练习册 **p11**

二 **4** 选 A

解析：$\forall x \in (-\infty,+\infty)$，因为

$$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})=\lg(\frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}})=-\lg(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$，故

$f(x), x \in (-\infty,+\infty)$, 为奇函数

p12

三

2 定义域为[-1，3 ）

解析：定义域即使函数有意义的自变量取值集合。该函数有意义的自变量 x 取值满足

$\begin{cases} 3-x>0 \\ \left|\frac{3-2x}{5}\right| \le 1 \end{cases}$，解得 x 的范围为 $-1 \le x < 3$。

3 定义域为 $[-\frac{1}{2},0]$

解析：因为 $f(x)$ 的定义域为[1,2]，故 $f(\frac{1}{x+1})$ 的定义域可由 $1 \le \frac{1}{x+1} \le 2$ 得到。

五

因 $f(x) \le g(x), x \in R$,且 $f(x)$，$x \in R$ 单增，故 $f[f(x)] \le f[g(x)]$，$f[g(x)] \le g[g(x)]$,

从而 $f[f(x)] \le g[g(x)]$。

p13

一　2，×，如 $x_n=(-1)^n, n \ge 1$, 发散但有界

3，×，如 $x_n=(-1)^n, y_n=-(-1)^n, n \ge 1$, 均发散但 $x_n+y_n=0, n \ge 1$ 收敛

5 √

解析：注意 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|=0$，

一般 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|=|a|$（由 ε-N 定义易得）；但 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|=|a|, (a \ne 0)$ 推不出

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$（如 $x_n=(-1)^n, n \ge 1, a=-1$）.

6 ×

解析：极限存在必是唯一一个确定的常数。

二 4，选 C，

解析：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists$自然数$N$，当$n>N$时，有$|x_n - a|<\varepsilon$中，

（1） N 是ε的表达式。给定一个ε，可唯一确定 N 的最大值，比这个最大值大的任意正整数均可作为 N 的值；

（2） 一般情况下，ε越小，N 的值越大，但有时 N 值不随ε变化，如对$x_n=$常数C，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = C \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0，对任意自然数N，当n>N时，都有|x_n - C|<\varepsilon$$

p14

三 （**2**）解析：$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{2n+1}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{1}{9n+3}\le\dfrac{1}{9n}\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只须$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$。

证 $\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{2n+1}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$。从而证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$。

注 若$\forall\varepsilon>0$，由$\left|\dfrac{2n+1}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{1}{9n+3}<\varepsilon$，得$n>\dfrac{1}{9\varepsilon}-\dfrac{1}{3}$，从而取$N=\left[\dfrac{1}{9\varepsilon}-\dfrac{1}{3}\right]$也对，

或$\forall\varepsilon>0$，由$\left|\dfrac{2n+1}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{1}{9n+3}<\dfrac{1}{9n}<\varepsilon$，得$n>\dfrac{1}{9\varepsilon}$，从而取$N=\left[\dfrac{1}{9\varepsilon}\right]$也对。

（**3**）解析：$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只须$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$。

证 $\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon$。从而证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$。

（**4**）解析：$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{n(n+1)-n^2}{2n^2}\right|=\dfrac{1}{2n}\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只须$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$。

证 $\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$。从而证明了$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2})=\dfrac{1}{2}$。

注 若$\forall\varepsilon>0$，由$\left|\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{n(n+1)-n^2}{2n^2}\right|=\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$

得$n > \frac{1}{2\varepsilon}$, 从而取$N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$也对。

四 证 （a）因$\{y_n\}$有界，所以$\exists M > 0$, 使得$|y_n| \le M, n = 1,2,...$

(b) 又由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则对$\forall \varepsilon > 0, \exists N$（为某自然数），当$n > N$时，有$|x_n| < \varepsilon$。

(c) 于是当$n > N$时，有$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| < M\varepsilon$。这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。

p15

一

2 ×，因为$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to--\infty} f(x) = A$

3 ×

解析：举个反例：$f(x) = |x| > 0, x \in (-1,1), x \ne 0, \lim\limits_{x\to 0} f(x) = A = 0$即可说明说法不对。

二

1 选 C

解析：符号$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$表示自变量$x$无限接近$x_0$时，函数值$f(x)$无限接近 1，至于$f(x)$能否在$x_0$取到函数值并不关心，可能取得到也可能取不到。另外，即使取得到， 函数值$f(x_0)$也不一定等于 1.

