前言

单边 z 变换将系统的初始条件自然地包含于其代数方程中，可求得零输入、零状态响应和全响应。

一、差分方程的变换解

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} f(k-j)$$

设 $f(k)$ 在 $k=0$ 时接入，系统初始状态为 $y(-1), y(-2), ..., y(-n)$.

取单边 z 变换得:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[z^{-i}Y(z) + \sum_{k=0}^{i-1} y(k-i)z^{-i}] = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j}[z^{-j}F(z)]$$

$$[\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}z^{-i}]Y(z) + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[\sum_{k=0}^{i-1} y(k-i)z^{-i}] = (\sum_{j=0}^{m} b_{m-j}z^{-j})F(z)]$$

$$Y(z) = \frac{M(z)}{A(z)} + \frac{B(z)}{A(z)}F(z) = Y_x(z) + Y_f(z)$$

> 令
>
> $$H(z) = \frac{Y_f(z)}{F(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$
>
> 称为系统函数

> $h(k) \longleftrightarrow H(z)$

例1：若某系统的差分方程为

$$y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = f(k) + 2f(k-2)$$

已知：$y(-1) = 2, y(-2) = -1/2, f(k) = \epsilon(k)$。

求系统的 $y_x(k)$、$y_f(k)$、$y(k)$

> 解：方程取单边 z 变换
>
> $$Y(z) - [z^{-1}Y(z) + y(-1)] - 2[z^{-2}Y(z) + y(-2) + z^{-1}y(-1)] = F(z) + 2z^{-2}F(z)$$
>
> $$Y(z) = \frac{(1+2z^{-1})y(-1) + 2y(-2)}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}} + \frac{1+2z^{-2}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}}F(z) = \frac{z^2+4z}{z^2-z-2} + \frac{z^2+2}{z^2-z-2}\frac{z}{z-1}$$
>
> $$Y_x(z) = \frac{z^2+4z}{z^2-z-2} = \frac{2z}{z-2} + \frac{-z}{z+1}$$

$$\longrightarrow y_x(k) = [2(2)^k - (-1)^k]\epsilon(k)$$

$$Y_y(z) = \frac{2z}{z-2} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+1} - \frac{3}{2}\frac{z}{z-1}$$

$$\longrightarrow y_f(k) = [2^{k+1} + \frac{1}{2}(-1)^k - \frac{3}{2}]\epsilon(k)$$

$y(k) = y_x(k) + y_f(k)$

例2： **某系统，已知当输入f(k)=(– 1/2)^{k}ε(k)时，其零状态响应**

$$y_f(k) = [\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^k + 4(-\frac{1}{3})^k - \frac{9}{2}(-\frac{1}{2})^k]\varepsilon(k)$$

求系统的单位序列响应h(k)和描述系统的差分方程。

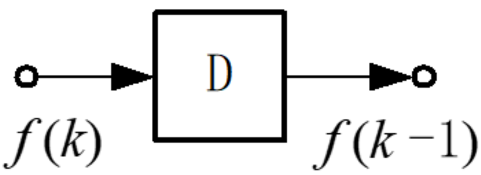
解

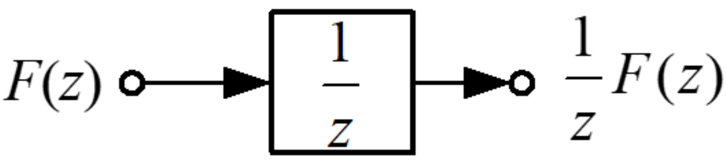
$$H(z) = \frac{Y_f(z)}{F(z)} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}} = \frac{3z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{-2z}{z + \frac{1}{3}}$$

h(k)=[3(1/2)^k –2(– 1/3)^k]ε(k)

