

一、填空题

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x_0 = -1$ 处的 6 阶泰勒公式中 $(x+1)^3$ 的系数是_____。(填 -1)

2. 函数 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的 6 阶麦克劳林公式中 x^2 的系数是_____。(填 $\frac{1}{2}$)

二、单调性证明不等式 (写出证明过程)

1. 证明 当 $x > 0$ 时, $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$ 。

2. 证明当 $0 < x < 1$ 时, $e^{-x} + \sin x < 1 + \frac{x^2}{2}$ 。

三、解答题 (写出计算过程)

1. 求常数 a 的值, 使得 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 它是极大值还是极小值? 并求出此极值。

2. 求函数 $y = 2xe^{-x}$ 的单调区间、极值、凹凸区间和此函数对应图形的拐点。