第一章 离散时间信号与系统

◈ 序列的定义及表示方法

（1）解析式表示，例如$2^n u(n)$，$\cos(\omega n)$……

（2）波形表示

（3）单位冲激响应表示，

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

如：$x(n)=2\delta(n)-\delta(n-1)-2\delta(n-2)+3\delta(n-3)$……

$x(n)=\{2,-1,-2,3,……\}$

◈ 有限长序列的长度计算

若$N_1\le n\le N_2$，则序列的长度$N=N_2-N_1+1$

•序列的运算

序列的运算包括<u>移位</u>、<u>翻褶</u>、<u>和</u>、<u>积</u>、<u>累加</u>、<u>差分</u>、<u>时间尺度变换</u>、<u>卷积和</u>等。

•卷积和是求离散线性移不变系统输出响应（零状态响应）的主要方法。

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

◈ 几种常用的序列

单位抽样序列 $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

单位阶跃序列 $u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$

矩形序列 $R_N(n)=u(n)-u(n-N)$

复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$

余弦型序列 $\cos(n\omega_0+\phi)$

需要掌握序列之间的变换关系，欧拉公式以及余弦型序列的周期性判断。

- 线性移不变系统

  掌握系统的线性、移不变、因果性、稳定性的判断

若已知线性移不变系统的单位抽样响应h(n),则系统为因果稳定系统的充要条件为

$$h(n)=0, \qquad n<0$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|<\infty$$

◈ 连续信号的抽样

一个连续时间信号经过理想抽样后，其频谱将以抽样频率 $\Omega_s=2\pi f_s=2\pi/T$为间隔重复，也就是频谱产生周期延拓。

抽样定理：要想抽样后能够不失真的还原出原信号，抽样频率必须大于信号谱的最高频率的2倍。

◈ Z变换的定义及收敛域

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

有限长序列:收敛域为有限Z平面，$0<|z|<\infty$

右边序列:收敛域为 $R_{x-}<|z|<\infty$

左边序列:收敛域为 $0<|z|<R_{x+}$

双边序列:收敛域为 $R_{x-}<|z|<R_{x+}$

◈ Z反变换的方法

部分分式法

$$\delta(n) \xrightarrow{z\text{变换}} 1$$

$$u(n) \xrightarrow{z\text{变换}} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$u(-n-1) \xrightarrow{z\text{变换}} -\frac{z}{z-1} = \frac{-1}{1-z^{-1}}$$

$$a^n u(n) \xrightarrow{z\text{变换}} \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$a^n u(-n-1) \xrightarrow{z\text{变换}} -\frac{z}{z-a} = \frac{-1}{1-az^{-1}}$$

- 离散系统的系统函数和频率响应

1、系统函数的定义$H(z)=Y(z)/X(z)$

2、由差分方程求系统函数

3、由系统函数求频率响应$H(e^{j\omega})$ （$z=e^{j\omega}$）

4、利用因果性、稳定性确定收敛域

因果序列：右边序列

稳定性：极点在单位圆内，也就是收敛域包含单位圆

5、零点和极点对频率响应的影响。

参见作业及书后习题2.18

- 例：已知一个差分方程

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

1、求系统函数H(Z)；

2、零、极点分布图，可能存在的几种收敛域；

3、若系统稳定且因果，求相应的h(n)；

解：1、

$$Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$=\frac{z(z+\frac{1}{3})}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})}$$

2、 零点：$c_1=0$，$c_2=-1/3$

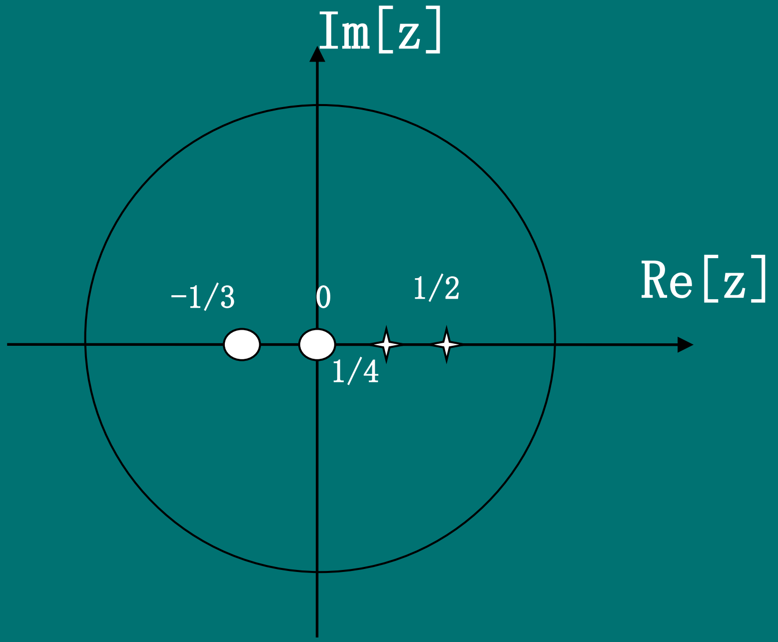
极点： $d_1=1/4$，$d_2=1/2$

可能存在的几种收敛域：

$$|z|<\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{2}$$

$$|z|>\frac{1}{2}$$



3、若已知系统稳定且因果，则收敛域包含有单位圆, 因此收敛域为|z|>1/2, h(n)应为右边序列。

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z+\frac{1}{3}}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})}=\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+(-\frac{7}{3})\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{4}}$$

$$H(z)=\frac{10}{3}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{7}{3}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$h(n)=\left[\frac{10}{3}\cdot(\frac{1}{2})^n-\frac{7}{3}\cdot(\frac{1}{4})^n\right]u(n)$$

