级数收敛定义和 5 条性质

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛定义为其部分和数列 $S_n, n \geq 1$ 极限存在，其极限值即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和

级数性质 1：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 乘以一个非零常数得到的新级数敛散性不发生改变；

级数性质 2：两个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的通项相加减得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 仍收敛，其和为两级数的和相加或相减；一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的通项相加减得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 一定发散；

级数性质 3：去掉、增加或改变一个级数的前有限项的值，得到的新级数敛散性不发生改变，即级数的前有限项不影响级数的敛散性；

级数性质 4：收敛级数的项不交换顺序，任意对项加括号得到的新级数仍收敛，且其和不变；但一个级数的项加括号后得到的新级数收敛，原来的级数可能收敛可能发散；一个级数加括号后得到的新级数发散，则原级数一定发散；

级数性质 5：收敛级数的通项极限为 0，其逆否命题“如一个级数的通项极限不为 0 则该级数一定发散”也成立，常用来证明级数发散

练习册 p71 一 2（╳）

解析：因为一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的通项相加减得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 一定发散；该故说法错误。

练习册 p71 一 3（∨）

解析：由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，由性质 5 知 $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$，从而 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{u_n} = \infty \neq 0$，由性质 5 的逆否命题知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 发散

练习册 p71 一 4（╳）

解析：因为一个级数的项加括号后得到的新级数收敛，原来的级数可能收敛可能发散故该说法错误。

练习册 p71 二 1 选 D

解析：一个级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项极限$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，该级数可能收敛可能发散，如$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$通项极限为 0 但前一个收敛，后一个发散

练习册 p71 二 2 选 B

解析：当$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，A 、C$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm 10)$ 均发散，因一个收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和一个发散级数$\sum_{n=1}^{\infty} 10$ 的通项相加减得到的新级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm 10)$ 一定发散；

B $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+10} = u_{11} + u_{12} + u_{13} + \cdots$ 是收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 去掉前面 10 项后得到的新级数，由性质 3 知$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+10}$ 仍收敛；D $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 可能收敛可能发散，如$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 均收敛，但其通项加绝对值后得到的新级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 前者发散后者收敛。

练习册 p71 二 3 选 A

解析：A 的级数是收敛的等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 和收敛的交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 的通项相加得到的新级数，由性质 2 知新级数收敛；

B 是正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$，注意到$n \to \infty$时，$\ln(1+\frac{1}{n})$ 与$\frac{1}{n}$ 是等价无穷小，故

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0,+\infty)$，而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，故由正项级数比较判别法的极限形式得正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ 发散；

C 是收敛的等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 和发散的等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ 的通项相减得到的新级数，由性质 2 知新级数发散；

D 是正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$，因其通项极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$，由性质 5 的逆否命题知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$发散。

练习册 p72 四 1

解析：此级数=$\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots)$即调和级数乘以非零常数$\frac{1}{3}$，由调和级数的发散性和性质 1 知此级数发散；

练习册 p72 四 2

解析：此级数收敛的等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$和发散的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n}$（即调和级数乘以非零常数 8 后得到的级数）的通项相加后得到的新级数，由性质 2 知此级数发散；

练习册 p72 四 5

解析：注意到$n\to\infty$时，$\ln(1+\frac{1}{n})$与$\frac{1}{n}$是等价无穷小，故该级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的通项极限

$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=1\neq 0$，由性质 5 的逆否命题知$\sum_{呢}n\ln(1+\frac{1}{n})$发散。

正项级数收敛发散判别法（1.部分和数列有界；2.比较判别法及其极限形式；3 比值判别法）

练习册 p73 一 3（∨）

证明：设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$的部分和数列分别为S_n，σ_n，则

$S_n=u_1+\cdots+u_n$，$\sigma_n=u_1^2+\cdots+u_n^2$，因$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，故$S_n$有界，即存在正常数$M>0$，使得$S_n\leq M$，又$\sigma_n=u_1^2+\cdots+u_n^2\leq(u_1+\cdots+u_n)^2=S_n^2\leq M^2$，即$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$的部分和数列$\sigma_n$有界，故正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛。

练习册 p73 二 1

解：注意到 p 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当$p>1$时收敛，现在已知特殊 p 级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^{1+p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-1-p}}$收敛，故$-1-p>1$即$p<-2$。

练习册 p73 三 1

解：因$\frac{1+n^2}{1+n^3}>\frac{1+n^2}{n+n^3}=\frac{1}{n}$，而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由正项级数的比较判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{1+n^3}$发散；

练习册 p73 三 3

解：因$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^3+n+1}}}{\frac{\pi}{\sqrt{n^3+n+1}}}=1\in(0,+\infty)$，故由比较判别法的极限形式知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^3+n+1}}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{n^3+n+1}}$同时收敛同时发散，而又由于$\frac{\pi}{\sqrt{n^3+n+1}}<\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}=\frac{\pi}{n^{\frac{3}{2}}}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛（收敛的 p 级数），由正项级数的比较判别法知，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{n^3+n+1}}$收敛， 从而得到正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^3+n+1}}$收敛；同理可得正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^3+n+1}}$收敛

