第十章 重积分

第一节 二重积分的概念与性质

一、 二重积分的概念

1. 曲顶柱体体积

一立体底面是xoy平面的闭区域D，它的侧面是以D的边界曲线为准线、母线平行于z轴的柱面，顶是曲面$z=f(x,y)$, 这里$f(x,y)\ge 0$且$f(x,y)$在D连续. 求其体积.

求法： (1). 分割，将闭区域D分成n个小区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$, $\Delta\sigma_i$也表示第i个小区域的面积，在小区域$\Delta\sigma_i$内任取一点(ξ_i,η_i)； 以这些小区域的边界曲线为准线作母线平行于z轴的柱面，则曲顶柱体分成了n个小曲顶柱体$\Delta V_1,\Delta V_2,\cdots,\Delta V_n$， ΔV_i也表示第i个小曲顶柱体的体积；

(2). 近似求和：当小区域$\Delta\sigma_i$充分小时，由于$f(x,y)$在$\Delta\sigma_i$上连续，从而$f(x,y)$在$\Delta\sigma_i$上各点的函数值相差不大，故以小区域$\Delta\sigma_i$为底、高为$f(\xi_i,\eta_i)$的平顶柱体体积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$可近似代替以小区域$\Delta\sigma_i$为底的对应曲顶柱体体积$\Delta V_i$，即$\Delta V_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i, 1\le i\le n.$

整个曲顶柱体体积$V=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，当小区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$都较小时；

(3). 取极限：令d_i表示第i个小区域$\Delta\sigma_i$内任两点长度的最大值(区域$\Delta\sigma_i$的直径)，

$\lambda=\max(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，曲顶柱体体积$V=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

2. 密度不均匀的平面薄板质量

一平面薄板在xoy平面上占有区域D，它在点(x,y)处的面密度为$\mu(x,y)$，这里$\mu(x,y)\ge 0$且$\mu(x,y)$在D连续. 求其质量.

求法：(1). 分割，将闭区域D分成n个小区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_1,\cdots,\Delta\sigma_n$, $\Delta\sigma_i$也表示第i个小区域的面积，在小区域$\Delta\sigma_i$内任取一点(ξ_i,η_i)，则平面薄板分成了n个小块；

(2). 近似求和：当第i个小块所占区域$\Delta\sigma_i$充分小时，由于$\mu(x,y)$在$\Delta\sigma_i$上连续，从而$\mu(x,y)$在$\Delta\sigma_i$上各点的函数值相差不大，故可以$\mu(\xi_i,\eta_i)$近似代替小区域$\Delta\sigma_i$上各点面密

度，则第i个小块的质量$\Delta m_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i, i=1,2,\cdots,n.$ 整个薄板质量

$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，当小区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_1,\cdots,\Delta\sigma_n$都较小时；

(3). 取极限：令d_i表示第i个小区域$\Delta\sigma_i$内任两点长度的最大值(区域$\Delta\sigma_i$的直径)，

$\lambda=\max(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，平面薄板质量$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

上述例子表明，不同领域的实际问题在数学上有相同的处理方法(即分割、近似求和及取极限)，且结果都是类似的和极限，将这些实际问题中的具体函数看成普通函数，写出三个求解步骤即得二重积分定义.

二重积分定义(p137): $\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

注：(1) 在二重积分定义中，如果用平行于x,y轴的两族直线分平面区域D为n个小区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$,除了包含边界点的一些小区域外，其余小区域都是矩形区域. 设第i个小区域的边长分别为Δx_i和Δy_i，则其面积$\Delta\sigma_i=\Delta x_i\Delta y_i$，按二重积分定义中符号的对应关系得 $\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i\Delta y_i=\iint_D f(x,y)dxdy.$ 因此，在直角坐标系下面积微元$d\sigma=dxdy$.

(2) 由二重积分定义，上例中曲顶柱体的体积$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D f(x,y)d\sigma$，即曲顶柱体的曲顶方程$z=f(x,y)$在底面区域$D$上的二重积分值；密度不均匀薄板的质量$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D \mu(x,y)d\sigma$，即薄板密度函数$\mu(x,y)$在薄板所占区域$D$上的二重积分值$\iint_D \mu(x,y)d\sigma$.

(3) 在上例中，当曲顶方程$z=f(x,y)$在底面区域D上连续、密度函数$\mu(x,y)$在薄板所占区域D上连续时，得到了曲顶柱体体积为$\iint_D f(x,y)d\sigma$、平面薄板质量为$\iint_D \mu(x,y)d\sigma$. 一般，当被积函数$f(x,y)$在积分区域D连续时，二重积分$\iint_D f(x,y)d\sigma$都存在.

