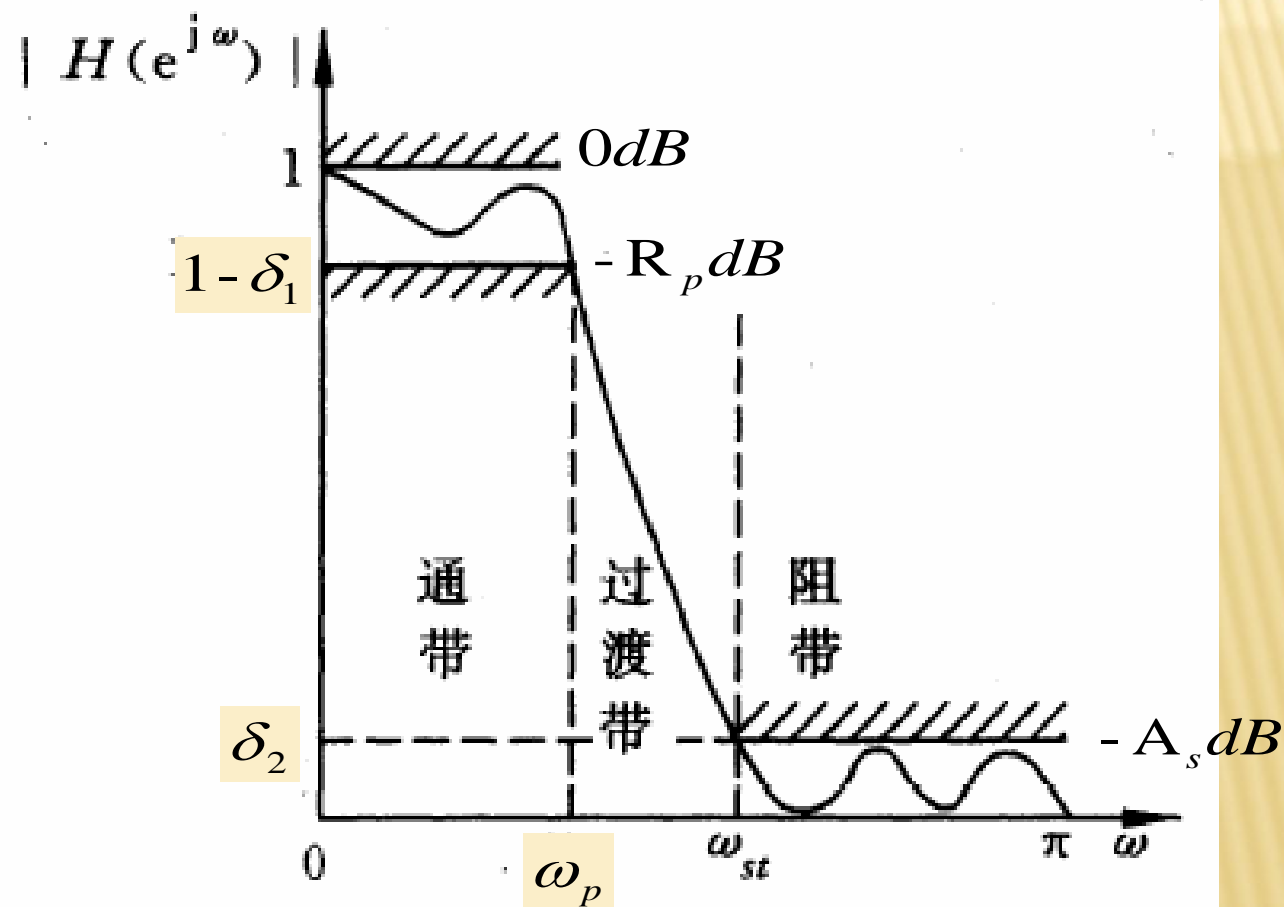
(3) 系统的运算结构上既有正向支路，也有反馈支路，也就

(4) 是包含递归结构。


7.2 数字滤波器的实现步骤

- ✗ (1) 按照任务的需要，确定滤波器的性能指标；
- ✗ (2) 用一个因果稳定的LSI系统函数去逼近这一性能要求，逼近的系统函数可以是IIR或FIR滤波器；
- ✗ (3) 用有限精度算法来实现这个系统函数，包括运算结构，选择合适的字长以及有效数字的处理方法；
- ✗ (4) 实际技术的实现，包括采用软件、专用数字滤波器的硬件或专用的数字信号处理器实现。

7.3 数字滤波器的技术指标




- 理想低通滤波器逼近的误差容限

- 
- (1) 有通带、阻带和过渡带
 - (2) 通带中有通带截止频率 ω_p ，及通带波纹 δ_1
 - (3) 阻带中有阻带截止频率 ω_{st} ，及阻带波纹 δ_2
 - (4) 在过渡带内，频率响应幅度从通带边沿到阻带边沿是平滑过渡的；
 - (5) 一般用分贝dB来表示，即通带允许的最大**衰减** R_p 分贝及阻带应达到的最小**衰减** A_s 分贝。

$$R_p \geq 20 \lg \frac{|H(e^{j\omega})|_{\max}}{|H(e^{j\omega_p})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_p})| = -20 \lg (1 - \delta_1) (dB)$$

$$A_s \geq 20 \lg \frac{|H(e^{j\omega})|_{\max}}{|H(e^{j\omega_{st}})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_{st}})| = -20 \lg \delta_2 (dB)$$



✘ 如果用分贝来表示增益，则将 $|H(e^{j\omega})|_{\max} = 1$ ($\omega = 0$) 处的增益称为0dB，则通带边沿处的增益为 $-R_p$ 分贝，阻带起始频率处的增益为 $-A_s$ 分贝。

例： $\omega = \omega_p$ 时， $|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

则在 $\omega = \omega_p$ 处的衰减为

$$20\lg\left[\frac{|H(e^{j\omega})|_{\max}}{|H(e^{j\omega_p})|}\right] = -20\lg|H(e^{j\omega_p})| = -20\lg(1 - \delta_1) = 3dB$$

表征数字滤波器频率响应特性的三个参量是 幅度平方响应、相位响应、群延迟

根据傅立叶变换的性质，当 $h(n)$ 为实序列的时，满足 $H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$

1. 幅度平方响应

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) \\ &= |H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} \end{aligned}$$

- ✘ $H(z)H(z^{-1})$ 的极点(零点)既是共轭的，又是以单位圆为镜像对称的，就是成共轭倒数。
- ✘ 取单位圆内的极点作为 $H(z)$ 的极点。

2. 相位响应

由于 $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\beta(e^{j\omega})} = \text{Re}[H(e^{j\omega})] + j \text{Im}[H(e^{j\omega})]$

所以 $\beta(e^{j\omega}) = \text{arctg} \left\{ \frac{\text{Im}[H(e^{j\omega})]}{\text{Re}[H(e^{j\omega})]} \right\}$

由于 $H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\beta(e^{j\omega})}$

所以又有

$$\frac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})} = e^{2j\beta(e^{j\omega})}$$

$$2j\beta(e^{j\omega}) = \ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})} \right]$$

$$\beta(e^{j\omega}) = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})} \right] = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right] = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(z)}{H(z^{-1})} \right]$$

3. 群延迟响应

它是滤波器平均延迟的一个度量

$$\tau(e^{j\omega}) = -\frac{d\beta(e^{j\omega})}{d\omega}$$

可以化为
$$\tau(e^{j\omega}) = -\frac{d\beta(z)}{dz} \frac{dz}{d\omega} \Big|_{z=e^{j\omega}} = -jz \frac{d\beta(z)}{dz} \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

由于
$$\ln[H(e^{j\omega})] = \ln|H(e^{j\omega})| + j\beta(e^{j\omega})$$

所以
$$\beta(e^{j\omega}) = \text{Im}\{\ln[H(e^{j\omega})]\}$$

因而又有

$$\tau(e^{j\omega}) = -\text{Im}\left[\frac{d}{d\omega}\{\ln[H(e^{j\omega})]\}\right]$$



同样可化为

$$\begin{aligned}\tau(e^{j\omega}) &= -\operatorname{Im}\left[\frac{d\{\ln[H(z)]\}}{dz}\frac{dz}{d\omega}\right]_{z=e^{j\omega}} \\&= -\operatorname{Im}\left[jz\frac{d\{\ln[H(z)]\}}{dz}\right]_{z=e^{j\omega}} = -\operatorname{Re}\left[z\frac{d}{dz}\{\ln[H(z)]\}\right]_{z=e^{j\omega}} \\&= -\operatorname{Re}\left[z\frac{dH(z)}{dz}\frac{1}{H(z)}\right]_{z=e^{j\omega}}\end{aligned}$$