第三章　离散傅立叶变换

◈ 四种傅立叶变换形式的归纳:离散性↔周期性

◈ 离散傅立叶变换的定义

正变换

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

反变换

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

◈ 离散傅立叶变换的性质:

圆周卷积

线性卷积与圆周卷积的关系:若L≥N_1+N_2-1，则L点圆周卷积能代表线性卷积

例：求有限长序列$x(n)=2^n R_N(n)$的N点DFT。

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} 2^n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1-2^N}{1-2e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}R_N(k)$$

有限项$(0\sim N-1)$等比序列求和公式：$s(n)=\dfrac{a_1-a_1q^N}{1-q}$

已知序列x(n)={1，-1，2，1}，

（1）求x(n)的4点DFT。

（2）若h(n)= {1，2，0，-1}，

求x(n)④h(n)，y(n)=x(n)*h(n)

(1) $$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_N^{nk}=1-W_4^{k}+2W_4^{2k}+W_4^{3k}$$

$$X(0)=3$$

$$X(1)=1-W_4^{1}+2W_4^{2}+W_4^{3}=-1+2j$$

$$X(2)=1-W_4^{2}+2W_4^{4}+W_4^{6}=3$$

$$X(3)=1-W_4^{3}+2W_4^{6}+W_4^{9}=-1-2j$$

(2) x(n)④h(n)= $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\\4\end{bmatrix}$$

$$x(n) * h(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 几个参量及它们之间的计算(见习题3.19及例3.23)
频率分辩力F_0，最小记录长度T_0
抽样频率，抽样时间间隔，信号最高频率，
一个记录中的点数N