练习册 p73 三 4

解：对正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n},a>0$

（1）当$0<a<1$时，因通项极限$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq 0,$由教材 253 页性质 5 的逆否命题知，此时级数发散；

（2）当$a=1$时，因原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$发散（理由同（1））；

（3）当$a>1$时， 由通项$\frac{1}{1+a^n}\le\frac{1}{a^n}=(\frac{1}{a})^n$，而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$收敛（收敛的等比级数），故由正项级数的比较判别法知此时正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛；

练习册 p73 四 1 （当正项级数通项中含阶乘或连乘积时，比值判别法较简单）

2 解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\Big/\frac{n^2}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^2=\frac{1}{3}<1$，由比值判别法知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$收敛

3 解：注意到$n\to\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}\Big/\frac{\pi}{2^{n+1}}=1$，即$n\to\infty$时，$\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$与$\frac{\pi}{2^{n+2}}$是等价无穷小，故由等价无穷小替换求极限可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}\Big/n\tan\frac{\pi}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}\Big/\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n+2}}\Big/\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}<1,$$

由比值判别法知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$收敛。

练习册 p73 六

分析：主要用到教材 253 页性质 5，只需证明正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$收敛。

证明：对正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$，因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{2^n n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1,$$

故由比值判别法知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$收敛，从而由教材 253 页性质 5 知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=0$。

交错级数、绝对收敛和条件收敛

练习册 p75 一 3 选 C

解：注意对一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。（2012-2013（2）期末考试利用这个结论证明级数发散的一个题 6 分！）

证明：当$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$时，则由数列极限的保号性知，存在某自然数$N$，当$n>N$时，有$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$，从而有$|u_{n+1}|>|u_n|>\cdots>|u_{N+1}|\geq 0$，于是当$n\to\infty$时，$|u_n|$距离 0 越来越远，即$\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$，从而$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，有教材 253 页性质 5 的逆否命题知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

练习册 p75 一 4

解：对交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n-1}n!}{n^n}$，为了研究其是绝对收敛、条件收敛还是发散，先考虑通项加绝对值的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}n!}{n^n}$，按上题证明的结论，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{4^{n-1}n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)}{(n+1)}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)}{(n+1)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{4}{e}>1$$，故知

原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n-1}n!}{n^n}$发散。

练习册 p75 二 1

解：为了研究$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3^n}{2^n}$是绝对收敛、条件收敛还是发散，先考虑通项加绝对值的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin 3^n}{2^n}\right|$为正项级数，因其通项$\left|\frac{\sin 3^n}{2^n}\right|\leq\frac{1}{2^n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$为公比绝对值小于 1 的等比级数，收敛，按正项级数的比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin 3^n}{2^n}\right|$收敛，由绝对收敛定义知原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3^n}{2^n}$绝对收敛。

练习册 p75 二 4

解：为了研究$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$是绝对收敛、条件收敛还是发散，先考虑通项加绝对值的级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$为正项级数，因

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\Big/\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\dfrac{1}{4}<1$，按正项级数的比值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$收敛，由绝对收敛定义知原级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$绝对收敛。

练习册 p75 二 2

解：为了研究$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{2n}$是绝对收敛、条件收敛还是发散，先考虑通项加绝对值的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2n}$为正项级数，因通项极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}\neq 0$，有教材 253 页性质 5 的逆否命题知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2n}$发散。

又$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^{n-1}}{2}+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}\right]$，

而$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2}$发散（通项极限不为 0），$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$收敛（为交错级数，$u_n=\dfrac{1}{2n}$，$n\geq 1$为单减数列且极限为 0，由莱布尼兹定理知该级数收敛），<u>而一个收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$的通项和一个发散级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2}$的通项相加或相减得到的新级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^{n-1}}{2}+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}\right]$必发散，故原级数</u>$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{2n}$发散。

练习册 p75 二 5

解：为了研究$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$是绝对收敛、条件收敛还是发散，先考虑通项加绝对值的级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$为正项级数，因$\dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n+1},n\geq 1$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$是调和级数去掉首项的级

数，发散，由正项级数的比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$发散。

又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$为交错级数，$u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$，$n\geq 1$为单减数列且极限为 0，由莱布尼兹定理知该级数收敛，故按条件收敛的定义知，原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$条件收敛。

幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域和和函数求法

练习册 p78 三 1

解： 对未缺项幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n+1}$，其收敛半径$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}=1,$

故收敛区间为$(-R,R)=(-1,1)$,

当$x=-1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}n(-1)^{n+1}$ 发散（因通项极限不为 0），

