# 考研真题 > 极限

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\underline{\ e^{-1}\ }$ (2010年数三)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}$$

降低运算等级

$$x^{\frac{1}{x}}-1=e^{\frac{\ln x}{x}}-e^{0}=e^{\xi}\cdot\frac{\ln x}{x}\qquad 0<\xi<\frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)=\frac{\xi+\ln\ln x-\ln x}{\ln x}=\frac{\xi}{\ln x}+\frac{\ln\ln x}{\ln x}-1\to 0+0-1$$

令 $\ln x=t\to+\infty$ $\quad\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}=\dfrac{\ln t}{t}\to 0$

# 考研真题 > 极限

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=$______ (2010年数三)

$$x^{\frac{1}{x}}-1=e^{\frac{\ln x}{x}}-1\sim\frac{\ln x}{x}$$

$$\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)'=\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)'=e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{-1}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)'}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{-1}e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\cdot\frac{\ln x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1$$

# 考研真题 > 极限

设a，b为常数，当$n\to\infty$时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e$与$\frac{b}{n^a}$为等价无穷小，求a，b的值

(2020年数三)

$\xi_n$ 介于$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$、1之间 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}=1$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=1$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-e=e^{\xi_n}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\sim e\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$e\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=e\left[n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)-1\right]=-\frac{e}{2n}+o(\frac{1}{n})\sim-\frac{e}{2n}$$

# 考研真题 > 极限

(1) 证明：对任意的正整数n，都有$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$成立

(2) 设$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$收敛　　(2011年数一)

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln x\Big|_n^{n+1}=\int_n^{n+1}(\ln x)'\,dx=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{n+1}=\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx=\frac{1}{n}\qquad \frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n}\quad x\in(n,\ n+1)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln x\Big|_n^{n+1}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}(n+1-n)=\frac{1}{\xi}\qquad n<\xi<n+1$$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$$

# 考研真题 > 极限

(1) 证明：对任意的正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立

(2) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛　(2011年数一)

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(1+x)\Big|_0^{\frac{1}{n}}=\int_0^{\frac{1}{n}}(\ln(1+x))'\,dx=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{1+x}dx$$

$$\frac{1}{n+1}=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{1+x}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{1+0}dx=\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+0}\quad x\in(0,\frac{1}{n})$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(1+x)\Big|_0^{\frac{1}{n}}=(\ln(1+x))'\Big|_{x=\xi}\left(\frac{1}{n}-0\right)=\frac{1}{n(1+\xi)}$$

$$0<\xi<\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n(1+\xi)}<\frac{1}{n}$$

# 考研真题 > 极限

(1) 证明：对任意的正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立

(2) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛　(2011年数一)

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0$$

积分放缩法

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&>\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\&=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n\\&=\ln\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}\right)-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&=\int_1^2\frac{1}{1}dx+\int_2^3\frac{1}{2}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx-\ln n\\&>\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx-\ln n\\&=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0\end{aligned}$$

# 考研真题 > 极限

设数列$\{x_n\}$满足$x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$证明$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

(2018年数一)

当$x_n>0$时

$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1=e^{x_n}-e^0=x_n e^{\xi_n}\quad 0<\xi_n<x_n\quad \Rightarrow x_{n+1}=\xi_n>0$

由数学归纳法我们可以得到$x_n>0\quad n=1,2,\cdots$

$x_{n+1}=\xi_n<x_n$

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\ge 0$

假设$a>0$

$ae^a=e^a-1=ae^{\xi}<ae^a$ 矛盾！ $\quad 0<\xi<a$

故$a=0$

# 考研真题 > 极限

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$　　(2016年数一)

$|x_{n+1}-x_n|$ 与 $|x_n-x_{n-1}|$ 的联系

$$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

$$|x_{n+1}-x_n|=f'(\xi_n)|x_n-x_{n-1}|\le\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$$

$$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1| \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n| \text{收敛}$$

# 考研真题 > 极限

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛

(2) $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$　　(2016年数一)

$G(x)=f(x)-x$

$G(0)=f(0)-0=1>0$

$G(2)=f(2)-2=f(0)+2f'(\xi)-2<0$

$G(x)$ 在 $(0,2)$ 内必有一零点 $\delta$

$x_n-\delta=f(x_{n-1})-f(\delta)=f'(\theta_n)(x_{n-1}-\delta)$

$|x_n-\delta|=f'(\theta_n)|x_n-x_{n-1}|\le\frac{1}{2}|x_{n-1}-\delta|$

$|x_n-\delta|\le\frac{1}{2^{n-1}}|x_1-\delta|$

$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在且 $\lim_{n\to\infty}x_n=\delta$

