第一章 信号与系统的基本概念

1．1 学习重点

1、 信号与系统的基本概念，信号的分类，会画信号的波形。

2、 常用基本信号（连续时间信号和离散时间信号）的时域描述方法、 特点以及性质，并会灵活运用性质。

3、 信号的时域分解、 变换与时域运算，及其综合运用。

4、 深刻理解线性时不变系统的定义与性质，并会应用这些性质。

5、 利用MATLAB 表示信号、 实现信号的基本运算。

1．2 教材习题同步解析

1.1 下列信号中哪些是周期信号，哪些是脉冲信号？哪些是能量信号，它们的能量各为多少？哪些是功率信号，它们的平均功率各为多少？

（1） $e(t)$ （2） $e(t)-e(t-1)$

（3） $\frac{1}{1+t}e(t)$ （4） $3\cos(w_0 t+q)$

（5） $3e^{j(w_0+q)}$ （6） $e^{-at}\cos w_0 te(t)$

（7） $3te(t)$ （8） $\cos\frac{w_0 t}{4}+\sin\frac{w_0 t}{5}$

【 知识点窍】 本题考察周期信号、 脉冲信号、 能量信号、 功率信号的概念

【 逻辑推理】 时间间隔无穷大时周期信号都是功率信号，只存在在有限时间内的信号是能量信号。信号总能量为有限值而信号平均功率为零的是能量信号；信号平均功率为有限值而信号总能量为无限大的是功率信号。

解：（1） $e(t)$是功率信号，其平均功率：

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[e(t)]^2\,dt=\frac{1}{2}$$

$$E=\infty$$

（2）$e(t)-e(t-1)$**是脉冲信号，其为能量信号，能量为：**

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}[e(t)-e(t-1)]^2\,dt=\int_0^1[e(t)-e(t-1)]^2\,dt=1$$

$$P=0$$

（3）$\dfrac{1}{1+t}e(t)$**是能量信号，其能量为：**

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left[\frac{1}{1+t}e(t)\right]^2dt=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{1+t}e(t)\right]^2dt=1$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{1}{1+t}e(t)\right]^2dt=0$$

（4）$3\cos(w_0t+q)$**是功率信号，其平均功率为：**

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[3\cos(w_0t+q)]^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}9\frac{\cos2(w_0t+q)+1}{2}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\frac{9}{2}\cdot2T=\frac{9}{2}$$

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}[3\cos(w_0t+q)]^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}[3\cos(w_0t+q)]^2\,dt=\infty$$

（5）$3e^{j(w_0+q)}$**为功率信号，其平均功率为：**

$$P=9e^{2j(w_0+q)}$$

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left[3e^{j(w_0+q)}\right]^2dt=\lim_{T\to\infty}9e^{2j(w_0+q)}2T=\infty$$

（6）$e^{-at}\cos w_0te(t)$**为能量信号，其能量为：**

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left[e^{-at}\cos w_0te(t)\right]^2dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}e^{-2at}\cos^2w_0tdt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}e^{-2at}\,\frac{\cos2w_0t+1}{2}dt=\frac{1}{4a}+\frac{1}{4a\left(1-\dfrac{w_0^2}{a^2}\right)}$$

$$P=0$$

（7）$3te(t)$**既非能量信号又非功率信号，因其：**

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[3te(t)]^2\,dt=\infty$$

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}[3te(t)]^2\,dt=\int_0^{\infty}[3te(t)]^2\,dt=\infty$$

（8） $\cos\frac{w_0t}{4}+\sin\frac{w_0t}{5}$ **为功率信号，其平均功率为**

$$\begin{aligned}P&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\cos\frac{w_0t}{4}+\sin\frac{w_0t}{5}\right]^2dt\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\cos^2\frac{w_0t}{4}+2\cos\frac{w_0t}{4}\sin\frac{w_0t}{5}+\sin^2\frac{w_0t}{5}\right]dt\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{\cos w_0t+1}{2}+\sin\frac{9w_0t}{20}-\sin\frac{w_0t}{20}+\frac{1-\cos\frac{2w_0t}{5}}{2}\right]dt\\&=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2}\cdot2T+\frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2}\cdot2T\right]\\&=1\end{aligned}$$

$$E=\infty$$

1.2 **试画出下列各函数式表示的信号的波形。**

（1） $\cos wte(t)$　　（2） $\cos wte(t-t_0)\quad t_0>0$

（3） $\cos[w(t-t_0)]e(t)\quad t_0>0$　　（4） $\cos[w(t-t_0)]e(t-t_0)\quad t_0>0$

（5） $e(t_0-t)\quad t_0>0$　　（6） $e(t_0-2t)\quad t_0>0$

（7） $e(t_0-2t)-e(-t_0-2t)\quad t_0>0$　　（8） $e[\sin pt]$

（9） $2^{-n}e[n]$　　（10） $2^{-(n-2)}e[n-2]$

（11） $-ne[n+2]$　　（12） $\sin\left(\frac{1}{5}pn\right)$

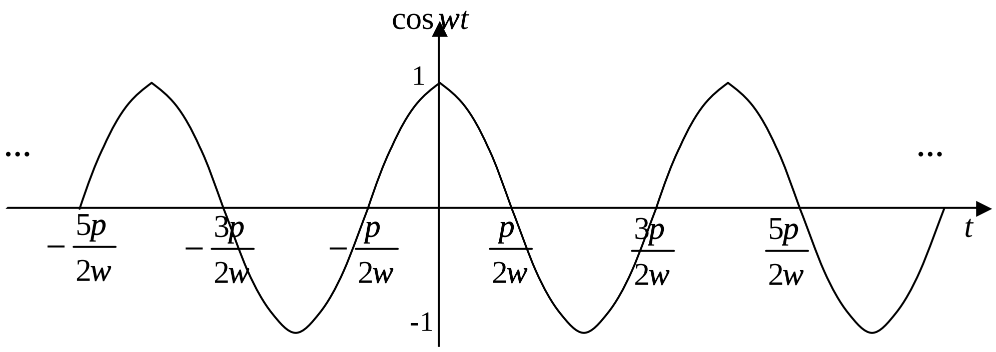
【知识点窍】本题考察基本信号的绘制及自变量变换导致信号变换的概念

【逻辑推理】本题用到了基本信号的性质及信号的时域运算与变换。

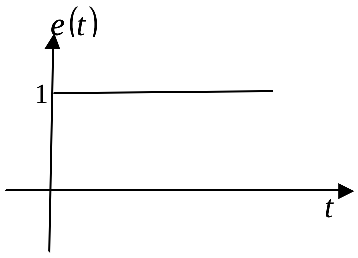
解：

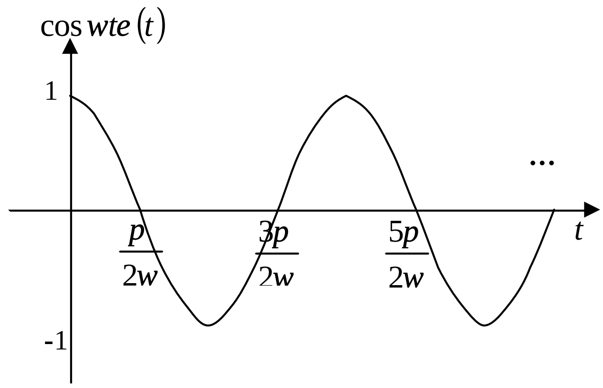
（1） $\cos wte(t)$ **函数式的信号的波形如图** 1.1（c）**所示.。**

（2） $\cos wte(t-t_0)\quad t_0>0$ **函数式的信号的波形如图** 1.2（b）**所示.。**



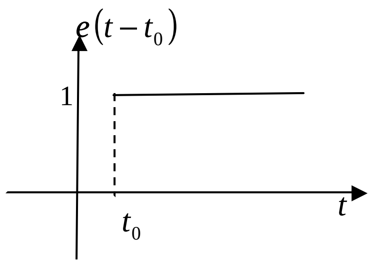
(a)

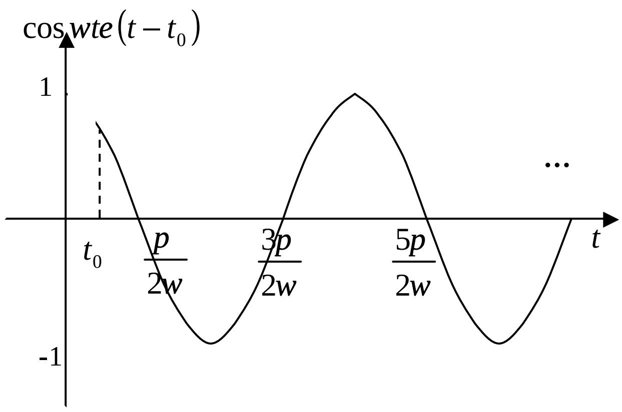




(b) (c)

图 1.1



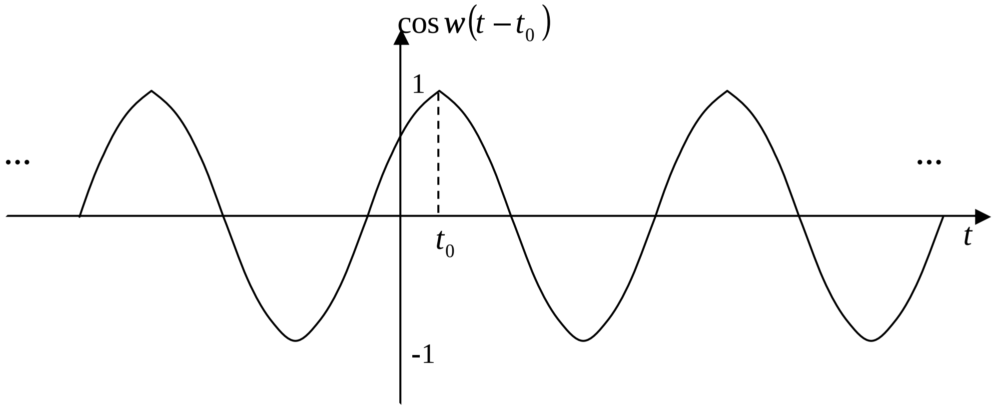


(a) (b)

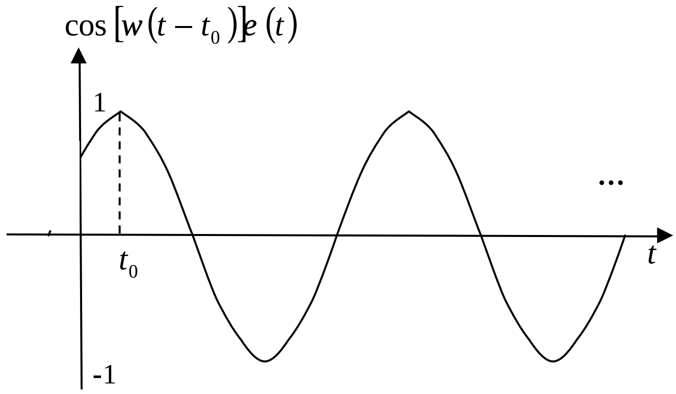
图 1.2

(3) $\cos[w(t-t_0)]e(t)$ $t_0>0$ **函数式的信号的波形如图** 1.3（b）**所示.**。

(4) $\cos[w(t-t_0)]e(t-t_0)$ $t_0>0$ **函数式的信号的波形如图** 1.4 **所示.**。



(a)



(b)

图 1.3

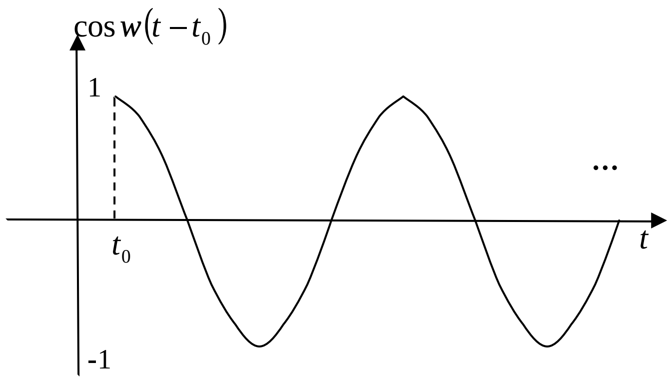
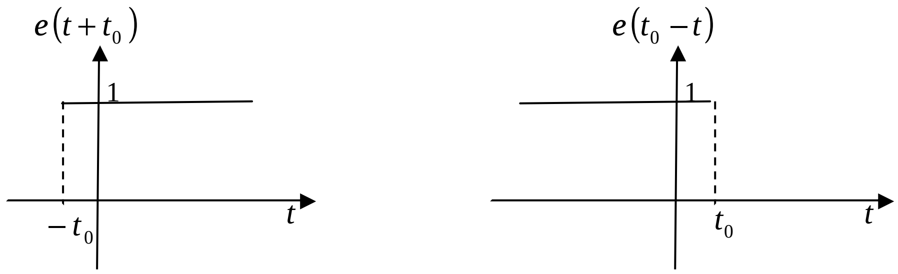


图 1.4

（5） $e(t_0-t)$　$t_0>0$ 函数式的信号的波形如图 1.5（b）所示.。

（6） $e(t_0-2t)$　$t_0>0$ 函数式的信号的波形如图 1.6 所示.。



(a)　　　　　　　　　　　　　　(b)

图 1.5

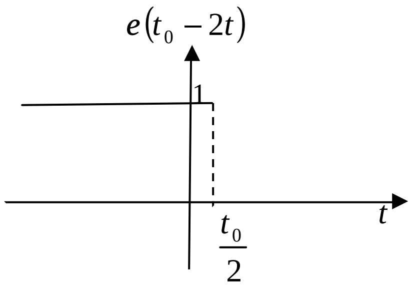
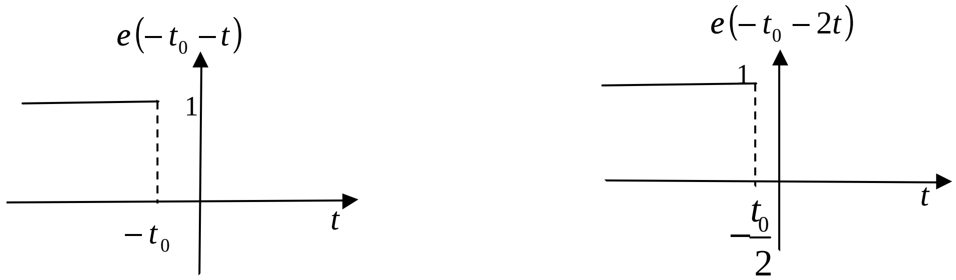
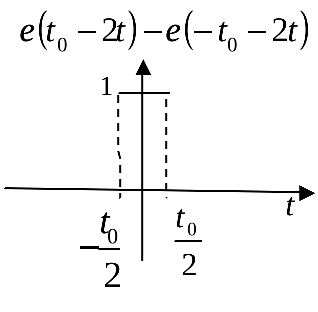


图 1.6

（7） $e(t_0-2t)-e(-t_0-2t)$　$t_0>0$ 函数式的信号的波形如图 1.7（c）所示.。



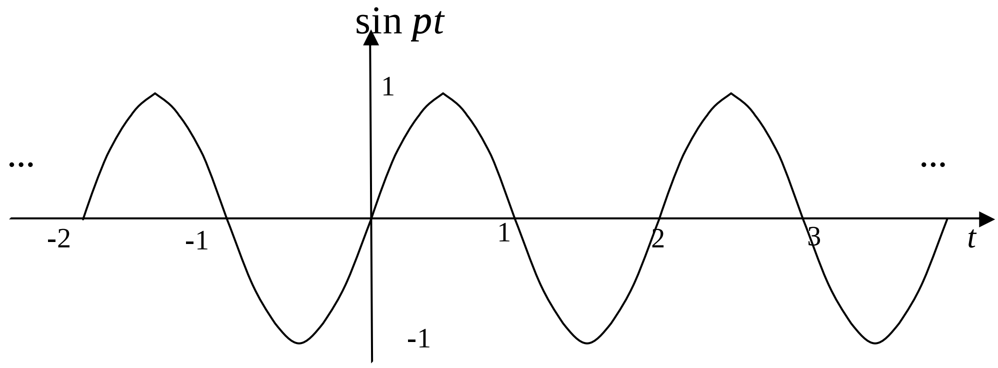
(a)　　　　　　　　　　　　　　(b)



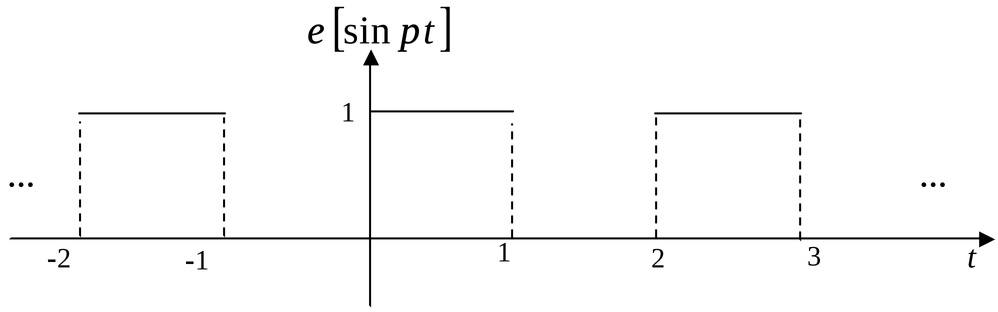
(c)

图 1.7

（8） $e[\sin pt]$**函数式的信号的波形如图** 1.8（b）**所示**.。



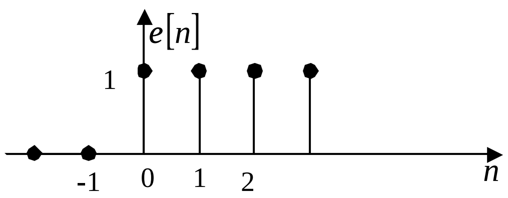
(a)

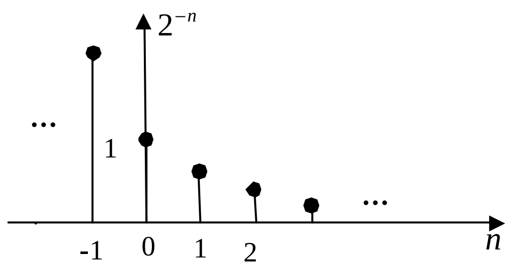


(b)

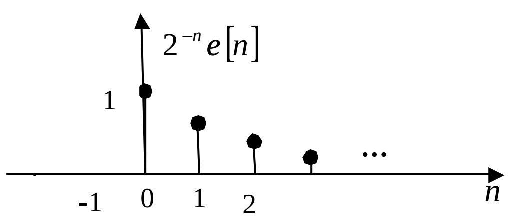
图 1.8

（9） $2^{-n}e[n]$**函数式的信号的波形如图** 1.9（c）**所示**.。





(a) (b)



(c)

图 1.9

(10) $2^{-(n-2)}e[n-2]$函数式的信号的波形如图 1.10 所示.。

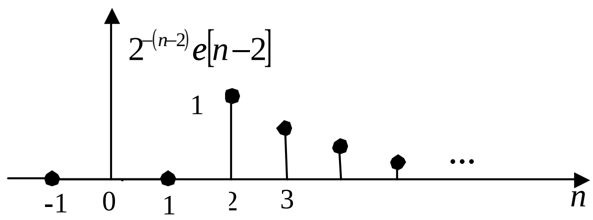
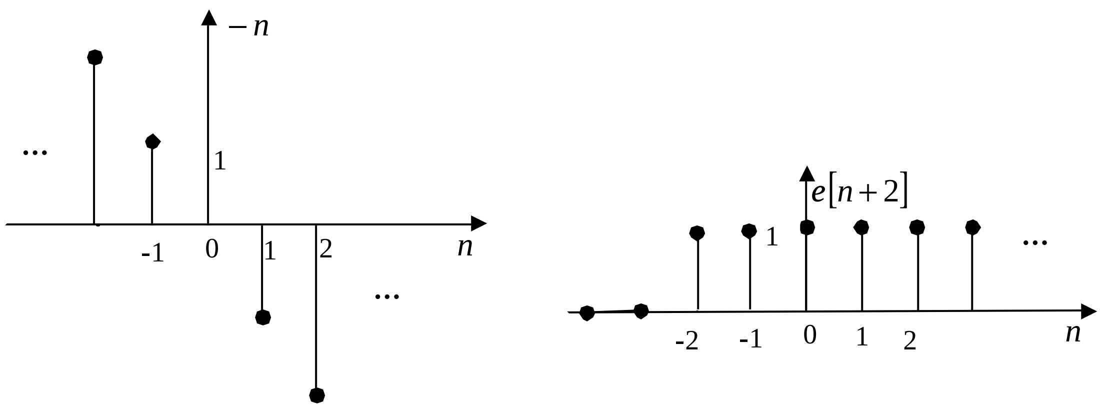
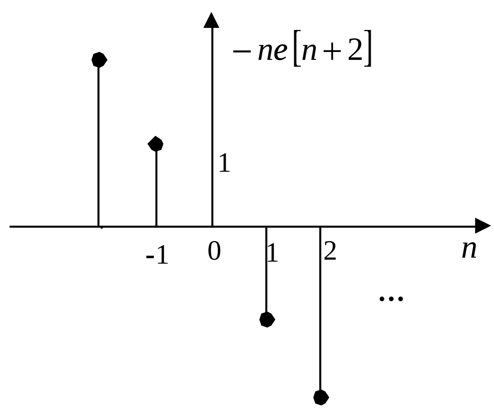


图 1.10

(11) $-ne[n+2]$函数式的信号的波形如图 1.11（c）所示.。



(a)　　　　(b)



(c)

图 1.11

(12) $\sin\left(\frac{1}{5}pn\right)$函数式的信号的波形如图 1.12 所示.。

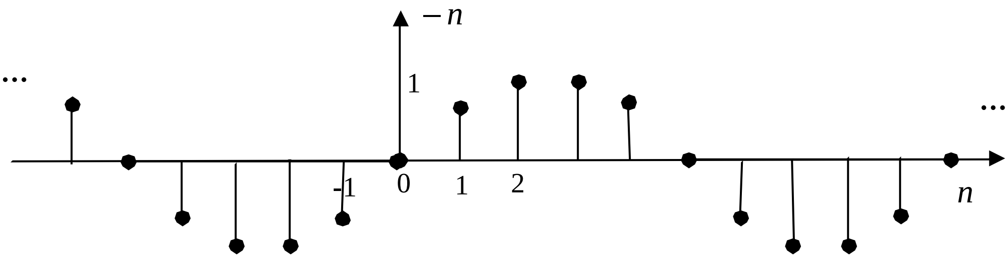
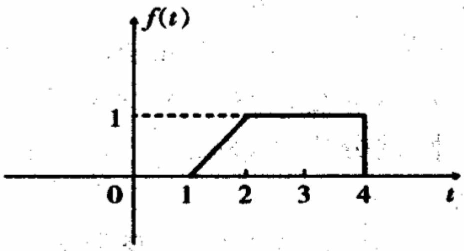
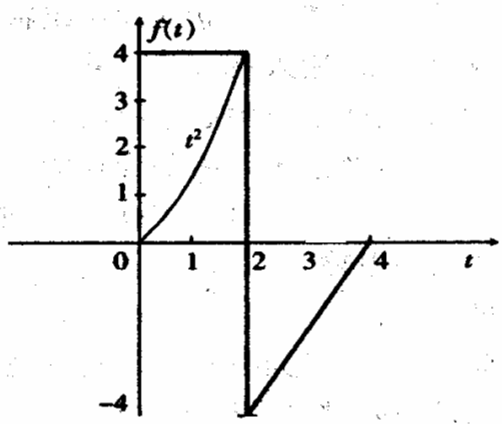


图 1.12

1.3　**试写出图 1.13 所示各信号的表达式。**



(a)



(b)

图 1.13

【知识点窍】本题考察信号的概念。

【逻辑推理】本题用到了基本信号的性质及描述。

解：(a)**由图** 1.13(a)**可得：**

$$f(t)=\begin{cases} t-1 & 1\le t\le 2 \\ 1 & 2<t\le 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(b)**由图** 1.13(b)**可得：**

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & 0\le t\le 2 \\ 2t-8 & 2<t\le 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

1.4　**已知信号** $f(t)$ **的波形如图** 1.14 **所示。试画出下列各信号的波形。**

(1)　$f(2t)$　　　　(2)　$f(t)\varepsilon(t)$

(3)　$f(t-3)$　　　　(4)　$f(t-3)\varepsilon(t-3)$

(5) $f(t+2)$　　(6) $f(2-t)$

(7) $f(2-t)e(2-t)$　　(8) $f(-2-t)e(-t)$

(9) $f(t-1)[e(t)-e(t-2)]$

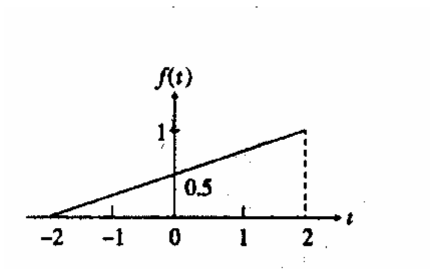


图 1.14

【知识点窍】本题考察信号的绘制及自变量变换导致信号变换的概念

【逻辑推理】本题用到信号的时域运算与变换。

解：(1) $f(2t)$**信号的波形如图** 1.15 **所示。**

(2) $f(t)e(t)$**信号的波形如图** 1.16 **所示。**

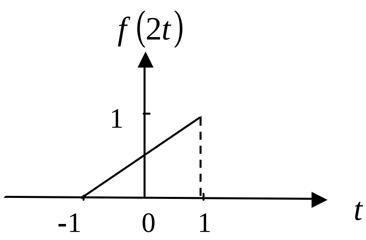


图 1.15

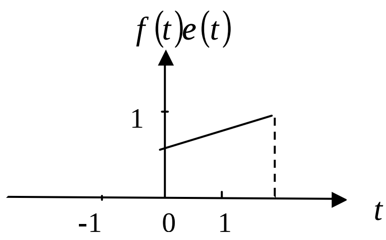


图 1.16

(3) $f(t-3)$**信号的波形如图** 1.17 **所示。**

(4) $f(t-3)e(t-3)$**信号的波形如图** 1.18 **所示。**

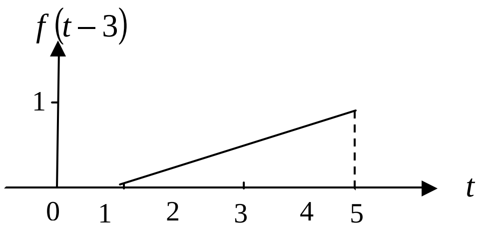


图 1.17

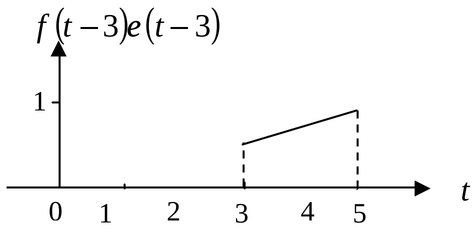


图 1.18

（5） $f(t+2)$**信号的波形如图** 1.19 **所示。**

（6） $f(2-t)$**信号的波形如图** 1.20 **所示。**

（7） $f(2-t)e(2-t)$**信号的波形如图** 1.21 **所示。**

（8） $f(-2-t)e(-t)$**信号的波形如图** 1.22 **所示。**

（9） $f(t-1)[e(t)-e(t-2)]$**信号的波形如图** 1.23 **所示。**

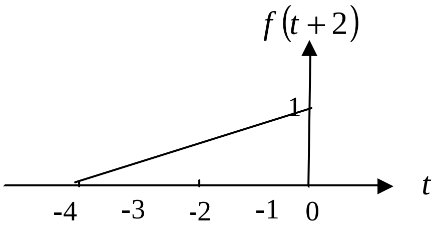


图 1.19

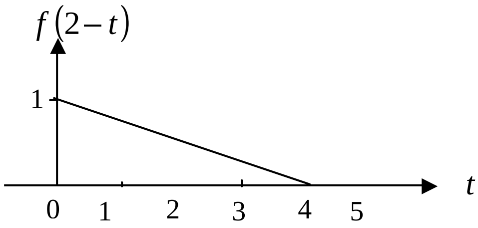
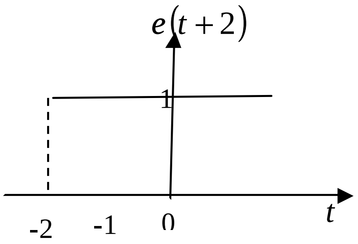
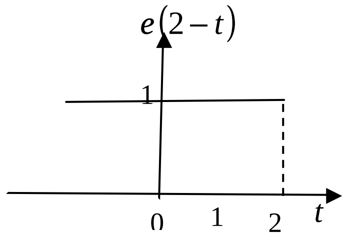


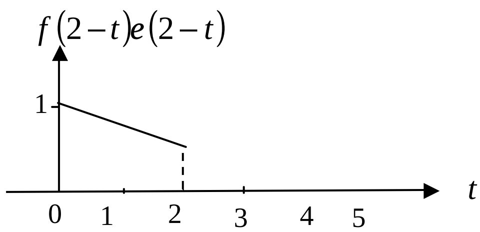
图 1.20



（a）



（b）



（c）

图 1.21

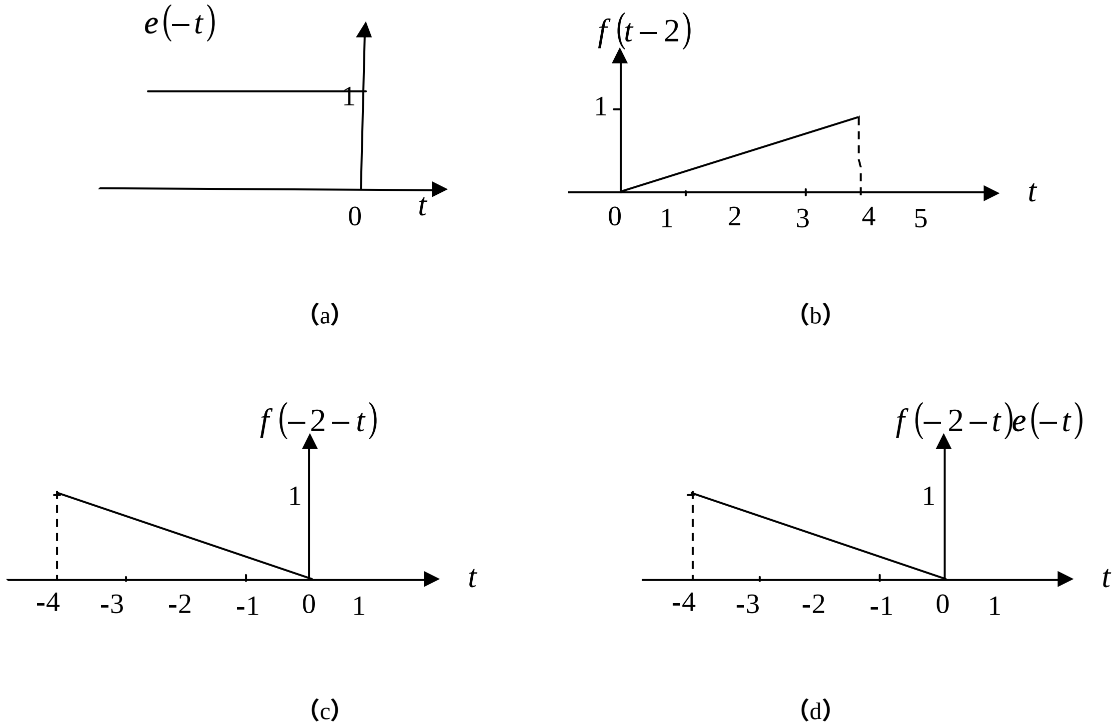


图 1.22

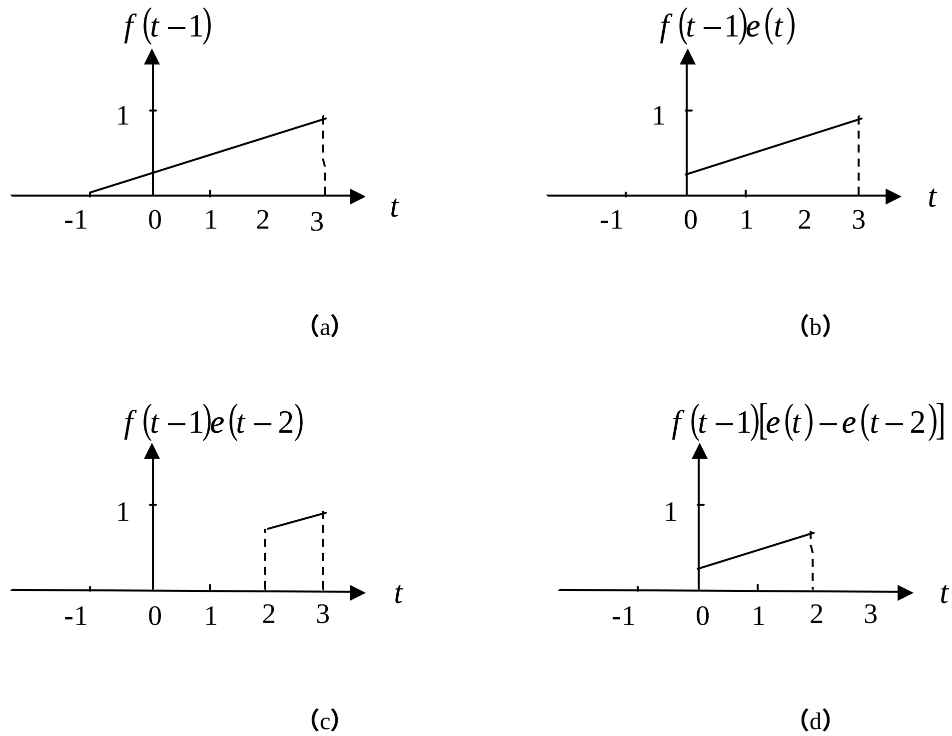


图 1.23

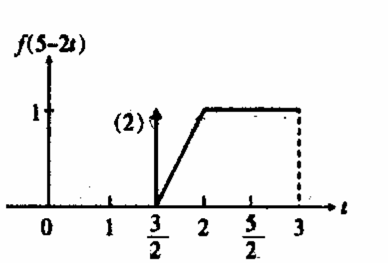


图 1.24

1.5　**已知信号 $f(5-2t)$ 的波形如图 1.24 所示，试画出 $f(t)$ 的波形图，并加以标注。**

【知识点窍】本题考察信号的简单处理。

【逻辑推理】在信号的简单处理中常有综合时移、折叠与展缩，可以针对相应波形分步处理。通常，在处理与本题相同情况，采用展缩、折叠、时移顺序比较好。

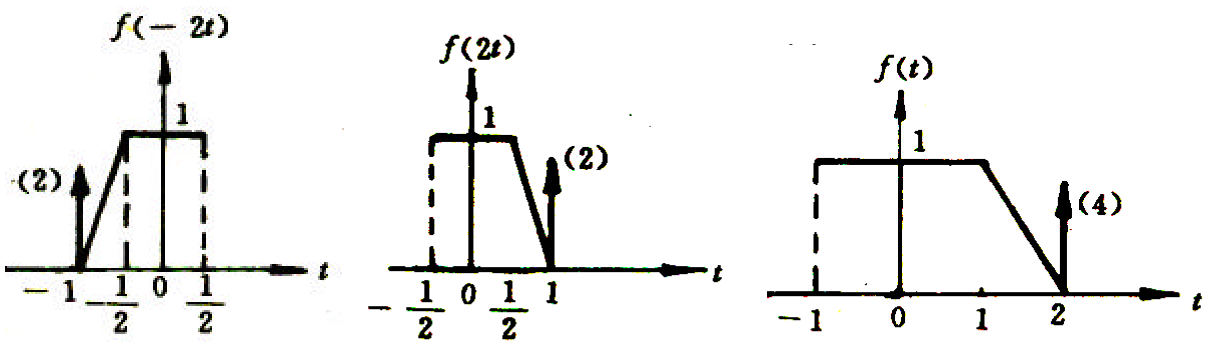
解：$f(5-2t)$ 是将 $f(t)$ 经过时移、折叠、展缩三种变换后得到的。三种变换的次序是可以任意的，故一共有六种途径。下面用介绍其中四种方法求解。在求解过程中要特别注意冲激函数的展缩变换。

方法一：时移→折叠→展缩

$$f(5-2t)=f\left[-2(t-\frac{5}{2})\right]\xrightarrow{\text{左时移}\ \frac{5}{2}}f\left[-2(t-\frac{5}{2}+\frac{5}{2})\right]=f(-2t)=f[2(-t)]$$

$$\xrightarrow{\text{折叠}}\ f(2t)\ \xrightarrow{\text{展宽 1 倍}}\ f\left(2\times\frac{1}{2}t\right)=f(t)$$

其波形依次如图 1.25（a）（b）（c）所示。



(a)　(b)　(c)

