> ✍:Roy
> ❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤
> 💊⭐

前言

拉普拉斯逆变换求解方法：

（1）根据定义，复变函数积分（比较困难）

（2）部分分式分解（常用）

（3）留数定理

留数法

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds=\begin{cases}-\sum_{j=1}^{m}=Res[\text{右边的极点}]\\ \sum_{i=1}^{n}=Res[\text{左边的极点}]\end{cases}$$

S_k为单极点

$$Res_k=[(s-s_k)F(s)e^{st}]_{S=S_k}$$

S_k为p重极点

$$Res_k=\frac{1}{(p-1)!}[\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}(s-s_k)^pF(s)e^{st}]_{S=S_k}$$

部分分式分解

若象函数 $F(s)$ 是 s 的有理分式，可写为：

$$F(s)=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

若 $m\geq n$（假分式），可用多项式除法将象函数 $F(s)$ 分结尾有理多项式 $P(s)$ 与有理真分式之和。

$$F(s)=P(s)+\frac{B_0(s)}{A(s)}$$

有理真分式的情形

若 $F(s)$ 是 s 实系数有理真分式（$m<n$），则可写为：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0}$$

$A(s)$ 称为特征多项式，方程 $A(s)=0$ 称为特征方程，它的根称为特征根，也称为 $F(s)$ 的固有频率。 n 个特征根 p_i 称为 $F(s)$ 的极点。

1、极点为实数，无重根

例：

$$F(s)=\frac{2s+1}{s(s+2)(s+3)}$$

> 解：令：
>
> $$F(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s+3}$$
>
> $k_1=sF(s)|_{s=0}=1/6,$
> $k_2=(s+2)F(s)|_{s=-2}=3/2$
> $k_3=(s+3F(s)|_{s=-3}=-5/3$
> 故：
>
> $$F(s)=\frac{1}{6s}+\frac{3}{2(s+2)}+\frac{-5}{3(s+3)}$$
>
> $F(s)$ 拉式反变换为
>
> $$f(t)=(\frac{1}{6}+\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{5}{3}e^{-3t})\epsilon(t)$$

2、包含共轭复数极点

例：

$$F(s)=\frac{s^2+3}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$

> 解：
>
> $$F(s)=\frac{s^2+3}{(s+1+j2)(s+1-j2)(s+2)}$$
>
> 令：
>
> $$F(s)=\frac{k_1}{s+1-j2}+\frac{k_2}{s+1+j2}+\frac{k_3}{s+2}$$
>
> $$p_{1,2}=-\alpha\pm j\beta,(\alpha=1,\beta=2)$$
>
> $$k_1=(s+1-j2)F(s)|_{s=-1+j2}=\frac{-1+j2}{5}$$
>
> $$\text{即：}k_{1,2}=A\pm jB,(A=-\frac{1}{5},B=\frac{2}{5})$$
>
> $$k_1=(s+2)F(s)|_{s=-2}=\frac{7}{5}$$
>
> 故：
>
> $$F(s)=\frac{\frac{-1+j2}{5}}{s+1-j2}+\frac{\frac{-1-j2}{5}}{s+1+j2}+\frac{\frac{7}{5}}{s+2}$$

> $F(s)$ 拉式反变换为
>
> $$f(t)=\{2e^{-t}[-\frac{1}{5}\cos(2t)-\frac{2}{5}\sin(2t)]+\frac{7}{5}e^{-2t}\}\epsilon(t)$$

3、有多重极点

例：

$$F(s)=\frac{s-2}{s(s-1)^2}$$

> 解：令：
>
> $$F(s)=\frac{k_{11}}{(s-1)^2}+\frac{k_{12}}{(s-1)}+\frac{k_2}{s}$$
>
> 令：
>
> $$F_1(s)=(s-1)^2F(s)=\frac{s-2}{s}$$
>
> $k_{11}=F_1(s)|_{s=1}=-1, k_{12}=\frac{d}{ds}F_1(s)=\frac{s-(s-2)}{s^2}|_{s=1}=2, k_2=sF(s)|_{s=0}=-2$
> 故：
>
> $$F(s)=\frac{-1}{(s-1)^2}+\frac{2}{(s-1)}+\frac{-2}{s}$$
>
> $F(s)$ 拉式反变换为
>
> $$f(t)=(-te^t+2e^t-2)\epsilon(t)$$

总结

部分分式分解还是比较常用的，注意分解步骤，计算时仔细一点。常用的拉氏变换要记得。