第一节 多元函数

■ **多元函数的定义**

若 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\subset R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\big|x_i\in(-\infty,+\infty)\}$，在某对应法则 f 下，存在唯一 $z\in(-\infty,+\infty)$ 与之对应，则称 z 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 元函数，记为 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，D 称为定义域。

二元及二元以上的函数称为多元函数。二元函数、三元函数一般记为 $z=f(x,y)$ 和 $u=f(x,y,z)$。讨论多元函数一般以二元、三元函数为主，其相关定义和性质一般都可推广到多元函数。

■ **多元函数的定义域**：即使 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有意义的点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的集合，如函数 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$ 的定义域为集合 $\{(x,y,,z)\big|x^2+y^2+z^2\le 1\}$；函数 $z=\dfrac{1}{\ln(x+y)}$ 的定义域为集合 $\{(x,y)\big|0<x+y\ne 1\}$，它们分别是空间球体区域和平面区域。

■ **二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形**：一般是空间曲面。如 $z=ax+by+c$ 的图形是空间平面；$z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面或圆抛物面。

■ **二元函数的极限定义** 若动点 (x,y) 沿任意曲线趋于定点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 趋于同一常数 A，则称 A 为 (x,y) 趋于 (x_0,y_0) 时 $f(x,y)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$（称为二重极限）。

注 1： 定义中的定点 (x_0,y_0) 要求是函数 $f(x,y)$ 定义域的聚点，即点 (x_0,y_0) 附近有 $f(x,y)$ 可取函数值的无穷多个点 (x,y)，这样才能考察 (x,y) 趋于 (x_0,y_0) 时 $f(x,y)$ 是否趋于同一常数。

注 2： 由定义可知，若动点 (x,y) 沿<u>不同曲线</u>趋于定点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 趋于<u>不同常数</u>，则说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 不存在。例如，对函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$，因为当动点 (x,y) 沿直线族 $y=kx$（这里 k 为任意实数）趋于定点 $(0,0)$ 时，极限 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 随 k 不同而不同，故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在。

注 3：二元及多元函数的极限运算与一元函数类似，因为它们的极限定义是完全类似的。比如，函数加、减、乘和除（分母不为 0）的极限等于函数极限的加、减、乘和除（分母不为 0）。例如，

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right]=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,2)}y=1\cdot 2=2。$$

■ **二元函数的连续性** 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)\neq f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续或间断，点 (x_0,y_0) 称为 $f(x,y)$ 的间断点。若 $f(x,y)$ 在平面上的一个点集的每一个点连续，则称 $f(x,y)$ 在该点集连续。这些定义可以推广到三元及多元函数的连续性上去。

注：$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续的定义 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)\neq f(x_0,y_0)$ 包含三种情形：（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 不存在；（2）$f(x_0,y_0)$ 不存在；（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 和 $f(x_0,y_0)$ 都存在但不相等。例如，对函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续；又如，函数 $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的每点 (x,y) 函数值都不存在，故该函数 $f(x,y)$ 在这些点也不连续。

由于二元及多元函数的连续性定义与一元函数的连续性定义本质上是一样的，所以它们具有相同的一些性质，比如，连续的多元函数，它们的和、差、积和商（分母不为 0）函数仍为连续的多元函数。

■ **多元初等函数的连续性**

多元初等函数是指由常数和具有不同自变量的指数、对数、三角、反三角和幂函数经过有限次加、减、乘、除（分母不为 0）和复合运算得到的用一个式子表示的多元函数。比如函数 $\dfrac{x+x^2-y^2}{1+y^2}$，$\sin(x^2+y)$ 和 $e^{x^2+y^2+z^2}$ 等都是多元初等函数。

与一元初等函数的连续性类似，多元初等函数在定义区域内连续，定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域。一般，多元初等函数在定义域的内点处都连续（因为当点 P 为定义域 D 的内点时，则存在点 P 的邻域 $\mathrm{U(P)}\subset\mathrm{D}$，而邻域 $\mathrm{U(P)}$ 是区域从而是定义区域，而多元初等函数在定义区域内连续，因此在内点 P 连续）。这为求多元初等函数的极限带来了便利。

注 点 P 为定义域 D 的内点 $\Leftrightarrow$ 存在点 P 的一个邻域 $\mathrm{U(P)}\subset\mathrm{D}$。

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x+y}{xy}$.

解：由于 $\dfrac{x+y}{xy}$ 是二元初等函数，点 $(1,2)$ 是该函数定义域 $D=\{(x,y)|x,y\neq 0\}$ 的内点（因存在点 $(1,2)$ 一个邻域包含在 D 内），故在该点连续，从而在该点的极限值等于函数值，于是得到 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{x+y}{xy}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=\dfrac{3}{2}$.

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy+1-1^2}{xy\left(\sqrt{xy+1}+1\right)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\dfrac{1}{2}$. 这里第一个等号应用了分子有理化，最后一个等号应用了二元初等函数 $\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$ 在点 $(0,0)$ 的连续性.