图 1.25

方法二：折叠→时移→展缩

$$f(5-2t)\xrightarrow{\text{折叠}} f(5+2t)=f\left[2\left(t+\frac{5}{2}\right)\right]\xrightarrow{\text{右时移}\ \frac{5}{2}} f\left[2\left(t+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\right)\right]=f(2t)$$

$$\xrightarrow{\text{展宽 1 倍}} f\left(2\times\frac{1}{2}t\right)=f(t)$$

其波形依次如图 1.26（a）（b）（c）**所示。**

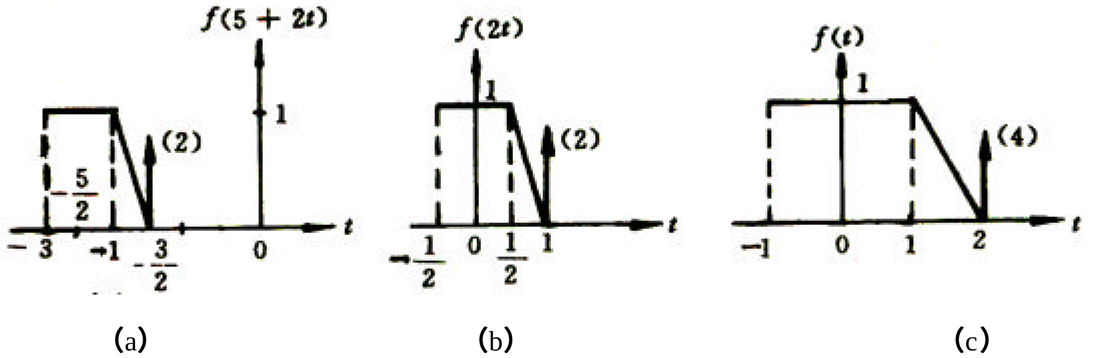


图 1.26

方法三：展缩→折叠→时移

$$f(5-2t)\xrightarrow{\text{展宽 1 倍}} f\left(5-2\times\frac{1}{2}t\right)=f(5-t)\xrightarrow{\text{折叠}} f(5+t)=f(t+5)\xrightarrow{\text{右时移 5}} f(t)$$

其波形依次如图 1.27（a）（b）（c）**所示。**

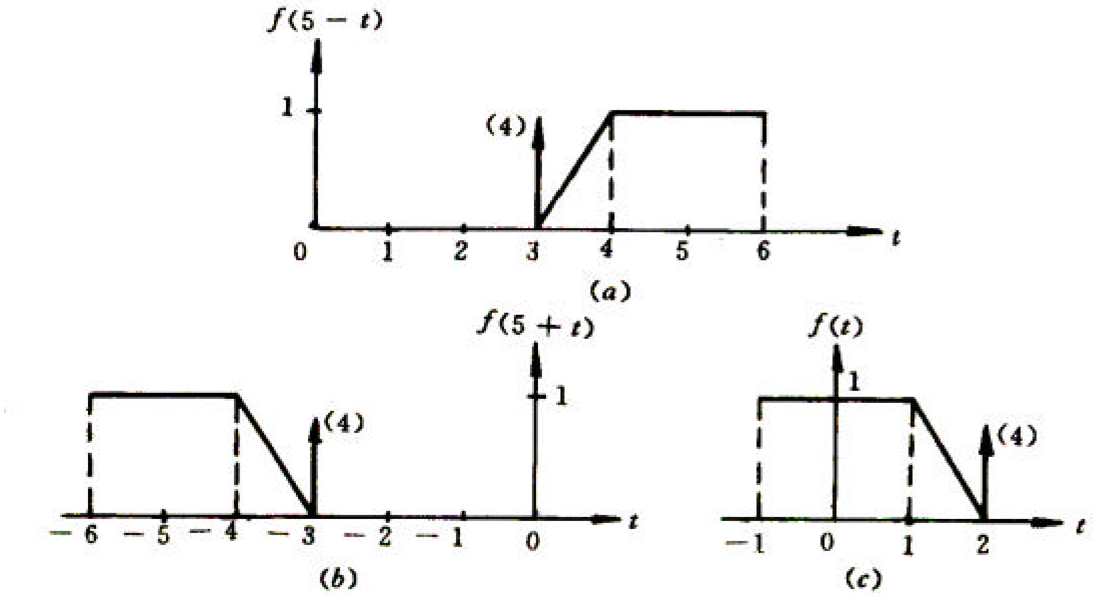


图 1.27

方法四：时移→展缩→折叠

$$f(5-2t)=f\left[-2(t-\frac{5}{2})\right]\xrightarrow{\text{左时移}\frac{5}{2}}f\left[-2(t-\frac{5}{2}+\frac{5}{2})\right]=f(-2t)\xrightarrow{\text{展宽 1 倍}}$$

$$f\left(-2\times\frac{1}{2}t\right)=f(-t)\xrightarrow{\text{折叠}}f(t)$$

其波形依次如图 1.28（a）（b）（c）所示。

由此可知，通常在求解时选择方法三为好。

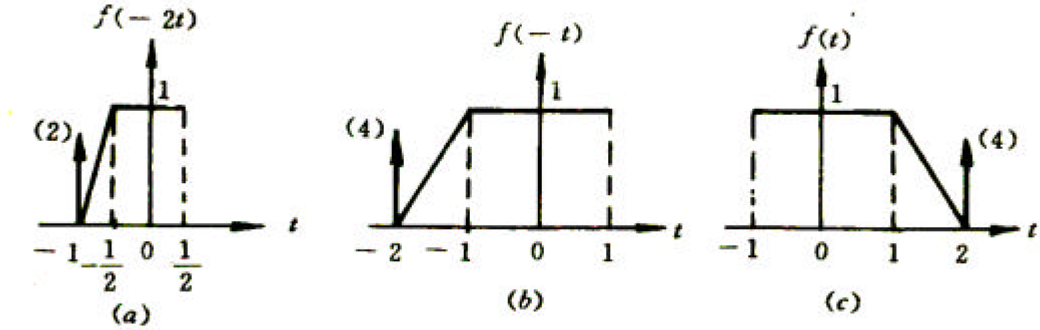


图 1.28

1.6 （1）已知离散时间信号 $f[n]$ 如图 1.29（a）所示，试画出下列各信号的波形图，并加以标注。

（a） $f[4-n]$ （b） $f[2n+1]$ （c） $f[n]=\begin{cases} f\left[\dfrac{n}{3}\right], & n\text{为}3\text{的倍数} \\ 0, & n\text{为其它} \end{cases}$

（2）对图 1.29（b）所示的信号 $h(n)$，试画出下列各信号的波形，并加以标注。

（a） $h[2-n]$ （b） $h[n+2]$ （c） $h[n+2]+h[-n-1]$

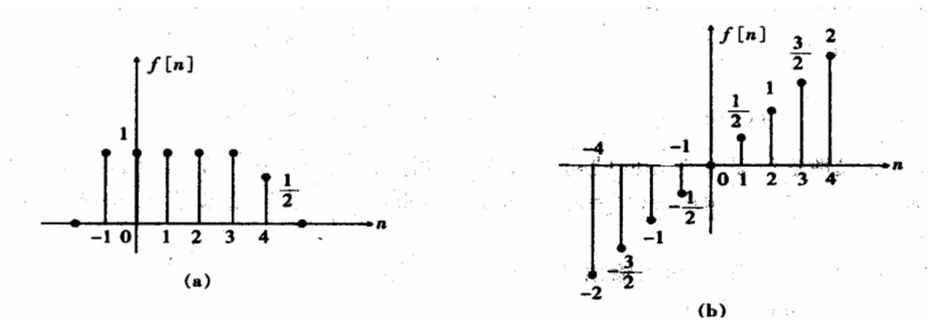


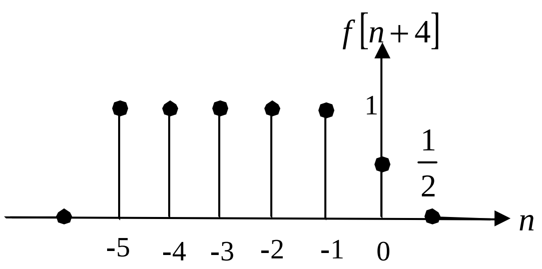
图 1.29

【知识点窍】本题考察离散信号自变量变换导致信号变换的概念

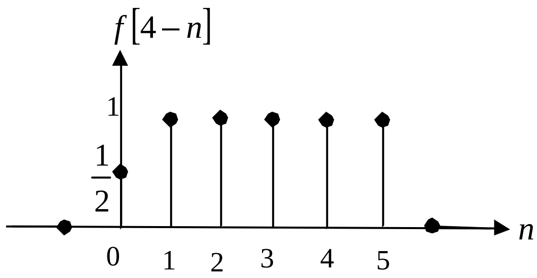
【逻辑推理】本题用到离散信号的时域运算与变换。包括有时移、折叠、尺度变换（内插零和

抽取)。

解：(1)(a) $f[4-n]$**信号波形图如图** 1.30(b)**所示。**



(a)



(b)

图 1.30

(b) $f[2n+1]$**信号波形图如图** 1.31 **所示。**

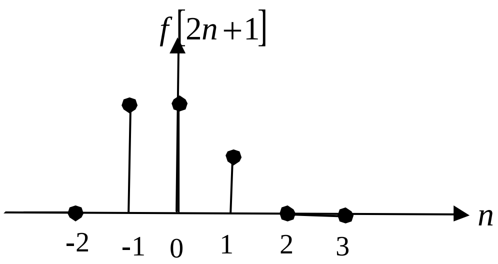
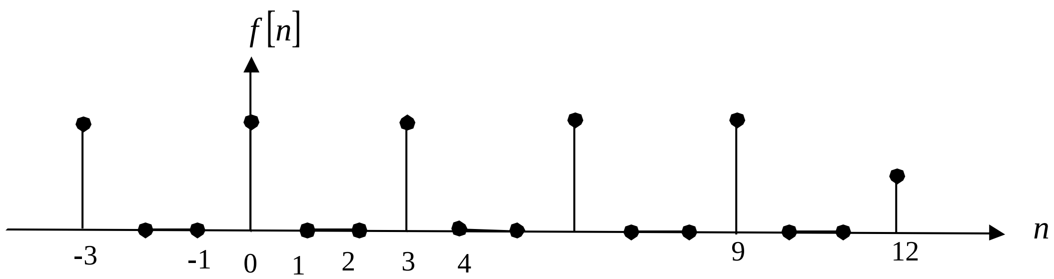


图 1.31

(c) $f[n]=\begin{cases} f\left[\dfrac{n}{3}\right], & n\text{为3的倍数} \\ 0, & n\text{为其它} \end{cases}$ **信号波形图如图** 1.32 **所示。**



如图 1.32

(2)(a) $h[2-n]$**信号波形图如图** 1.33 **所示。**

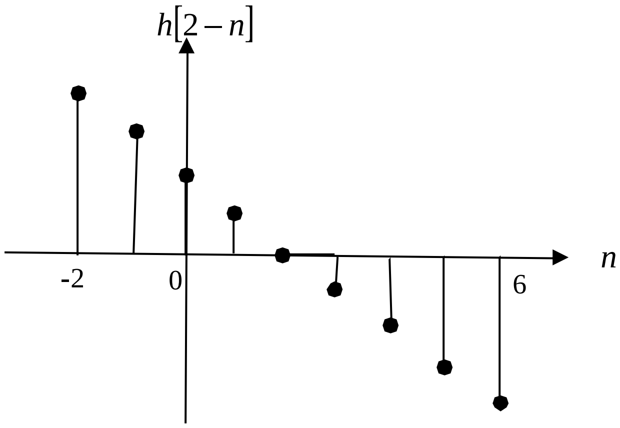


图 1.33

(b) $h[n+2]$信号波形图如图 1.34 所示。

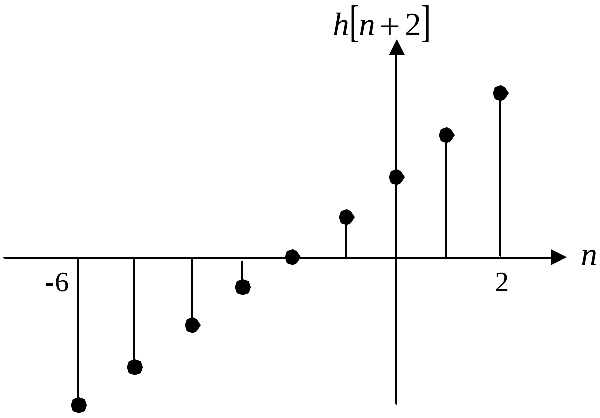
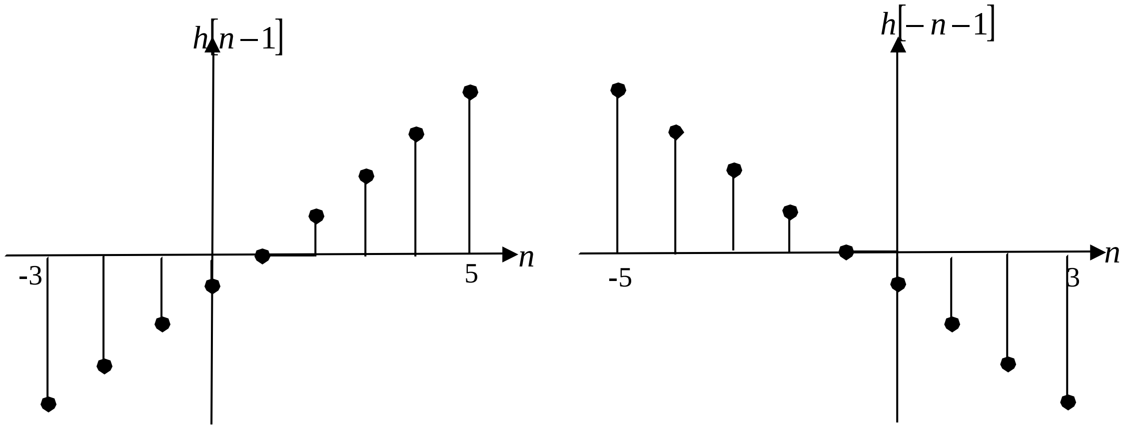
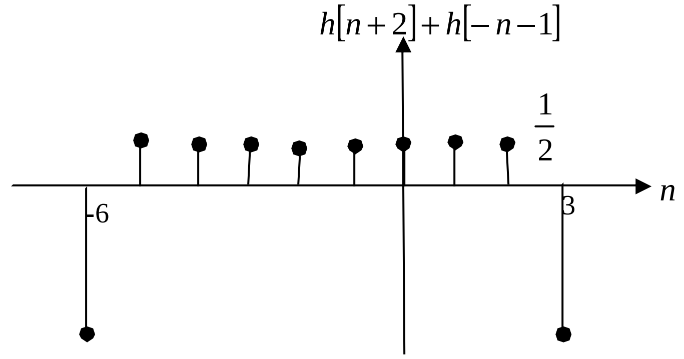


图 1.34

(c) $h[n+2]+h[-n-1]$信号波形图如图 1.35（c）所示。



(a) (b)



（c）

图 1.35

1.7　**判断下列各信号是否是周期信号，如果是周期信号，求出它的基波周期。**

（1）$f(t)=2\cos\left(3t+p/4\right)$　　　　（2）$f[n]=\cos\left(8pn/7+2\right)$

（3）$f(t)=e^{j(pt-1)}$　　　　（4）$f[n]=e^{j\left(n/8-p\right)}$

（5）$f[n]=\sum_{m=0}^{\infty}\left[d(n-3m)-d(n-1-3m)\right]$

（6）$f(n)=2\cos\left(\frac{pn}{4}\right)+\sin\left(\frac{pn}{8}\right)-2\sin\left(\frac{pn}{2}+\frac{p}{6}\right)$

【知识点窍】本题考察周期信号的判别方法和复合信号的周期计算方法

【逻辑推理】包含几个不同频率余弦分量的复合，信号的周期 T **是各分量信号周期** $T_i(i=1,2,3,\cdots)$ **的整数倍，即** $T=m_i\cdot t_i=m_i\cdot\frac{2p}{w_i}$ **。因此只要找到几个整数公因子的正整数** $m_1,m_2,\cdots,m_n$ **使** $w_1:w_2:\cdots w_n=m_1:m_2:\cdots m_n$ **成立，可判定该信号为周期信号。**

解：周期信号必须满足两个条件：定义域 $t\in R$ **，有周期性。两个条件中缺少任何一个，则就不是周期信号了。**

（1）$f(t)=2\cos\left(3t+p/4\right)$ **是周期信号，其周期** $T=\frac{2p}{3}s$

（2）$f[n]=\cos\left(8pn/7+2\right)$ **是周期信号，其周期** $N=\left(\frac{2p}{\Omega_0}\right)m=7$

（3）$f(t)=e^{j(pt-1)}$ **是周期信号，其周期** $T=\frac{2p}{p}=2s$

（4） $f[n]=e^{j\left(n/8-p\right)}$不是周期信号。

（5） $f[n]=\sum_{m=0}^{\infty}\left[d(n-3m)-d(n-1-3m)\right]$是周期信号，其周期$N=3$

（6） $f(n)=2\cos\left(\frac{pn}{4}\right)+\sin\left(\frac{pn}{8}\right)-2\sin\left(\frac{pn}{2}+\frac{p}{6}\right)$是周期信号，其中

$N_1=8$，$N_2=16$，$N_3=4$

则有信号 $f[n]$的基波信号为$N=16$

1.8 （1）设$f_1(t)$和 $f_2(t)$都是周期信号，其基波周期分别为T_1和T_2。在什么条件下，和式 $f_1(t)+f_2(t)$是周期的？如果该信号是周期的，它的基波周期是什么？

（2）设 $f_1[n]$和 $f_2[n]$都是周期信号，其基波周期分别为N_1和N_2。在什么条件下，和式$f_1[n]+f_2[n]$是周期的？如果该信号是周期的，它的基波周期是什么？

【知识点窍】本题考察周期信号的判别方法和复合信号的周期计算方法

【逻辑推理】复合信号的基波周期为各分周期信号的周期的最小公倍数。

解：（1）因为 $f_1(t)$和 $f_2(t)$都是周期信号，其基波周期分别为T_1和T_2，所以有

$$f_1(t)=f_1(t+n_1T_1) \qquad n_1\text{为整数}$$

$$f_2(t)=f_2(t+n_2T_2) \qquad n_2\text{为整数}$$

故要使：$f_1(t)+f_2(t)=f_1(t+n_1T_1)+f_2(t+n_2T_2)$是周期信号，则必须是：

$$n_1T_1=n_2T_2=T_0$$

即，当 $f_1(t)$和 $f_2(t)$的周期满足$\frac{T_2}{T_1}=\frac{n_1}{n_2}=$有理数时，和式$f_1(t)+f_2(t)$是周期的，其基波周期是$T_1$ 和T_2 的最小公倍数。

（2） $f_1[n]$和 $f_2[n]$都是周期信号，其基波周期分别为N_1和N_2，所以有

$$f_1[n]=f_1[n+m_1N_1] \qquad m_1\text{为整数}$$

$$f_2[n]=f_2[n+m_2N_2] \qquad m_2\text{为整数}$$

故要使：$f_1[n]+f_2[n]=f_1[n+m_1N_1]+f_2[n+m_2N_2]$是周期信号，则必须是：

$$m_1N_1=m_2N_2=N_0$$

即，当$f_1[n]$和$f_2[n]$的周期满足$\frac{N_2}{N_1}=$有理数时，和式$f_1[n]+f_2[n]$是周期的，其基波周期是N_1和N_2的最小公倍数。

1.9 已知系统的输入、输出和初始状态的关系式如下，它们是否线性系统，为什么？其中$y(t_0)$和$y[n_0]$分别代表连续系统和离散系统初始观察时刻t_0和n_0的唯一的初始状态，$f(t)$和$f[n]$分别代表连续系统和离散系统的输入，$y(t)$和$y[n]$分别代表连续系统和离散系统的输出。

(1) $y(t)=y(t_0)+f(t)$　　(2) $y[n]=y[n_0]+f[n]$

(3) $y(t)=\ln y(t_0)+3t^2f(t)$　　(4) $y[n]=ny[n_0]+\sum_{n=n_0}^{k}f[n]$

(5) $y(t)=y(t_0)+f^2(t)$　　(6) $y[n]=y^2[n_0]+f^2[n]$

(7) $y(t)=\sin t\cdot f(t)$　　(8) $y[n]=\sin\frac{np}{2}\cdot f[n]$

(9) $y(t)=\frac{df(t)}{dt}$　　(10) $y[n]=f^2[n]$

【知识点窍】本题考察线性系统的判定。

【逻辑推理】对于线性连续系统，其满足条件是齐次性与叠加性，即若

$$f_1(t)\to y_1(t)\qquad f_2(t)\to y_2(t)$$

则有
$$k_1f_1(t)+k_2f_2(t)\to k_1y_1(t)+k_2y_2(t)$$

对于线性离散系统则有 $k_1f_1[k]+k_2f_2[k]\to k_1y_1[k]+k_2y_2[k]$

其中k_1,k_2为任意常数。

解：(1) 零输入响应和零状态响应均呈线性，根据线性系统的定义，

故该系统为线性系统。

(2) 该系统为线性系统。

(3) 零输入响应和零状态响应均不呈线性，根据线性系统的定义，

故该系统不是线性系统。

（4）该系统不是线性系统。

（5）零状态响应不呈线性，根据线性系统的定义，

故该系统不是线性系统。

（6）零输入响应和零状态响应均不呈线性，根据线性系统的定义，

故该系统不是线性系统。

（7）该系统不是线性系统。

（8）该系统不是线性系统。

（9）该系统是线性系统。

（10）该系统不是线性系统。

1.10　已知系统的输入和输出关系式如下，它们是否时不变系统，为什么？其中 $f(t), f[n], y(t), y[n]$ 的意义同题 1-9。

（1）$y(t)=f^2(t)$　　（2）$y[n]=f^2[n]$

（3）$y(t)=\dfrac{df(t)}{dt}$　　（4）$y[n]=|f[n]-f[n-1]|$

（5）$y(t)=f(t)\cdot f(t-1)$　　（6）$y[n]=f[n]\cdot f[n-1]$

（7）$y(t)=tf(t)$　　（8）$y[n]=-nf[n]$

（9）$y(t)=\sin t\cdot f(t)$　　（10）$y[n]=\sin\dfrac{np}{2}f[n]$

（11）$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)dt$　　（12）$y[n]=\sum_{n=-M}^{M} f[n-k]$

【知识点窍】本题考察时不变系统的判定。

【逻辑推理】如果激励是 $f(t)$（或 $f[k]$），系统产生的响应为 $y(t)$（或 $y[k]$），当将激励的时间延迟 t 为 $f(t-t)$（或 $f[k-t]$），则其输出响应也相同地延迟 t 时间为 $y(t-t)$（或 $y[k-t]$），它们之间的变化规律仍保持不变，其波形保持不变。即：

若　$f(t)\to y(t)$　则有　$f(t-t)\to y(t-t)$

若　$f[k]\to y[k]$　则有　$f[k-t]\to y[k-t]$

解：（1）**对于该系统有**

$$f_1(t) \to y_1(t) = f_1^{\,2}(t)$$

则有：

$$y_1(t-t) = f_1^{\,2}(t-t)$$

$$f_1(t-t) \to y_2(t) = f_1^{\,2}(t-t) = y_1(t-t)$$

故该系统为时不变系统。

（2）**对于该系统有**

$$f_1[n] \to y_1[n] = f_1^{\,2}[n]$$

则有：

$$y_1[n-k] = f_1^{\,2}[n-k]$$

$$f_1[n-k] \to y_2[n] = f_1^{\,2}[n-k] = y_1[n-k]$$

故该系统为时不变系统。

（3）**对于该系统有**

$$f_1(t) \to y_1(t) = \frac{df_1(t)}{dt}$$

则有：

$$y_1(t-t) = \frac{df_1(t-t)}{d(t-t)} = \frac{df_1(t)}{dt}$$

$$f_1(t-t) \to y_2(t) = \frac{df_1(t-t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} = y_1(t-t)$$

故该系统为时不变系统。

（4）**对于该系统有**

$$f_1[n] \to y_1[n] = \left| f_1[n] - f_1[n-1] \right|$$

则有：

$$y_1[n-k] = \left| f_1[n-k] - f_1[n-k-1] \right|$$

$$f_1[n-k] \to y_2[n] = \left| f_1[n-k] - f_1[n-k-1] \right| = y_1[n-k]$$

故该系统为时不变系统。

（5）**对于该系统有**

$$f_1(t) \to y_1(t) = f_1(t) \cdot f_1(t-1)$$

则有：

$$y_1(t-t) = f_1(t-t) \cdot f_1(t-t-1)$$

$$f_1(t-t) \to y_2(t) = f_1(t-t) \cdot f_1(t-t-1) = y_1(t-t)$$

故该系统为时不变系统。

（6）**对于该系统有**

$$f_1[n] \to y_1[n] = f_1[n] \cdot f_1[n-1]$$

则有：

$$y_1[n-k] = f_1[n-k] \cdot f_1[n-k-1]$$

$$f_1[n-k] \to y_2[n] = f_1[n-k] \cdot f_1[n-k-1] = y_1[n-k]$$

故该系统为时不变系统。

（7）**对于该系统有**

$$f_1(t) \to y_1(t) = tf_1(t)$$

则有：

$$y_1(t-t) = (t-t)f_1(t-t)$$

$$f_1(t-t) \to y_2(t) = tf_1(t-t) \neq y_1(t-t)$$

故该系统为时变系统。

（8）**对于该系统有**

$$f_1[n] \to y_1[n] = -nf_1[n]$$

则有：

$$y_1[n-k] = -[n-k]f_1[n-k]$$

$$f_1[n-k] \to y_2[n] = -nf_1[n-k] \neq y_1[n-k]$$

故该系统为时变系统。

（9）**对于该系统有**

$$f_1(t) \to y_1(t) = \sin t \cdot f_1(t)$$

则有：

$$y_1(t-t) = \sin(t-t) \cdot f_1(t-t)$$

$$f_1(t-t) \to y_2(t) = \sin t \cdot f_1(t-t) \neq y_1(t-t)$$

故该系统为时变系统。

（10）**对于该系统有**

$$f_1[n] \to y_1[n] = \sin\frac{np}{2} f_1[n]$$

则有：

$$y_1[n-k] = \sin\frac{[n-k]p}{2} f_1[n-k]$$

$$f_1[n-k] \to y_2[n] = \sin\frac{np}{2} f_1[n-k] \neq y_1[n-k]$$

故该系统为时变系统。

（11）**对于该系统有**

$$f_1(t) \to y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(t)dt$$

则有：

$$y_1(t-t_1) = \int_{-\infty}^{t-t_1} f_1(t)dt$$

$$f_1(t-t) \to y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(t-t_1)dt = \int_{-\infty}^{t-t_1} f_1(T)dT = y_1(t-t)$$

故该系统为时不变系统。

（12）**对于该系统有**

$$f_1[n] \to y_1[n] = \sum_{n=-M}^{M} f_1[n-k]$$

则有：

$$y_1[n-m] = \sum_{n=-M+m}^{M+m} f_1[n-m-k]$$

$$f_1[n-m] \to y_2[n] = \sum_{n=-M}^{M} f_1[n-m-k] \neq y_1[n-m]$$

故该系统为时变系统。

1.11　**一线性连续系统在相同的初始条件下，当输入为 $f(t)$ 时，全响应为 $y(t)=2e^{-t}+\cos 2t$，当输入 $2f(t)$ 时，全响应 $y(t)=e^{-t}+2\cos 2t$。求在相同的初始条件下，输入为 $4f(t)$ 时的全响应。**

【知识点窍】本题考察线性系统的响应函数的求法。

【逻辑推理】从一定初始条件和一定激励来求取系统响应，即求取描述该系统的常系数线性微分方程。

解：设系统的零状态响应为 $y_{zs}(t)$，零输入响应为 $y_{zi}(t)$

则有：

$$y_1(t)=y_{zs1}(t)+y_{zi1}(t)=2e^{-t}+\cos 2t \qquad ①$$

$$y_2(t)=y_{zs2}(t)+y_{zi2}(t)=e^{-t}+2\cos 2t \qquad ②$$

因 $f_1(t)=f(t)$，$f_2(t)=2f(t)$，**有** $f_2(t)=2f_1(t)$

根据已知条件以及 LTI 系统的性质，则有：

$$\begin{cases} y_{zi1}(t)=y_{zi2}(t) \\ y_{zs2}(t)=2y_{zs1}(t) \end{cases}$$

将以上两式代入①、②中求得：

$$y_{zi1}(t)=3e^{-t}$$

$$y_{zs1}(t)=\cos 2t-e^{-t}$$

当激励为 $4f(t)$ 时，系统的全响应为：

$$\begin{aligned} y_3(t)&=y_{zs3}(t)+y_{zi3}(t)=4y_{zs1}(t)+y_{zi1}(t) \\ &=4\left(\cos 2t-e^{-t}\right)+3e^{-t} \\ &=4\cos 2t-e^{-t} \end{aligned}$$

1.12　1.**考虑具有下列输入输出关系的三个系统：**

系统 1；　$y[n]=f[n]$

系统 2；　$y[n]=f[n]+\frac{1}{2}f[n-1]+\frac{1}{4}f[n-2]$

系统 3；　$y[n]=f[2n]$

（1）若它们按图 1.36 那样连接，求整个系统的输入输出关系。

（2）整个系统是线性吗？是时不变的吗？

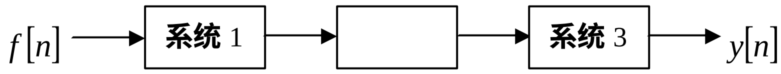


图 1.36

2. 如果图中三个系分别为

系统 1 和系统 3：　　$y[n]=f[-n]$

系统 2：　　$y[n]=af[n-1]+bf[n]+cf[n+1]$

其中，a，b，c 均为实数。求级联系统的输入输出关系。且 a，b，c 满足什么条件时：(1）整个系统线性时不变。(2）整个系统的输入输出关系与系统 2 相同。(3）整个系统是因果的。

【知识点窍】本题考察线性系统与时不变系统的性质。

【逻辑推理】如果激励是 $f(t)$（或 $f[k]$），系统产生的响应为 $y(t)$（或 $y[k]$），当将激励的时间延迟 t 为 $f(t-t)$（或 $f[k-t]$），则其输出响应也相同地延迟 t 时间为 $y(t-t)$（或 $y[k-t]$），它们之间的变化规律仍保持不变，其波形保持不变。线性系统满足是齐次性与叠加性。

解：1.（1）整个系统输入输出关系

$$y[n]=f[2n]+\frac{1}{2}f[2n-1]+\frac{1}{4}f[2n-2]$$

（2）整个系统是线性的，是时变的。

2. 此时整个系统输入输出关系

$$y[n]=af[n+1]+bf[n]+cf[n-1]$$

（1）整个系统是线性时不变系统。

（2）若要整个系统的输入输出关系与系统 2 相同，则 a＝c。

（3）整个系统是因果的，则响应不出现在激励作用之前，所以有 a＝0。

1.13　已知系统的输入和输出关系为：$y(t)=|f(t)-f(t-1)|$

试判断该系统（a）是否是线性的？（b）是否是时不变的？（c）当输入 $f(t)$ 如图 1.37 所示时，画出响应 $y(t)$ 的波形。

【知识点窍】本题考察线性系统与时不变系统的性质。

【逻辑推理】如果激励是 $f(t)$（或 $f[k]$），系统产生的响应为 $y(t)$（或 $y[k]$），当将激励的时间延迟 t 为 $f(t-t)$（或 $f[k-t]$），则其输出响应也相同地延迟 t 时间为 $y(t-t)$（或 $y[k-t]$），它们之间的变化规律仍保持不变，其波形保持不变。线性系统满足是齐次性与叠加性。

解：(a) **该系统是非线性的**

(b) **对此系统，输入为** $f_1(t)$ **时，有**

$$f_1(t) \to y_1(t) = \left| f_1(t) - f\ (t-1) \right|$$

则有 $y_1(t-t) = \left| f_1(t-t) - f\ (t-t-1) \right|$

$$f_1(t-t) \to y_2(t) = \left| f_1(t-t) - f\ (t-t-1) \right| = y_1(t-t)$$

故该系统为时不变系统。

(c) **当输入** $f(t)$ **如图** 1.37 **所示时，响应** $y(t)$ **的波形如图** 1.38 (b)。

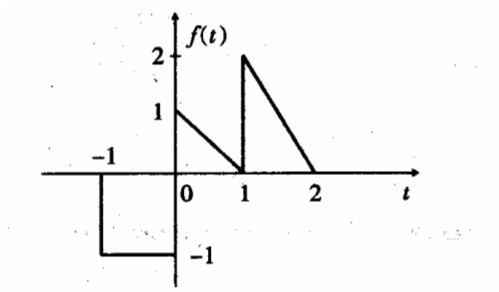


图 1.37

(a) (b)

图 1.38

1.14　**一个** LTI **系统，当输入** $f(t) = e(t)$ **时，输出为** $y(t) = e^{-t}e(t) + e(-1-t)$，**求该系统对图** 1.39 **所示输入** $f(t)$ **时的响应，并概略地画出其波形。**

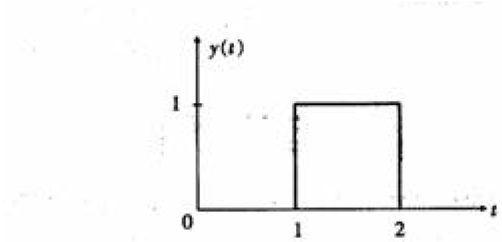


图 1.39

【知识点窍】本题考察线性系统与时不变系统的性质。

【逻辑推理】如果激励是 $f(t)$（或 $f[k]$），系统产生的响应为 $y(t)$（或 $y[k]$），当将激励的时间延迟 t 为 $f(t-t)$（或 $f[k-t]$），则其输出响应也相同地延迟 t 时间为 $y(t-t)$（或 $y[k-t]$），它们之间的变化规律仍保持不变，其波形保持不变。线性系统满足是齐次性与叠加性。

解：由图 1.39 可得，输入 $f_2(t)=e(t-1)-e(t-2)=f_1(t-1)-f_1(t-2)$

当输入 $f_1(t)=e(t)$ 时，输出为 $y_1(t)=e^{-t}e(t)+e(-1-t)$

根据 LTI 系统的时不变特性，有：

$$y_1(t-1)=e^{-(t-1)}e(t-1)+e(-t)$$

$$y_1(t-2)=e^{-(t-2)}e(t-2)+e(1-t)$$

则当输入 $f_2(t)=e(t-1)-e(t-2)=f_1(t-1)-f_1(t-2)$ 时，输出响应为

$$y_2(t)=e^{-(t-1)}e(t-1)-e^{-(t-2)}e(t-2)+e(-t)-e(1-t)$$

其波形图如图 1.40（d）

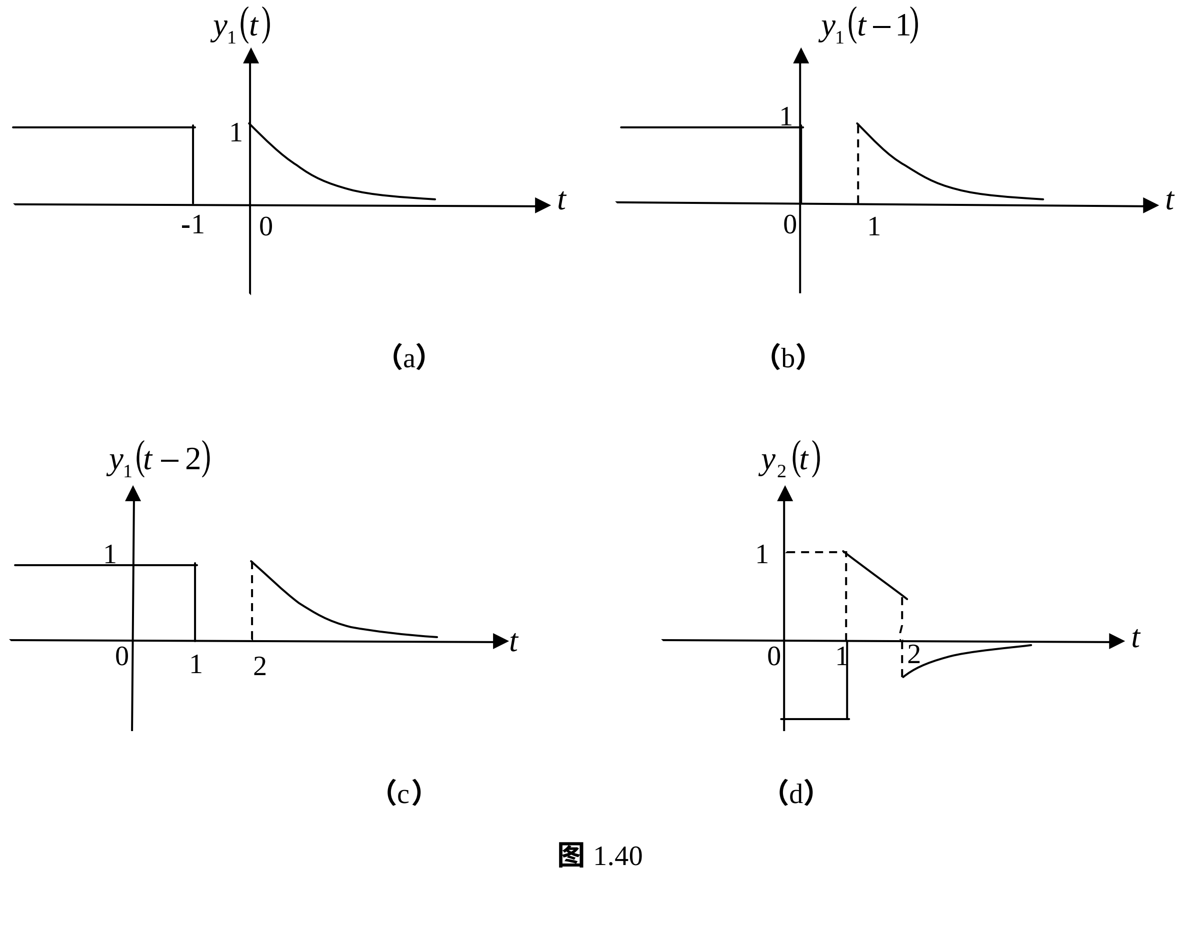


图 1.40

1.15　**一个 LTI 系统的输入 $f(t)$ 和输出 $y(t)$ 如图 1.41 所示。试求该系统对阶跃信号 $e(t)$ 的响应。**

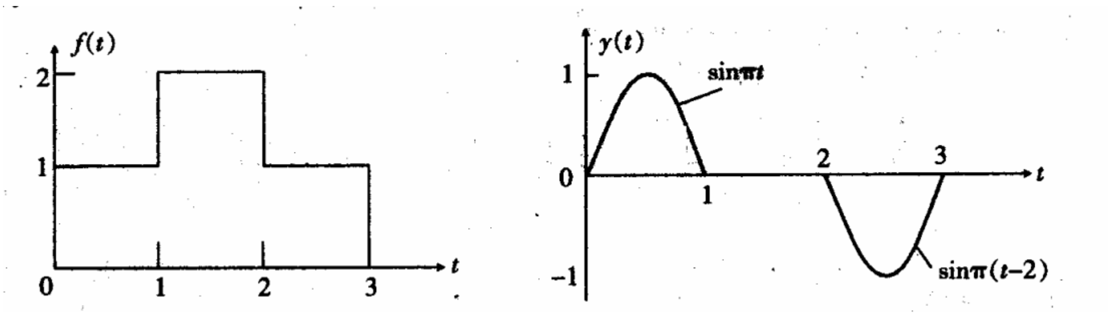


图 1.41

【知识点窍】本题考察线性系统与时不变系统的性质。

【逻辑推理】如果激励是 $f(t)$ **（或** $f[k]$**），系统产生的响应为** $y(t)$ **（或** $y[k]$**），当将激励的时间延迟** t **为** $f(t-t)$ **（或** $f[k-t]$**），则其输出响应也相同地延迟** t **时间为** $y(t-t)$ **（或** $y[k-t]$**），它们之间的变化规律仍保持不变，其波形保持不变。线性系统满足是齐次性与叠加性。**

