> ✍️:Roy
> ❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️
> 💊⭐

一、系统的微分方程及其响应

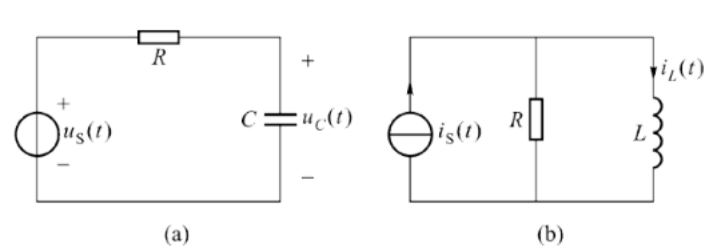
1、LTI系统的微分方程

描述线性时不变（LTI）系统的输入——输出特性的是常系数线性微分方程

时域分析方法：从系统的模型（微分方程）出发，在时域研究输入信号通过系统响应后的变化规律，是研究系统时域特性的重要方法。

对于电系统，建立其微分方程的依据：

$$KCL:\sum i(t)=0$$
$$KVL:\sum u(t)=0$$
$$\text{对于电阻：}U_R(t)=R\cdot i(t)$$
$$\text{对于电感：}u_L(t)=L\cdot\frac{di(t)}{dt}$$
$$\text{对于电容：}i_C(t)=C\cdot\frac{du(t)}{dt}$$



2、算子

1. 算子的定义：

$$p=\frac{d}{dt}$$

$$\frac{1}{p}=\int_{\infty}^{t}()dt$$

   则：$px=\frac{dx}{dt}$
   $\frac{1}{p}x=\int_{\infty}^{t}xdt$
2. 转移算子：若$D(p)r(t)=N(p)e(t)$，则

$$H(p)=\frac{r(t)}{e(t)}=\frac{N(p)}{D(p)}$$

3. 算子阻抗
   1. 电感：$u_L=L\frac{di_L}{dt}\rightarrow u_L=L_Pi_L$，$LP$为算子阻抗
   2. 电容：$u_C=\frac{1}{C}\int_{\infty}^{t}i_Cdt=\frac{1}{C}\frac{1}{P}i_C$，$\frac{1}{CP}$为算子阻抗

3、微分方程的经典解法

1. 全响应=齐次解（自由响应）+特解（强迫响应）

2、系统的响应

2.1、零输入响应

1. 定义：从观察的初始时刻起不再施加输入信号，仅由该时刻系统本身的起始储能状态引起的响应称为零输入响应（ZIR）

$$r_{zi}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_it}$$

2. 一般形式：设系统为

$$r(t)=H(p)e(t)=\frac{N(p)}{D(p)e(t)}$$

零输入$e(t)=0$，即$D(p)r(t)=0$，则$D(p)=0$

2.2、零状态响应

当系统的储能状态为零时，由外加激励信号（输入）产生的响应称为零状态响应（ZSR）

$$y_{ZS}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_it}+r_P(t)$$

2.3、完全响应

$$y(t)=y_{ZI}(t)+y_{ZS}(t),[全响应=零输入+零状态]$$

2.4、例一

已知某二阶线性连续时间系统的动态方程：

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=f(t),t>0$$

初始条件：

$$y(0_-)=1,y'(0_-)=2$$

求系统的零输入响应
解：

系统的特征方程：$s^2+6s+8=0$,特征根：$s_1=-2$，$s_2=-4$
故系统的零输入响应：$y_X(t)=k_1e^{-2t}+k_2e^{-4t},t>0$
$y_X(0_+)=y_X(0_-)=y_X(0)=k_1+k_2=1$
$y'(0)=y'_X(0_-)=-2k_1-4k_2=2$
$y_X(0)$和$y'(0)$代入 可解出：$k_1=3$，$k_2=-2$

