

## 第二章 静电场分析



## 2.1 静电场的基本规律

### 2.1.1 电荷与电荷分布

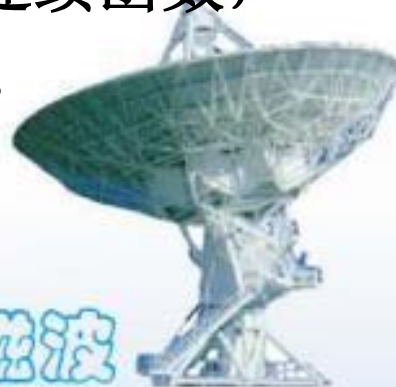
#### 1. 体电荷密度

- 当电荷在某一空间体积内连续分布时，用体电荷密度来描述电荷在空间的分布特性，体电荷密度定义为空间某点处单位体积中的电荷量，即

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

- $\rho(\mathbf{r})$  的单位是  $\text{C}/\text{m}^3$ 。 $\rho(\mathbf{r})$  是一个空间位置的连续函数，描述了电荷在空间的分布情况，构成一个标量场。
- 某个体积  $V$  中总的电量

$$q = \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV$$



## 2. 面电荷密度

- 电荷在一个极薄的薄层空间中的连续分布可以视为面电荷分布，例如电荷在导体表面和电介质表面的分布。用面电荷密度来描述面电荷的分布特性，面电荷密度定义为某点处单位面积上的电荷量，即

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$$

- $\rho_s(\mathbf{r})$  的单位是  $\text{C}/\text{m}^2$ 。 $\rho_s(\mathbf{r})$  是一个空间位置的连续函数，描述了电荷在某一曲面上的分布情况，构成一个标量场。
- 某个曲面  $S$  上总的电量：

$$q = \iint_S \rho_s(\mathbf{r}) dS$$



### 3. 线电荷密度

➤将电荷在半径极小的管形空间中的分布视为线电荷分布。  
用线电荷密度来描述线电荷的分布特性，线电荷密度定义为某点处单位长度上的电荷量，即

$$\rho_l(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

$\rho_l(\mathbf{r})$  的单位是C/m。

通过线积分可以求出某段曲线 $l$ 上总的电量：

$$q = \int_l \rho(\mathbf{r}) dl$$



#### 4. 点电荷与点电荷的 $\delta$ 函数表示法

- 点电荷是电磁场理论中的一个理想模型，点电荷的电量为 $q$ ，占据的体积为趋近于零的一个几何点。显然，点电荷所在处的体电荷密度趋近于无穷大。
- 为了定量地描述点电荷的分布，定义 $\delta$ 函数

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}' \end{cases}$$

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \begin{cases} 0 & \mathbf{r}' \text{不在} V \text{内} \\ 1 & \mathbf{r}' \text{在} V \text{内} \end{cases}$$



可以用 $\delta$ 函数表示点电荷的体电荷密度

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}' \end{cases}$$

对于点电荷，空间任意体积 $V$ 中总的电量 $Q$ ：

$$Q = \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV = q \iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \begin{cases} 0 & \mathbf{r}' \text{不在} V \text{内} \\ q & \mathbf{r}' \text{在} V \text{内} \end{cases}$$



## 2.1.2 场强和电位函数

电场强度 $\mathbf{E}$ 和电位 $\Phi$ 是研究静电场最基本的两个物理量。

- 空间某点处的电场强度定义为单位正的试验电荷在该点受的电场力

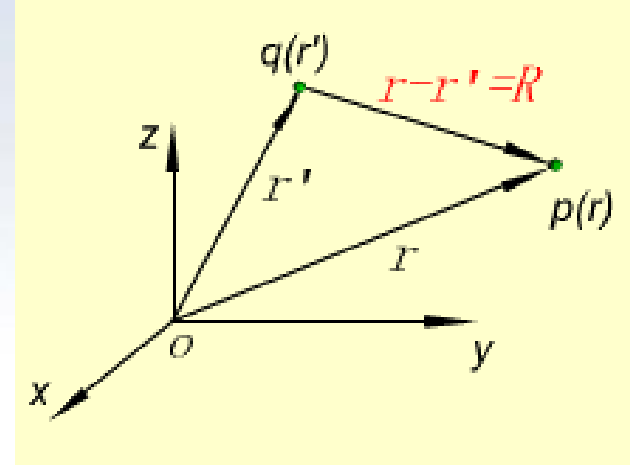
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q_0}$$

- 电场强度是一个矢量，在空间构成一个矢量场  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ，所以可以用研究矢量场的方法研究静电场，例如利用电力线、高斯定理、环路定理、矢量场的散度、矢量场的旋度等。



➤点电荷的场强:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r}')}{R^2} \mathbf{e}_R \quad (\text{V/m})$$



点电荷的电场

真空中的介电常数  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

➤点电荷组的场强:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r}_i')}{R_i^2} \mathbf{e}_{R_i}$$

➤电荷连续分布的场强:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')}{R^2} \mathbf{e}_R$$



电磁场与电磁波



电位的定义：空间某点电位是将单位正电荷从该点经任意路径移到无限远处电场力做的功，其定义为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

其中 $P$ 是待求电位的场点， $Q$ 是电位的参考点。



- 电位是一个标量，在空间构成一个标量场，所以也可以用研究标量场的方法研究静电场，例如利用等位面、电位梯度、泊松方程、拉普拉斯方程等。
- 两点之间的电位差称为电压

$$\Phi_{P_1} - \Phi_{P_2} = \int_{P_1}^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{P_2}^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



**E**和**Φ**之间满足以下关系式：

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$$

（负号表示**E**指向电位降低的方向）



## 2.1.3 静电场的基本方程

**真空中的高斯定理：**在真空中的任何静电场中，通过任意闭合曲面的电通量等于该闭合曲面所包围的电荷代数总和的 $1/\varepsilon_0$ 倍，而与曲面外的电荷无关。

$$\begin{cases} \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \end{cases}$$

**环路定理**其实就是静电场做功与路径无关的数学表示。



电磁场与电磁波

## 电介质中的高斯定理和环路定理

凡在外电场作用下产生宏观上不等于零的电偶极矩，因而形成宏观束缚电荷的现象称为电极化，能产生电极化现象的物质统称为**电介质**。

$$\begin{cases} \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \end{cases}$$

其中  $\sum_i q_i$  是  $S$  面内包围的所有电荷（包括自由电荷和极化电荷）。



## 电介质中的高斯定理和环路定理

在求解电场时为了回避极化电荷而引入的一个辅助物理量，电位移矢量 $\mathbf{D}$ （电感应强度矢量）。静电场的基本方程可以写为：

$$\begin{cases} \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i q_0 \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \end{cases}$$

其中  $\sum_i q_0$  是 $S$ 面内包围的所有自由电荷。

各向同性介质中，

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$



## 证明高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i q_0$$

➤ 先研究无界真空中只有一个点电荷的情况

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \frac{q_0 \mathbf{e}_r}{4\pi R^2} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_0}{4\pi} \oiint_S \frac{\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S}}{R^2}$$

$\frac{\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S}}{R^2}$  是面元  $d\mathbf{S}$  对点电荷  $q_0$  所张的立体角  $d\Omega$ ，对闭合

曲面积分就是闭合曲面对电荷  $q_0$  所张的立体角。

➤ 若电荷  $q_0$  在闭合面内，则该立体角为  $4\pi$ ，

若电荷  $q$  在闭合面之外，则该立体角为 0。

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} q_0 & q_0 \text{ 在闭合曲面内} \\ 0 & q_0 \text{ 在闭合曲面外} \end{cases}$$



如果无界真空中有N个点电荷 $q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0k}, \dots, q_{0N}$ , 而闭合曲面内包围的点电荷为 $q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0k}$ , 则穿过闭合面S的电位移通量为

$$\begin{aligned}\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \oiint_S (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \dots + \mathbf{D}_k + \dots + \mathbf{D}_N) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oiint_S \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} + \oiint_S \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S} + \dots + \oiint_S \mathbf{D}_k \cdot d\mathbf{S} + \dots + \oiint_S \mathbf{D}_N \cdot d\mathbf{S} \\ &= q_{01} + q_{02} + \dots + q_{0k} = \sum_{i=1}^k q_{0i}\end{aligned}$$

➤ 尽管空间各点的 $\mathbf{D}_i$ 与产生它的所有场源点电荷有关, 但穿过闭合曲面S的电位移通量  $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$  仅与闭合曲面S内场源电荷的代数和  $\sum_{i=1}^k q_{0i}$  有关。





推广到体电荷、面电荷和线电荷的情况

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \iiint_V \rho_0 dV$$

高斯定理的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0$$

说明：静电场是有源场，电荷是电场的通量源。

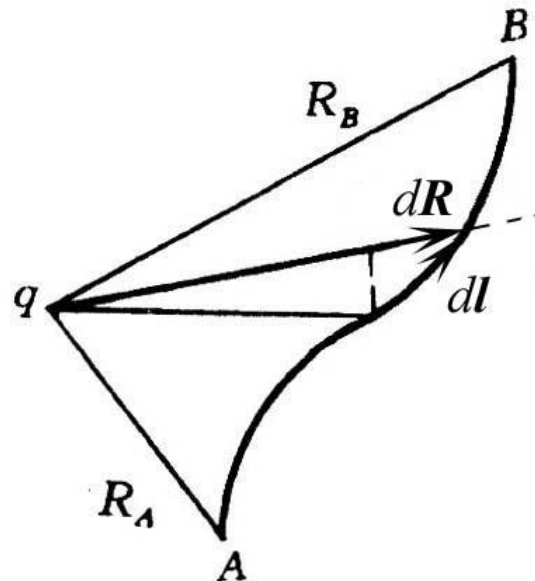
电磁场与电磁波



证明环路定理:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

证: 在点电荷 $q$ 的电场中任取一条曲线连接A、B两点, 求场强变量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 沿此曲线的积分



$$\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\mathbf{e}_R \cdot d\mathbf{l}}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_A}^{R_B} \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

当积分路径是闭合回路,

即A、B两点重合时, 可得

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

利用斯托克斯定理, 可以写出环路定理的微分形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$



电磁场与电磁波

给定了静电场的**散度**和**旋度**，根据亥姆霍兹定理，静电场的性质是完全确定的。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$



## 2.1.4 场强和电位 $\Phi$ 的计算

### 1. 方法1

第一步：利用点电荷场强公式和场强的迭加原理求E  
点电荷的场强：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r}')}{R^2} \mathbf{e}_R$$