当滤波器为线性相位响应特性时，
则通带内延迟特性为常数。

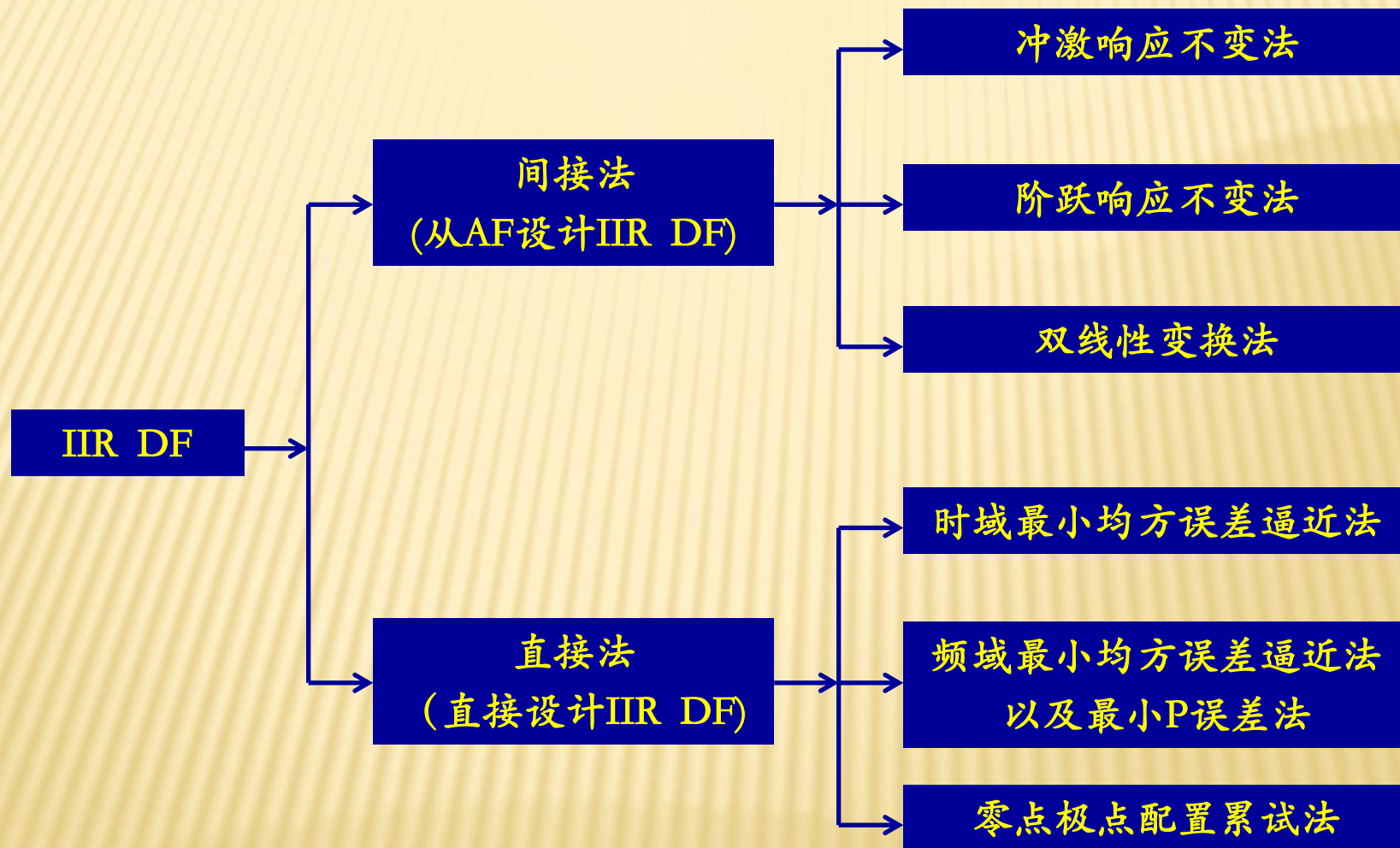
7.4 IIR 数字滤波器的设计方法分类

IIR系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

求出滤波器的各系数 a_k, b_k , 使得在规定意义上(如通带起伏及阻带衰减的要求或采用最优化准则), 逼近所要求特性。

在 z 平面上逼近, 得到数字滤波器。



7.5 模拟滤波器设计

7.5.1 引言

设计步骤:

- (1) 给定滤波器技术指标
- (2) 选定滤波器的类型 (例如巴特沃思滤波器或切比雪夫滤波器)
- (3) 计算滤波器需要的阶数
- (4) 通过查表或计算来确定归一化低通滤波器的系统函数 $H_{an}(S)$
- (5) 将 $H_{an}(S)$ 转换为所需类型的滤波器系统函数 $H_a(S)$

7.5.2 模拟巴特沃思低通滤波器

1、幅度平方函数

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

Ω_c 称为巴特沃思滤波器的通带截止频率。

当 $\Omega = \Omega_c$ 时,

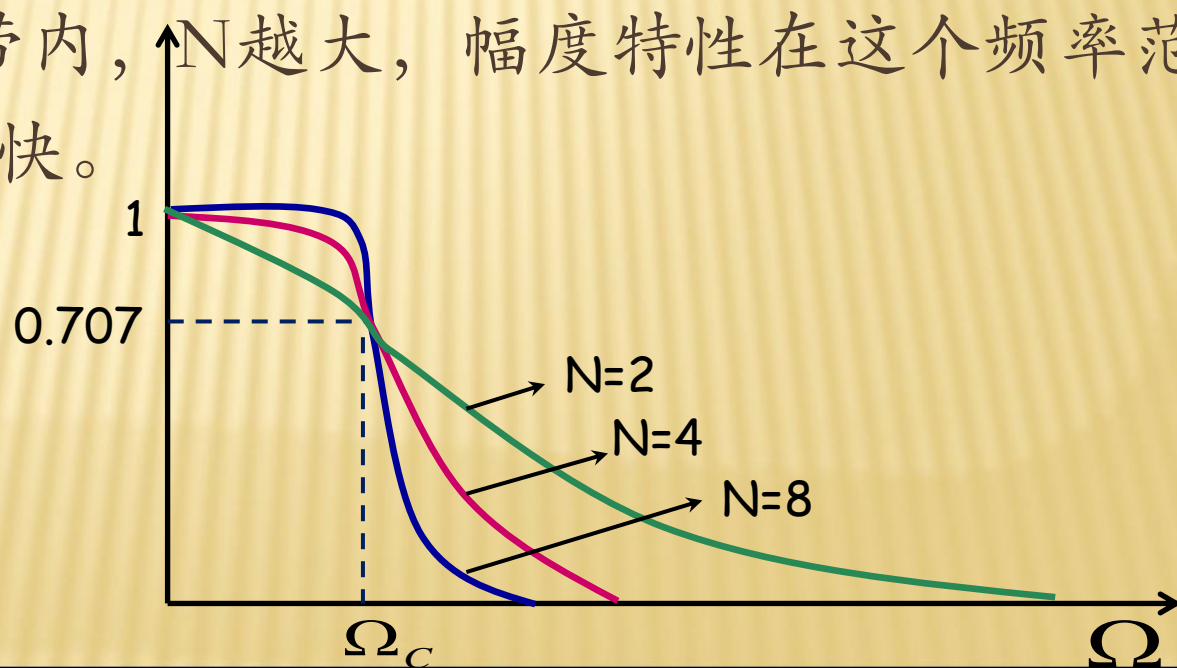
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{2}, \quad |H_a(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R_c = -20 \lg \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_c)} \right| = 3 \text{dB}$$

因此 Ω_c 又称为巴特沃低通滤波器频率响应幅度衰减到 3dB 时的带宽。

2、巴特沃思低通滤波器幅度特性的特点

- (1) $\Omega = 0$ 时, $|H_a(j\Omega)| = 1$, 无衰减;
- (2) $\Omega = \Omega_c$ 时, $|H_a(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 即 $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{2}$, 即功率减少到一半, 不管滤波器的阶数是多少, 所有的幅度曲线都在 $\Omega = \Omega_c$ 处交汇于3dB衰减处。
- (3) 通带内, N 越大, 通带内幅度特性越平坦;
- (4) 过渡带及阻带内, N 越大, 幅度特性在这个频率范围内衰减的越快。



