习题一

一．填空题

1． $\overline{ABC}$　　　2、$0\cdot 5$　　3、$0\cdot 2$　　4、$0\cdot 6$

二．单项选择题

1、B　　2、C　　3、C　　4、A　　5、B

三．计算题

1．（1）略

（2）A、$A_1A_2A_3$　　B、$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$

C、$\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}$　　D、$\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1A_2A_3$

2．解　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

$P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{3}{8}$

$P(\overline{AB})=1-P(AB)=\frac{7}{8}$

$P[(A\cup B)(\overline{AB})]=P(A\cup B)-P(AB)=\frac{1}{2}$

3．解：最多只有一位陈姓候选人当选的概率为$1-\frac{C_2^2C_4^2}{C_6^4}=\frac{3}{5}$

4．$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=\frac{5}{8}$

5．解：（1）$P(A)=\frac{n!}{N^n}$

（2）$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}$、

（3）$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}$

习题二

一．填空题

1．0．8　　　　2、$0\cdot 5$　 3、$\frac{2}{3}$　　4、$\frac{3}{7}$　　5、$\frac{3}{4}$

二．单项选择题

1、D　　2、B　　3、D　　4、B

三．计算题

1.　解：设 A_i：分别表示甲、乙、丙厂的产品（i=1，2，3）

B：顾客买到正品

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)$$

$$=\frac{2}{5}\times 0.9+\frac{2}{5}\times 0.85+\frac{1}{5}\times 0.65=0.83$$

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)}=\frac{34}{83}$$

2．解：设 A_i：表示第 i 箱产品（i=1，2）

B_i：第 i 次取到一等品（i=1，2）

（1）　$P(B_1)=P(A_1)P(B_1/A_1)+P(A_2)P(B_1/A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=0.4$

（2）同理 $P(B_2)=0.4$

（3）$P(B_1B_2)=P(A_1)P(B_1B_2/A_1)+P(A_2)P(B_1B_2/A_2)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}=0.19423$$

$$P(B_2/B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{0.19423}{0.4}=0.4856$$

（4）$P(B_1/B_2)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_{21})}=\frac{0.19423}{0.4}=0.4856$

3.　解：设 A_i：表示第 i 次电话接通（i=1，2，3）

$$P(A_1)=\frac{1}{10}\qquad P(\overline{A_1}A_2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}\qquad P(\overline{A_1}\,\overline{A}_2A_3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$$

所以拨号不超过三次接通电话的概率为$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=0.3$

如已知最后一位是奇数，则

$P(A_1)=\frac{1}{5}$ $\quad P(\overline{A_1}A_2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$ $\quad P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

所以拨号不超过三次接通电话的概率为$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=0.6$

4．解：$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$

$$=1-\frac{4}{5}\frac{2}{3}\frac{3}{4}=0.6$$

5．解：设B_1,B_2分别表示发出信号“A”及“B”

A_1,A_2分别表示收到信号“A”及“B”

$$P(A_1)=P(B_1)P(A_1/B_1)+P(B_2)P(A_1/A_2)$$

$$=\frac{2}{3}(1-0.02)+\frac{1}{3}0.01=\frac{197}{300}$$

$$P(B_1/A_1)=\frac{P(A_1B_1)}{P(A_1)}=\frac{P(B_1)P(A_1/B_1)}{P(A_1)}=\frac{196}{197}$$

复习题一

一．填空题

1．0.3，0.5　　2、0.2　　3、$\frac{20}{21}$　　4、$\frac{3}{15}$，$\frac{3}{15}$　　5、$\frac{8}{15}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$

6．$1-(1-p)^4$

二．单项选择题

1、B　　2、B　　3、 D　　4、C　　5、D　　6、A

三．计算题

1． 解：设A_i： i 个人击中飞机（i=0，1，2，3）

则$P(A_0)=0.09$ $\quad P(A_1)=0.36$ $\quad P(A_2)=0.41$ $\quad P(A_3)=0.14$

B：飞机被击落

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)++P(A_0)P(B/A_0)$$

$$=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1+0.09\times0=0.458$$

2．解：设A_i： i 局甲胜（i=0，1，2，3）

（1）甲胜有下面几种情况：

打三局，概率0.6^3

打四局，概率$C_3^1 0.4\cdot 0.6^2\cdot 0.6^1$

打五局，概率$C_4^2 0.4^2\cdot 0.6^2\cdot 0.6^1$

P（甲胜）$=0.6^3+C_3^1 0.4\cdot 0.6^2\cdot 0.6^1+C_4^2 0.4^2\cdot 0.6^2\cdot 0.6^1$=0.68256

（2）

$$P(A/A_1A_2)=\frac{P(AA_1A_2)}{P(A_1A_2)}=\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1\ A_2)}=\frac{0.6^3+0.6^2*0.4*0.6+0.6^2*0.4^2*0.6}{0.6^2}=0.936$$

3．解：设 A ：知道答案　　　　B：填对

$$P(B)=P(A)P(B/A\ )+P(\overline{A})P(B/\overline{A})=0.3\times 1+0.7\times\frac{1}{4}=0.475$$

$$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}B\ )}{P(B)}=\frac{P(\overline{A})P(B/\overline{A})}{P(B)}=\frac{0.7\times\frac{1}{4}}{0.475}=\frac{7}{19}$$

