高等数学[(a2)机电](B卷）参考答案及评分标准(14-15学年下）

一、判断题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1	2	3	4	5
√	√	×	√	√

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

（6）$y^*=x(Ax+B)e^{3x}$　（7）$z^4=9(x^2+y^2)$　（8）4　（9）$\varnothing$　（10）6e

（11）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3+\cos 2)$　（12）（1，-1，-3）　（13）右手　(14) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(t\sin t-t^2\cos t)dt$　（15）奇

三、求解下列各题（本大题共8小题，每小题6分，共48分）。

（16）求解微分方程 $y''+9y=0, y|_{x=0}=3, y'|_{x=0}=6$。

解：$\because$ 特征方程：$r^2+9=0, r=\pm 3i$

$\therefore$ 原方程的通解为：$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$………(3分）

又由初始条件得：$c_1=3, c_2=2$………(2分）

$\therefore$ 所求特解为：$y=3\cos 3x+2\sin 3x$………(1分）

（17）求曲面 $x^2+2y^2+z^2=4$ 在点(1,1,1)处的切平面方程与法线方程。

解：设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-4$

那么，$F_x=2x, F_y=4y, F_z=2z,$………(2分）

$\therefore$ 曲面在（1,1,1）点处的法向量 $\vec{n}=(2,4,2)=2(1,2,1)$………(2分）

则，所求切平面方程为：$(x-1)+2(y-1)+(z-1)=0$………(1分）

所求法线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$………(1分）

（18）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2z^2+2y^2z-x+y^2=0$ 所确定，求全微分 dz。

解：设 $F(x,y,z)=x^2z^2+2y^2z-x+y^2$

那么，$F_x=2xz^2-1, F_y=4yz+2y, F_z=2x^2z+2y^2$………(2分）

$\therefore z_x=-\dfrac{2xz^2-1}{2x^2z+2y^2}; z_y=-\dfrac{4yz+2y}{2x^2z+2y^2}$………(2分）

则，全微分为：$dz=-\dfrac{2xz^2-1}{2x^2z+2y^2}dx-\dfrac{4yz+2y}{2x^2z+2y^2}dy$………(2分）

（19）计算 $\iint_D (x+2y)dxdy$, 其中D是由 $z=1$ 和 $\sqrt{x^2+y^2}=z$ 围成的空间区域在 xoy 坐标面上的投影区域。

解：原式 $=\iint_D(\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$………(1分）

$=\int_0^{2\pi}(\cos\theta+2\sin\theta)d\theta\int_0^1\rho^2 d\rho$………(2分）

$=[\sin\theta-2\cos\theta]_0^{2\pi}\cdot\dfrac{1}{3}\rho^3\Big|_0^1$………(2分）

$=0$………(1分）

（20）计算 $\oint_L (e^{x^2}+5)dy+(2xye^{x^2}-3y)dx,$ 其中 L 为从点(2,0)到点(2,3)再到原点最后回到点(2,0)的封闭折线。

解：由格林公式知：

原式 $=\iint_D(2xe^{x^2}-2xe^{x^2}+3)dxdy=3\iint_D dxdy$………(4分）

$=9$………(2分）

（21）计算$\iint\limits_{\Sigma}(2-3y)xdydz+(x^2+y^2)dzdx+yzdxdy$，其中$\Sigma$为上半球体$0\leqslant z\leqslant\sqrt{9-x^2-y^2}$的表面外侧。

解：由高斯公式知：

原式$=\iiint\limits_{\Omega}(2-3y+2y+y)dxdydz$………（2分）

$=2\iiint\limits_{\Omega}dxdydz$………（2分）

$=36\pi$………（2分）

（22）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$是否收敛？如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：$\because\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}},\therefore$原级数不绝对收敛。………（2分）

又$\because\{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\}$单调递减，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$………（2分）

$\therefore$由交错级数的判别法知原级数是条件收敛的。………（2分）

（23）将函数$y=\frac{1}{2+x}$展开为$x-2$的幂级数。

解：$\because y=\frac{1}{4+(x-2)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-2)}{4}}$………(1分）

又$\because\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,(-1<x<1)$………(2分）

$\therefore y=\frac{1}{2+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{4^{n+1}}$………(2分）

其中，$-2<x<6$………(1分）

四、应用题和证明题（共 22 分）

(24) 要做一容积等于 32 立方米的长方形无盖铁皮水箱，应如何选择水箱的尺寸，方可使铁皮的用量最省。 (8 分)

解：设水箱的长、宽、高分别为x, y, z………(1分)

那么，由条件知：$xyz = 32$,并知水箱的表面积为:

$A(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz$………(1分)

记，$L(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + 2xz + \lambda(xyz - 32)$

令，$L_x = y + 2z + \lambda yz = 0$

$L_y = x + 2z + \lambda xz = 0$

$L_z = 2y + 2x + \lambda xy = 0$

$xyz - 32 = 0$………(3分)

解得：$x = y = 4, z = 2$………(2分)

$\therefore$ 当水箱的长，宽，高分别为4,4,2是，用料最省。………(1分)

（25）求曲面 $z = x^2 + y^2$ 与曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间闭区域的体积。(7 分)

解：由题意知所求体积为：

$V = \iint\limits_D (\sqrt{2 - x^2 - y^2} - x^2 - y^2)dxdy$,(其中，$D: x^2 + y^2 \le 1$)………(2分)

$= \iint\limits_D (\sqrt{2 - \rho^2} - \rho^2)\rho d\rho d\theta$………(2分)

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\sqrt{2 - \rho^2} - \rho^2) d\frac{\rho^2}{2}$………(2分)

$= \pi(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{6})$………(1分)

（26）证明：$4\int_0^1 dy \int_{2y}^2 e^{-x^2} dx = 1 - e^{-4}$ 。(7 分)

证：左边 $= 4\iint\limits_D e^{-x^2} dxdy$,(其中，$D: 0 \le y \le 1;\ 2y \le x \le 2$)………(2分)

$= 4\int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-x^2} dy$………(2分)

$= 4\int_0^2 e^{-x^2} dx \int_0^{\frac{x}{2}} dy = 2\int_0^2 xe^{-x^2} dx$………(1分)

$= -\int_0^2 e^{-x^2} d(-x^2) = -[e^{-x^2}]_0^2 = 1 - e^{-4} =$ 右边………(2分)