欧拉公式在复变函数这门课中很重要：i为虚数单位

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{1}$$

复数与复变函数

1.复数

$z=x+iy$，i为虚数单位，需记住：$i^2=-1$。其中x为实部，$x=Re(z)$；y为虚部，$y=Im(z)$。

模：$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

两复数不可比大小，但其模可以

共轭：$z=x+iy$与$\bar{z}=x-iy$共轭，其中只有虚部变为负。

2.表示方法

- $z=x+iy$
- 三角表示：$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

其中，$|z|$为复数z的模，θ为z与x轴正向夹角，称为**辐角**，记为$Arg(z)$，且$Arg(z)=\arg(z)+2k\pi$，$k\in Z$。$\arg(z)$则被称为辐角主值，且$\arg(z)\in(-\pi,\pi]$

- 复指数表示：$z=|z|e^{i\theta}$（利用欧拉公式，将三角表示进行变形得来）

3.运算

假定$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$

- $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$
- $z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$，（乘法分配律计算即可）
- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$，$z_2\neq0$。（上下同乘分母的共轭复数）

三角表示与复指数表示进行的运算

假定$z_1=|z_1|e^{i\theta_1}$，$z_2=|z_2|e^{i\theta_2}$，$z=|z|e^{i\theta}$

- $z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$，$z_2\neq0$
- $z^n=|z|^n\cdot e^{in\theta}$
- $z^{\frac{1}{n}}=|z|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})$，$k=0,1,\cdots,n-1$，**有$n$个相异值。**

忘了哪里看到的了....**侵删**

> "复数是平面向量的一种表象，复数的加减表现的是向量的平移，乘除表现的是向量的伸缩与旋转"

4.曲线与区域

这里的概念介绍比较简单，详细了解的话还是去看看课本吧。

(1) 平面曲线

这里认为$x(t)$、$y(t)$为两连续实函数，则$z(t)=x(t)+iy(t)$，$t\in[a,b]$为**一连续曲线**。且这个式子被称为该曲线的**复数表示式**。

如何判断光滑呢?

$z'(t)=x'(t)+iy'(t)\neq 0$，则称$z(t)$光滑。

简单曲线：没有重(chong)点的连续曲线；**简单闭曲线**：起点与终点重合的简单曲线。

(2) 其他概念

- **邻域**：δ为任意正整数。满足$|z-z_0|<\delta$的点集，称为z_0的一个邻域。
- **集合内点**：G：一平面点集，$z_0\in G$，若存在z_0的一个邻域$\in G$，则z_0为G的内点。
- **开集**：G中每点都是内点，则称G为开集
- **连通**：平面点集D中任意两点都可用一条完全属于D的折线连接。
- **区域**：连通的开集
- **边界点**：$P\notin D$，但P的任意小邻域内总有D中的点，则P为D的边界点。
- **边界**：D的边界点的集合。
- **闭区域**：闭区域 = 边界 + 区域，记为$\bar{D}$
- **单连通域**：没有“洞”
- **多连通域**：有“洞”
- **有界域**：D中每个点，$|z|<M$，M为一正数
- **无界域**：顾名思义了，与有界域对应

注：曲线的复数表示式可由其实变量方程$F(x,y)=0$作代换，$x=\frac{1}{2}(\bar{z}+z)$，$y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$，经整理后就可以得到。

参数方程形式较为简单，不介绍

5. 复变函数的概念

(1)Def

一个复变函数对应于两实变函数。

$$w=f(z),\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}\tag{2}$$

其中$w=u+iv$，$z=x+iy$。

- 一个z对应一个w，那么$f(z)$就是单值函数（一般我们遇到的都是单值）
- 一个z对应多个w，那么$f(z)$就是多值函数。

(2)解释

$w=f(z)$，可以视为z平面上的点集映射到w平面上。（这不就是函数的本质吗）

w称为z的**像**，z称为w的**原像**。

6. 复变函数的极限

等价于两二元实函数的极限。

(1) 充要条件

设函数$f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$定义于$z_0=x_0+i\cdot y_0$的去心邻域内，$A=u_0+i\cdot v_0$，则$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$的充要条件为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0,y\to y_0}u(x,y)=u_0\\ \lim_{x\to x_0,y\to y_0}v(x,y)=v_0\end{aligned}\tag{3}$$

(2) 四则运算

假设$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$

- $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$
- $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=A\cdot B$
- $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}$，($g(z)\neq 0$，$B\neq 0$)

(3) 判存在性

可以利用**二元函数沿着不同路径趋近**的方法来判断。

7. 复变函数的连续性

- 由$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$可以推知$f(z)$在$z_0$处连续
- $f(z)$在D内处处连续，则在D内连续。
- $f(z)$在z_0连续$\leftrightarrow u$与v在(x_0,y_0)处同时连续
- 连续的$f(z)$经过有理运算后，仍然连续。