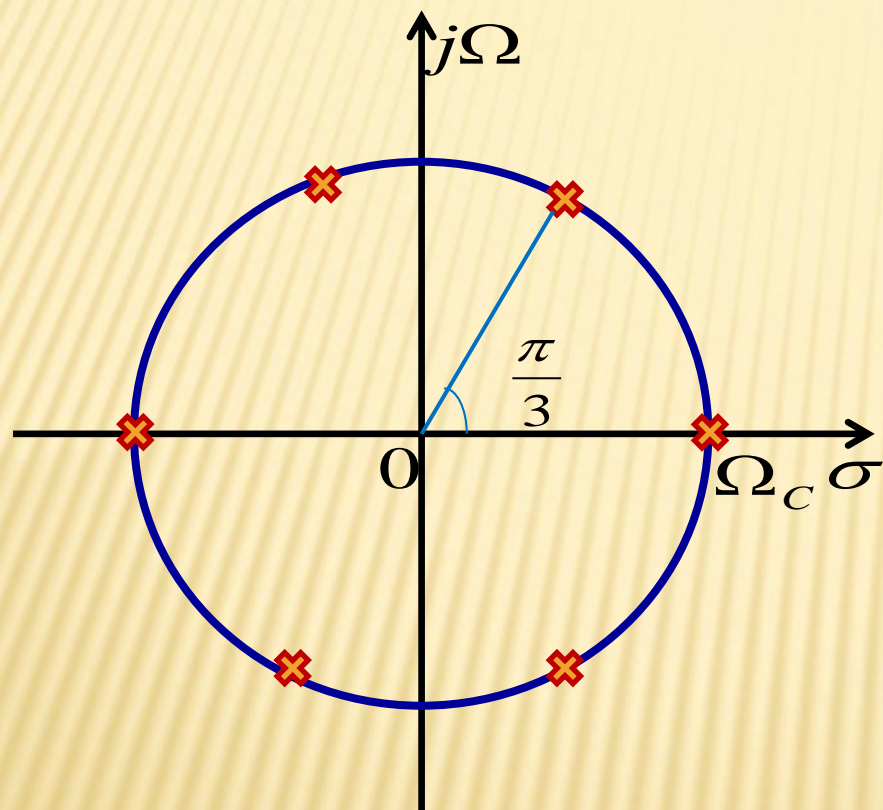
3、巴特沃思低通滤波器的系统函数

$$\begin{aligned} H_a(s)H_a(-s) &= H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega)\Big|_{s=j\Omega} \\ &= |H_a(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} \end{aligned}$$

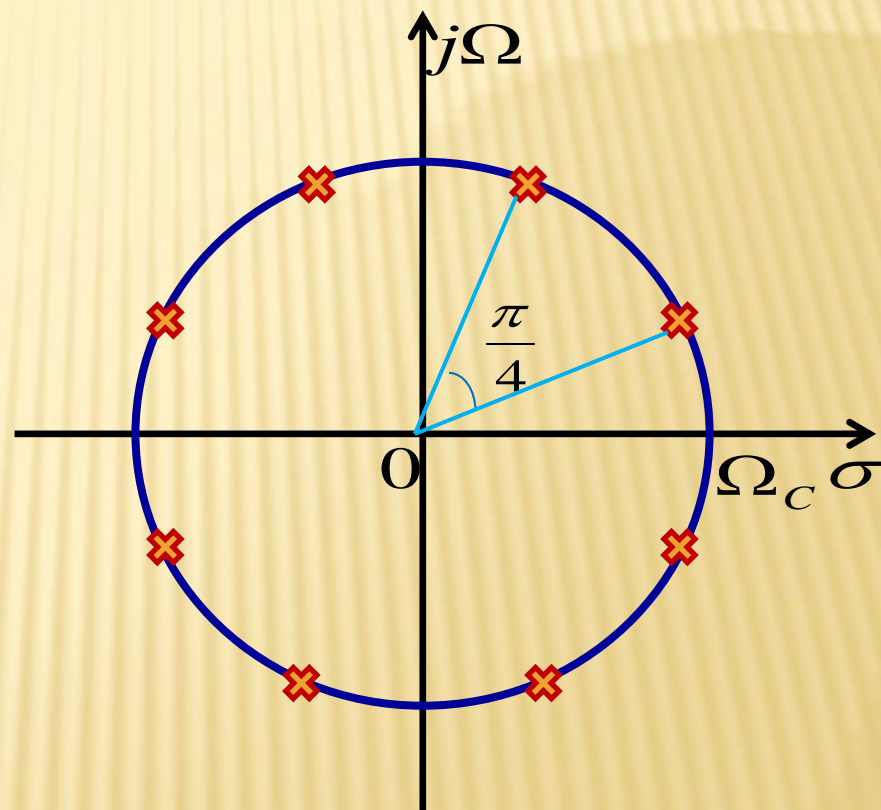
系统函数的全部零点在 $s = \infty$ 处，在有限 s 平面只有极点。

$H_a(s)H_a(-s)$ 的极点为

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N})}, k = 1, 2, \dots, 2N$$



$N=3$ (三阶)



$N=4$ (四阶)





- (1) 极点在S平面是象限对称的，分布在半径为 Ω_c 的圆上，有 $2N$ 个极点，当 $k=1,2,\dots,N$ 时， s_k 即为左半平面极点，就是 $H_a(s)$ 的极点；
- (2) 极点间隔的角度为 π/N rad；
- (3) 极点不会落在虚轴上，这样系统 $H_a(s)$ 才是稳定系统；
- (4) N 为奇数时，实轴上有极点；
 N 为偶数时，实轴上没有极点。

$$H_a(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}} = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{h=1}^N (s - s_k)}$$


将一对共轭极点构成一个二阶实系数子系统 $H_k(s)$

$$H_k(s) = \frac{\Omega_c^N}{(s - s_k)(s - s_k^*)}$$

通带截止频率为 Ω_c 的巴特沃思低通模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \prod_{k=1}^{N/2} H_k(s), \quad N \text{ 为偶数}$$


$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} H_k(s), \quad N \text{ 为奇数}$$



在滤波器设计手册中，为了便于对各种类型及各种截止频率 Ω_c 的滤波器设计，都是将低通滤波器的截止频率 Ω_c 归一化为1，此时巴特沃思归一化低通滤波器的极点及系统函数只要将上面的公式中所有的截止频率 Ω_c 换成1即可。

$$H_{an}(s) = \prod_{k=1}^{N/2} H_k(s), \quad N \text{为偶数}$$

$$H_{an}(s) = \frac{1}{s+1} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} H_k(s), \quad N \text{为奇数}$$



