2020～ 2021 学年第二学期高等数学[(2)机电]

期末 A 卷参考答案及评分标准

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，总计 30 分）

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
C	**B**	**B**	**B**	**C**	**D**	**C**	**D**	**B**	**B**

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，总计 10 分）

（11）	（12）	（13）	（14）	（15）
$y=x^2-\sin x+x+1$	2	1	$\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^{n+1}}(x-3)^n$

三、解答题（本大题共 6 小题，每小题 10 分，总计 60 分）

16、解：设 $F(x,y,z)=2xy-xe^z-3$，则 $F_x=2y-e^z$，$F_y=2x$， $F_z=-xe^z$

由方程 $2xy-xe^z=3$ 得 $x=-1,y=-1$ 时 $z=0$

（1） $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=-1\\y=-1}}=-\left.\dfrac{F_x}{F_z}\right|_{\substack{x=-1\\y=-1}}=3$， $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=-1\\y=-1}}=-\left.\dfrac{F_y}{F_z}\right|_{\substack{x=-1\\y=-1}}=2$

故 $\left.dz\right|_{(-1,-1)}=3dx+2dy$ ……… (5 分)

（2） $\left.\vec{n}\right|_{(-1,-1,1)}=\left.(F_x,F_y,F_z)\right|_{(-1,-1,1)}=(-3,-2,1)$

所以在点 $(-1,-1,0)$ 处的切平面方程为：$3x+2y-z+5=0$

法线方程为：$\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ ……… (5 分)

17、解：令 $u=e^{2x+y}$，即 $z=f(u)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x+y}f'(u)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{2x+y}f'(u)$

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{2x+y}(z+1)$ 得 $2e^{2x+y}f'(u)-e^{2x+y}f'(u)=e^{2x+y}(z+1)$

即 $f'(u)-f(u)=1$ ……… (5分)

而 $f'(u)-f(u)=1$ 为一阶线性微分方程，其中 $P(u)=-1,\quad Q(u)=1$，

$$f(u)=e^{-\int P(u)du}(\int Q(u)e^{\int P(u)dx}du+C)=e^{-\int(-1)dx}(\int e^{\int(-1)du}du+C)=-1+Ce^{u}$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=1$．于是函数 $f(u)$ 的表达式为

$f(u)=e^u-1$ ……… (5 分)

18、解：令 $P=e^x\sin y-y^2, Q=e^x\cos y-x^3$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-3x^2-(e^x\cos y-2y)=2y-3x^2$$

于是，由格林公式有

$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}(2y-3x^2)dxdy$ ……… (5 分)

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}2ydxdy-\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}3x^2dxdy=0-\frac{3}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)dxdy$

$=-\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3d\rho=-3\pi$ ……… (5 分)

19、解：令 $P=z^2+x,\ Q=0,\ R=-z$，Ω 是曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=2$ 围成的闭区域.

Σ_1 是平面 $z=2$（$x^2+y^2\le 4$）的部分的上侧，由于 $\Sigma+\Sigma_1$ 取的是 Ω 的整个边界曲面的外侧，故由高斯公式有

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-z\,dxdy=\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)dydz-z\,dxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz-z\,dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv-\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz+\iint\limits_{\Sigma_1}z\,dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+0-1)dv-0+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}2\,dxdy$$

$=8\pi$ ……… (10 分)

20、解：（1）令 $a_n=\frac{n}{2^{n-1}}$，

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$，所以收敛半径 $R=2$

当 $x=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}2n$ 发散；

当 $x=-2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n$ 发散；

所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^{n-1}}x^n$ 收敛域为 $(-2,2)$ ……… (5 分)

（2）设和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}x^n$， $x\in(-2,2)$

由逐项求导得：

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{2^{n-1}}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{2^{n-1}}(x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}2x(\frac{x^n}{2^n})'=2x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'$$

$$=2x\left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)'=2x\left(\frac{x}{2-x}\right)'=\frac{4x}{(2-x)^2},$$

即所求和函数为 $s(x)=\frac{4x}{(2-x)^2},-2<x<2$ …… (5 分)

21、解：先求驻点，令 $\begin{cases} f_x(x,y)=e^{2y}(2x+2)=0 \\ f_y(x,y)=2e^{2y}(x^2+2x+y)+e^{2y}=0 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$， 即驻点为 $(-1,\frac{1}{2})$

为了判断这个驻点是否为极值点，求二阶偏导数

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y)=2e^{2y} \\ f_{xy}(x,y)=4e^{2y}(x+1) \\ f_{yy}(x,y)=4e^{2y}(x^2+2x+y+1) \end{cases}$$ ……… （5 分）

则 $A=f_{xx}(-1,\frac{1}{2})=2e,\ B=f_{xy}(-1,\frac{1}{2})=0,\ C=f_{yy}(-1,\frac{1}{2})=2e$

因为 $A=2e>0,\ AC-B^2=4e^2>0$，

所以 $(-1,\frac{1}{2})$ 是极小值点，极小值为 $f(-1,\frac{1}{2})=-\frac{e}{2}$ ……… （5 分）