可得零输入响应：$y_X(t)=3e^{-2t}-2e^{-4t},t\geq 0$

2.5、例二

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t),t>0$$

初始条件：

$$y(0_-)=2,y\prime(0_-)=0,f(t)=\epsilon(t)$$

求系统的零输入响应和零状态响应

解：
(1)零输入响应$y_{zi}(t)$激励为0，故$y_X(t)$满足$y''_X(t)+3y'_X(t)+2y_X(t)=0$
系统的特征方程：$s^2+3s+2=0$,特征根：$s_1=-2$，$s_2=-1$
故系统的零输入响应：$y_{zi}(t)=k_1e^{-2t}+k_2e^{-t},t>0$
$y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=y_{zi}(0)=2$
$y'(0)=y'_{zi}(0_-)=0$
$y_{zi}(0)$和$y'(0)$代入可解出：$k_1=4$，$k_2=-2$

可得零输入响应：$y_{zi}(t)=4e^{-t}-2e^{-2t},t>0$

(2)零状态响应$y_{zs}(t)$满足

$$y''_{zs}(t)+3y'_{zs}(t)+2y_{zs}(t)=2\delta(t)+6\epsilon(t),并有y_{zs}(0_-)=y_{zs}(0_+)=0$$

由于上式等号右端含有$\delta(t)$, 故$y''_{zs}(t)$含有 $\delta(t)$，从而$y'_f(t)$跃变 ,即$y'_{zs}(0_+) \neq y'_{zs}(0_-)$
而$y_{zs}(t)$ 在t=0处连续，即$y_{zs}(0_-) = y_{zs}(0_+) = 0$，上式两边积分有：$[y'_{zs}(0_+) - y'_{zs}(0_-)] + 3[y_{zs}(0_-) - y_{zs}(0_+)] + 2\int_{0-}^{0+} y_{zs}(t)dt = 2 + 6\int_{0-}^{0+} \epsilon(t)dt$

整理得：$y'_f(0_+) = 2 + y'_f(0_-) = 2$

对$t > 0$时，有$y''_f(t) + 3y'_f(t) + 2y_f(t) = 6$

不难求出其齐次解为：$C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$,其特解为常数3

$\therefore y_{zs}(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + 3$

代入初值求得：$y_{zs}(t) = -4e^{-t} + e^{-2t} + 3, t \geq 0$

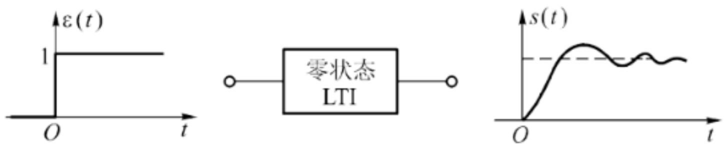
2.6、响应的分类

分类标准	对应响应
响应的不同起因	储能响应、受激响应
系统的性质和输入信号的性质	自由响应（取决于系统性质，即特征根）、强迫响应（取决于输入信号的形式）
响应的变化形式	瞬态响应（t无限增大，响应趋于零）、稳态响应（响应恒定或为某个稳态函数）

二、阶跃响应

1、定义

LTI系统在零状态下，由单位阶跃信号引起的响应称为单位阶跃响应，简称阶跃响应，记为$s(t)$



2、一阶系统方程的阶跃响应

对于一阶系统方程

$$y'(t) + ay(t) = b\epsilon(t)$$

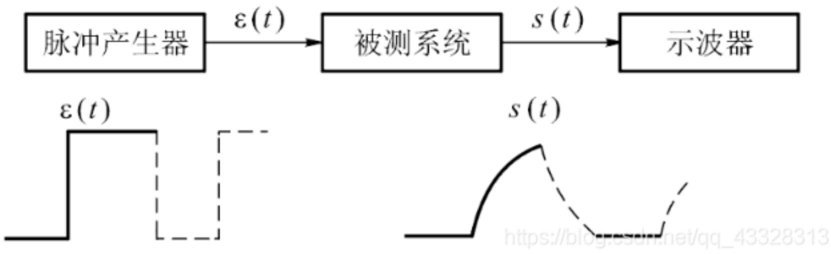
则零状态响应：

$$y_{ZS}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\int_{0-}^{\mathrm{t}} \chi(\mathrm{t})\mathrm{e}^{\mathrm{a}\tau}\mathrm{d}\tau, (\mathrm{t} \geq 0)$$

则阶跃响应：

$$y(t) = s(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\int_{0-}^{\mathrm{t}} \mathrm{b}\epsilon(\mathrm{t})\mathrm{e}^{\mathrm{a}\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{at}}), (\mathrm{t} \geq 0)$$