书P370~371的表7.2、表7.3、表7.4分别给出了归一化巴特沃思低通滤波器分母多项式用系数、根以及因式表示的数据。

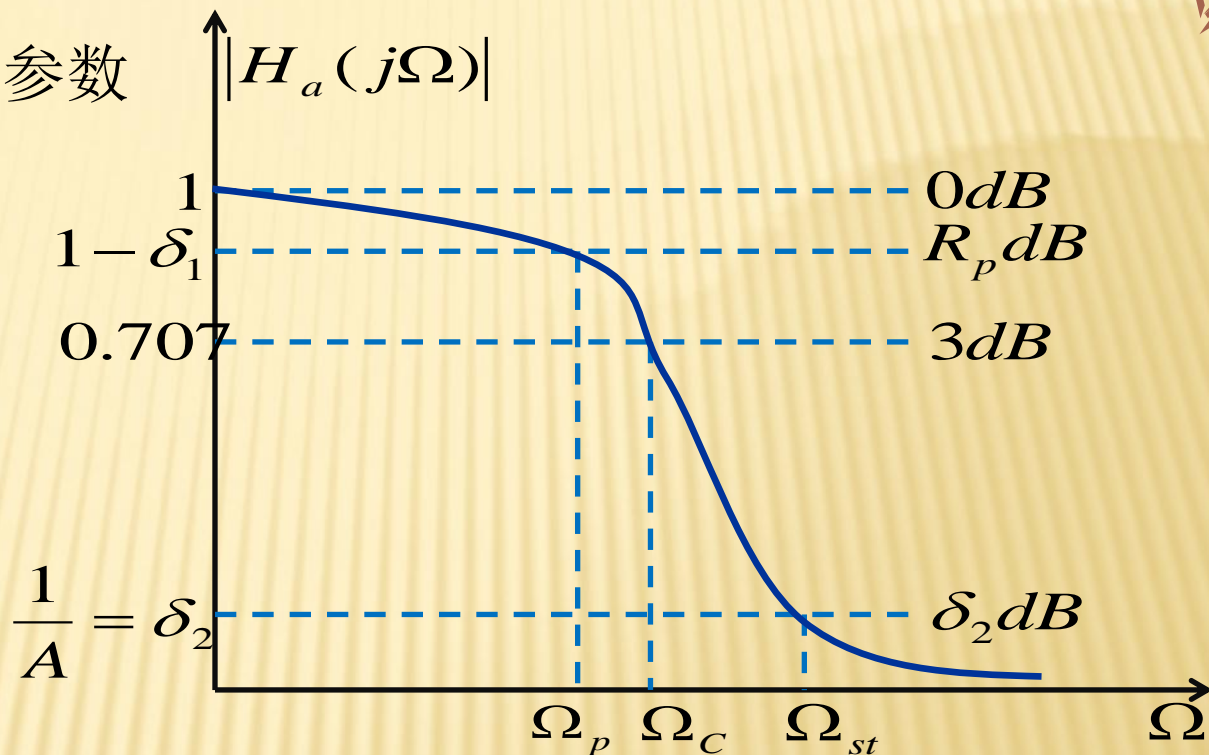
$$\begin{aligned} H_{an}(s) &= \frac{d_0}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{N-1} s^{N-1} + s^N} \\ &= \frac{d_0}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_N)} \end{aligned}$$

4、巴特沃思低通滤波器设计参数的确定

(1) 设计时给定的参数

Ω_p : 通带截止频率

Ω_{st} : 阻带截止频率



$$20\lg\left|\frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_p)}\right| = -20\lg|H_a(j\Omega_p)| \leq R_p$$

$$20\lg\left|\frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_{st})}\right| = -20\lg|H_a(j\Omega_{st})| \geq A_s$$

(2) 求滤波器阶次N

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$20\lg|H_a(j\Omega_p)| = -10\lg\left[1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \geq -R_p$$

$$20\lg|H_a(j\Omega_{st})| = -10\lg\left[1 + \left(\frac{\Omega_{st}}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \leq -A_s$$

$$\left(\Omega_p/\Omega_c\right)^{2N} \leq 10^{0.1R_p} - 1$$

$$\left(\Omega_{st}/\Omega_c\right)^{2N} \geq 10^{0.1A_s} - 1$$

$$\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1R_p} - 1} \leq \left(\frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}\right)^{2N}$$

当 $\Omega = \Omega_p$ 时, $R_p \neq 3dB$

$$N \geq \lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1R_p} - 1}\right) / \left[2 \lg\left(\frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}\right) \right]$$

当 $\Omega_p = \Omega_c$ 时, $R_p = 3dB$

$$R_p = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_c}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] = 10 \lg 2$$

$$N \geq \lg(10^{0.1A_s} - 1) / \left[2 \lg\left(\frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}\right) \right]$$

(3) 求 Ω_c

$$\left(\Omega_p / \Omega_c\right)^{2N} \leq 10^{0.1R_p} - 1$$

$$\left(\Omega_{st} / \Omega_c\right)^{2N} \geq 10^{0.1A_s} - 1$$

$$\Omega_c \geq \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1R_p} - 1}} = \Omega_{cp}$$

$$\Omega_c \leq \frac{\Omega_{st}}{\sqrt[2N]{10^{0.1A_s} - 1}} = \Omega_{cs}$$

$$\Omega_{cp} \leq \Omega_c \leq \Omega_{cs}$$



例 设计一个巴特沃思低通滤波器，其通带截止频率 $f_p=3000\text{Hz}$ ，通带最大衰减 $R_p=2\text{dB}$ ，阻带截止频率为 $f_{st}=6000\text{Hz}$ ，阻带最小衰减 $A_s=2\text{dB}$ 。

解：（1）求 N 。

$$\text{已知 } \Omega_p = 2\pi \times 3000 \text{ rad} / \text{s},$$

$$\Omega_{st} = 2\pi \times 6000 \text{ rad} / \text{s}$$

$$\begin{aligned} N &\geq \lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1R_p} - 1}\right) / \left[2 \lg\left(\frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}\right)\right] \\ &= \lg\left(\frac{10^3 - 1}{10^{0.2} - 1}\right) / \left[2 \lg\left(\frac{6}{3}\right)\right] = 5.369 \end{aligned}$$

取 $N = 6$



(2) 求 Ω_c ，按通带满足衰减要求来求 Ω_c

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1R_p} - 1}} = \frac{2\pi \times 3000}{\sqrt[12]{10^{0.2} - 1}} = 19711.1$$

两种方法求系统函数

第一种：由求出的 Ω_c 和N求 $H_a(s)$ 的极点 s_k ，按照公式求所需的 $H_a(s)$

$$H_k(s) = \frac{\Omega_c^N}{(s - s_k)(s - s_{N+1-k})}, \quad H_a(s) = \prod_{k=1}^{N/2} H_k(s), \quad N \text{ 为偶数}$$

第二种：由N求出归一化巴特沃思系统函数 $H_{an}(s)$ (利用表7.2或7.4)，然后用 Ω_c 去归一化就得到所需的 $H_a(s)$

(3) 求归一化巴特沃思低通滤波器 $H_{an}(s)$ 。

$$H_{an}(s) = \frac{1}{s^6 + 3.8637033s^5 + 7.4641016s^4 + 9.1416202s^3 + 7.4641016s^2 + 3.8637033s + 1}$$
$$= \frac{1}{(s^2 + 0.517638s + 1)(s^2 + 1.4142136s + 1)(s^2 + 1.9318516s + 1)}$$

(4) 去归一化，求所需的 $H_a(s)$

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$$
$$= \frac{\Omega_c^6}{s^6 + 3.8637033\Omega_c s^5 + 7.4641016\Omega_c^2 s^4 + 9.1416202\Omega_c^3 s^3 + 7.4641016\Omega_c^4 s^2 + 3.8637033\Omega_c^5 s + \Omega_c^6}$$
$$= \frac{\Omega_c^6}{(s^2 + 0.517638\Omega_c s + \Omega_c^2)(s^2 + 1.4142136\Omega_c s + \Omega_c^2)(s^2 + 1.9318516\Omega_c s + \Omega_c^2)}$$
$$= \frac{\Omega_c^6}{s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + \Omega_c^6} = \frac{\Omega_c^6}{(s^2 + b_1 s + \Omega_c^2)(s^2 + b_2 s + \Omega_c^2)(s^2 + b_3 s + \Omega_c^2)}$$



$$a_5 = 7.6157796 \times 10^4,$$

$$a_4 = 2.8999975 \times 10^9$$

$$a_3 = 7.000930 \times 10^{13},$$

$$a_2 = 1.1267785 \times 10^{18}$$

$$a_1 = 1.1496247 \times 10^{22}$$

$$b_1 = 1.0203208 \times 10^4,$$

$$b_2 = 2.7875689 \times 10^4$$

$$b_3 = 3.8078897 \times 10^4,$$

$$a_5 = 7.6157796 \times 10^4$$

$$\Omega_c^2 = 3.88526 \times 10^8,$$

$$\Omega_c^6 = 5.86493 \times 10^{25}$$

7.5.6 五类模拟滤波器的比较

巴特沃思型、切比雪夫 I 型、II 型滤波器、椭圆函数型、

(1) 从幅度响应比较。巴特沃思滤波器在全频段具有单调下降的幅度特性；切比雪夫 I 型滤波器在通带内呈等波纹形，在阻带呈单调下降；切比雪夫 II 型滤波器在通带内单调下降，在阻带呈等波纹形；椭圆函数型在通带阻带都呈等波纹形。