5，选 D

解析：由$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在，设$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$，由函数极限的局部有界性，$\exists M, \delta > 0,$ 当$0 < |x - 0| < \delta$时，即$x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$时,有$|f(x)| \le M$

即存在正数δ，$f(x)在(-\delta,0) \cup (0,\delta)有界$

p16

三（**3**）（这种较复杂的极限恒等式证明可以不掌握）

解析：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 当$|x| > X$，有$|f(x) - A| < \varepsilon$。

在该题中，对$\forall \varepsilon > 0,$ $|f(x) - A| = \left|\frac{2x-1}{x+1} - 2\right| = \frac{3}{|x+1|}$，注意到我们要证明的是$x \to \infty$时函数值的趋向情况，即$|x|$很大时函数值的趋向，故$|x+1| \ge |x| - 1 > 0$ （这里$|x+1| \ge |x| - 1$

恒成立），从而要使$\left|f(x)-A\right|=\dfrac{3}{|x+1|}\le\dfrac{3}{|x|-1}<\varepsilon$，只须$|x|>\dfrac{3}{\varepsilon}+1$，对比上述极限恒等式定义，

于是取$X=\dfrac{3}{\varepsilon}+1$ 即可。

证 $\forall\varepsilon>0$, 取$X=\dfrac{3}{\varepsilon}+1>0$, 当$|x|>X$，有$\left|\dfrac{2x-1}{x+1}-2\right|<\varepsilon$。这就证明了结论。

（4）**解析**：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$, 当$x>X$，有$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$。

在该题中，注意到我们要证明的是$x\to+\infty$时 函数值的趋向情况，故$x>0$。

对$\forall\varepsilon>0$, 要使

$$\left|f(x)-A\right|=\left|x\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)-(-2)\right|\underset{\text{分子有理化}}{=}\left|\frac{-4x}{x+\sqrt{x^2-4}}+2\right|\overset{\text{通分化简}}{=}\frac{8}{\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)^2}<\frac{8}{x^2}<\varepsilon,$$

只须$x>\sqrt{\dfrac{8}{\varepsilon}}$，对比上述极限恒等式定义，于是取$X=\sqrt{\dfrac{8}{\varepsilon}}$ 即可。

证 $\forall\varepsilon>0$, 取$X=\sqrt{\dfrac{8}{\varepsilon}}>0$ 当$x>X$，有$\left|x\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)-(-2)\right|<\varepsilon,$。这就证明了结论。

四

（1）$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1,$ 故$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在

（2）$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}2x=2,\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}3x-1=2,$ 故$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}3x-1=5$

p17

一

6 ×

解析：无穷大是极限为$-\infty,+\infty,\infty$的函数或数列，不是很大的数。举个反例，$x\to+\infty$时，

$f(x)=x,g(x)=-x$极限分别为$+\infty,-\infty$，从而$f(x),g(x)$都是无穷大，但

$f(x)+g(x)=0$是无穷小，从而无穷大之和不一定是无穷大。注意，常数0是无穷小。

10 ×，因$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，所以$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}\ne\lim\limits_{x\to0}x\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$，但$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

11 ∨，因为由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在，且$\lim\limits_{x\to0}g(x)=0,$

由极限的四则运算法则知$0=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}g(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$

12 ×，解析：

设$f(x)=x,g(x)=\sin\dfrac{1}{x},x_0=0,$

则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$存在，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在

二

选择题 **3** 选 B

解析：举特殊例子用排除法

对 $f(x)=|x|>\varphi(x)=0,x\neq0,$ $a=0,$ 则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A=0,$ $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B=0,$ 故 $A=B=0$，所以排除 A,C.

对 $f(x)=|x|>\varphi(x)=-1,$ $a=0,$则$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A=0,$ $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B=-1,$故排除 D.

综上，选 B.