解：见图 1.41**，可以得到：**

$$f(t)=e(t)+e(t-1)-e(t-2)-e(t-3)$$

系统对 $e(t)$ **的响应称为阶跃响应，以** $g(t)$ **表示，于是对于** $f(t)$ **的响应** $y(t)$ **可以表示为：**

$$y(t)=g(t)+g(t-1)-g(t-2)-g(t-3)$$

借助图解法可求出阶跃信号 $e(t)$ **的响应** $g(t)$**。**

下面按照时间区间分别进行求解：

（1）$t:(0,1)$

在 $0<t<1$ **时，输入只有** $e(t)$**，此时**

$$g(t)=y(t)=\sin pt \qquad (0<t<1)$$

按照时不变特性，可得

$$g(t-1)=\sin p(t-1) \qquad (1<t<2)$$

$$-g(t-2)=-\sin p(t-2) \qquad (2<t<3)$$

$$-g(t-3)=-\sin p(t-3) \qquad (3<t<4)$$

按上式， $g(t), g(t-1), -g(t-2), -g(t-3)$ **示于图** 1.42 **上。**

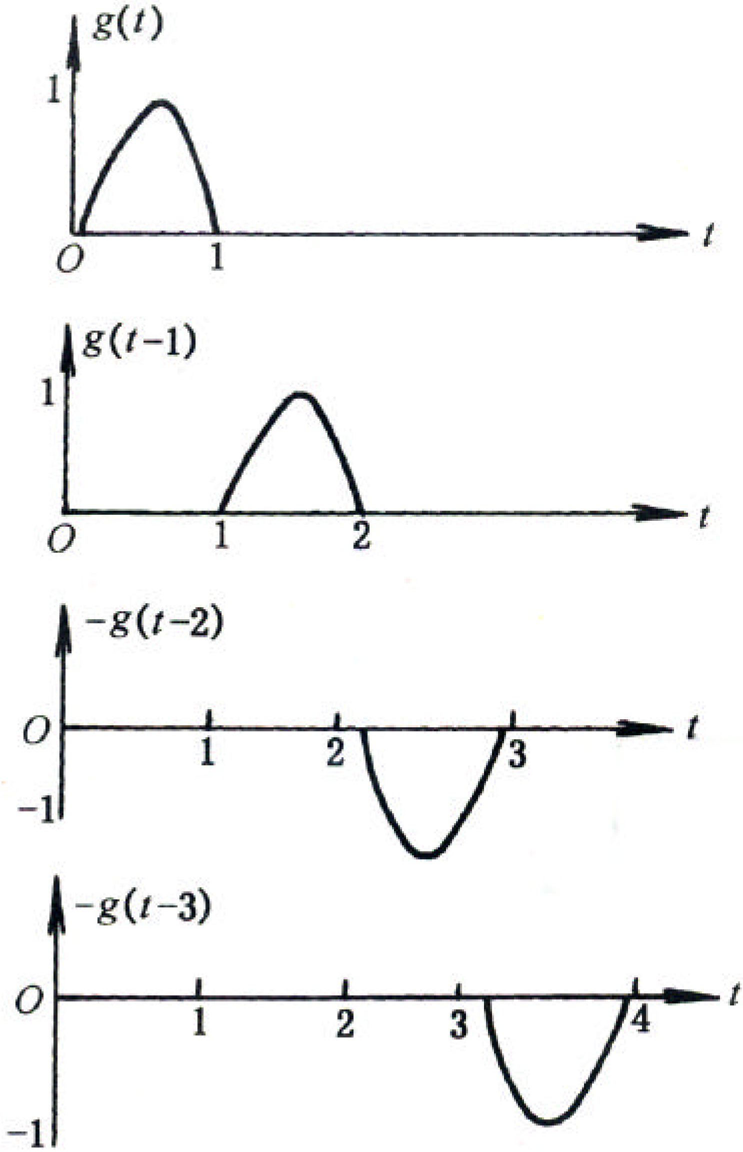


图 1.42

（2） $t:(1,2)$

在 1<t<2 **时，输入** $f(t)$ **为：**

$$f(t)=e(t)+e(t-1)$$

而输出信号 $y(t)$ **为**

$$y(t)=g(t)+g(t-1)=0$$

$$g(t)=-g(t-1)=-\sin p(t-1) \qquad (1<t<2)$$

按照时不变特性，可得

$$g(t-1) = -\sin p(t-2) \qquad (2<t<3)$$

$$-g(t-2) = \sin p(t-3) \qquad (3<t<4)$$

$$-g(t-3) = \sin p(t-4) \qquad (4<t<5)$$

按上式，$g(t), g(t-1), -g(t-2), -g(t-3)$**在上述区间的图形示于图** 1.43 **上。**

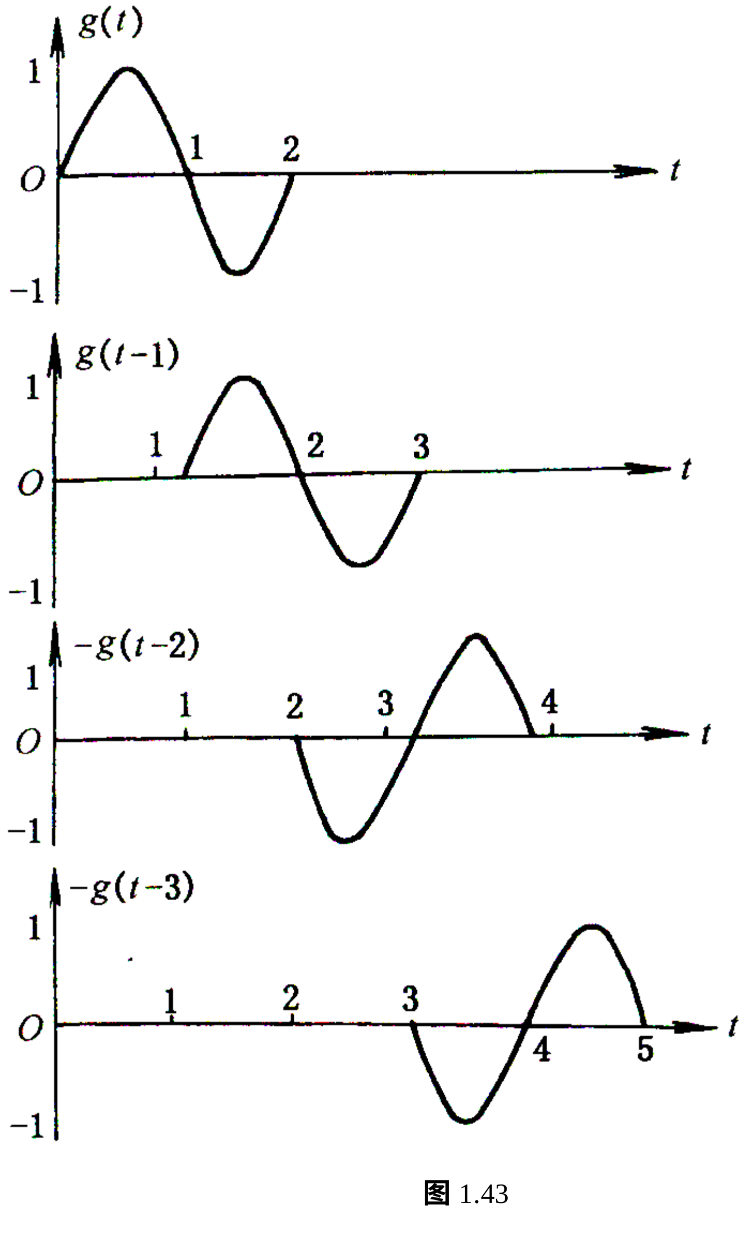


图 1.43

(3) $t:(2,3)$

在 2<t<3 **时，输入** $f(t)$ **为：**

$$f(t) = e(t) + e(t-1) - e(t-2)$$

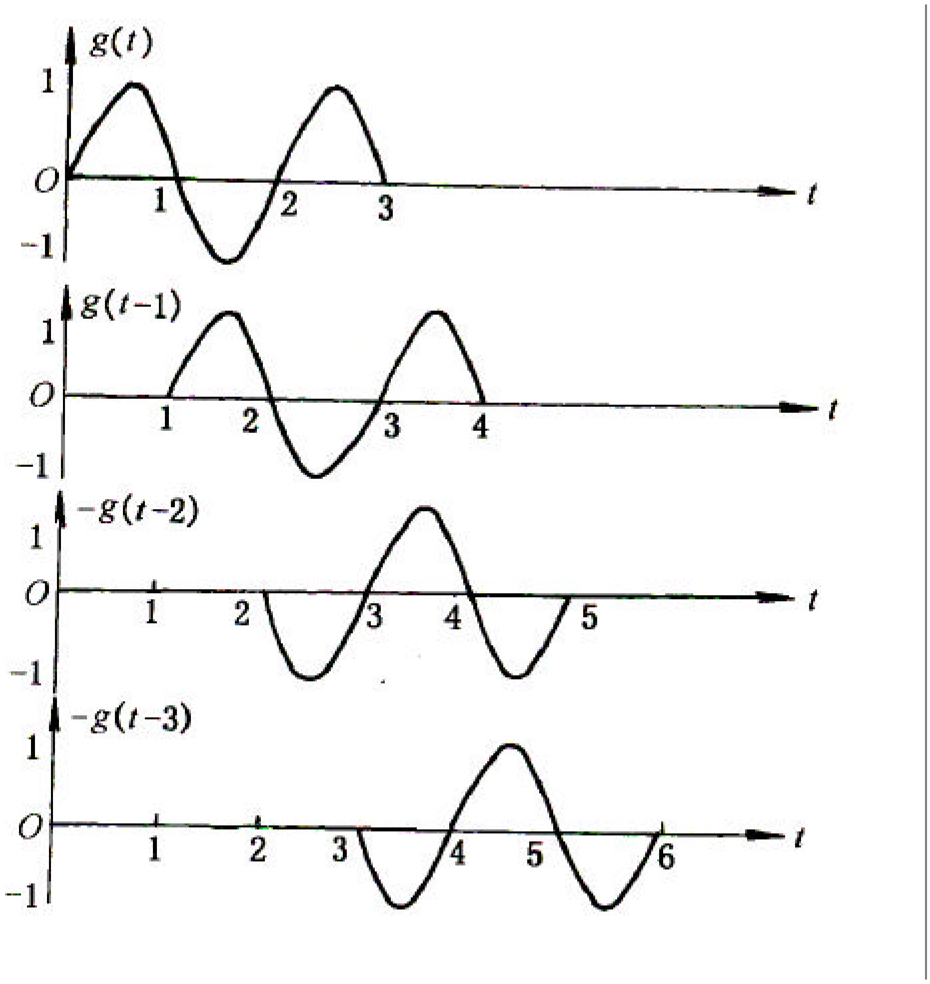


图 1.44

输出信号 $y(t)$ **为**

$$y(t) = g(t) + g(t-1) - g(t-2) = -\sin p(t-2) \qquad (2<t<3)$$

按照上几节的结果，在 2<t<3 **时：**

$$g(t-1) = -\sin p(t-2) \qquad (2<t<3)$$

$$-g(t-2) = \sin p(t-2) \qquad (2<t<3)$$

故

$$g(t) = \sin p(t-2) \qquad (2<t<3)$$

按照时不变特性，可得

$$g(t-1) = \sin p(t-3) \qquad (3<t<4)$$

$$-g(t-2) = -\sin p(t-4) \qquad (4<t<5)$$

$$-g(t-3) = -\sin p(t-5) \qquad (5<t<6)$$

按上式，$g(t), g(t-1), -g(t-2), -g(t-3)$**在上述区间的图形示于图** 1.44 **上。**

（4） $t:(3,4)$

在 3<t<4 **时，输入** $f(t)$**为：**

$$f(t)=e(t)+e(t-1)-e(t-2)-e(t-3)$$

输出信号 $y(t)$**为**

$$y(t)=g(t)+g(t-1)-g(t-2)-g(t-3)=0$$

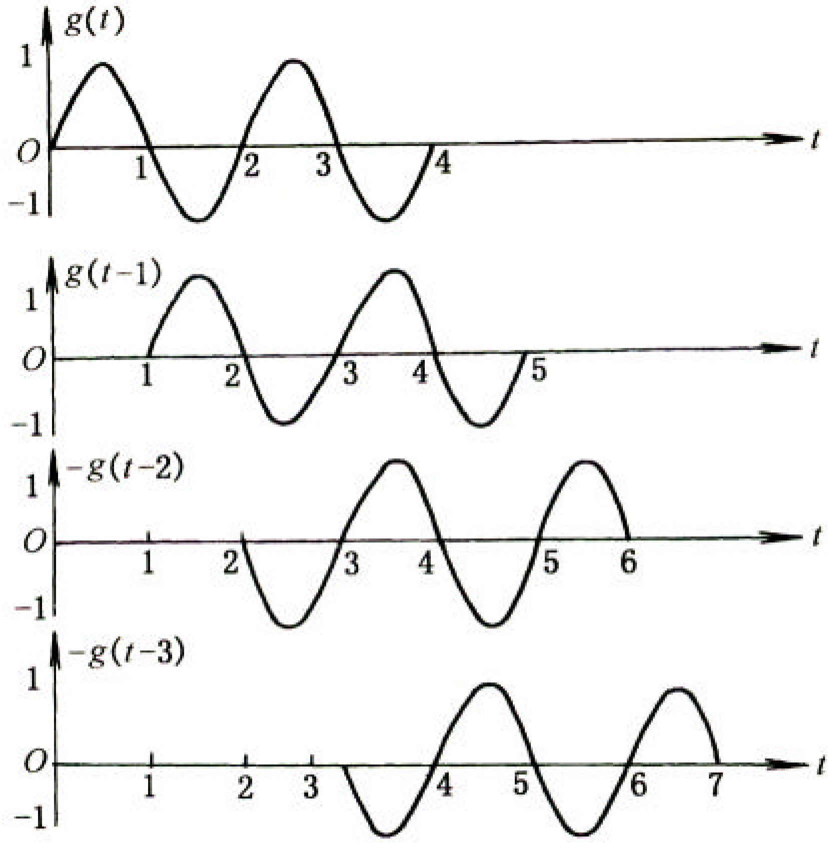


图 1.45

按照上几节的结果，在 3<t<4 **时：**

$$g(t-1)=\sin p(t-3) \qquad (3<t<4)$$

$$-g(t-2)=\sin p(t-2) \qquad (3<t<4)$$

$$-g(t-3)=-\sin p(t-3) \qquad (3<t<4)$$

故 $$g(t) = -\sin p(t-3) \qquad (3<t<4)$$

按照时不变特性，可得

$$g(t-1) = -\sin p(t-4) \qquad (4<t<5)$$

$$-g(t-2) = \sin p(t-5) \qquad (5<t<6)$$

$$-g(t-3) = \sin p(t-6) \qquad (6<t<7)$$

按上式，$g(t), g(t-1), -g(t-2), -g(t-3)$ 在上述区间的图形示于图 1.45 上。

继续做下去，即可得到：

$$g(t) = \sin pte(t)$$

1.16 某 LTI 离散系统，已知当激励为图 1.46（a）的信号 $f_1[n]$（即单位序列 $d[n]$）时，其零状态响应如图（b）所示。求：(1）当激励为图（c）的信号 $f_2[n]$ 时，系统的零状态响应；(2）当激励为图（d）的信号 $f_3[n]$ 时，系统的零状态响应。

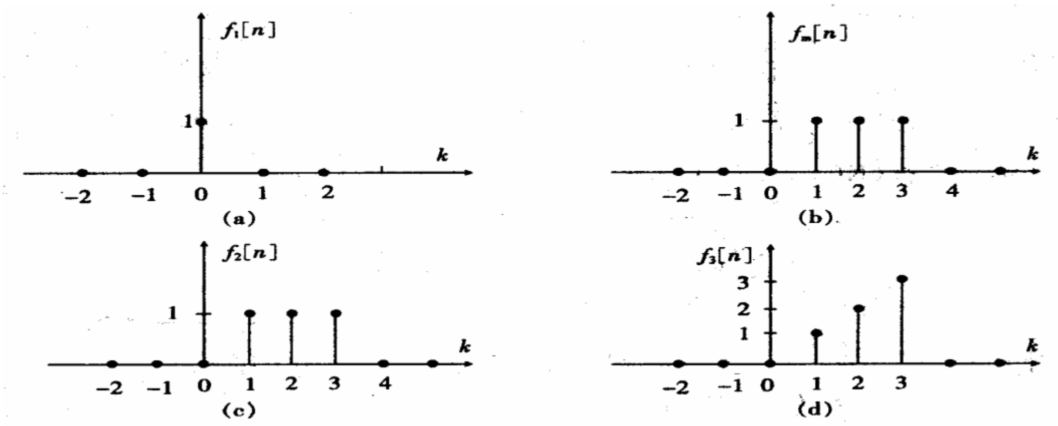


图 1.46

【知识点窍】本题考察 LTI 离散系统的响应函数的求法。

【逻辑推理】利用了 LTI 离散系统的线性性质与时不变性质。

解：(1）由图（c）可知：$f_2[n] = f_1[n-1] + f_1[n-2] + f_1[n-3]$

根据 LTI 系统的叠加性，当激励为信号 $f_2[n]$ 时，系统的零状态响应：

$$y_{zs2}[n] = y_{zs1}[n-1] + y_{zs1}[n-2] + y_{zs1}[n-3]$$

由图（b）可得到：

$$y_{zs1}[n]=d[n-1]+d[n-2]+d[n-3]$$

进而：

$$y_{zs1}[n-1]=d[n-2]+d[n-3]+d[n-4]$$

$$y_{zs1}[n-2]=d[n-3]+d[n-4]+d[n-5]$$

$$y_{zs1}[n-3]=d[n-4]+d[n-5]+d[n-6]$$

所以有：

$$\begin{aligned}y_{zs2}[n]&=y_{zs1}[n-1]+y_{zs1}[n-2]+y_{zs1}[n-3]\\&=d[n-2]+2d[n-3]+3d[n-4]+2d[n-5]+d[n-6]\end{aligned}$$

（2**）由图（**d**）可知：** $f_3[n]=f_1[n-1]+2f_1[n-2]+3f_1[n-3]$

根据 LTI **系统的叠加性，当激励为信号** $f_3[n]$**时，系统的零状态响应：**

$$y_{zs2}[n]=y_{zs1}[n-1]+2y_{zs1}[n-2]+3y_{zs1}[n-3]$$

由图（b**）可得到：**

$$y_{zs1}[n]=d[n-1]+d[n-2]+d[n-3]$$

进而：

$$y_{zs1}[n-1]=d[n-2]+d[n-3]+d[n-4]$$

$$y_{zs1}[n-2]=d[n-3]+d[n-4]+d[n-5]$$

$$y_{zs1}[n-3]=d[n-4]+d[n-5]+d[n-6]$$

所以有：

$$\begin{aligned}y_{zs3}[n]&=y_{zs1}[n-1]+2y_{zs1}[n-2]+3y_{zs1}[n-3]\\&=d[n-2]+3d[n-3]+6d[n-4]+5d[n-5]+3[n-6]\end{aligned}$$

1.17　**线性非时变因果系统，当激励** $f(t)=e(t)$**时，零状态响应** $y_{zs}(t)=e^{-t}\cos te(t)+\cos t[e(t-p)-e(t-2p)]$**。求当激励** $f(t)=d(t)$**时的响应** $h(t)$**。**

【知识点窍】本题考察线性非时变因果系统响应函数的求法。

【逻辑推理】利用了 LTI **系统的微分性质。**

解：根据 LTI **系统的微分性质，**

即当激励 $f(t)$ 产生的响应为 $y(t)$，则激励 $\dfrac{df(t)}{dt}$ 产生的响应即为 $\dfrac{dy(t)}{dt}$。

当激励 $f(t)=e(t)$ 时，零状态响应为

$$y_{zs}(t)=e^{-t}\cos te(t)+\cos t[e(t-p)-e(t-2p)]$$

因 $d(t)=\dfrac{de(t)}{dt}$，所以有：

当激励 $f(t)=d(t)$ 时的响应

$$h(t)=\frac{dy_{zs}(t)}{dt}=-e^{-t}\cos te(t)-e^{-t}\sin te(t)+e^{-t}\cos td(t)$$
$$-\sin t[e(t-p)-e(t-2p)]+\cos t[d(t-p)-d(t-2p)]$$

即有：

$$h(t)=d(t)-\sqrt{2}e^{-t}\cos\left(t-\frac{p}{4}\right)e(t)-\sin t[e(t-p)-e(t-2p)]-d(t-p)-d(t-2p)$$

1.18　某线性时不变系统的初始状态不变。已知当激励为 $f(t)$ 时，全响应

$$y_1(t)=e^{-t}+\cos pt \qquad t>0$$

当激励为 2 $f(t)$ 时，其全响应

$$y_2(t)=2\cos pt \qquad t>0$$

求当激励为 3 $f(t)$ 时，系统的全响应。

【知识点窍】本题考察线性系统的响应函数的求法。

【逻辑推理】从一定初始条件和一定激励来求取系统响应，即求取描述该系统的常系数线性微分方程。

解：设系统的零状态响应为 $y_{zs}(t)$，零输入响应为 $y_{zi}(t)$

则有：

$$y_1(t)=y_{zs1}(t)+y_{zi1}(t)=e^{-t}+\cos pt \qquad t>0 \qquad ①$$

$$y_2(t)=y_{zs2}(t)+y_{zi2}(t)=2\cos pt \qquad t>0 \qquad ②$$

因 $f_1(t)=f(t)$，$f_2(t)=2f(t)$，有 $f_2(t)=2f_1(t)$

根据已知条件以及 LTI 系统的性质，则有：

$$\begin{cases} y_{zi1}(t) = y_{zi2}(t) \\ y_{zs2}(t) = 2y_{zs1}(t) \end{cases}$$

将以上两式代入①、②中求得：

$$y_{zs1}(t) = -e^{-t} + \cos pt \qquad t > 0$$

$$y_{zi1}(t) = 2e^{-t} \qquad t > 0$$

当激励为 $3f(t)$**时，系统的全响应为：**

$$\begin{aligned} y_3(t) &= y_{zs3}(t) + y_{zi3}(t) = 3y_{zs1}(t) + y_{zi1}(t) \\ &= 3\left(-e^{-t} + \cos pt\right) + 2e^{-t} \\ &= 3\cos pt - e^{-t} \qquad t > 0 \end{aligned}$$

第二章 连续时间系统的时域分析

2.1 学习重点

1、 建立系统的数学模型—— 微分方程，描述系统激励 $f(t)$ 与响应 $y(t)$ 的关系，对连续时间系统进行时域分析。

2、 学会应用经典时域分析法求解微分方程。

3、 深刻理解系统的零状态响应为 $y_{zs}(t)$，零输入响应为 $y_{zi}(t)$，以及全响应，会根据微分方程的特征根与已知系统的初始条件求解。

4、 深刻理解系统的冲激响应 $h(t)$ 以及阶跃响应 $g(t)$ 的意义，掌握其求解方法。

5、掌握卷积积分的定义、 性质和运算，会应用卷积积分法求线性时不变系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

6、 利用 MATLAB 进行 LTI 连续系统的时域分析

2.2 教材习题同步解析

2-1 列写图 2.1 所示中 $i_1(t), i_2(t), u_0(t)$ 的微分方程。

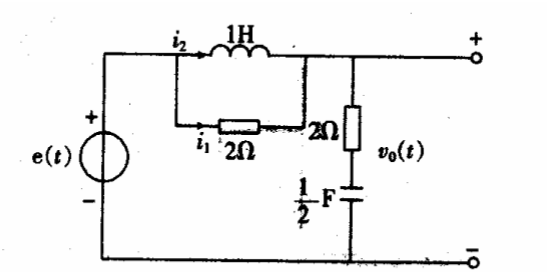


图 2.1

【知识点窍】 本题考察系统方程的基尔霍夫定律。

【逻辑推理】 对任一点有 KCL：$\sum i(t)=0$

对任一回路有 KVL：$\sum u(t)=0$

解：因 $u_{R1}=u_L$，根据 VCR,有:

$$Ri_1(t) = L\frac{di_2(t)}{dt}$$

即 $$2i_1(t) = \frac{di_2(t)}{dt} \tag{1}$$

根据 KVL： $$e(t) = u_{R1}(t) + u_{R2}(t) + u_c(t) \tag{2}$$

根据 VCR： $$u_{R1}(t) = R_1 i_1(t) = 2i_1(t) \tag{3}$$

$$u_{R2}(t) = R_2(i_1(t) + i_2(t)) = 2i_1(t) + 2i_2(t) \tag{4}$$

$$i_c(t) = i_1(t) + i_2(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{du_c(t)}{dt} \tag{5}$$

⑶式和⑷式代入⑵式中，有：

$$e(t) = 4i_1(t) + 2i_2(t) + u_c(t) \tag{6}$$

将⑴式代入⑹式中，得到：

$$e(t) = 2\frac{di_2(t)}{dt} + 2i_2(t) + u_c(t) \tag{7}$$

对⑺式求一阶导，有： $$\frac{de(t)}{dt} = 2\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 2\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{du_c(t)}{dt} \tag{8}$$

将⑸式代入⑻式中，有： $$\frac{de(t)}{dt} = 2\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 2\frac{di_2(t)}{dt} + 2i_1(t) + 2i_2(t) \tag{9}$$

再将⑴式代入⑼式中，得到 $i_2(t)$ 的微分方程为：

$$2\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 3\frac{di_2(t)}{dt} + 2i_2(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

对⑹式求一阶导，得到： $$\frac{de(t)}{dt} = 4\frac{di_1(t)}{dt} + 2\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{du_c(t)}{dt} \tag{10}$$

将⑴式、⑸式代入⑽式中，得到： $$\frac{de(t)}{dt} = 4\frac{di_1(t)}{dt} + 6i_1(t) + 2i_2(t) \tag{11}$$

对⑾式求导，得到： $$\frac{d^2 e(t)}{dt^2} = 4\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + 6\frac{di_1(t)}{dt} + 2\frac{di_2(t)}{dt} \tag{12}$$

再将⑴式代入⑿式中，得到 $i_1(t)$ 的微分方程为：

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2}=4\frac{d^2i_1(t)}{dt^2}+6\frac{di_1(t)}{dt}+4i_1(t)$$

根据 KVL，有：

$$e(t)=u_{R1}(t)+u_0(t)=2i_1(t)+u_0(t) \tag{13}$$

对⒀式求一阶导和二阶导，得到：

$$\frac{de(t)}{dt}=2\frac{di_1(t)}{dt}+\frac{du_0(t)}{dt} \tag{14}$$

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2}=2\frac{d^2i_1(t)}{dt^2}+\frac{d^2u_0(t)}{dt^2} \tag{15}$$

⒀式子$\times 2$＋⒁式$\times 3$＋⒂式$\times 2$，消去$i_1(t)$，整理后得到$u_0(t)$的微分方程为：

$$2\frac{d^2u_0(t)}{dt^2}+3\frac{du_0(t)}{dt}+2u_0(t)=\frac{d^2e(t)}{dt^2}+3\frac{de(t)}{dt}+2e(t)$$

2-2　已知描述系统的微分方程如下：

（1）$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$

（2）$y''(t)+2y'(t)+2y(t)=0$

（3）$y''(t)+2y'(t)+y(t)=0$

当初始条件为$y(0)=1, y'(0)=0$时，求零输入响应。

【知识点窍】本题考察常系数微分方程经典解法。

【逻辑推理】利用系统的特征方程，求出齐次解，代入初始状态求解。

解：（1）由原微分方程可得其特征方程为

$$l^2+3l+2=0$$

可解得特征根为　$l_1=-1, l_2=-2$

微分方程齐次解为　$y_h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

由初始状态为$y(0)=1, y'(0)=0$，则有：

$$\begin{cases}A_1+A_2=1\\ -A_1-2A_2=0\end{cases}$$

由联立方程可得 $A_1 = 2, A_2 = -1$

故系统的零输入响应为：

$$y_{zi}(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

（2）**由原微分方程可得其特征方程为**

$$l^2 + 2l + 2 = 0$$

可解得特征根为 $l_{1,2} = -1 \pm i$

微分方程齐次解为 $y_h(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

由初始状态为 $y(0) = 1, y'(0) = 0$**，则有：**

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

由联立方程可得 $C_1 = 1, C_2 = 1$

故系统的零输入响应为：

$$y_{zi}(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

（3）**由原微分方程可得其特征方程为**

$$l^2 + 2l + 1 = 0$$

可解得特征根为 $l_{1,2} = -1$

微分方程齐次解为 $y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$

由初始状态为 $y(0) = 1, y'(0) = 0$**，则有：**

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

由联立方程可得 $C_1 = 1, C_2 = 1$

故系统的零输入响应为：

$$y_{zi}(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

2-3 **已知描述系统的微分方程如下：**

（1） $y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) = 0$

（2） $y'''(t)+2y''(t)+y'(t)=0$

当初始状态为 $y(0)=y'(0)=y'''(0)=1$ **时，求零输入响应。**

【知识点窍】本题考察常系数微分方程经典解法。

【逻辑推理】利用系统的特征方程，求出齐次解，代入初始状态求解。

解：（1）**由原微分方程可得其特征方程为**

$$l^3+3l^2+2l=0$$

可解得特征根为 $l_1=0,\ l_2=-1,\ l_3=-2$

微分方程齐次解为 $y_h(t)=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}$

由初始状态为 $y(0)=y'(0)=y'''(0)=1$**，则有：**

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3=1 \\ -C_2-2C_3=1 \\ C_2+4C_3=1 \end{cases}$$

由联立方程可得 $C_1=3,C_2=-3,C_3=1$

故系统的零输入响应为：

$$y_{zi}(t)=3-3e^{-t}+e^{-2t}$$

（2）**由原微分方程可得其特征方程为**

$$l^3+2l^2+l=0$$

可解得特征根为 $l_1=0,\ l_{2,3}=-1$

微分方程齐次解为 $y_h(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}+C_3$

由初始状态为 $y(0)=y'(0)=y'''(0)=1$**，则有：**

$$\begin{cases} C_1+C_3=1 \\ -C_1+C_2=1 \\ C_1-2C_2=1 \end{cases}$$

由联立方程可得 $C_1=-3,C_2=-2,C_3=4$

故系统的零输入响应为：

$$y_{zi}(t)=-3e^{-t}-2te^{-t}+4$$

2-4 **已知某** LTI **系统的微分方程模型为** $y''(t)+y'(t)-2y(t)=f(t)$

（1**）用两种方法（微分方程法和卷积积分法）求该系统的阶跃响应** $g(t)$**；**

（2**）求系统对输入** $f(t)=e^{-2t}\cos 3te(t)$**的零状态响应。**

【知识点窍】本题考察 LTI 系统的微分方程的单位冲激响应和单位阶跃响应，及其关系；零状态响应的卷积求解法。

【逻辑推理】求阶跃响应时可采取两种方法：直接求解微分方程零状态条件下的阶跃响应，或利用冲激响应积分。

零状态响应通过求取系统的冲激响应与激励函数相卷积得到。

解：（1**）方法一：微分方程法**

由微分方程得特征根为

$$l_1=-2,\ l_2=1$$

由此可得阶跃响应形式为 $g(t)=\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{t}-\frac{1}{2}\right)e(t)$

对上式求一阶、二阶导数，得

$$g^{'}(t)=\left(-2C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)e(t)+\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{t}-\frac{1}{2}\right)d(t)$$

$$g^{''}(t)=\left(4C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)e(t)+\left(-2C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)d(t)$$
$$+\left(-2C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)d(t)+\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{t}-\frac{1}{2}\right)d^{'}(t)$$

将阶跃响应 $g(t)$**及其一阶、二阶导数代入原方程，得：**

$$e(t)+\left(-3C_1e^{-2t}+3C_2e^{t}-\frac{1}{2}\right)d(t)+\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{t}-\frac{1}{2}\right)d'(t)=e(t)$$

利用单位冲激函数的性质，得：

$$\left(-3C_1e^{-2t}+3C_2e^{t}-\frac{1}{2}\right)d(t)=-3C_1+3C_2-\frac{1}{2}=0$$

$$\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{t}-\frac{1}{2}\right)d'(t)=\left(C_1+C_2-\frac{1}{2}\right)d'(t)-\left(-2C_1+C_2\right)d(t)=0$$

得
$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2-\frac{1}{2}=0 \\ -2C_1+C_2=0 \end{aligned}\right\}$$

则得系数 $C_1=\frac{1}{6}, C_2=\frac{1}{3}$ **。将其代入得阶跃响应** $h(t)$

$$g(t)=\left(\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{2}\right)e(t)$$

方法二：卷积积分法

由微分方程求得特征根，进而可得冲激响应形式为

$$h(t)=\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)e(t)$$

对上式求一阶、二阶导数，得

$$h^{'}(t)=\left(-2C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)e(t)+\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)d(t)$$

$$\begin{aligned} h^{"}(t)=&\left(4C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)e(t)+\left(-2C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)d(t) \\ &+\left(-2C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)d(t)+\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)d^{'}(t) \end{aligned}$$

将冲激响应 $h(t)$ **及其一阶、二阶导数代入原方程，即**

$$\left(-3C_1e^{-2t}+3C_2e^{t}\right)d(t)+\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)d'(t)=d(t)$$

利用单位冲激函数的性质，得：

$$\left(-3C_1+3C_2\right)d(t)+\left(C_1+C_2\right)d'(t)-\left(-2C_1+C_2\right)d(t)=d(t)$$

得
$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2=0 \\ -C_1+2C_2=1 \end{aligned}\right\}$$

则得系数 $C_1=-\frac{1}{3}, C_2=\frac{1}{3}$ 。

将其代入得冲激响应 $h(t)=\left(-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\right)e(t)$

则系统的阶跃响应为

$$\begin{aligned} g(t)&=h(t)*e(t) \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\right)e(t)e(t-t)dt \\ &=\left[\int_{0}^{t}\left(-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\right)dt\right]e(t) \end{aligned}$$

$$=\left(\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\right)e(t)\Big|_{0}^{t}$$

$$=\left(\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{2}\right)e(t)$$

（2）当输入 $f(t)=e^{-2t}\cos 3te(t)$ **时，系统的零状态响应为：**

$$y_{zs}(t)=h(t)*f(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\right)e(t)\cdot e^{-2(t-t)}\cos 3(t-t)e(t-t)dt$$

$$=\int_{0}^{t}\left[-\frac{1}{3}e^{-2t}\cos 3(t-t)\right]dt+\int_{0}^{t}\frac{1}{3}e^{-2t}e^{3t}\cos 3(t-t)dt$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-2t}\cdot\frac{1}{3}\sin 3(t-t)\Big|_{0}^{t}+\frac{1}{3}e^{-2t}\int_{0}^{t}e^{3t}\cos 3(t-t)dt$$

$$=-\frac{1}{9}e^{-2t}\sin 3t+\frac{1}{3}e^{-2t}\left[\frac{1}{6}e^{3t}-\frac{1}{6}\cos 3t+\frac{1}{6}\sin 3t\right]$$

$$=\frac{1}{18}e^{t}-\frac{1}{18}e^{-2t}\cos 3t-\frac{1}{18}e^{-2t}\sin 3t$$

$$=\frac{1}{18}e^{t}\left[1-e^{-3t}\cos 3t-e^{-3t}\sin 3t\right]$$

2-5　**设一个** LTI **系统的输入和输出分别为** $f(t)$ **和** $y(t)$**，试用两种方法证明：当系统的输入为** $f'(t)$ **时，输出为** $y'(t)$**。**

