

练习册 p11

二 4 选 A

解析: $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 因为

$$f(-x) = \lg(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \lg\left(\frac{-1}{-x - \sqrt{x^2 + 1}}\right) = -\lg(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x), \text{ 故}$$

$f(x), x \in (-\infty, +\infty)$, 为奇函数

p12

三

2 定义域为 $[-1, 3)$

解析: 定义域即使函数有意义的自变量取值集合。该函数有意义的自变量 x 取值满足

$$\begin{cases} 3-x > 0 \\ \left| \frac{3-2x}{5} \right| \leq 1 \end{cases}, \text{ 解得 } x \text{ 的范围为 } -1 \leq x < 3.$$

3 定义域为 $[-\frac{1}{2}, 0]$

解析: 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 故 $f(\frac{1}{x+1})$ 的定义域可由 $1 \leq \frac{1}{x+1} \leq 2$ 得到。

五

因 $f(x) \leq g(x), x \in R$, 且 $f(x), x \in R$ 单增, 故 $f[f(x)] \leq f[g(x)], f[g(x)] \leq g[g(x)],$

从而 $f[f(x)] \leq g[g(x)]$ 。

p13

一 2, \times , 如 $x_n = (-1)^n, n \geq 1$, 发散但有界

3, \times , 如 $x_n = (-1)^n, y_n = -(-1)^n, n \geq 1$, 均发散但 $x_n + y_n = 0, n \geq 1$ 收敛

5 \checkmark

解析: 注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$,

一般 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ (由 $\varepsilon - N$ 定义易得); 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|, (a \neq 0)$ 推不出

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (如 $x_n = (-1)^n, n \geq 1, a = -1$) .

6 \times

解析: 极限存在必是唯一一个确定的常数。

二 4, 选 C,

解析: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 自然数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 中,

(1) N 是 ε 的表达式. 给定一个 ε , 可唯一确定 N 的最大值, 比这个最大值大的任意正整数均可作为 N 的值;

(2) 一般情况下, ε 越小, N 的值越大, 但有时 N 值不随 ε 变化, 如对 $x_n = \text{常数 } C$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \text{ 对任意自然数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 都有 } |x_n - C| < \varepsilon$$

p14

三 (2) 解析: $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{9n+3} \leq \frac{1}{9n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, 只须 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$. 从而证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$.

注 若 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\left| \frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{9n+3} < \varepsilon$, 得 $n > \frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}$, 从而取 $N = \left[\frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3} \right]$ 也对,

或 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\left| \frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{9n+3} < \frac{1}{9n} < \varepsilon$, 得 $n > \frac{1}{9\varepsilon}$, 从而取 $N = \left[\frac{1}{9\varepsilon} \right]$ 也对.

(3) 解析: $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, 只须 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$. 从而证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

(4) 解析: $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n(n+1) - n^2}{2n^2} \right| = \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, 只须 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$. 从而证明了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

注 若 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\left| \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n(n+1) - n^2}{2n^2} \right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon$

得 $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, 从而取 $N = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$ 也对。

四 证 (a) 因 $\{y_n\}$ 有界, 所以 $\exists M > 0$, 使得 $|y_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$

(b) 又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ (为某自然数), 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n| < \varepsilon$ 。

(c) 于是当 $n > N$ 时, 有 $|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| < M\varepsilon$ 。这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ 。

p15

一

2 \times , 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

3 \times

解析: 举个反例: $f(x) = |x| > 0, x \in (-1, 1), x \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A = 0$ 即可说明说法不对。

二

1 选 C

解析: 符号 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ 表示自变量 x 无限接近 x_0 时, 函数值 $f(x)$ 无限接近 1, 至于 $f(x)$

能否在 x_0 取到函数值并不关心, 可能取得到也可能取不到。另外, 即使取得到, 函数值

$f(x_0)$ 也不一定等于 1。

5, 选 D

解析: 由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$, 由函数极限的局部有界性, $\exists M, \delta > 0$, 当

$0 < |x - 0| < \delta$ 时, 即 $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$

即存在正数 δ , $f(x)$ 在 $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ 有界

p16

三 (3) (这种较复杂的极限恒等式证明可以不掌握)

解析: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

在该题中, 对 $\forall \varepsilon > 0, |f(x) - A| = \left| \frac{2x-1}{x+1} - 2 \right| = \frac{3}{|x+1|}$, 注意到我们要证明的是 $x \rightarrow \infty$ 时

函数值的趋向情况, 即 $|x|$ 很大时函数值的趋向, 故 $|x+1| \geq |x| - 1 > 0$ (这里 $|x+1| \geq |x| - 1$

恒成立), 从而要使 $|f(x)-A|=\frac{3}{|x+1|}\leq\frac{3}{|x|-1}<\varepsilon$, 只须 $|x|>\frac{3}{\varepsilon}+1$, 对比上述极限恒等式定义,

于是取 $X=\frac{3}{\varepsilon}+1$ 即可。

证 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{3}{\varepsilon} + 1 > 0$, 当 $|x| > X$, 有 $\left|\frac{2x-1}{x+1}-2\right| < \varepsilon$ 。这就证明了结论。