(4) 与定积分$\int_a^b f(x)dx$几何意义一样. 二重积分$\iint_D f(x,y)d\sigma$几何意义为：

(a) 当$f(x,y)$在区域D非负时，$\iint_D f(x,y)d\sigma$在数值上等于xoy平面上方以$f(x,y)$为曲顶方程、以D为底面区域的曲顶柱体体积；

(b) 当$f(x,y)$在区域D为负时，$\iint_D f(x,y)d\sigma$在数值上等于xoy平面下方以$f(x,y)$为曲顶方程、以D为底面区域的曲顶柱体体积的负值；

(c) 当$f(x,y)$在区域D某些子区域为正、某些子区域为负时，$\iint_D f(x,y)d\sigma$在数值上等于xoy平面上方的曲面柱体体积减去xoy平面下方曲面柱体体积.

二、二重积分的性质

由于二重积分的定义本质上和定义分定义一样，故二者有完全类似的性质, 即在相关的二重积分都存在的情况下，有

性质 1 (函数可加性及齐性) 对常数α,β，

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma;$$

性质 2（区域可加性）如果积分区域D可分成n个不重叠的小区域$D_1,D_2,\cdots,D_n$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma+\cdots+\iint_{D_n} f(x,y)d\sigma;$$

性质 3（面积性质） $\iint_D 1d\sigma$积分区域D的面积σ;

性质 4（不等式性质） 若在D上，$f(x,y)\le g(x,y)$， 则$\iint_D f(x,y)d\sigma\le\iint_D g(x,y)d\sigma$; 特别地，由于

$-|f(x,y)|\le f(x,y)\le|f(x,y)|$，有$\iint_D(-|f(x,y)|)d\sigma\le\iint_D f(x,y)d\sigma\le\iint_D|f(x,y)|d\sigma$，

从而有$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right|\le\iint_D|f(x,y)|d\sigma$.

性质 5（估值定理） 设$f(x,y)$在D上有最大值M和最小值m，区域D的面积为σ， 则

$$m\sigma\le\iint_D f(x,y)d\sigma\le M\sigma;$$

性质 6（积分中值定理）设$f(x,y)$在D上连续，区域D的面积为σ， 则在D上至少存在一点(ξ,η), 使得$\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$.

例 1 设$I=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma$, $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$, 则$I=$__________.

例 2 设 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$，则 $\iint_D 2d\sigma=$________________.

例 3 （**1**）设 $D=\{(x,y)|3\le x\le 5,0\le y\le 1\}$，则

$\iint_D \ln(x+y)d\sigma$ ______ $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ (填$<,>,=$)；

（**2**）设积分区域 D 由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成，则

$\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ ______ $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$；(填$<,>,=$)

例 4 (1)设 $D=\{(x,y)|0\le x\le \pi,0\le y\le \pi\}$，估计 $\iint_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma$ 的取值范围.；

(2)设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$，估计 $\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$ 的取值范围.($[36\pi^2,100\pi^2]$)；

解：(2)（a）被积函数 $z=x^2+4y^2+9$ 在 D 的内部：$\{(x,y)|x^2+y^2<4\}$ 的最大最小值：

令 $z_x=2x=0,z_y=8y=0$，得被积函数在 D 内部的驻点 (0.0) 及可能的最值 $z(0,0)=9$；

（b）被积函数 $z=x^2+4y^2+9$ 在 D 的边界：$\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$ 的最大最小值：

在边界上，$z=x^2+4y^2+9=13+3y^2\le 13+3\cdot 4=25$，故在边界上的点 $(0,-2),(0,2)$ 处，被积函数最大值为 25；所以，在 D 上，$9\le z=x^2+4y^2+9\le 25$．又 D 的面积为 4π．由估值定理性质，

$$9\cdot 4\pi\le \iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma\le 25\cdot 4\pi.$$

例 5 设 $f(x,y)$ 在平面区域 $D=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\}$ 上连续，证明：

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D f(x,y)d\sigma=f(x_0,y_0).$$

证：由积分中值定理，存在点 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\pi r^2$；故得

$\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}f(\xi,\eta)\pi r^2=\lim\limits_{(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)}f(\xi,\eta)=f(x_0,y_0)$，这里最后一个等号用到了 $f(x,y)$ 在点 $|(x_0,y_0)$ 的连续性.

第二节 二重积分的计算

一、利用直角坐标计算二重积分

1. 当积分区域 D 为 x 型区域: $D=\{(x,y)|a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$，$a,b$ 为常数，则

$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \overset{\text{记为}}{=} \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$， y 范围的确定方法：用垂直于 x 轴的直线去穿区域 D，第一次遇到的边界曲线 $y=\varphi_1(x)$ 作 y 的下限，第二次遇到的边界曲线 $y=\varphi_2(x)$ 作 y 的上限；

2. 当积分区域 D 为 y 型区域: $D=\{(x,y)|c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$， c,d 为常数，则 $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy \overset{\text{记为}}{=} \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$，$x$ 范围的确定方法：用垂直于 y 轴的直线去穿区域 D，第一次遇到的边界曲线 $x=\psi_1(y)$ 作 x 的下限，第二次遇到的边界曲线 $x=\psi_2(y)$ 作 x 的上限.