4．解：设A_i：分别表示乘火车、轮船、汽车、飞机（i=1，2，3，4）

B：迟到

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)++P(A_4)P(B/A_4)$$

$$=\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{5}\times 0=\frac{3}{20}$$

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B_1/A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{20}}=\frac{1}{2}$$

同理$P(A_2/B)=\frac{4}{9}$　　　　$P(A_3/B)=\frac{1}{18}$

5．解：A：甲袋中取红球；B：乙袋中取红球

$$P(AB\cup\overline{A}\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}\overline{B})=P(A)P(B)+P(\overline{A})P(\overline{B})$$

$$=\frac{4}{10}\times\frac{6}{16}+\frac{6}{10}\times\frac{10}{16}=\frac{21}{40}$$

习题三 一维随机变量及其分布

一、填空题

1、$\frac{19}{27}$　　2、2　　3、$\frac{1}{3}$　　4、0.8

5、$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0.2 & 1\le x<2\\ 0.5 & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$　6、$X\sim\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{bmatrix}$

二、单项选择题

1、B　　2、A

三、计算题

1、解：由已知 $X\sim B(15,0.2)$，其分布律为：$P(X=k)=C_{15}^{k}0.2^{k}0.8^{15-k}(k=0,1,2,...,15)$

至少有两人的概率：$P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=0.833$

2、解　设击中的概率为 p，则 X 的分布率为

X	1	2	3	4	5	6
p_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4p$	$(1-p)^5p+(1-p)^6$

3、解：X 的分布律为：

X	3	4	5
p_k	0.1	0.3	0.6

X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ 0.1, & 3\le x<4\\ 0.4, & 4\le x<5\\ 1, & x\ge 5\end{cases}$

4、X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{a}, & 0\le x<a\\ 1, & x\ge a\end{cases}$

习题四 一维随机变量及其分布

一、填空题

1、0　　2、0.5328；3　　3、$\frac{1}{3}f_X(\frac{y-1}{3})$

二、单项选择题

1、B　　　　2、B　　3、A

三、计算题

1、解：由已知，X 的密度函数为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6},-3\le x\le 3\\ 0,其它\end{cases}$

此二次方程的$\Delta=(4x)^2-4\cdot 4\cdot(x+2)=16(x^2-x-2)$

（1）当$\Delta\ge 0$时，有实根，即$(x^2-x-2)\ge 0\Rightarrow x\ge 2或x\le -1$

所以$P\{方程有实根\}=P\{X\ge 2或X\le -1\}=P\{X\ge 2\}+P\{X\le -1\}$

$$=\int_2^3\frac{1}{6}dx+\int_{-3}^{-1}\frac{1}{6}dx=\frac{1}{2}$$

（2）当$\Delta=0$时，有重根，即$(x^2-x-2)=0\Rightarrow x=2或x=-1$

所以$P\{方程有重根\}=P\{X=2或X=-1\}=P\{X=2\}+P\{X=-1\}=0$

（3）当$\Delta<0$时，无实根，$P\{方程有实根\}=1-P\{无实根\}=\frac{1}{2}$

2、解：设 X 为元件寿命，Y 为寿命不超过 150 小时的元件寿命。由已知：

$$P(X\le 150)=\int_{-\infty}^{150}f(x)dx=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}dx=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=2)=C_5^2(P(X\le 150))^2(P(X>150))^3=C_5^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3=\frac{80}{243}$$

3　0.3721　　　　0.7143

4　$d=7$

5、由$P\left\{2<X<4\right\}=0.3$，有$\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.8$，

$P\left\{X<0\right\}=1-\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.2$

6、解：由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，有：$\int_0^1 ax^b dx=1$，即$a=b+1$

又由$P(X>\frac{1}{2})=0.75$，有$\int_{\frac{1}{2}}^1 ax^b dx=\frac{3}{4}$，即$a-a2^{-(b+1)}=\frac{3}{4}(b+1)$

联立求解，得：$a=2,b=1$

7、解：$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{B}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} & -a<x\le a\\ 0 & 其它\end{cases}$，由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，有：

$\pi B=1$，即 $B=\dfrac{1}{\pi}$

又由 $F(x)$ 的右连续性，有 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=F(a)$，即 $A+\dfrac{\pi}{2}B=1$，可以解得：$A=\dfrac{1}{2}$

8、解：解：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dt=0, & x<0\\ \int_{0}^{x}tdt=\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ \int_{0}^{1}tdt+\int_{1}^{x}(2-t)dt=2x-\dfrac{x^2}{2}-2, & 1\le x<2\\ \int_{0}^{2}f(t)dt=1, & x\ge 2\end{cases},$$

$$即\ F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-2, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

（2）$P\{\dfrac{1}{2}\le X\le\dfrac{3}{2}\}=P\{\dfrac{1}{2}<X\le\dfrac{3}{2}\}=F(\dfrac{3}{2})-F(\dfrac{1}{2})=[2\cdot\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{2})^2-2]-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3}{4}$