【知识点窍】本题考察 LTI 系统的性质。

【逻辑推理】利用零状态响应与冲激响应的卷积关系或系统的时不变性。

证明：方法一：

令系统的单位响应为 $h(t)$**，则有** $y(t)=f(t)*h(t)$

当系统的输入为 $f'(t)$ **时**

$$f'(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\frac{d}{dt}f(t-t)dt=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)f(t-t)dt=\frac{d}{dt}y(t)=y'(t)$$

即证明当系统的输入为 $f'(t)$ **时，输出为** $y'(t)$**。**

方法二：

根据倒数定义有：

$$f'(t)=\lim_{t_0\to 0}\frac{f(t-t_0)-f(t)}{t_0}$$

根据 LTI **系统的时不变性，可得：**

$$f(t-t_0)\to y(t-t_0)$$

则有：

$$f'(t)=\lim_{t_0\to 0}\frac{f(t-t_0)-f(t)}{t_0}\to\lim_{t_0\to 0}\frac{y(t-t_0)-y(t)}{t_0}=y'(t)$$

即证明当系统的输入为 $f'(t)$**时，输出为** $y'(t)$**。**

2-6　**已知函数波形如图** 2.2 **所示，计算下面的卷积积分、并画出其波形。**

（1） $f_1(t)*f_2(t)$　　（2） $f_1(t)*f_3(t)$　　（3） $f_1(t)*f_2(t)*f_3(t)$

（4） $f_2(t)*f_4(t)$　　（5） $f_4(t)*f_5(t)$　　（6） $f_4(t)*f_6(t)$

（7） $f_2(t)*f_5(t)$　　（8） $f_6(t)*f_7(t)$　　（9） $f_5(t)*f_8(t)$

（10） $f_7(t)*f_8(t)$

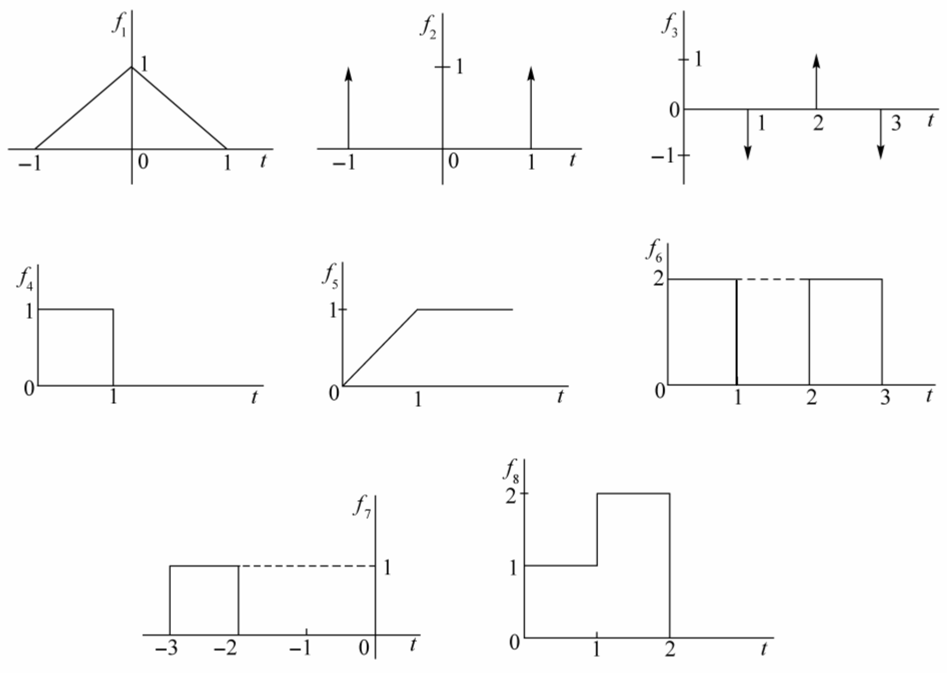


图 2.2

【知识点窍】本题考察卷积求解法。

【逻辑推理】函数 $f_i(t)$**与函数** $f_j(t)$**相卷积后的值** $y(t)$**，就是在变量** t **由** $-\infty$ **到** $+\infty$ **范围内，对某一** t **值时乘积** $f_i(t)f_j(t-t)$**曲线下的面积。或利用卷积积分的微分和积分性质以及冲激函数卷积性质求解。即若**

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

则其微分 $$f^{(1)}(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(1)}(t)$$

积分 $$f^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

含有冲激函数的卷积有：

$$f(t)*d(t)=f(t)$$

$$f(t)*d(t-t_0)=f(t-t_0)$$

$$f(t)*d'(t)=f'(t)$$

$$f(t)*e(t)=f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)dt$$

解：(1) 如图可知， $f_2(t)=d(t+1)+d(t-1)$

由含有冲激函数的卷积可得

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=f_1(t)*[d(t+1)+d(t-1)]\\&=f_1(t+1)+f_1(t-1)\end{aligned}$$

其波形如图 2.3 **所示。**

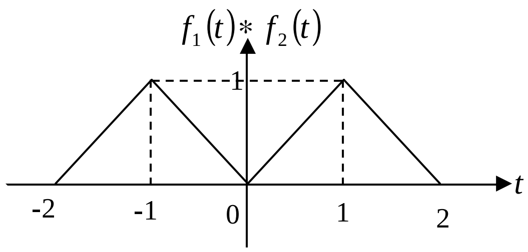


图 2.3

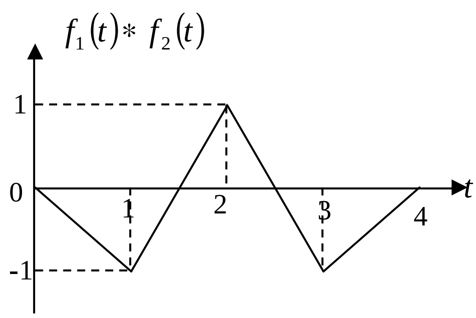


图 2.4

(2) **如图可知，** $f_3(t)=-d(t-1)+d(t-2)-d(t-3)$

由含有冲激函数的卷积可得

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_3(t)&=f_1(t)*[-d(t-1)+d(t-2)-d(t-3)]\\&=-f_1(t-11)+f_1(t-2)-f_1(t-3)\end{aligned}$$

其波形如图 2.4 **所示。**

(3) **由卷积积分性质可知，**

$$
\begin{aligned}
f_1(t)*f_2(t)*f_3(t) &= f_1(t)*[d(t+1)+d(t-1)]*[-d(t-1)+d(t-2)-d(t-3)] \\
&= [f_1(t+1)+f_1(t-1)]*[-d(t-1)+d(t-2)-d(t-3)] \\
&= -f_1(t)+f_1(t-1)-f_1(t-2)-f_1(t-2)+f_1(t-3)-f_1(t-4) \\
&= -f_1(t)+f_1(t-1)-2f_1(t-2)+f_1(t-3)-f_1(t-4)
\end{aligned}
$$

其波形如图 2.5 **所示。**

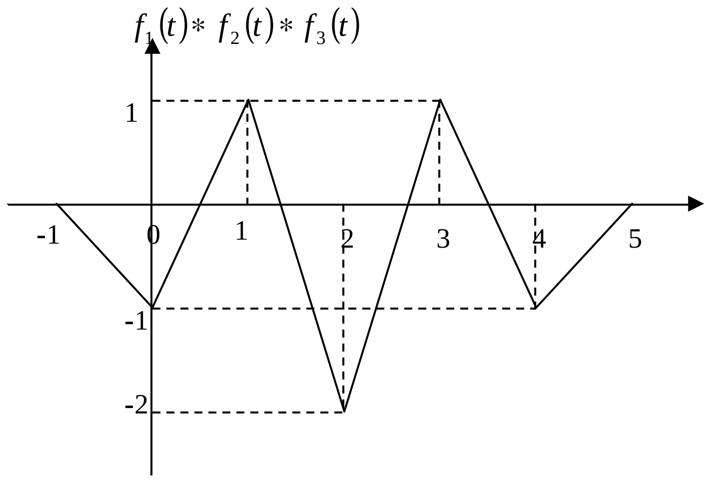


图 2.5

（4）**如图可知，** $f_2(t)=d(t+1)+d(t-1)$

由含有冲激函数的卷积可得

$$
\begin{aligned}
f_2(t)*f_4(t) &= f_4(t)*f_2(t) = f_4(t)*[d(t+1)+d(t-1)] \\
&= f_4(t+1)+f_4(t-1)
\end{aligned}
$$

其波形如图 2.6 **所示。**

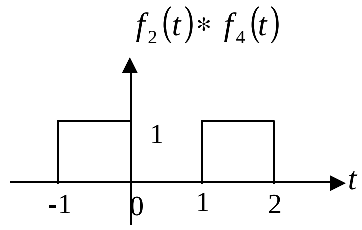


图 2.6

（5）**由卷积积分的积微性可知：**

$$
\begin{aligned}
f_4(t)*f_5(t) &= f_4^{(1)}(t)*f_5^{(-1)}(t) = [d(t)-d(t-1)]*f_5^{(-1)}(t) \\
&= f_5^{(-1)}(t)-f_5^{(-1)}(t-1)
\end{aligned}
$$

由图可知 $f_5(t)=\begin{cases} t & 0<t<1 \\ 1 & t\ge 1 \end{cases}$ **即可求得** $f_5^{(-1)}(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & 0<t<1 \\ t-\frac{1}{2} & t\ge 1 \end{cases}$

其波形如图 2.7 **所示。**

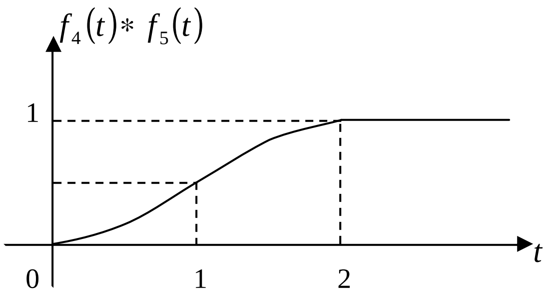


图 2.7

(6) **由卷积积分的积微性可知：**

$$\begin{aligned} f_4(t)*f_6(t) &= f_4^{(-1)}(t)*f_6^{(1)}(t)=f_4^{(-1)}(t)*[2d(t)-2d(t-1)+2d(t-2)-2d(t-3)] \\ &=2\left[f_4^{(-1)}(t)-f_4^{(-1)}(t-1)+f_4^{(-1)}(t-2)-f_4^{(-1)}(t-3)\right] \end{aligned}$$

由图可知： $f_4^{(-1)}(t)=te(t)-(t-1)e(t-1)$

即得： $f_4(t)*f_6(t)=2[te(t)-2(t-1)e(t-1)+2(t-2)e(t-2)-2(t-3)e(t-3)+(t-4)e(t-4)]$

其波形如图 2.8 **所示。**

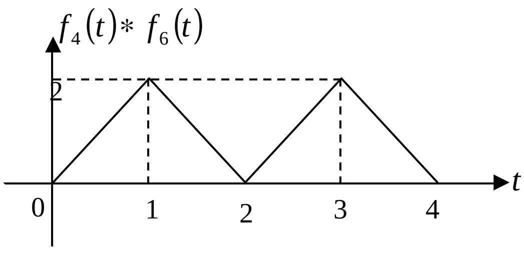


图 2.8

(7) **由图可知：** $f_2(t)*f_5(t)=[d(t+1)+d(t-1)]*f_5(t)=f_5(t+1)+f_5(t-1)$

其波形如图 2.9 **所示。**

(8) **由图可知，**

$$\begin{aligned} f_6(t)*f_7(t) &= f_6^{(1)}(t)*f_7^{(-1)}(t)=f_7^{(-1)}(t)*[2d(t)-2d(t-1)+2d(t-2)-2d(t-3)] \\ &=2\left[f_7^{(-1)}(t)-f_7^{(-1)}(t-1)+f_7^{(-1)}(t-2)-f_7^{(-1)}(t-3)\right] \end{aligned}$$

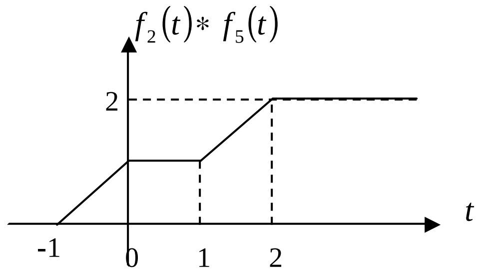


图 2.9

由图可知： $f_7^{(-1)}(t)=(t+3)e(t+3)-(t+2)e(t+2)$

即得： $f_6(t)*f_7(t)=2[(t+3)e(t+3)-2(t+2)e(t+2)+2(t+1)e(t+1)-2te(t)+(t-1)e(t-1)]$

其波形如图 2.10 **所示。**

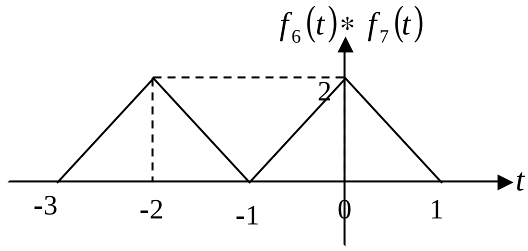


图 2.10

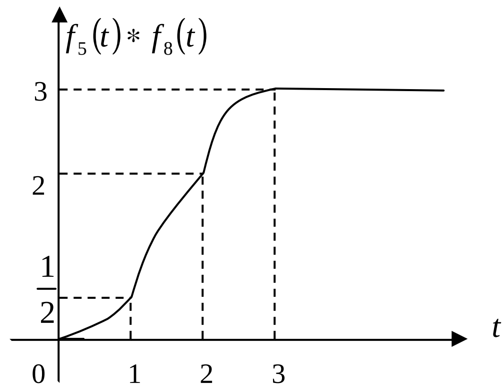


图 2.11

（9）**由卷积积分的积微性可知：**

$$
\begin{aligned}
f_5(t)*f_8(t)&=f_8(t)*f_5(t)=f_8^{(1)}(t)*f_5^{(-1)}(t)=[d(t)+d(t-1)-2d(t-2)]*f_5^{(-1)}(t)\\
&=f_5^{(-1)}(t)+f_5^{(-1)}(t-1)-2f_5^{(-1)}(t-2)
\end{aligned}
$$

由图可知 $f_5(t)=\begin{cases}t & 0<t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$ **即可求得** $f_5^{(-1)}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & 0<t<1\\ t-\frac{1}{2} & t\ge 1\end{cases}$

其波形如图 2.11 **所示。**

（10）**由卷积积分的积微性可知：**

$$
\begin{aligned}
f_7(t)*f_8(t)&=f_7^{(-1)}(t)*f_8^{(1)}(t)=f_7^{(-1)}(t)*[d(t)+d(t-1)-2d(t-2)]\\
&=f_7^{(-1)}(t)+f_7^{(-1)}(t-1)-2f_7^{(-1)}(t-2)
\end{aligned}
$$

由图可知： $$f_7^{(-1)}(t)=(t+3)e(t+3)-(t+2)e(t+2)$$

即得： $$f_7(t)*f_8(t)=(t+3)e(t+3)-3(t+1)e(t+1)+2te(t)$$

其波形如图 2.12 **所示。**

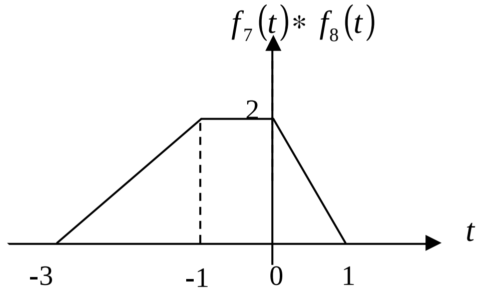


图 2.12

2-7 **利用冲激函数的取样性质，计算下列积分：**

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} d\left(t-\frac{p}{4}\right)\sin t dt$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} d(t+3)e^{-t}dt$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} d(1-t)(t^2+4)dt$ (4) $\int_{-\infty}^{\infty} d(t)\frac{\sin 2t}{t}dt$

(5) $\int_{-10}^{10} d(2t-3)(2t^2+t-5)dt$ (6) $\int_{-10}^{10} d'\left(t+\frac{1}{4}\right)(2t^2+t-5)dt$

(7) $\int_{-\infty}^{\infty} e\left(t-\frac{t_0}{2}\right)d(t-t_0)dt$ (8) $\int_{-1}^{1} d(t^2-4)dt$

【知识点窍】本题考察冲激函数的取样性质。

【逻辑推理】

$$f(t)d(t-t_0)=f(t_0)d(t-t_0)\text{；}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d(t-t_0)dt=f(t_0)\text{；}$$

$$d'(t)=-d'(-t)$$
$$d^{(n)}(t)=(-1)^n d^{(n)}(-t)$$
$$d'(t-t_0)=-d'[-(t-t_0)]$$

$$f(t)d'(t)=f(0)d'(t)-f'(0)d(t)$$
$$f(t)d'(t-t_0)=f(t_0)d'(t-t_0)-f'(t_0)d(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d'(t)dt=-f'(0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d^{(n)}(t)dt=(-1)^n f^{(n)}(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d'(t-t_0) dt = -f'(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d^{(n)}(t-t_0) dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0)$$

解：

（1） $\int_{-\infty}^{\infty} d\left(t-\frac{p}{4}\right)\sin t dt = \sin\frac{p}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

（2） $\int_{-\infty}^{\infty} d(t+3)e^{-t} dt = e^{3}$

（3） $\int_{-\infty}^{\infty} d(1-t)(t^2+4)dt = \int_{-\infty}^{\infty} d(t-1)(t^2+4)dt = \left[t^2+4\right]_{t=1} = 5$

（4） $\int_{-\infty}^{\infty} d(t)\frac{\sin 2t}{t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2d(t)\frac{\sin 2t}{2t}dt = 2$

（5） $\int_{-10}^{10} d(2t-3)(2t^2+t-5)dt = \int_{-10}^{10}\frac{1}{2}d\left(t-\frac{3}{2}\right)(2t^2+t-5)dt$

$$= \frac{1}{2}\left(2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}-5\right) = \frac{1}{2}$$

（6） $\int_{-10}^{10} d'\left(t+\frac{1}{4}\right)(2t^2+t-5)dt = -\frac{d}{dt}(2t^2+t-5)_{t=-\frac{1}{4}} = (-4t-1)_{t=-\frac{1}{4}} = 0$

（7） $\int_{-\infty}^{\infty} e\left(t-\frac{t_0}{2}\right)d(t-t_0)dt = e\left(\frac{t_0}{2}\right) = 1$

（8） $\int_{-1}^{1} d(t^2-4)dt = \int_{-1}^{1} d[(t+2)(t-2)]dt = 0$

2-8　**求图** 2.13（a）**所示系统的零状态响应** $y(t)$**，并画出其波形。已知** $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(t-2kT), k = 0,\pm1,\pm2,\cdots,$ $f(t)$**的波形如图** 2.13（b）**所示。**

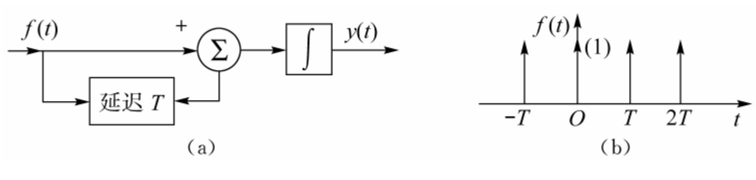


图 2.13

【知识点窍】本题考察系统的零状态响应求解法。

【逻辑推理】零状态响应通过求取系统的冲激响应与激励函数相卷积得到。

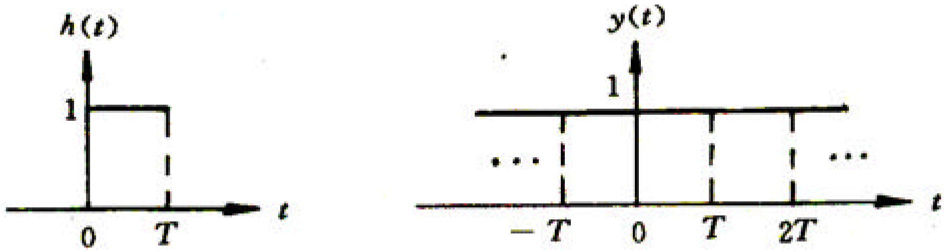
解：系统的单位冲激响应为

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}[d(t)-d(t-T)]dt=e(t)-e(t-T)$$

$h(t)$的波形如图 2.14（a）所示。故得零状态响应为

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d(t-2kT)*h(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(t-kT)=1$$

$y(t)$的波形如图 2.14（b）所示。



(a)　　　　　　　　(b)

图 2.14

2-9　图 2.15 电路，已知 $f(t)=e(t), i(0)=1A, i'(0)=2A/s$。求全响应 $i(t)$。

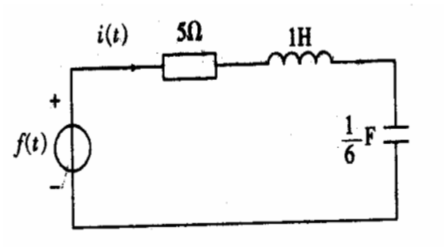


图 2.15

【知识点窍】本题考察系统的全响应求解法。

【逻辑推理】基尔霍夫定律列出系统的微分方程，系统的全响应是由零输入响应与零状态响应组成；零输入响应通过经典法求取，零状态响应通过求取系统的冲激响应与激励函数相卷积得到。

解：(1) 电路的微分方程为

$$\left(p+5+\frac{6}{p}\right)i(t)=f(t)$$

即
$$(p^2+5p+6)i(t)=pf(t)$$

故
$$i(t)=\frac{p}{p^2+5p+6}f(t)=H(p)f(t)$$

故得转移算子为

$$H(p)=\frac{p}{p^2+5p+6}=\frac{p}{(p+2)(p+3)}=\frac{-2}{p+2}+\frac{3}{p+3}$$

（2）零输入响应的通解为 $i_x(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}$

将初始条件 $i(0)=1A, i'(0)=2A/s$ **代入上式可得** $A_1=5$ **，** $A_2=-4$ **。**

故得零输入响应为

$$i_x(t)=\left(5e^{-2t}-4e^{-3t}\right)\varepsilon(t) \qquad \text{（A）}$$

（3）电路的单位冲激响应为 $h(t)=\left(-2e^{-2t}+3e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$ （A）

（4）电路的零状态响应为

$$i_f(t)=f(t)*h(t)=\varepsilon(t)*\left(-2e^{-2t}+3e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

$$=\varepsilon(t)*\left(-2e^{-2t}\right)\varepsilon(t)+\varepsilon(t)*\left(3e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

$$=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)\varepsilon(t) \qquad \text{（A）}$$

（5）全响应为

$$i(t)=i_x(t)+i_f(t)=\left(6e^{-2t}-5e^{-3t}\right)\varepsilon(t) \qquad \text{（A）}$$

2-10 **图** 2.16（a）**所示电路，激励** $f(t)$ **的波形如图** 2.16（b）**所示。求零状态响应** $u_c(t)$**，并画出波形。**

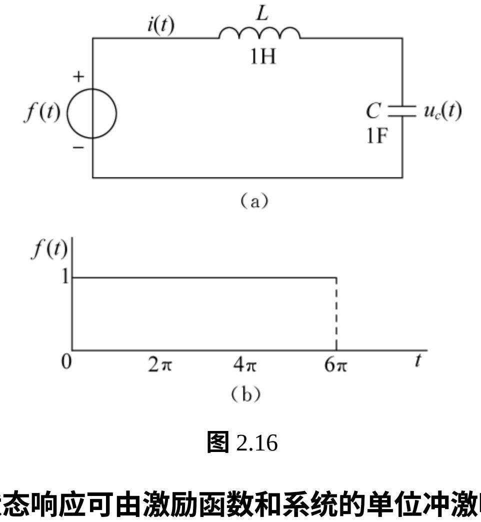


图 2.16

【知识点窍】系统的零状态响应可由激励函数和系统的单位冲激响应相卷积得到。

【逻辑推理】先求取系统的冲激响应，再通过冲激响应与激励函数相卷积即可求得。

解：该电路的微分方程为

$$\frac{d^2u_c}{dt^2}+u_c = f(t)$$

即 $$(p^2+1)u_c = f(t)$$

转移算子为 $$H(p)=\frac{1}{p^2+1}$$

故得单位冲激响应为

$$h(t)=\sin te(t)$$

故得 $$u_c(t)= f(t)*h(t)= f'(t)*\int_{-\infty}^{t}\sin te(t)dt$$

$$=[d(t)-d(t-6p)]*\int_{0}^{t}\sin t\,dt$$

$$=[d(t)-d(t-6p)]*[-\cos t]_0^t$$

$$=[d(t)-d(t-6p)]*[1-\cos t]e(t)$$

$$=[1-\cos t]e(t)-[1-\cos(t-6p)]e(t-6p)$$

$u_c(t)$**的波形如图** 2.17 **所示。**

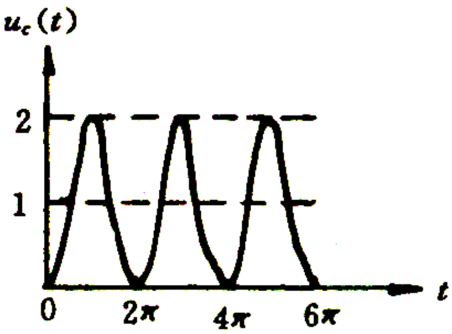


图 2.17

2-11 **已知一线性时不变系统对激励** $f(t)=\sin te(t)$**的零状态响应** $y(t)$**的波形如图** 2.18 **所示。求该系统的单位冲激响应**$h(t)$**，并画出其波形。**

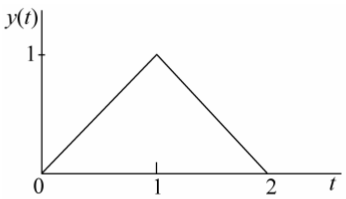


图 2.18

【知识点窍】系统的零状态响应可由激励函数和系统的单位冲激响应相卷积得到。

【逻辑推理】零状态响应由由冲激响应与激励函数相卷积求得，由此利用卷积的积分与微分性质求取冲激响应。

解： $y(t)= f(t)*h(t)=\sin te(t)*h(t)$ ①

$$\frac{dy(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\sin te(t)*h(t)=\cos te(t)*h(t)$$

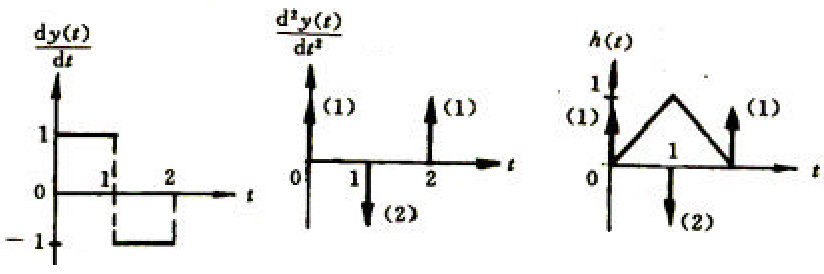
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\cos te(t)*h(t)=[d(t)-\sin te(t)]*h(t)$$

$$=h(t)-\sin te(t)*h(t) \quad ②$$

①式＋②式即得：

$$h(t)=y(t)+\frac{d^2y(t)}{dt^2}=y(t)+d(t)-2d(t-1)+d(t-2)$$

$h(t)$的波形如图 2.19（c）所示。图 2.19（a）（b）分别为$\frac{dy(t)}{dt}$，$\frac{d^2y(t)}{dt^2}$的波形。



(a) (b) (c)

图 2.19

2-12 图 2.20 所示系统是由几个子系统组合而成，各子系统的冲激响应分别为

$h_1(t)=e(t)$ （积分器）

$h_2(t)=d(t-1)$ （单位延时器）

$h_3(t)=-d(t)$ （倒相器）

求总系统的冲激响应$h(t)$。

【知识点窍】线性系统的性质。

【逻辑推理】线性系统的冲激响应等于子系统冲激响应的卷积。

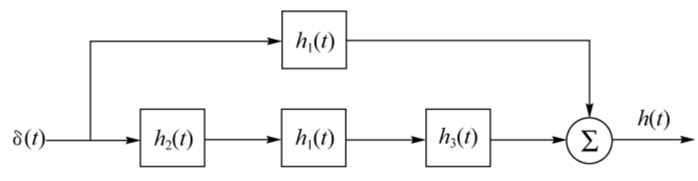


图 2.20

解： $h(t)=h_1(t)+d(t)*h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)$

$$=e(t)+d(t)*d(t-1)*e(t)*[-d(t)]$$

$$=e(t)-e(t-1)$$

2-13 **在图** 2.21 **所示系统中，** $h_1(t)=d(t-1)$**，** $h_2(t)=e(t)-e(t-3)$**，** $f(t)=e(t)-e(t-1)$**。求响应** $y(t)$**，并画出其波形。**

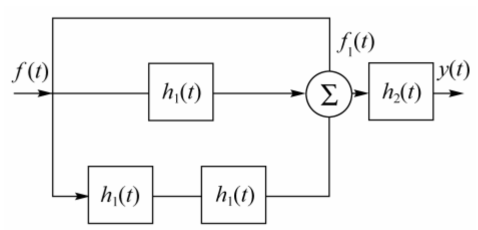


图 2.21

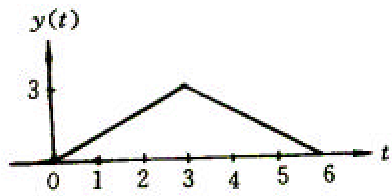


图 2.22

【知识点窍】线性系统的性质。

【逻辑推理】线性系统的冲激响应等于子系统冲激响应的卷积。

解： $f_1(t)=f(t)+f(t)*h_1(t)+f(t)*h_1(t)*h_1(t)$

$$=[e(t)-e(t-1)]+[e(t)-e(t-1)]*d(t-1)+[e(t)-e(t-1)]*d(t-1)*d(t-1)$$

$$=[e(t)-e(t-1)]+[e(t-1)-e(t-2)]+[e(t-2)-e(t-3)]$$

$$=e(t)-e(t-3)$$

$$y(t)=f_1(t)*h_2(t)=[e(t)-e(t-3)]*[e(t)-e(t-3)]$$

$$=te(t)-2(t-3)e(t-3)+(t-6)e(t-6)$$

$y(t)$**的波形如图** 2.22 **所示。**

2-14 **求图** 2.23 **所示系统的单位冲激响应**$h(t)$**。**

【知识点窍】系统模拟图与微分方程之间变换。

【逻辑推理】由系统模拟图求取系统的微分方程。

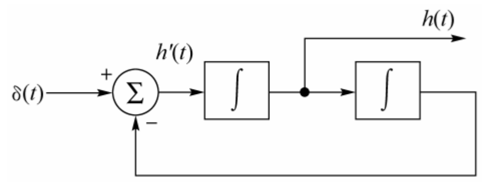


图 2.23

解： $h'(t)=d(t)-\int_{-\infty}^{t}h(t)dt$

$h''(t)=d'(t)-h(t)$

即 $h''(t)+h(t)=d'(t)$

即 $(p^2+1)h(t)=pd(t)$

故得 $H(p)=\dfrac{p}{p^2+1}=\dfrac{\frac{1}{2}}{p+j1}+\dfrac{\frac{1}{2}}{p-j1}$

故 $h(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^{-j1t}+e^{j1t}\right)=\cos te(t)$

2-15 **已知系统的单位冲激响应**$h(t)=\sin te(t)$**，波形如图** 2.24（a）**所示，激励的波形如习题图** 2.24（b）**所示。求零状态响应** $y(t)$。

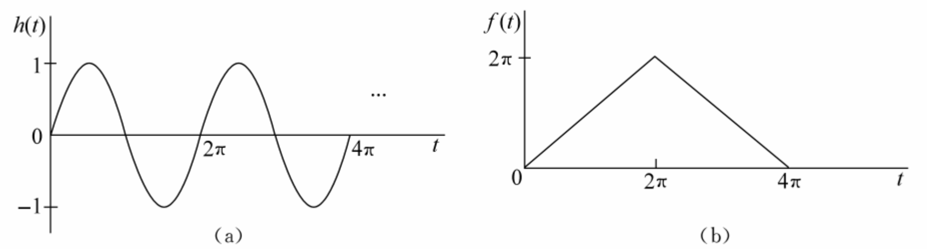


图 2.24

【知识点窍】系统的零状态响应可由激励函数和系统的单位冲激响应相卷积得到。

【逻辑推理】利用卷积积分的积微性进行求取冲激响应与激励函数的卷积。

解：将$h(t)$**积分两次，有：**

$$h^{(-1)}(t)=\int_0^t \sin te(t)dt=(1-\cos t)e(t)$$

$$h^{(-2)}(t)=\int_0^t (1-\cos t)e(t)dt=(t-\sin t)e(t)$$

将 $f(t)$ **微分两次，有**

$$f''(t)=d(t)-2d(t-2p)+d(t-4p)$$

故得

$$y(t)=h(t)*f(t)=h^{(-2)}(t)*f''(t)$$

$$=(t-\sin t)e(t)*[d(t)-2d(t-2p)+d(t-4p)]$$

$$=(t-\sin t)e(t)-2[(t-2p)-\sin(t-2p)]e(t-2p)+[(t-4p)-\sin(t-4p)]e(t-4p)$$

$y(t)$ **的波形如图** 2.25 **所示。**

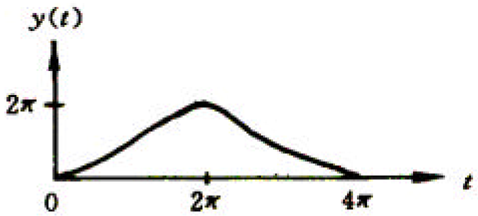


图 2.25

2-16 **如图** 2.26（a）**所示系统，已知** $h_1(t)=d(t-1)$，$h_2(t)=-2d(t-1)$，$f(t)=\sin te(t)$，$y_f(t)$ **的图形如图** 2.26（b）**所示，求** $h_3(t)$。

