注 高数作业 在本子上抄题做或打印出来做，然后拍图片上传，图片必须是正立的，倒里或者侧立的，不能批改，特别注意。如果不是正立 的图片，需要重新上传，否则不批改。交作业截止时间是下周四晚上 7 点前，过时就不算数了。注意作业是平时成绩的主要部分，必须 按要求完成。刘老师。

一、计算题

1、求方程 $xy'-y\ln y=0$ 的通解。

解 原方程化为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln y$ 为变量分离方程，分离变量得 $\dfrac{dy}{y\ln y}=\dfrac{dx}{x},y\ln y\neq 0$，两边部分积分得 $\ln|\ln y|=\ln|x|+C_1$， 即 $|\ln y|=e^{C_1}|x|\Rightarrow \ln y=\pm e^{C_1}|x|=\mp e^{C_1}x$，得通解为 $y=e^{C_2 x},C_2=\mp e^{C_1}$。另外当 $y\ln y=0$ 得 $y=1$ 也为解。最后通解可写为 $y=e^{Cx}$。

2、求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$ 的通解。

解 令 $u=\dfrac{y}{x}$，将 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ 代入原方程得 $u+x\dfrac{du}{dx}=u+\tan u$，即变量分离方程 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}\tan u$，分离变量得 $\dfrac{\cos u du}{\sin u}=\dfrac{dx}{x}$，得其通解为 $\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$，即 $|\sin u|=e^{C_1}|x|=\pm e^{C_1}x\Rightarrow \sin u=\mp e^{C_1}x=Cx$，故原方程通解为 $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$。

3、求方程 $xydx+\sqrt{1-x^2}dy=0$ 满足 $y\big|_{x=-1}=2$ 的特解。

解： 原方程可变为 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}y=0$，为一阶线性齐次微分方程，通解为

$y=Ce^{-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}=Ce^{\int\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}}=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$，当 $x=-1$， $y=2$ 时，得 $C=2$，故原方程特解为 $y=2e^{\sqrt{1-x^2}}$。

4. 求微分方程 $y'+2xy=e^{-x^2}$ 的通解。

$P(x)=2x, Q(x)=e^{-x^2}$

解 $y=e^{-\int 2xdx}(\int e^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx+c)$

$=e^{-x^2}(x+c)$

5、求微分方程 $y''=x+\sin x$ 的通解。

解

$y'=\int(x+\sin x)dx=\frac{1}{2}x^2-\cos x+c_1$

通解为：$y=\int(\frac{1}{2}x^2-\cos x+c_1)dx=\frac{1}{6}x^3-\sin x+c_1x+c_2$

6. 求方程 $y''=\frac{x}{y'}$ 满足初始条件 $y(1)=-1,\ y'(1)=1$ 的特解。

$y'=p, y''=\frac{dp}{dx}$

$\frac{dp}{dx}=\frac{x}{p}, pdp=xdx$

$p^2=x^2+c_1$

解 $y'=\pm\sqrt{x^2+c_1}, y'(1)=1, c_1=0$

$y'=x$

$y=\frac{1}{2}x^2+c_2, y(1)=-1, c_2=-\frac{3}{2}$

特解为：$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}$