(4) 解析: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x > X$, 有 $|f(x)-A| < \varepsilon$ 。

在该题中, 注意到我们要证明的是 $x \rightarrow +\infty$ 时 函数值的趋向情况, 故 $x > 0$ 。

对 $\forall \varepsilon > 0$, 要使

$$|f(x)-A| = \left| x(\sqrt{x^2-4}-x) - (-2) \right| \underset{\text{分子有理化}}{=} \left| \frac{-4x}{x+\sqrt{x^2-4}} + 2 \right| \overset{\text{通分化简}}{=} \frac{8}{(x+\sqrt{x^2-4})^2} < \frac{8}{x^2} < \varepsilon,$$

只须 $x > \sqrt{\frac{8}{\varepsilon}}$, 对比上述极限恒等式定义, 于是取 $X = \sqrt{\frac{8}{\varepsilon}}$ 即可。

证 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \sqrt{\frac{8}{\varepsilon}} > 0$ 当 $x > X$, 有 $|x(\sqrt{x^2-4}-x) - (-2)| < \varepsilon$ 。这就证明了结论。

四

(1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x - 1 = 2$, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 3x - 1 = 5$$

p17

—

6 ×

解析: 无穷大是极限为 $-\infty, +\infty, \infty$ 的函数或数列, 不是很大的数。举个反例, $x \rightarrow +\infty$ 时,

$f(x) = x, g(x) = -x$ 极限分别为 $+\infty, -\infty$, 从而 $f(x), g(x)$ 都是无穷大, 但

$f(x) + g(x) = 0$ 是无穷小, 从而无穷大之和不一定是无穷大。注意, 常数 0 是无穷小。

10 ×, 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

11 √, 因为由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$,

由极限的四则运算法则知 $0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

12 ×, 解析:

设 $f(x) = x, g(x) = \sin \frac{1}{x}, x_0 = 0$,

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在

二

选择题 3 选 B

解析: 举特殊例子用排除法

对 $f(x) = |x| > \varphi(x) = 0, x \neq 0, a = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A = 0, \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B = 0$, 故 $A = B = 0$, 所以排除 A, C.

对 $f(x) = |x| > \varphi(x) = -1, a = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A = 0, \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B = -1$, 故排除 D.

综上, 选 B.

选择题 4 选 D

解析: 举特殊例子用排除法

取 $a_n = 0, b_n = (-1)^n$, 显然, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (存在), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ (存在),

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ (存在), $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n + b_n| = 1$ (存在), 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 不存在; 故只能选 D

选择题 5 选 D

解析: 举特殊例子用排除法

对选项 A, 取 $a_n = n$, 显然, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ (存在), 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (不存在);

对选项 B, 取 $a_n = \frac{1}{n}$, 显然, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = 0$ (存在), 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \neq \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{A}{A};$$

对选项 C, 注意对比正确结论: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ (常数), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = A^B$

可知选项 C 不能选; 故只能选 D

P19

(8), 注意到

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

(9) 解析: 注意 $1-x^n = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) \stackrel{\text{通分}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x-2}{1+x+x^2} = -1.$$

(11) 解析: 因 $x \rightarrow +\infty$ 时, $e^{-x} \rightarrow 0, |\sin x| \leq 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x = 0$.

(13) 解析: 对所求极限的函数进行分子有理化, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = -1$$

故原极限不存在。

(14) $x \rightarrow +\infty$ 时, $x > 0$, 且 x 是无穷大, $\frac{1}{x}$ 是无穷小, 故对求极限的函数分子分母都除

$$\text{以 } \sqrt{x} \text{ 得 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

P20

四 解析:

由已知, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2} = 2$, 且分母极限 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-x-2) = 0$, 故由极限的四则运算法则

$$\begin{aligned} \text{得 } 0 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2-x-2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2} (x^2-x-2) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax+b) \\ &= 4+2a+b \end{aligned} \quad (1)$$

将 (1) 代入 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2} = 2$ 得

$$2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax-2a-4}{x^2-x-2} \stackrel{\text{分解因式}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)+a(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2+a}{x+1} = \frac{4+a}{3} \quad (2)$$

联立 (1) (2) 解得 $a=2, b=-8$.

五 解析:

对求极限的函数通分化简得

$$1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1 - (ax + b)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^3 - bx^2 - ax - b + 1}{x^2 + 1},$$

注意到这个极限等于 x 的最高次系数比, 当 $(1-a) \neq 0$ 时, 此极限 $= \infty$, 与极限为 1 矛盾!,

$$\text{从而得到 } 1-a=0, \text{ 于是上述极限变为 } 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-bx^2 - ax - b + 1}{x^2 + 1} = -b, \text{ 解得 } b=-1.$$

六, 要求理解该结论, 具体的严格证明较复杂, 不要求掌握!