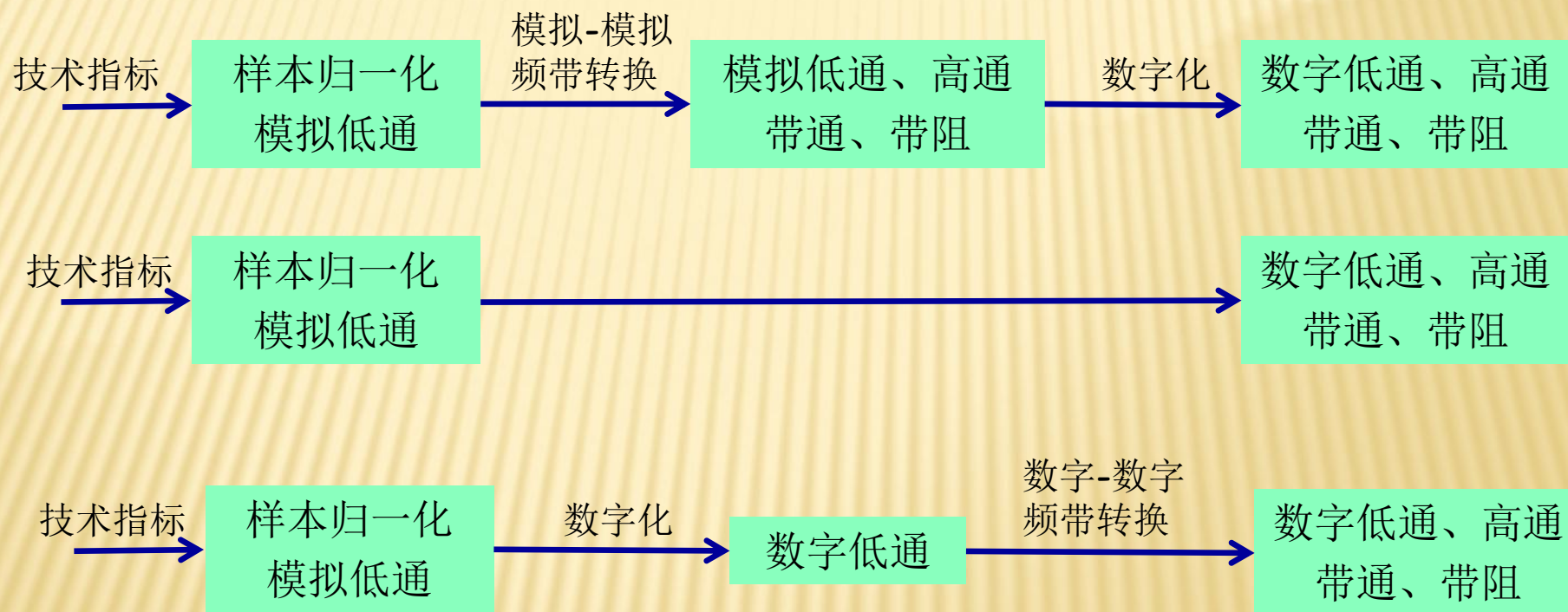
(2) 从过渡带比较。当所有的指标相同，巴特沃思滤波器的过渡带最宽，椭圆函数的最窄。


(3) 从阶次 N 比较。若滤波器具有相同的幅度特性指标，则所需的阶次依次为巴特沃思型、切比雪夫 I 型、II 型滤波器、椭圆函数型。

(4) 滤波器对参数量化（变化）的灵敏度比较，量化灵敏度越低越好，依次为巴特沃思型、切比雪夫 I 型、II 型滤波器、椭圆函数型。

(5) 相位响应的比较。贝塞尔具有最好的对线性相位的逼近，后面依次为巴特沃思型、切比雪夫 I 型、II 型滤波器、椭圆函数型。但是贝塞尔型滤波器幅度响应性能最差。

7.6 间接法的IIR数字滤波器设计方案





数字化的方法：是把s平面映射到z平面，使模拟系统函数 $H_a(s)$ 变换成所需的数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

基本条件：

- (1) S 平面的虚轴 $j\Omega$ 映射到Z平面的单位圆 $e^{j\omega}$ 上；
- (2) 因果稳定的 $H_a(s)$ 就能映射成因果稳定 $H(z)$ ，也就是要求S平面的左半平面必须映射到Z平面的单位圆内。

几种映射方法：

冲激响应不变法、阶跃响应不变法、双线性变换法。

7.7 冲激响应不变法

1、变换原理

冲激响应不变法是使数字滤波器的单位冲激响应序列 $h(n)$ 逼近模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 。

即抽样满足

$$h(n) = h_a(nT)$$

2、变换过程、变换关系式

$$H_a(s) \xrightarrow{\text{拉普拉斯反变换}} h_a(t) \xrightarrow{t=nT} h_a(nT) = h(n) \xrightarrow{z\text{变换}} H(z)$$

设模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 只有单阶极点，且假定分母的阶次大于分子的阶次。展开部分分式

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

其相应的冲激响应 $h_a(t)$ 是 $H_a(s)$ 的拉普拉斯变换即

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(n) = \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T})^n u(n)$$



对 $h(n)$ 求 z 变换，得数字滤波器系统函数

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T} z^{-1})^n = \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{s_k T} z^{-1})^n \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \end{aligned}$$

数字滤波器的频率响应等于模拟滤波器频率响应的周期延拓，等式之间还有一个 $1/T$ 的加权因子，当抽样频率高时，滤波器增益会太高。

修正方法：

令 $h(n) = Th_a(nT)$

则有

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

及

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k) \approx H_a(j\frac{\omega}{T}), |\omega| < \pi$$

因 $s = s_k$, $s = s_k^*$ 共轭极点，其 $H_a(s)$ 变成 $H(z)$ 关系

$$\frac{A_k}{s - s_k} \rightarrow \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}, \quad \frac{A_k^*}{s - s_k^*} \rightarrow \frac{A_k^*}{1 - e^{s_k^* T} z^{-1}}$$

3、从S平面变换到Z平面的变换关系

$$z = e^{st}$$

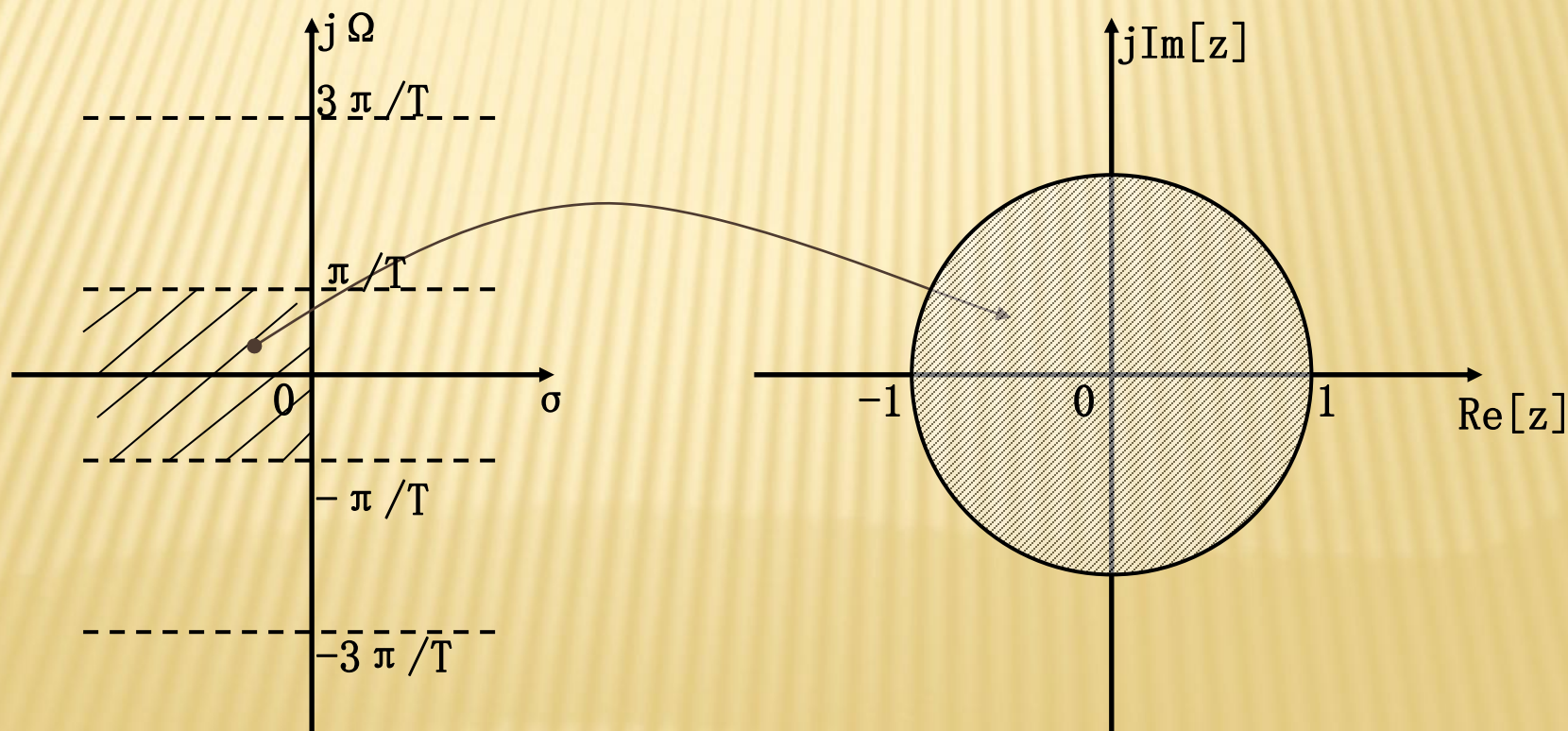
$$z = re^{j\omega} \quad s = \sigma + j\Omega t$$