选择题 **4** 选 D

解析：举特殊例子用排除法

取 $a_n=0,b_n=(-1)^n$，显然，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$(存在),$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$(存在),

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$(存在),$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n+b_n|=1$(存在)，但$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$不存在； 故只能选 D

选择题 **5** 选 D

解析：举特殊例子用排除法

对选项 A， 取 $a_n=n$，显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$(存在),但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$（不存在）；

对选项 B， 取 $a_n=\dfrac{1}{n}$，显然，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A=0$(存在)，但

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1\neq\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\dfrac{A}{A}$；

对选项 C， 注意对比正确结论：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$(常数），则$\lim\limits_{n\to\infty}{a_n}^{b_n}=A^B$

可知选项 C 不能选；故只能选 D

P19

（**8**），注意到

$$x_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+...+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$$

得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$

（**9**）解析：注意$1-x^n=(1-x)(1+x+x^2+...+x^{n-1})$，所以

$$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})\overset{\text{通分}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{-x-2}{1+x+x^2}=-1。$$

（**11**）解析：因$x\to+\infty$时，$e^{-x}\to 0,|\sin x|\le 1,$ 故$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\sin x=0$。

（**13**）解析：对所求极限的函数进行分子有理化，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=-1$

故原极限不存在。

（**14**）$x\to+\infty$时，$x>0$，且x是无穷大，$\frac{1}{x}$是无穷小，故对求极限的函数分子分母都除以$\sqrt{x}$得$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$。

P20

四 解析：

由已知，$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，且分母极限$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-2)=0$，故由极限的四则运算法则

得$0=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}(x^2-x-2)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)$

$=4+2a+b$ （1）

将（1）代入$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$得

$$2=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x^2-x-2}\overset{\text{分解因式}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)+a(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2+a}{x+1}=\frac{4+a}{3}\quad(2)$$

联立（1）(2) 解得 a=2,b=-8.

五 解析：

对求极限的函数通分化简得

$$1=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3+1}{x^2+1}-ax-b)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1-(ax+b)(x^2+1)}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^3-bx^2-ax-b+1}{x^2+1},$$

注意到这个极限等于 x 的最高次系数比，当 $(1-a)\neq 0$ 时，此极限 $=\infty$，与极限为 1 矛盾!，

从而得到 $1-a=0$，于是上述极限变为 $1=\lim_{x\to\infty}\frac{-bx^2-ax-b+1}{x^2+1}=-b$，解得 b=-1.

六，要求理解该结论，具体的严格证明较复杂，不要求掌握!

P21

一 **7** 画×

解析：注意到 $x\to 0$ 时，$\cos x$，$1-x$ 极限都不是 0，故均不是无穷小，也就谈不上是不是等价无穷小。

二

3，选 A. 因 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+100}=e^{\lim_{n\to\infty}(n+100)\frac{1}{n}}=e$；

4，选 B ，因 $\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\cos x\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{-1}=-1$；

5，选 B ，因 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$；

6，已知 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{ax^2+bx+c}=0$，又注意到 $a\neq 0$ 时，$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{ax^2+bx+c}=\frac{0}{a}=0$，故选 C;

7，选 A，因 $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x=1$，由极限的四则运算法则得

$$\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x=0-1=-1$$

P22-23

解析：法一：注意重要极限 $\lim_{x\to}(1+a(x))^{b(x)}=e$，其中 $a(x)b(x)=1,\lim_{x\to}b(x)=-\infty,+\infty,\infty$

法二：运用公式 $\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$，这里 $\lim u(x)=1,\lim v(x)=\infty$ 。

（5）法一：$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}}\right]^{-2x(\frac{1}{x}+1)}=e^{-2}$。

法二：$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}+1}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-1)(-2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-2+2x)}=e^{-2}$

（6）法一：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\dfrac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2a}{x-a}\cdot x}=e^{2a}$。

法二：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x[\frac{x+a}{x-a}-1]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\frac{2a}{x-a}}=e^{2a}$

（7）法一：$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x^2})^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+(-\dfrac{1}{x^2}))^{-x^2}\right]^{-\frac{1}{x^2}\cdot 3x}=e^{-0}=1$。

法二：$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x^2})^{3x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}3x(-\frac{1}{x^2})}=e^{0}=1$

(9) 因$x\to 0$时$,\sqrt{1+x^2}-1\sim\dfrac{1}{2}x^2,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=1$