9、解：

Y	-3	-1	5
P	$1/6$	$1/3$	$1/2$

10、解：由已知：$X\sim U(0,2)$，所以 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

即 $F_Y(y)=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

上式两端对 y 求导，得：$f_Y(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y})$

所以：$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}} & 0<y<4\\ 0 & 其它\end{cases}$，进而可以得到：$F_Y(y)=\begin{cases}1 & y\ge 4\\ \dfrac{\sqrt{y}}{2} & 0<y<4\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

复习题二

一、填空题

1、$\dfrac{9}{64}$　2、$1-\alpha-\beta$

3、$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}y^{-\frac{2}{3}} & 0\le y\le 8\\ 0 & 其它\end{cases}$

二、单项选择题

1、A　2、B　3、C　4、B　5、B

三、计算题

1、

X	0	1	2
P	$1/5$	$3/5$	$1/5$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.2 & 0\le x<1\\ 0.8 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

2、解：（1）

X	1	2	…	k	…
P	0.45	0.55×0.45	…	$0.55^{k-1}\times0.45$	…

（2）$P(X=2n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0.55^{2n-1}0.45=\dfrac{0.55\times0.45}{1-0.55^2}=\dfrac{11}{31}$

3、（1）$c=\dfrac{1}{\pi}$　(2)　$\dfrac{1}{3}$

4、（1）$A=\dfrac{1}{2},B=\dfrac{1}{\pi}$；（2）$\dfrac{1}{2}$；（3）$f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

5、$\sigma=13$，$P\{60\le X\le 84\}=\Phi(1.08)+\Phi(0.77)-1=0.6393$

6、解：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}$，由于$F(x)$为分布函数，故$0\le F(x)\le 1$，

于是（1）当$y<0$时，$F_Y(y)=0$；

（2）当$y\ge 1$时，$F_Y(y)=1$；

（3）当$0\le y<1$时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}$$（由于 $F(x)$ 严格单调增加）

$$=F(F^{-1}(y))=y$$

于是 $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ y & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$

上式两端对 y 求导，得： $f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$，即 $Y\sim U(0,1)$

习题五 多维随机变量及其分布

一、填空题

1、$e^{-1}-e^{-2}$　　2、$\frac{1}{2}$　　3、$\begin{cases}e^{-y} & 0\le x\le 1, y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$　　4、$\frac{2}{9}$，$\frac{1}{9}$

二、单项选择题

1、A　　2、D　　3、C

三、计算题

1、解：（1）$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$，$\therefore \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-2(x+y)}dxdy=1$，解得 A= 4

（2）$p_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

（3）$P(\xi<1,\eta<2)=\int_0^1\int_0^2 4e^{-2(x+y)}dxdy=(1-e^{-2})(1-e^{-4})$

（4）$P(\xi+\eta<1)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}4e^{-2(x+y)}dy=1-3e^{-2}$

2、解：（1）$A=0.1$；

（2）边缘分布律：

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

Y	0	1
P	0.5	0.5

（3）$\because P(X=0,Y=0)=0.1\ne P(X=0)P(Y=0)=0.15$

$\therefore X与Y不独立$

（4）

Z	0	1	2	3
P	0.1	0.5	0.3	0.1

3、X 的可能取值为 $0,1,2,3$，Y 的可能取值为 $1,3$，利用二项分布计算可得

$P\{X=0,Y=3\}=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$， $P\{X=1,Y=1\}=C_3^1\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{8}$

$P\{X=2,Y=1\}=C_3^2(\frac{1}{2})^2\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$， $P\{X=3,Y=3\}=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$

故联合分布律：

Y \ X	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

4、解：（1）联合分布律：

Y \ X	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

（2）$Y=0$ 时 X 的条件分布律：

$X=k$	0	1	2
$P\{X=k\mid Y=0\}$	1/4	1/2	1/4

5、由题设有 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$， $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，又 X 与 Y 相互独立，故

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 0<x<2,0<y<2 \\ 0 & 其它\end{cases}。$$

关于 k 方程 $k^2+Xk+Y=0$ 有实根的条件为 $X^2-4Y\geq 0$，故所求概率为 $P\{X^2-4Y\geq 0\}$。

$$P\{X^2-4Y\geq 0\}=\iint_{x^2-4y\geq 0} f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{4}}\frac{1}{4}dy=\frac{1}{6}$$

6、解：设 $Z=X+Y$，由已知：$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1 \\ 0 & 其它\end{cases}$

由卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$ 得：

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}[\arctan(z+1)-\arctan(z-1)] \quad z\in R$$

复习题三

一、填空题

1、 $a=\underline{\frac{1}{3}}$， $b=\underline{\frac{1}{5}}$，

（X,Y）的联合分布律

Y \ X	0	1	2
-2	0	4/15	8/15
-1	0	1/15	2/15
0	0	0	0

$Z=X+Y$ 的分布律

Z	-2	-1	0	1	2
P	0	4/15	9/15	2/15	0

2、$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 2x\\ 0 & 其它\end{cases}$，$\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{2x-x^2} & 0\le x\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$，$\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

3、$\lambda_1+\lambda_2$

二、单项选择题

1、A　　2、B　　3、B　　4、B

三、计算题

1、$P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(A|B)=P(B|A)=\dfrac{1}{2}$，则$\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{2}$，于是

