2020-2021（2）机电高数期末考题解析

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 下列函数为微分方程 $y''+y=0$ 的解的是（　　）

A. $y=e^{-x}$　　**B.** $y=e^{-x}+e^{x}$　　**C.** $y=\sin x+\cos x$　　**D.** $y=x(\sin x+\cos x)$

解析：法 1： $y''+y=0$ 是二阶常系数齐次微分方程，其特征方程为 $r^2+1=0$, 特征根为 $r_1=-i, r_2=i$，故解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$，选 **C.**

2. 微分方程 $y''-4y'+8y=xe^{2x}$ 的特解可设为 $y^*=$（　　）

A. Axe^{2x}　　**B.** $(Ax+B)e^{2x}$　　**C.** $(Ax+B)xe^{2x}$　　**D.** Ax^2e^{2x}

解析：二阶常系数齐次微分方程 $y''-4y'+8y=0$ 的特征方程为 $r^2-4r+8=0$，特征根为

$r_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-32}}{2}=2\pm 2i$，注意 $\sqrt{-1}=i$。又 $f(x)=xe^{2x}$ 中 $\lambda=2$ 不是特征根，

$P_m(x)=x$。故可设特解为 $y^*=x^0(Ax+B)e^{2x}$，选 **B.**

3. 过点（1,-2,3）且与 YOZ 平面平行的平面方程为（　　）

A. $x-2y+3z=0$　　**B.** $x=1$　　**C.** $y=-2$　　**D.** $z=3$

解析：与 YOZ 平面平行的平面的一般方程可设为 $x+D=0$，又点（1,-2,3）在此平面上， 代入点的坐标得 $1+D=0$，得此平面方程为 $x-1=0$。选 **B.**

4. 直线 L1: $\begin{cases}2x+y=1\\x-z=-2\end{cases}$ 与 L2: $\begin{cases}x-y=6\\2x+z=3\end{cases}$ 的夹角为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　**B.** $\dfrac{\pi}{3}$　　**C.** $\dfrac{\pi}{4}$　　**D.** $\dfrac{\pi}{6}$

解析： 直线 L1: $\begin{cases}2x+y=1\\x-z=-2\end{cases}$ 的方向向量 $\vec{S}_1=\left(\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}\right)=(-1,2,-1)$，直线

L2: $\begin{cases}x-y=6\\2x+z=3\end{cases}$ 的方向向量 $\vec{S}_2=\left(\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\2&0\end{vmatrix}\right)=(-1,-1,2)$，两直线夹角 θ 的余弦

$\cos\theta=\left|\cos(\vec{S}_1,\vec{S}_2)\right|=\dfrac{\left|\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\right|}{\left|\vec{S}_1\right|\left|\vec{S}_2\right|}=\dfrac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，选 **B.**

5. 函数 $u=x^2y^2z^3$ 在点(-1,1,2)处沿从点(-1,1,2)到点(3,2,6)的方向的方向导数为（　　）

A. $\dfrac{-8}{\sqrt{33}}$　　**B.** $\dfrac{-4}{\sqrt{33}}$　　**C.** 0　　**D.** $\dfrac{4}{\sqrt{33}}$

解析： 从点(-1,1,2)到点(3,2,6)的方向即向量$(4,1,4)$的方向，它的方向余弦为

$\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{4^2+1^2+4^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{33}},\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{33}},\cos\gamma=\dfrac{4}{\sqrt{33}}$，又函数 $u=x^2y^2z^3$ 在点(-1,1,2)处关于 x,y,z 的偏导数分别为 $u_x(-1,1,2)=-16,u_y(-1,1,2)=16,u_z(-1,1,2)=12$，于是所求方向导数值为 $u_x(-1,1,2)\cos\alpha+u_y(-1,1,2)\cos\beta+u_z(-1,1,2)\cos\gamma=0$。选 C.