例 求函数 $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 何处间断？

解：由于 $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 为二元初等函数，只在不能取函数值的点处间断，故该函数的间断点即不能取函数值的点，亦即在集合 $\{(x,y)|y^2-2x=0\}$ 的每点间断.

注：多元函数极限求法除了运用极限的四则运算、分子（分母）有理化、初等函数连续性等方法外，有时也用到变量变换，比如，

例 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

解：法一 作变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, 0\le\rho<+\infty, 0\le\theta\le 2\pi$，则 $x^2+y^2=\rho^2$, 且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim_{\rho\to0}\frac{1-\cos\rho^2}{\rho^2e^{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}}=\lim_{\rho\to0}\frac{\frac{1}{2}\rho^4}{\rho^2e^{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}}=\lim_{\rho\to0}\frac{\frac{1}{2}\rho^2}{e^{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}}=0 .$$

这里第二个等号用到了 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, x\to 0$.

法二 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{e^{x^2y^2}}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}\overset{z=x^2+y^2}{=\!=\!=\!=}\lim_{z\to0}\frac{1-\cos z}{z}=\lim_{z\to0}\sin z=0$$

第二节 偏导数

■ **偏导数的定义** 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，如果极限

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为**函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的偏导数**，记为 $f_x(x_0,y_0)$，或 $z_x(x_0,y_0)$，即 $f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$；同理可定义**函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 y 的偏导数**为 $f_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$.

若对 $\forall (x,y)\in D\subset R^2=\{(x,y)|x,y\in(-\infty,+\infty)\}$，函数 $f(x,y)$ 在该点的偏导数

$f_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$ 都存在，则对 D 内任意一点 (x,y)，有唯一值 $f_x(x,y)$ 与之对应，故 $f_x(x,y)$ 是 x 和 y 的二元函数，由于是由偏导数产生的，故称这个函数 $f_x(x,y)$ 是 $f(x,y)$

对 x 的偏导函数； 同理，可定义 $f(x,y)$ **对 y 的偏导函数为**

$f_y(x,y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$． 偏导函数简称偏导数.

注：（1）由定义可知，$f_x(x_0,y_0)=f_x(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$f_y(x_0,y_0)=f_y(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，即**偏导数就是偏导函数的函数值**；一般，求多元分段函数在分段点的偏导数使用偏导数定义，求多元函数在非分段点的偏导数可先求偏导函数，再求函数值的方法，计算较简便.

（2）由偏导函数的极限定义表达式，求 $f_x(x,y)$ 时，极限对 y 不起作用，变量 y 像常数一样在处理，因此，求 $f_x(x,y)$ 时，$f(x,y)$ 中变量 y 像常数一样处理，实际就是 $f(x,y)$ 对 x 进行一元函数求导.

例 求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+3y,\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$，故得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=2x+3y\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=8$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=3x+2y\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=7$．

例 求 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \qquad x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数.

解：$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\dfrac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2+0^2}}-0)\Big/\Delta x=0$，

同理 $f_y(0,0)=0$.

例 求 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, 求 $f_x(x,1)$.

解：法一、设 $u=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $u_x=\dfrac{1}{\sqrt{y}}(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}$， 可得 $f_x(x,y)=1+(y-1)\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u_x$

$=1+(y-1)\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}=1+(y-1)\dfrac{1}{2\sqrt{xy-x^2}}$，于是得 $f_x(x,1)=1$．此方法较繁！

法二 注意到求 $f_x(x,1)$ 时与第 2 个坐标值 1 无关系，故先计算 $f(x,1)$，再让 $f(x,1)$ 对 x 求导得到。由于 $f(x,1)=x+(1-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1}}=x$，故 $f_x(x,1)=1$.

偏导数的定义可推广到三元及多元函数的情形。

■ **偏导数的几何意义**

由一元函数导数定义知，$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 表示曲线 $z=f(x)$ 在它上面的点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线对 x 轴的倾斜角的正切，于是可知

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y_0)-f(x,y_0)}{\Delta x}\Big|_{x=x_0}$$

$=\dfrac{df(x,y_0)}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 表示曲线 $z=f(x,y_0)$ 在它上面的点 $(x_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的倾斜角的正切。而在空间中，曲线 $z=f(x,y_0)$ 是平面 $y=y_0$ 上的一条曲线，在空间其一般方程可写为 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$；点 $(x_0,f(x_0,y_0))$ 是曲线 $z=f(x,y_0)$ 上的点，也在平面 $y=y_0$ 上，在空间中它的坐标为 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$。因此，**偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 表示空间曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$ 在它上面的点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的倾斜角的正切**。同理，**偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 表示空间曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ x=x_0\end{cases}$ 在它上面的点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 y 轴的倾斜角的正切。**

例 求曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 处的切线对于 x,y 轴的倾角各是多少？

解：曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线对$x$轴的倾角正切等于$f_x(2,4)$，对$y$轴的倾角正切等于$f_y(2,4)$，这里$f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{4}$。因为$f_x(2,4)=f_x(x,y)\Big|_{x=2,y=4}=1$，$f_y(2,4)=f_y(x,y)\Big|_{x=2,y=4}=2$，故曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线对$x$轴的倾角为$\dfrac{\pi}{4}$，对$y$轴的倾角等于$\arctan 2$.