P21

一 7 画 \times

解析: 注意到 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x$, $1-x$ 极限都不是 0, 故均不是无穷小, 也就谈不上是不是等价无穷小。

二

$$3, \text{ 选 A. 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+100} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100} = e \cdot 1 = e;$$

$$4, \text{ 选 B, 因 } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$5, \text{ 选 B, 因 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2};$$

$$6, \text{ 已知 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{ax^2+bx+c} = 0, \text{ 又注意到 } a \neq 0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{ax^2+bx+c} = \frac{0}{a} = 0, \text{ 故选 C;}$$

$$7, \text{ 选 A, 因 } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x = 1, \text{ 由极限的四则运算法则得}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x = 0 - 1 = -1$$

P22-23

解析: 注意重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + a(x))^{b(x)} = e$, 其中 $a(x)b(x) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} b(x) = -\infty, +\infty, \infty$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + (-2x))^{-\frac{1}{2x}} \right]^{-2x(\frac{1}{x}+1)} = e^{-2}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{2a}} \right]^{\frac{2a}{x-a} \cdot x} = e^{2a}.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x^2})^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(1 + (-\frac{1}{x^2}))^{-x^2} \right]^{\frac{1}{x^2} \cdot 3x} = e^{-0} = 1.$$

$$(9) \text{ 因 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3 \sin x)^{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + (-3 \sin x))^{\frac{1}{-3 \sin x}} \right]^{-3 \sin x \cdot 2 \cos x} = e^{-0} = 1.$$

(11) 注意到 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin^2 x \sim x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 且商求极限, 分子分母均可用等价无穷小替换其值不变, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

(12) 注意到 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin 3x}{3x} \rightarrow 1, x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0, 1 + \cos x \rightarrow 2$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x)x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \frac{\sin 3x}{3x} + \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \right) = \frac{3}{2}.$$

P26

四 证 即证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}(\cos x - \cos 2x)}{x^2} = 1$ 。

法一 注意到 $\cos x - \cos 2x = -2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{-x}{2}$, 且 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin \frac{3x}{2} \sim \frac{3x}{2}, \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}(\cos x - \cos 2x)}{x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{x^2} = 1.$$

法二 注意到 $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, 且 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}(\cos x - \cos 2x)}{x^2} &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 2 \cos^2 x + 1}{x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cos x + 1)(1 - \cos x)}{x^2} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cos x + 1) \frac{1}{2} x^2}{x^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \end{aligned}$$

法三 注意到 $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, 且 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}(\cos x - \cos 2x)}{x^2} &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 2\sin^2 x - 1}{x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sin^2 x}{x^2} - \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1\end{aligned}$$

五 解析:

令 $t = x - 1$, 则由已知 $x \rightarrow 1, \ln x \sim A(x-1)^n$ 得到 $t \rightarrow 0, \ln(1+t) \sim At^n$, 即

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{At^n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{At^n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{At^{n-1}} \quad (\text{这里用到 } t \rightarrow 0 \text{ 时, } \ln(1+t) \sim t), \text{ 从而分母极限}$$

也为 1, 即 $1 = \lim_{t \rightarrow 0} At^{n-1}$, 如 n 取大于 1 的自然数, 注意到 A 是常数, 则这个等式不成立,

故 $n=1$, 从而 $A=1$.

六 解析

1 证明数列收敛

(1) 先证数列递减 (数学归纳法)

$$x_1 = 6 > x_2 = \sqrt{12}, \text{ 假设 } x_k > x_{k+1}, k \geq 1, \text{ 则由已知 } x_{k+1} = \sqrt{x_k + 6} > \sqrt{x_{k+1} + 6} = x_{k+2},$$

故 $x_n > x_{n+1}, n \geq 1$

(2) 再证数列有下界 (数学归纳法)

$x_1 = 6 > 0$, 假设 $x_k > 0, k \geq 1$, 则由已知 $x_{k+1} = \sqrt{x_k + 6} > 0$, 故 $x_n > 0, n \geq 1$, 即数列有下界, 数 0 就是它的一个下界

于是由单调有界原理知, 数列极限存在。设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则由于 $x_n > 0, n \geq 1$, 故 $a \geq 0$ 。

2 下求出 a

在已知条件 $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ 两边让 $n \rightarrow \infty$, 得 $a = \sqrt{a + 6}$, 解得 $a = 3$ 或 -2 (舍)。即

此数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ 。

*六 解析

1 证明数列收敛

(1) 由已知 $x_n > 0, n \geq 1$. 即数列有下界, 数 0 就是它的一个下界;

(2) 因 $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}, n \geq 2$, 所以 $\frac{1}{x_n^2} \leq \frac{1}{2}, n \geq 2$, 于是

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{x_n^2}) \leq 1, n \geq 2, \text{ 即数列 } x_n, n \geq 2 \text{ 递减};$$

于是由单调有界原理知, 数列 $x_n, n \geq 2$ 的极限存在。

2 下求出 a

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则由于 $x_n > 0, n \geq 2$, 故 $a \geq 0$ 。

在已知条件 $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}), n \geq 2$ 两边让 $n \rightarrow \infty$, 得 $2a = a + \frac{2}{a}$, 解得 $a = \sqrt{2}$ 或

$-\sqrt{2}$ (舍)。即此数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$ 。