6. 设 V 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的闭区域，则 $\iiint\limits_V(x^2+y^2)dxdydz=$（　　）

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　**B.** $\dfrac{\pi}{3}$　　**C.** $\dfrac{\pi}{6}$　　**D.** $\dfrac{\pi}{10}$

解析： 运用柱坐标变换得

$$\iiint\limits_V(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho\int_\rho^1dz=2\pi\int_0^1\rho^3(1-\rho)d\rho=2\pi(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})=\frac{\pi}{10}$$，选 D.

7. 设 L 为连接(1,0)和(0,1)两点的直线段，则 $\int_L(x+y)ds=$（　　）

A. 0　　**B. 1**　　**C.** $\sqrt{2}$　　**D.** $\sqrt{2}\pi$

解析： $\int_L(x+y)ds$ 中被积函数中的 x,y 满足线段 L 的方程：$x+y=1$，故 $\int_L(x+y)ds=\int_L ds=L$ 的长度 $\sqrt{2}$，选 C.

8. 设 Σ 为平面 $x-y+z=4$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 截出的有限部分，则 $\iint\limits_\Sigma xydS=$（　　）

A. 4π　　**B.** 2π　　**C.** π　　**D. 0**

解析： 将对面积的曲面积分转化为二重积分，Σ 在 XOY 面上的投影区域 $D_{xy}:x^2+y^2\le 2x$ 作为二重积分的积分区域，又 Σ：$z=4-x+y$ 上的曲面面积微元

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy$，　则 $\iint\limits_\Sigma xydS=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}xydxdy=0$，选 D. 这里用到二重积分对称性，$D_{xy}$ 关于 x 轴对称，被积函数 xy 是 y 的奇函数，故二重积分等于 0.

9. 下列级数中绝对收敛的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty} n\ln(1+\frac{1}{n})$　　**B.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{1}{n})$　　**C.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$　　**D.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

解析：A, C 选项的级数是正项级数，其绝对收敛即收敛，对 A，其通项

$n\ln(1+\frac{1}{n}) \sim n\cdot\frac{1}{n}=1, n\to\infty$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散；

对 C，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是 $p=\frac{1}{2}<1$ 的 p 级数，发散；对 D，按绝对收敛定义，先考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的收敛性，因调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 不绝对收敛。故选 **B.**

对 B，先考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(1-\cos\frac{1}{n})\right|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})=\sum_{n=1}^{\infty}2(\sin\frac{1}{2n})^2$ 的收敛性。因 $2(\sin\frac{1}{2n})^2\le 2(\frac{1}{2n})^2=\frac{1}{2n^2}$，且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是 $p=2>1$ 的 p 级数，收敛，从而由正项级数的比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}2(\sin\frac{1}{2n})^2$ 收敛，从而 B 选项级数绝对收敛。

10. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)=x^2$，则函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，其系数 $b_n=$（　　）

A. $\frac{4}{n^2}$　　**B.** 0　　**C.** $\frac{2}{n^2}$　　**D.** $(-1)^n\frac{4}{n^2}$

解析：按周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 的傅里叶系数定义，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nxdx=0$。故选B. 这里用到奇函数关于原点对称区间上的定积分为 0. 另外，按教案归纳的，偶函数的傅里叶级数为余弦级数知，$b_n=0$。

二、填空题（每题 2 分，共 10 分）

11. 微分方程 $y''=2+\sin x$ 满足初始条件 $y'|_{x=0}=0, y|_{x=0}=1$ 的特解为______________。

解析： $y''=2+\sin x$是可降阶的高阶微分方程的第一种类型，两边直接积分即得通解。在 $y''=2+\sin x$两边对x不定积分得，$y'=\int y''dx=\int(2+\sin x)dx=2x-\cos x+C_1$，再积分得通解为$y=\int y'dx=\int(2x-\cos x+C_1)dx=x^2-\sin x+C_1x+C_2$，代入初始条件 $y'\big|_{x=0}=0,y\big|_{x=0}=1$得$\begin{cases}C_1=1\\C_2=1\end{cases}$，故特解为$y=x^2-\sin x+x+1$。

12. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\tan(xy)}{x}=$ ______________。