3、阶跃响应的测量



三、冲激响应

1、定义

储能状态为零的系统，在单位冲激信号作用下产生的零状态响应称为冲激响应，记为$h(t)$

2、一阶系统的冲激响应

对于一阶系统方程：

$$y'(t)+ay(t)=b\delta(t)$$

则冲激响应：

$$y(t)=h(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\int_{0-}^{\mathrm{t}}\mathrm{b}\delta(\mathrm{t})\mathrm{e}^{\mathrm{a}\tau}\mathrm{d}\tau=\mathrm{b}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\cdot\epsilon(\mathrm{t})$$

3、转移算子求解法

1. 当$n>m$时
   $H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{N(p)}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\cdots}=\frac{K_1}{p-\lambda_1}+\cdots$
   则：

$$h(t)=K_1e^{\lambda_1 t}+\cdots$$

4、例一：$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$

描述某系统的微分方程为$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，求其冲激响应$h(t)$

解：根据$h(t)$定义有$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta(t)$并且有$h'(0_-)=h(0_-)=0$，先求$h'(0_+)$和$h(0_+)$

由于上式等号右端含有 $\delta(t)$, 故$h''(t)$含有$\delta(t)$，从而$h'(t)$跃变 ,即$h'(0_+)\neq h'(0_-)$而$h(t)$ 在t=0处连续，即$h(0_-)=h(0_+)=0$，上式两边积分有：$[h'(0_+)-h'(0_-)]+5[h(0_-)-h(0_+)]+6\int_{0_-}^{0+}h(t)dt=1$

整理得：$h'(0_+)=1+h'(0_-)=1$

对$t>0$时，有$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=0$

不难求出其齐次解为：$C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$，

$\therefore h(t)=(C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t})\cdot\epsilon(t)$

代入初值求得：$h(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})\cdot\epsilon(t)$

4、例二（$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+2f'(t)+3f(t)$）

描述某系统的微分方程为$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+2f'(t)+3f(t)$，求其冲激响应$h(t)$

解：根据$h(t)$定义有

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t) \tag{1}$$

并且有$h'(0_-)=h(0_-)=0$，先求$h'(0_+)$和$h(0_+)$
由方程可知：$h(t)$中含有$\delta(t)$
故令：

$$\begin{cases} h(t)=a\delta(t)+P_1(t),[P_i(t)\text{中为不含有}\delta(t\text{的函数})] \\ h'(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+P_2(t) \\ h''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+P_3(t) \end{cases}$$

代入式（1）整理得：

$$a\delta''(t)+(b+5a)\delta'(t)+(6a+5b+c)\delta(t)+P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$$

利用$\delta(t)$系数匹配，得$a=1,b=-3,c=12$

$$h(t)=\delta(t)+P_1(t) \tag{2}$$

$$h'(t)=\delta'(t)-3\delta(t)+P_2(t) \tag{3}$$

$$h''(t)=\delta''(t)-3\delta'(t)+12\delta(t)+P_3(t) \tag{4}$$

对式（3）从0_-到0_+积分$h(0_+)-h(0_-)=-3$
对式（4）从0_-到0_+积分$h'(0_+)-h'(0_-)=12$

对$t>0$时,有$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=0$,特征根-2，-3

不难求出其齐次解为：$C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$,

$\therefore h(t)=(C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t})\cdot\epsilon(t)$

代入初始条件$h(0_+)=-3,h'(0_+)=12$求得：$h(t)=(3e^{-2t}-6e^{-3t})\cdot\epsilon(t)$

结合式（2），$h(t)=\delta(t)+(3e^{-2t}-6e^{-3t})\cdot\epsilon(t)$

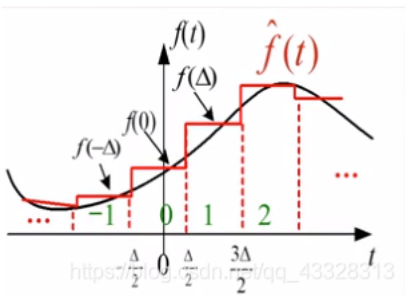
5、阶跃响应与冲激响应的关系

$$\begin{cases} h(t)=\frac{ds(t)}{dt} \\ s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau \end{cases}$$