例 1 计算 $\iint_D xyd\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1, x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

解： $\iint_D xyd\sigma = \int_1^2 dx \int_1^x xydy = \int_1^2 dy \int_y^2 xydx = \dfrac{9}{8}$.

例 2 计算 $\iint_D xyd\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域.

解： $\iint_D xyd\sigma = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xydy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xydy = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xydx = \dfrac{45}{8}$.

例 3 计算 $I = \iint_D y\sin\dfrac{x}{y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x, x=0,$ 及 $y=2$ 所围成的闭区域.

解： $I = \int_0^2 dx \int_x^2 y\sin\dfrac{x}{y}dy$ 不能求解； $I = \int_0^2 dy \int_0^y y\sin\dfrac{x}{y}dx = \dfrac{8}{3}(1-\cos 1)$.

例 4 设 D 是直线 $y=x, y=a$ 及 $x=b(b>a)$ 围成的闭区域，且 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，证明： $\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx$.

证：二次积分 $\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy$ 的积分区域 $D=\{a \le x \le b, a \le y \le x\}$ 可表示为

$D: a \le y \le b, y \le x \le b$，故 $\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx$.

例 5 改变二次积分的积分顺序： $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx$.

($=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$).

例 6 计算由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体体积.

解：所求体积为 $\iint_D(6-2x-3y)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^1(6-2x-3y)dy=\frac{7}{2}$.

二、利用极坐标计算二重积分

1. 在极坐标系中，二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$.

证明：按二重积分的定义，当 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 存在时，它与 D 分成小区域 $\Delta\sigma_i$ 的分法和点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$ 的取法没关系。现在，在极坐标系中用过极点的射线族：$\theta=$ 常数 和以原点为圆心的同心圆族：$\rho=$ 常数 分 D 为 n 个小区域, 除了包含边界点的一些小区域外，小区域 $\Delta\sigma_i$ 的面积 $\Delta\sigma_i=\frac{1}{2}(\rho_i+\Delta\rho_i)^2\Delta\theta_i-\frac{1}{2}\rho_i^{\ 2}\Delta\theta_i=\frac{\rho_i+(\rho_i+\Delta\rho_i)}{2}\Delta\rho_i\Delta\theta_i=\bar{\rho}_i\Delta\rho_i\Delta\theta_i$，这里 $\bar{\rho}_i=\frac{\rho_i+(\rho_i+\Delta\rho_i)}{2}$ 表示相邻两圆周 $\rho=\rho_i$ 和 $\rho=\rho_i+\Delta\rho_i$ 的半径平均值；在小区域 $\Delta\sigma_i$ 内取圆周 $\rho=\bar{\rho}_i$ 上的某点 $(\bar{\rho}_i,\bar{\theta}_i)$ 作为 (ξ_i,η_i)，则由直角坐标和极坐标的关系知 $\xi_i=\bar{\rho}_i\cos\bar{\theta}_i,\eta_i=\bar{\rho}_i\sin\bar{\theta}_i$，因此由二重积分定义中符号的对应关系得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\bar{\rho}_i\cos\bar{\theta}_i,\bar{\rho}_i\sin\bar{\theta}_i)\bar{\rho}_i\Delta\rho_i\Delta\theta_i$$

$=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$ 此外可见，在极坐标系下面积微元 $d\sigma=\rho d\rho d\theta$.

2.当积分区域 D 可用极坐标表示为 $D=\{(\rho,\theta)|\alpha\le\theta\le\beta,\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\}$，$\alpha,\beta$ 为常数, 则 $\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

$$=\int_\alpha^\beta\left(\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\right)d\theta\overset{\text{记为}}{=}\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

ρ 范围的确定方法: 用过极点的射线去穿区域 D，第一次遇到的边界曲线 $\rho=\rho_1(\theta)$ 作 ρ 的下限(若 D 包含原点,则 ρ 的下限 $\rho_1(\theta)=0$),第二次遇到的边界曲线 $\rho=\rho_2(\theta)$ 作 ρ 的上限.

适用范围：当D为圆域或圆域的一部分，或被积函数含x^2+y^2时.

例 1 计算$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$.

解：在极坐标系中，D可表示为$D:0\le\theta\le 2\pi,0\le\rho\le 1$，则

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-\rho^2}\rho d\rho=\pi(1-e^{-1}).$$

例 2 计算$\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$，其中$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le Rx\}$.

解：在极坐标系中，D可表示为$D:-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},0\le\rho\le R\cos\theta$，则

$$\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{3}R^3.$$

例 3 计算$\iint_D\arctan\dfrac{y}{x}d\sigma$，$D$是圆周$x^2+y^2=4,x^2+y^2=1$及直线$y=0,y=x$所围成的在第一象限内的闭区域.