■ **高阶偏导数**

对函数$z=f(x,y)$，偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$一般仍为$x$和$y$的二元函数，若$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right),\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right),\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$和$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$仍存在，则**称它们为函数$z=f(x,y)$的二阶偏导数**，按求导顺序分别记$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$，$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$，$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$，**其中第二和第三个偏导数称为二阶混合偏导数**。对二阶偏导数继续求导如果还能得到函数$z=f(x,y)$的三阶、四阶以及n阶偏导数，则统称**二阶及二阶以上的偏导数为函数$z=f(x,y)$的高阶偏导数。**

注：由高阶偏导数的定义和一阶偏导数的求法知，求高阶偏导数只能从一阶偏导数开始一阶一阶地往上求，且每求一次偏导数都是一元函数求导，对哪个变量求导，其他变量都看成常数一样处理。

例 设$z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解：由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x$，可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=6xy^2，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=6x^2y-9y^2-1，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=6x^2y-9y^2-1，\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=6y^2.$$

这里，两个二阶混合偏导数相等，这是由于他们在整个xoy平面上每点都连续的缘故.

一般有如下结论。

定理 若两个混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在平面区域 D 内连续，则它们在该区域内每点相等.

即二阶混合偏导数在连续的条件下与求导顺序无关，是相等的。

对三元及三元以上的多元函数可类似定义高阶偏导数，且高阶混合偏导数在连续的条件下也与求导顺序无关，是相等的。

第三节 全微分

■ 全微分的定义

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某领域内有定义，若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量

$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，这里 A 和 B 是与 Δx 和 Δy 无关只与 x 和 y 有关的常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称 $z=f(x,y)$ **在点** (x,y) **可微**，记

$dz=A\Delta x+B\Delta y$，**称** $dz=A\Delta x+B\Delta y$ **为** $z=f(x,y)$ **在点** (x,y) **的全微分**。**如果** $z=f(x,y)$ **在平面区域 D 内每点可微，则称该函数在区域 D 内可微**。

■ $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微、连续和偏导数均存在的关系

定理 1 设 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则该函数在此点的两个偏导数均存在，但反之不成立。

证明：由 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，故 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，这里 A 和 B 是与 Δx 和 Δy 无关只与 x 和 y 有关的常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$\Delta x,\Delta y$ 是两个取实数值的变量。当 $\Delta y=0$ 时，有 $f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$，从而有

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}\right)=A$，即 $f_x(x,y)=A$。这里当 $\Delta x\to 0$ 时，

$o(|\Delta x|)=o(\Delta x)$，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$。同理可得 $f_y(x,y)=B$。

注 1：由证明过程可知，当 $f(x,y)$ **在点** (x,y) **可微时，可微定义中的常数** $A=f_x(x,y)$，$B=f_y(x,y)$. **于是，当** $z=f(x,y)$ **在点** (x_0,y_0) **可微时，全微分**

$dz=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$。

注 2：二元函数的全微分定义与一元函数全微分定义本质上是一样的。该定义可简化为

$z=f(x,y)$ **在点** (x,y) **可微**

$\Leftrightarrow \Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+f_x(x,y)\Delta y+o(\rho)\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y}{\rho}=0$，这里 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 。

反之，<u>设 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的两个偏导数均存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 不一定可微，</u>

比如，对函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2\neq 0,\end{cases}$ 易知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但此函数在 $(0,0)$ 不可微。事实上，

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x\Delta y}{\rho\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$ 不存在（从而 $\neq 0$ ）。

定理 2 <u>设 $f(x,y)$ 的两个偏导函数 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 都在点 (x,y) 连续，则 $f(x,y)$ 在此点可微</u>。

定理 3 <u>设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则该函数在此点连续，但反之不成立</u>。

证明：由 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，故

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，这里 A 和 B 是与 Δx 和 Δy 无关只与 x_0 和 y_0 有关的常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$\Delta x,\Delta y$ 是两个取实数值的变量。从而有

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)]=0$，即

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)$，令 $x=x_0+\Delta x,y=y_0+\Delta y$，可得

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续。

反之，设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不一定可微，比如，对函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$ 易知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\overset{\substack{x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\sin\theta=0=f(0,0)$$ ，即 $f(x,y)$ 在点

(x_0,y_0) 连续，但此函数在 $(0,0)$ 不可微（见上例）。

注： $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续推不出两个偏导数均存在，反之也推不出。

例如，对函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ，易知它在 $(0,0)$ 连续，但由于

$f_x(x.y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, f_y(x.y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ，故 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 均不存在。

又对函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 易知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ ，但由于

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，故该函数在 $(0,0)$ 不连续。

二元函数全微分的定义及必要和充分条件，可以类似推广到三元及多元函数上去。习惯上，记 $dx=\Delta x, dy=\Delta y$ ，**称为自变量 x,y 的微分**，于是全微分公式变为 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$（称为**叠加原理**）。叠加原理可以推广到三元及多元函数上去，比如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的叠加原理为 $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz$ 。

例 计算函数 $z=e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

例 计算函数 $u=x+\sin\dfrac{y}{2}+e^{yz}$ 的全微分.