当$x=1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}n$ 发散（因通项极限不为 0），

故收敛域为$(-1,1)$即和函数$s(x)$的定义域。

设$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n+1}$，$-1<x<1$

对$\frac{s(x)}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}$，$-1<x<1$两边从 0 到$x$积分得

$\int_0^x\frac{s(t)}{t^2}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}nt^{n-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，$\underline{-1<x<1}$（注，由教材 276 页性质 2 知前面积分上限 x 的范围即$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n+1}$的收敛域$-1<x<1$）

对$\int_0^x\frac{s(t)}{t^2}dt=\frac{1}{1-x}$，$-1<x<1$ 两边对 x 求导得，

$\frac{s(x)}{x^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，$-1<x<1$，$x\neq 0$，

由$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n+1}$知，$s(0)=0$，综上，

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{(1-x)^2}, -1<x<1, x\neq 0 \\ 0, \qquad\qquad x=0\end{cases}=\frac{x^2}{(1-x)^2},\quad -1<x<1。$$

练习册 p78 三 2

解： 对缺项幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，设$u_n(x)=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big/\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|=\lim_{n\to\infty}x^2\,\frac{2n-1}{2n+1}=x^2$$，故按正项级数的比值判别法知，

当$x^2<1$，即$-1<x<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$绝对收敛从而收敛，于是收敛区间为$(-1,\ 1)$，

收敛半径$R=\frac{1-(-1)}{2}=1,$

当$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散（因$\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散，由正项级数的比较判别法知发散，再由级数性质即得），

当$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散（理由同上），

故收敛域为$(-1,1)$即<u>和函数</u>$s(x)$<u>的定义域</u>。

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，$-1<x<1$，

对$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，$-1<x<1$两边求导得

$$s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$$，$\underline{-1<x<1}$，（注，由教材 276 页性质 3 知前面$s'(x)$中 x 的范围即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$的收敛区间$-1<x<1$）

对$s'(x)=\frac{1}{1-x^2}$，$-1<x<1$两边从 0 到x积分得，

$$s(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^x (\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t})dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|，\ -1<x<1,，$$

即 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$，$-1<x<1$。

和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$ 比较知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}s(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|$。

（上面求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和不掌握）

<u>函数 $f(x)$ 幂级数展开的间接法</u>：即通过对 $f(x)$ 求导、从 0 到 x 积分或代数变形，利用 5 个常用幂级数展开式求 $f(x)$ 的幂级数展开式

5 个常用的幂级数展开式为：（最后两个由第二、第三个积分和求导得到）

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\qquad -\infty<x<+\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\qquad -\infty<x<+\infty$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\qquad -1<x<+1$$

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\qquad -1<x\le +1$$

$$\cos x=(\sin x)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad -\infty<x<+\infty$$

练习册 p79 一 2

解：利用 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$\quad -1<x<+1$，得

$$\frac{1}{3+x}=\frac{1}{4+x-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n,\qquad -1<\left|\frac{x-1}{4}\right|<+1$$

故$\dfrac{1}{3+x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$， $-4<|x-1|<+4$时，$a_n=\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}$。

练习册 p79 一 3

解：$f(x)$的麦克劳林级数即幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

由$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$， $-\infty<x<+\infty$得

$$\int_0^x\cos t^2dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{4n}}{(2n)!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{4n}}{(2n)!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$$

故$\int_0^x\cos t^2dt$的麦克劳林级数为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$

练习册 p79 一 4

解：求a^x关于x的幂级数展开式即将a^x展成x的幂级数

利用$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$， $-\infty<x<+\infty$得

$$a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!},-\infty<x\ln a<+\infty$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n,-\infty<x<+\infty$$

练习册 p79 二 1

解：得

$$\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!},-\infty<2x<+\infty$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4^nx^{2n}}{(2n)!},-\infty<x<+\infty$$（上面级数的第一项为$-\dfrac{1}{2}$，和前一个$\dfrac{1}{2}$抵消）

练习册 p80 三

解：利用$\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$， $-1<x<+1$，得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,\quad -1<\left|\frac{x-1}{3}\right|<+1$$

故将$\frac{1}{x}$展成 x-3 的幂级数为$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,\quad 0<x<6$。

练习册 p80 四

解：**注意分解式**$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}),$

利用$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad -1<x<+1$，得

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{1}\cdot(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2})=\frac{1}{-3+x+4}—\frac{1}{-2+x+4}$$

$$=\frac{-1}{3}\frac{1}{1+\frac{x+4}{-3}}—\frac{-1}{2}\frac{1}{1+\frac{x+2}{-2}}=\frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+4}{-3}\right)^n—\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+4}{-2}\right)^n,$$

$$=\frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n,\quad -1<\frac{x+4}{-3}<1,\ \ -1<\frac{x+4}{-2}<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n,\quad -7<x<-1,\ \ -6<x<-2$$

故将$\frac{1}{x^2+3x+2}$展成 x-4 的幂级数为$\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n$，$-6<x<-2$。