点电荷组的场强：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r}'_i)}{R_i^2} \mathbf{e}_{R_i}$$

电荷连续分布的场强：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')}{R^2} \mathbf{e}_R$$

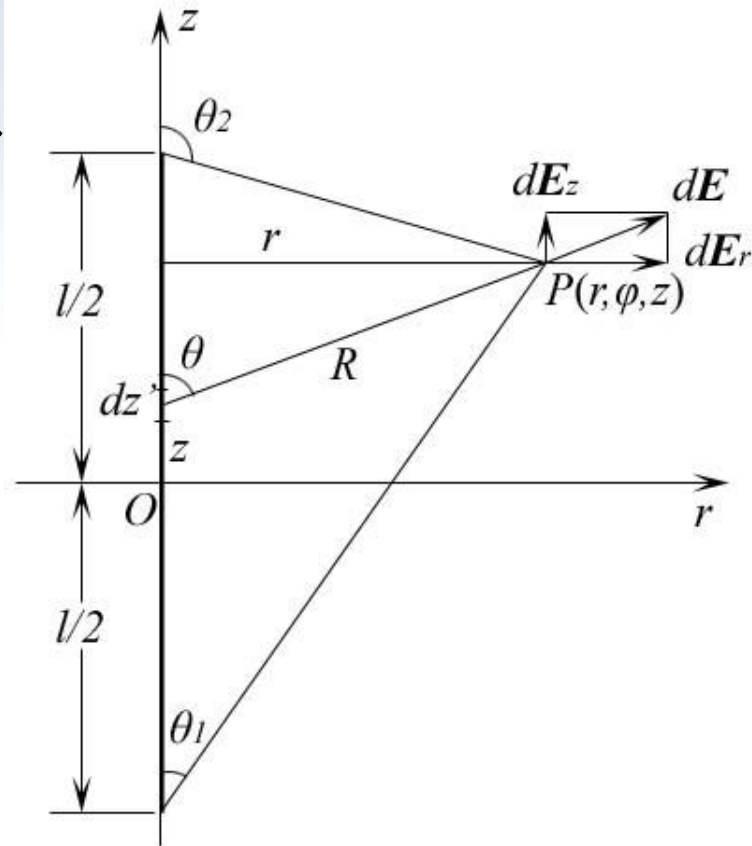
第二步：

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



**例题：**真空中长度为 $l$ 的直线上的线电荷密度为 $\rho_l$ ，求此线电荷周围的电场。

解：采用圆柱坐标，使线电荷与 $z$ 轴重合，原点位于线电荷的中点。电荷及电场的分布具有轴对称性，可以只在 $\varphi$ 为常数的平面内计算电场的分布。



直线上线元在P点产生的场强为

$$d\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dz'}{R^2} \mathbf{e}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dz'}{R^3} \mathbf{R}$$

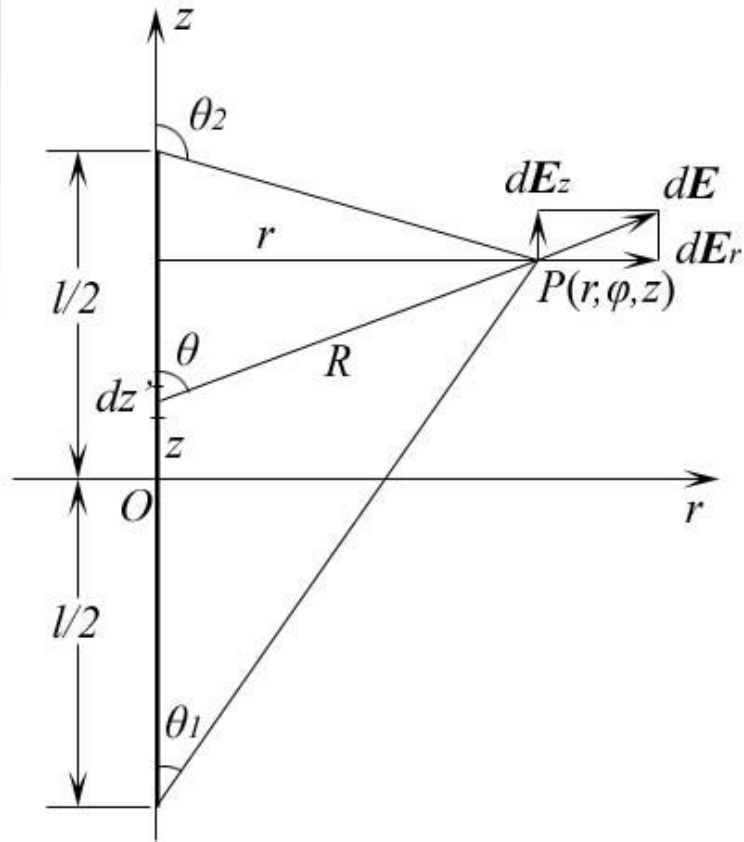
其中P点处的位置矢量为  $\mathbf{e}_z z'$  ,

线元 的位置矢量为  $\rho_l dz'$  , 所

以  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r r + \mathbf{e}_z z$  , 代入可得

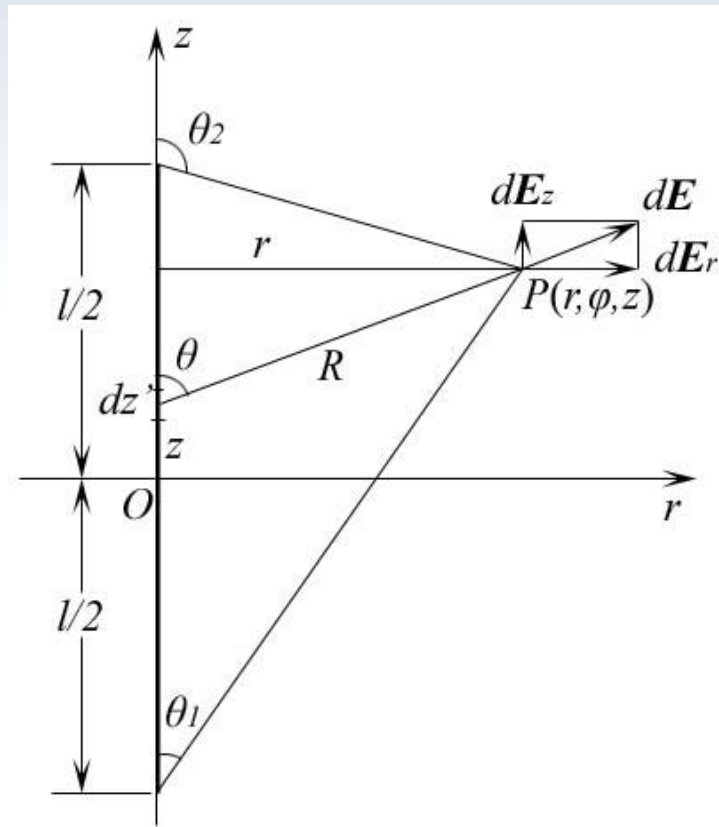
$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_r r + \mathbf{e}_z (z - z')$$

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dz' [\mathbf{e}_r r + \mathbf{e}_z (z - z')]}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \mathbf{e}_r dE_r(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z dE_z(\mathbf{r})$$



电磁场与电磁波

$$\begin{aligned}
 E_r(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\rho_l r dz'}{\left[ r^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}} \\
 &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \left. \frac{-(z - z')}{\left[ r^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2}} \right|_{-l/2}^{l/2} \\
 &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)
 \end{aligned}$$



利用公式

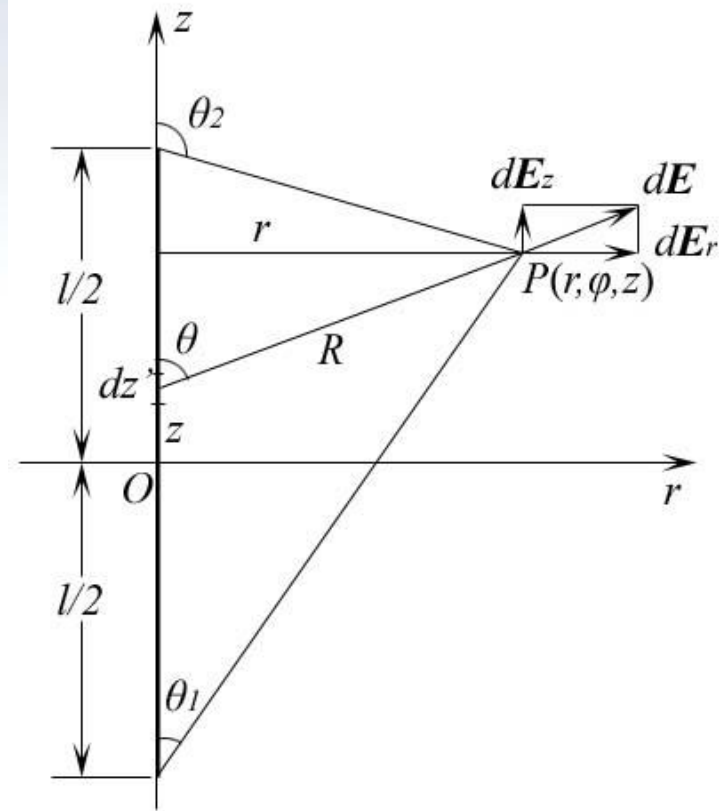
$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2 \cdot (x^2 + a^2)^{1/2}} + C$$



电磁场与电磁波

$$E_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\rho_l(z-z')dz'}{[r^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$