第四节 多元复合函数的求导法则

■ 具体函数情形

求导步骤：1. 写复合结构； 2. 写求导公式； 3. 求导

例 1 设 $z=e^u\sin v$，而 $u=xy, v=x+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解：$$z\left\langle\begin{array}{l} u=xy\left\langle\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right. \\ v=x+y\left\langle\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right.\end{array}\right.,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}[\sin(x+y)\cdot y+\cos(x+y)].$$

例 2 设 $u=f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$，而 $z=x^2\sin y$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解：$$u=f(x,y,z)=\left\langle\begin{array}{l} \quad\quad x \\ \quad\quad y \\ z=x^2\sin y\left\langle\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right.\end{array}\right.,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y+e^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z\cdot x^2\cos y=2e^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}(y+x^4\sin y\cos y)$$

例 3 设 $z=uv+\sin t$，而 $u=e^t, v=\cos t$，求全导数 $\dfrac{dz}{dt}$.

解：$$z\left\langle\begin{array}{l} u=e^t---t \\ v=\cos t---t, \\ t\end{array}\right.$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}=v\cdot e^t+u\cdot(-\sin t)+\cos t=e^t(\cos t-\sin t)+\cos t.$$

■ 抽象函数情形

求导步骤：1. 写复合结构； 2. 求导.

为了符号表示简便，对多元函数 $f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，这里 u_i 表示中间变量，引入记号

$$f_i'=\frac{\partial}{\partial u_i}f(u_1,u_2,\cdots,u_n),\quad f_{ij}''=\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_j}f(u_1,u_2,\cdots,u_n),$$

$f_{ijk}'''=\dfrac{\partial^3}{\partial u_i\partial u_j\partial u_k}f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$. 它们仍是中间变量 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的函数，从而和

$f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$有相同的复合结构。

例 4 设 $w=f(x+y+z,xyz)$， f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

解： $w=f(x+y+z,xyz)\left\langle \begin{array}{l} x+y+z\left\langle \begin{array}{l} x\\ y\\ z \end{array}\right. \\ xyz\left\langle \begin{array}{l} x\\ y\\ z \end{array}\right. \end{array}\right.$， $\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot yz$，

注意到 $f_i',i=1,2$ 与函数 f 有相同的复合结构，即

$f_1'\left\langle \begin{array}{l} x+y+z\left\langle \begin{array}{l} x\\ y\\ z \end{array}\right. \\ xyz\left\langle \begin{array}{l} x\\ y\\ z \end{array}\right. \end{array}\right.$， $f_2'\left\langle \begin{array}{l} x+y+z\left\langle \begin{array}{l} x\\ y\\ z \end{array}\right. \\ xyz\left\langle \begin{array}{l} x\\ y\\ z \end{array}\right. \end{array}\right.$，故得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial f_1'}{\partial z}+yf_2'+yz\cdot\frac{\partial f_2'}{\partial z}=\left(f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot xy\right)+yf_2'+yz\left(f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot xy\right)$$

$$=f_{11}''+\left(z+x\right)yf_{12}''+yf_2'+xy^2zf_{22}'',$$

这里最后一个等号用到了二阶混合偏导数 f_{12}'' 和 f_{21}'' 均连续从而相等.

例 5 设 $z=f(\sin x,\cos y,e^{xy})$， f 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解： $z=f(\sin x,\cos y,e^{xy})\left\langle \begin{array}{l} \sin x---x \\ \\ \cos y---y \\ \\ e^{xy}\left\langle \begin{array}{l} x\\ y \end{array}\right. \end{array}\right.$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\cos x+f_3'\cdot e^{xy}\cdot y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_2'\cdot(-\sin y)+f_3'\cdot e^{xy}\cdot x.$$

第五节 隐函数的求导公式

一．一个方程的情形

■ 已知方程 $F(x,y)=0$ 确定了一个函数 $y=f(x)$，但由该方程不能或不易解出 $y=f(x)$，则由隐函数定理 1 得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

例 已知 $x^2+y^2=1$ 在 $(0,1)$ 的某一领域内确定了一个隐函数 $y=f(x)$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}},\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$

解：设 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，则 $F_x(x,y)=2x, F_y(x,y)=2y,$ 从而

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{y}\right)=-\frac{y-x\cdot\dfrac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{y-x\dfrac{-x}{y}}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=\frac{-1}{y^3},$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=0,\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\left.\frac{1}{y^3}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-1.$$

■ 已知方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了一个函数 $z=f(x,y)$，但由该方程不能或不易解出 $z=f(x,y)$，则由隐函数定理 2 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$.