四、卷积及其应用

1、信号的时域分解与卷积积分

1.1任意信号的分解



“0”号脉冲高度$f(0)$，宽度Δ，用$p(t)$表示为 $f(0)\Delta p(t)$

“1”号脉冲高度$f(\Delta)$，宽度Δ，用$p(t-\Delta)$表示为 $f(\Delta)\Delta p(t-\Delta)$

“-1”号脉冲高度$f(-\Delta)$，宽度Δ，用$p(t+\Delta)$表示为 $f(-\Delta)\Delta p(t+\Delta)$

$f(\hat{t})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\Delta p(t-n\Delta)$
即用$\delta(t)$表示任意信号：

$$\lim_{\Delta\to 0} f(\hat{t})=f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

1.2任意信号作用下的零输入响应

根据$h(t)$定义：

$$\delta(t) \implies h(t)$$

由时不变性：

$$\delta(t-\tau) \implies h(t-\tau)$$

由齐次性：

$$f(\tau)\delta(t-\tau) \implies f(\tau)h(t-\tau)$$

由叠加性：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \implies \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y_f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau, \text{卷积积分}$$

1.3卷积积分的定义

已知定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的两个函数$f_1(t)$和$f_2(t)$，则定义积分$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$
为$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积积分，简称卷积；记为

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

温馨提醒：τ 为积分变量，积分后的结果为关于 t 的函数

$$y_f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau=f_1(t)*h(t)$$

2、卷积的图解法

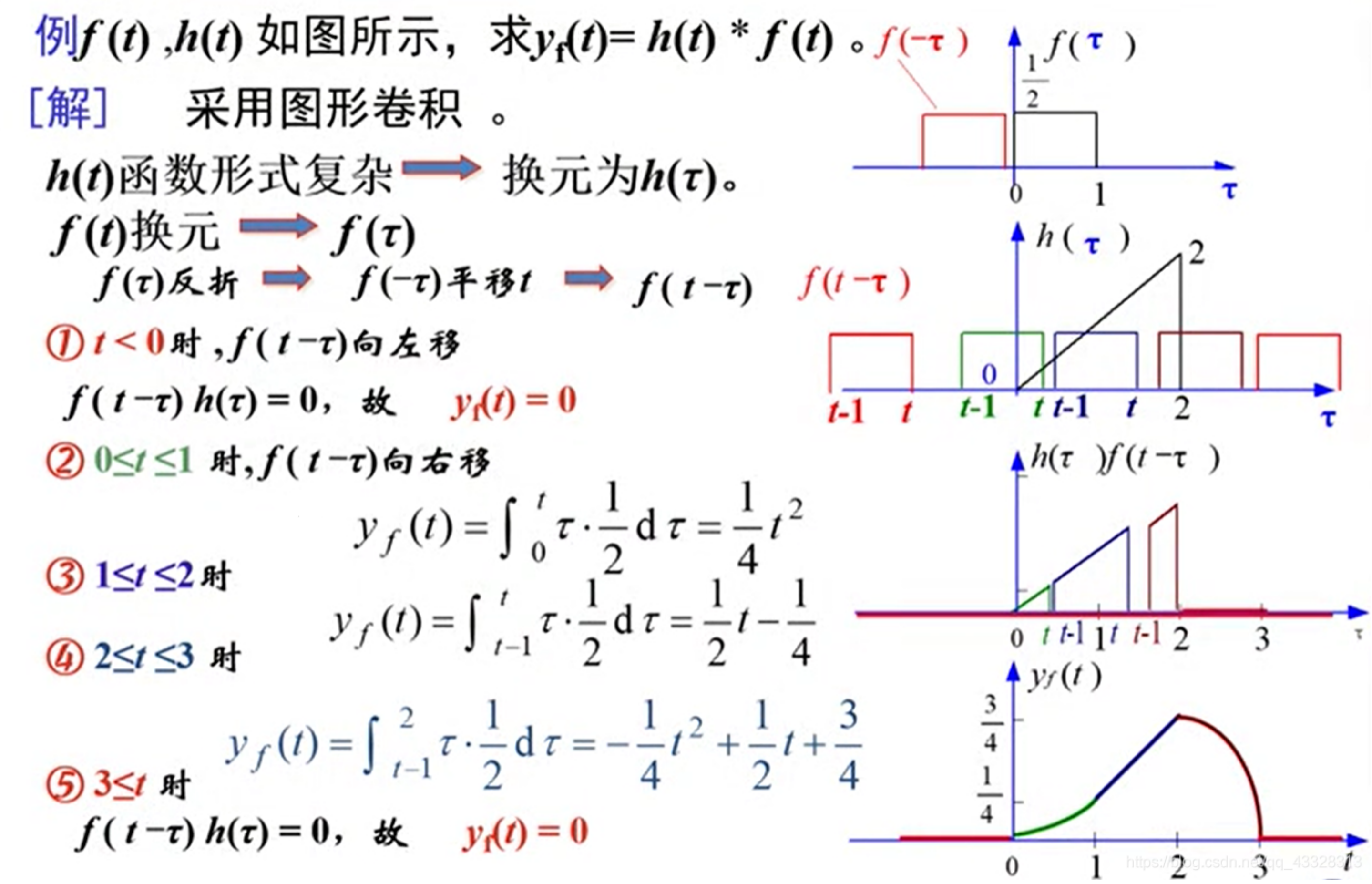
$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