利用公式

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}} + C$$



电磁场与电磁波

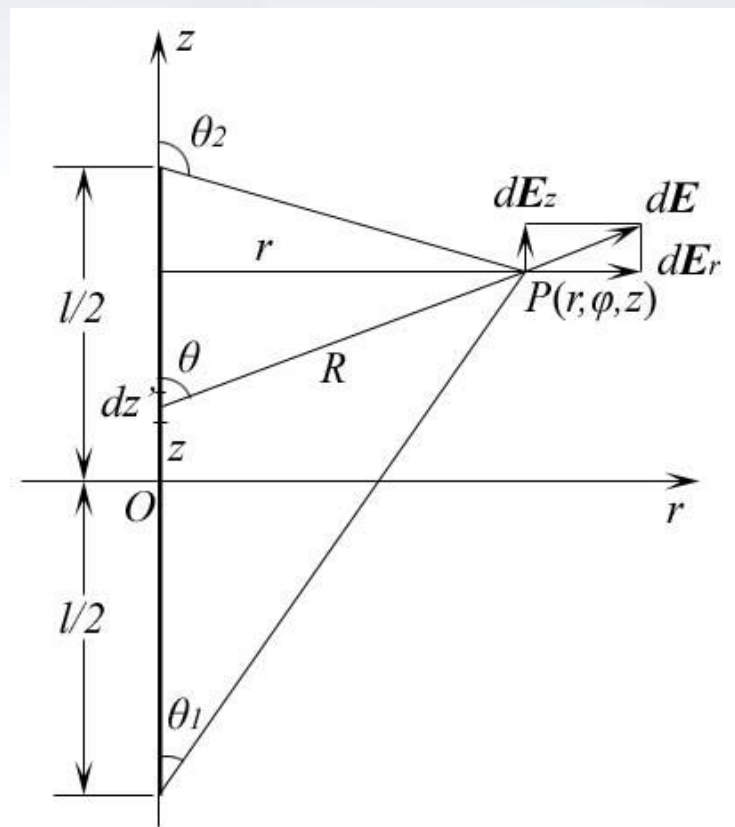


如果该均匀带电的直线在两端无限延长变为无限长线电荷，  
令  $\theta_1 \rightarrow 0$ ,  $\theta_2 \rightarrow 180^\circ$ ，可得

$$E_r(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad E_z(\mathbf{r}) = 0$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$$



方法1评述：这种方法要用矢量的迭加或积分，运算比较复杂。



电磁场与电磁波

## 2. 方法2

➤ 电荷分布具有对称性时，包括球对称、面对称、轴对称。

➤ 第一步：利用高斯定理求E；

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

➤ 第二步：

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



**例题：**已知球坐标系中电荷的分布  $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}, 0 \leq r \leq R$   
求球体内外场强和电位的分布。

**解：**因为电荷的分布是球对称的，所以电场的分布也是球对称的。  
利用高斯定理求 $E$ ，在 $r < R$ 的区域中，过待求场强的 $P_1$ 点作一个与球体同心的球形高斯面，半径为 $r$ 。利用高斯定理

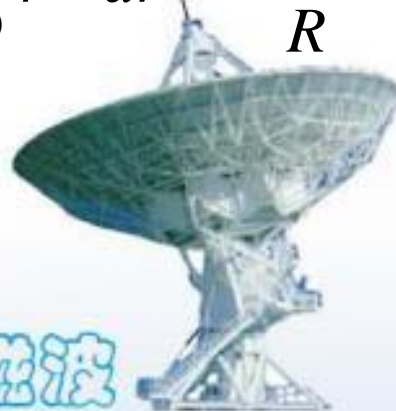
$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(r) \cdot dV$$

等式的左边  $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2$

等式的右边

$$\iiint_V \rho(r) \cdot dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0}{R} r \cdot r^2 \sin \theta \cdot dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi\rho_0}{R} \int_0^r r^3 \cdot dr = \frac{\pi\rho_0 r^4}{R}$$

所以，在 $r \leq R$ 的区域中  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_r \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R}$



在 $r > R$ 的区域中，过待求场强的 $P_2$ 点作一个与球体同心的球形高斯面，半径为 $r$ 。利用高斯定理，

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(r) \cdot dV$$

等式的左边  $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2$

等式的右边为  $\iiint_V \rho(r) dV = \frac{4\pi\rho_0}{R} \int_0^R r^3 dr = \pi\rho_0 R^3$

所以在 $r > R$ 的区域中的场强为

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r^2}$$



计算电位 $\Phi$ :

在 $r \leq R$ 的区域中

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0 R} \cdot \frac{1}{3} (R^3 - r^3) + \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0}$$

在 $r > R$ 的区域中,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^\infty E_2 dr = \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r}$$

**方法2评述:** 这种方法计算比较简单, 只要场的分布具有对称性, 都应当选用这种方法。



### 3. 方法3

第一步：利用点电荷电位的公式和电位的迭加原理求Φ  
点电荷的电位：

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r}')}{R}$$

点电荷组的电位：

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r}'_i)}{R_i}$$

电荷连续分布的电位：

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')}{R}$$



可以分别求出线电荷、面电荷、体电荷产生的电位的表达式

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l(\mathbf{r}') dl}{R}$$
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_s \frac{\rho_s(\mathbf{r}') dS}{R}$$
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}') dV}{R}$$

第二步：利用电位梯度求场强

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$



电磁场与电磁波

**例题：**半径为 $a$ 的圆平面上均匀分布面密度为 $\rho_s$ 的面电荷，求圆平面中心垂直轴线上任意点处的电位和电场强度。

解：首先把圆平面分割成无数多个同心的细圆环。任取一半径为 $r'$ 的细圆环，圆环上任一面元上的电量为

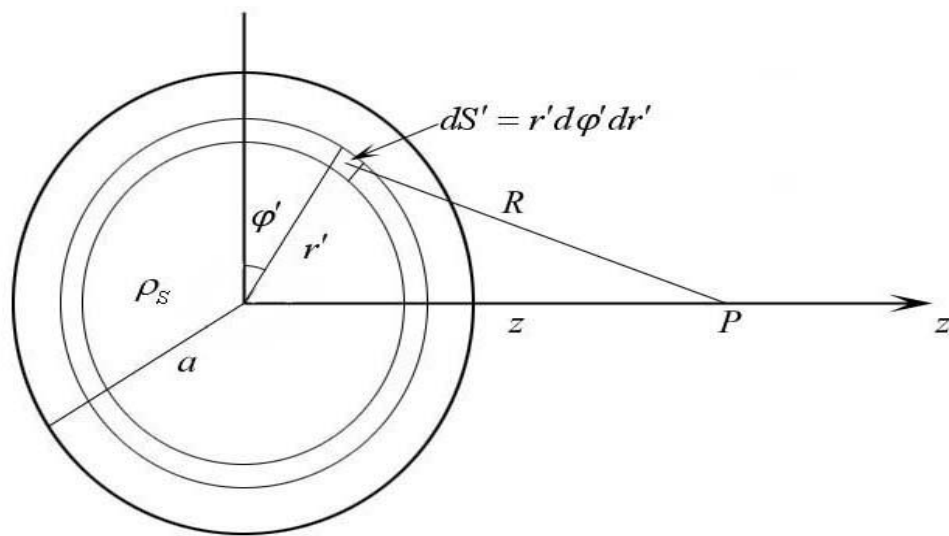
$$\rho_s r' dr' d\varphi'$$

该面元距P点的距离为

$$R = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

细圆环上的电荷在P点产生的电位为

$$d\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_s r' dr' d\varphi'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r'^2}} = \frac{\rho_s r' dr'}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r'^2}}$$





整个圆平面上的电荷在P点产生的电位为

$$\Phi(z) = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \int_0^a \frac{r' dr'}{\sqrt{z^2 + r'^2}} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \left[ \sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right]$$

由对称性，P点的电场强度 $\mathbf{E}$ 沿z方向，所以

$$\mathbf{E}(z) = -\nabla\Phi(z) = -\mathbf{e}_z \frac{\partial\Phi(z)}{\partial z} = \begin{cases} \mathbf{e}_z \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] & z > 0 \\ -\mathbf{e}_z \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \left[ 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] & z < 0 \end{cases}$$

**方法3评述：**由于这种方法是利用标量场的叠加或积分，计算比较简单。若场的分布没有对称性，这是求解电位和电场强度的一般方法。



## 2.1.5 静电场中的导体

静电平衡时导体的电特性：

- (1) 导体内电场强度处处为零。
  - (2) 导体是等位体，导体的表面是等位面。
  - (3) 导体内无电荷分布，电荷只分布在导体的表面。
  - (4) 导体表面附近，电场强度的方向与表面垂直，电场强度的大小等于该点附近导体表面的面电荷密度除以 $\hat{n}_0$ ，所以导体表面附近的电场强度为
- (其中  $E = \hat{n} \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$  是导体表面处的单位法线矢量。)



## 2.1.6 静电场中的电介质

### 1. 电介质的基本概念：

- 介质内部大量带电粒子的不规则的运动，在微观尺度上产生随机变化的电磁场，宏观上相互抵消，没有外部影响和作用的介质呈中性。
- 电介质在外电场作用下发生极化，形成有向排列；
- 电介质内部和表面产生极化电荷；
- 极化电荷与自由电荷都是产生电场的源。



## 2. 电介质极化的机理和电偶极子模型

### (1) 有极分子电介质和无极分子电介质

- 任何物质的分子都是由原子组成的，而原子都是由带正电的原子核和带负电的电子组成，整个分子中电荷的代数和为零。
- 当没有外电场时，如果电介质分子中正负电荷的中心是重合的，这类电介质称为无极分子电介质；如果电介质分子中正负电荷的中心不重合，这类电介质称为有极分子电介质。
- 有极分子电介质中正负电荷的中心错开一定的距离，形成一个电偶极矩，称为分子的固有电矩。



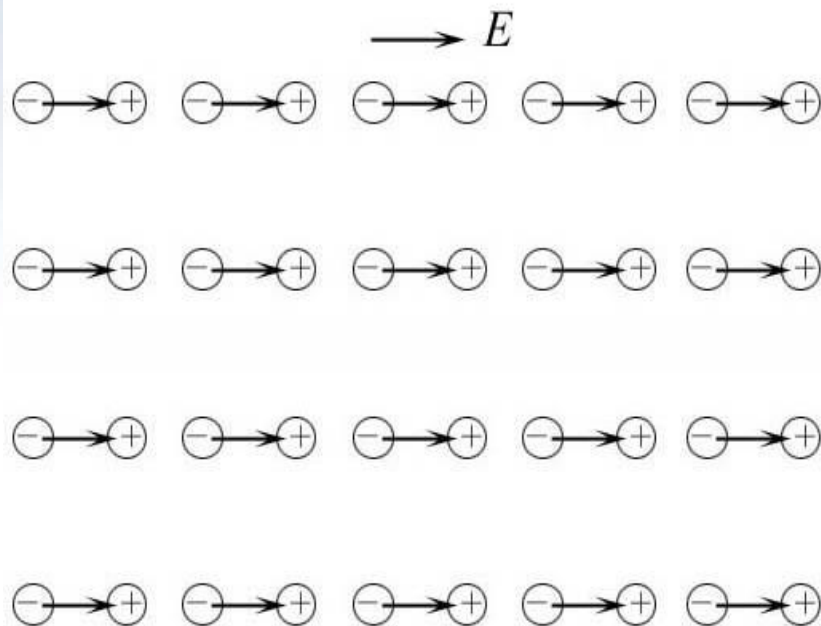
## (2) 位移极化和取向极化

### 位移极化:

➤ 在没有外电场时，无极分子电介质的分子中没有电矩。加上外电场，在电场力的作用下，每个分子中的正、负电荷的中心被拉开一定的距离，形成了一个电偶极子，分子电矩的方向沿外电场方向。