$$y(k) - \frac{1}{6}y(k-1) - \frac{1}{6}y(k-2) = f(k) + 2f(k-1)$$

二、系统的 z 域框图



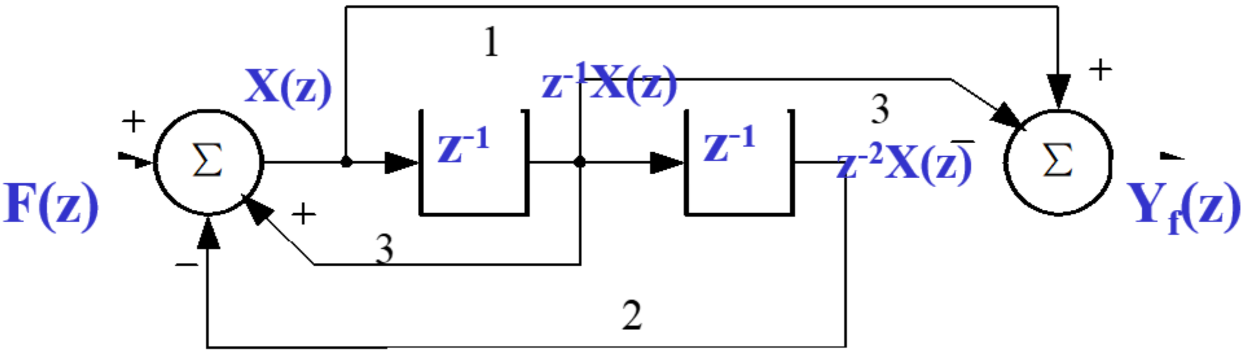


例:

某系统的k域框图如图，已知输入$f(k)=\varepsilon(k)$。

(1) 求系统的单位序列响应$h(k)$和零状态响应$y_f(k)$。

(2) 若$y(-1)=0$，$y(-2)=0.5$，求零输入响应$y_x(k)$



解:(1)画z域框图　设中间变量$X(z)$

$$X(z)=3z^{-1}X(z)-2z^{-2}X(z)+F(z) \qquad X(z)=\frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}F(z)$$

$$Y_f(z)=X(z)-3z^{-1}X(z)=(1-3z^{-1})X(z)$$

$$Y_f(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}F(z)$$

$$H(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{z^2-3z}{z^2-3z+2}=\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-2}$$

$$h(k)=[\,2-(2)^k]\varepsilon(k)$$

当$f(k)=\varepsilon(k)$时，$F(z)=z/(z-1)$

$$Y_f(z)=\frac{z^2-3z}{z^2-3z+2}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^2(z-3)}{(z-1)^2(z-2)}=\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{3z}{z-1}+\frac{-2z}{z-2}$$

$$y_f(k)=[\,2k+3-2\,(2)^k]\varepsilon(k)$$

(2)由$H(z)$可知，差分方程的特征根为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$

$$y_x(k)=C_{x1}+C_{x2}\,(2)^k$$

由$y(-1)=0$，$y(-2)=0.5$，有

$$\begin{cases} C_{x1}+C_{x2}\,(2)^{-1}=0 \\ C_{x1}+C_{x2}\,(2)^{-2}=0.5 \end{cases} \longrightarrow C_{x1}=1,\ C_{x2}=-2$$

三、利用 z 变换求卷积和

例：求 $2^k\epsilon(k) * [2^{-k}\epsilon(k)]$

> 解：
>
> $$2^k\epsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-0.5}, |z| > 0.5$$
>
> $$2^{-k}\epsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z^{-1}}{z^{-1}-0.5} = \frac{-2}{z-2}, |z| < 2$$
>
> 原式的象函数为：
>
> $$\frac{-2z}{(z-0.5)(z-2)} = \frac{\frac{4}{3}z}{z-0.5} + \frac{-\frac{4}{3}z}{z-2}$$
>
> $$\longrightarrow 原式 = \frac{4}{3}(0.5)^k\epsilon(k) + \frac{4}{3}(2)^k\epsilon(-k-1)$$

总结

联系之前的 **频域分析** 和 **复频域分析**，**z 域分析** 与之相似，但是也要注意区别。