（10）法一：$\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{2\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+(-3\sin x))^{\frac{1}{-3\sin x}}\right]^{-3\sin x\cdot 2\cos x}=e^{-0}=1$。

法二：$\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{2\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}2\cos x(-3\sin x)}=e^{0}=1$

（11）注意到$x\to 0$时，$\sin^2 x\sim x^2,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，且商求极限，分子分母均可用等价无穷小替换其值不变，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2\cos x}=\frac{1}{2}。$$

（12）注意到$x\to 0$时，$\dfrac{\sin 3x}{3x}\to 1,x\sin\dfrac{1}{x}\to 0,1+\cos x\to 2$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(3\frac{\sin 3x}{3x}+\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=\frac{3}{2}。$$

P26

四 证 即证$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{3}(\cos x-\cos 2x)}{x^2}=1$。

法一 注意到$\cos x-\cos 2x=-2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{-x}{2}$，且$x\to 0$时，$\sin\frac{3x}{2}\sim\frac{3x}{2},\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}(\cos x-\cos 2x)}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{x^2}=1。$$

法二 注意到$\cos 2x=2\cos^2 x-1$，且$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}(\cos x-\cos 2x)}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-2\cos^2 x+1}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(2\cos x+1)(1-\cos x)}{x^2}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(2\cos x+1)\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$$

法三 注意到$\cos 2x=1-2\sin^2 x$，且$x\to 0$时，$\sin x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}(\cos x-\cos 2x)}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+2\sin^2 x-1}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2 x}{x^2}-\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left[\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right]=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$$

五 解析：

令 $t=x-1$，则由已知 $x\to 1,\ln x\sim A(x-1)^n$ 得到 $t\to 0,\ln(1+t)\sim At^n$，即 $1=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{At^n}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{At^n}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{At^{n-1}}$(这里用到$t\to 0$时，$\ln(1+t)\sim t$)，从而分母极限也为 1，即$1=\lim_{t\to 0}At^{n-1}$，如$n$取大于 1 的自然数，注意到 A 是常数，则这个等式不成立，故n=1，从而 A=1.

六 解析

1 证明数列收敛

（1）先证数列递减（数学归纳法）

$x_1=6>x_2=\sqrt{12}$，假设$x_k>x_{k+1},k\ge 1$，则由已知$x_{k+1}=\sqrt{x_k+6}>\sqrt{x_{k+1}+6}=x_{k+2}$，

故$x_n>x_{n+1},n\ge 1$

（2）再证数列有下界（数学归纳法）

$x_1 = 6 > 0,$ 假设 $x_k > 0, k \geq 1,$ 则由已知 $x_{k+1} = \sqrt{x_k + 6} > 0$，故 $x_n > 0, n \geq 1$，即数列有下界，数 0 就是它的一个下界

于是由单调有界原理知，数列极限存在。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则由于 $x_n > 0, n \geq 1$，故 $a \geq 0$。

2 下求出 a

在已知条件 $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ 两边让 $n \to \infty$，得 $a = \sqrt{a+6}$，解得 $a = 3$ 或-2（舍）。即此数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$。

***六** 解析

1 证明数列收敛

（1）由已知 $x_n > 0, n \geq 1$.即数列有下界，数 0 就是它的一个下界；

（2）因 $x_n = \dfrac{1}{2}(x_{n-1} + \dfrac{2}{x_{n-1}}) \geq \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x_n \cdot \dfrac{2}{x_n}} = \sqrt{2},$ $n \geq 2$，所以 $\dfrac{1}{x_n^2} \leq \dfrac{1}{2},$ $n \geq 2$，于是

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{2}{x_n^2}) \leq 1,$ $n \geq 2$，即数列 $x_n, n \geq 2$ 递减；

于是由单调有界原理知，数列 $x_n, n \geq 2$ 的极限存在。

2 下求出 a

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则由于 $x_n > 0, n \geq 2$，故 $a \geq 0$。

在已知条件 $x_n = \dfrac{1}{2}(x_{n-1} + \dfrac{2}{x_{n-1}}), n \geq 2$ 两边让 $n \to \infty$，得 $2a = a + \dfrac{2}{a}$，解得 $a = \sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$（舍）。即此数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$。