$P(AB)=\dfrac{1}{8}$，$P(B)=\dfrac{1}{4}$。

而$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=\dfrac{5}{8}$

$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=\dfrac{1}{8}$

$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=\dfrac{1}{8}$

$P\{X=1,Y=1\}=\}P(AB)=\dfrac{1}{8}$

故（X,Y）的联合分布律为

Y \ X	0	1
0	5/8	1/8
1	1/8	1/8

2、(1）解：由联合密度，可求边缘密度：

$p_X(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}y & 0\le y\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$；

因为$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$，所以 X 与 Y 相互独立

（2）解：由联合密度，可求边缘密度：

$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2) & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$；

因为$p(x,y)\ne p_X(x)p_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立

3、解：(1)由联合分布函数得边缘分布函数：

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.5x} & x\ge 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases},\quad F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y} & y\ge 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

可见 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，所以 X、Y 独立

（2）要求：

$$P(X>0.1,Y>0.1)=F(+\infty,+\infty)-F(0.1,+\infty)-F(+\infty,0.1)+F(0.1,0.1)=e^{-0.1}$$

4、解：（1）$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，$\therefore \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}ke^{-3x-4y}dxdy=1$，解得 k= 12

（2）$P(0<X<1,0<Y<2)=\int_0^1 dx\int_0^2 f(x,y)dy=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$

5、解：由卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$，有

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z e^{-y}dy & 0<z<1\\ \int_{z-1}^z e^{-y}dy & z\ge 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\text{，所以 } f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z} & 0<z<1\\ (e-1)e^{-z} & z\ge 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

习题六　随机变量的数字特征

一．1、　a，$\dfrac{b}{n}$　　2、$n=16,p=0.8$　　3 、　$5\sigma^2$　　4、$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{\pi}$

二．单项选择题

1、C　　2、B

三．计算题

1、$EX=-\dfrac{1}{2}$　　$EX^2=\dfrac{7}{6}$　　$DX=\dfrac{11}{12}$　　$E(|X-1|)=\dfrac{3}{2}$

2、解（1）

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 3x^3dx=\left.\frac{3x^4}{4}\right|_0^1=\frac{3}{4}$$

$$E(X^2)=\frac{3}{5}$$

$$D(X)=\frac{3}{80}$$

（2）

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+(x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_1^2=1$$

$$E(X^2)=\frac{7}{6}$$

$$D(X)=\frac{1}{6}$$

3．解

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.3	0.2

所以

$$EX=-1\times 0.2+0\times 0.3+1\times 0.3+2\times 0.2=0.5$$

$$EX^2=(-1)^2\times 0.2+0\times 0.3+1\times 0.3+2^2\times 0.2=1.3$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=1.3-0.5^2=1.05$$

4、（1）分布函数

$$\begin{aligned}F(y)&=P(Y\le y)=P(Y\le y,X=1)+P(Y\le y,X=2)\\&=P(Y\le y/X=1)P(X=1)+P(Y\le y/X=2)P(X=2)\\&=\frac{1}{2}\left(P(Y\le y/X=1)+P(Y\le y/X=2)\right)\end{aligned}$$

当 $y<0$ 时，$F(y)=0$；

当 $0\le y<1$ 时，$F(y)=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\frac{y}{2}=\frac{3}{4}y$；

当 $1\le y<2$ 时，$F(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{y}{2}=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}$；

当 $y\ge 2$ 时，$F(y)=1$.

所以分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0 & ,y<0\\ \frac{3}{4}y & ,0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{y}{4}, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

（2）概率密度函数为 $f(y)=F'(y)=\begin{cases}\frac{3}{4},0<y<1\\ \frac{1}{4},1<y<2\\ 0,其它\end{cases}$，

$$E(Y)=\int_0^1 \frac{3}{4} y dy+\int_1^2 \frac{y}{4} dy=\frac{3}{4}.$$

5．解

$EX=0.2 \qquad E(XY)=-0.5$

6． $EX=0.8 \qquad E(XY)=0.5$

7． $EY=400$， $E(Y^2)=1.6\times10^6$， $D(Y)=1.44\times10^6$

8．证明　略

习题七　随机变量的数字特征

一．填空题

1、$DX+DY$　；　2、18　；

二．单项选择题

1、A　　2、A　　3、B

三．计算题

1、解 （1）

$X_2 \backslash X_1$	0	1	$P_{\cdot 1}$
0	0.1	0.8	0.9
1	0.1	0	0.1
$P_{1\cdot}$	0.2	0.8	

（2）$EX_1=0.8$， $EX_2=0.1$

$EX_1{}^2=0.8, DX_1=EX_1{}^2-(EX_1)^2=0.16, DX_2=0.09$

$EX_1X_2=0, \mathrm{cov}(X_1,X_2)=EX_1X_2-EX_1EX_2=-0.08$

所以，$\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=-\dfrac{2}{3}$

2．解：由于

$E(X)=E(Y)=\dfrac{5}{12},$

$E(X^2)=E(Y^2)=\dfrac{1}{4},$

$D(X)=D(Y)=\dfrac{11}{144},$

$E(XY)=\dfrac{1}{6}$

故 $Cov(X,Y)=-\dfrac{1}{144}$，$\rho_{XY}=-\dfrac{1}{11}$

3、由于 X，Y 的概率分布相同，故 $\boldsymbol{P(X=0)=\frac{1}{3},P(X=1)=\frac{2}{3}}$，

$\boldsymbol{P(Y=0)=\frac{1}{3},P(Y=1)=\frac{2}{3}}$，

显然 $\boldsymbol{EX=EY=\frac{2}{3}}$，$\boldsymbol{DX=DY=\frac{2}{9}}$

相关系数 $\boldsymbol{\rho_{XY}=\frac{1}{2}=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{E(XY)-\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}}}$，

所以 $\boldsymbol{E(XY)=\frac{5}{9}}$.