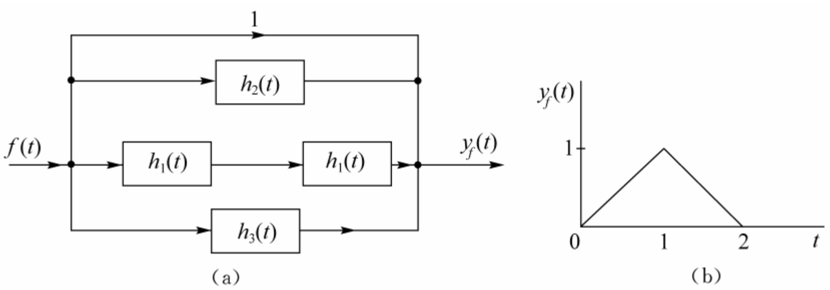


图 2.26

【知识点窍】线性系统的性质与零状态响应的卷积求解。

【逻辑推理】线性系统的冲激响应等于子系统冲激响应的卷积，零状态响应由由冲激响应与激励函数相卷积求得。

解：求系统的冲激响应 $h(t)$。

因有 $f(t)=\sin te(t)$，**则得到** $y_f(t)=\sin te(t)*h(t)$ ①

又因有 $\dfrac{d^2}{dt^2}\sin te(t)=\dfrac{d}{dt}\cos te(t)=d(t)-\sin te(t)$

故得 $d(t)=\dfrac{d^2}{dt^2}\sin te(t)+\sin te(t)$ ②

又因有 $\dfrac{d^2 y_f(t)}{dt^2}=\dfrac{d^2}{dt^2}\sin te(t)*h(t)$ ③

①式＋③式得： $y_f(t)+\dfrac{d^2 y_f(t)}{dt^2}=\sin te(t)*h(t)+\dfrac{d^2}{dt^2}\sin te(t)*h(t)$

$$=\left[\sin te(t)+\frac{d^2}{dt^2}\sin te(t)\right]*h(t)$$

将②式代入上式，即 $y_f(t)+\dfrac{d^2 y_f(t)}{dt^2}=d(t)*h(t)=h(t)$

故得 $h(t)=y_f(t)+d(t)-2d(t-1)+d(t-2)$。$h(t)$**的波形如图** 2.27 **所示**

又有 $h(t)=d(t)+h_1(t)*h_1(t)+h_2(t)+h_3(t)$

$$=d(t)+d(t-1)*d(t-1)-2d(t-1)+h_3(t)$$

$$=d(t)+d(t-2)-2d(t-1)+h_3(t)$$

故得 $h_3(t)=h(t)-[d(t)-2d(t-1)+d(t-2)]$

$$=y_f(t)+d(t)-2d(t-1)+d(t-2)-[d(t)-2d(t-1)+d(t-2)]$$

$$=y_f(t)$$

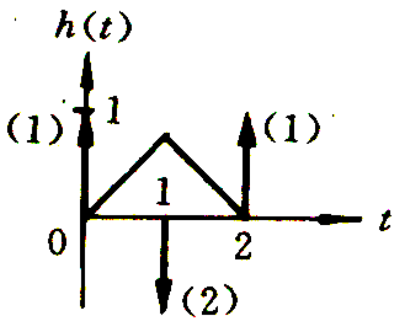


图 2.27

第三章　连续时间信号与系统的频域分析

3.1　学习重点

1、 了解函数正交的条件及完备正交函数集的概念。

2、 能用傅立叶级数的定义式、 基本性质求解周期信号的频谱、 频谱宽度，会画频谱图；理解连续周期信号频谱的特点，相位谱的作用。

3、 能用傅立叶级数的定义式、 基本性质求解非周期信号的频谱，会画频谱图，求信号的频谱宽度。

4、 掌握常用周期信号的傅立叶变换和非周期信号的傅立叶变换，理解周期信号与非周期信号之间的关系。

5、 熟练掌握傅里叶变换的性质，并会灵活应用。

6、 理解功率信号与功率谱、 能量信号与能量谱的概念，会在时域和频域两个域中求解功率信号的功率和能量信号的能量。

7、 熟练利用傅里叶变换对称特性、 部分分式展开法、 傅里叶变换性质和常见信号的傅里叶变换对，求傅立叶反变换。

8、 深刻理解频域系统函数$H(jw)$的定义，物理意义，会求解并应用。

9、 掌握系统零状态响应、 零输入响应和全响应的频域求解方法；连续周期信号响应的频域分析方法。

10、 理解无失真传输系统，及无失真传输的条件。

11、 理解理想滤波器的定义、 传输特性等。

12、 了解抽样信号的频谱及其求解，理解抽样定理。

13、 了解调制与解调的基本定理与应用。

14、 用MATLAB 进行连续时间信号与系统的频域分析

3.2 教材习题同步解析

3.1 如图 3.1 所示信号 $f(t)$，求指数型与三角型傅里叶级数，并画出频谱图。

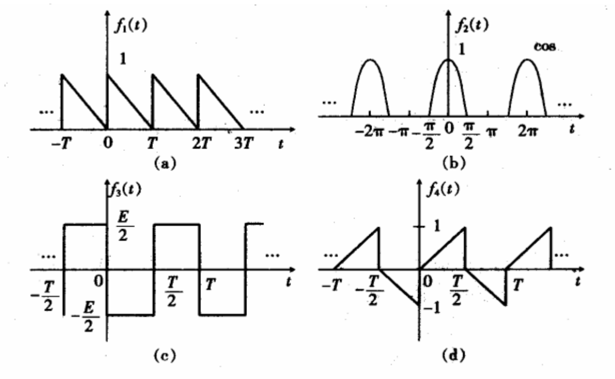


图 3.1

【知识点窍】信号指数型与三角型傅里叶级数的写法，频谱图画法。

【逻辑推理】三角型的傅里叶级数为

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos w_0 t + a_2\cos 2w_0 t + \cdots + b_1\sin w_0 t + b_2\sin 2w_0 t + \cdots \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nw_0 t + b_n\sin nw_0 t\right)
\end{aligned}
$$

式中 a_0, a_n, b_n 称为傅里叶系数，分别代表了信号 $f(t)$ 的直流分量，余弦分量和正经弦分量的振荡幅度，其值分别由下式确定：

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)dt \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\cos nw_0 tdt \qquad n=1,2,\cdots \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\sin nw_0 tdt \qquad n=1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

信号指数型为：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jnw_0 t}$$

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jnw_0 t} dt$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

解：(1）由图 3.1(a)可知，该信号的解析式为：

$$f(t) = 1 - \frac{1}{T}t \qquad 0 \le t \le T$$

1）傅里叶系数

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{1}{T}t\right)dt = \frac{2}{T}\left[T - \frac{1}{2T}T^2\right] = 1$$

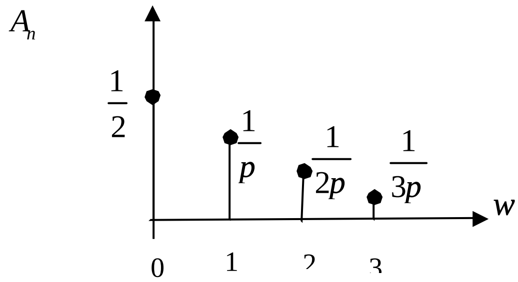
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos nw_0 t dt = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{1}{T}t\right)\cos nw_0 t dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \cos nw_0 t dt - \frac{2}{T^2}\int_0^T t\cos nw_0 t dt \\
&= \frac{2}{T}\frac{\sin nw_0 t}{nw_0}\bigg|_0^T - \frac{2}{T^2}\int_0^T \frac{t}{nw_0} d\sin nw_0 t \\
&= \frac{2}{nw_0 T}\sin nw_0 T - \frac{2}{nw_0 T^2}\left[t\sin nw_0 t\big|_0^T - \int_0^T \sin nw_0 t dt\right] \\
&= \frac{1}{np}\sin 2np + \frac{2}{nw_0 T^2}\int_0^T \frac{d\cos nw_0 t}{-nw_0} \\
&= -\frac{2}{n^2 w_0^2 T^2}\left[\cos nw_0 t\big|_0^T\right] = 0 \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad T = \frac{2p}{w_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin nw_0 t dt = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{1}{T}t\right)\sin nw_0 t dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \sin nw_0 t dt - \frac{2}{T^2}\int_0^T t\sin nw_0 t dt \\
&= \frac{2}{T}\frac{\cos nw_0 t}{-nw_0}\bigg|_0^T - \frac{2}{T^2}\int_0^T \frac{t}{-nw_0} d\cos nw_0 t \\
&= \frac{2}{nw_0 T^2}\left[t\cos nw_0 t\big|_0^T - \int_0^T \cos nw_0 t dt\right] \\
&= \frac{2}{nw_0 T}\cos 2np - \frac{2}{nw_0 T^2}\int_0^T \frac{d\sin nw_0 t}{nw_0} \\
&= \frac{1}{np} - \frac{2}{n^2 w_0^2 T^2}\left[\sin nw_0 t\big|_0^T\right] = \frac{1}{np} \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad T = \frac{2p}{w_0}
\end{aligned}$$

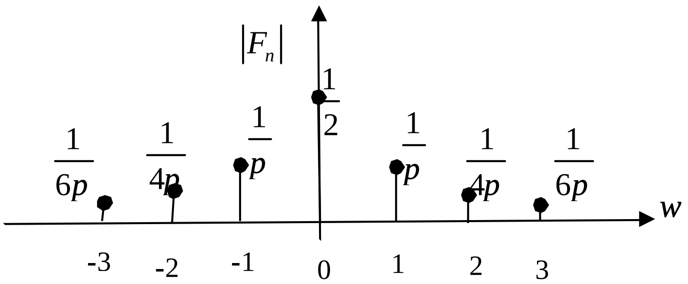
该信号的三角傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np}\sin nw_0 t$$

其频谱图如图 3.2（a）所示。



(a)



(b)

图 3.2

2)指数型

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jnw_0t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{1}{T}t\right)e^{-jnw_0t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-jnw_0t}dt - \frac{1}{T^2}\int_0^T te^{-jnw_0t}dt$$

$$= \frac{1}{-jnw_0T}\left[e^{-jnw_0t}\Big|_0^T\right] - \frac{1}{-jnw_0T^2}\int_0^T tde^{-jnw_0t}$$

$$= \frac{1}{-jnw_0T}e^{-jnw_0T} + \frac{1}{jnw_0T} + \frac{1}{jnw_0T^2}\left[te^{-jnw_0t}\Big|_0^T - \int_0^T e^{-jnw_0t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{-jnw_0T}e^{-jnw_0T} + \frac{1}{jnw_0T} + \frac{1}{jnw_0T^2}\left[Te^{-jnw_0T} - \frac{1}{-jnw_0}\left(e^{-jnw_0t}\Big|_0^T\right)\right]$$

$$= \frac{1}{jnw_0T} + \frac{1}{j^2n^2w_0^2T^2}\left[e^{-jnw_0T}-1\right] = \frac{1}{j2np} + \frac{1}{n^2p^2}\left[1-e^{-j2np}\right]$$

$$= \frac{1}{j2np} \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{1}{T}t\right)dt = \frac{1}{2}$$

该信号的指数型傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{j2np}e^{jnw_0t}$$

其频谱图如图 3.2（b）所示。

（2）由图 3.1(b)可知，其周期为$T = 2p$ ，其频$w_0 = 1$，信号的解析式为：

$$f(t)=\begin{cases}\cos t & -\frac{p}{2}\le t\le\frac{p}{2}\\ 0 & \frac{p}{2}\le t\le\frac{3p}{2}\end{cases}$$

1）由图可知，该函数为偶函数，故$b_n = 0$。由题可傅里叶系数为

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos t dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{p}{2}}\cos t dt=\frac{4}{T}=\frac{2}{p}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos t\cos nw_0 t dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{p}{2}}\cos t\cos nt dt\\&=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{p}{2}}[\cos(n+1)t+\cos(n-1)t]dt\\&=\frac{2}{T}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{p}{2(n+1)}+\frac{1}{n-1}\sin\frac{p}{2(n-1)}\right]=-\frac{2}{(n^2-1)p}\cos\frac{np}{2}\qquad n=1,2,\cdots\end{aligned}$$

该信号的三角傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n^2-1)p}\cos\frac{np}{2}\sin nt$$

其频谱图如图 3.3（a）所示。

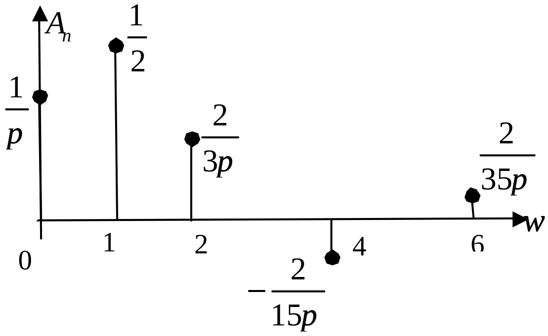
2）指数型

$$\begin{aligned}F_n&=\frac{1}{T}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}f(t)e^{-jnw_0t}dt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{p}{2}}\cos t e^{-jnt}dt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2}\left(e^{-jt}+e^{jt}\right)e^{-jnt}dt\\&=\frac{1}{T}\int_0^{\frac{p}{2}}\left[e^{-j(n+1)t}+e^{-j(n-1)t}\right]dt=\frac{1}{-j(n+1)T}e^{-j(n+1)t}\Big|_0^{\frac{p}{2}}+\frac{1}{-j(n-1)T}e^{-j(n-1)t}\Big|_0^{\frac{p}{2}}\\&=\frac{1}{-j(n+1)T}e^{-j(n+1)\frac{p}{2}}+\frac{1}{j(n+1)T}+\frac{1}{-j(n-1)T}e^{-j(n-1)\frac{p}{2}}+\frac{1}{j(n-1)T}\end{aligned}$$

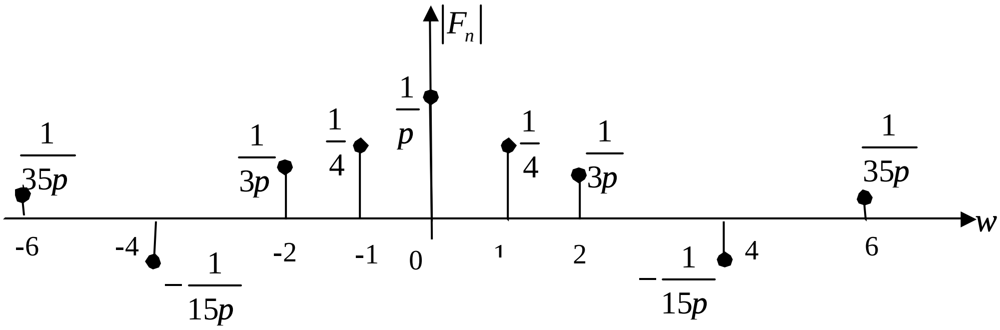
$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jnw_0t}$$

其频谱图如图 3.3（b）所示。



(a)



(b)

图 3.3

（3）由图 3.1（c）所示，方波信号在一个周期内的解析式为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{E}{2} & -T/2 \le t < 0 \\ -\dfrac{E}{2} & 0 \le t \le T/2\end{cases}$$

分别求得傅里叶系数

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(\frac{E}{2}\right)\cos nw_0 t dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{E}{2}\right)\cos nw_0 t dt$$

$$=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{n}w_0 T}\left[\left(\sin nw_0 t\right)\Big|_{-T/2}^{0}-\left(\sin nw_0 t\right)\Big|_{0}^{T/2}\right]=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(\frac{E}{2}\right)\sin nw_0 t dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{E}{2}\right)\sin nw_0 t dt$$

$$=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{n}w_0 T}\left[\left(-\cos nw_0 t\right)\Big|_{-T/2}^{0}+\left(\cos nw_0 t\right)\Big|_{0}^{T/2}\right]$$

$$=\frac{E}{2pn}\left[2\cos(np)-2\right]$$

即 $$b_n = \begin{cases} -\dfrac{2E}{np} & n\text{为奇数} \\ 0 & n\text{为偶数} \end{cases}$$

故得信号的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = -\frac{2E}{p}\left(\sin w_0 t + \frac{1}{3}\sin 3w_0 t + \frac{1}{5}\sin 5w_0 t + \cdots + \frac{1}{n}\sin nw_0 t + \cdots\right)$$
$$n = 1,3,5,\cdots$$

它只含有 1、3、5、……等奇次谐波分量。其频谱图如图 3.4（a）所示。

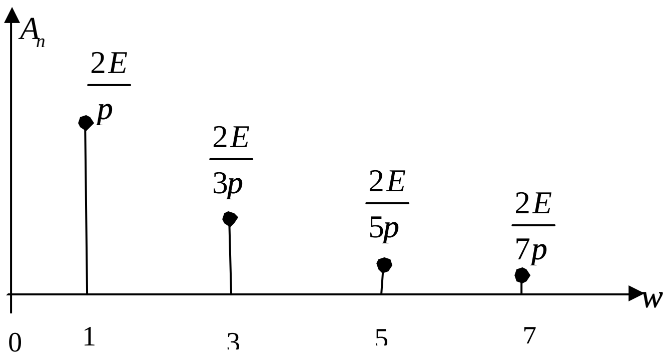
2）指数型

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(\frac{E}{2}\right)e^{-jnw_0 t}dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{E}{2}\right)e^{-jnw_0 t}dt \\ &= \frac{\mathrm{E}}{-\mathrm{jn}w_0 T}\left[\left(e^{-jnw_0 t}\right)\Big|_{-T/2}^{0} - \left(e^{-jnw_0 t}\right)\Big|_{0}^{T/2}\right] \\ &= \frac{\mathrm{E}}{-\mathrm{jn}w_0 T}\left[1 - e^{\frac{jnw_0 T}{2}} - e^{-\frac{jnw_0 T}{2}} + 1\right] \\ &= \frac{\mathrm{E}}{-\mathrm{j}2p\,\mathrm{n}}\left[2 - 2\cos np\right] \end{aligned}$$

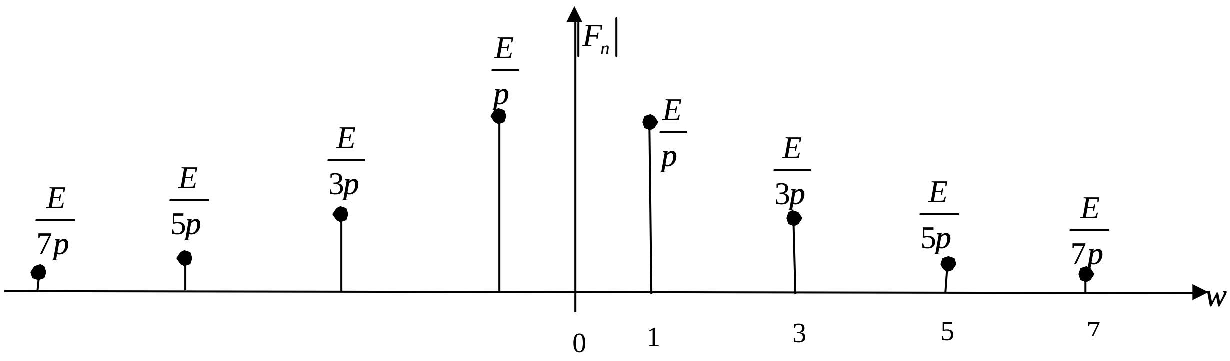
其指数型表达式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{E}{-j2p\,n}\left[2 - 2\cos np\right]e^{jnw_0 t}$$

其频谱图如图 3.4（b）所示。



(a)



(b)

图 3.4

（3）由图 3.1（d）所示，该函数为奇谐函数，其只含有基波和奇次谐波的正弦、余弦项，而不包含偶次谐波项，级数中的系统分别为

$$a_0 = 0$$

$$a_n = b_n = 0 \qquad n\text{为偶数}$$

n 为奇数时，

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0 t dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T} t\cos nw_0 t dt$$

$$= \frac{8}{T^2 n w_0}\left[t\sin nw_0 t\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \sin nw_0 t dt \right]$$

$$= \frac{4}{T n w_0}\sin np + \frac{8}{T^2 n^2 w_0^2}\cos nw_0 t\Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= -\frac{16}{T^2 n^2 w_0^2} = -\frac{4}{n^2 p^2}$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0 t dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T} t\sin nw_0 t dt$$

$$= \frac{-8}{T^2 n w_0}\left[t\cos nw_0 t\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \cos nw_0 t dt \right]$$

$$= \frac{-4}{T n w_0}\cos np + \frac{8}{T^2 n^2 w_0^2}\sin nw_0 t\Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{-4}{T n w_0}\cos np + \frac{8}{T^2 n^2 w_0^2}\sin np = \frac{2}{np}$$

$$A_n=\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}=\sqrt{\left(\frac{2}{np}\right)^2\left[\left(\frac{2}{np}\right)^2+1\right]}$$
$$=\frac{2}{n^2p^{\ 2}}\sqrt{4+n^2p^{\ 2}}\qquad n=1,3,5,\cdots$$

故得信号的傅里叶级数展开式为

$$f(t)=-\frac{4}{p^{\ 2}}\left(\cos w_0t+\frac{1}{9}\cos 3w_0t+\frac{1}{25}\cos 5w_0t+\cdots\right)$$
$$+\frac{2}{p}\left(\sin w_0t+\frac{1}{3}\sin 3w_0t+\frac{1}{5}\sin 5w_0t+\cdots\right)$$

其频谱图如图 3.5 所示。

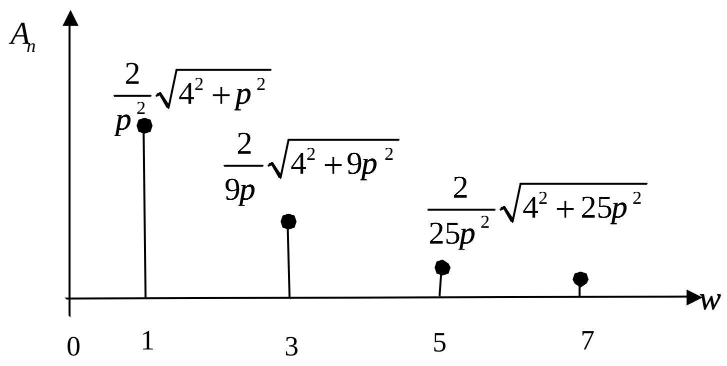


图 3.5

3.2 已知某 LTI 系统的单位冲激响应为$h(t)=e^{-4t}e(t)$**，对下列输入信号，求输出响应** $y(t)$ **的傅里叶级数表示式。**

(1) $f(t)=\cos 2pt$　　　　**(2)** $f(t)=d(t-t_0)$

【知识点窍】主要考察 LTI 系统的系统频率特性

【逻辑推理】输出响应的傅里叶变换为激励的傅里叶变换与系统频率特性乘积，而系统频率特性就是系统的单位冲激响应的傅里叶变换。即$Y(w)=F(w)H(w)$**，** $H(w)=F[h(t)]$

解：(1) 因为　　$H(w)=F[h(t)]=F\left[e^{-4t}e(t)\right]=\dfrac{1}{4+jw}$

$$F(w)=F[f(t)]=F[\cos 2pt]=p\left[d(w+2p)+d(w-2p)\right]$$

由于　　$Y(w)=F(w)H(w)$

所以得输出响应表示式为：

$$Y(w)=\frac{1}{4+jw}\cdot p\left[d(w+2p)+d(w-2p)\right]$$
$$=\frac{p}{4+j2p}d(w+2p)+\frac{p}{4-j2p}d(w+2p)$$

（2）因为 $$H(w)=F[h(t)]=F\left[e^{-4t}e(t)\right]=\frac{1}{4+jw}$$

$$F(w)=F\left[f(t)\right]=F\left[d(t-t_0)\right]=e^{-jwt_0}$$

由于 $$Y(w)=F(w)H(w)$$

所以得输出响应表示式为：

$$Y(w)=\frac{1}{4+jw}e^{-jwt_0}$$

3.3 （1）证明：以 T 为周期有信号 $f(t)$ 如果是偶信号，即 $f(t)=f(-t)$，则其三角函数形式的傅里叶级数表示式中只含有余弦分量；如果 $f(t)$ 是奇信号，即 $f(t)=-f(-t)$，则其三角函数形式的傅里叶级数中只含有正弦分量。

（2）如果以 T 为周期的信号 $f(t)$ 同时满足 $f(t)=f\left(t-\dfrac{T}{2}\right)$，则称 $f(t)$ 为偶谐信号；如果同时满足 $f(t)=-f\left(t-\dfrac{T}{2}\right)$，则称 $f(t)$ 为奇谐信号。证明偶谐信号的傅里叶级数中只包含偶次谐波；奇谐信号的傅里叶级数中只包含奇次谐波。

（3）如果 $f(t)$ 是周期为 2 的奇谐信号，且 $f(t)=t,0<t<1$ 画出 $f(t)$ 的波形，并求出它的傅里叶级数系数。

【知识点窍】主要考察函数的对称性与傅里叶系统的关系

【逻辑推理】由傅里叶级数式定义来证明。

证明：（1）首先：证明以 T 为周期有信号 $f(t)$ 如果是偶信号，即 $f(t)=f(-t)$，则其三角函数形式的傅里叶级数表示式中只含有余弦分量。

由傅里叶级数式定义知

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0}f(t)dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=\frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}f(t)dt\right] \quad (1)$$

式（1）第一个积分式计算如下：

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)dt \overset{令t=-t}{=} \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-t)(-1)dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(-t)dt \overset{f(t)=f(-t)}{=} \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \qquad (2)$$

式（2）代入式（1）即可得

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

因为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\cos nw_0 tdt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0 tdt \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cos nw_0 tdt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0 tdt\right] \qquad n = 1,2,\cdots \end{aligned} \qquad (3)$$

式（3）第一个积分式计算如下：

$$\begin{aligned} &\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cos nw_0 tdt \overset{令t=-t}{=} \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-t)\cos(-nw_0 t)(-1)dt \\ &= \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(-t)\cos nw_0 t\,dt \overset{因为f(t)=f(-t)}{=} \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0 t\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0 tdt \end{aligned} \qquad (4)$$

式（4）代入式（3）即可得

$$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0 tdt$$

因为

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\sin nw_0 tdt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0 tdt \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\sin nw_0 tdt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0 tdt\right] \qquad n = 1,2,\cdots \end{aligned} \qquad (5)$$

式（5）第一个积分式计算如下：

$$\begin{aligned} &\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\sin nw_0 tdt \overset{令t=-t}{=} \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-t)\sin(-nw_0 t)(-1)dt \\ &= -\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(-t)\sin nw_0 t\,dt \overset{因为f(t)=f(-t)}{=} -\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0 t\,dt = -\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0 tdt \end{aligned} \qquad (6)$$

式（6）代入式（5）即可得： $b_n = 0$

即得证以 T 为周期有信号 $f(t)$ 如果是偶信号，即 $f(t)=f(-t)$，则其三角函数形式的傅里叶级数表示式中只含有余弦分量。

同理可证：$f(t)$ 是奇信号，即 $f(t)=-f(-t)$，则其三角函数形式的傅里叶级数中只含有正弦分量。即是：

$$\begin{cases} b_n=\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(nw_0t)dt \\ a_n=0 \end{cases} \qquad n=1,2,\cdots$$

（2）首先，证明奇谐信号的傅里叶级数中只包含奇次谐波。

由傅里叶级数定义式知

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\cos nw_0tdt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0tdt \\ &=\frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cos nw_0tdt+\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0tdt\right] \qquad n=1,2,\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

式（7）第一个积分式计算如下：

$$\begin{aligned} &\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cos nw_0tdt \overset{\text{令}t=t-\frac{T}{2}}{=} \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t-\frac{T}{2}\right)\cos\left[nw_0\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]dt \\ &=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t-\frac{T}{2}\right)\cos(nw_0t)\cos(np)dt \overset{\text{因为}f(t)=-f\left(t-\frac{T}{2}\right)}{=} -\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0t(-1)^n dt \\ &=(-1)^{n+1}\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0tdt \end{aligned} \tag{8}$$

式（8）代入式（7）得

$$\begin{aligned} a_n&=\left[1+(-1)^{n+1}\right]\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0tdt \\ &=\begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0tdt & n\text{为奇数} \\ 0 & n\text{为偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} b_n&=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\sin nw_0tdt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0tdt \\ &=\frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\sin nw_0tdt+\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0tdt\right] \qquad n=1,2,\cdots \end{aligned} \tag{9}$$

式（9）第一个积分式计算如下：

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\sin nw_0tdt \overset{令t=t-\frac{T}{2}}{=} \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t-\frac{T}{2}\right)\sin\left[nw_0\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t-\frac{T}{2}\right)\sin(nw_0t)\cos(np)dt \overset{因为f(t)=-f\left(t-\frac{T}{2}\right)}{=} -\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0t(-1)^n dt \qquad (10)$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0tdt$$

式（10）代入式（9）得

$$b_n=\left[1+(-1)^{n+1}\right]\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0tdt$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0tdt & n为奇数\\ 0 & n为偶数\end{cases}$$

由于证得奇谐信号的傅里叶级数中只包含奇次谐波。

同理，可证明偶谐信号的傅里叶级数中只包含偶次谐波。

（3）如果 $f(t)$ 是周期为 2 的奇谐信号，即 $w_0=\frac{2p}{T}=p$ 。由此可知， $f(t)=-f(t-1)$。

因为 $f(t)=t,0<t<1$，所以 $f(t)$ 的波形如图 3.6 所示。

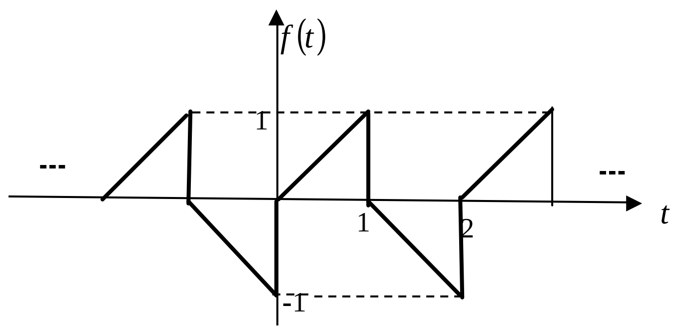


图 3.6

由奇谐信号的傅里叶级数中只包含奇次谐波。即由式（9）和式（10）得该信号的傅里叶级数系数：

$$a_n=\begin{cases}\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_0tdt & n为奇数\\ 0 & n为偶数\end{cases}=\begin{cases}\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos nw_0tdt=-\frac{4}{n^2p^2} & n为奇数\\ 0 & n为偶数\end{cases}$$

$$b_n=\begin{cases}\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_0tdt & n为奇数\\ 0 & n为偶数\end{cases}=\begin{cases}2\int_0^1 t\sin nptdt=\frac{2}{np} & n为奇数\\ 0 & n为偶数\end{cases}$$

3.4　已知周期信号 $f(t)$ 一个周期 $(0<t<T)$ 前四分之一波形如图 3.7 所示。就下列情况画出一个周期内完整的波形。

（1） $f(t)$ 是偶信号，只含偶次谐波；

（2） $f(t)$ 是偶信号，只含奇次谐波；

（3） $f(t)$ 是偶信号，含有偶次和奇次谐波；

（4） $f(t)$ 是奇信号，只含有偶次谐波；

（5） $f(t)$ 是奇信号，只含有奇次谐波；

（6） $f(t)$ 是奇信号，含的偶次和奇次谐波。

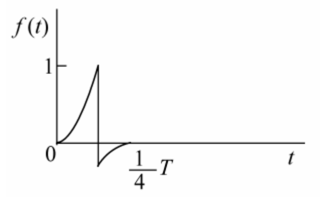


图 3.7

【知识点窍】主要考察函数的对称性与傅里叶系统的关系

【逻辑推理】奇函数只含有正弦项谐波分量；偶函数只含有余弦项谐波分量；奇谐函数只含有奇数项谐波；偶谐函数只含有偶数项谐波。

解：

（1）信号波形如图 3.8(a)所示。

（2）信号波形如图 3.8(b)所示。

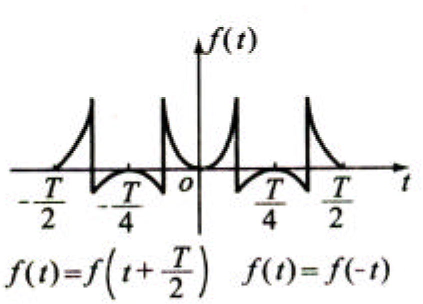
（3）信号波形如图 3.8(c)所示。

（4）信号波形如图 3.8(d)所示。

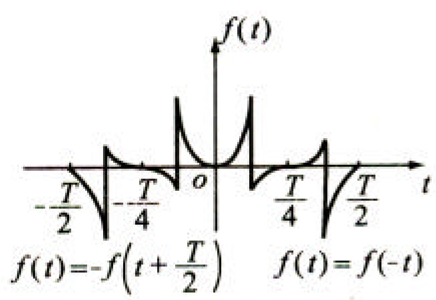
（5）信号波形如图 3.8(e)所示。

（6）信号波形如图 3.8(f)所示。

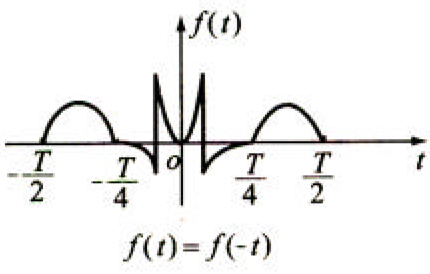
值得注意的是：（3）和（6）的信号的波形不仅仅只有图所示这一种。



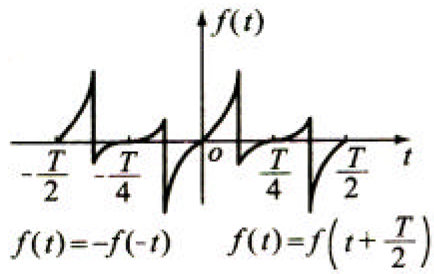
(a)



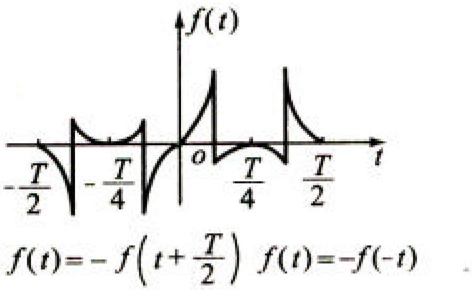
(b)



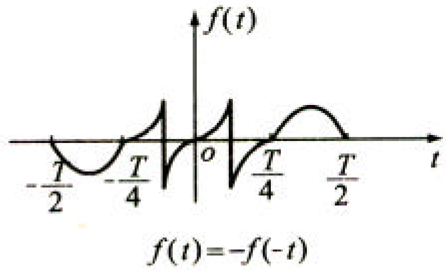
(c)



(d)



(e)



(f)

图 3.8

3.5 求图 3.9 所示信号的傅里叶变换。

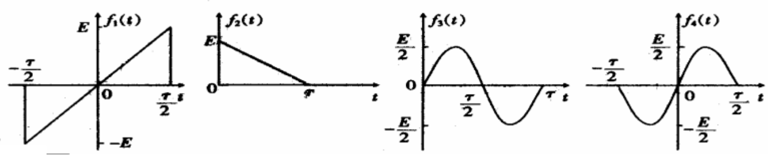


图 3.9

【知识点窍】本题主要考察傅里叶变换性质

【逻辑推理】傅里叶变换基本性质如下表所示。

性　质	时域 $f(t)$	频域 $F(w)$	时域频域对应关系
线　性	$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(t)$	线性叠加
对称性	$F(t)$	$2pf(-w)$	对称
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F\left(\frac{w}{a}\right)$	压缩与扩展
	$f(-t)$	$F(-w)$	反褶
时　移	$f(t-t_0)$	$F(w)e^{-jwt_0}$	时移与相移

	$f(at-t_0)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right)e^{-jw\frac{t_0}{a}}$	
频　移	$f(t)e^{jw_0t}$	$F(w-w_0)$	**调制与频移**
	$f(t)\cos(w_0t)$	$\frac{1}{2}[F(w+w_0)+F(w-w_0)]$	
	$f(t)\sin(w_0t)$	$\frac{1}{2}[F(w+w_0)-F(w-w_0)]$	
时域微分	$\frac{df(t)}{dt}$	$jwF(w)$	
	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(jw)^n F(w)$	
频域微分	$-jtf(t)$	$\frac{dF(w)}{dw}$	
	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^nF(w)}{dw^n}$	
时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(t)dt$	$\frac{1}{jw}F(w)+pF(0)d(w)$	
时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(w)F_2(w)$	**乘积与卷积**
频域卷积	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2p}F_1(w)*F_2(w)$	
时域抽样	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)d(t-nT_s)$	$\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(w-\frac{2pn}{T_s}\right)$	**抽样与重复**
频域抽样	$\frac{1}{w_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(t-\frac{2pn}{w_s}\right)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(w)d(w-nw_s)$	
相　关	$R_{12}(t)$ $R_{21}(t)$	$F_1(w)F_2^*(w)$ $F_1^*(w)F_2(w)$	
自相关	$R(t)$	$\lvert F(w)\rvert^2$	

解：(1) 由图可得

$$f_1(t)=\frac{2E}{g}t\left[e\left(t+\frac{g}{2}\right)-e\left(t-\frac{g}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{2E}{g}\left(t+\frac{g}{2}\right)e\left(t+\frac{g}{2}\right)-Ee\left(t+\frac{g}{2}\right)-\frac{2E}{g}\left(t-\frac{g}{2}\right)e\left(t-\frac{g}{2}\right)-Ee\left(t-\frac{g}{2}\right)$$

因 $te(t) \leftrightarrow jpd'(w) - \dfrac{1}{w^2}$，$e(t) \leftrightarrow pd(w) + \dfrac{1}{jw}$

则根据傅立叶变换的时移特性，则有：

$$F_1(w) = \frac{2E}{g}\left(jpd'(w) - \frac{1}{w^2}\right)e^{jw\frac{g}{2}} - E\left(pd(w) + \frac{1}{jw}\right)e^{jw\frac{g}{2}}$$
$$- \frac{2E}{g}\left(jpd'(w) - \frac{1}{w^2}\right)e^{-jw\frac{g}{2}} - E\left(pd(w) + \frac{1}{jw}\right)e^{-jw\frac{g}{2}}$$

（2）由图可得

$$f_2(t) = \left(-\frac{E}{g}t + E\right)[e(t) - e(t-g)]$$
$$= \left(-\frac{E}{g}t + E\right)e(t) - \left(-\frac{E}{g}t + E\right)e(t-g) = -\frac{E}{g}te(t) + Ee(t) + \frac{E}{g}(t-g)e(t-g)$$

因 $te(t) \leftrightarrow jpd'(w) - \dfrac{1}{w^2}$，$e(t) \leftrightarrow pd(w) + \dfrac{1}{jw}$

则根据傅立叶变换的时移特性，则有：

$$F_2(w) = -\frac{E}{g}\left(jpd'(w) - \frac{1}{w^2}\right) + E\left(pd(w) + \frac{1}{jw}\right) + \frac{E}{g}\left(jpd'(w) - \frac{1}{w^2}\right)e^{-jw\frac{g}{2}}$$

（3）由图可得

$$f_3(t) = \frac{E}{2}\sin\frac{2p}{g}t[e(t) - e(t-g)]$$
$$= \frac{E}{2}\sin\frac{2p}{g}te(t) - \frac{E}{2}\sin\frac{2p}{g}te(t-g)$$
$$= \frac{E}{2}\sin\frac{2p}{g}te(t) - \frac{E}{2}\cdot\frac{e^{j\frac{2p}{g}t} - e^{-j\frac{2p}{g}t}}{2j}e(t-g)$$
$$= \frac{E}{2}\sin\frac{2p}{g}te(t) - \frac{E}{4j}e^{j\frac{2p}{g}(t-g)}\cdot e^{j2p}e(t-g) + \frac{E}{4j}e^{-j\frac{2p}{g}(t-g)}\cdot e^{-j2p}e(t-g)$$

因

$$\sin w_0te(t) \leftrightarrow \frac{p}{2j}[d(w-w_0) - d(w+w_0)] + \frac{w_0}{{w_0}^2 + w^2}\text{，}\quad e^{-at}e(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+jw}$$