解析： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\tan(xy)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\tan(xy)}{xy}y=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\tan(xy)}{xy}\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}y=1\cdot 2=2$。

这里用到：（1）当极限均为常数的时候，乘积极限等于极限乘积；（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\tan(xy)}{xy}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\tan z}{z}=1$。

13. 设函数$z=xy+(x^2-x+1)e^{\sqrt{x}}$，**则**$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______________。

解析： 按多元函数的高阶导数定义，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+(2x-1)e^{\sqrt{x}}+(x^2-x+1)e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial z}{\partial x})=1$。

14. 交换二次积分的积分次序 $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}f(x,y)dx=$ ______________。

解析： 积分变量的取值范围为$0\le y\le 1,0\le x\le\sqrt{y}$，也可写为$0\le x\le 1,x^2\le y\le 1$，

故$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy$。

15. 函数$\dfrac{1}{x}$**展开成**$x-3$**的幂级数为**$\dfrac{1}{x}=$ ______________ $(0<x<6)$。

解析： $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x-3+3}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-3}{3})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^{n+1}}(x-3)^n$. 这里用到

幂级数展开式$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,-1<x<1$。

三、解答题（每题 **10** 分，共 **70** 分）

16. **设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $2xy-xe^z=3$ 确定，(1)求 $dz\big|_{(-1,-1)}$；（2）求曲面 $2xy-xe^z=3$ 在点 $(-1,-1,0)$ 处的切平面及法线方程。**

解析： 法 1：用显函数求偏导数

（1） $z=\ln\dfrac{2xy-3}{x}=\ln(2xy-3)-\ln x$， $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2y}{2xy-3}-\dfrac{1}{x};\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2x}{2xy-3}$；得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(-1,-1)}=3;\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(-1,-1)}=2;dz\Big|_{(-1,-1)}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(-1,-1)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(-1,-1)}dy=3dx+2dy。$$

法二：用隐函数存在定理结果求偏导数。

令 $F(x,y,z)=2xy-xe^z-3$（令 $F(x,y,z)=3-2xy+xe^z$ 结果一样），得

$$F_x=2y-e^z,F_y=2x,F_z=-xe^z；\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2y-e^z}{xe^z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2x}{xe^z},$$

因函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $2xy-xe^z=3$ 确定，故 x,y,z 满足该方程，代入 $x=-1,y=-1$ 得

$z=0$，于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(-1,-1)}=3;\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(-1,-1)}=2;dz\Big|_{(-1,-1)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(-1,-1)}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(-1,-1)}dy=3dx+2dy$

（2）曲面 $2xy-xe^z=3$ 在点 $(-1,-1,0)$ 处的切平面的法向量或法线的方向向量为

$(F_x\big|_{(-1,-1,0)},F_y\big|_{(-1,-1,0)},F_z\big|_{(-1,-1,0)})=(-3,-2,1)$，于是切线方程为

$(-3)(x-(-1))+(-2)(y-(-1))+1\cdot(z-0)=0$，即 $3x+2y-z+5=0$；

法线方程为 $\dfrac{x-(-1)}{-3}=\dfrac{y-(-1)}{-2}=\dfrac{z-0}{1}$， 即 $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$。

17. 设函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数，函数 $z=f(e^{2x+y})$ 满足方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{2x+y}(z+1)$，若 $f(0)=0$，求函数 $f(u)$ 的表达式。

解析：（1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(e^{2x+y})\dfrac{\partial(e^{2x+y})}{\partial x}=f'(e^{2x+y})e^{2x+y}\dfrac{\partial(2x+y)}{\partial x}=2e^{2x+y}f'(e^{2x+y})$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(e^{2x+y})\frac{\partial(e^{2x+y})}{\partial y}=f'(e^{2x+y})e^{2x+y}\frac{\partial(2x+y)}{\partial y}=e^{2x+y}f'(e^{2x+y})$，这里 $f'(e^{2x+y})$ 表示

$f(e^{2x+y})$ 对 e^{2x+y} 求导数；代入 $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x+y}(z+1)$ 得