例 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解:设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$,则 $F_x=2x, F_y=2y, F_z=2z-4,$ 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2-z}\right)=\frac{2-z-x(-\dfrac{\partial z}{\partial x})}{(2-z)^2}=\frac{2-z+x(\dfrac{x}{2-z})}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

二．方程组的情形

设方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定了函数组 $\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

方法：在方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 两边同时对 x 求偏导数（注意 u 和 v 均是 x,y 的函数），

再解出$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$.同理，在方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$两边同时对$y$求偏导数得到$\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$.

例 设$xu-yv=0, yu+xv=1$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 在方程组两边同时对x求导，得$\begin{cases}xu_x-yv_x=-u\\yu_x+xv_x=-v\end{cases}$, 第一式乘以$y$、第二式乘以$x$得

$\begin{cases}xyu_x-y^2v_x=-yu\\xyu_x+x^2v_x=-xv\end{cases}$, 可解得$v_x=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}$；$\begin{cases}xu_x-yv_x=-u\\yu_x+xv_x=-v\end{cases}$第一式乘以$x$、第二式乘以$y$

得$\begin{cases}x^2u_x-xyv_x=-xu\\y^2u_x+xyv_x=-yv\end{cases}$，可解得$u_x=\frac{-xu-yv}{x^2+y^2}$；

在方程组两边同时对y求导，得$\begin{cases}xu_y-yv_y=v\\yu_y+xv_y=-u\end{cases}$, 第一式乘以$y$、第二式乘以$x$得

$\begin{cases}xyu_y-y^2v_y=yv\\xyu_y+x^2v_y=-xu\end{cases}$，可解得$v_y=\frac{-xu-yv}{x^2+y^2}$；$\begin{cases}xu_y-yv_y=v\\yu_y+xv_y=-u\end{cases}$第一式乘以$x$、第二式乘以$y$得$\begin{cases}x^2u_y-xyv_y=xv\\y^2u_y+xyv_y=-yu\end{cases}$，可解得$u_y=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}$；

例 设$x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=1$，求$\frac{dx}{dz},\frac{dy}{dz}$.

解 在方程组两边同时对z求导，得$\begin{cases}\frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}+1=0\\2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}+2z=0\end{cases}$, 可解得$\frac{dx}{dz}=\frac{z-x}{x-y}$, $\frac{dy}{dz}=\frac{y-z}{x-y}$。

第六节 多元函数微分学的几何应用

■ 空间曲线的切线和法平面

1. 空间曲线$\Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t), t\in[\alpha,\beta]$在它上面一点$M(x_0,y_0,z_0)$处的**切线方程**为$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$（$t_0$为点$M(x_0,y_0,z_0)$对应的参数值），过点$M$且垂直于切线的平面即**法平面方程**为$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$.

推导 设点M对应的参数为t_0，曲线在点M处的切线为MT，M'为曲线上任意一点，其坐标和对应的参数分别设为$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$和$\Delta t+t_0$，则$\overrightarrow{MM'}=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$，$\Delta x=x_0+\Delta x-x_0=\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)$，$\Delta y=\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)$，$\Delta z=\omega(t_0+\Delta t)-\omega(t_0)$，且$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}{\Delta t}=\varphi'(t_0)$， $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\psi'(t_0)$， $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta t}=\omega'(t_0)$. 于是得

割线MM'： $\dfrac{x-x_0}{\Delta x}=\dfrac{y-y_0}{\Delta y}=\dfrac{z-z_0}{\Delta z}$

$\downarrow$当$M'\to M,(\Delta t\to 0)$

切线MT：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$，过点$M$且垂直于切线的平面即法平面方程也可得到.

例 求曲线$x=t, y=t^2, z=t^3$在点$(1,1,1)$处的切线及法平面方程.

解： $x_t'=1,\ \ y_t'=2t,\ \ z_t'=3t^2$， 点$(1,1,1)$对应的参数为$t_0=1$，所求切线方程为

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$，法平面方程为$x-1+2(y-1)+3(z-1)=0$.

2. 空间曲线$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$在它上面一点$M(x_0,y_0,z_0)$处的**切线方程**为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}}$$，过点$M(x_0,y_0,z_0)$且垂直于切线的平面即**法平面方程**为

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)=0$$，这里带下标的行列式表示行列式在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的值.（不要求掌握）

推导 设F,G对各个变量的偏导数连续，且$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}\neq 0$，由隐函数定理 3 知曲线$\Gamma$的方程组在点$M(x_0,y_0,z_0)$的某一领域内可确定一组函数$y=\varphi(x), z=\psi(x)$，且满足$y_0=\varphi(x_0), z_0=\psi(x_0)$，于是可得空间曲线$\Gamma$的参数方程为$x=x, y=\varphi(x), z=\psi(x)$.