而 $\boldsymbol{E(XY)=1\times1\times P(X=1,Y=1)}$，所以 $\boldsymbol{P(X=1,Y=1)=\frac{5}{9}}$，从而得到 $\boldsymbol{(X,Y)}$ 的联合概率分布：

$\boldsymbol{P(X=1,Y=1)=\frac{5}{9}}$，$\boldsymbol{P(X=0,Y=1)=\frac{1}{9}}$，$\boldsymbol{P(X=1,Y=0)=\frac{1}{9}}$，$\boldsymbol{P(X=0,Y=0)=\frac{2}{9}}$

（2）$\boldsymbol{P(X+Y\le1)=1-P(X+Y>1)=1-P(X=1,Y=1)=\frac{4}{9}.}$

4．解 $P\{15<X<27\}\ge\dfrac{37}{72}$

5．$P\{|X+Y|\geq 6\}\leq\frac{1}{12}$

复习题四

一、填空题

1、$\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}$，$\frac{1}{36}$，$\frac{1}{2}$；　　2、$-0.2$，　2.8，　24.84，　11.04；

3、97；　　4、　5；　　5、 N（0，5）　　6、 0.3413

7、18.4；　　8、25.6；　　9、0.0228

二、1、A　2、B　3、D　4、D　5、A　6、C

三、

1、解：设一台设备的净获利为 Y，则其分布律为：

Y	100	-200
P	$P\{X>1\}$	$P\{X\leq 1\}$

可以计算：$P\{X>1\}=\int_{100}^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}dx=e^{-0.25}$

则 $P\{X\leq 1\}=1-P\{X>1\}=1-e^{-0.25}$

所以 $EY=100\times e^{-0.25}-200\times(1-e^{-0.25})=300\times e^{-0.25}-200$

2、解：$EY=E(2X)=\int_0^{+\infty}e^{-x}2xdx=2$

$EY=E(e^{-2X})=\int_0^{+\infty}e^{-x}e^{-2x}dx=\frac{1}{3}$

3、解：由已知：$\operatorname{cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)=4e$，

可得：$DX_1=D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\operatorname{cov}(X,Y)=4a^2+4b^2+8eab$

同理：$DX_2=4c^2+4d^2+8ecd$，而

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_1,X_2)&=E(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)\\&=acDX+(ad+bc)\operatorname{cov}(X,Y)+bdDY=4(ac+bd)+4e(ad+bc)\end{aligned}$$

所以：$\rho_{X_1X_2}=\frac{\operatorname{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1DX_2}}=\frac{(ac+bd)+e(ad+bc)}{\sqrt{(a^2+b^2+2eab)(c^2+d^2+2ecd)}}$

4、解：由已知边缘密度为：$f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\0 & \text{其它}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}1-y & 0\leq y<1\\1+y & -1<y<0\\0 & \text{其它}\end{cases}$

所以 $EX=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$，$EY=\int_0^1(1-y)ydy+\int_{-1}^0(1+y)ydy=0$

而$E(XY)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xydy=0$，所以$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=0$， $\rho_{XY}=0$

5、解：设每毫升血液中白细胞数为X，则由已知：$EX=7300$，$\sqrt{DX}=700$

要估计$P\{5200<X<9400\}$：

$P\{5200<X<9400\}=P\{-2100<X-7300<2100\}=P\{|X-7300|<2100\}$

由切比雪夫不等式，可得$P\{5200<X<9400\}=P\{|X-EX|<2100\}\geq 1-\dfrac{DX}{2100^2}=\dfrac{8}{9}$

即每毫升含白细胞数在5200~9400之间的概率大概为$\dfrac{8}{9}$。

6、 0

习 题 八

一、1、42 2、$a=\dfrac{1}{20},b=\dfrac{1}{100},n=2$

3、 0.025 4、 $c=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

二、C B D D AC

三、1、0.1314

2、（1）0.0057， （2）0.1

3、0.05

习 题 九

一、1、$\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$

2、$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

4、$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

二、1、D 2、C 3、C 4、A 5、D

三、1、最大似然估计值：$\hat{\theta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$， 是无偏估计

2、矩估计量 $\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$， 最大似然估计量 $-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

3、$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i,\theta)=8\theta^7(1-\theta)^5$

$$LnL(\theta)=3\ln 2+7Ln\theta+5\ln(1-\theta)$$

$$\frac{dLnL(\theta)}{d\theta}=\frac{7}{\theta}-\frac{5}{1-\theta}=0$$

$$\hat{\theta}=\frac{7}{12}$$

4、（1）（0.0829， 0.0839）

（2）$(2.8883\times10^{-8},\ 1.25\times10^{-6})$

5、（1524.47，1565.53）

习 题 十

一、1、$\frac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}\sim t(n-1)$ 2、$t\le -t_{\alpha}(n-1)$