$f'(e^{2x+y})=z+1$，即 $f'(e^{2x+y})=f(e^{2x+y})+1$，

设 $u=e^{2x+y}$，则得 $\frac{df(u)}{du}-f(u)=1$，$z=f(u)$。解一阶线性非齐次微分方程 $\frac{dz}{du}-z=1$，

得通解 $z=f(u)=e^{-\int(-1)du}(\int 1\cdot e^{\int(-1)du}du+C)=e^{u}(\int e^{-u}du+C)=e^{u}(-e^{-u}+C)=Ce^{u}-1$，

代入初始条件 $f(0)=0$ 得 $C=1$，于是得 $f(u)=e^{u}-1$。

18. 计算曲线积分 $I=\oint_L(e^x\sin y-y^2)dx+(e^x\cos y-x^3)dy$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=2$ 沿逆时针方向。

解析：有向闭曲线上对坐标的曲线积分考虑格林公式，转化为二重积分计算。设圆周曲线 $L:x^2+y^2=2$ 围成的平面闭区域为 $D:x^2+y^2\le 2$，因为 $P=e^x\sin y-y^2,Q=e^x\cos y-x^3$

的偏导数 $\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-3x^2,\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-2y$ 在 D 上连续，故根据格林公式，得

$$I=\oint_L(e^x\sin y-y^2)dx+(e^x\cos y-x^3)dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D(2y-3x^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho\sin\theta-3\rho^2\cos^2\theta)\rho d\rho=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta-3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=-3\pi.$$

这里 $\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho\sin\theta-3\rho^2\cos^2\theta)\rho d\rho=(\frac{2}{3}\sin\theta\rho^3-\frac{3}{4}\cos^2\theta\rho^4)\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\sin\theta-3\cos^2\theta$，

另外，这里用到傅里叶级数这个知识点中三角函数系的性质 1,2,3 及周期函数的积分性质：以 2π 为周期的周期函数在长度为一个周期 2π 的区间上的定积分相等：

$\int_0^{2\pi}\sin k\theta d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\sin k\theta d\theta=0,k=1,2,\cdots$；$\int_0^{2\pi}\cos^2 k\theta d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 k\theta d\theta=\pi,k=1,2,\cdots$

法二：平面闭区域 $D:x^2+y^2\le 2$ 关于 x 轴对称，被积函数 y 是 y 的奇函数，由二重积分的对称性知 $\iint_D ydxdy=0$，故 $\iint_D(2y-3x^2)dxdy=2\iint_D ydxdy-3\iint_D x^2dxdy=-3\iint_D x^2dxdy$

$=-3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\cdot\rho d\rho=-3\pi$。

19. 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧。

解析：法一 高斯公式

在有向曲面 Σ 上添加有向平面块 $\Sigma_1: z=2, x^2+y^2\le 4$，取上侧，这样封闭曲面 $\Sigma+\Sigma_1$ 取外侧，设封闭曲面 $\Sigma+\Sigma_1$ 围成的立体区域为 V，则根据高斯公式

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial(z^2+x)}{\partial x}+\frac{\partial(-z)}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint_V(1+(-1))dxdydz=0,$$

对 $\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz-\iint_{\Sigma_1}zdxdy$，其中由投影性质，因平面块 Σ_1 在 YOZ 平面上的投影面积为 0，得 $\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz=0$。

$\iint_{\Sigma_1}zdxdy$ 转化为二重积分计算,

$\iint_{\Sigma_1}zdxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}2dxdy=2\pi 2^2=8\pi$，其中 $x^2+y^2\le 4$ 表示平面块 $\Sigma_1: z=2, x^2+y^2\le 4$ 在 XOY 平面的投影区域，作为二重积分的积分区域。

按积分的区域可加性，

$$I=\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)dydz-zdxdy-\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz-zdxdy=8\pi.$$

法二 转化为对面积的曲面积分，再转化为二重积分

$I=\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}[(z^2+x)\cos\alpha-z\cos\gamma]dS$，其中 $\cos\alpha,\cos\gamma$ 表示曲面 Σ 上点的切平面的法向量的第一和第三个方向余弦。

