高数期末试题 A 参考答案及评分标准

一、判断题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
答案	√	×	×	√	×

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

（6）-10 （7）$x^2+y^2=(z-1)^2$ （8）垂直 （9）xy （10）-2

（11）$5\sqrt{2}$ （12）$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ （13）外 (14) $\int_0^1\left(2t^3+t^2+5t\right)dt$ （15）奇

三、求解下列各题（本大题共 7 小题，每小题 7 分，共 49 分）。

（16）求空间曲线 $x=\sqrt{t}, y=\dfrac{1+3t}{t}, z=t^3$ 在点（1，4，1）处的切线方程，并求过原点与该切线垂直的平面方程。

解：$\because x'=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}, y'=-\dfrac{1}{t^2}, z'=3t^2$ ………（2分）

$\therefore$ 曲线在(1,4,1)处的切向量 $\vec{T}=(\dfrac{1}{2},-1,3)$………（1分）

则曲线在(1,4,1)处的切线方程为 $\dfrac{x-1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$………（2分）

从而所求平面方程为 $\dfrac{1}{2}x-y+3z=0$………（2分）

（17）设 $u=f(x^2y^3,\ln(xy))$，求全微分 du。

解：$\because \dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1\cdot 2xy^3+f_2\cdot\dfrac{1}{x}$……（3分）

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1\cdot 3x^2y^2+f_2\cdot\dfrac{1}{y}$……（3分）

$\therefore du=(f_1\cdot 2xy^3+f_2\cdot\dfrac{1}{x})dx+(f_1\cdot 3x^2y^2+f_2\cdot\dfrac{1}{y})dy$……（1分）

（18）计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv$，其中，$\Omega$ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 围成区域的 $x\geq 0$ 的部分。

解：$\mathrm{I}=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}(x+y)dz$(其中$D_{xy}=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,x\ge 0\right\}$)……（1分）

$=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y)(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$……（1分）

$=\iint\limits_{D_{xy}}x(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$……（2分）

$=\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}x(1-\sqrt{x^2+y^2})dx$……（1分）

$=\int_{-1}^{1}(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3)dy$……（1分）

$=2(\frac{1}{6}y-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{12}y^4)|_0^1=\frac{1}{6}$……（1分）

（19）计算$\oint_{L}(x^2-y)dx+(x+\sin^2 y)dy$,其中L是圆周$y^2-2x+x^2=0$的正向。

解：记$P(x,y)=x^2-y,Q(x,y)=x+\sin^2 y$,则$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$……(1分)

$\therefore$由格林公式得$\oint_{L}(x^2-y)dx+(x+\sin^2 y)dy=\iint\limits_{D}2dxdy$……(3分)

（其中，D：$y^2-2x+x^2=0$围成的圆域）……(1分)

$=2\iint\limits_{D}dxdy=2\pi$……(2分)

(20) 计算$\oiint\limits_{\Sigma}(1+x)ydydz+ydzdx-yzdxdy$，其中$\Sigma$是界于$z=0$和$z=2$之间的圆柱体$x^2+y^2\le 4$的整个表面的外侧。

解：记$P(x,y,z)=(1+x)y,Q(x,y,z)=y,R(x,y,z)=-yz$,则$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$……(1分)

$\therefore$由高斯公式得所求积分I$=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz$……(3分)

(其中Ω为曲面Σ围成的空间区域)……(1分)

$=8\pi$……(2分)

（21）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n-1}n!}{n^n}$是否收敛？如果收敛，判定是绝对收敛还是条件收敛？

解：$\because\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{4^{n-1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{4}{e}>1$……(2分)

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n 4^{n-1}n!}{n^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}n!}{n^n}$发散，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n-1}n!}{n^n}$不绝对收敛……(2分)

又$\because\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}n!}{n^n}\ne 0$……(2分)

$\therefore$原级数必发散。……(1分)

（22）将函数$\dfrac{1}{2+x}$展开为$x-2$的幂级数。

解：$\because \dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{4}}\cdots\cdots(1分)$　　而　$\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1)\cdots\cdots(2分)$

$$\therefore \frac{1}{2+x}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-2)^n\cdots\cdots(3分)$$

$$其中x\in(-2,6)\cdots\cdots(1分)$$

四、应用题和证明题（共 21 分）

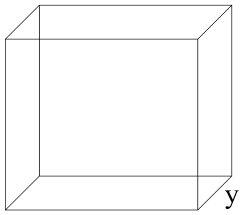
(23) 求表面积为 6 而体积为最大的长方体的体积。(8 分)

解：如图示，设长方体的各边长为 x,y,z，则长方体的体积 V＝xyz，而由条件

2xy+2yz+2zx=6

又设 F(x,y,z)=xyz+λ(xy+yz+zx-3)……（3 分）

$$由\begin{cases}F_x=yz+\lambda(y+z)=0\\F_y=xz+\lambda(x+z)=0\\F_z=xy+\lambda(y+x)=0\\xy+yz+zx-3=0\end{cases}\cdots\cdots(2分)$$



解得，$x=y=z=1\cdots\cdots(2分)$

$\therefore$当各边长都为1时体积最大V＝1……(1分)

（24）设闭区域Ω由曲面$z=x^2+y^2$和平面$z=0$及圆柱面$x^2+y^2=2y$所围成，求该区域的体积。（8 分）

$$解：所求体积V=\iint_D(x^2+y^2)dxdy\qquad(其中D：x^2+(y-1)^2\le 1)\cdots\cdots(2分)$$

$$=\iint_D\rho^3d\rho d\theta\cdots\cdots(2分)$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3d\rho=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3d\rho\cdots\cdots(2分)$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}\cdots\cdots(2分)$$

（25）证明：$\int_0^2dy\int_{y^2}^{2y}f(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^4(2\sqrt{x}-x)f(x)dx$。

$$证：左边＝\int_0^2dy\int_{y^2}^{2y}f(x)dx＝\iint_D f(x)dxdy\cdots\cdots(1分)$$

$$其中，D:0\le y\le 2, y^2\le x\le 2y\cdots\cdots(1分)$$

$$\therefore 左边=\int_0^4dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}f(x)dy\cdots\cdots(2分)$$

$$=\int_0^4f(x)dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}dy=\int_0^4f(x)(\sqrt{x}-\frac{x}{2})dx=\frac{1}{2}\int_0^4f(x)(2\sqrt{x}-x)dx=右边\cdots\cdots(1分)$$