则根据傅立叶变换的时移特性，则有：

$$F_3(w)=\frac{E}{2}\left(\frac{p}{2j}\left[d\left(w-\frac{2p}{g}\right)-d\left(w+\frac{2p}{g}\right)\right]+\frac{\frac{2p}{g}}{\left(\frac{2p}{g}\right)^2+w^2}\right)$$

$$-\frac{E}{4j}e^{j2p}\cdot\frac{1}{-j\frac{2p}{g}+jw}\cdot e^{-jwg}+\frac{E}{4j}e^{-j2p}\cdot\frac{1}{j\frac{2p}{g}+jw}\cdot e^{-jwg}$$

$$=\frac{pE}{4j}\left[d\left(w-\frac{2p}{g}\right)-d\left(w+\frac{2p}{g}\right)\right]+\frac{E}{2}\frac{\frac{2p}{g}}{\left(\frac{2p}{g}\right)^2+w^2}$$

$$-\frac{E}{4j}e^{-jwg}\left(e^{j2p}\cdot\frac{1}{-j\frac{2p}{g}+jw}-e^{-j2p}\cdot\frac{1}{j\frac{2p}{g}+jw}\right)$$

$$=\frac{pE}{4j}\left[d\left(w-\frac{2p}{g}\right)-d\left(w+\frac{2p}{g}\right)\right]+\frac{E}{2}\frac{\frac{2p}{g}}{\left(\frac{2p}{g}\right)^2+w^2}$$

$$-\frac{E}{4j}e^{-jwg}\left(\frac{e^{j2p}\left(j\frac{2p}{g}+jw\right)-e^{-j2p}\left(-j\frac{2p}{g}+jw\right)}{(jw)^2-\left(-j\frac{2p}{g}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{pE}{4j}\left[d\left(w-\frac{2p}{g}\right)-d\left(w+\frac{2p}{g}\right)\right]+\frac{E}{2}\frac{\frac{2p}{g}}{\left(\frac{2p}{g}\right)^2+w^2}-\frac{E}{4j}e^{-jwg}\frac{j\frac{4p}{g}\cos 2p+jw\cdot 2j\sin 2p}{\left(\frac{2p}{g}\right)^2-w^2}$$

$$=\frac{pE}{4j}\left[d\left(w-\frac{2p}{g}\right)-d\left(w+\frac{2p}{g}\right)\right]+\frac{pEg}{(2p)^2+(wg)^2}-\frac{pgEe^{-jwg}}{(2p)^2-(wg)^2}$$

（4）由图可得

$$f_4(t)=\frac{E}{2}\sin\frac{2p}{g}t\left[e(t+g)-e(t-g)\right]$$

$$=\frac{E}{2}\sin\frac{2p}{g}te(t+g)-\frac{E}{2}\sin\frac{2p}{g}te(t-g)$$

$$=\frac{E}{2}\cdot\frac{e^{j\frac{2p}{g}t}-e^{-j\frac{2p}{g}t}}{2j}e(t+g)-\frac{E}{2}\cdot\frac{e^{j\frac{2p}{g}t}-e^{-j\frac{2p}{g}t}}{2j}e(t-g)$$

$$=\frac{E}{4j}\cdot e^{-j2p}e^{j\frac{2p}{g}(t+g)}e(t+g)-\frac{E}{4j}\cdot e^{j2p}e^{-j\frac{2p}{g}(t+g)}e(t+g)$$

$$-\frac{E}{4j}e^{j\frac{2p}{g}(t-g)}\cdot e^{j2p}e(t-g)+\frac{E}{4j}e^{-j\frac{2p}{g}(t-g)}\cdot e^{-j2p}e(t-g)$$

因

$$\sin w_0te(t)\leftrightarrow\frac{p}{2j}[d(w-w_0)-d(w+w_0)]+\frac{w_0}{w_0^{\ 2}+w^2}\text{，}e^{-at}e(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+jw}$$

则根据傅立叶变换的时移特性，则有：

$$F_4(w)=\frac{E}{4j}e^{jwg}\frac{j\frac{4p}{g}\cos 2p-jw\cdot 2j\sin 2p}{\left(\frac{2p}{g}\right)^2-w^2}-\frac{E}{4j}e^{-jwg}\frac{j\frac{4p}{g}\cos 2p+jw\cdot 2j\sin 2p}{\left(\frac{2p}{g}\right)^2-w^2}$$

$$=\frac{pE}{g}e^{jwg}\frac{1}{\left(\frac{2p}{g}\right)^2-w^2}-\frac{pE}{g}e^{-jwg}\frac{1}{\left(\frac{2p}{g}\right)^2-w^2}$$

$$=\frac{pgEe^{jwg}}{(2p)^2-(wg)^2}-\frac{pgEe^{-jwg}}{(2p)^2-(wg)^2}$$

$$=\frac{2jpgE\sin wg}{(2p)^2-(wg)^2}$$

3.6　设 $F(w)\Leftrightarrow F[f(t)]$，试用 $F(w)$ 表示下列各信号的频谱。

(1) $f^2(t)+f(t)$　　**(2)** $[1+mf(t)]\cos w_0t$

(3) $\int_{-\infty}^{t}tf(t)dt$　　**(4)** $f(6-3t)$

(5) $(t+2)f(t)$　　**(6)** $(1-t)f(1-t)$

(7) $f(t)*f(t-1)$　　**(8)** $f'(t)+f(3t-2)e^{-jt}$

【知识点窍】本题主要考察傅里叶变换性质

【逻辑推理】分析每个函数,判断使用哪个傅里叶变换的基本性质，其基本性质同题 3.5

解：(1) 根据傅里叶变换的线性及卷积定理可得

$$f^2(t)+f(t)\leftrightarrow\frac{1}{2p}F(w)*F(w)+F(w)$$

（2） $\cos w_0 t \leftrightarrow p\left[d\left(w-w_0\right)+d\left(w+w_0\right)\right]$

根据傅里叶变换卷积定理可得

$$\begin{aligned} f(t)\cos w_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2p}F(w)*p\left[d\left(w-w_0\right)+d\left(w+w_0\right)\right] \\ &=\frac{1}{2}\left[F\left(w-w_0\right)+F\left(w+w_0\right)\right] \end{aligned}$$

所以

$$\left[1+mf(t)\right]\cos w_0 t \leftrightarrow p\left[d\left(w-w_0\right)+d\left(w+w_0\right)\right]+\frac{m}{2}\left[F\left(w-w_0\right)+F\left(w+w_0\right)\right]$$

（3）因 $tf(t)*e(t)=\int_{-\infty}^{t} tf(t)dt$ ，

其中 $tf(t)\leftrightarrow j\frac{d}{dw}F(w)$，$e(t)\leftrightarrow pd(w)+\frac{1}{jw}$

则根据傅里叶变换卷积定理可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} tf(t)dt &\leftrightarrow j\frac{d}{dw}F(w)\cdot\left[pd(w)+\frac{1}{jw}\right] \\ &=\frac{1}{w}\cdot\frac{d}{dw}F(w)+jpd(w)\frac{d}{dw}F(w) \end{aligned}$$

（4）根据傅里叶变换时频展缩特性可得

$$f(6-3t)\leftrightarrow \frac{1}{3}e^{-2jw}F\left(-\frac{w}{3}\right)$$

（5） $(t+2)f(t)=tf(t)+2f(t)$

根据傅里叶变换微分特性可得

$$tf(t)\leftrightarrow j\frac{d}{dw}F(w)$$

所以

$$(t+2)f(t)\leftrightarrow j\frac{d}{dw}F(w)+2F(w)$$

（6）因 $tf(t)\leftrightarrow j\frac{d}{dw}F(w)$，则根据傅里叶变换时频展缩特性可得

$$(1-t)f(1-t)\leftrightarrow -je^{-jw}\frac{d}{dw}F(-w)$$

（7）根据傅里叶变换时移特性可得 $f(t-1)\leftrightarrow F(w)e^{-jw}$

再由傅里叶变换卷积定理可得

$$f(t)*f(t-1)\leftrightarrow F(w)F(w)e^{-jw}$$

（8）根据傅里叶变换微分特性可得 $f'(t)\leftrightarrow jwF(w)$

再由傅里叶变换时频展缩特性及频移特性可得：

$$f(3t-2)e^{-jt}\leftrightarrow\frac{1}{3}e^{-j\frac{2}{3}(w+1)}F\left(\frac{w+1}{3}\right)$$

所以

$$f'(t)+f(3t-2)e^{-jt}\leftrightarrow jwF(w)+\frac{1}{3}e^{-j\frac{2}{3}(w+1)}F\left(\frac{w+1}{3}\right)$$

3.7 先求出图 3.10 所示信号 $f(t)$ 的频谱 $F(w)$ 的具体表达式，再利用傅氏变换的性质由 $F(w)$ 求出其余信号频谱的具体表达式。

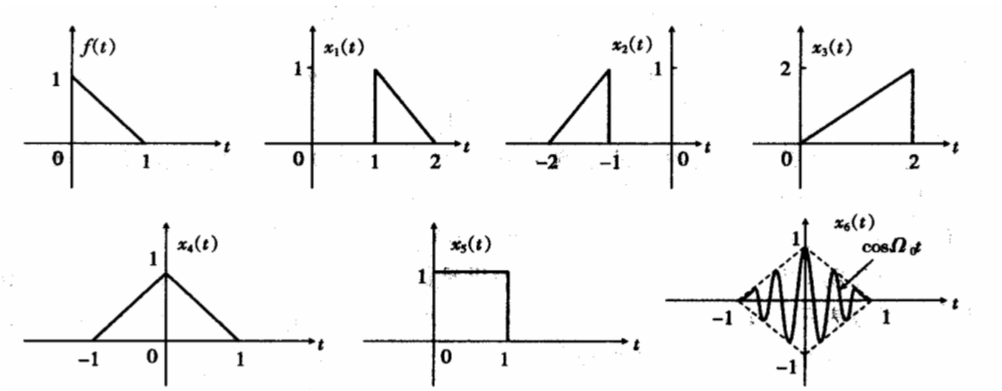


图 3.10

【知识点窍】本题主要考察傅里叶变换性质

【逻辑推理】同题 3.5

解：由图可得：

$$f(t)=(-t+1)[e(t)-e(t-1)]=-te(t)+e(t)+(t-1)e(t-1)$$

因

$$te(t)\leftrightarrow jpd'(w)-\frac{1}{w^2}，\ e(t)\leftrightarrow pd(w)+\frac{1}{jw}，$$

则根据傅立叶变换的时移特性，可得：

$$F(w)=-jpd'(w)+\frac{1}{w^2}+pd(w)+\frac{1}{jw}+\left[jpd'(w)-\frac{1}{w^2}\right]e^{-jw}$$

$$=\left(e^{-jw}-1\right)jpd'(w)+pd(w)+\left(1-jw-e^{-jw}\right)\frac{1}{w^2}$$

$$=2pd(w)+\left(1-jw-e^{-jw}\right)\frac{1}{w^2}$$

（1）由图可得：$x_1(t)=f(t-1)$

则根据傅立叶变换的时移特性，可得：

$$X_1(w)=\left[2pd(w)+\left(1-jw-e^{-jw}\right)\frac{1}{w^2}\right]e^{-jw}$$

$$=2pd(w)+\left(1-jw-e^{-jw}\right)\frac{e^{-jw}}{w^2}$$

（2）由图可得：$x_2(t)=f(-t-1)=x_1(-t)$

则根据傅立叶变换的时频展缩特性，可得：

$$X_2(w)=X_1(-w)=2pd(w)+\left(1+jw-e^{jw}\right)\frac{e^{jw}}{w^2}$$

（3）由图可得：$x_3(t)=f\left(-\frac{1}{2}t+1\right)$

则根据傅立叶变换的时频展缩特性，可得：

$$X_3(w)=\frac{1}{\left|-\frac{1}{2}\right|}F\left(\frac{w}{-\frac{1}{2}}\right)e^{-jw\frac{1}{-\frac{1}{2}}}=2F(-2w)e^{2jw}$$

$$=2\left[2pd(2w)+\left(1+2jw-e^{2jw}\right)\frac{e^{2jw}}{4w^2}\right]e^{2jw}$$

$$=4pd(2w)+\left(1+2jw-e^{2jw}\right)\frac{e^{4jw}}{2w^2}$$

（4）由图可得：$x_4(t)=f(t)+f(-t)$

则根据傅立叶变换的时频展缩特性，可得：

$$X_4(w)=F(w)+F(-w)$$

$$=\left(e^{-jw}-1\right)jpd'(w)+pd(w)+\left(1-jw-e^{-jw}\right)\frac{1}{w^2}$$

$$-\left(e^{jw}-1\right)jpd'(w)+pd(w)+\left(1+jw-e^{jw}\right)\frac{1}{w^2}$$

$$=\left(e^{-jw}-e^{jw}\right)jpd'(w)+2pd(w)+\left(2-e^{-jw}-e^{jw}\right)\frac{1}{w^2}$$

$$= -2j\sin wjpd'(w) + 2pd(w) + (2-2\cos w)\frac{1}{w^2}$$

$$= 2p\sin wd'(w) + 2pd(w) + (2-2\cos w)\frac{1}{w^2}$$

$$= -2pd(w) + 2pd(w) + (2-2\cos w)\frac{1}{w^2}$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{w}{2}\right)^2}{\left(\frac{w}{2}\right)^2} = Sa^2\left(\frac{w}{2}\right)$$

（5）由图可得： $x_5(t) = -f'(t) + d(t)$

根据傅立叶变换的微分特性，可得

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow (jw)F(w) = (jw)\left[(e^{-jw}-1)jpd'(w) + pd(w) + (1-jw-e^{-jw})\frac{1}{w^2}\right]$$

又有 $d(t) \leftrightarrow 1$

所以

$$X_5(w) = -(jw)\left[(e^{-jw}-1)jpd'(w) + pd(w) + (1-jw-e^{-jw})\frac{1}{w^2}\right] + 1$$

$$= wp(e^{-jw}-1)d'(w) - jwpd(w) - jw(1-jw-e^{-jw})\frac{1}{w^2} + 1$$

$$= \left[-jw - w^2 + jwc\right]\frac{1}{w^2} + 1$$

$$= \frac{j}{w}(e^{-jw}-1)$$

（6）由图可得： $x_6(t) = x_4(t)\cdot\cos\Omega_0 t$

其中 $\cos\Omega_0 t \leftrightarrow p\left[d(w-\Omega_0) + d(w+\Omega_0)\right]$， $X_4(w) \leftrightarrow Sa^2\left(\frac{w}{2}\right)$

根据傅立叶变换的卷积定理，可得

$$X_6(t) = \frac{1}{2p}X_4(t) * \{p\left[d(w-\Omega_0) + d(w+\Omega_0)\right]t\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{Sa^2\left(\frac{w}{2}\right) * \left[d(w-\Omega_0) + d(w+\Omega_0)\right]t\right\}$$

$$= \frac{1}{2}Sa^2\left(\frac{w-\Omega_0}{2}\right) + \frac{1}{2}Sa^2\left(\frac{w+\Omega_0}{2}\right)$$

3.8　应用傅氏变换的唯一性，证明下面信号的极限信号为单位冲激信号。

(1) $f(t,a)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\left[1-\dfrac{|t|}{a}\right], |t|\le a\\ \quad 0 \quad , |t|>a, a>0,\text{当}a\to 0\text{时}\end{cases}$

(2) $f(t,a)=\dfrac{a}{2}\left[e^{at}e(-t)+e^{-at}e(t)\right], a>0,\text{当}a\to\infty\text{时}$

【知识点窍】傅里叶变换的定义。 $F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt$

【逻辑推理】先将函数进行傅里叶变换，然后对其求极限，证明结果为 1。

证明：(1)

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt=\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}\left[1-\frac{|t|}{a}\right]e^{-jwt}dt=\int_{-a}^{0}\frac{1}{a}\left[1+\frac{t}{a}\right]e^{-jwt}dt+\int_{0}^{a}\frac{1}{a}\left[1-\frac{t}{a}\right]e^{-jwt}dt$$

$$=\frac{1}{a}\left\{\int_{-a}^{0}e^{-jwt}dt+\frac{1}{a}\int_{-a}^{0}te^{-jwt}dt\right\}+\frac{1}{a}\left\{\int_{0}^{a}e^{-jwt}dt-\frac{1}{a}\int_{0}^{a}te^{-jwt}dt\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{-jw}e^{-jwt}\Big|_{-a}^{0}+\frac{1}{a}\frac{1}{-jw}\int_{-a}^{0}tde^{-jwt}\right\}+\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{-jw}e^{-jwt}\Big|_{0}^{a}-\frac{1}{a}\frac{1}{-jw}\int_{0}^{a}tde^{-jwt}\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{-jw}-\frac{e^{jwa}}{-jw}-\frac{1}{jwa}\left[te^{-jwt}\Big|_{-a}^{0}-\int_{-a}^{0}e^{-jwt}dt\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{jw}-\frac{e^{-jwa}}{jw}+\frac{1}{jwa}\left[te^{-jwt}\Big|_{0}^{a}-\int_{0}^{a}e^{-jwt}dt\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{jwa}\frac{1}{-jw}e^{-jwt}\Big|_{-a}^{0}\right\}-\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{jwa}\frac{1}{-jw}e^{-jwt}\Big|_{0}^{a}\right\}$$

$$=-\frac{1}{(jwa)^2}+\frac{1}{(jwa)^2}e^{jwa}+\frac{1}{(jwa)^2}e^{-jwa}-\frac{1}{(jwa)^2}$$

$$=\frac{2\cos(wa)-2}{(jwa)^2}$$

当 $a\to 0$ **时，** $F(w)\to 1$**。所以得证。**

(2)

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{2}\left[e^{at}e(-t)+e^{-at}e(t)\right]e^{-jwt}dt$$

$$=\frac{a}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-jwt}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-jwt}dt\right\}=\frac{a}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{(a-jw)t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-(a+jw)t}dt\right\}$$

$$=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{a-jw}e^{(a-jw)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{a+jw}e^{-(a+jw)t}\Big|_{0}^{\infty}\right\}=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{a-jw}+\frac{1}{a+jw}\right]$$

$$=\frac{a^2}{a^2-(jw)^2}$$

当$a \to \infty$**时，**$F(w) \to 1$**。所以得证。**

3.9　求下列信号的频谱

（1） $f(t) = G_t(t)$

（2） $f(t) = G_t(t) * d(t - t_0)$

（3） $f(t) = G_t(t) * [d(t - t_0) + d(t + t_0)]$

【知识点窍】傅里叶变换的基本性质，信号的延时与叠加。

【逻辑推理】先将函数进行傅里叶变换，然后利用冲激函数的特性与延时特性进行计算。

解：（1**）门函数可表示为**

$$f(t) = G_t(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \dfrac{t}{2} \\ 0, & |t| > \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

根据傅里叶变换式可求得其频谱函数为

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt} dt = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} e^{-jwt} dt = \frac{1}{-jw}\left(e^{-j\frac{wt}{2}} - e^{j\frac{wt}{2}}\right)$$

$$= \frac{2\sin\dfrac{wt}{2}}{w} = t\frac{\sin\dfrac{wt}{2}}{\dfrac{wt}{2}} = tSa\left(\frac{wt}{2}\right)$$

（2）根据冲激函数卷积性质，可得：

$$f(t) = G_t(t) * d(t - t_0) = G_t(t - t_0)$$

根据傅立叶变换的时移特性。可得：

$$F(w) = tSa\left(\frac{wt}{2}\right) \cdot e^{-jwt_0}$$

（3）根据冲激函数卷积性质，可得：

$$f(t) = G_t(t) * [d(t - t_0) + d(t + t_0)] = G_t(t - t_0) + G_t(t + t_0)$$

根据傅立叶变换的时移特性。可得：

$$F(w) = tSa\left(\frac{wt}{2}\right) \cdot e^{-jwt_0} + tSa\left(\frac{wt}{2}\right) \cdot e^{jwt_0}$$

3.10 已知 $f(t)=\begin{cases}e^{-(t-1)},0\le t\le 1\\ 0 \quad ,\text{其它}\end{cases}$**，求下列各信号的频谱的具体表达式。**

(1) $f_1(t)=f(t)$　　**(2)** $f_2(t)=f(t)+f(-t)$

(3) $f_3(t)=f(t)-f(-t)$　　**(4)** $f_4(t)=f(t)+f(t-1)$

(5) $f_5(t)=tf(t)$

【知识点窍】本题主要考察傅里叶变换性质

【逻辑推理】同题 3.5

解： $f(t)=e^{-(t-1)}[e(t)-e(t-1)]=e\cdot e^{-t}e(t)-e^{-(t-1)}e(t-1)$

因
$$e^{-at}e(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+jw}\text{，}$$

根据傅立叶变换的时移特性，有

$$F(w)=e\cdot\frac{1}{1+jw}-\frac{1}{1+jw}e^{-jw}=\frac{e-e^{-jw}}{1+jw}$$

(1) $f_1(t)=f(t)$

所以
$$F_1(w)=\frac{e-e^{-jw}}{1+jw}$$

(2) $f_2(t)=f(t)+f(-t)$

其中
$$f(t)\leftrightarrow F(w)=\frac{e-e^{-jw}}{1+jw}$$

根据傅立叶变换的时频展缩特性，有

$$f(-t)\leftrightarrow F(-w)=\frac{e-e^{jw}}{1-jw}$$

所以

$$F_2(w)=F(w)+F(-w)=\frac{e-e^{-jw}}{1+jw}+\frac{e-e^{jw}}{1-jw}=\frac{2e-2\cos w+2w\sin w}{1+w^2}$$

(3) $f_3(t)=f(t)-f(-t)$

则有

$$F_3(w)=F(w)-F(-w)=\frac{e-e^{-jw}}{1+jw}-\frac{e-e^{jw}}{1-jw}=\frac{-2jwe+2j\sin w+2jw\cos w}{1+w^2}$$

(4) $f_4(t)=f(t)+f(t-1)$

其中 $$f(t)\leftrightarrow F(w)=\frac{e-e^{-jw}}{1+jw}$$

根据傅立叶变换的时移特性，有

$$f(t-1)\leftrightarrow \frac{e-e^{-jw}}{1+jw}\cdot e^{-jw}$$

所以

$$F_4(w)=\frac{e-e^{-jw}}{1+jw}+\frac{e-e^{jw}}{1+jw}\cdot e^{-jw}=\frac{\left(e-e^{-jw}\right)\left(1+e^{-jw}\right)}{1+jw}$$

(5) $f_5(t)=tf(t)$

根据傅立叶变换的微分特性，有

$$F_5(w)=j\frac{d}{dw}F(jw)=j\frac{d}{dw}\left(\frac{e-e^{-jw}}{1+jw}\right)=\frac{e-2e^{-jw}-jwe^{-jw}}{(1+jw)^2}$$

3.11 用傅氏变换的对称特性，求下列信号的频谱。

(1) $\dfrac{\sin 2p(t-2)}{p(t-2)}$　　**(2)** $\dfrac{2a}{a^2+t^2}$　$(a>0)$

(3) $\left(\dfrac{\sin 2pt}{2pt}\right)^2$　　**(4)** $\dfrac{1}{a+jt}$

【知识点窍】本题主要考察傅里叶变换的对称特性。

【逻辑推理】将 $f(t)$ 中的 t 变换为 w，可得出 $F(w)$ 的形式找到与之相对应的原信号，再利用傅里叶变换对称即可。即若 $f(t)\leftrightarrow F(w)$　**则**　$F(t)\leftrightarrow 2pf(-w)$。

解：(1) 因 $G_t(t)\leftrightarrow t\dfrac{\sin\frac{wt}{2}}{\frac{wt}{2}}$**，取** $\dfrac{wt}{2}=2pw$**，故得** $t=4p$**，则**

$$G_{4p}(t)\leftrightarrow 4p\frac{\sin 2pw}{2pw}=2p\frac{\sin 2pw}{pw}$$

故 $$\frac{1}{2p}G_{4p}(t)\leftrightarrow\frac{\sin 2pw}{pw}$$

故根据傅立叶变换的对称性，有

$$\frac{\sin 2pt}{pt} \leftrightarrow 2p \times \frac{1}{2p} G_{4p}(w) = G_{4p}(w)$$

故 $$\frac{\sin 2p(t-2)}{p(t-2)} \leftrightarrow G_{4p}(w) e^{-j2w}$$

（2）因 $e^{-a|t|} \leftrightarrow \dfrac{2a}{a^2+w^2} \qquad (a>0)$

故根据傅立叶变换的对称性，有

$$\frac{2a}{a^2+t^2} \leftrightarrow 2pe^{-a|w|} \qquad (a>0)$$

（3）三角脉冲

$$f_t(t) = \begin{cases} 1-\dfrac{|t|}{t} & |t| \le t \\ 0 & |t| > t \end{cases}$$

因有 $$f_t(t) \leftrightarrow t\left[\frac{\sin\dfrac{wt}{2}}{\dfrac{wt}{2}}\right]^2$$

故 $$f_{4p}(t) \leftrightarrow 4p\left[\frac{\sin 2pw}{2pw}\right]^2$$

即 $$\frac{1}{4p} f_{4p}(t) \leftrightarrow \left[\frac{\sin 2pw}{2pw}\right]^2$$

故 $$\left[\frac{\sin 2pw}{2pw}\right]^2 \leftrightarrow 2p \times \frac{1}{4p} f_{4p}(w) = \frac{1}{2} f_{4p}(w)$$

（4）因 $e^{-at}e(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{a+jw}$，

故根据傅立叶变换的对称性，有

$$\frac{1}{a+jt} \leftrightarrow 2pe^{aw}e(-w)$$

3.12 证明： $F\left[G_t(t) * \sum_{n=-N}^{N} d(t-nT)\right] = \dfrac{sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)wT}{sin\dfrac{wT}{2}} \cdot t\,Sa\left(\dfrac{wt}{2}\right), t<T$

【知识点窍】本题主要考察冲激函数的性质及门函数傅里变换。

【逻辑推理】利用任意信号与冲激时移函数卷积等于该信号的时移。然后再利用傅里叶变换时移特性求得。

证明：因为

$$G_t(t) \leftrightarrow t\frac{\sin\frac{wt}{2}}{\frac{wt}{2}} = tSa\left(\frac{wt}{2}\right)$$

$$d(t) \leftrightarrow 1$$

由时移特性有： $$d(t-nT) \leftrightarrow e^{-jw(nT)}$$

由线性可得：

$$\sum_{n=-N}^{N} d(t-nT) \leftrightarrow \sum_{n=-N}^{N} e^{-jwnT} = \frac{e^{-jwTN}\left[1-e^{jwT(2N+1)}\right]}{1-e^{jwT}}$$

$$= \frac{e^{jwT\left(N+\frac{1}{2}\right)}\left[e^{-jwT\left(N+\frac{1}{2}\right)} - e^{jwT\left(N+\frac{1}{2}\right)}\right]}{e^{jwT\left(N+\frac{1}{2}\right)}\left[e^{-j\frac{wT}{2}} - e^{j\frac{wT}{2}}\right]}$$

$$= \frac{-2jsin\left(N+\frac{1}{2}\right)wT}{-2jsin\frac{wT}{2}} = \frac{sin\left(N+\frac{1}{2}\right)wT}{sin\frac{wT}{2}}$$

由卷积定理可得：

$$F\left[G_t(t) * \sum_{n=-N}^{N} d(t-nT)\right] = F\left[G_t(t)\right] F\left[\sum_{n=-N}^{N} d(t-nT)\right] = \frac{sin\left(N+\frac{1}{2}\right)wT}{sin\frac{wT}{2}} \cdot tSa\left(\frac{wt}{2}\right), t < T$$

3.13 求图 3.11 所示信号的傅里叶变换。

【知识点窍】本题主要考察傅里叶变换性质

【逻辑推理】同例 3.5

解：(1) 由图可得

$$f_1(t) = e(t) - e(t-t)$$

因 $e(t) \leftrightarrow pd(w) + \frac{1}{jw}$，则根据傅立叶变换的时移特性，则有：

$$F_1(w)=\left[pd(w)+\frac{1}{jw}\right]\left[1+e^{-jwt}\right]$$

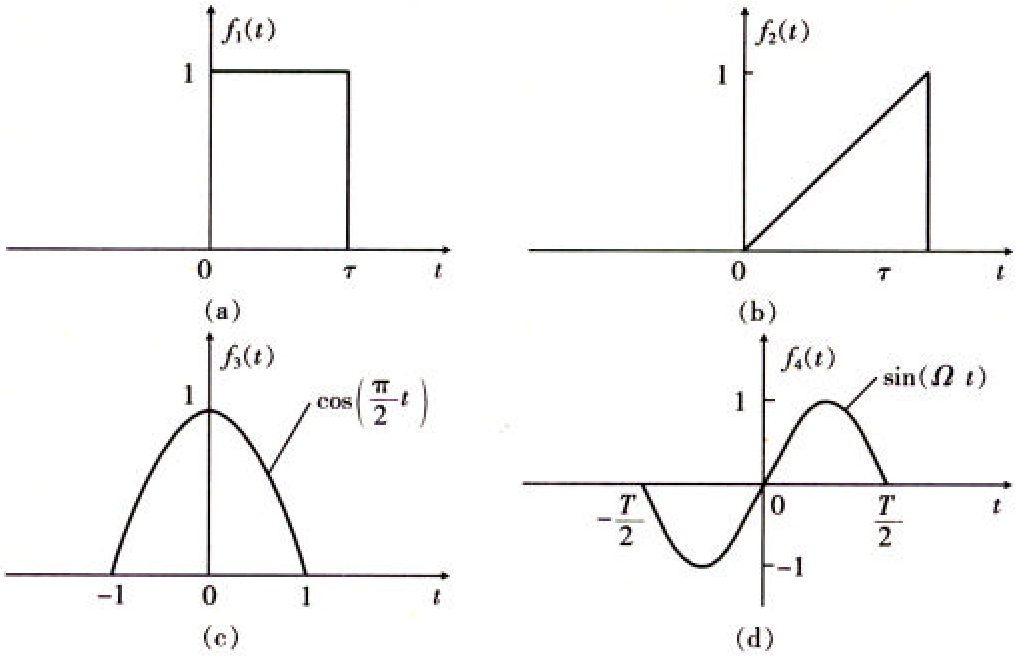


图 3.11

（2）由图可得

$$f_2(t)=te(t)-te(t-1)=te(t)-(t-1)e(t-1)-e(t-1)$$

因 $te(t)\leftrightarrow jpd'(w)-\frac{1}{w^2}$，$e(t)\leftrightarrow pd(w)+\frac{1}{jw}$

则根据傅立叶变换的时移特性，则有：

$$F_2(w)=jpd'(w)-\frac{1}{w^2}-\left(jpd'(w)-\frac{1}{w^2}\right)e^{-jw}-\left(pd(w)+\frac{1}{jw}\right)e^{-jw}$$

（3）由图可得

$$f_3(t)=G_2(t)\cos\frac{p}{2}t$$

因 $\cos\frac{p}{2}t\leftrightarrow p\left[d\left(w-\frac{p}{2}\right)+d\left(w+\frac{p}{2}\right)\right]$，$G_t(t)\leftrightarrow tSa\left(\frac{wt}{2}\right)$

则根据傅立叶变换的卷积定理，则有：

$$F_3(w)=\frac{1}{2p}F[G_2(t)]*F\left[\cos\left(\frac{p}{2}t\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2p}[2Sa(w)]*p\left[d\left(w-\frac{p}{2}\right)+d\left(w+\frac{p}{2}\right)\right]$$

$$=Sa\left(w-\frac{p}{2}\right)+Sa\left(w+\frac{p}{2}\right)$$

（4）由图可得

$$f_4(t)=\sin\Omega t\left[e\left(t+\frac{T}{2}\right)-e\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$
$$=-\cos\Omega\left(t+\frac{T}{2}\right)te\left(t+\frac{T}{2}\right)-\cos\Omega\left(t-\frac{T}{2}\right)e\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

因 $$\cos\Omega te(t)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[d(w+\Omega)+d(w-\Omega)\right]+\frac{1}{j}\frac{w}{w^2-\Omega^2}$$

则根据傅立叶变换的时移特性，则有：

$$F_4(w)=-\frac{1}{2}\left[d(w+\Omega)+d(w-\Omega)\right]e^{jw\frac{T}{2}}-\frac{1}{j}\frac{w}{w^2-\Omega^2}e^{jw\frac{T}{2}}$$
$$-\frac{1}{2}\left[d(w+\Omega)+d(w-\Omega)\right]e^{-jw\frac{T}{2}}-\frac{1}{j}\frac{w}{w^2-\Omega^2}e^{-jw\frac{T}{2}}$$
$$=d(w+\Omega)+d(w-\Omega)-\frac{2}{j}\frac{w}{w^2-\Omega^2}$$

3.14 求下列各 $F(w)$ **的原函数** $f(t)$。

（1） $F(w)=d(w-w_0)$　　**（2）** $F(w)=e(w+w_0)-e(w-w_0)$

（3） $F(w)=\begin{cases}\dfrac{w_0}{p} & |w|<w_0\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$　　**（4）** $F(w)=\dfrac{1}{(jw+a)^2}$

【知识点窍】本题主要考察傅里叶反变换以及傅里叶变换的基本性质。

【逻辑推理】能直接使用傅里叶反变换的就直接求，不能用的可利用傅里叶的一些基本性质来解答，如对称性。

解：(1）因有 $d(t)\leftrightarrow 1$**，故根据傅立叶变换正反变换的对称性可得：**

$$2pd(-w)\leftrightarrow 1$$

即 $$d(w)\leftrightarrow\frac{1}{2p}$$

所以 $F(w)=d(w-w_0)$ **的原函数**

$$f(t)=\frac{1}{2p}e^{jw_0t}$$

（2）因有$e(t)\leftrightarrow pd(w)+\frac{1}{jw}$，故根据傅立叶变换正反变换的对称性可得：

$$2pe(-w)\leftrightarrow pd(t)+\frac{1}{jt}$$

即 $$e(w)\leftrightarrow \frac{1}{2}d(t)+j\frac{1}{2pt}$$

所以 $F(w)=e(w+w_0)-e(w-w_0)$的原函数

$$\begin{aligned}f(t)&=\left(\frac{1}{2}d(t)+j\frac{1}{2pt}\right)e^{-jw_0t}-\left(\frac{1}{2}d(t)+j\frac{1}{2pt}\right)e^{jw_0t}\\&=-j\sin w_0td(t)+j\frac{1}{2pt}2j(-\sin w_0t)\\&=\frac{1}{pt}\sin w_0t=\frac{w_0}{p}Sa(w_0t)\end{aligned}$$

（3） $F(w)=\frac{w_0}{p}G_{2w_0}(w)$

因有$G_t(t)\leftrightarrow tSa\left(\frac{wt}{2}\right)$，$t=2w_0$，故

$$G_{2w_0}(t)\leftrightarrow 2w_0Sa(ww_0)$$

$$2pG_{2w_0}(w)\leftrightarrow 2w_0Sa(w_0t)$$

$$G_{2w_0}(w)\leftrightarrow \frac{w_0}{p}Sa(w_0t)$$

所以 $F(w)=\frac{w_0}{p}G_{2w_0}(w)$的原函数

$$f(t)=\left(\frac{w_0}{p}\right)^2Sa(w_0t)$$

（4） $F(w)=\frac{1}{(jw+a)^2}=\frac{1}{jw+a}\cdot\frac{1}{jw+a}$

因 $e^{-at}e(t)\leftrightarrow\frac{1}{jw+a}$，根据卷积定理有

$$f(t)=e^{-at}e(t)*e^{-at}e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-at}e(t)\cdot e^{-a(t-t)}e(t-t)dt$$
$$=\int_{0}^{t}e^{-at}dt=te^{-at}e(t)$$

3.15 已知实偶信号 $f(t)$的频谱满足$\ln|F(w)|=-|w|$，求 $f(t)$。

【知识点窍】本题主要考察傅里叶反变换以及傅里叶变换的基本性质。

【逻辑推理】利用傅里叶的一些基本性质来解答，如对偶性。

解：由于 $f(t)$是实偶函数，可知$F(w)$是实偶函数，即有

$$F^{*}(w)=F(w)，\ F(w)=F(-w)$$

又由于$\ln|F(w)|=-|w|$**，可得**$|F(w)|=e^{-|w|}$

设$F(w)=|F(w)|e^{jj(w)}$**，**$j(w)$**为**$F(w)$**的相位谱。我们可以得到**

$$F^{*}(w)=|F(w)|e^{-jj(w)}=|F(w)|e^{jj(w)}=F(w)$$

即有 $$e^{-jj(w)}=e^{jj(w)}$$

所以 $$j(w)=0\ \text{或}\ j(w)=p$$

$$F(w)=|F(w)|\quad\text{或}\quad F(w)=|F(w)|e^{jp}=-|F(w)|$$

因此

$$F(w)=\pm|F(w)|=\pm e^{-|w|}$$

若$F(w)=e^{-|w|}$**，由于我们已知**$e^{-|t|}\leftrightarrow\dfrac{2}{1+w^{2}}$**，根据对偶性定理**