解：在极坐标系中，D可表示为$D:0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4},1\le\rho\le 2$，则

$$\iint_D\arctan\frac{y}{x}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2\arctan(\tan\theta)\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2\rho d\rho=\frac{3\pi^2}{64}.$$

例 4 计算$\int_{-1}^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sin(x^2+y^2)dy$.

解：在极坐标系中，积分区域$D=\{(x,y)\big|-1\le x\le 1,0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$可表示为

$D:0\le\theta\le\pi,0\le\rho\le 1$，则$\int_{-1}^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sin(x^2+y^2)dy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\sin\rho^2\rho d\rho=\dfrac{\pi}{2}(1-\cos 1)$.

例 5 化二次积分$\int_0^2dx\int_x^{\sqrt{3}x}f(\sqrt{x^2+y^2})dy$为极坐标形式的二次积分.

解：在极坐标系中，积分区域$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 2,x\le y\le\sqrt{3}x\}$可表示为

$D:\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3},0\le\rho\le\dfrac{2}{\cos\theta}$，则$\int_0^2dx\int_x^{\sqrt{3}x}f(\sqrt{x^2+y^2})dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}}f(\rho)\rho d\rho$.

三、二重积分的换元法

利用极坐标计算二重积分的公式$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$，可看

成作极坐标变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，通过换元得到的，变量 x,y 换元成了变量 ρ,θ，面积微元 $d\sigma$ 变成了 $\rho d\rho d\theta$. **一般，二重积分有换元公式**

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=y(u,v)]{x=x(u,v)} \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v)) \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| dudv$$，这里面积微元

$d\sigma = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| dudv$ 是在变换 $x=x(u,v), y=y(u,v)$ 下的表达式；$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\|$ 是行列式 $\left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right|$ 的绝对值；D' 是 xoy 平面上的闭区域 D 经过变换 $x=x(u,v), y=y(u,v)$ 得到的 uov 平面上的闭区域.

第三节　三重积分

一、三重积分的概念

求密度不均匀的空间立体体积

一立体在 $o-xyz$ 坐标系中占有区域 Ω，它在点 (x,y,z) 处的密度为 $\mu(x,y,z)$，这里 $\mu(x,y,z)\ge 0$ 且 $\mu(x,y,z)$ 在 Ω 连续. 求其质量 m.

1. 分割：将空间区域 Ω 任意分成 n 个小立体区域 $\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$，$\Delta v_i$ 也表示第 i 个小区域的体积，在小区域 Δv_i 内任取一点 $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$，则立体被分成了 n 个小立体块；

2. 近似求和：当第 i 个小块所占区域 Δv_i 充分小时，由于 $\mu(x,y,z)$ 在 Δv_i 上连续，从而 $\mu(x,y,z)$ 在 Δv_i 上各点的函数值相差不大，故可以 $\mu(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$ 近似代替小区域 Δv_i 上各点密度，则第 i 个小块的质量 $\Delta m_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i, i=1,2,\cdots,n.$ 整个立体质量

$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta V_i$，当小区域 $\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$ 都较小时；

3. 取极限：令 d_i 表示第 i 个小区域 Δv_i 内任两点长度的最大值(区域 Δv_i 的直径)，

$\lambda=\max(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，立体质量 $m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i$.

和上述例子一样，其他不同领域的许多实际问题在数学上也有与上述例子相同的处理方法(即分割、近似求和及取极限)，且结果都是类似的和极限，将这些实际问题中的具体函数看成普通函数，写出三个求解步骤即得三重积分定义.

三重积分定义：$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i$.

注：(1) 在三重积分定义中，如果用平行于坐标面的三族平面分空间区域Ω为n个小立体区域$\Delta v_1,\Delta v_2,\cdots,\Delta v_n$，除了包含边界点的一些小区域外，其余小区域都是长方体形区域. 设第i个小区域的边长分别为$\Delta x_i,\Delta y_i$和Δz_i，则其面积$\Delta v_i=\Delta x_i\Delta y_i\Delta z_i$，按三重积分定义中符号的对应关系得$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta x_i\Delta y_i\Delta z_i$ $=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$. 因此，在直角坐标系下体积微元$dv=dxdydz$.

（**2**）由三重积分定义，上例中密度不均匀的空间立体质量$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i$ $=\iiint_{\Omega}\mu(x,y,z)dv$，即密度函数$\mu(x,y,z)$在立体所占区域$\Omega$上的三重积分值.

(3). 在上例中，当密度函数$\mu(x,y,z)$在立体所占区域Ω上连续时，得到了空间立体质量为$\iiint_{\Omega}\mu(x,y,z)dv$. 一般，当被积函数$f(x,y,z)$在积分区域$\Omega$连续时，三重积分$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$都存在.