分析

$\lim_{n\to\infty}x_n$ 是 $G(x)=f(x)-x$ 的零点

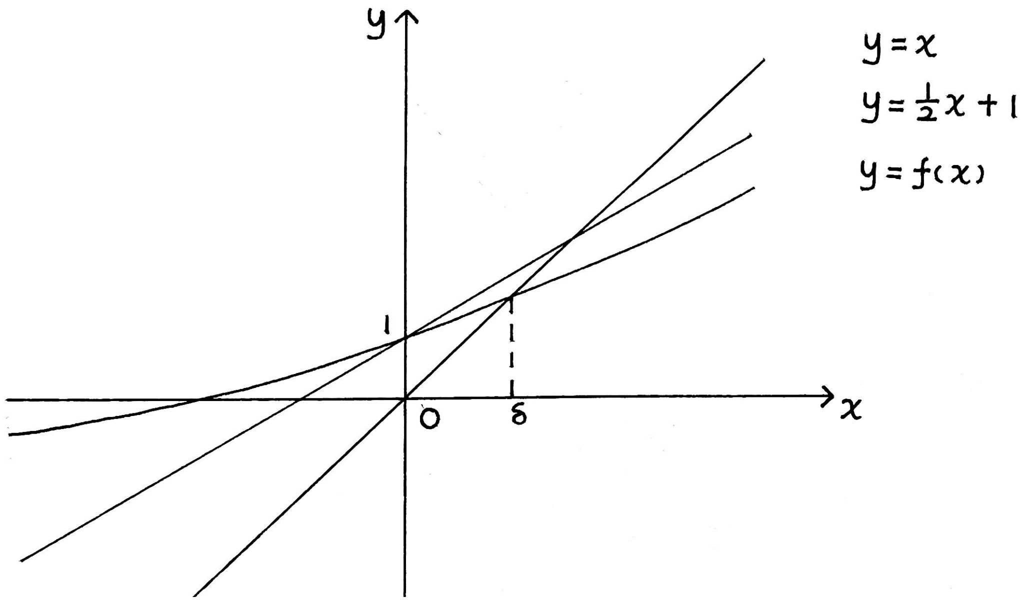
$\lim_{x\to-\infty}G(x)=+\infty$　$\lim_{x\to+\infty}G(x)=-\infty$

$G'(x)=f'(x)-1<0$

$G(x)=f(x)-x$ 有且仅有一个零点

$\lim_{n\to\infty}x_n$ 是 $G(x)=f(x)-x$ 唯一的零点

$G(x)$ 在 $(0,2)$ 内必有一零点 $\delta$ 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=\delta$



# 考研真题 > 极限

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛

(2) $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$　　(2016年数一)

$x_n=\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)+x_1$　　差分

$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)$ 存在 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n$ 存在

$G(x)=f(x)-x$

$G(0)=f(0)-0=1>0$

$G(2)=f(2)-2=f(0)+2f'(\xi)-2<0$

$G(x)$ 在 $(0,2)$ 内必有一零点 $\delta$

$G'(x)=f'(x)-1<0$

$G(x)$ 有唯一的零点 $\delta$ 且 $\delta\in(0,2)$

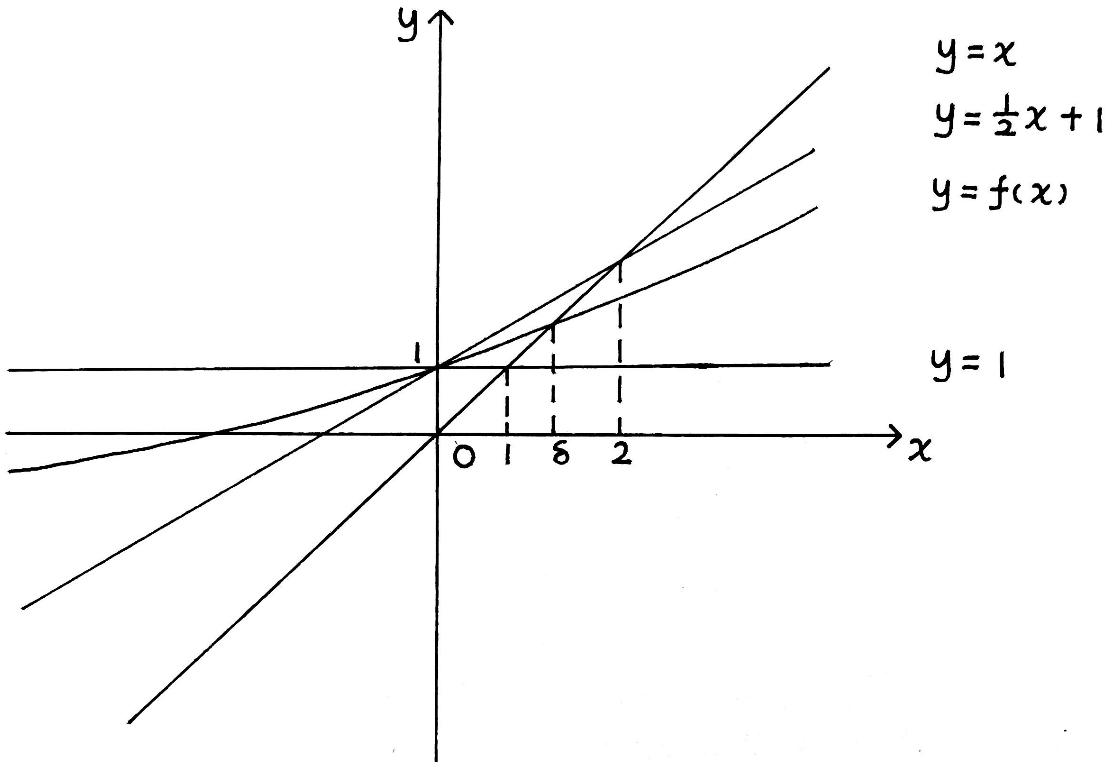
$\lim_{n\to\infty}x_n$ 是 $G(x)$ 的零点

# 考研真题 > 极限

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列$\{x_n\}$满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，且 $0<\lim_{n\to\infty} x_n<2$ (2016年数一)




$G(1)=f(1)-1>f(0)-1$

$G(2)=f(2)-2=f(0)+2f'(\xi)-2<0$

$G(x)$ 在 $(1,2)$ 内必有一零点 $\delta$