3、$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，$t-$分布，$n-1$

二、B B A

三、

1、$H_0:\mu=\mu_0=500$，$H_1:\mu\ne\mu_0$，拒绝 H_0

4、(1) $H_0:\mu=\mu_0=70$，$H_1:\mu\ne\mu_0$，拒绝域 $|t|=0.2<2.0301$，

而 $|t|>t_{0.975}(36-1)=2.0301$， 于是接受 H_0

(2) $H_0:\sigma^2=16^2$；$H_1:\sigma^2\ne16^2$，拒绝域 $(53.203,\ +\infty)\cup(0,\ 20.569)$，

而 $\chi^2=30.7617$,于是接受 H_0

3、$\chi^2=9.585$ 双侧检验的临界值：$\chi^2_{0.975}(9)=2.7,\chi^2_{0.025}(9)=19.023$

答：接受 H_0

4、$H_0:\mu\le10$，$H_1:\mu>10$，拒绝域为 $t\ge1.7291$

由 $\overline{x}=10.2$，$s=0.5099$，得 $t=1.754>1.7291$，于是拒绝 H_0，即认为装配时间的均

值 μ 显著大于10。

复习题五

一、 1、 $\left[\dfrac{Q^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{Q^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

2、$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，接受

二、BADA

三、1、 98 箱

2、$n-1, \dfrac{2(n-1)}{n}, 2(n-1)$

3、(1)拒绝；(2)接受

4、(1)拒绝；(2)接受

自测题一

一、 单项选择题

BCDDA CBBCD

二、填空

1． $\dfrac{1}{18}$ 2．0 3． 1

4．0 5． 0.164

三、计算题

1、解：A、B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$

故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.2+0.4-0.2\times 0.4=0.52$

2、解：以 A 表示事件“取到次品”，

$B_i\ (i=1,2)$ 表示事件“取自第 i 箱”，

于是 $P(B_1)=P(B_2)=\dfrac{1}{2}$，$P(A/B_1)=\dfrac{2}{100}=\dfrac{1}{50}$，$P(A/B_2)=\dfrac{3}{50}$，

则 $P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{50}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{50}=\dfrac{1}{25}$.

3、解： (1) 设 y 的分布函数为 $F(y)$，则

$$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y, X\le 1\}+P\{Y\le y, 1<X<2\}+P\{Y\le y, X\ge 2\}$$

$=P\{2\le y,X\le 1\}+P\{X\le y,1<X<2\}+P\{1\le y,X\ge 2\}$

当 $y<1$时，$F(y)=0$，

当$1\le y<2$时，$F(y)=P\{X\le y,1<X<2\}+P\{X\ge 2\}$

$$\begin{aligned}&=P\{1<X\le y\}+P\{X\ge 2\}\\&=\int_1^y\frac{1}{9}x^2dx+\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx\\&=\frac{1}{27}(y^3-1)+\frac{1}{27}(3^3-2^3)\\&=\frac{1}{27}(y^3+18)\end{aligned}$$

当 $y\ge 2$时，$F(y)=P\{X\le 1\}+P\{1<X<2\}+P\{X\ge 2\}=1$

所以$F_Y(y)=\begin{cases}0\quad ,\quad y<1\\ \frac{1}{27}y^3+\frac{2}{3},1\le y<2\\ 1\quad ,\quad y\ge 2\end{cases}$

（2）$P(X\le Y)=1-P(X>Y)=1-P(y=1)=1-\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx=\frac{8}{27}$

4、解：（1）$\because 0.1+0.2+0.1+a+0.1+0.2=1$

$\therefore a=0.3$

（2）X、Y 的边缘分布律如下：

X	-1	0	1
P	0.4	0.3	0.3

Y	0	1
P	0.4	0.6

$\because P(X=-1,Y=0)=0.1\ne P(X=-1)P(Y=0)=0.4\times 0.4=0.16$

所以 X 与 Y 不独立

（3） 由 Y 的边缘分布可知，Y 服从参数 p=0.6 的两点 0-1 分布，

所以 E(Y)=p=0.6

四、解答题

1、解：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=2^5\theta^9(1-\theta)^{11}$

$LnL(\theta)=5Ln2+9Ln\theta+11Ln(1-\theta)$

$\frac{dLnL(\theta)}{d\theta}=\frac{9}{\theta}-\frac{11}{1-\theta}=0$ 解得 $\hat{\theta}=\frac{9}{20}$

2、解：假设 $H_0:\mu=\mu_0=15.6$

$H_1: \mu \neq \mu_0 = 15.6$

现$\alpha = 0.05$，$\sigma = 2.2$ ，$n = 36$，$\bar{x} = 14.5$，

故拒绝域为：

$$|z| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq U_{\frac{\alpha}{2}} = U_{0.025} = 1.96,$$

而$|z| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{14.5 - 15.6}{2.2/\sqrt{36}}\right| = 3 > 1.96.$

于是拒绝H_0，即认为绳索的拉力有显著变化.