(4) 由于三重积分的定义本质上和定义分、二重积分的定义一样，故三者有完全类似的性质，比如面积性质：$\iiint_{\Omega} 1dv=\Omega$的体积、函数可加性、齐性、区域可加性和估值定理等.

二、三重积分的计算

2.1 利用直角坐标计算三重积分

(1). 当积分区域Ω在xoy平面的投影区域D为三角形、长方形等区域时，

$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint_{D} d\sigma\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$，$z$范围的确定方法：用垂直于$xoy$平面的直线去穿区域$\Omega$，第一次遇到的边界曲面$z=z_1(x,y)$作$z$的下限，第二次遇到的边界曲面$z=z_2(x,y)$作$z$的上限；

(2). 当被积函数$f(x,y,z)$仅是z的函数$\varphi(z)$，即$f(x,y,z)=\varphi(z)$时，可考虑

$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{c}^{d}\varphi(z)dz\iint_{D_z} d\sigma$，其中$[c,d]$是积分区域$\Omega$中点的$z$坐标取值范围，$D_z$是用平面$z=z, c\le z\le d$去截$\Omega$得到的平面闭区域(截到哪个曲面就将哪个曲面方程中的z看成常数移到等号右端再加小于号得到D_z)；

2.2 利用柱面坐标计算三重积分

当积分区域Ω在xoy平面的投影区域D为圆域或圆域的一部分时，

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \overset{\substack{x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \iint_D \rho d\rho d\theta \int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$$，这里体积微元

$dv=\rho d\rho d\theta dz$是在柱面坐标变换$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=z$下的表达式. z范围的确定方法：用垂直于xoy平面的直线去穿区域Ω，第一次遇到的边界曲面$z=z_1(\rho,\theta)$作z的下限，第二次遇到的边界曲面$z=z_2(\rho,\theta)$作z的上限；

例 1 设一物体占有空间立体区域$\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$，在点$(x,y,z)$处的密度为$\rho(x,y,z)=x+y+z$，计算该物体的质量$m$.

解：$m=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dv=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x+y+z)dz=\dfrac{3}{2}.$

例 2 计算$\iiint_\Omega xdxdydz$，其中Ω为三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成的闭区域.

解：$\iiint_\Omega xdxdydz=\iint_D dxdy\int_0^{1-x-2y}dz=\int_0^1 xdx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_0^{1-x-2y}dz=\dfrac{1}{48}$.

例 3 计算$\iiint_\Omega xy^2z^3dxdydz$，其中$\Omega$为曲面$z=xy$与平面$y=x, x=1$和$z=0$所围成的闭区域.

解：$\iiint_\Omega xy^2z^3dxdydz=\iint_D dxdy\int_0^{xy}xy^2z^3dz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy}z^3dz=\dfrac{1}{364}$.

例 4(方法一) 计算$\iiint_\Omega zdxdydz$，其中Ω为曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=4$所围成的闭区域.

解：用平面$z=z, 0\le z\le 4$去截立体Ω得到平面$z=z, 0\le z\le 4$上的圆域

$D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le z\}$(直接将曲面$z=x^2+y^2$中的$z$看成常数移到等号右端产生)，其面积为$\pi\cdot z$，从而

$$\iiint_\Omega zdxdydz=\int_0^4 zdz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^4 \pi z^2dz=\frac{64\pi}{3}.$$

(方法二) 解：Ω在xoy平面上的投影区域为圆域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$，从而利用柱面坐标计算得$\iiint_\Omega zdxdydz=\iint_D \rho d\rho d\theta\int_{\rho^2}^4 zdz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 \rho d\rho\int_{\rho^2}^4 zdz=\dfrac{64\pi}{3}$.

例 5 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dxdydz$，其中 Ω 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的闭区域.

解：用平面 $z=z,-c\le z\le c$ 去截立体 Ω 得到平面 $z=z,-c\le z\le c$ 上的椭圆域

$D_z=\left\{(x,y)\left|\dfrac{x^2}{(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}})^2}+\dfrac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}})^2}\le 1\right.\right\}$ (直接将曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 中的 z 看成常数移到等号右端产生)，其面积为 $\pi\cdot a\sqrt{1-\dfrac{z^2}{c^2}}\cdot b\sqrt{1-\dfrac{z^2}{c^2}}=\pi ab(1-\dfrac{z^2}{c^2})$，从而

$$\iiint_{\Omega} z^2 dxdydz=\int_{-c}^{c} z^2 dz\iint_{D_z} dxdy=\pi ab\int_{-c}^{c} z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4\pi}{15}abc^3.$$

例 6 计算 $\iiint_{\Omega} zdv$，其中 Ω 为曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域.