因为 x,y,z 是曲线 Γ 上点的坐标，所以 $\begin{cases} F(x,\varphi(x),\psi(x))=0, \\ G(x,\varphi(x),\psi(x))=0. \end{cases}$, 两边同时对 x 求导得

$\begin{cases} F_x+F_y\cdot\varphi'(x)+F_z\cdot\psi'(x)=0, \\ G_x+G_y\cdot\varphi'(x)+G_z\cdot\psi'(x)=0. \end{cases}$，即方程组 $\begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi'(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -F_x \\ -G_x \end{pmatrix}$，这里

$F_i=F_i(x,y,z),G_i=G_i(x,y,z),i=x,y,z;\quad y=\varphi(x),z=\psi(x),$ 其解为

$$\varphi'(x)=\frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}},\quad \psi'(x)=\frac{\begin{vmatrix} F_y & -F_x \\ G_y & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}},$$ 故点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处

的切线方向向量为 $(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0))$ ，它平行于向量

$$\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)},\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)},\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}\right)$$，故得结论.

例 求空间曲线 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在其上一点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

解：$F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z$, $G_x=G_y=G_z=1$, 从而

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{(1,-2,1)}=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-6,\quad \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{(1,-2,1)}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{(1,-2,1)}=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=6.$$

得切线方向向量为 $(-6,0,6)//(-1,0,1)$ ，故所求切线方程为

$(-1)\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+1\cdot(z-1)=0$ ，即 $z-x=0$ ；

法线方程为 $\dfrac{x=1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$.

■ **空间曲面的切平面和法线**

空间曲面 $F(x,y,z)=0$ 在它上面一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的**切平面方程**为

$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$ ，过点 $M(x_0,y_0,z_0)$

且垂直于切平面的直线即**法线方程**为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$.

推导 设空间曲面$F(x,y,z)=0$上过点$M(x_0,y_0,z_0)$的任一曲线Γ方程为

$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$，则$F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))=0$，两边同时对$t$求导得

$F_x(x,y,z)\cdot\varphi'(t)+F_y(x,y,z)\cdot\psi'(t)+F(x,y,z)\cdot\omega'(t)=0$.

因为点M既在曲面$F(x,y,z)=0$上又在曲线Γ上，所以点M的坐标(x_0,y_0,z_0)和对应参数t_0满足：$F_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\psi'(t_0)+F(x_0,y_0,z_0)\cdot\omega'(t_0)=0$，即$\left(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\right)\cdot\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F(x_0,y_0,z_0)\right)=0$. 所以曲面$F(x,y,z)=0$上过点$M(x_0,y_0,z_0)$的任一曲线$\Gamma$在点$M$处的切线都垂直于确定向量$\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F(x_0,y_0,z_0)\right)$，从而曲面上过点$M$的所有曲线在点$M$处的所有切线都在过点$M$且垂直于确定向量$\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F(x_0,y_0,z_0)\right)$的平面上，**这个平面称为空间曲面在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切平面**，且可得其方程及法线方程。

例 求曲面$z=x^2+y^2-1$在点$(2,1,4)$处的切平面和法线方程.

解：设$F(x,y,z)=z-x^2-y^2+1$，则$F_x=-2x,F_y=-2y,F_z=1$，所求切平面和法线方程分别为$-4(x-2)-2(y-1)+(z-4)=0$，$\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-4}{1}$.

方向导数和梯度

定义 设l是xoy平面上以$P_0(x_0,y_0)$为始点的一条射线，定义函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$沿方向l的方向导数$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$，其中$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$表示射线$l$上定点$P_0(x_0,y_0)$和动点$P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$的距离，$\Delta x=\rho\cos\alpha,\Delta y=\rho\cos\beta$, $\cos\alpha$和$\cos\beta$是方向l的方向余弦。

注 1. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$是方向$l$上单位距离的函数变化量即函数变化率；

2. 若$f_x(x_0,y_0)$存在，则$f_x(x_0,y_0)$就是$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$沿x轴正方向的方向导数，同理若$f_y(x_0,y_0)$存在，则$f_y(x_0,y_0)$就是$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$沿y轴正方向的

方向导数。因为，

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0},$$

这里 ρ 是 x 轴正方向 l 上定点 $P_0(x_0,y_0)$ 和动点 $P(x_0+\Delta x,y_0)$ 的距离.