四步图解法：
（1）换元：$t\text{换为}\tau\to f_1(\tau),f_2(\tau)$

（2）反转平移（折叠平移）：$f_2(\tau)\text{反转}\to f_2(-\tau),\text{再右移}t\to f_2(-(\tau-t))=f_2(t-\tau)$【左加右减在$\tau$的里面】

（3）乘积：$f_1(\tau)f_2(t-\tau)$

（4）积分：τ从$-\infty$到$+\infty$对乘积项积分



总结：图解法步骤比较繁杂，但是按照四步法"战略"就可以一步步把题目搞定。不过，图解法对于求某一时刻的卷积值还是比较方便的，对于简单的信号，通过画图就可以直观的求出某一时刻的卷积值。

五、卷积积分的性质

1、奇异（冲激）函数的卷积特性

1、$f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = f(t)$

2、$f(t) * \delta'(t) = f'(t), f(t) * \delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)$

3、$f(t) * \epsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\epsilon(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

$\epsilon(t) * \epsilon(t) = t\epsilon(t)$【重点关注】

2、代数性质

1. 交换律
2. 分配律
3. 结合律

3、卷积的微积分性质

1. $f^{(1)}(t) = f_1^{(1)}(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2^{(1)}(t)$
2. $f^{(-1)}(t) = f_1^{(-1)}(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2^{(-1)}(t)$
3. 运用（1）时$\int_{-\infty}^{t} f_1'(\tau)d\tau = f_1(t)$必须成立，即$lim_{t\to-\infty} f_1(t) = f_1(-\infty)$

1. $\frac{d^n}{dt^n}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{d^n f_1(t)}{dt^n}*f_2(t)=f_1(t)*\frac{d^n f_2(t)}{dt^n}$

证：上式$=\delta^{(n)}(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$

$=[\delta^{(n)}(t)*f_1(t)]*f_2(t)=f_1^{(n)}(t)*f_2(t)$

2. $\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]d\tau=[\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)d\tau]*f_2(t)=f_1(t)*[\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau]$

证：上式$=\varepsilon(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$

$=[\varepsilon(t)*f_1(t)]*f_2(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)$

3. 在$f_1(-\infty)=0$或$f_2^{(-1)}(\infty)=0$的前提下，

$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)$

4、卷积的时移特性

卷积的时移特性说白了就是：一个卷积积分，时间 t 无论左移还是右移，其积分值等于相应函数左移或右移后的函数值。下面通过一个公式来说明：

若：$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$,

则：$f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)$

$=f_1(t-t_1-t_2)*f_2(t)$

$=f_1(t)*f_2(t-t_1-t_2)$

$=f(t-t_1-t_2)$

总结

零输入、零状态、阶跃、冲激

卷积积分【重点关注！！！】