解：**(方法一)**

用平面 $z=z,0\le z\le 1$ 去截立体 Ω (截到曲面 $z=x^2+y^2$) 得到平面 $z=z,0\le z\le 1$ 上的圆域 $D_z^1=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le z\}$ (直接将曲面 $z=x^2+y^2$ 中的 z 看成常数移到等号右端产生)，其面积为 $\pi\cdot z$；用平面 $z=z,1\le z\le\sqrt{2}$ 去截立体 Ω (截到曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$) 得到平面 $z=z,1\le z\le\sqrt{2}$ 上的圆域 $D_z^2=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2-z^2\}$ (直接将曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 中的 z 看成常数移到等号右端产生)，其面积为 $\pi\cdot(2-z^2)$，从而

$$\iiint_{\Omega} zdxdydz=\int_0^1 zdz\iint_{D_z^1} dxdy+\int_1^{\sqrt{2}} zdz\iint_{D_z^2} dxdy=\pi[\int_0^1 z^2dz+\int_1^{\sqrt{2}} z(2-z^2)dz]=\frac{7\pi}{12}.$$

(方法二) Ω 在 xoy 平面上的投影区域为圆域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，从而利用柱面坐标计算得

$$\iiint_{\Omega} zdxdydz=\iint_D \rho d\rho d\theta\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} zdz=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} zdz=\frac{7\pi}{12}.$$

例 7 计算曲面 $z=6-x^2-y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体体积.

解：立体在 xoy 平面上的投影区域为圆域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4\}$，从而利用柱面坐标计算得所求体积为 $\iiint_{\Omega} 1dxdydz=\iint_D \rho d\rho d\theta\int_{\rho}^{6-\rho^2} dz=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho}^{6-\rho^2} dz=\dfrac{32\pi}{3}$.

例 8 计算 $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dv$，其中 Ω 为曲面 $z=0, z=1$ 与 $x^2+y^2=2x$ 所围成的闭区域.

解：Ω 在 xoy 平面上的投影区域为圆域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2x\}$，从而利用柱面坐标计算得

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\iint_D \rho d\rho d\theta\int_0^1 z\rho dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho\int_0^1 zdz=\frac{16}{9}.$$

例 9 计算 $\iiint_{\Omega} yzdxdydz$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, y\ge 0$ 的公共部分.

解：Ω 在 xoy 平面上的投影区域为半圆域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$，从而利用柱面坐标计算得

$$\iiint_{\Omega} yzdxdydz=\iint_D \rho d\rho d\theta\int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho\sin\theta\cdot zdz=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1\rho^2 d\rho\int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz=\frac{4}{15}.$$

例 10 计算 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 围成的区域.

解：旋转曲面方程为 $x^2+y^2=2z$，从而 Ω 为旋转曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=8$ 围成的区域，它在 xoy 平面上的投影区域为圆域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 16\}$，从而利用柱面坐标计算得

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\iint_D \rho d\rho d\theta\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}\rho^2 dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\rho^3 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}dz=\frac{4^5\pi}{3}.$$

<u>利用对称性计算二重积分和三重积分</u>

1. 当积分区域 D 关于 x 轴对称时，

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}0, & f(x,-y)=-f(x,y),\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy, & f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}.$$

这里 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 表示 $f(x,y)$ 是 y 的奇函数，$f(x,-y)=f(x,y)$ 表示 $f(x,y)$ 是 y 的偶函数，D_1 是 D 在<u>x 轴上方的区域</u>。

证明：（1）注意到上册定积分对称性结论：$\int_{-a}^{a} f(y)dy=\begin{cases}0, & f(-y)=-f(y),\\ 2\int_0^a f(y)dy, & f(-y)=f(y)\end{cases}$. 由积分区域 D 关于 x 轴对称，故设 x 轴上方 D 的边界曲线方程为 $y=\varphi(x)$，则 x 轴下方 D 的边界曲线方程为 $y=-\varphi$（(x)，故

$$\int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy=\begin{cases}0, & f(x,-y)=-f(x,y),\\ 2\int_0^{\varphi(x)} f(x,y)dy, & f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}.$$

（2）设 D 内点的横坐标范围为 $a \le x \le b$，D_1 是 D 在 x 轴上方的区域，于是

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_a^b dx\cdot 0=0, & f(x,-y)=-f(x,y),\\ \int_a^b dx\cdot 2\int_0^{\varphi(x)} f(x,y)dy=2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy, & f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}.$$

例 设 D_1 是平面区域 $D: x^2+y^2\le 1, x\ge 0$ 的第一象限部分，则（　　）

A $\iint_D \sin(x^3y)d\sigma=1$　　　B $\iint_D \sin(x^2y)d\sigma=1$

C $\iint_D xy^2d\sigma=2\iint_{D_1} xy^2d\sigma$　　　D $\iint_D xy^2d\sigma=0$

例 设 D 为平面圆域 $x^2+y^2\le a^2$，D_1 是 D 在第一象限的部分，则（　　）

A $\iint_D xd\sigma=4\iint_{D_1} xd\sigma$　　　B $\iint_D x^2d\sigma=4\iint_{D_1} x^2d\sigma$

