一、填空题

1．已知某二阶线性齐次微分方程的通解为 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$，则该微分方程为______

$y'' - y' - 2y = 0$ 。

3．已知 $y_1 = e^{x^2}$ 及 $y_2 = xe^{x^2}$ 都是方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解，则该方程的通解

为 $y = C_1 e^{x^2} + C_2 x e^{x^2}$ 。

二、单项选择题

1．下列函数组在其定义区间内线性无关的有（　A　　）

A．e^x，e^{2x}　　B．e^x，$2e^x$　　C．$\sin 2x$，$\sin x \cos x$　D．e^{-x}，$-5e^{-x+1}$

2．微分方程 $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$ 是（　D　　）微分方程

A．线性　　B．二阶　　C．可分离变量　　D．齐次

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} = \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

三、求解下列微分方程

（1）$2y'' + y' - y = 2e^x$

解：所给微分方程对应的齐次方程的特征方程为 $2r^2 + r - 1 = 0$，特征根 $r_1 = -1, r_2 = \frac{1}{2}$.

于是对应的齐次方程通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$.

由于 $\lambda = 1$ 不是特征根，故设特解为 $y^* = ke^x$，代入原非齐次方程得 $k = 1$，于是原非齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + e^x$.

（2）$y'' = y' + x$

解 法一 即解二阶线性非齐次微分方程 $y'' - y' = x = xe^{0x}$，特征方程为 $r^2 - r = 0$，特征根为 $r_{1,2} = 0,1$。设原方程特解为 $y^* = x(ax+b)e^{0x}$，即 $y^* = ax^2 + bx$，得

$(y^*)' = 2ax + b, (y^*)'' = 2a$，代入原方程得 $2a - (2ax + b) = x$，比较同次幂系数和常数项

得 $\begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - b = 0 \end{cases}$，解得 $a = -\frac{1}{2}, b = -1$，原方程通解为

$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - x = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$。

法二 原方程可看成不显含未知函数 y 的可降阶的高阶微分方程，故将 $y'=p, y''=\dfrac{dp}{dx}$ 代入原方程得 $\dfrac{dp}{dx}-p=x$，为一个一阶线性非齐次微分方程，通解为

$$p=e^{-\int(-1)dx}(\int xe^{\int(-1)dx}dx+C)=e^{x}(C+\int xe^{-x}dx)$$

$$=e^{x}(C-\int xd(e^{-x}))=e^{x}[C-(xe^{-x}-\int e^{-x}dx)]=e^{x}(C-xe^{-x}-e^{-x})=Ce^{x}-(x+1),$$

得到 $\dfrac{dy}{dx}=Ce^{x}-(x+1)$，故原方程通解为 $y=\int(Ce^{x}-(x+1))dx=Ce^{x}-\dfrac{(x+1)^{2}}{2}+\widetilde{C}$.

四、求解下列各题

1. 求一曲线的方程，这曲线过原点，且它在 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$

解：设曲线方程为 $y=f(x)$，则由题意有 $y'=2x+y, y|_{x=0}=0$，是一阶线性非齐次微分方程求特解。该方程的通解为

$$y=e^{-\int(-1)dx}(C+\int 2xe^{\int(-1)dx}dx)=e^{x}(C+2\int xe^{-x}dx)=e^{x}(C-2\int xde^{-x})$$

$$=e^{x}(C-2(xe^{-x}-\int e^{-x}dx))=e^{x}(C-2xe^{-x}-2e^{-x})=Ce^{x}-2x-2$$

代入 $y|_{x=0}=0$ 得 $C=2$，故曲线方程为 $y=2e^{x}-2x-2$

2.（选做题）设 $y_1=x$，$y_2=x+e^{2x}$，$y_3=x(1+e^{2x})$ 是二阶常系数线性非齐次方程的特解，求微分方程的通解及该方程。

解：由解的性质知，$y_3-y_1=xe^{2x}, y_2-y_1=e^{2x}$ 为对应二阶常系数线性齐次方程的解，

从而对应二阶常系数线性齐次方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}=(C_1+C_2x)e^{2x}$。得到

$r=2$ 为特征方程的二重特征根，由维达定理知，特征方程为 $r^2-4r+4=0$，从而可设

二阶常系数线性非齐次方程为 $y''-4y'+4y=f(x)$.

又 $y_1=x$ 为该二阶常系数线性非齐次方程的特解，故满足该方程，有 $-4+4x=f(x)$,

于是二阶常系数线性非齐次方程为 $y''-4y'+4y=4x-4$ 且其通解为

$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+x$.