反之，若 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿 x 轴正方向的方向导数存在，则 $f_x(x_0,y_0)$ 不一定存在，比如，函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 沿 x 轴正方向 l 的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{\Delta x^2+0^2}-0}{\sqrt{\Delta x^2+0^2}}=1,$$ 但由于

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$ 故 $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 均不存在。

方向导数和可微的关系

定理 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则函数在该点沿任一方向 l 的方向导数都存在，且 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是方向 l 的方向余弦。

证 由 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，即

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

得 $$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f_x(x_0,y_0)\rho\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\rho\cos\beta+o(\rho)}{\rho}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta。$$

注 函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿任一方向 l 的方向导数都存在，则函数在该点不一定可微。

例如，函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点 O(0,0) 沿任一方向 l 的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}-0}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=1,$$ 但由于

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$ 故 $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 均不存在，在 $(0,0)$ 也不可微。

例 1 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q=(2,-1)$ 的方向 l 的方向导数

解 方向 l 即向量 $\overrightarrow{PQ}=(1,-1)$ 的方向，其方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\cos\beta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$。又

$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=1,\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,0)}=2$, 故由定理知，$\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(1,0)}=1\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\times(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$。

注 方向导数的定义及与可微的关系可推广到三元及多元函数上去，如，

1. 定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 沿方向 l 的方向导数

$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$，其中的 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ 表示射线 l 上定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 和动点 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$ 的距离，$\Delta x=\rho\cos\alpha$, $\Delta y=\rho\cos\beta$, $\Delta z=\rho\cos\gamma$，$\cos\alpha,\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 是方向 l 的方向余弦；

2. 若三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微，则函数在该点沿任一方向 l 的方向导数都存在，且 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 是方向 l 的方向余弦。

例 2 求 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向 l 的方向导数，其中 l 的方向角分别为 $60^0,45^0,60^0$。

解 方向 l 的方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2},\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$。又

$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1,2)}=3,\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1,2)}=3,,\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(1,1,2)}=2$，故 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,1,2)}=3\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}$。

梯度

定义二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的梯度为向量 $(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$，记为 $gradf(x_0,y_0)=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$，或 $\nabla f(x_0,y_0)=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$。

因 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta=gradf(x_0,y_0)\cdot\vec{e}_l=\left|gradf(x_0,y_0)\right|\cos\theta,$

其中 $\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$, $\theta=<gradf(x_0,y_0),\vec{e}_l>$，

当 $\theta=0$，即沿梯度 $gradf(x_0,y_0)$ 方向 l，函数值增加最快，且方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$ 有最大值 $\left|gradf(x_0,y_0)\right|$；当 $\theta=\pi$，即沿负梯度 $-gradf(x_0,y_0)$ 方向 l，函数值减少最快，且方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$ 有最小值 $-\left|gradf(x_0,y_0)\right|$；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即沿与梯度 $gradf(x_0,y_0)$ 垂直的方向 l，$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=0$.

注 梯度的定义及与方向导数的关系可推广到三元及多元函数上去，如，定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的梯度定义为

$gradf(x_0,y_0,z_0)=(f_x(x_0,y_0,z_0),f_y(x_0,y_0,z_0),f_z(x_0,y_0,z_0))$，或

$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=(f_x(x_0,y_0,z_0),f_y(x_0,y_0,z_0),f_z(x_0,y_0,z_0))$。

例 求函数 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在点 $P_0(1,1)$ (1)增加最快的方向及沿该方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$；(2)减少最快的方向及沿该方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$；(3)变化率为零的方向；

解 （1）增加最快的方向即梯度 $gradf(1,1)=(f_x(1,1),f_y(1,1))=(1,1)$ 方向 l，沿该方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=\left|gradf(1,1)\right|=\sqrt{2}$；

（2）减少最快的方向即负梯度 $-gradf(1,1)=-(f_x(1,1),f_y(1,1))=(-1,-1)$ 方向 l，沿该方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=-\left|gradf(1,1)\right|=-\sqrt{2}$；

（3）变化率为零的方向即沿与梯度 $gradf(1,1)=(1,1)$ 垂直的方向 l.

例 求函数 $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ 在点 $P_0(1,1,0)$ 处沿什么方向变化最快，在这个方向的变化率是多少？

解 函数 $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ 在点 $P_0(1,1,0)$ 处

（1）沿梯度 $gradf(1,1,0)=(f_x(1,1,0),f_y(1,1,0),f_z(1,1,0))=(2,-2,-1)$ 的方向 l 增加最快，在这个方向的变化率即方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,1,0)}=\left|gradf(1,1,0)\right|=3$；

（2）沿负梯度 $-gradf(1,1,0)=-(f_x(1,1,0),f_y(1,1,0),f_z(1,1,0))=(-2,2,1)$ 的方向 l 减少最快，在这个方向的变化率即方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,1,0)}=-|gradf(1,1,0)|=-3.$

第八节 多元函数极值

一．无条件极值

定义 **设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若对该邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y)，都有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ 或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称 $f(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的一个极大值或极小值，点 (x_0,y_0) 称为极大值点或极小值点。**（本质上和一元函数极值的定义一样）

例 点 $(0,0)$ 为 $f(x,y)=3x^2+4y^2$ 的极小值，为 $f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的极大值，不是 $f(x,y)=xy$ 的极值。

极值的必要条件 设 $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 均存在，则当点 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 极值点时，有 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$。（类似于一元函数极值的必要条件）