自测题二

一、单项选择题

DDDCD CBDDB

二．填空：

1． $\overline{A_1 A_2 A_3}$ 2. $\frac{8}{15}$

3． P(A|B)= $\frac{3}{5}$ ，P(B|A)= 1 4、$\frac{3}{4}$

5．1 6．5

三、计算题

1、解：∵A 与 B 相互独立

$$\therefore P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= 0.8 + 0.6 - 0.8 \times 0.6 = 0.92$$

又$P(\bar{A}|A+B) = \frac{P[\bar{A}(A+B)]}{P(A+B)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(A+B)} = \frac{P(\bar{A})P(B)}{P(A+B)} = 0.13$

2、解：$P(X \geq 5.3) = 1 - \Phi\left(\frac{5.3-2}{2}\right)$

$$= 1 - \Phi(1.65) = 1 - 0.95 = 0.05$$

3、解：设A=“眼镜落地三次被打破”，A_i=“眼镜第i次落地被打破”$(i = 1, 2, 3)$.则

$A = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$，且$A_1, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$互斥.故

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

$$=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=\frac{3}{10}+\left(1-\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{4}{10}+\left(1-\frac{3}{10}\right)\left(1-\frac{4}{10}\right)\frac{9}{10}$$

$$=0.958$$

4、解：由已知有 $X\sim U(0,4)$

则：$E(X)=\dfrac{a+b}{2}=2$

$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{4}{3}$

5、解：显然 $y=x^2+1$ 不是单调函数，所以先计算 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2+1\le y)=P(X^2\le y-1)$$

当 $y\le 1$ 时，$P(X^2\le y-1)=0$.

当 $y>1$ 时，$P(X^2\le y-1)=P(-\sqrt{y-1}\le X\le\sqrt{y-1})$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f_X(x)dx, & 1<y\le 2\\ \int_{-1}^{1} f_X(x)dx, & y>2\end{cases}=\begin{cases}2\int_0^{\sqrt{y-1}}(1-x)dx, & 1<y\le 2\\ 2\int_0^1(1-x)dx, & y>2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\sqrt{y-1}-(y-1), & 1<y\le 2\\ 1, & y>2\end{cases}$$

所以 $$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1\\ 2\sqrt{y-1}-(y-1), & 1<y\le 2\\ 1, & y>2\end{cases}$$

于是 $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}-1, & 1<y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

6、解： (1) 由联合密度，可求边缘密度：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}4x(1-x^2) & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

$$f_Y(y)==\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}4y^3 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases};$$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立

（2）$P\{X<1,Y<1\} \;=\iint\limits_{\substack{x<1\\y<1}} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 8xydy=1$

四、解答题

1、解：$\because E\mu_1=E(\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2)=\mu$

同理：$E\mu_2=E\mu_3=\mu$

$\therefore \mu_1,\mu_2,\mu_3$ 为参数 μ 的无偏估计量

又 $\because D\mu_1=D(\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2)=\frac{4}{9}DX_1+\frac{1}{9}DX_2=\frac{5}{9}\sigma^2$

同理：$D\mu_2=\frac{10}{16}\sigma^2$，$D\mu_3=\frac{2}{4}\sigma^2$

且 $D\mu_3<D\mu_1<D\mu_2$

$\therefore$ μ_3 较优

2、解：当 $a=1$ 时，X 的概率密度为 $f\left(x,\beta\right)=\begin{cases}\frac{\beta}{x^{\beta+1}},x>1\\0, \qquad x\leq 1\end{cases}$.

（1）由于 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x,\beta\right)dx=\int_1^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1}$，令 $\frac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，解得

$\beta=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

所以，参数 β 的矩估计量为 $\beta=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

（2）对于总体 X 的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，似然函数为

$$L\left(\beta\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\alpha\right)=\begin{cases}\frac{\beta^n}{\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{\beta+1}}, & x_i>1\left(i=1,2,\cdots,n\right)\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $x_i>1\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 时，$L\left(\beta\right)>0$，去取对数得

$\ln L\left(\beta\right)=n\ln\beta-\left(\beta+1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，对 β 求导数得

$$\frac{d\left[\ln L(\beta)\right]}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$，令$\frac{d\left[\ln L(\beta)\right]}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得

$$\beta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}.$$

于是β的最大似然估计量为$\beta=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

（3）当$\beta=2$时，X的概率密度为$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3},x>\alpha\\0,\quad x\le\alpha\end{cases}$，对于总体$X$的样本值

$x_1,x_2,\cdots,x_n$，似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}, & x_i>\alpha(i=1,2,\cdots,n)\\0, & \text{其他}\end{cases}$$，当

$x_i>\alpha(i=1,2,\cdots,n)$时，$\alpha$越大，$L(\alpha)$越大，即$\alpha$的最大似然估计值为

$\alpha=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，于是，$\alpha$的最大似然估计量为

$\alpha=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

3、解：设 H_0：$\mu=2050$　H_1：$\mu\ne2050$

$$\because\ X\sim N(\mu,\sigma^2)\quad\therefore\text{取}\ T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\text{而}\ |t|=\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{1960-2050}{120/4}\right|=3>t_{0.025}(15)=2.131$$

则拒绝H_0，接受H_1，　即不能认为该厂生产的零件的平均长度是2050mm　。

自测题三

一、选择题

1．B　2．B　3．C　4．A　5．D　6．C

二、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. $\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{B}\bar{C}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $N(0,15)$ 4. 2 5. $\frac{1}{6}$ 6. $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