➤ 外电场越强，每个分子中的正、负电荷的中心被拉开的距离越大，一定体积中分子电矩的矢量和也越大。

➤ 无极分子电介质的这种极化机理称为位移极化。



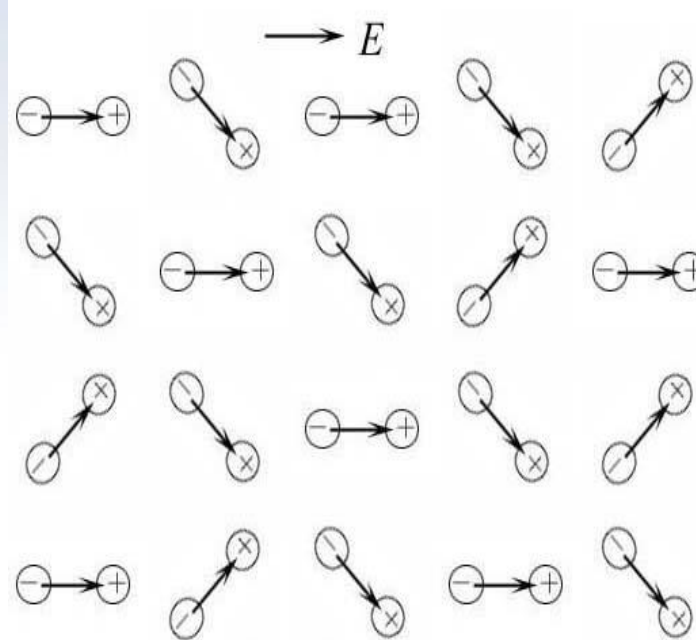
(a) 位移极化



## (2) 位移极化和取向极化

### 取向极化:

- 在没有外电场时，虽然有极分子电介质中每一个分子都具有固有电矩，但是由于分子的不规则热运动，分子电矩的排列是杂乱无章的，一定体积中所有分子电矩的矢量和为零。加上外电场，每个分子电矩都受到一个力矩的作用，使分子电矩在一定程度上转向外电场方向，于是一定体积中分子电矩的矢量和就不是零了。
- 外电场越强，分子电矩排列得越整齐，一定体积中分子电矩的矢量和就越大。
- 有极分子电介质的这种极化机理称为取向极化。



(b) 取向极化





无论是无极分子电介质，还是有极分子电介质，在外电场中被极化，均匀电介质内部的电荷相互抵消，一个端面上出现正电荷，另一个端面上出现负电荷，这就是极化电荷。极化电荷与导体中的自由电荷不同，不能自由运动，也称为束缚电荷。

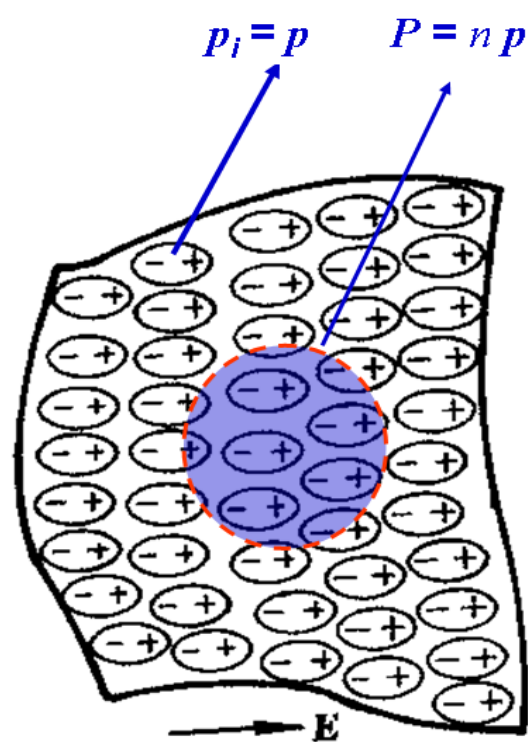


电磁场与电磁波

### 3. 极化强度概念

极化强度矢量 $\mathbf{P}$ ，定义为单位体积中分子或原子团的电偶极矩的叠加。

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}$$



电磁场与电磁波



## 介质中的电场、电位移矢量

- 介质的极化过程包括外加电场的作用使介质极化，产生束缚电荷；极化电荷反过来激发电场，两者相互制约，达到平衡。
- 介质中的电场既有外加电场的贡献，同时也有束缚电荷产生的附加电场。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{外加电场}} + \mathbf{E}_{\text{束缚电荷产生的电场}}$$



对于线性均匀各向同性介质，极化强度 $\mathbf{P}$ 和电场强度 $\mathbf{E}$ 有简单的线性关系：

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

$\varepsilon_e$  称为电介质的极化率

$\varepsilon_r$  称为电介质的相对介电常数

$\varepsilon_e$ 、 $\varepsilon_r$  均为常数



电磁场与电磁波

**例题：**求电偶极子的电场强度和电位  
(  $r \gg d$  ) 。

解： 在球坐标系中

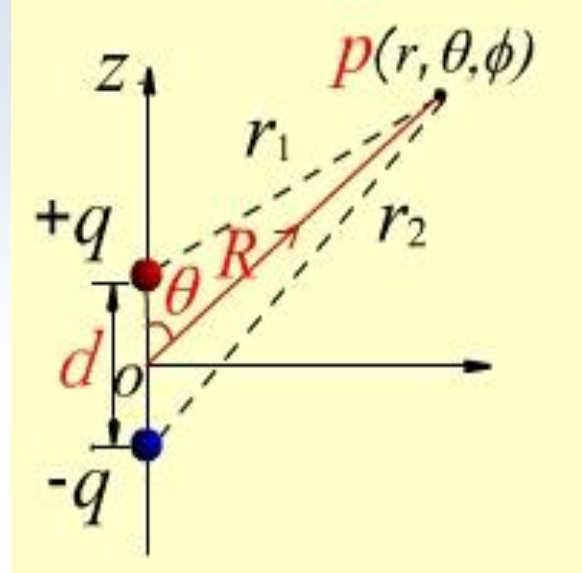
$$\phi_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$r_1 = \left( r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2 = \left( r^2 + \frac{d^2}{4} + rd \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

用二项式展开，又有  $r \gg d$ ，得

$$r_1 = r - \frac{d}{2} \cos \theta \quad r_2 = r + \frac{d}{2} \cos \theta$$



电磁场与电磁波

所以

$$\phi_p = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  表示电偶极矩，方向由 $-q$ 指向 $+q$ 。

$$\mathbf{E}_p = -\nabla \phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$$



电磁场与电磁波

### 3. 计算电介质问题常用的公式

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\rho_{sp} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$



## 2.1.7 电力线方程和等位面方程

### 1. 电力线方程

电力线上某一点处的切线方向表示该点电场强度的方向。

直角坐标系

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

圆柱坐标系

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}$$

球坐标系

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$



## 2. 等位面方程

空间电位相等的各点构成的曲面称为等位面。

等位面方程：

$$\Phi(x, y, z) = C$$

其中C是一个常数



**例题:**求电偶极子的电力线方程和等位面方程。

**解:** 选用球坐标, 电偶极子的场强和电位

$$E = e_r \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} + e_\theta \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$
$$\Phi = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

电偶极子的等位  
面方程

$$\phi = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V$$

其中  $V$  是一个常数, 经过整理可得

$$r^2 = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 V} = C_1 \cos \theta$$





电偶极子在远区产生的电场强度与坐标 $\varphi$ 无关，在球坐标系中的电力线方程为

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

代入上式可得

$$\frac{dr}{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3}} = \frac{rd\theta}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}}$$

积分可得  $\ln r = 2 \ln \sin \theta + \ln C_2 = \ln C_2 \sin^2 \theta$

电偶极子的电力线方程

$$r = C_2 \sin^2 \theta$$



电磁场与电磁波

把图绕z轴旋转一周就是电偶极子的电力线和等位面的三维立体图。

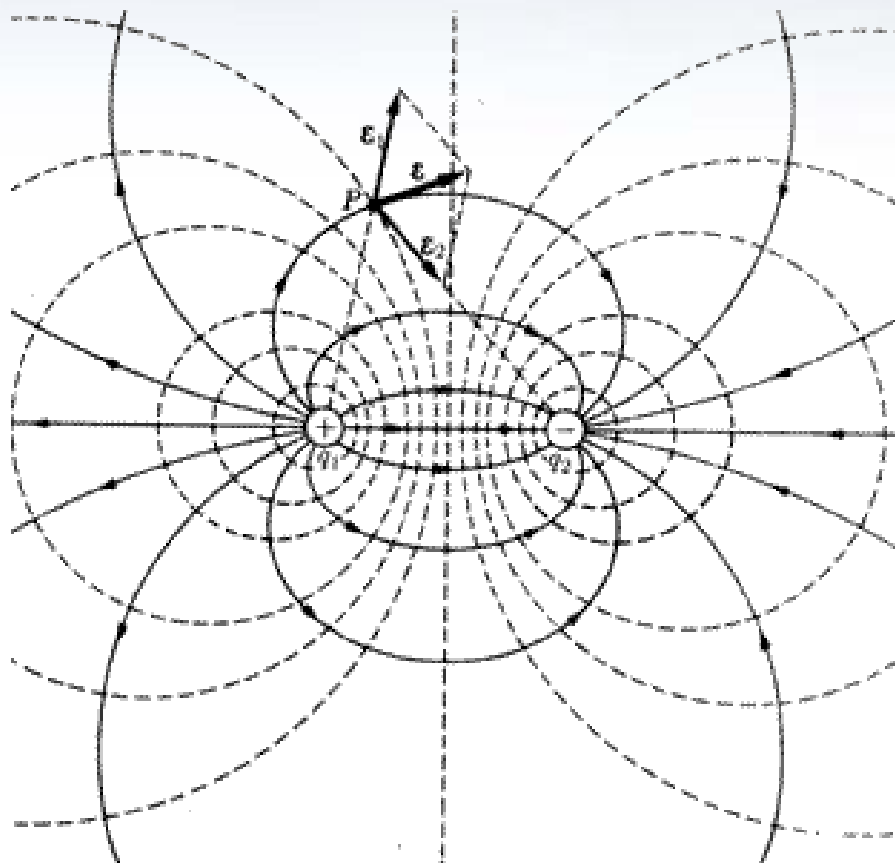


图 电偶极子的电力线和等位面



## 2.2 静电场的边界条件

- 边界条件是指两种介质的分界面上，场量 ( $E$ ,  $D$ ,  $\phi$ ) 的变化所满足的条件。
- 掌握和运用边界条件是电磁场课程学习的重要内容。