C $\iint_D yd\sigma=4\iint_{D_1} yd\sigma$　　　D $\iint_D xyd\sigma=4\iint_{D_1} xyd\sigma$

解析：因积分区域 D（圆域）关于 x 轴对称，被积函数 f(x,y)=y, xy 都是 y 的奇函数，故积分 $\iint_D yd\sigma=\iint_D xyd\sigma=0$；因积分区域 D（圆域）关于 y 轴对称，被积函数 f(x,y)=x, xy 都是 x 的奇函数，故 $\iint_D xd\sigma=\iint_D xyd\sigma=0$

因被积函数 f(x,y)=x 在 D 的第一象限部分 D_1 内取值都非负，按二重积分的几何意义知，$\iint_{D_1} xd\sigma$ 等于曲顶方程 f(x,y)=x，底面区域为 D_1 的曲顶柱体体积，故取值为正，同理 $\iint_{D_1} yd\sigma$、$\iint_{D_1} xyd\sigma$ 分别等于曲顶方程 f(x,y)=y、f(x,y)=xy，底面区域均为 D_1 的曲顶柱体体积，故取值均为正，故 A、C、D 答案左端积分均为 0，而右端积分均大于 0，从而答案为 B。

2．当空间立体 Ω 关于 xoy 平面对称时，

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=\begin{cases}0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z),\\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dV, & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}.$$

这里 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$ 表示 $f(x,y,z)$ 是 z 的奇函数，$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$ 表示 $f(x,y,z)$ 是 z 的偶函数，Ω_1 是空间立体区域 Ω 在 <u>xoy 平面上方区域</u>。

证明：（1）注意到上册定积分对称性结论：$\int_{-a}^{a} f(z)dz=\begin{cases}0, & f(-z)=-f(z),\\ 2\int_0^a f(z)dz, & f(-z)=f(z)\end{cases}$. 由积分区域$\Omega$（空间立体）关于 xoy 面对称，故设 xoy 面上方Ω的边界曲面方程为$z=z(x,y)$，则 xoy 面下方Ω的边界曲面方程为$z=-z(x,y)$，故

$$\int_{-z(x,y)}^{z(x,y)} f(x,y,z)dz=\begin{cases}0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z),\\ 2\int_0^{z(x,y)} f(x,y,z)dz, & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}.$$

（2）设Ω在 xoy 面上的投影区域为D，Ω_1是Ω在 xoy 面上方的立体部分，于是

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV=\iint_D d\sigma\int_{-z(x,y)}^{z(x,y)} f(x,y,z)dz$$

$$=\begin{cases}\iint_D d\sigma\cdot 0=0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z),\\ \iint_D d\sigma 2\int_0^{z(x,y)} f(x,y,z)dz=2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dV, & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}.$$

例 设$\Omega=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则$\iiint_{\Omega}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dv=$______________.

例 设有空间立体区域$\Omega_1=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\}$和

$\Omega_2=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$，则（ ）

A $\iiint_{\Omega_1} xdv=4\iiint_{\Omega_2} xdv$　　B $\iiint_{\Omega_1} ydv=4\iiint_{\Omega_2} ydv$

C $\iiint_{\Omega_1} zdv=4\iiint_{\Omega_2} zdv$　　D $\iiint_{\Omega_1} xyzdv=4\iiint_{\Omega_2} xyzdv$

解析：因积分区域Ω_1（xoy 面上方的半球体）关于 yoz 面对称，被积函数 f(x,y,z)= x 是 x 的奇函数，故$\iiint_{\Omega_1} xdV=0$,同理Ω_1（xoy 面上方的半球体）关于 xoz 面对称，被积函数 f(x,y,z)= y, xyz 均是 y 的奇函数，故$\iiint_{\Omega_1} ydV=0$，$\iiint_{\Omega_1} xyzdV=0$；

因被积函数 f(x,y,z)=x 在Ω_2（第一卦限的球体）内取值都非负，按三重积分的物理意义知，$\iiint_{\Omega_2} xdV$等于密度函数 f(x,y,z)=x，所占立体区域为Ω_2的立体质量，故取值为正，同理$\iiint_{\Omega_2} ydV$、$\iiint_{\Omega_2} xyzdV$分别等于密度函数 f(x,y,z)=y，f(x,y,z)=xyz, 所占立体区域均为Ω_2的立体质量，故取值均为正，故 A、B、D 答案左端积分均为 0，而右端积分均大于 0，从而答案为 C。

第四节 重积分的应用

一、空间曲面的面积

设空间曲面$z = f(x,y)$在xoy平面上的投影区域为D，且$f_x(x,y), f_y(x,y)$在D上连续，求曲面的面积S.