$$z = re^{j\omega} = e^{(\sigma + j\Omega)t} = e^{\sigma t} e^{+j\Omega t}$$

$$r = e^{\sigma t} \quad \omega = \Omega T$$

S平面

Z平面



4、 $H_a(s)$ 和变换后 $H(z)$ 之间的关系

- (1) s 平面的单极点 $s = s_k$ 变换到 z 平面上 $z = e^{s_k T}$ 处的单极点。
- (2) 两者部分分式的系数是相同的，都是 A_k
- (3) 如果模拟滤波器是稳定的，则数字滤波器也是稳定的。
- (4) 能保证两者极点代数对应关系，但不存在 s 平面 z 平面的一一对应关系，尤其是零点就没有这种关系。而是随 $H_a(s)$ 的极点及系数两者而变化。

6、混叠失真

数字滤波器的频率响应是模拟滤波器频率响应的周期延拓，延拓的周期为 2π

$$\Omega_s = 2\pi/T = 2\pi f_s, \omega_s = \Omega_s T = \Omega_s / f_s = 2\pi$$

因此，根据抽样定理，模拟滤波器的最高频率必须小于 $\Omega_s/2$ ，数字滤波器的频率响应才能带限于 $\omega = \pi$ ，才能不失真的重现模拟滤波器的频率响应。

由于数字滤波器设计的设计指标是用数字频率给出，如果增加采样频率，则样本模拟滤波器的截止频率 Ω_c 也会成比例的增加，因此不能用改变采样频率的方法来控制混叠失真。

7、频率间的关系

$$\omega = \Omega T$$

8、冲激响应不变法的特点

- (1) 线性相位
- (2) 由于要求模拟滤波器是严格带限的，因此不能用于设计高通及带阻滤波器，这是由于当 $f > f_s/2$ 时，它们的幅度响应仍不衰减，一定会产生混叠失真；
- (3) 冲激响应不变法的变换关系，只适用于并联结构的系统函数，即系统必须先展开成部分分式。
- (4) 适用于要求时域冲激响应能逼近模拟滤波器场合。

例 设模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

试利用冲激响应不变法，设计IIR数字滤波器。

解：直接利用可得数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-3T} z^{-1}} = \frac{Tz^{-1}(e^{-T} - e^{-3T})}{1 - z^{-1}(e^{-T} + e^{-3T}) + z^{-2}e^{-4T}}$$

设 $T=1$ ，则有

$$H(z) = \frac{0.318z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}}$$

模拟滤波器与数字滤波器的频率响应分别为

$$H_a(j\Omega) = \frac{2}{(3 - \Omega)^2 + j4\Omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.3181e^{-j\omega}}{1 - 0.4177e^{-j\omega} + 0.01831e^{-2j\omega}}$$

7.9 双线性变换法

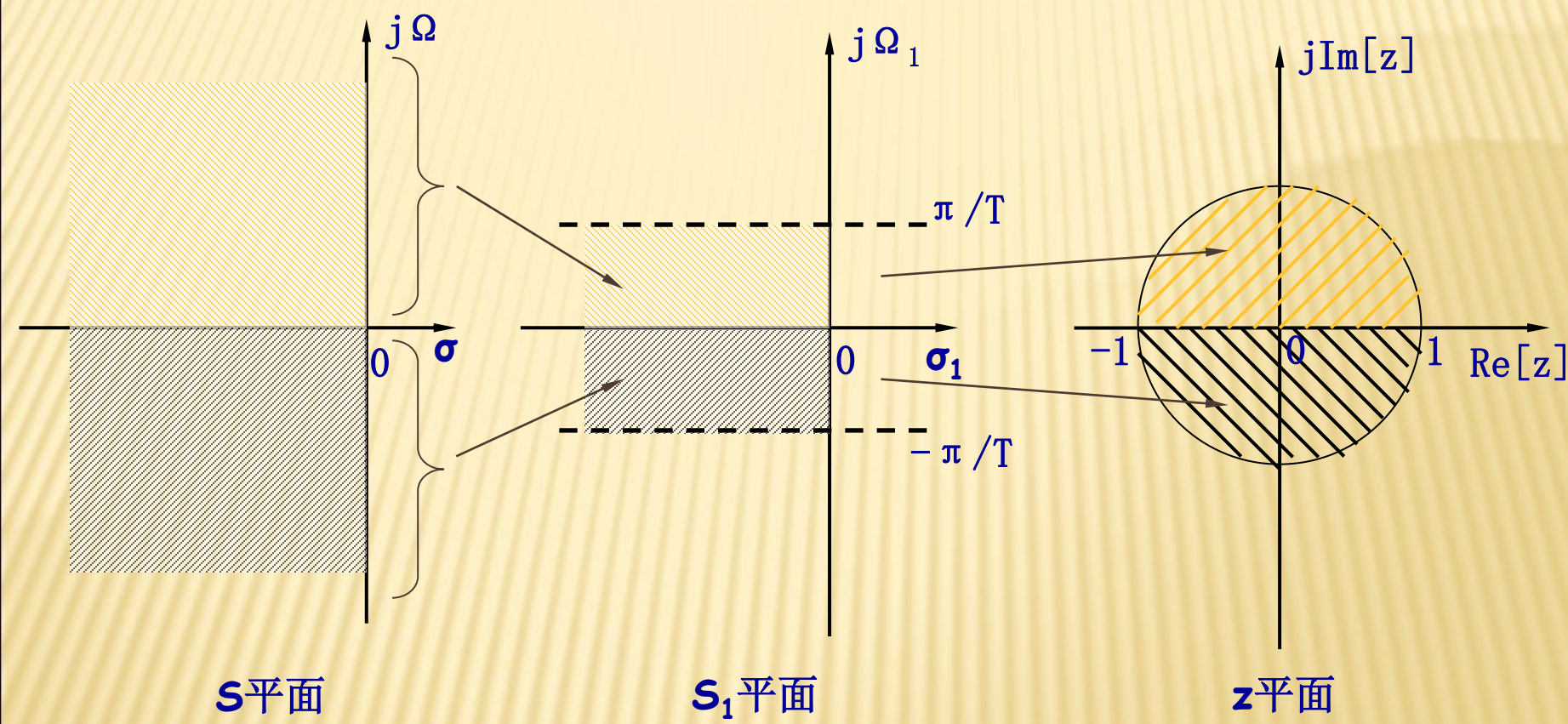
目的：主要用来克服混叠现象。

1、基本思路

双线性变换法是使数字滤波器的频率响应与模拟滤波器的频率响应相似的一种变换方法。

首先把整个 s 平面压缩变换到某一中介的 s_1 平面的一条横带里(即从 $-\pi/T$ 到 π/T)；

其次再通过上面讨论过的标准变换关系 $z = e^{s_1 T}$ ，将此横带变换到整个 z 平面上去，这样就使 s 平面与 z 平面一一对应来消除混叠。



双线性变换法的映射关系

2、变换过程及变换关系式

(1) 将s平面整个jΩ轴压缩变换到s₁平面jΩ₁轴上的一π/T到π/T一段，可以采用的变换方式：

$$\Omega = \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)$$

这样， $\Omega = \pm\infty \rightarrow \Omega_1 = \pm\pi$

$$\Omega = 0 \rightarrow \Omega_1 = 0$$

上式可以写成：

$$j\Omega = \frac{e^{\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-\frac{\Omega_1 T}{2}}}{e^{\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-\frac{\Omega_1 T}{2}}}$$