设 $F(x,y,z)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-z$，曲面 Σ 上点的切平面的法向量坐标为 $(F_x,F_y,F_z)=(x,y,-1)$，从而其方向余弦 $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+(-1)^2}}, \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

（注意 Σ 取下侧，故 Σ 上点的切平面的法向量指向和 z 轴正向的夹角为钝角，其余弦 $\cos\gamma<0$，故不能设 $F(x,y,z)=z-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，因为此时 $(F_x,F_y,F_z)=(-x,-y,1)$，$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}>0$ 矛盾。）

曲面 $\Sigma: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 的曲面面积微元 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$，

介于 $z=0, z=2$ 之间的曲面块 $\Sigma: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在 XOY 面的投影区域为 D: $x^2+y^2\le 4$，

作为二重积分的积分区域。

代入所求积分得到 $I=\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}[(z^2+x)\cos\alpha-z\cos\gamma]dS$

$=\iint_D\{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x]x+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}dxdy=\iint_D(x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2))dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(\frac{3}{2}\rho^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}\rho^2\sin^2\theta)\rho d\rho=6\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=6\pi+2\pi=8\pi.$

这里平面闭区域 D: $x^2+y^2\le 4$ 关于 y 轴对称，被积函数 $\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2x$ 是 x 的奇函数，根据二重积分对称性得 $\iint_D\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2xdxdy=0$；另外，

$\int_0^2(\frac{3}{2}\rho^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}\rho^2\sin^2\theta)\rho d\rho=6\cos^2\theta+2\sin^2\theta$，再由三角函数系的性质 3 得

$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=\pi.$。

20. 对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}x^n$，求收敛域及其和函数。

解析：（1）设 $a_n=\frac{n}{2^{n-1}}$，因 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{n}=\frac{1}{2}$，得收敛半径 $R=2$，收敛区间为 $(-2,2)$；在端点 $x=-2$，因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}(-2)^n=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散（因通项极限不为 0），

在端点 $x=2$，因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}(2)^n=2\sum_{n=1}^{\infty}n$ 发散（因通项极限不为 0）；故得收敛域为 $(-2,2)$.

（1）设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}x^n, x\in(-2,2)$；因

$$\int_0^x\frac{s(t)}{t}dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}\int_0^x t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}=x\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^{n-1}=x\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2x}{2-x}\ ;$$

得 $\frac{s(x)}{x}=\frac{d}{dx}(\int_0^x\frac{s(t)}{t}dt)=\frac{d}{dx}(\frac{2x}{2-x})=\frac{2(2-x)-2x(-1)}{(2-x)^2}=\frac{4}{(2-x)^2},-2<x<2,x\neq 0$，又

$x=0$ 时，$s(x)=0$，故得和函数 $s(x)=\frac{4x}{(2-x)^2},-2<x<2$。

21. 求二元函数 $f(x,y)=e^{2y}(x^2+2x+y)$ 的极值。

解析：令 $\begin{cases} f_x = (2x+2)e^{2y} = 0 \\ f_y = 2(x^2+2x+y)e^{2y} + e^{2y} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 2x+2=0 \\ 2x^2+4x+2y+1=0 \end{cases}$ 得驻点 $(-1,\frac{1}{2})$，

又 $A = f_{xx}(-1,\frac{1}{2}) = 2e^{2y}\Big|_{(-1,\frac{1}{2})} = 2e, B = f_{xy}(-1,\frac{1}{2}) = 2(2x+2)e^{2y}\Big|_{(-1,\frac{1}{2})} = 0,$

$C = f_{yy}(-1,\frac{1}{2}) = 4(x^2+2x+2)e^{2y}\Big|_{(-1,\frac{1}{2})} = 4e,$ 因 $AC - B^2 = 8e^2 > 0, A = 2e > 0$，故函数

$f(x,y) = e^{2y}(x^2+2x+y)$ 在点 $(-1,\frac{1}{2})$ 取得极小值 $f(-1,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e$。