二重积分的微元法：设所求量为Q，在平面区域D上任取小区域$d\sigma$(也表示其面积)，若Q在此小区域上的部分量$\Delta Q \approx f(x,y)d\sigma$(相差$d\sigma$的高阶无穷小)，则称$f(x,y)d\sigma$为$Q$的微元，记为$dQ$，即$dQ = f(x,y)d\sigma$，且$Q = \iint_D dQ = \iint_D f(x,y)d\sigma$.

求法一：1. 在平面区域D上任取小区域$d\sigma$(也表示其面积)，在$d\sigma$内任取点$(x,y,0)$. 设曲面$z = f(x,y)$在它上面的点$(x,y,f(x,y))$处的切平面π的法向量$\vec{n} = \{-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\}$ (即设法向量指向朝上), 则切平面π与xoy平面的二面角的平面角(考虑锐角)$\gamma = <\vec{n}, \vec{k}>$, 且$\cos\gamma = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{|\vec{n}||\vec{k}|} = \dfrac{1}{\sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y) + 1}}$；

2. 以小区域$d\sigma$的边界为准线作母线平行于z轴的柱面,在曲面上截出小曲面块ΔS(也表示其面积)，在切平面π上截出小平面块ΔA(也表示其面积), 当小区域$d\sigma$充分小时,
$\Delta S \approx \Delta A = \dfrac{d\sigma}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\,d\sigma.$ 曲面面积S的微元

$dS = \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\,d\sigma$；

3. 曲面面积$S = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\,d\sigma.$

注：上述二重积分微元法求曲面面积实际上是下面分割、近似求和、取极限方法的简化.

求法二：1. 分割：将D任意分成n个小区域$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，$\Delta\sigma_i$也表示第$i$个小区域的面积，在$\Delta\sigma_i$内任取点$(\xi_i, \eta_i, 0)$. 设曲面$z = f(x,y)$在其上点$(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$处的切平面$\pi_i$的法向量$\vec{n}_i = \{-f_x(\xi_i,\eta_i), -f_y(\xi_i,\eta_i), 1\}$(即设法向量指向朝上), 则切平面$\pi_i$与$xoy$平面的二面角的平面角(考虑锐角)$\gamma_i = <\vec{n}_i, \vec{k}>$, 且$\cos\gamma_i = \dfrac{\vec{n}_i\cdot\vec{k}}{|\vec{n}_i||\vec{k}|} = \dfrac{1}{\sqrt{f_x^2(\xi_i,\eta_i) + f_y^2(\xi_i,\eta_i) + 1}}$；

2. 近似求和：以小区域$\Delta\sigma_i$的边界为准线作母线平行于z轴的柱面，在曲面上截出小曲面块ΔS_i(也表示其面积)，在切平面π_i上截出小平面块ΔA_i(也表示其面积), 当小区域$\Delta\sigma_i$充分小时,

$$\Delta S_i \approx \Delta A_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i} = \sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i,\ \ i=1,2,\cdots,n.$$

整个曲面面积 $S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n}\Delta A_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i$，当每个 $\Delta\sigma_i$ 都较小时;

3. 取极限：令 d_i 表示第 i 个小区域 $\Delta\sigma_i$ 内任两点长度的最大值(区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径)，

$\lambda=\max(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，曲面面积 $S=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i$. 按二重积分定义中符号的对应关系得 $S=\iint_D dS=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}d\sigma$. 另外也可得到曲面面积微元 $dS=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}d\sigma$.

例 1 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

解：由对称性，所求面积 $S=4S_1$，这里 S_1 表示要求面积的那部分曲面在第一卦限的部分，其方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，且 S_1 在 xoy 平面上的投影区域为半圆域

$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le ax, y\ge0\}$，又 $z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，

$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，于是由极坐标计算二重积分得

$S_1=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho=a^2(\dfrac{\pi}{2}-1)$，故 $S=4a^2(\dfrac{\pi}{2}-1)$.

例 2 求平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 被三个坐标面截下的部分的面积.

解：要求面积的那部分平面的方程为 $z=c(1-\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b})$，它在 xoy 平面上的投影区域为三角形区域 D，其面积为 $\dfrac{ab}{2}$，又 $z_x=\dfrac{-c}{a}, z_y=\dfrac{-c}{b}$，$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{c^2}{b^2}}$，于是由直角坐标计算二重积分得所求面积

$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}d\sigma=\iint_D\sqrt{1+\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{c^2}{b^2}}d\sigma=\dfrac{ab}{2}\sqrt{1+\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{c^2}{b^2}}$.

例 3 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

解：要求面积的那部分曲面的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，它在 xoy 平面上的投影区域为圆域 $D=\{(x,y)\big|(x-1)^2+y^2\le 1\}$，其面积为 π，又 $z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$，于是所求面积 $S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma=\iint_D\sqrt{2}\,d\sigma=\sqrt{2}\pi$.

二 质心、转动惯量和引力（略）