即可得到

$$\frac{1}{2p}\cdot\frac{2}{1+(-t)^{2}}\leftrightarrow e^{-|w|}$$

即

$$f(t)=\frac{1}{2p}\cdot\frac{2}{1+(-t)^{2}}=\frac{1}{p(1+t^{2})}$$

若$F(w)=-e^{-|w|}$**，同理可得** $f(t)=-\dfrac{1}{p(1+t^{2})}$。

3.16 $F(w)$的图形如图 3.12 所示，求其反变换 $f(t)$。

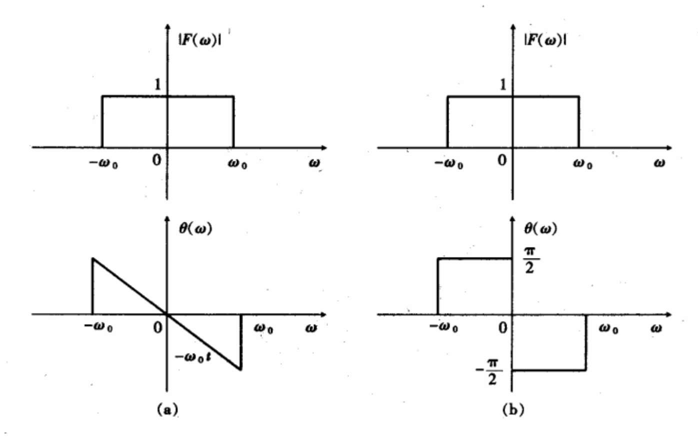


图 3.12

【知识点窍】本题主要考察傅里叶反变换以及傅里叶变换的基本性质。

【逻辑推理】能直接使用傅里叶反变换的就直接求，不能用的可利用傅里叶的一些基本性质来解答，如对称性。

解：(a) 用基本定义求解。因已知有

$$F(w)=|F(w)|e^{q(w)}=e^{-jwt_0} \qquad -w_0<w<w_0$$

故
$$f(t)=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jwt_0}e^{jwt}dw=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jw(t-t_0)}dw=\frac{w_0}{p}Sa[w_0(t-t_0)]$$

$f(t)$ **的波形如图 3.13 所示。**

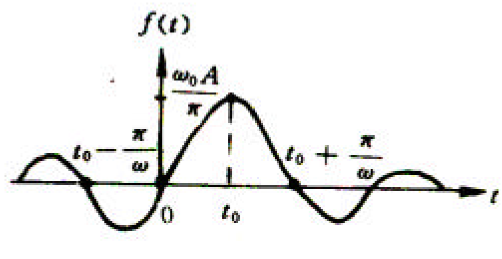


图 3.13

(b) 利用频域微积分定理。由图可以写出：

$$F(w)=j[e(w+w_0)-e(w)]-j[e(w)-e(w+w_0)]$$

对 $F(w)$ **求导，得：**

$$\frac{d}{dw}F(w)=j[d(w+w_0)+d(w-w_0)-2d(w)]$$

由于 $1\leftrightarrow 2pd(w)$ **，利用频移性质可得：**

$$F^{-1}\left[\frac{d}{dw}F(w)\right]=\frac{1}{2p}j\left[e^{-jw_0t}+e^{jw_0t}-2\right]=\frac{j}{p}(\cos w_0t-1)$$

由频域微积分定理有

$$f(t)=F^{-1}[F(w)]=\left[\frac{-1}{jt}+p\,d(t)\right]\cdot F^{-1}\left[\frac{d}{dw}F(jw)\right]$$
$$=\frac{1}{2p}j\left[e^{-jw_0t}+e^{jw_0t}-2\right]=\frac{1}{pt}(1-\cos w_0t)$$

3.17 求 $\frac{\sin 2pt}{2pt}*\frac{\sin 8pt}{8pt}$。

【知识点窍】本题主要考察利用卷积定理求解原信号。

【逻辑推理】首先利用正反对性求解各信号的傅氏变换，然后利用卷积定理求解该两个时域信号积分信号对应的傅氏变换，再对其求反变换。

解：令 $f_1(t)=\frac{\sin 2pt}{2pt}$， $f_2(t)=\frac{\sin 8pt}{8pt}$

因有 $G_t(t)\leftrightarrow tSa\left(\frac{wt}{2}\right)$**，则根据傅里叶变换的对称特性，可得**

$$tSa\left(\frac{tt}{2}\right)\leftrightarrow 2pG_t(w)$$

若取 $\frac{tt}{2}=2pt$**，故得** $t=4p$ **，令** $f_1(t)=\frac{\sin 2pt}{2pt}=\frac{1}{4p}\cdot 4pSa(2pt)$

所以

$$F_1(w)=\frac{1}{4p}\cdot 2pG_{4p}(w)=\frac{1}{2}G_{4p}(w)$$

若取 $\frac{tt}{2}=8pt$**，故得** $t=16p$ **，令** $f_2(t)=\frac{\sin 8pt}{8pt}=\frac{1}{16p}\cdot 16pSa(8pt)$

所以

$$F_2(w)=\frac{1}{16p}\cdot 2pG_{16p}(w)=\frac{1}{8}G_{16p}(w)$$

根据卷积定理，可得：

$$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(w)\cdot F_2(w)=\frac{1}{2}G_{4p}(w)\cdot\frac{1}{8}G_{16p}(w)=\frac{1}{16}G_{4p}(w)$$

取反变换，即得：

$$\frac{\sin 2pt}{2pt}*\frac{\sin 8pt}{8pt}=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2p}\cdot 4pSa(2pt)=\frac{1}{8}Sa(2pt)=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 2pt}{2pt}$$

3.18 已知 $F(jw)=4Sa(w)\cos 2w$**，求反变换** $f(t)$**，并画出** $f(t)$**的波形。**

【知识点窍】本题主要考察傅氏反变换求解。

【逻辑推理】应用傅里叶时移特性进行求解。

解：$F(jw)=4Sa(w)\cos 2w=4Sa(w)\cdot\dfrac{e^{2jw}+e^{-2jw}}{2}=2Sa(w)e^{2jw}+2Sa(w)e^{-2jw}$

因有 $G_t(t)\leftrightarrow tSa\left(\dfrac{wt}{2}\right)$，取 $t=2$，故

$$G_2(t)\leftrightarrow 2Sa(w)$$

故有

$$G_2(t+2)\leftrightarrow 2Sa(w)e^{j2w}$$

$$G_2(t-2)\leftrightarrow 2Sa(w)e^{-j2w}$$

故得

$$f(t)=G_2(t+2)+G_2(t-2)\leftrightarrow 2Sa(w)e^{j2w}+2Sa(w)e^{-j2w}=4Sa(w)\cos 2w$$

$f(t)$ 的波形如图 3.14 所示。

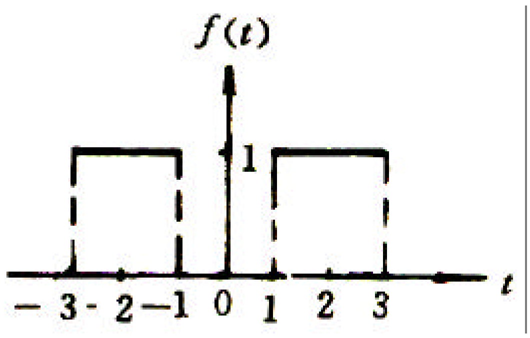


图 3.14

3.19 图 3.15（a）所示为非周期信号 $f_0(t)$，设其频谱为 $F_0(w)$；习题图 3.15（b）所示为周期为 T 的周期信号 $f(t)$，设其复数振幅为 A_n。试证明：

$$A_n=\frac{2}{T}F_0(w)\Big|_{w=n\Omega}\qquad \Omega=\frac{2p}{T}$$

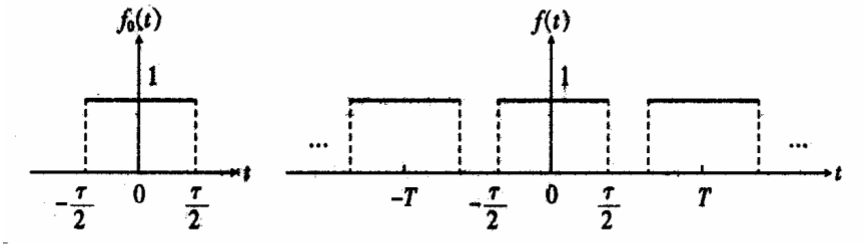


图 3.15

【知识点窍】本题主要考察非周期信号与由其构造的周期信号频谱关系。

【逻辑推理】将周期信号拆分成非周期信号的延时信号的叠加，运用冲激函数的卷积性质，将其看成是该非周期信号与延时冲激信号叠加的卷积，求其傅里叶变换，再经傅氏反变换求取其指数表示式。

证明：

因 $$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t-nT)$$

可写成 $$f(t)= f_0(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty} d(t-nT) \qquad T\geq 2t$$

则有

$$F(jw)=F_0(jw)\cdot\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty} d(w-n\Omega)$$

$$=\frac{2p}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(jn\Omega)d(w-n\Omega) \qquad \Omega=\frac{2p}{T}$$

对上式进行傅立叶反变换有

$$f(t)=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} F(jw)e^{jwt}dw=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2p}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(jn\Omega)d(t-n\Omega)e^{jwt}dw$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}F_0(jn\Omega)e^{jn\Omega t}\int_{-\infty}^{\infty} d(w-n\Omega)dw$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}F_0(jn\Omega)e^{jn\Omega t}$$

又知 $$f(t)=\frac{1}{2}\sum A_n e^{jn\Omega t}$$

将上两式比较可得

$$A_n=\frac{2}{T}F_0(w)\Big|_{w=n\Omega} \qquad \Omega=\frac{2p}{T}$$

3.20 设 $f(t)$为限带信号，频带宽度为w_m，其频谱 $F(w)$如图 3.16 所示。

（1）求 $f(2t), f\left(\frac{1}{2}t\right)$的带宽、奈奎斯特抽样频率$\Omega_N$，$f_N$ 与奈奎斯特间隔T_N。

（2）设用抽样序列$d_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d(t-nT_N)$对信号 $f(t)$进行抽样，得抽样信号 $f_s(t)$，求 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(w)$，画出频谱图。

（3）若用同一个$d_T(t)$对 $f(2t), f\left(\frac{1}{2}t\right)$分别进行抽样，试画出两个抽样信号 $f_s(2t), f_s\left(\frac{1}{2}t\right)$ 的频谱图。

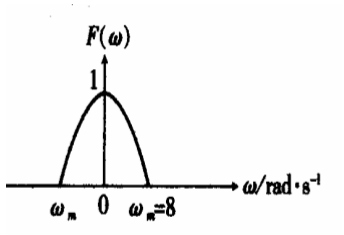


图 3.16

【知识点窍】本题主要考察采样定理。

【逻辑推理】奈奎斯特抽样频率$\Omega_N = 2\times 2w_m$**，奈奎斯特间隔**$T_N = \dfrac{1}{f_N}$ **（其中，** $f_N = \dfrac{\Omega_N}{2p}$**）**

解：(1) $f(2t)\leftrightarrow F_1(jw)=\dfrac{1}{2}F\left(j\dfrac{w}{2}\right)$**，其频谱图如图 3.17（a）所示。**

故得频带宽度为$2w_m = 2\times 8 = 16rad/s$

奈奎斯特抽样频率$\Omega_N = 2\times 2w_m = 4w_m = 32rad/s$

$$f_N = \frac{\Omega_N}{2p} = \frac{4w_m}{2p} = \frac{2w_m}{p} = \frac{16}{p}Hz$$

奈奎斯特间隔$T_N = \dfrac{1}{f_N} = \dfrac{p}{16}s$

$$f\left(\frac{1}{2}t\right)\leftrightarrow F_2(jw)=\frac{1}{1/2}F\left(j\frac{w}{1/2}\right)=2F(j2w)$$**，其频谱图如图 3.17(b)所示。**

故得频带宽度为$\dfrac{1}{2}w_m = \dfrac{1}{2}\times 8 = 4rad/s$

奈奎斯特抽样频率$\Omega_N = 2\times\dfrac{1}{2}w_m = w_m = 8rad/s$

$$f_N = \frac{\Omega_N}{2p} = \frac{w_m}{2p} = \frac{4}{p}Hz$$

奈奎斯特间隔$T_N = \dfrac{1}{f_N} = \dfrac{p}{4}s$

(2) $\Omega_N = 2w_m = 2\times 8 = 16rad/s$

$$T_N = \frac{2p}{\Omega_N} = \frac{2p}{w_m} = \frac{p}{8}s$$

其频谱为

$$F_s(jw)=\frac{1}{T_N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left[j(w-n\Omega_N)\right]=\frac{8}{p}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left[j(w-16n)\right]$$

其频谱如图如图 3.17(c)所示

(3) 此时抽样信号的频谱分别为

$$F_{s1}(jw)=\frac{1}{T_N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_1\left[j(w-n\times 16)\right]$$

$$F_{s2}(jw)=\frac{1}{T_N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_2\left[j(w-n\times 16)\right]$$

其频谱如图 3.17(d)，3.17(e)所示。

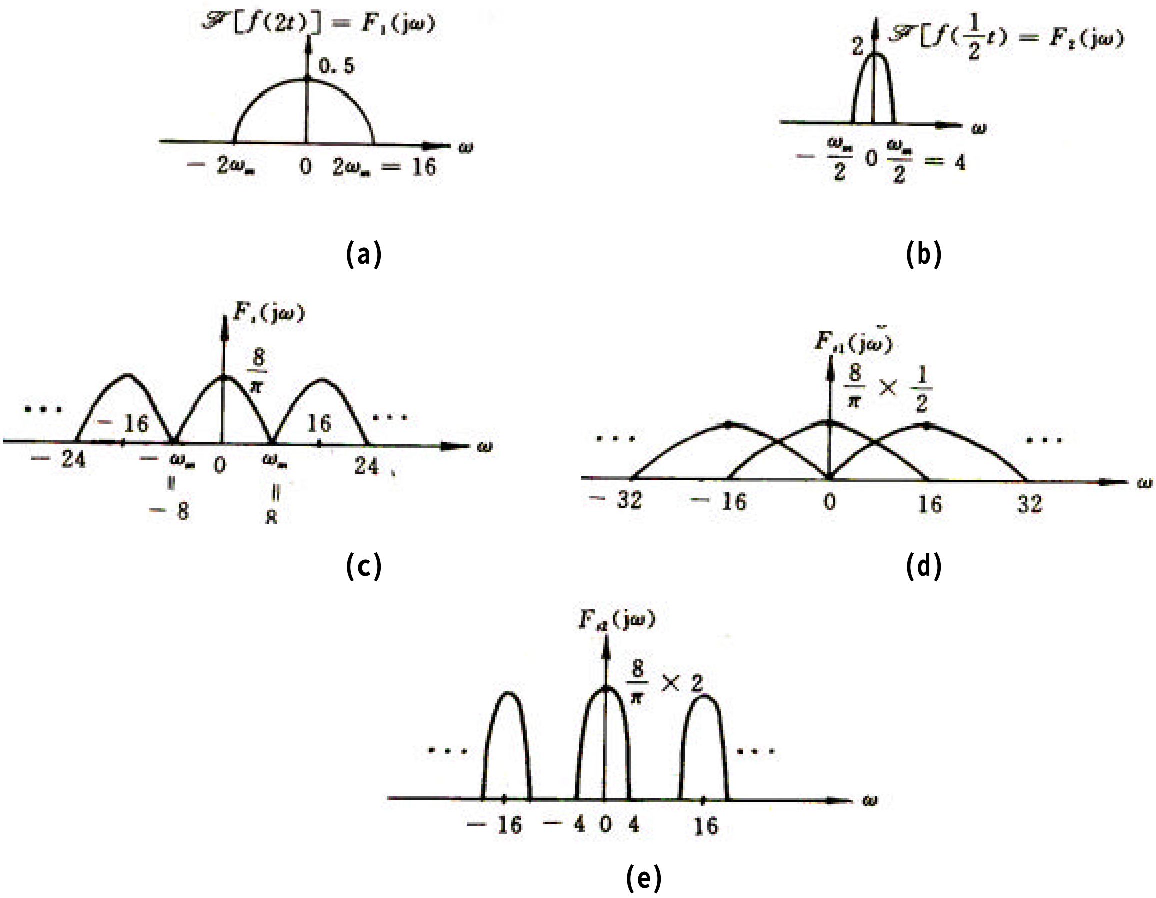


图 3.17

3.21 已知系统的单位冲激响应 $h(t)=e^{-at}e(t)$**，并设其频谱为** $H(w)=R(w)+jX(w)$**。**

(1) 求 $R(w),X(w)$ **；**

（2）证明 $R(w)=\frac{1}{pw}*X(w)$， $X(w)=-\frac{1}{pw}*R(w)$。

【知识点窍】本题主要频谱的分解。

【逻辑推理】频谱是一个复函数，可以分解为实部分与虚部分之和。然后根据卷积定义求其运算。

解：(1) $H(jw)=\frac{1}{a+jw}$，即

$$R(w)+jX(w)=\frac{a}{a^2+w^2}-j\frac{w}{a^2+w^2}$$

故得 $R(w)=\frac{a}{a^2+w^2}$， $X(w)=-\frac{w}{a^2+w^2}$

(2) $\frac{1}{pw}*X(w)=\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-x}{a^2+x^2}\cdot\frac{1}{w-x}dx$

$$=\frac{1}{p(a^2+w^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{a^2}{a^2+x^2}-\frac{wx}{a^2+x^2}-\frac{w}{w-x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{p(a^2+w^2)}\left[a\cdot arctg\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{w}{2}\ln(a^2+w^2)-w\ln(w-x)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$=\frac{a}{a^2+w^2}=R(w)$$

同法可以求证

$$-\frac{1}{pw}*R(w)=-\frac{w}{a^2+w^2}=X(w)$$

可见，只要知道了因果系统频率特性的实部（或虚部），则其虚部（或实部）也就确定了，即系统的整个频率特性就都被确定了。

3.22 求图 3.18 所示电路的频域系统函数 $H_1(jw)=\frac{U_C(jw)}{F(jw)}$，$H_2(jw)=\frac{I(jw)}{F(jw)}$ 及相应的单位冲激响应 $h_1(t)$ 与 $h_2(t)$。

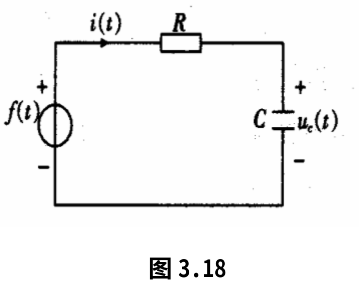


图 3.18

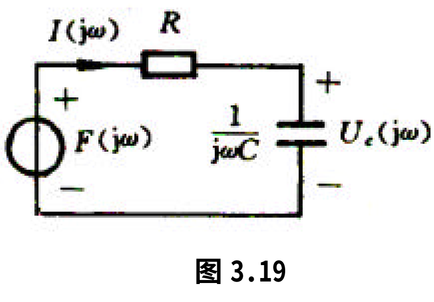


图 3.19

【知识点窍】本题主要考察利用频域系统函数求解单位冲激响应。

【逻辑推理】频域系统函数就是单位冲激响应的傅里叶变换。

解：频域电路如图 3.19 所示，故

$$H_1(jw)=\frac{U_C(w)}{F(w)}=\frac{\frac{1}{jwC}}{R+\frac{1}{jwC}}=\frac{1}{RC}\frac{1}{jw+\frac{1}{RC}}$$

$$I(jw)=\frac{F(jw)}{R+\frac{1}{jwC}}=\frac{jwC}{jwCR+1}F(jw)=\frac{1}{R}\frac{jw}{jw+\frac{1}{RC}}F(jw)$$

$$H_2(jw)=\frac{I(jw)}{F(jw)}=\frac{1}{R}\frac{jw}{jw+\frac{1}{RC}}=\frac{1}{R}\left[1-\frac{\frac{1}{RC}}{jw+\frac{1}{RC}}\right]$$

故

$$h_1(t)=F^{-1}[H_1(jw)]=\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}e(t)$$

$$h_2(t)=F^{-1}[H_2(jw)]=\frac{1}{R}d(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}e(t)$$

3.23 求图 3.20 所示电路的频域系统函数$H(jw)=\dfrac{U_2(jw)}{U_1(jw)}$。

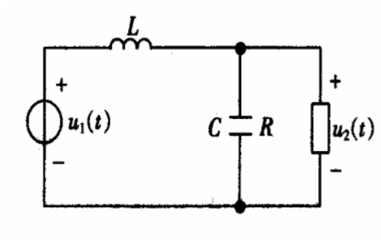


图 3.20

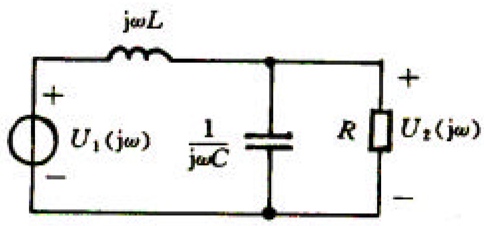


图 3.21

【知识点窍】本题主要考察频域系统函数定义。

【逻辑推理】频域系统函数就是系统零状态响应的傅里叶变换与激励的傅里叶变换之比。

解：频域电路如图 3.21 所示，故

$$U_2(jw)=\frac{U_1(jw)}{jwL+\dfrac{\frac{1}{jwC}R}{R+\frac{1}{jwC}}}\times\frac{\frac{1}{jwC}R}{R+\frac{1}{jwC}}$$

故有

$$H(jw)=\frac{U_2(jw)}{U_1(jw)}=\frac{1}{jwL+\frac{\frac{1}{jwC}R}{R+\frac{1}{jwC}}}\times\frac{\frac{1}{jwC}R}{R+\frac{1}{jwC}}=\frac{1}{(jw)^2LC+jw\frac{L}{R}+1}$$

3.24 已知系统函数 $H(jw)=\dfrac{jw}{-w^2+j5w+6}$**，系统的初始状态** $y(0)=2,y'(0)=1$**，激励**

$f(t)=e^{-t}e(t)$**,求全响应** $y(t)$**。**

【知识点窍】本题主要考察利用频域系统函数求解零状态响应。

【逻辑推理】系统零状态响应的傅里叶变换等于激励的傅里叶变换与频域系统函数之积。然后对其求傅里叶反变换即得系统零状态响应。

解：(1）求零输入响应 $y_{zi}(t)$**。**

因 $H(jw)=\dfrac{jw}{-w^2+j5w+6}$**，故知系统的特征方程有两个单根：－2 和－3。**

故得到

$$y_{zi}(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}$$

将系统的初始条件 $y(0)=2,y'(0)=1$**代入上式可以求解** $A_1=7,A_2=-5$**。**

所以有

$$y_{zi}(t)=\left(7e^{-2t}-5e^{-3t}\right)e(t)$$

(2）求零输入响应 $y_{zs}(t)$**。**

激励 $f(t)=e^{-t}e(t)$**，则有** $F(jw)=\dfrac{1}{jw+1}$

$$\begin{aligned}Y_{zs}(jw)&=F(jw)H(jw)=\frac{jw}{(jw+1)(jw+2)(jw+3)}\\&=-\frac{1}{2}\frac{1}{jw+1}+\frac{2}{jw+2}-\frac{3}{2}\frac{1}{jw+3}\end{aligned}$$

故得

$$y_{zs}(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}e(t)+2e^{-2t}e(t)-\frac{3}{2}e^{-3t}e(t)$$
$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}\right]e(t)$$

（3）求全响应 $y(t)$。

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$
$$=\left(7e^{-2t}-5e^{-3t}\right)e(t)+\left(-\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}\right)e(t)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}e^{-t}+9e^{-2t}-\frac{13}{2}e^{-3t}\right)e(t)$$

3.25 求图 3.22 所示各系统的系统函数 $H(jw)$ 及冲激响应 $h(t)$。

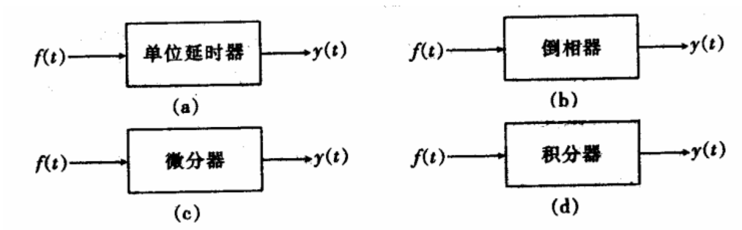


图 3.22

【知识点窍】本题主要考察常见系统的系统函数求解。

【逻辑推理】利用傅里叶变换性质及冲激响应与系统函数的关系求解。

解：(a) 由图可知： $y(t)=f(t-1)$，**则有** $Y(jw)=F(jw)e^{-jw}$

所以系统函数

$$H(jw)=\frac{Y(jw)}{F(jw)}=e^{-jw}$$

故冲激响应

$$h(t)=d(t-1)$$

(b) 由图可知： $y(t)=-f(t)$，**则有** $Y(jw)=-F(jw)$

所以系统函数

$$H(jw)=\frac{Y(jw)}{F(jw)}=-1$$

故冲激响应

$$h(t) = -d(t)$$

（c）由图可知： $y(t) = \dfrac{df(t)}{dt}$ ，则有 $Y(jw) = jwF(jw)$

所以系统函数

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{F(jw)} = jw$$

故冲激响应

$$h(t) = d'(t)$$

（d）由图可知： $y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt$ ，则有 $Y(jw) = F(jw)\left[pd(w) + \dfrac{1}{jw}\right]$

所以系统函数

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{F(jw)} = pd(w) + \frac{1}{jw}$$

故冲激响应

$$h(t) = e(t)$$

3.26 如图 3.23 (a) 所示系统，已知信号 $f(t)$ 如习题图 3.23 (b) 所示，$f_1(t) = \cos w_0 t,\ f_2(t) = \cos 2w_0 t$ 。

求响应 $y(t)$ 的频谱函数。

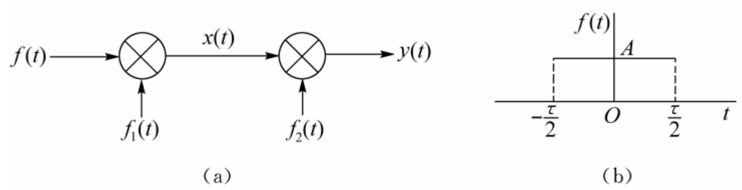


图 3.23

【知识点窍】主要考察系统函数求解系统输出。

【逻辑推理】输出信号的频谱响应等于输入信号的频谱响应与频域系统函数积。

解： $f(t)$ 如图 3.23（b）所示，可得 $f(t) = Ag_t(t)$

所以 $$F(jw) = AtSa\left(\frac{wt}{2}\right)$$

因 $f_1(t) = \cos w_0 t,\ f_2(t) = \cos 2w_0 t$ ，则有

$$F_1(jw)=p\left[d(w-w_0)+d(w+w_0)\right]$$

$$F_2(jw)=p\left[d(w-2w_0)+d(w+2w_0)\right]$$

由图 3.23（a）可知： $x(t)=f(t)f_1(t)$

故

$$X(jw)=\frac{1}{2p}F(jw)*F_1(jw)=\frac{1}{2p}AtSa\left(\frac{wt}{2}\right)\cdot p\left[d(w-w_0)+d(w+w_0)\right]$$
$$=\frac{1}{2}At\left\{Sa\left[\frac{(w+w_0)t}{2}\right]+Sa\left[\frac{(w-w_0)t}{2}\right]\right\}$$

故

$$Y(jw)=\frac{1}{2p}X(jw)*F_2(jw)$$
$$=\frac{1}{2p}\cdot\frac{1}{2}At\left\{Sa\left[\frac{(w+w_0)t}{2}\right]+Sa\left[\frac{(w-w_0)t}{2}\right]\right\}*p\left[d(w-2w_0)+d(w+2w_0)\right]$$
$$=\frac{1}{4}At\left\{Sa\left[\frac{(w+3w_0)t}{2}\right]+Sa\left[\frac{(w+w_0)t}{2}\right]+Sa\left[\frac{(w-w_0)t}{2}\right]+Sa\left[\frac{(w-3w_0)t}{2}\right]\right\}$$

3.27 一理想低通滤波器的频率响应

$$H(w)=\begin{cases}e^{j\frac{p}{2}},-6rad/s<w<0\\ e^{-j\frac{p}{2}},0<w<6rad/s\\ 0,\qquad \text{其余}\end{cases}$$

若输入 $f(t)=\frac{\sin 3t}{t}\cos 5t$ **，求该系统的输出** $y(t)$**。**

【知识点窍】主要考察系统函数求解系统输出。

【逻辑推理】输出信号的频谱响应等于输入信号的频谱响应与频域系统函数积。

解：因有 $G_t(t)\leftrightarrow tSa\left(\frac{wt}{2}\right)$**，取** $\frac{wt}{2}=3w$ **，故得** $t=6$**，故**

$$G_6(t)\leftrightarrow 6Sa(3w)$$

$$2pG_6(w)\leftrightarrow 6Sa(3t)$$

$$\frac{p}{3}G_6(w)\leftrightarrow Sa(3t)$$

所以 $$\frac{\sin\ 3t}{t}=3\frac{\sin\ 3t}{3t}=3Sa\left(3t\right)\leftrightarrow\ pG_6\left(w\right)$$

又因 $$\cos 5t\leftrightarrow p\left[d\left(w+5\right)+d\left(w-5\right)\right]$$

所以

$$\begin{aligned}F\left(jw\right)&=\frac{1}{2p}\cdot pG_6\left(w\right)*p\left[d\left(w+5\right)+d\left(w-5\right)\right]\\&=\frac{p}{2}\left[G_6\left(w+5\right)+G_6\left(w-5\right)\right]\end{aligned}$$

故

$$Y\left(jw\right)=F\left(jw\right)H\left(jw\right)=\frac{p}{2}\left[G_4\left(w+4\right)e^{j\frac{p}{2}}+G_4\left(w-4\right)e^{-j\frac{p}{2}}\right]$$

对上式进行傅立叶反变换，即得

$$\begin{aligned}y\left(t\right)&=\frac{1}{2}e^{j\frac{p}{2}}\frac{\sin 2t}{t}e^{-j4t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{p}{2}}\frac{\sin 2t}{t}e^{j4t}\\&=2\frac{\sin 2t}{2t}\frac{e^{j\left(4t-\frac{p}{2}\right)}+e^{-j\left(4t-\frac{p}{2}\right)}}{2}\\&=2Sa\left(2t\right)\cos\left(4t-\frac{p}{2}\right)=2Sa\left(2t\right)\sin 4t\end{aligned}$$

3.28 图 3.24 所示的调幅系统，当输入 $f\left(t\right)$ **和载频信号** $s\left(t\right)$ **加到乘法器后，其输出** $y\left(t\right)=f\left(t\right)s\left(t\right)$**。该系统是线性的吗？**

（1）如 $f\left(t\right)=5+2\cos 10t+3\cos 20t, s\left(t\right)=\cos 200t$ **，试画出** $y\left(t\right)$ **的频谱图。**

（2）如 $f\left(t\right)=\frac{\sin\ t}{t}, s\left(t\right)=\cos 3t$ **，试画出** $y\left(t\right)$ **的频谱图。**

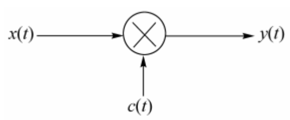


图 3.24

【知识点窍】主要考察调制信号的定义以及调制信号与输出信号的关系以及频谱图的绘制方法。

【逻辑推理】利用傅里叶变换性质。

解：(1)

因为 $$s\left(t\right)\leftrightarrow p\left[d\left(w-200\right)+d\left(w+200\right)\right]$$

$$f\left(t\right)\leftrightarrow 5+2p\left[d\left(w-10\right)+d\left(w+10\right)\right]+3p\left[d\left(w-20\right)+d\left(w+20\right)\right]$$

且 $$y(t)=f(t)s(t)$$

由傅里叶变换移频特性知

$$
\begin{aligned}
Y(\omega)&=\frac{1}{2\pi}F[s(t)]*F[f(t)]\\
&=\frac{1}{2\pi}\pi[\delta(\omega-200)+\delta(\omega+200)]*\{5+2\pi[\delta(\omega-10)+\delta(\omega+10)]+3\pi[\delta(\omega-20)+\delta(\omega+20)]\}\\
&=\frac{5}{2}[\delta(\omega-200)+\delta(\omega+200)]+\pi[\delta(\omega-210)+\delta(\omega-190)+\delta(\omega+210)+\delta(\omega+190)]\\
&+\frac{3}{2}\pi[\delta(\omega-220)+\delta(\omega-180)+\delta(\omega+220)+\delta(\omega+180)]
\end{aligned}
$$

其频谱图如图 3.25 所示。

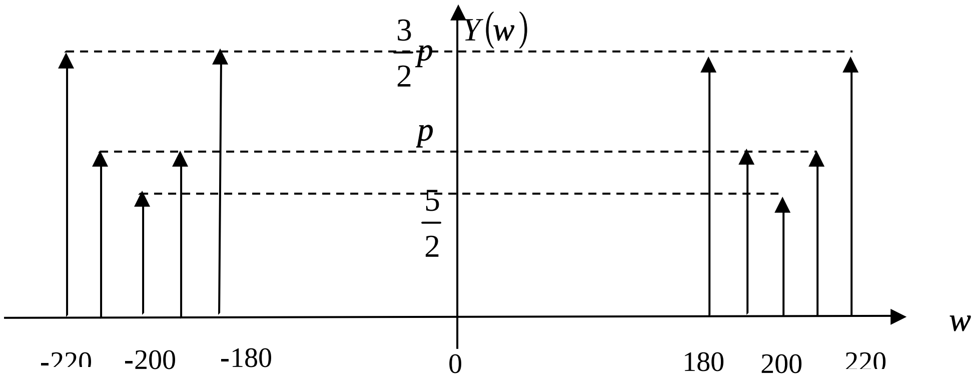


图 3.25

(2)

因为 $$s(t)\leftrightarrow\pi[\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3)]$$

因有 $G_\tau(t)\leftrightarrow\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$**，取** $\frac{\omega\tau}{2}=\omega$**，故得** $\tau=2$**，故**

$$f(t)\leftrightarrow\pi G_2(\omega)$$

且 $$y(t)=f(t)s(t)$$

由傅里叶变换移频特性知

$$
\begin{aligned}
Y(w) &= \frac{1}{2p} F[s(t)] * F[f(t)] \\
&= \frac{1}{2p} p[d(w-3)+d(w+3)] * pG_2(w) \\
&= \frac{p}{2}[G_2(w-3)+G_2(w+3)]
\end{aligned}
$$

其频谱图如图 3.26 所示。

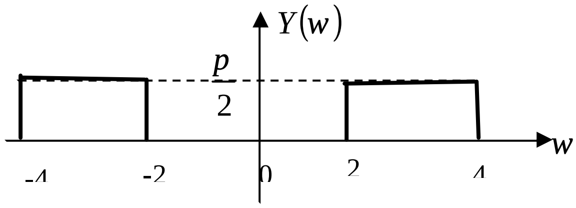


图 3.26

3.29 为了通信保密，可将语音信号在传输前进行倒频，接收端收到倒频信号后，再设法恢复原频谱。图 3.27（b）是一倒频系统。如输入带限信号 $f(t)$ 的频谱如图 3.27（a）所示，其最高角频率为 w_m。已知 $w_b > w_m$，图（b）中 HP 是理想高通滤波器，其截止角频率为w_b，即

$$
H_1(w) = \begin{cases} K_1, |w| > w_b \\ 0, |w| < w_b \end{cases}
$$

图中 LP 为理想低通滤波器，截止角频率为w_m，即 $H_2(w) = \begin{cases} K_2, |w| < w_m \\ 0, |w| > w_m \end{cases}$

画出 $x(t), y(t)$ 的频谱图。

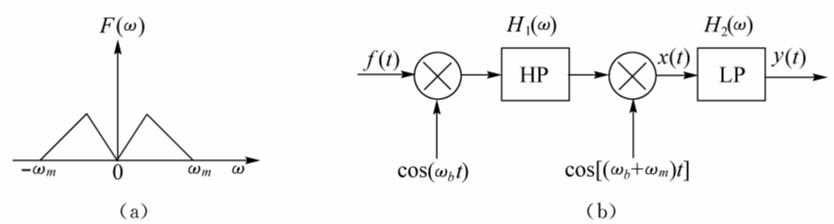


图 3.27

【知识点窍】主要考察系统函数。

【逻辑推理】输出信号的频谱响应等于输入信号的频谱响应与系统函数之积。

解：高通滤波器前的信号 $x_1(t)$

$$
x_1(t) = f(t)\cos w_b t
$$

其傅里叶变换为：

$$X_1(w)=\frac{1}{2p}F(w)*p\left[d(w-w_b)+d(w+w_b)\right]=\frac{1}{2}\left[F(w-w_b)+F(w+w_b)\right]$$

其频谱图形如图 3.28(a)所示。

通过高通滤波器后的信号频谱为：

$$X_2(w)=H_1(w)X_1(w)=\begin{cases}K_1X_1(w) & |w|>w_b\\ 0 & |w|<w_b\end{cases}$$