三、计算题 (共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分)

1．解： (1) X 的分布律为

X	1	2	3
P_k	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2) $F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{2}{3} & 1\le x<2\\ \frac{8}{9} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$

(3) $E(X)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{9}=\frac{13}{9}$

$E(X^2)=1\times\frac{2}{3}+4\times\frac{2}{9}+9\times\frac{1}{9}=\frac{23}{9}$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{23}{9}-(\frac{13}{9})^2=\frac{38}{81}$

2、解:（1）由 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ 则 $\int_0^1 kxdx=k\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{k}{2}=1$ 故 $k=2$

（2）由于 $Y=-2X+3$，则 $y=-2x+3$，于是 $x=-\frac{y-3}{2}$， $x'=-\frac{1}{2}$

所以 $f_Y(y)=|x'|\,f_X(-\frac{y-3}{2})=\frac{1}{2}\,f_X(-\frac{y-3}{2})=\begin{cases}-\frac{y-3}{2} & 1\le y\le 3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

3、解：因为 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则

$$P\left\{X\le\frac{1}{4}\right\}=\int_0^{\frac{1}{4}}dx=\frac{1}{4}$$

故 $Y\sim b(3,\frac{1}{4})$

于是 $P\{Y=1\}=C_3^1 \bullet \frac{1}{4} \bullet (\frac{3}{4})^2=\frac{27}{64}$

4、解：（1）边缘分布律为

X	-1	2
p_k	0.6	0.4

Y	-1	0	1
p_k	0.3	0.3	0.4

(2) $Z=X+Y$ 的分布律

Z	-2	-1	0	1	2	3
p_k	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1

(3) $E(X)=-1\times 0.6+2\times 0.4=0.2$……………（5 分）

$E(Y)=-1\times 0.3+0\times 0.3+1\times 0.4=0.1$……………（6 分）

$E(XY)=-1\times(-1)\times 0.1+(-1)\times 1\times 0.3+(-1)\times 2\times 0.2+1\times 2\times 0.1=-0.4$

故 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.4-0.2\times 0.1=-0.42$

5、因为随机变量 X 与 Y 分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，所以 X 与 Y 概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \quad f_Y(y)=\begin{cases} 4e^{-4y} & y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

由于随机变量 X 与 Y 相互独立，故 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 4e^{-x-4y} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则 $P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^y e^{-x-4y}dx=\int_0^{+\infty}e^{-5y}dy=\frac{1}{5}$

四、应用题 (共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分)

1、解：设 A 表示投入基金、B 表示购买股票，则

$$P(A)=0.57, P(B)=0.38, P(AB)=0.19$$

（1） 已知他已经投入基金，再购买股票的概率为

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.19}{0.57}=\frac{1}{3}$$

（2）已知他已经购买股票，再投入基金的概率为

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.19}{0.38}=\frac{1}{2}$$

2、解： $P(70<X<90)=P(0<\frac{X-70}{\sigma}<\frac{20}{\sigma})=\Phi(\frac{20}{\sigma})-0.5=0.23$

$\Phi(\frac{20}{\sigma})=0.73$

$P(X>90)=P(\frac{X-70}{\sigma}>\frac{20}{\sigma})=1-\Phi(\frac{20}{\sigma})=0.27$

3、设某商店在季节内销售某商品的销售量 X（kg）服从区间 $(10,20)$ 内的均匀分布，所得利润 Y（以万元计)为 $Y=3X^2+100$，求该商店获得利润 Y 的数学期望.

解：X 服从区间 $(10,20)$，则 $E(X)=\frac{10+20}{2}=15$，$D(X)=\frac{(20-10)^2}{12}=\frac{25}{3}$

则 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\frac{25}{3}+225$

故 $E(Y)=E(3X^2+100)=3E(X^2)+100=800$

或

X 服从区间 $(10,20)$，则 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{10} & 10<x<20\\ 0 & 其它\end{cases}$，

于是

$$E(Y)=E(3X^2+100)=\int_{-\infty}^{+\infty}(3x^2+100)f_X(x)dx=\int_{10}^{20}\frac{3x^2+100}{10}dx=800$$

4、解：X 的概率密度为 $f(x;\theta)=F'(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, x>0\\ 0\quad，其它\end{cases}$

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x;\theta)==\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}, x_i>0\\ 0\quad，其它\end{cases}$

当 $x_i>0(i=1,\cdots,n)$ 时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}$，

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[\ln 2x_i-\ln\theta-\frac{x_i^2}{\theta}]$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}[-\frac{1}{\theta}+\frac{x_i^{\ 2}}{\theta^2}]=\frac{1}{\theta^2}[\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-n\theta]=0$$

解得 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}$

所以，θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}$

5、解：假设 $H_0:\mu=\mu_0=72$ $H_1:\mu\neq\mu_0$

由于方差$\sigma^2=24$，用μ检验，检验统计量

$$U=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

拒绝域为： $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$

计算统计值$\bar{x}=70$， 则 $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{70-72}{\sqrt{24}/\sqrt{6}}\right|=1<u_{0.025}=1.96$

所以接受H_0，手机待机时间与广告无显著差异。