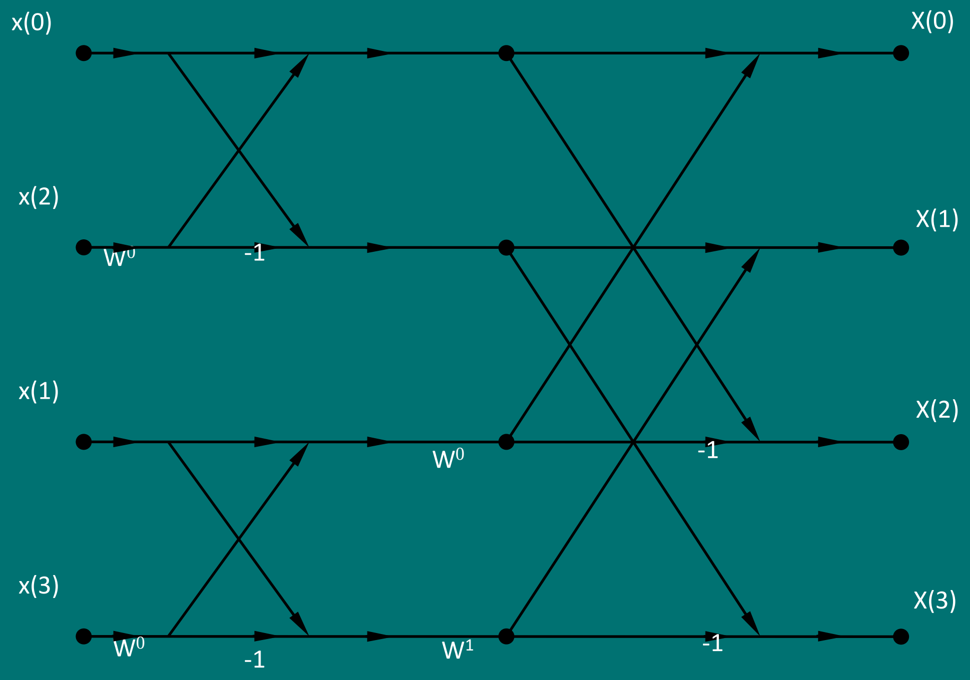
快速傅立叶变换不是一种新算法，只是离散傅立叶变换的快速算法。

掌握基本蝶形图及对应的运算式。

FFT与直接DFT相比的运算效率比较（书P219）

习题4.1

例：画出N=4时的，按时间抽取的FFT的蝶形图



第五章 数字滤波器的基本结构

- IIR数字滤波器及FIR数字滤波器的特点。
- IIR数字滤波器的基本结构

  直接Ⅱ型（典范型），级联型，并联型

  （包含由系统函数画出各结构，或者由结构再求出系统函数）
- FIR数字滤波器的基本结构

  线性相位滤波器的结构

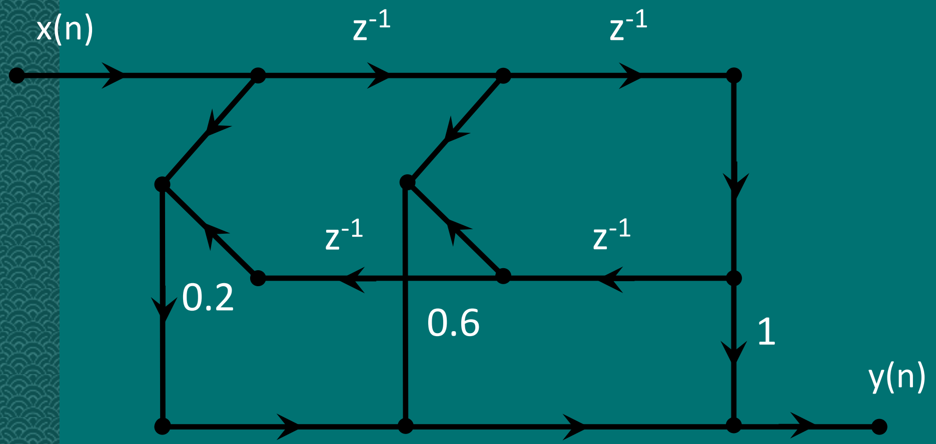
例: 设FIR数字滤波器的系统函数为

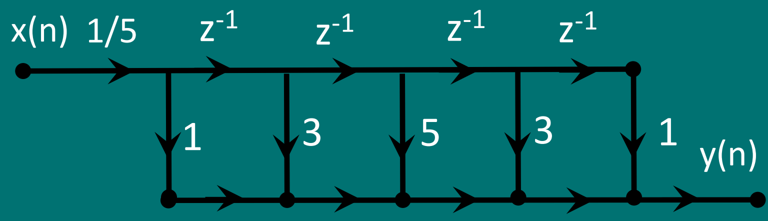
$$H(z) = \frac{1}{5}\left(1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4}\right)$$

求单位冲激响应h(n)，

并画出此滤波器的横截型结构和线性相位结构。

$$h(n) = \left\{\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right\}$$





- 由模拟滤波器设计数字滤波器的方法：

  冲激响应不变法和双线性变换法

掌握：1、具体数字化的方法；

2、两种方法的各自特点。

冲激响应不变法的相位关系：$\omega = \Omega T$

- 线性相位的滤波器：

h(n)必须有限长，且偶对称或者奇对称。对称中心 $\tau = \frac{N-1}{2}$

- 窗函数设计法中，加窗后对理想低通滤波器的频率响应的影响

◈ 窗函数设计法的步骤

1、给定要求的频率响应函数$H_d(e^{j\omega})$；

2、对$H_d(e^{j\omega})$求离散傅立叶反变换，得到$h_d(n)$；

3、由过渡带宽度及阻带最小衰减的要求，选定窗的形状和N的大小；

4、求得所设计的FIR滤波器的单位抽样响$h(n)=h_d(n)w(n)$

5、对$h(n)$求傅立叶变换，得到$H(e^{j\omega})$，检验是否满足要求，若不满足，则考虑改变窗形状或改变窗的长度N，重复第3、4步，直到满足设计要求为止

例2:设计一个线性相位的FIR滤波器，给定通带截止频率为$\omega_p=0.3\pi$，阻带起始频率为$\omega_{st}=0.5\pi$，阻带的衰减As=40dB。

解：1、理想的线性相位低通滤波器的截止频率ω_c。

$$\omega_c=\frac{\omega_p+\omega_{st}}{2}=0.4\pi$$

2、确定窗函数及N的大小

由阻带衰减40dB查表，可选汉宁窗，其阻带最小衰减44dB符合要求。

要求的数字频域的过渡带宽度$\Delta\omega=0.2\pi$

而海明窗过渡带带宽满足$\Delta\omega=6.2\pi/N$

因此 $N=6.2\pi/\Delta\omega=6.2\pi/0.2\pi=31$

$$\tau=(N-1)/2=15$$

3、由汉宁窗表达式确定FIR滤波器的h(n)

$$W(n)=0.5\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)=0.5\left[1-\cos\left(\frac{\pi n}{15}\right)\right]R_N(n)$$

$$h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin[0.4\pi(n-15)]}{\pi(n-15)} & n\neq 15\\ 0.4 & n=15\end{cases}$$

$$h(n)=h_d(n)\cdot W(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin[0.4\pi(n-15)]}{2\pi(n-15)}\cdot\left[1-\cos\left(\dfrac{\pi n}{15}\right)\right]R_N(n) & n\neq 15\\ 0.4 & n=15\end{cases}$$

4、由h(n)确定H($e^{j\omega}$)，再检验指标是否符合要求，如果不满足，则改变N或窗函数的形状来重新计算。

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{30}h(n)e^{-j\omega n}$$