## 2.2 静电场的边界条件

### 2.2.1 两种电介质界面上的边界条件

#### 1. $E$ 和 $D$ 的边界条件

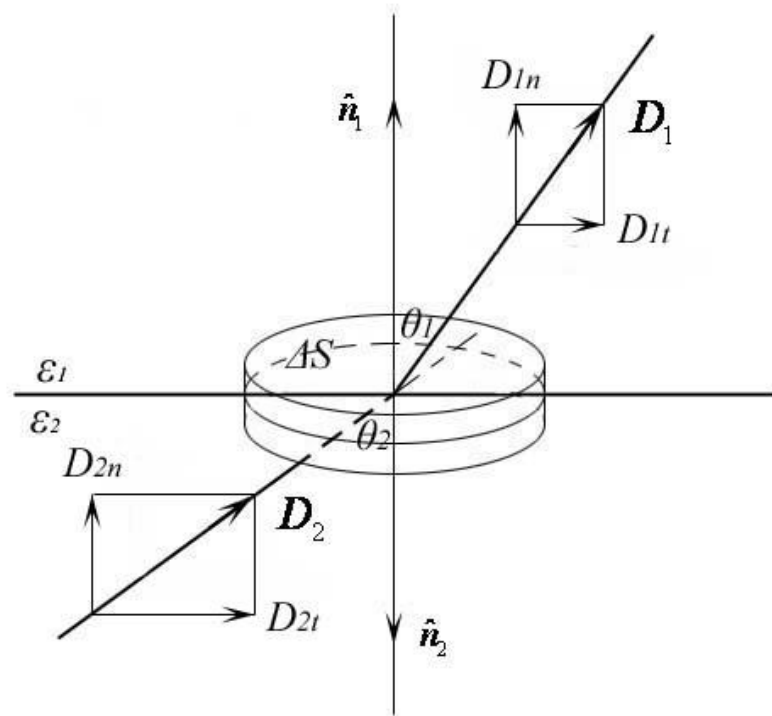
##### (1) $D$ 法向分量

在两种电介质的分界面上， $D$ 的法向分量是连续的

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

$$\hat{n}_1 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$$

分界面上没有自由电荷时， $D_{1n} = D_{2n}$

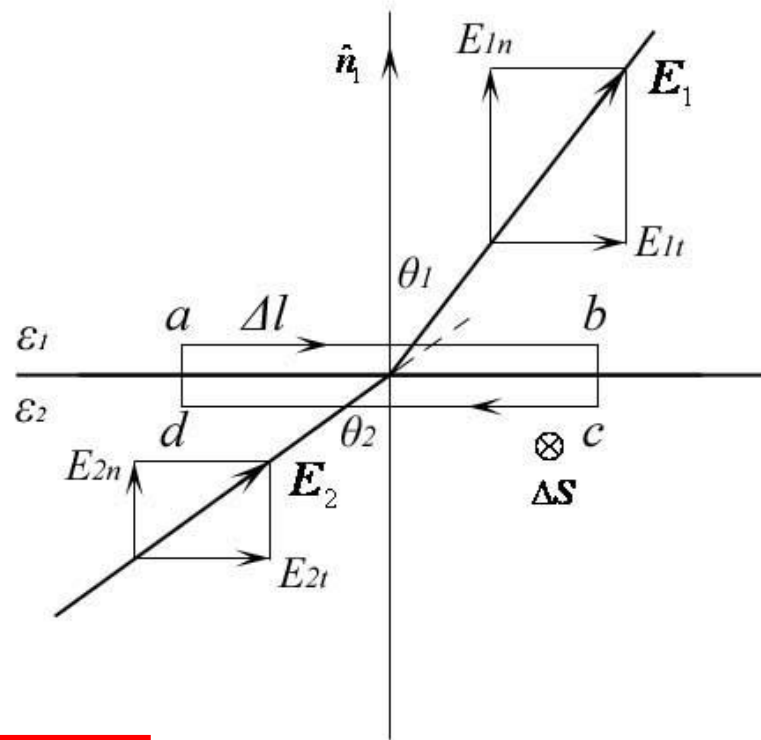


## (2) $E$ 切向分量

在两种电介质的分界面上,  $E$ 的切向分量是连续的。

$$\hat{n}_1 \times \mathbf{E}_1 = \hat{n}_1 \times \mathbf{E}_2$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$



(3)  $E$ 线在分界面上的折射

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

一般情况下  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ , 所以  $\theta_1 \neq \theta_2$ ,  
即  $E$ 线在界面上发生了折射。

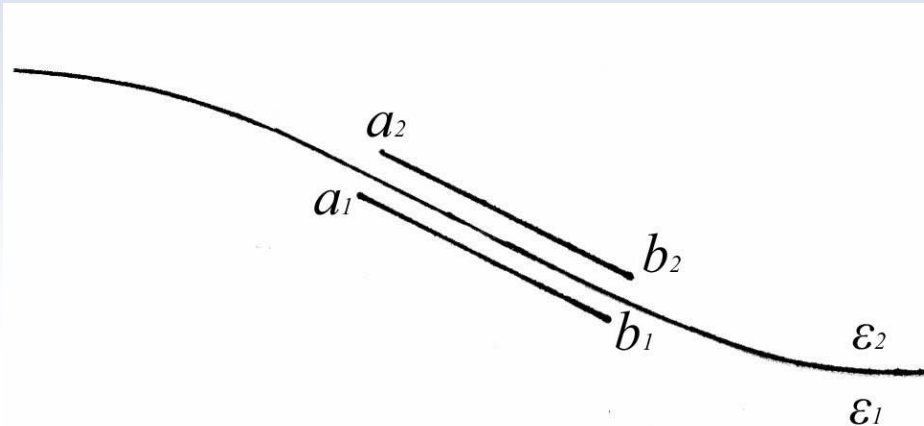


## 2. 电位的边界条件

在两种电介质的分界面上，  
电位 $\Phi$ 是连续的

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

电位的边界条件



介质分界面上

$$-\epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \rho_s$$

若分界面上没有自由电荷分布

$$\epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}$$



电磁场与电磁波

## 2.2.2 导体与电介质分界面上的边界条件

(约定导体的下标为2, 介质的下标为1。)

### 1. $E$ 和 $D$ 的边界条件

由导体的电特性  $E_2 = 0$

:所以在电介质一侧  $E_{1t} = E_{2t} = 0$

$$D_{1n} = \rho_S \quad \text{或} \quad E_{1n} = \frac{\rho_S}{\varepsilon}$$

以上两式可以写为

$$\begin{aligned} E_{1t}|_S &= 0 \\ D_{1n}|_S &= \rho_S \end{aligned}$$



## 2. 电位 $\Phi$ 的边界条件

在导体与电介质的分界面上，电位 $\Phi$ 仍然是连续的，即

$$\Phi_1 = \Phi_2 = C$$

其中 $C$ 是一个常数。

因为

$$D_{1n} = \rho_s \qquad D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} = -\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}$$

可以得到在导体与电介质的分界面上电位的法向导数满足的边界条件

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = -\rho_s$$





## 2.3 泊松方程和拉普拉斯方程

### 2.3.1 泊松方程和拉普拉斯方程

由静电场的基本方程  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

其中  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$

代入  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon \nabla \cdot (-\nabla \Phi) = -\varepsilon \nabla \cdot \nabla \Phi = \rho$

经过整理可得  $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$  泊松方程

对于没有电荷分布的区域

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

拉普拉斯方程



**例题:**一平行板电容器，两极板间的电位差是 $U_0$ ，其间充满体电荷密度为 $\rho$ 的电荷，求电容器内电位和场强 $E$ 的分布。

解：根据题意，电位仅是 $x$ 的函数，  
在直角坐标系中，泊松方程可以写为

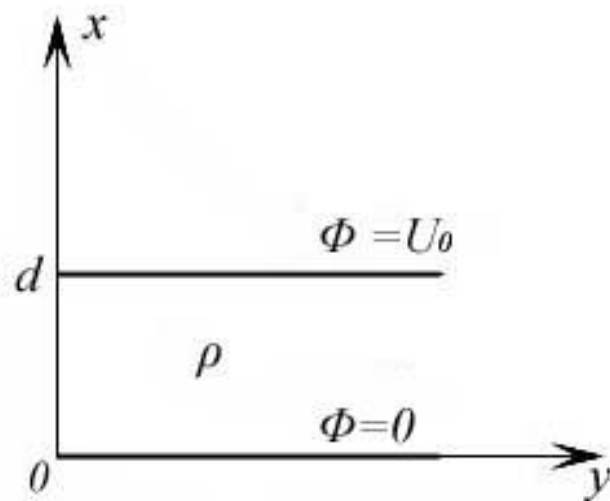
$$\nabla^2 \Phi = \frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

积分一次

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon}x + C_1$$

再积分一次

$$\Phi = -\frac{\rho}{2\varepsilon}x^2 + C_1x + C_2$$



电磁场与电磁波

下面利用边界条件确定积分常数 $C_1$ 、 $C_2$ 。

边界条件

$$x = 0, \Phi = 0$$

$$x = d, \Phi = U_0$$

可以解出

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{U_0}{d} + \frac{\rho}{2\varepsilon} d$$

电磁场与电磁波



电位的分布为

$$\Phi = -\frac{\rho}{2\varepsilon} x^2 + \left(\frac{U_0}{d} + \frac{\rho}{2\varepsilon} d\right)x$$

利用电位梯度可以求出电场强度

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\mathbf{e}_x \frac{d\Phi}{dx} = \mathbf{e}_x \left( \frac{\rho}{\varepsilon} x - \frac{U_0}{d} - \frac{\rho d}{2\varepsilon} \right)$$