注 由上述必要条件知，当 $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 均存在但有一个不等于 0 时，则点 (x_0,y_0) 不是函数 $f(x,y)$ 极值点；对 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$ 的点 (x_0,y_0)（称为**驻点**），可能是函数 $f(x,y)$ 的极值点，也可能不是函数 $f(x,y)$ 的极值点，需判定。

极值的充分条件 对驻点 (x_0,y_0)，设 $A=f_{xx}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0),\ C=f_{yy}(x_0,y_0),$

（1）若 $AC-B^2>0,$ 则 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的极值点，且 $A>0$ 时为极小值点，$A<0$ 时为极大值点；

（2）若 $AC-B^2<0,$ 则 (x_0,y_0) 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点；

（3）若 $AC-B^2=0,$ 则 (x_0,y_0) 可能是函数 $f(x,y)$ 的极值点也可能不是，需由定义判断；

例 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^3+3y^3-9x$ 的极值

解，令 $\begin{cases}f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0\\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0\end{cases}$，即令 $\begin{cases}f_x(x,y)=(x-1)(x+3)=0\\ f_y(x,y)=y(y-2)=0\end{cases}$ 得驻点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$；又 $f_{xx}(x,y)=6x+6,f_{xy}(x,y)=0,f_{yy}(x,y)=-6y+6$，

在驻点$(1,0)$处，$A=f_{xx}(1,0)=12,\ B=f_{xy}(1,0)=0,\ f_{yy}(1,0)=6$，

$AC-B^2=12\cdot 6-0^2>0,\ A=12>0$，故函数在$(1,0)$处有极小值$f(1,0)=-5$；

在驻点$(1,2)$处，$A=f_{xx}(1,2)=12,\ B=f_{xy}(1,2)=0,\ f_{yy}(1,2)=-6$，

$AC-B^2=12\cdot(-6)-0^2<0$，故函数在$(1,0)$处无极值；

在驻点$(-3,0)$处，$A=f_{xx}(-3,0)=-12,\ B=f_{xy}(-3,0)=0,\ f_{yy}(-3,0)=6$，

$AC-B^2=-12\cdot 6-0^2<0$，故函数在$(-3,0)$处无极值；

在驻点$(-3,2)$处，$A=f_{xx}(-3,2)=-12,\ B=f_{xy}(-3,2)=0,\ f_{yy}(-3,2)=-6$，

$AC-B^2=-12\cdot(-6)-0^2>0, A=-12<0$，故函数在$(-3,2)$处有极大值$f(-3,2)=31$。

注 对$f_x(x_0,y_0)$或$f_y(x_0,y_0)$不存在的点(x_0,y_0)，可能是函数$f(x,y)$的极值点，需由定义判定。比如，对$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z_x(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$， 则

$z_x(0,0),\ z_y(0,0)$均不存在，但由定义，$(0,0)$为函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$的极小值点。

二．条件极值（实际问题中的条件极值---拉格朗日函数法）

假设一个实际案例中的最值问题根据实际意义可转化为求函数$u=f(x,y,z)$在条件$\varphi(x,y,z)=0$下的最值，则建立**拉格朗日函数**$L=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$，其中$\lambda$是一个取实数值的参数，称为**拉格朗日乘子**；由$\begin{cases}L_x=0\\L_y=0\\L_\lambda=0\end{cases}$得函数$u=f(x,y,z)$在条件$\varphi(x,y,z)=0$下的驻点$(x_0,y_0,z_0)$。若此驻点唯一，则即为最值点（因为根据实际问题，最值点理论上存在，而现在求解得到的可能的最值点（即驻点）唯一，则它就是最值点）。

例 从斜边之长为l的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形的直角边边长。

解 设两直角边边长分别为x,y，则问题转化为求函数$S=x+y+l$在条件$x^2+y^2=l^2$下取最大值时的边长。设拉格朗日函数$L=x+y+l+\lambda(l^2-x^2-y^2)$，令

$$\begin{cases} L_x = 1 - 2lx = 0 \\ L_y = 1 - 2ly = 0 \\ L_\lambda = l^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$ 得唯一的驻点 $(\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}})$，故所求问题的直角边长分别为 $\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}}$ 。

例 将周长为 2p 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体，求矩形的边长各为多少时圆柱体的体积最大？

解 设矩形边长分别为 x, y，则问题转化为求函数 $V = \pi x^2 y$ 在条件 $x + y = p$ 下取最大值时的边长。设拉格朗日函数 $L = \pi x^2 y + \lambda(p - x - y)$，令 $\begin{cases} L_x = 2\pi xy - \lambda = 0 \\ L_y = \pi x^2 - \lambda = 0 \\ L_\lambda = p - x - y = 0 \end{cases}$，由第一二式得 $x = 2y$，代入第三式得唯一的驻点 $(\frac{2p}{3}, \frac{p}{3})$，故所求问题的矩形边长分别为 $\frac{2p}{3}, \frac{p}{3}$ 。