解析延拓到s平面和s₁平面，令 $j\Omega = s, j\Omega_1 = s_1$ 则

$$s = \frac{e^{\frac{s_1 T}{2}} - e^{-\frac{s_1 T}{2}}}{e^{\frac{s_1 T}{2}} + e^{-\frac{s_1 T}{2}}} = th\left[\frac{s_1 T}{2}\right] = \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

(2) 将 s_1 平面通过以下标准变换关系映射到 z 平面

$$z = e^{s_1 T}$$

(3) 得到 s 平面和 z 变换的单值映射关系

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{1 + s}{1 - s}$$

(4) 为使模拟滤波器的某一频率与数字滤波器的任一频率有对应关系引入待定常数 c ,

$$\Omega = c \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)$$

$$s = cth\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) = c \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$



仍将 $z = e^{s_1 T}$ 代入, 可得

$$s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{c + s}{c - s}$$

变换关系为

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

这种变换就称为双线性变换。

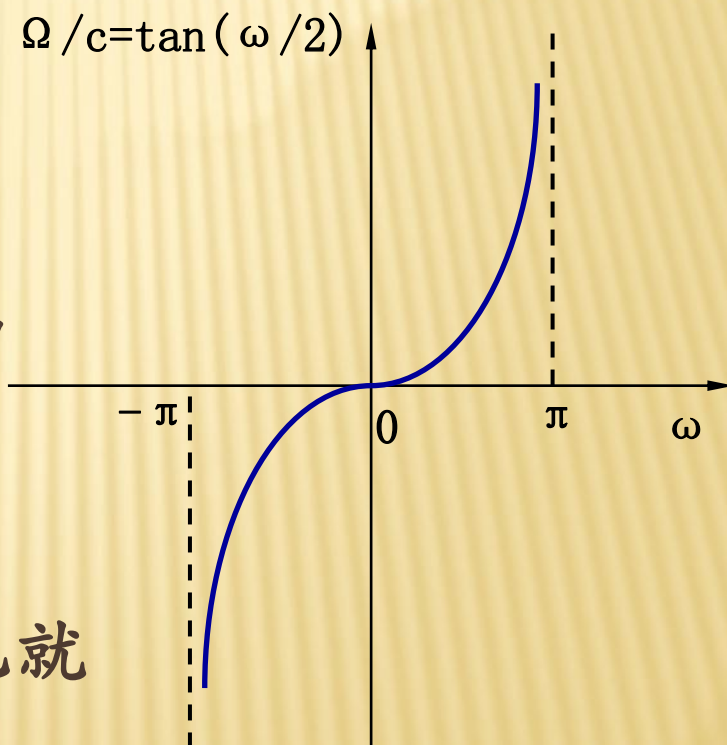
3、非线性的频率变换关系

模拟角频率 Ω 与数字频率 ω 之间的变换关系

$$\Omega = c \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

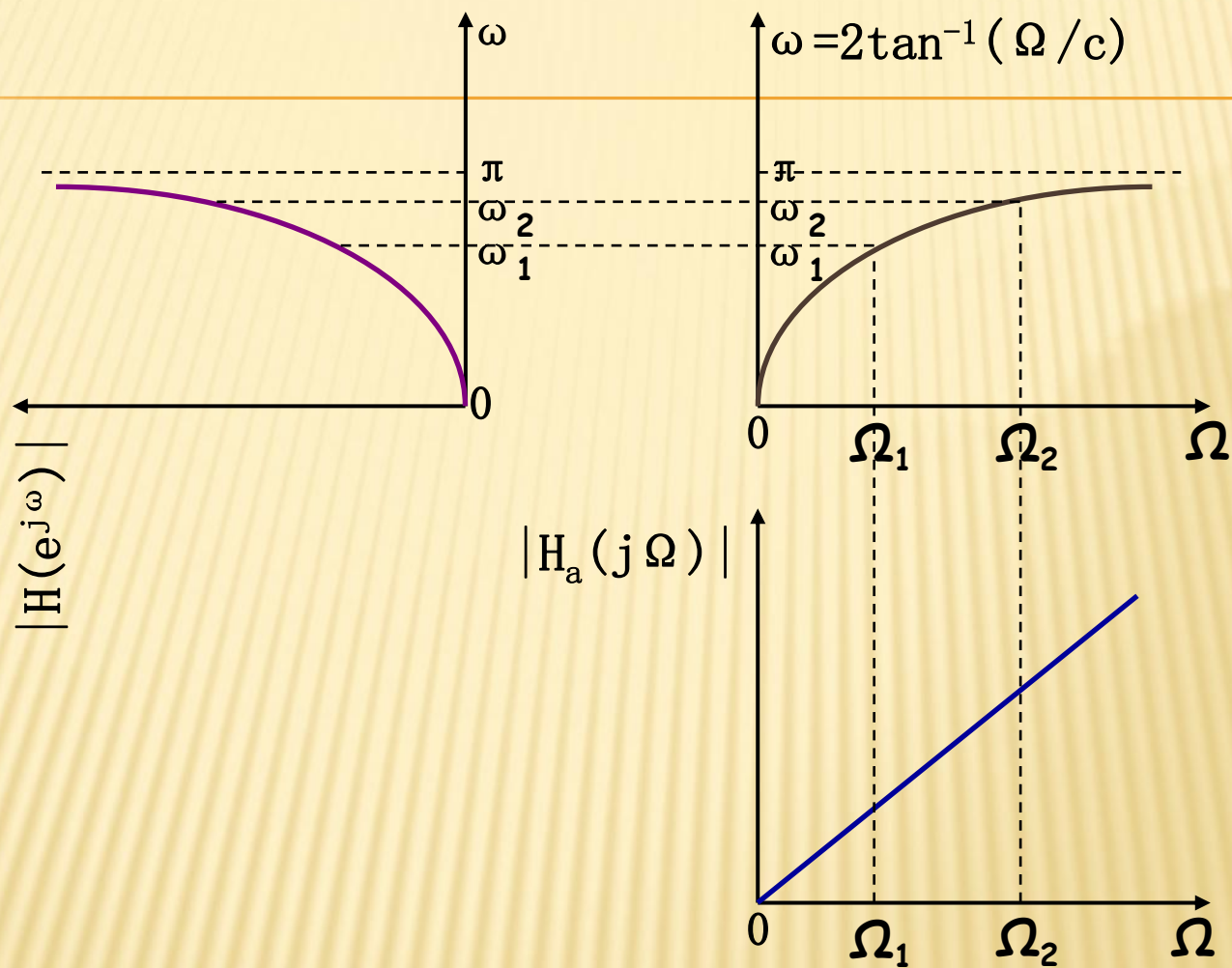
当零频附近呈线性关系，当增加时，就存在非线性关系。

当 $\Omega = \pm \infty$ 时， $\omega = \pm\pi$ ，也就是数字频率终止与折叠频率处。



4、双线性变换的特点

- (1) 由于没有频率响应的混叠失真，可以设计低通、带通、高通、带阻各种滤波器；
- (2) 频率变换是非线性的，会导致DF的幅频响应相对于AF的幅频响应有畸变。例如理想微分器及线性相位的AF经过变换后不再保持原有的理想微分器及线性相位的特点。
- (3) 变换关系适用于各种结构的系统函数。



理想微分器经双线性变换后幅频响应产生畸变



解决办法：将频率加以预畸，即利用

$$\Omega = c \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

将给定的数字滤波器的截止频率 ω_i （即临界频率）变换成模拟频率 Ω_i ，利用这组 Ω_i 来设计模拟滤波器，对设计好的样本模拟原型滤波器经过双线性变换后，即可以得到所需要的数字滤波器，它的截止频率恰好是 ω_i

5、模拟滤波器数字化方法

利用双线性变换将模拟滤波器数字化的办法：

(1) s 到 z 之间的变换是简单的代数关系，可以将模拟滤波器的系统函数用代数置换得到数字滤波器的系统函数：

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a \left(c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

(2) 先将模拟系统分解为并联或级联的子系统，每个系统都变成低阶的，然后再对每个子系统函数分别进行双线性变换。

因为模拟系统函数的分解有大量的图表可以利用，分解起来比较方便。

6、用列表格的方法来完成双线性变换

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a \left(c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