这种解法通过两次积分求解泊松方程，称为**直接分解法**，直接分解法只能求解一维泊松方程。



电磁场与电磁波

## 2.4 边值问题、唯一性定理

### 泊松方程与拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

泊松方程

当  $\rho=0$  时

$$\nabla^2 \phi = 0$$

拉普拉斯方程

静电场的边值问题是指在给定的边界条件下，求泊松方程或拉普拉斯方程的解。



电磁场与电磁波

## 1. 唯一性定理的内容

对于某一空间区域V，边界面为S，电位 $\Phi$ 满足

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{或} \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

若给定电荷的分布 $\rho$ ，给定边界面上的电位  $\Phi|_S$  或边界面上电位的法线导数  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_S$ （对于导体就是给定导体表面电荷的分布），则解是唯一的。



## 2. 唯一性定理的意义和作用

只要满足唯一性定理中的条件，边值问题的解是唯一的，所以可以用能想到的最简便的方法求解（例如直接积分法、镜像法、分离变量法、复变函数法等），还可以由经验先写出试探解，只要满足给定的边界条件，也是唯一的解。

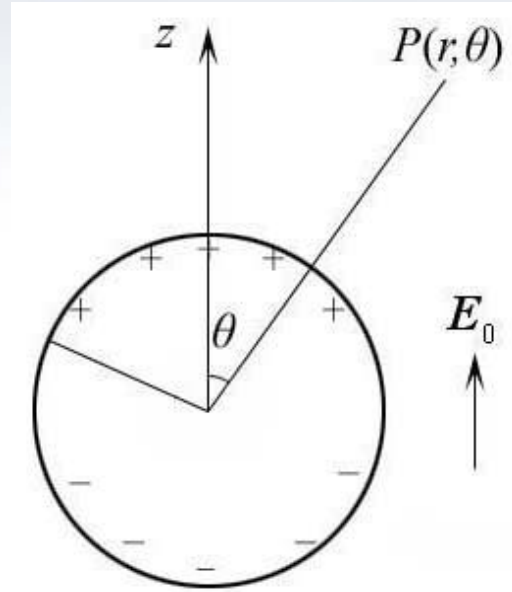


**例题：**一个不带电的孤立导体球，半径为 $a$ ，位于均匀电场 $\mathbf{E}_0 = e_z E_0$ 中，求球外电位函数的分布。

**解：**导体球在外电场中，导体球表面出现感应电荷。导体球外任一点（例如 $P$ 点）的电位等于外电场在 $P$ 点产生的电位与导体球表面所有感应电荷产生的电位叠加。

首先讨论没有放入导体球时，外电场 $\mathbf{E}_0$ 在 $P$ 点产生的电位（可以选球心处为电位参考点）

$$\Phi' = \int \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}$$



电磁场与电磁波



其中  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_z E_0$ ,  $d\mathbf{l} = -\mathbf{e}_r dr$ , 代入上式可得

$$\Phi' = \int E_0 dr \cos(\pi - \theta) = -\int E_0 dr \cos \theta = -E_0 r \cos \theta + C$$

利用边界条件  $r=0$  时,  $\Phi' = 0$ , 所以  $C=0$ , 由此可得

$$\Phi' = -E_0 r \cos \theta$$

导体球表面所有感应电荷在  $P$  点产生的电位  $\Phi''$ , 球面上感应电荷的分布是对称的, 可以看作是无数多个平行的电偶极子, 电偶极子的电位

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \propto \frac{\cos \theta}{r^2}$$

所以可以认为

$$\Phi'' \propto \frac{\cos \theta}{r^2}$$



由此可以写出 $\Phi$ 的试探解

$$\Phi = -E_0 r \cos \theta + \frac{k \cos \theta}{r^2} + k_0$$

利用边界条件:

①  $r \rightarrow \infty$ 时, 导体球面上感应电荷的影响趋近于零, 所以

$$\Phi = \Phi' = -E_0 r \cos \theta \quad \text{可得 } k_0 = 0$$

② 由于导体球是一个等位体, 所以 $r=a$ 时 $\Phi=0$ , 代入式中可得

$$-E_0 a \cos \theta + \frac{k \cos \theta}{a^2} = 0 \quad \text{可以解出} \quad k = E_0 a^3$$

所以, 导体球外的电位为

$$\Phi = -E_0 r \cos \theta + E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2}$$

最后, 验证 $\Phi$ 满足拉普拉斯方程。



**例题:** 半径分别为 $a$ 和 $b$ 的同轴线, 外加电压 $U$ 。圆柱面电极间在图示 $\theta$ 角部分充满介电常数为 $\varepsilon$ 的电介质, 其余部分为空气, 求介质与空气中的电场。

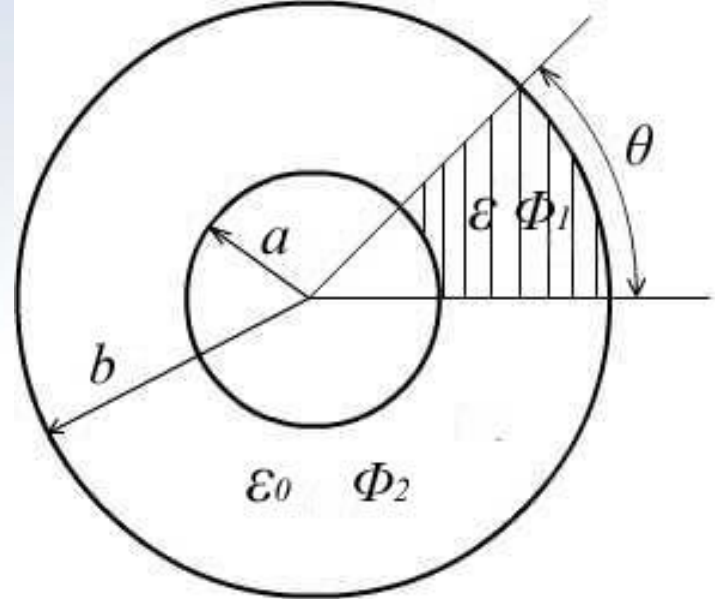
解: 根据唯一性定理, 采用试探的方法求解。

如果同轴线内没有这部分电介质, 利用高斯定理求出两圆柱面间的电位

$$\Phi = A \ln r + B$$

所以可以设两个区域内的电位函数分别为

$$\Phi_1(r) = A \ln r + B, \quad \Phi_2(r) = C \ln r + D$$



已知边界条件:

$$r=a \text{ 时, } \Phi_1(a) = \Phi_2(a) = U \quad r=b \text{ 时, } \Phi_1(b) = \Phi_2(b) = 0$$

所以  $A=C$ ,  $B=D$ , 因此两个区域内的电位的分布相同

$$\Phi_1(r) = \Phi_2(r) = A \ln r + B$$

利用边界条件可得

$$\Phi(a) = A \ln a + B = U, \quad \Phi(b) = A \ln b + B = 0$$

联立求解以上方程, 可得

$$A = \frac{U}{\ln \frac{a}{b}}, \quad B = -\frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \ln b$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \left( \frac{U}{\ln \frac{b}{a}} \right) \ln \left( \frac{b}{r} \right)$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = -\nabla \Phi = -\mathbf{e}_r \frac{U}{\ln \frac{b}{a}} \left( \frac{1}{r} \right)$$

电磁场与电磁波



## 2.5 导体系统的电容

### 2.5.1 孤立导体的电容

当一个导体的周围不存在其它导体时，该导体称为孤立导体。事实上，当某一个导体自身的线度与其他导体之间的距离相比小很多时，该导体就是孤立导体。

$$C = \frac{Q}{\Phi}$$

对任意形状的孤立导体，它所带的电量与其电位的比值只与导体自身的几何形状及周围介质的性质有关，这个比值称为孤立导体的电容。

物理意义：孤立导体的电容表示使其电位增加1V，该导体上需要增加的电量。



## 2.5.2 两导体间的电容

如果某一导体附近有其它导体时，该导体所带电量与电位的比值将受到其它导体的影响。

两导体间的电容为

$$C = \frac{q_A}{\Phi_A - \Phi_B}$$

其中， $q_A$  是其中一个导体上的电荷量

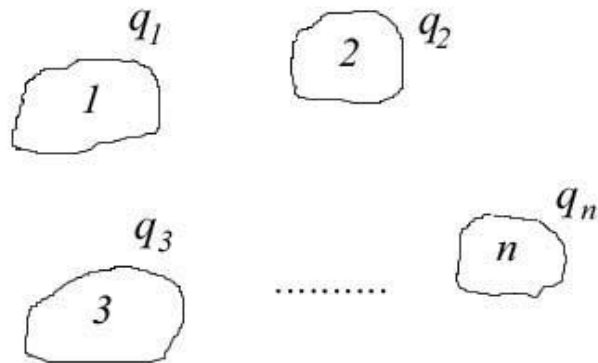
$\Phi_A - \Phi_B$  是两导体之间的电位差。



## 2.5.3 多导体系统的部分电容（分布电容）

### 1. 电位系数

对于一个孤立的多导体系统，每个导体的电位不仅与该导体上所带的电量有关，而且受其它导体上所带的电量的影响，根据叠加原理



$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + \cdots + p_{1n}q_n \\ &\vdots \\ \Phi_i &= p_{i1}q_1 + p_{i2}q_2 + \cdots + p_{in}q_n \\ &\vdots \\ \Phi_n &= p_{n1}q_1 + p_{n2}q_2 + \cdots + p_{nn}q_n \end{aligned} \right\}$$

其中 $p_{ij}$ 称为电位系数，表示第 $j$ 个电荷对第 $i$ 个导体电位的影响， $i=j$ 称为自电位系数， $i \neq j$ 称为互电位系数。

通式为

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}q_j$$



电磁场与电磁波

## 2. 感应系数（电容系数）

求解出 $q_1$ 、 $q_2 \cdots q_n$

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \beta_{11}\Phi_1 + \beta_{12}\Phi_2 + \cdots + \beta_{1n}\Phi_n \\ &\vdots \\ q_i &= \beta_{i1}\Phi_1 + \beta_{i2}\Phi_2 + \cdots + \beta_{in}\Phi_n \\ &\vdots \\ q_n &= \beta_{n1}\Phi_1 + \beta_{n2}\Phi_2 + \cdots + \beta_{nn}\Phi_n \end{aligned} \right\}$$

$i=j$ ,  $\beta_{ij}$ 称为电容系数,  
 $i \neq j$ ,  $\beta_{ij}$ 称为感应系数。

通式为

$$q_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \Phi_j$$



电磁场与电磁波



公式还可以写为：

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= C_{11}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) + \cdots + C_{1n}(\Phi_1 - \Phi_n) \\ q_2 &= C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22}\Phi_2 + \cdots + C_{2n}(\Phi_2 - \Phi_n) \\ &\vdots \\ q_n &= C_{n1}(\Phi_n - \Phi_1) + C_{n2}(\Phi_n - \Phi_2) + \cdots + C_{nn}\Phi_n \end{aligned} \right\}$$

其中， $C_{ij}$  ( $i \neq j$ ) 称为互有部分电容，表示第*i*个导体与第*j*个导体间的部分电容。

$C_{ii}$  称为自有部分电容，表示第*i*个导体与地间的部分电容。



说明:

①  $p_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $C_{ij}$  仅与各导体的大小、形状、相对位置及周围的介质有关, 对于一个给定的导体系统,  $p_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $C_{ij}$  均为常数。

②  $p_{ij}=p_{ji}$ 、 $\beta_{ij}=\beta_{ji}$ 、 $C_{ij}=C_{ji}$ , 所以电位系数矩阵、感应系数矩阵、部分电容矩阵都是对称矩阵。



## 2.6 静电场的能量与力

### 2.6.1 静电场的能量

静电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

静电场的能量为

$$W_e = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$



## 1. 系统的能量

一般情况下，一个系统既有体电荷分布，又有面电荷分布，系统的总能量：

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \Phi dV + \frac{1}{2} \iint_S \sigma \Phi dS$$

讨论：对于一多导体系统，电荷只分布在各导体表面，每一导体表面都是等位面，电荷系统的能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_S \sigma \Phi dS = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \iint_{S_i} \sigma_i \Phi_i dS = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \phi_i q_i$$



## 2. 静电场的能量

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \Phi dV + \frac{1}{2} \iint_S \sigma \Phi dS$$

静电场中  $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$ ,  $\sigma = D_n = \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$

所以 
$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \Phi \nabla \cdot \mathbf{D} dV + \frac{1}{2} \iint_{S_1} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

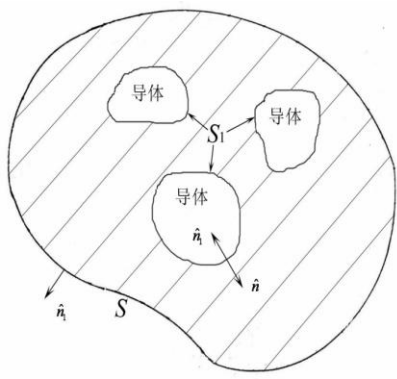
(其中 $V$ 是电场 $\neq 0$ 的整个空间区域,  $S_1$ 是所有导体的表面)

利用矢量恒等式  $\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \psi$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\Phi \mathbf{D}) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{2} \iint_{S_1} \Phi \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

把第一项利用散度定理变换成面积分

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_{S+S_1} \Phi \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{2} \iint_{S_1} \Phi \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



电磁场与电磁波

$\hat{n}_1$ 是空间区域 $V$ 外表面的外法线矢量,  $\hat{n}$ 是各导体表面的外法线矢量

$$\hat{n}_1 = -\hat{n}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_S \Phi \mathbf{D} \cdot \hat{n}_1 dS + \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{2} \iint_{S_1} \Phi \mathbf{D} \cdot (\hat{n}_1 + \hat{n}) dS$$

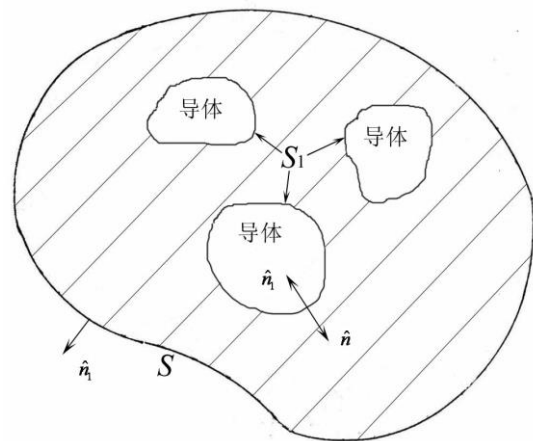
上式中:

第三项为0,

第一项中的 $S$ 可以选在 $\infty$ 处,

$$\Phi \propto \frac{1}{R}, D \propto \frac{1}{R^2}$$

所以第一项积分也趋近于零



电磁场与电磁波

静电场能量

$$W_e = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$

静电场的能量密度

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

对于各向同性线性介质，  
静电场的能量密度

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$



电磁场与电磁波

**例题：**部分填充介质的同轴线，求单位长度内的电场能量。

解：已解出介质内和空气中的电场强度相等，都是

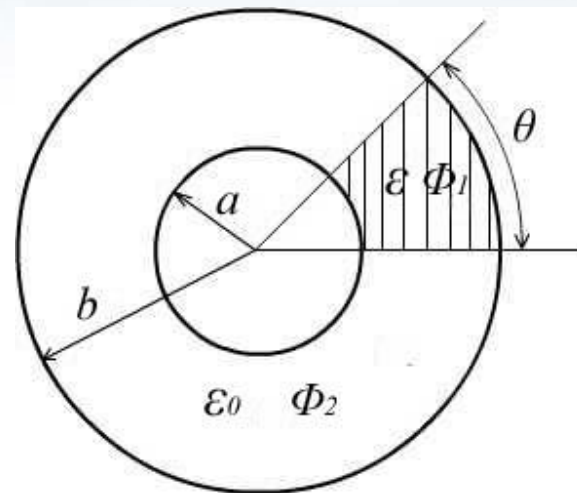
$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_r \frac{U}{\ln \frac{b}{a}} \left( \frac{1}{r} \right)$$

介质内和空气中的能量密度分别为

$$w_{e1} = \frac{1}{2} \varepsilon E_1^2, \quad w_{e2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_2^2$$

单位长度内的电场能量为

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^\theta \varepsilon E_1^2 r dr d\varphi + \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi-\theta} \varepsilon_0 E_2^2 r dr d\varphi \\ &= \frac{1}{2} U_0^2 \left[ \frac{\varepsilon \theta_1}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{\varepsilon_0 (2\pi - \theta_1)}{\ln \frac{b}{a}} \right] \end{aligned}$$





## 2.6.2 利用虚位移原理计算电场力

在静电场中，带电导体会受到电场的作用力，这一作用力是系统中所有其他电荷建立的电场对导体表面上面电荷的作用力，此力总是垂直于导体表面。

带电体之间的相互作用力从原则上讲可以用库仑定律计算，但实际上，除少数简单情况外，计算较困难。虚位移法是通过电场能量求解电场力的方法。

设有一个与电源相连的带电体系统，假设某一个带电体在电场力的作用下产生了一个小位移，那么电场力就要对它做功，根据能量守恒，则：外部给系统提供的能量 $dW$ 应等于系统内静电能量的增量 $dW_e$ 再加上电场力作的功，即

$$dW = dW_e + fdg$$

$f$ 是广义力， $dg$ 是广义位移。



电磁场与电磁波

- 广义位移  $g$ : 距离、面积、体积、角度。
- 广义力  $f$ : 企图改变广义坐标的力。
- 力的方向:  $f$  的正方向为  $g$  增加的方向。

功 = 广义力  $\times$  广义坐标

广义力	广义位移
力 (N)	距离
力矩 (Nm)	角度
压力 (N/m <sup>2</sup> )	体积
表面张力 (N/m)	面积



电磁场与电磁波

讨论：

$$dW = dW_e + fdg$$

1. 若各导体电荷不变，  $dq=0$

例如切断电源，不为系统提供能量，即  $dW=0$ ，

$$fdg = -dW_e \Big|_{q=C}$$

即电场力作功必须靠静电能减少来实现，电场力为

$$f = - \frac{\partial W_e}{\partial g} \Big|_{q=C}$$



电磁场与电磁波

## 2. 若各导体电位不变

$$dW = dW_e + fdg$$

例如电源不断开，电源对导体系统提供的能量为

$$dW = \sum_i \Phi_i dq_i$$

导体系统增加的静电能为

所以 
$$dW_e = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i dq_i$$

电场能量的增量是外电源提供能量的一半，另一半转化为电场力做功。

$$fdg = dW - dW_e = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i dq_i = dW_e$$

电场力为

$$f = \left. \frac{\partial W_e}{\partial g} \right|_{\Phi=C}$$



$$f = - \frac{\partial W_e}{\partial g} \bigg|_{q=C}$$

$$f = \frac{\partial W_e}{\partial g} \bigg|_{\Phi=C}$$

说明：在电荷不变和电位不变条件下，  
电场力的表达式不同，但最终计算出的  
电场力是相同的。



## 2.7 恒定电场

恒定电场是动态平衡下的电荷产生的，它与静电场有相似之处。

- 理解各种电流密度的概念，通过欧姆定律和焦耳定律深刻理解场量之间的关系。
- 掌握导电媒质中的恒定电场基本方程和分界面边界条件。
- 熟练掌握静电比拟法和电导的计算。



## 2.7.1 电流与电流密度

电流强度只能描述一根导线上总的电流的强弱。为了描述电荷在空间的流动情况，需要引入电流密度的概念。

### (1) 体电流密度 $\mathbf{J}$

体电流密度矢量描述导体内电流的分布，定义为穿过某点单位垂直截面的电流强度

$$\mathbf{J} = \frac{dI}{S_{\perp}} = \rho_v \mathbf{v}$$

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

### (2) 面电流密度 $\mathbf{J}_s$

$$\mathbf{J}_s = \frac{dI}{dl_{\perp}} = \rho_s \mathbf{v}$$

$$I = \int_l \hat{\mathbf{n}} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{J}_s) = \int_l \mathbf{J}_s \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times d\mathbf{l})$$