此变换在概念上很清楚，但是实际变换可能会比较复杂，可以先求出双线性变换法中数字滤波器的系数与模拟滤波器的系数之间的关系式，并列成表格，便可以利用表格进行设计。

$$H_a(s) = \frac{\sum_{i=0}^N d_i s^i}{\sum_{i=0}^N e_i s^i} = \frac{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \cdots + d_N s^N}{e_0 + e_1 s + e_2 s^2 + \cdots + e_N s^N}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N A_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=0}^N B_i z^{-i}} = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots + A_N s^N}{1 + B_1 s + B_2 s^2 + \cdots + B_N s^N}$$



一阶 $N=1$

A_0	$(d_0+d_1c)/R$
A_1	$(d_0-d_1c)/R$
B_1	$(e_0-e_1c)/R$
R	(e_0+e_1c)

二阶 $N=2$

A_0	$(d_0+d_1c+d_2c^2)/R$
A_1	$(2d_0-2d_2c^2)/R$
A_2	$(d_0-d_1c+d_2c^2)/R$
B_1	$(2e_0-2e_2c^2)/R$
B_2	$(e_0-e_1c+e_2c^2)/R$
R	$(e_0+e_1c+e_2c^2)$

三阶 $N=3$

⋮

C 是变换常数，
一般取得 $c=T/2$

例：用冲激响应不变法和双线性变换法设计数字巴特沃思低通滤波器。给定的指标为 $f < 1\text{kHz}$,幅度特性下降小于1dB,当频率大于 $f_{st}=1.5\text{kHz}$ 的阻带内，衰减大于15dB,抽样频率为 $f_s=10\text{kHz}$

• (一) 冲激响应不变法

解:(1)技术指标为

$$\Omega_p = 2\pi \times 1000 \text{rad/s}, \quad R_p = 1\text{dB}$$

$$\Omega_{st} = 2\pi \times 6000 \text{rad/s}, \quad A_s = 15\text{dB}, \quad f_s = 10\text{kHz}$$

则数字滤波器的频率指标为

$$\omega_p = \Omega_p / f_s = 0.2\pi, \quad \omega_{st} = \Omega_{st} / f_s = 0.3\pi$$

利用通带满足衰减指标的公式

$$\Omega_c = \Omega_p / \sqrt[2N]{10^{0.1R_p} - 1} = 7.0320505 \times 10^3$$

(2) 计算模拟滤波器的阶次N

$$N \geq \lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1R_p} - 1}\right) / \left[2 \lg\left(\frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}\right)\right]$$
$$= \lg\left(\frac{10^{1.5} - 1}{10^{0.1} - 1}\right) / [2 \lg(1.5)] = 5.885$$

取 $N = 6$

(3) 求归一化巴特沃思低通滤波器 $H_{an}(s)$ 。

$$H_{an}(s) = \frac{1}{s^6 + 3.8637033s^5 + 7.4641016s^4 + 9.1416202s^3 + 7.4641016s^2 + 3.8637033s + 1}$$
$$= \frac{1}{(s^2 + 0.517638s + 1)(s^2 + 1.4142136s + 1)(s^2 + 1.9318516s + 1)}$$

(4) 去归一化，求所需的 $H_a(s)$

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$$
$$= \frac{\Omega_c^6}{(s^2 + 0.517638\Omega_c s + \Omega_c^2)(s^2 + 1.4142136\Omega_c s + \Omega_c^2)(s^2 + 1.9318516\Omega_c s + \Omega_c^2)}$$
$$= \frac{1.2091826 \times 10^{23}}{(s^2 + 3.6400566 \times 10^3 s + 4.9449734 \times 10^7)(s^2 + 9.9448215 \times 10^3 s + 4.9449734 \times 10^7)}$$
$$\bullet \frac{1}{(s^2 + 1.3584878 \times 10^4 s + 4.9449734 \times 10^7)}$$



(5) 利用冲激响应不变法的修正后的公式

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 1.297z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1454z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} \\ + \frac{1.8558 - 0.6304z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}}$$

代入 $z = e^{j\omega}$ ，即可以得到 $H(e^{j\omega})$

可以看出在 $\omega_{st} = 0.3\pi$ 处 $|H(e^{j\omega})|$ 的衰减大于15dB,

混叠效应可以忽略，满足设计要求，

否则要采用更高阶N的滤波器。

• 二、双线性变换法

解:(1)需要将数字域的各临界频率 ω 按照公式

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ 预畸为各模拟域的临界频率。取 } T = 2$$

$$\Omega_p' = \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = \tan\frac{0.2\pi}{2} = 0.3249197$$

$$\Omega_{st}' = \tan\left(\frac{\omega_{st}}{2}\right) = \tan\frac{0.3\pi}{2} = 0.5095254$$

由于是巴特沃思低通滤波器，要求3dB衰减处的 Ω_c' 。

双线性变换法不会有频率响应的混叠失真，

因此用阻带满足要求的办法，使

$$\Omega_c' = \Omega_{st}' / \sqrt[2N]{10^{0.1A_s} - 1} = 0.3831146$$

(2) 计算模拟滤波器的阶次 N

$$\begin{aligned} N &\geq \lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1R_p} - 1}\right) / \left[2 \lg\left(\frac{\Omega_{st}'}{\Omega_p'}\right) \right] \\ &= \lg\left(\frac{10^{1.5} - 1}{10^{0.1} - 1}\right) / \left[2 \lg\left(\frac{0.5095254}{0.3249197}\right) \right] \\ &= 5.3044477 \end{aligned}$$

取 $N = 6$



(3)查表7.4, 可以得到归一化原型 巴特沃思低通滤波器的 系统函数 $H_{an}(s)$

$$H_{an}(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.517638s + 1)(s^2 + 1.4142136s + 1)(s^2 + 1.9318516s + 1)}$$

(4)求样本低通滤波器的系 统函数 $H_a(s)$, 即去归一化

$$\begin{aligned} H_a(s) &= H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) = \frac{\Omega_c'^2}{s^2 + 0.517638\Omega_c' s + \Omega_c'^2} \cdot \frac{\Omega_c'^2}{s^2 + 0.517638\Omega_c' s + \Omega_c'^2} \\ &\quad \cdot \frac{\Omega_c'^2}{s^2 + 0.517638\Omega_c' s + \Omega_c'^2} \\ &= \frac{0.1467768}{s^2 + 0.1983148s + 0.1467768} \cdot \frac{0.1467768}{s^2 + 0.4296093s + 0.1467768} \\ &\quad \cdot \frac{0.1467768}{s^2 + 0.7401205s + 0.1467768} \end{aligned}$$

$$(5) H_a(s) \Rightarrow H(z)$$

第一种方法：直接代入公式 $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

第二种方法：查表 7.9，将 $H_a(s)$ 的三个分式分别进行求解
也就是 $N = 2$,

例如第一个分式
$$\frac{0.1467768}{s^2 + 0.1983148s + 0.1467768}$$

$$d_0 = 0.1467768, d_1 = d_2 = 0$$

$$e_0 = 0.1467768, e_1 = 0.1983148, e_2 = 1$$

$$c = 1, R = e_0 + e_1 + e_2 = 1.3450916$$

$$\text{因此 } A_0 = \frac{d_0}{R} = 0.1091203, A_1 = \frac{2d_0}{R} = 0.2182406, A_2 = \frac{d_0}{R} = 0.1091203$$

$$B_1 = (2e_0 - e_2) / R = -1.28647$$

$$B_2 = (e_0 - e_1 + e_2) / R = 0.7051281$$



同样求得第二个分式中的

$$A_0 = 0.0931096, \quad A_1 = 0.1862193, \quad A_2 = 0.0931096$$

$$B_1 = -1.0825054, \quad B_2 = 0.454944$$

第三个分式中

$$A_0 = 0.0777873, \quad A_1 = 0.1555747, \quad A_2 = 0.0777873$$

$$B_1 = -0.9043663, \quad B_2 = 0.2155158$$

代入变换公式

$$H_i(z) = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}}{B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}$$



$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0.1091203 + 0.2182406z^{-1} + 0.1091203z^{-2}}{1 - 1.268647z^{-1} + 0.7051281z^{-2}} \\ &\times \frac{0.0931096 + 0.1862193z^{-1} + 0.0931096z^{-2}}{1 - 1.0825054z^{-1} + 0.454944z^{-2}} \\ &\times \frac{0.0777873 + 0.1555747z^{-1} + 0.0777873z^{-2}}{1 - 0.9043663z^{-1} + 0.2155158z^{-2}} \end{aligned}$$