### (3) 线电流 $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho_l v$



## 2. 电流元

电荷定向运动形成电流，电荷元 $dq$ 以速度 $\mathbf{v}$ 运动， $dq\mathbf{v}$ 称为电流元。常用的有

体电流元

$$dq\mathbf{v} = \rho dV\mathbf{v} = \mathbf{J}dV$$

面电流元

$$dq\mathbf{v} = \rho_s dS\mathbf{v} = \mathbf{J}_s dS$$

线电流元

$$dq\mathbf{v} = \rho_l dl\mathbf{v} = I d\mathbf{l}$$





## 2.7.2 恒定电场的基本方程和边界条件

### 1. 矢量场方程

#### (1) 电流连续性方程

电流连续性方程的积分形式

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

单位时间内从S面流出的电量等于是S面内单位时间内减少的电量。电流连续性方程的实质是电荷守恒定律。

电流连续性方程的微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

对于恒定电场，电荷是运动的，但电荷的分布不变

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$



## (2) 环路定理

恒定电场的环路定理与静电场相同

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

在恒定电场中也可以引入电位

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

## 2. 位函数方程

$$\nabla^2\Phi = 0$$

恒定电场中的电位满足拉普拉斯方程，一维边值问题也可以用直接积分法求解。



## 2.7.3 导电媒质中的传导电流

### 1. 电源电动势

电源电动势定义为非静电力把单位正电荷从电源内由负极移到正极所作的功

$$e = \int_l E' \cdot dl$$

( $E'$  是单位正电荷受到的非静电力, 称为非静电场强。)

### 2. 电阻和电导

$$R = \int_l \rho \frac{dl}{S} = \int_l \frac{dl}{\sigma S}$$

(其中 $\rho$ 是导体的电阻率,  $\sigma$ 是电导率,  $l$ 是导体的长度,  $S$ 横截面积。)

导体的电导是电阻的倒数

$$G = \frac{1}{R}$$



电磁场与电磁波

## 2. 欧姆定理的微分形式

欧姆定理积分形式  $U = RI$

欧姆定理微分形式  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

## 3. 焦耳定理的微分形式

焦耳定律的积分形式  $P = UI$

焦耳定律的微分形式  $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$



## 4. 导体内的净余电荷

静电场中、恒定电场中，导体内没有净余电荷。

下面讨论给导体充电时，还没有达到稳恒状态，

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{电流连续性方程})$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho$$

$$\rightarrow \rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(其中 $\tau = \sigma/\varepsilon$ ，称为弛豫时间，表示 $\rho$ 衰减的速度。经过 $\tau$ 秒导体内体电荷密度 $\rho$ 衰减到 $t=0$ 时刻的 $1/e$ 。)

例如对于铜，可以算出， $\tau \approx 10^{-19} \text{ s}$ ，所以给导体充入电荷，经过极短的时间，电荷都扩散到导体表面，导体内部没有净余电荷。



## 2.7.4 恒定电场与静电场的比拟

恒定电场（电源外）

静电场（无源区）

基本方程

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

导出方程

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad \nabla^2 \phi = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad \nabla^2 \phi = 0$$

$$\phi = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\phi = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$q = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$G = I / U$$

$$C = q / U$$

边界条件

$$J_{1n} = J_{2n} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \phi}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \phi_1 = \phi_2$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \phi_1 = \phi_2$$

静电场 ( $\rho = 0$ )

$\vec{E}$

$\phi$

$\vec{D}$

$q$

$\epsilon$

导电媒质中恒定电场（电源外）

$\vec{E}$

$\phi$

$\vec{J}$

$I$

$\sigma$

电磁场与电磁波



比拟法可以直接用在恒定电场和静电场的计算中。

例如两导体之间的电容定义为

$$C = \frac{q}{U_{ab}} = \frac{\int_S \rho_s dS}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\int_S \varepsilon E_n dS}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

两导体之间的电导定义为

$$G = \frac{I}{U_{ab}} = \frac{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\int_S \sigma E_n dS}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

比较两式可得

$$G = \frac{\sigma}{\varepsilon} C$$

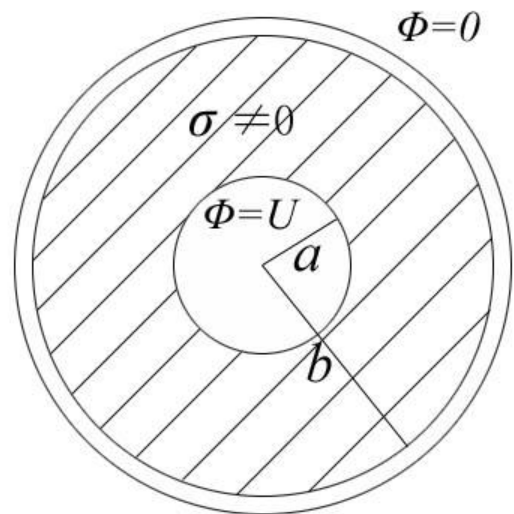




**例题:**同轴线的内、外半径分别为 $a$ 和 $b$ ，填充的介质，有漏电现象。同轴线外加电压为 $U$ ，求漏电介质内的 $\Phi$ 、 $E$ 、 $J$ 、单位长度上的漏电流和单位长度上的电容。

解：同轴线的内外导体中有轴向流动的电流，由 $J=\sigma E$ ，对于良导体构成的同轴线，导体内的轴向电场 $E_z$ 很小。其次内外导体表面有面电荷分布，内导体表面为正的面电荷，外导体内表面为负的面电荷，它们是电源充电时扩散而稳定分布在导体表面的，故在漏电介质中存在径向电场分量 $E_r$ 。设内、外导体是理想导体，则 $E_z=0$ ，内外导体表面是等位面，漏电介质中的电位只是 $r$ 的函数，拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0$$





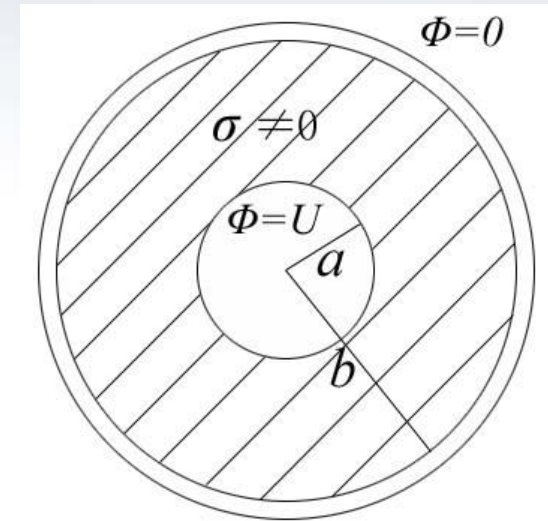
边界条件为  $r = a, \Phi = U; r = b, \Phi = 0$

利用直接积分法可以解出

$$\Phi(r) = \frac{U}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \ln \frac{b}{r}$$

电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}_r \frac{d\Phi}{dr} = \mathbf{e}_r \frac{U}{r \ln \frac{b}{a}}$$



漏电介质中的电流密度为

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{\sigma U}{r \ln \frac{b}{a}}$$

同轴线内单位长度的漏电流为

$$I_0 = 2\pi r \cdot 1 \cdot \frac{\sigma U}{r \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\sigma U}{\ln \frac{b}{a}}$$



电磁场与电磁波

单位长度的漏电导为

$$G_0 = \frac{I_0}{U} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

设漏电介质的介电常数为  $\varepsilon$  ,  
则内导体表面上的面电荷密度为

$$\rho_s = \varepsilon E_r = \frac{\varepsilon U}{a \ln \frac{b}{a}}$$

所以单位长度上的电荷量为

$$\rho_l = 2\pi a \cdot 1 \cdot \rho_s = \frac{2\pi\varepsilon U}{\ln \frac{b}{a}}$$

单位长度上的电容量为

$$C_0 = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$



**例题:**有两层介质的同轴电缆，内导体的半径为 $a$ ，两层介质分界面的半径为 $b$ ，外导体的内半径为 $c$ ，两层介质的介电常数分别为 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ ，漏电导率分别 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 。外加电压 $U$ 时，求两层介质中的电场强度，分界面上的自由电荷密度，单位长度的电容和漏电导。

解：设单位长度上带有电荷 $\rho_l$ ，由高斯定理求出两层介质中的电场强度分别为

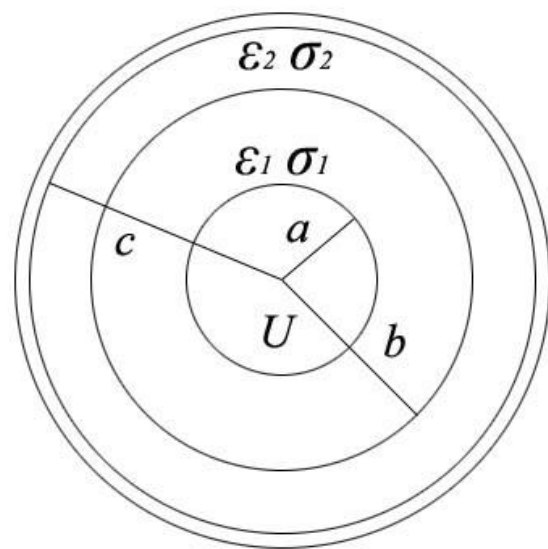
$$E_1 = e_r \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_1 r}, \quad E_2 = e_r \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_2 r}$$

同轴线内外导体之间的电位差为

$$U = \int_a^b E_1 \cdot dr + \int_b^c E_2 \cdot dr = \frac{\rho_l}{2\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b} \right)$$

同轴线单位长度的电容为

$$C_0 = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2 \ln \frac{b}{a} + \varepsilon_1 \ln \frac{c}{b}}$$



单位长度的电导为

$$G = \frac{\sigma}{\varepsilon} C$$

$$G_0 = \frac{2\pi\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2 \ln \frac{b}{a} + \sigma_1 \ln \frac{c}{b}}$$

单位长度的漏电流为

$$I = UG_0 = \frac{2\pi\sigma_1\sigma_2 U}{\sigma_2 \ln \frac{b}{a} + \sigma_1 \ln \frac{c}{b}}$$

漏电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi r \cdot 1} = \frac{\sigma_1\sigma_2 U}{r \left( \sigma_2 \ln \frac{b}{a} + \sigma_1 \ln \frac{c}{b} \right)}$$

两层介质中的电场强度分别为

$$E_1 = \frac{J}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2 U}{r \left( \sigma_2 \ln \frac{b}{a} + \sigma_1 \ln \frac{c}{b} \right)}, \quad E_2 = \frac{J}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1 U}{r \left( \sigma_2 \ln \frac{b}{a} + \sigma_1 \ln \frac{c}{b} \right)}$$

两层介质分界面上的自由电荷密度

$$\rho_S = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{(\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2) U}{b \left( \sigma_2 \ln \frac{b}{a} + \sigma_1 \ln \frac{c}{b} \right)}$$

电磁场与电磁波