其频谱图形如图 3.28(b)所示。

则由图 3.27(b)图可知， $x(t)=x_2(t)cos(w_b+w_m)t$

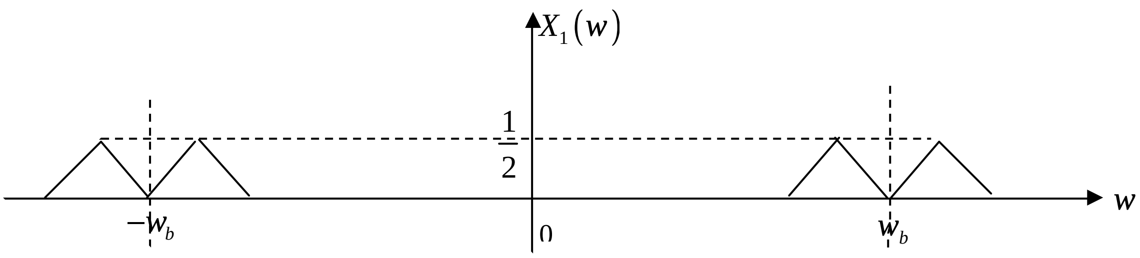
由其傅里叶变换为：

$$\begin{aligned}X(w)&=\frac{1}{2p}X_2(w)*F\left[cos(w_b+w_m)t\right]\\&=\frac{1}{2p}X_2(w)*p\left[d\left(w-(w_b+w_m)\right)+d\left(w+(w_b+w_m)\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[X_2\left(w-(w_b+w_m)\right)+X_2\left(w+(w_b+w_m)\right)\right]\\&=\frac{1}{2}K_1\left[X_1\left(w-(w_b+w_m)\right)+X_1\left(w+(w_b+w_m)\right)\right]\\&=\frac{1}{2}K_1\left\{\frac{1}{2}\left[F\left(w-(2w_b+w_m)\right)+F(w-w_m)\right]+\frac{1}{2}\left[F\left(w+(2w_b+w_m)\right)+F(w+w_m)\right]\right\}\end{aligned}$$

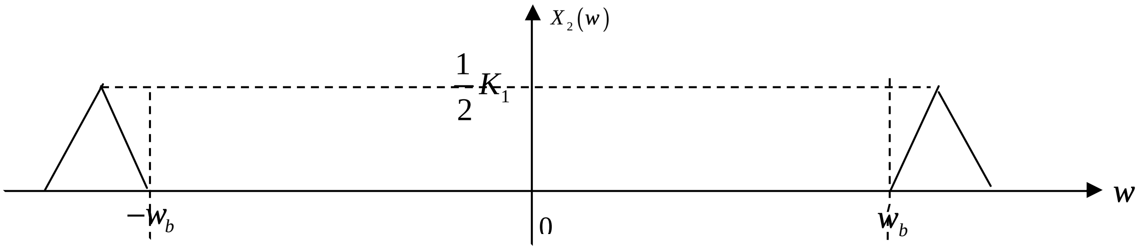
其频谱图形如图 3.28(c)所示。

由图 3.27(b)可知， $Y(w)=X(w)H_2(w)=\begin{cases}K_2X_2(w) & |w|<w_m\\ 0 & |w|>w_m\end{cases}$

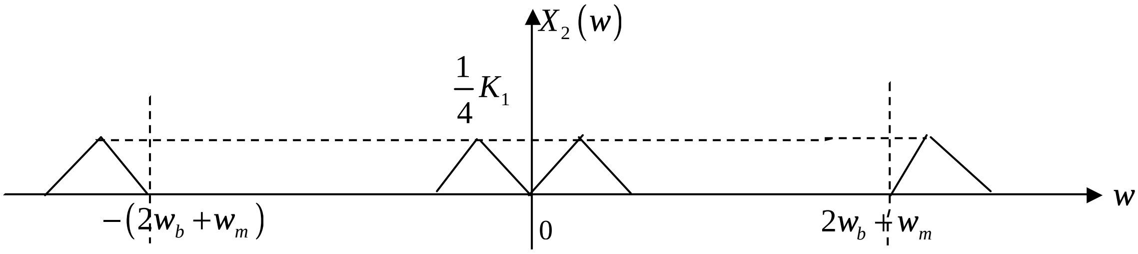
其频谱图如图 3.28(d)所示。



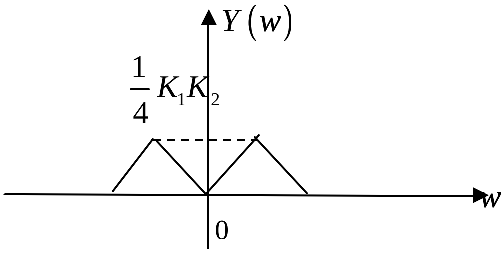
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3.28

3.30 如图 3.29 所示系统，已知 $f(t)=\frac{2}{p}Sa(2t)$, $H(w)=j\,\mathrm{sgn}(w)$ **，求系统的输出** $y(t)$**。**

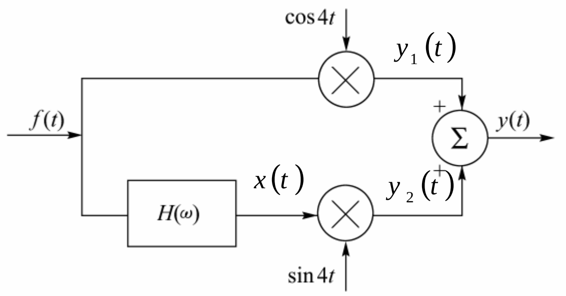


图 3.29

【知识点窍】主要考察系统函数。

【逻辑推理】输出信号的频谱响应等于输入信号的频谱响应与系统函数之积。

解：因有 $G_t(t) \leftrightarrow tSa\left(\frac{wt}{2}\right)$，取 $\frac{wt}{2} = 2w$，故得 $t = 4$，故

$$G_4(t) \leftrightarrow 4Sa(2w)$$

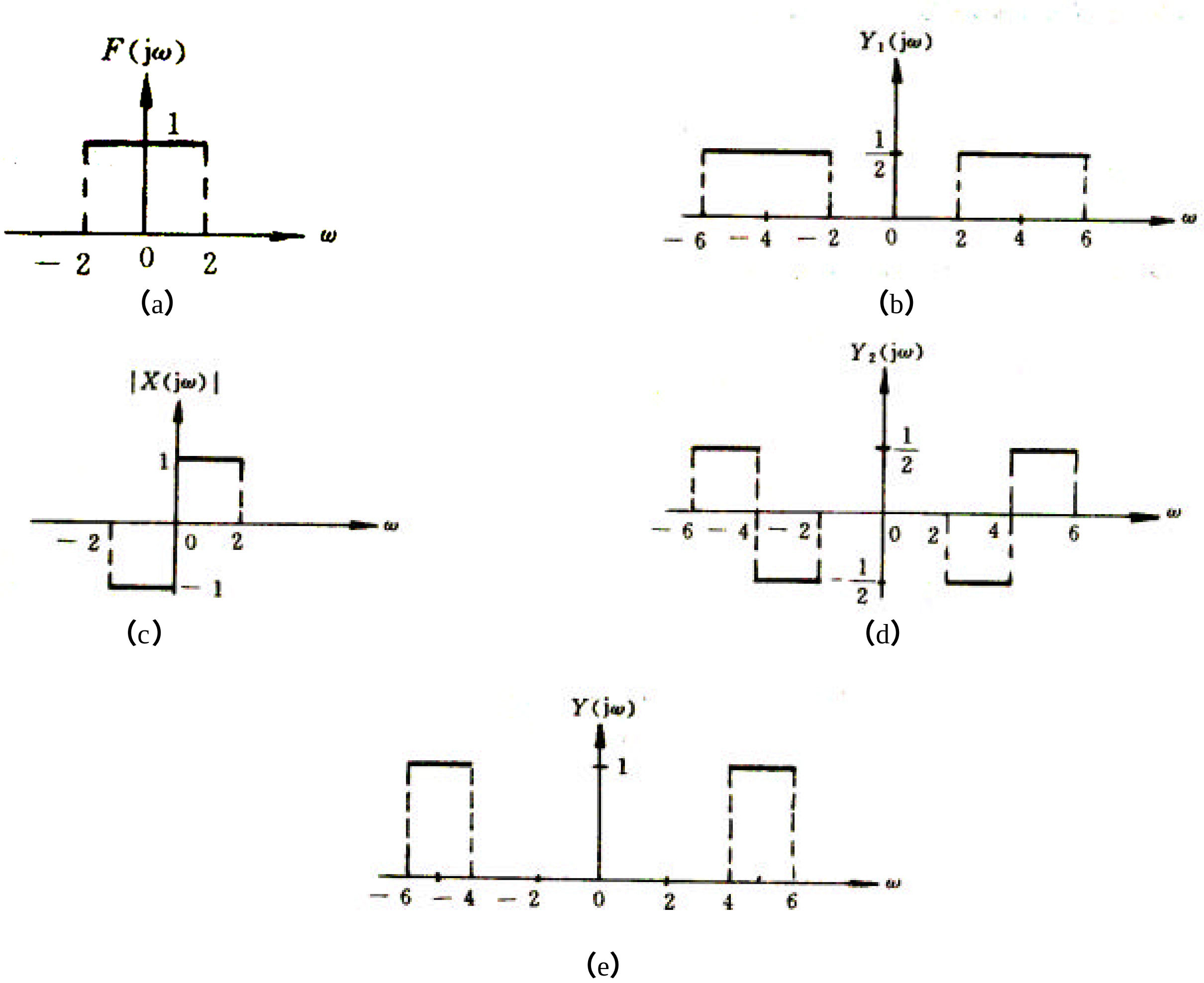
$$2pG_4(w) \leftrightarrow 4Sa(2t)$$

$$\frac{1}{2}G_4(w) \leftrightarrow \frac{1}{p}Sa(2t)$$

因输入 $f(t) = \frac{2}{p}Sa(2t)$，则有

$$F(jw) = G_4(w)$$

其频谱图如图 3.30（a）所示。



如图 3.30

由图 3.29 可得

$$y_1(t) = f(t)\cos 4t$$

故

$$
\begin{aligned}
Y_1(jw) &= \frac{1}{2p}F(jw)*p\left[d(w-4)+d(w+4)\right] \\
&= \frac{1}{2}F\left[j(w-4)\right]+\frac{1}{2}F\left[j(w+4)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[G_4(w-4)+G_4(w+4)\right]
\end{aligned}
$$

其频谱图如图 3.30（b）所示。

由图 3.29 可得

$$
\begin{aligned}
X(jw) &= H(jw)F(jw) = j\,\mathrm{sgn}(w)G_4(w) \\
&= j\left[G_2(w-1)-G_2(w+1)\right]
\end{aligned}
$$

其频谱图 3.30（c）所示。

由图 3.29 可得

$$y_2(t) = x(t)\sin 4t$$

故

$$
\begin{aligned}
Y_2(jw) &= \frac{1}{2p}X(jw)*\frac{p}{j}\left[d(w-4)-d(w+4)\right] \\
&= \frac{1}{2j}\times j\left[G_2(w-1)-G_2(w+1)\right]*\left[d(w-4)-d(w+4)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[G_2(w-5)-G_2(w+3)-G_2(w-3)+G_2(w+5)\right]
\end{aligned}
$$

其频谱图 3.30（d）所示。

所以 $y(t) = y_1(t)+y_2(t)$

则有

$$
\begin{aligned}
Y(jw) &= Y_1(jw)+Y_2(jw) = G_2(w-5)+G_2(w+5) \\
&= G_2(w)*\left[d(w-5)-d(w+5)\right] = 2\times\frac{1}{2p}G_2(w)*p\left[d(w-5)+d(w+5)\right]
\end{aligned}
$$

其频谱图 3.30（e）所示。

因已知 $G_2(w) \leftrightarrow \frac{1}{p}Sa(t) = \frac{1}{p}\frac{\sin t}{t}$

$$p\left[d(w-5)+d(w+5)\right] \leftrightarrow \cos 5t$$

故得 $y(t) = 2\times\frac{1}{p}\frac{\sin t}{t}\cos 5t = \frac{2}{p}Sa(t)\cos 5t$

3.31 如图 3.31 所示的系统，带通滤波器的频率响应如图（b）所示，其相频特性$j(w)=0$**，若输入**

$f(t)=\dfrac{\sin 2t}{2pt}, s(t)=\cos 1000t$，**求输出信号** $y(t)$。

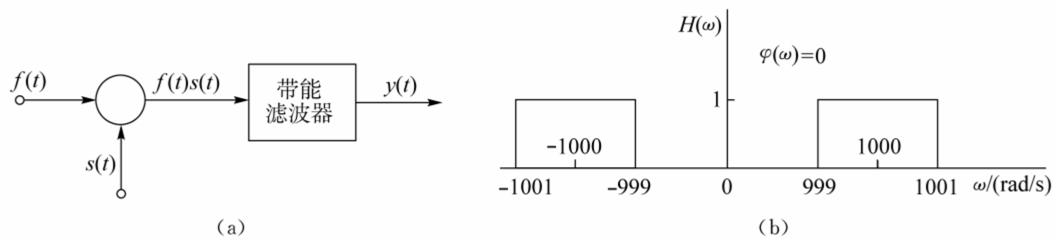


图 3.31

【知识点窍】主要考察系统函数。

【逻辑推理】输出信号的频谱响应等于输入信号的频谱响应与系统函数之积。

解：因有 $G_t(t)\leftrightarrow tSa\left(\dfrac{wt}{2}\right)$，**取** $\dfrac{wt}{2}=2w$ **，故得** $t=4$，**故**

$$G_4(t)\leftrightarrow 4Sa(2w)$$

$$2pG_4(w)\leftrightarrow 4Sa(2t)$$

$$\frac{1}{2}G_4(w)\leftrightarrow \frac{1}{p}Sa(2t)$$

因输入 $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{2pt}=\dfrac{1}{p}Sa(2t)$，**则有**

$$F(jw)=\frac{1}{2}G_4(w)$$

$F(jw)$**的曲线如图** 3.32(a)**所示。**

又 $s(t)=\cos 1000t$ **，则有**

$$S(jw)=p[d(w-1000)+d(w+1000)]$$

$$f_1(t)=f(t)s(t)$$

故

$$\begin{aligned}F_1(jw)&=\frac{1}{2p}F(jw)*S(jw)\\&=\frac{1}{2p}\left\{\frac{1}{2}G_4(w)*[pd(w-1000)+pd(w+1000)]\right\}\\&=\frac{1}{4}G_4(w-1000)+\frac{1}{4}G_4(w+1000)\end{aligned}$$

$F_1(jw)$**的曲线如图** 3.32(b)**所示。**

$$Y(jw)=F_1(jw)\cdot H(jw)=\frac{1}{4}G_2(w-1000)+\frac{1}{4}G_2(w+1000)$$

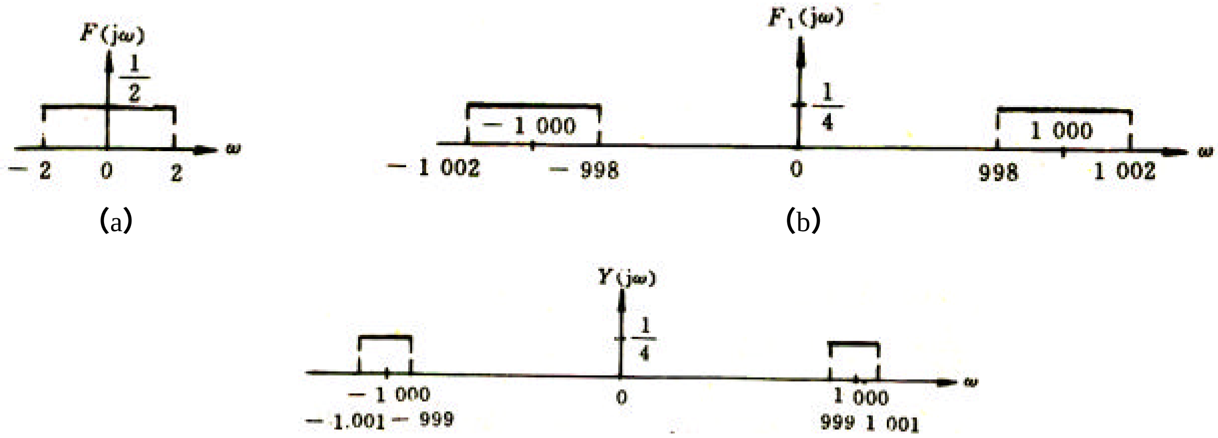
$Y(jw)$**的曲线如图** 3.32（c)**所示。**

又因

$$F^{-1}[G_2(w)]=\frac{\sin t}{pt}=\frac{1}{p}Sa(t)$$

故得

$$y(t)=\frac{1}{4}\frac{\sin t}{pt}e^{j1000t}+\frac{1}{4}\frac{\sin t}{pt}e^{-j1000t}=\frac{\sin t}{2pt}\cos 1000t \qquad -\infty<t<\infty$$



(a) (b)

(c)

图 3.32

第四章　连续时间信号与系统的复频域分析

4.1　学习重点

1、拉普拉斯变换的定义式，收敛域，能根据拉普拉斯变换的定义式求一些常用信号的拉普拉斯变换。

2、熟练掌握拉普拉斯变换的基本性质（特别是时移性、频移性、时域微分、频域微分、初值定理、终值定理、卷积定理等性质）及其应用。

3、能应用部分分式法展开法、留数法，求解拉普拉斯反变换。

4、利用拉普拉斯进行连续时间信号的复频域分析，分析电路、s 域元件模型，能求解线性时不变系统的响应，包括全响应、零输入响应、零状态响应以及冲激响应和阶跃响应。

5、深刻理解复频域系统函数 $H(s)$ 的定义、物理意义及其与系统特性的关系，并能熟练应用于连续时间信号的复频域分析。

6、系统的复频域方框图表示与模拟。

7、了解系统函数的零、极点与系统特性的关系，会画零、极点图，会根据零、极点图求系统函数 $H(s)$。

8、系统稳定性及其判断方法。

9、用MATLAB进行连续时间信号与系统的复频域分析

4.2　教材习题同步解析

4.1　求下列信号的拉普拉斯变换及其收敛域，并画出零极点图和收敛域。

（1）$e^{-at}\varepsilon(t), a<0$　　　　（2）$-e^{at}\varepsilon(-t), a>0$

(3) $e^{at}e(t), a>0$　　(4) $e^{-a|t|}, a>0$

(5) $e(t-4)$　　(6) $d(t-t)$

(7) $e^{-t}e(t)+e^{-2t}e(t)$　　(8) $\cos(w_0 t+j)e(t)$

【知识点窍】主要考察拉普拉斯变换定义及收敛域求法。

【逻辑推理】　单边拉普拉斯变换定义：$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ **。若满足** $s>s_0$ **，使得** $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-st}=0$ **，则** $f(t)e^{-st}$ **在** $s>s_0$ **的全部范围内收敛。**

解：

(1) $F(s)=L\left[e^{-at}e(t)\right]=\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}dt=\dfrac{1}{s+a}$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at}e^{-st}=\lim_{t\to\infty} e^{-(a+s)t}=0 \qquad s+a>0$$

即收敛域为 $s>-a, s_0=-a$ 。

(2) $F(s)=L\left[-e^{at}e(-t)\right]=\int_{-\infty}^{0} e^{-at}e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{-(a+s)t}dt=-\dfrac{1}{s+a}$

$$\lim_{t\to\infty} -e^{at}e^{-st}=\lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t}=0 \qquad a-s<0$$

即收敛域为 $s>a, s_0=a$ 。

(3) $F(s)=L\left[e^{at}e(t)\right]=\int_0^{\infty} e^{at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{(a-s)t}dt=\dfrac{1}{s-a}$

$$\lim_{t\to\infty} e^{at}e^{-st}=\lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t}=0 \qquad a-s<0$$

即收敛域为 $s>a, s_0=a$ 。

(4) $F(s)=L\left[e^{-a|t|}e(t)\right]=\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-st}dt+\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}dt+\int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}dt=\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-at}e^{-st}=\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-(a+s)t}=0 \qquad a+s<0$ 　　**即** $s>-a$

$\lim\limits_{t\to-\infty} e^{at}e^{-st}=\lim\limits_{t\to-\infty} e^{(a-s)t}=0 \qquad a-s>0$ 　　**即** $s<a$

即收敛域为 $-a<s<a$ 。

(5) $F(s)=L\left[e(t-4)\right]=\int_4^{\infty} e(t-4)e^{-st}dt=\int_4^{\infty} e^{-st}dt=-\dfrac{1}{s}e^{-st}\Big|_4^{\infty}=\dfrac{1}{s}e^{-4s}$

$$\lim_{t\to\infty} e(t-4)e^{-st}=\lim_{t\to+\infty} e^{-st}=0 \qquad s>0$$

即收敛域为$s > 0, s_0 = 0$

(6) $F(s) = L[d(t-t)] = \int_t^{\infty} d(t-t)e^{-st}dt = e^{-st}\Big|_{t=t} = e^{-st}\Big|$

$$\lim_{t\to\infty} d(t-t)e^{-st} = \lim_{t\to+\infty} 0 \cdot e^{-st} = 0 \qquad s > -\infty$$

即对s_0没有要求，全平面收敛。

（7）$F(s) = L\left[e^{-t}e(t) + e^{-2t}e(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st}dt + \int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-st}dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(1+s)t}dt + \int_0^{\infty} e^{-(2+s)t}dt = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t} + e^{-2t}\right)e^{-st} = \lim_{t\to\infty} e^{-(1+s)t} + \lim_{t\to\infty} e^{-(2+s)t} = 0 \qquad s+1 > 0 \text{且} s+2 > 0$$

即收敛域为$s > -1, s_0 = -1$。

（8）$\cos(w_0t + j) = \cos w_0t\cos j - \sin w_0t\sin j$

$$= \cos j\ \frac{e^{w_0tj} + e^{-w_0tj}}{2} - \sin j\ \frac{e^{w_0tj} - e^{-w_0tj}}{2j}$$

$$= \left(\frac{\cos j}{2} - \frac{\sin j}{2j}\right)e^{w_0tj} + \left(\frac{\cos j}{2} + \frac{\sin j}{2j}\right)e^{-w_0tj}$$

$$F(s) = L\left[\left[\left(\frac{\cos j}{2} - \frac{\sin j}{2j}\right)e^{w_0tj} + \left(\frac{\cos j}{2} + \frac{\sin j}{2j}\right)e^{-w_0tj}\right]e(t)\right]$$

$$= \left(\frac{\cos j}{2} - \frac{\sin j}{2j}\right)\int_0^{\infty} e^{w_0tj}e^{-st}dt + \left(\frac{\cos j}{2} + \frac{\sin j}{2j}\right)\int_0^{\infty} e^{-w_0tj}e^{-st}dt$$

$$= \left(\frac{\cos j}{2} - \frac{\sin j}{2j}\right)\int_0^{\infty} e^{(w_0-s)jt}dt + \left(\frac{\cos j}{2} + \frac{\sin j}{2j}\right)\int_0^{\infty} e^{-(w_0+s)jt}dt$$

$$= \frac{\frac{1}{2}e^{jj}}{s - jw_0} + \frac{\frac{1}{2}e^{-jj}}{s + jw_0}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\left(\frac{\cos j}{2} - \frac{\sin j}{2j}\right)e^{w_0tj} + \left(\frac{\cos j}{2} + \frac{\sin j}{2j}\right)e^{-w_0tj}\right]e(t)e^{-st}$$

$$= \left(\frac{\cos j}{2} - \frac{\sin j}{2j}\right)\lim_{t\to\infty} e^{(w_0j-s)t} + \left(\frac{\cos j}{2} + \frac{\sin j}{2j}\right)\lim_{t\to\infty} e^{-(w_0j+s)t} = 0$$

则有$w_0j - s < 0$且$w_0j + s > 0$

即收敛域为$s > w_0j, s_0 = w_0j$。

4.2 **求图** 4.1 **所示信号的拉普拉斯变换。**

【知识点窍】主要考察拉普拉斯变换基本性质

【逻辑推理】首先分析图形，看是由哪些基本信号的图形组合，然后通过基本信号的拉普拉斯变换和拉普拉斯变换基本性质来求取其拉普拉斯变换。

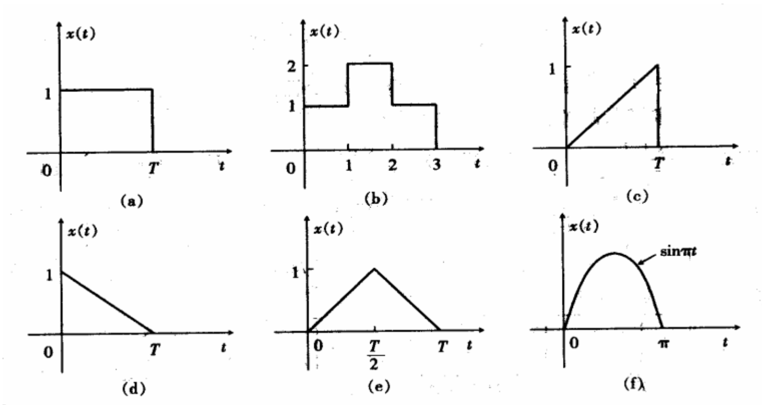


图 4.1

解：(a) $x(t)=e(t)-e(t-T)$

因$e(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$**，根据拉普拉斯变换时延特性，有**

$$X(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT}=\frac{1}{s}\left(1-e^{-sT}\right)$$

(b) $x(t)=e(t)+e(t-1)-e(t-2)-e(t-3)$

因$e(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$**，根据拉普拉斯变换时延特性，有**

$$X(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-2s}-\frac{1}{s}e^{-3s}=\frac{1}{s}\left(1+e^{-s}-e^{-2s}-e^{-3s}\right)$$

(c) $x(t)=\frac{1}{T}t[e(t)-e(t-T)]=\frac{1}{T}te(t)-\frac{1}{T}(t-T)e(t-T)-e(t-T)$

因$e(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$**，**$te(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$**，根据拉普拉斯变换时延特性，有**

$$X(s)=\frac{1}{Ts^2}-\frac{1}{s}e^{-sT}-\frac{1}{Ts^2}e^{-sT}$$

(d) $x(t)=\left(-\frac{1}{T}t+1\right)[e(t)-e(t-T)]=-\frac{1}{T}(t-T)e(t)+\frac{1}{T}(t-T)e(t-T)$

因$e(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$**，**$te(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$**，根据拉普拉斯变换时延特性，有**

$$X(s)=-\frac{1}{Ts^2}+\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}e^{-sT}$$

（e） $x(t)=\frac{2}{T}te(t)+\left(-\frac{4}{T}t+2\right)e\left(t-\frac{T}{2}\right)+\left(\frac{2}{T}t-2\right)e(t-T)$

$$=\frac{2}{T}te(t)-\frac{4}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)e\left(t-\frac{T}{2}\right)+\frac{2}{T}(t-T)e(t-T)$$

因 $e(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$**，** $te(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$ **，根据拉普拉斯变换时延特性，有**

$$X(s)=\frac{2}{Ts^2}-\frac{4}{Ts^2}e^{-\frac{sT}{2}}+\frac{2}{Ts^2}e^{-sT}$$

$$=\frac{2-4e^{-\frac{sT}{2}}+2e^{-sT}}{Ts^2}$$

（f） $x(t)=\sin pt[e(t)-e(t-p)]$

$$\sin pte(t)\leftrightarrow\frac{p}{s^2+p^2}$$

$$L[\sin pte(t-p)]=L\left[\frac{e^{jpt}-e^{-jpt}}{2j}e(t-p)\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\int_p^{\infty}e^{jpt}e^{-st}dt-\int_p^{\infty}e^{-jpt}e^{-st}dt\right]=\frac{1}{2j}\left[\frac{e^{-(s-jp)p}}{s-jp}-\frac{e^{-(s+jp)p}}{s+jp}\right]$$

所以

$$X(s)=\frac{p}{s^2+p^2}-\frac{1}{2j}\left[\frac{e^{-(s-jp)p}}{s-jp}-\frac{e^{-(s+jp)p}}{s+jp}\right]$$

$$=\frac{p}{s^2+p^2}-\frac{1}{2j}\cdot\frac{(s+jp)e^{-sp}e^{jp^2}-(s-jp)e^{-sp}e^{-jp^2}}{s^2+p^2}$$

$$=\frac{p}{s^2+p^2}-\frac{1}{2j}e^{-sp}\cdot\frac{s\left(e^{jp^2}-e^{-jp^2}\right)+jp\left(e^{jp^2}+e^{-jp^2}\right)}{s^2+p^2}$$

$$=\frac{p}{s^2+p^2}-e^{-sp}\frac{s\sin p^2t+p\cos p^2t}{s^2+p^2}$$

$$=\frac{p-e^{-sp}\left(s\sin p^2t+p\cos p^2t\right)}{s^2+p^2}$$

4.3　**图** 4.2 **所示的每一个零极点图，确定满足下述情况的收敛域。**

（1） $f(t)$**的傅里叶变换存在**　　　　（2） $f(t)e^{2t}$ **的傅里叶变换存在**

（3） $f(t)=0,t>0$　　　　（4） $f(t)=0,t<5$

【知识点窍】主要考察拉普拉斯变换的零极点分布特性。

【逻辑推理】首先由零极点写出拉普拉斯变换式，再利用反变换求取其原信号，即可求取其收

域。

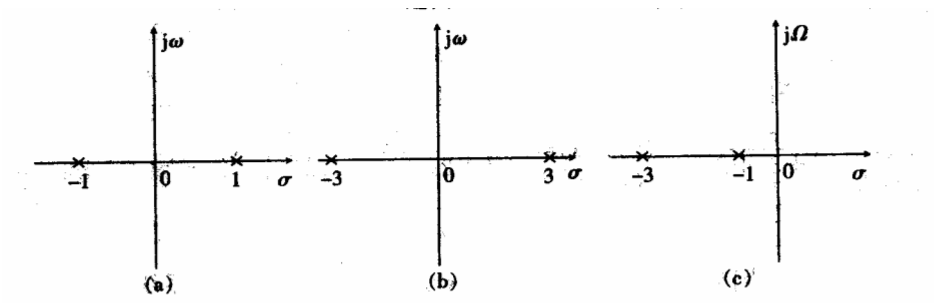


图 4.2

解：由图 4.2（a）得

$$F(s)=\frac{k_1}{(s-1)(s+1)}=\frac{k_1}{2}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right] \quad 即得 \quad f(t)=\frac{k_1}{2}\left[e^{t}-e^{-t}\right]\varepsilon(t)$$

由图 4.2（b）图得

$$F(s)=\frac{k_2}{(s-3)(s+3)}=\frac{k_2}{6}\left[\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+3}\right] \quad 即得 \quad f(t)=\frac{k_2}{2}\left[e^{3t}-e^{-3t}\right]\varepsilon(t)$$

由图 4.2（c）图得

$$F(s)=\frac{k_3}{(s+3)(s+1)}=\frac{k_3}{2}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right] \quad 即得 \quad f(t)=\frac{k_3}{2}\left[e^{-t}-e^{-3t}\right]\varepsilon(t)$$

（1） $f(t)$的傅里叶变换存在，对于由图 4.2（a）来说，其收敛域为

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st}=\lim_{t\to\infty}\frac{k_1}{2}\left[e^{t}-e^{-t}\right]e^{-st}=\lim_{t\to\infty}\frac{K_1}{2}\left[e^{(1-s)t}-e^{-(1+a)t}\right]=0$$

则由此可得 $1-a<0 \quad \cup \quad 1+a>0$

即收敛域为 $a>1$

同理，对于图 4.2（b）来说，其收敛域为：$s>3$

对于图 4.2（c）来说，其收敛域为：$a>-1$

（2） $f(t)e^{2t}$的傅里叶变换存在，对于由图 4.2（a）来说，其收敛域为

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{2t}e^{-st}=\lim_{t\to\infty}\frac{k_1}{2}\left[e^{3t}-e^{t}\right]e^{-st}=\lim_{t\to\infty}\frac{K_1}{2}\left[e^{(3-s)t}-e^{(1-a)t}\right]=0$$

由此可得其收敛域为：$s>3$

同理，对于对于图 4.2（b）来说，其收敛域为：$s>5$

对于图 4.2（c）来说，其收敛域为：$a>1$

（3）（4）情况下，收敛域均为：$-\infty<a<\infty$

4.4　针对图 4.3 所示的每一个信号的有理拉氏变换的零极点图，确定：

（1）拉氏变换式；

（2）零极点图可能的收敛域，并指出相应信号的特征。

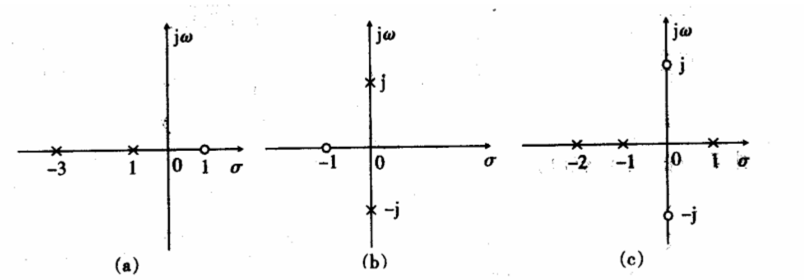


图 4.3

【知识点窍】主要考察拉普拉斯变换的零极点分布特性。

【逻辑推理】首先由零极点写出拉普拉斯变换式，再求取其收域。

解：（a）由如图 4.3（a）所示的零极点图，可得到拉氏变换式为

$$F(s)=\frac{s-1}{(s+3)(s+1)}$$

拉氏变换的收敛域内不应包含象函数的任何极点，所以信号可能的收敛域为

$$s<-3 \text{ 或 } s>-1 \text{ 或 } -3<s<-1$$

该信号的极点位于 s 平面的负实轴上，所以该信号为衰减指数信号。

（b）由如图 4.3（b）所示的零极点图，可得到拉氏变换式为

$$F(s)=\frac{s+1}{(s+j)(s-j)}$$

拉氏变换的收敛域内不应包含象函数的任何极点，所以信号可能的收敛域为

$$s<0 \text{ 或 } s>0$$

该信号的极点位于 s 平面的虚轴上，所以该信号为等幅振荡信号。

（c）由如图 4.3（c）所示的零极点图，可得到拉氏变换式为

$$F(s)=\frac{(s+j)(s-j)}{(s-1)(s+1)(s+2)}$$

拉氏变换的收敛域内不应包含象函数的任何极点，所以信号可能的收敛域为

$$s<-2 \text{ 或 } s>1 \text{ 或 } -2<s<-1 \text{ 或 } -1<s<1$$

该信号的极点位于 s 平面的实轴上，有一个极点位于 s 右半平面上，所以该信号为增幅信号。

若拉氏变换的收敛域为某平行于虚轴的直线左侧的半个有限 s 平面，则对应时域的左边时间函数；若拉氏变换的收敛域为某平行于虚轴的直线右侧的半个有限 s 平面，则对应时域的右边时间函数；若拉氏变换的收敛域为 s 平面中左、右边界有限的带状区域，则对应一个两边时间函数。

4.5 **对于下列信号，判断拉氏变换是否存在。若存在，求出其拉氏变换式及收敛域。**

（1）$te(t)$　　（2）$t^2e(t)$　　（3）$te^{-2t}e(t)$

（4）$e^{t^2}e(t)$　　（5）$e^{e^t}e(t)$　　（6）$f(t)=\begin{cases} e^{-t}, t<0 \\ e^{t}, t>0 \end{cases}$

【知识点窍】主要考察拉普拉斯变换定义与收敛域算法。

【逻辑推理】首先由收敛的条件判断拉氏变换是否存在，然后再利用拉氏变换定义式求取其拉氏变换。

解：（1）$\lim\limits_{t\to\infty} te(t)e^{-st}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{st}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{se^{st}}=0 \qquad s>0$

即 $s_0=0$**，收敛坐标位于坐标原点，收敛轴即虚轴，收敛域为 S 平面的右半平面。**

$$F(s)=L[te(t)]=\int_0^{\infty} te^{-st}dt=\frac{1}{s^2}$$

（2）$\lim\limits_{t\to\infty} t^2e(t)e^{-st}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2}{e^{st}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2}{s^2e^{st}}=0 \qquad s>0$

即 $s_0=0$**，收敛坐标位于坐标原点，收敛轴即虚轴，收敛域为 S 平面的右半平面。**

$$F(s)=L\left[t^2e(t)\right]=\int_0^{\infty} t^2e^{-st}dt=\frac{2}{s^3}$$

（3）$\lim\limits_{t\to\infty} te^{-2t}e(t)e^{-st}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{(s+2)t}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{(s+2)e^{(s+2)t}}=0 \qquad s+2>0$

即 $s>-2$**，** $s_0=-2$

$$F(s)=L\left[te^{-2t}e(t)\right]=\int_0^{\infty} te^{-2t}e^{-st}dt=\frac{1}{(s+2)^2}$$

（4）$\lim\limits_{t\to\infty} e^{t^2}e(t)e^{-st}=\lim\limits_{t\to\infty} e^{t^2-st}=0$

满足上式的 s 值不存在，所以该信号的拉普拉斯变换不存在。

（5）$\lim\limits_{t\to\infty} e^{e^t}e(t)e^{-st}=\lim\limits_{t\to\infty} e^{e^t-st}=0$

满足上式的 s 值不存在，所以该信号的拉普拉斯变换不存在。

(6) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = \lim\limits_{t\to-\infty} e^{-t}e(t)e^{-st} + \lim\limits_{t\to+\infty} e^{t}e(t)e^{-st}$

$$= \lim_{t\to-\infty} e^{-(s+1)t} + \lim_{t\to+\infty} e^{(1-s)t} = 0 \qquad s+1<0 \text{且} 1-s<0$$

满足上式的 s 值不存在，所以该信号的拉普拉斯变换不存在。

4.6 **利用拉普拉斯变换的性质，求下列信号的拉氏变换，并画出零极点图。**

(1) $(t+1)e(t-1)$ (2) $te^{-t}e(t-t)$ (3) $(t+1)e^{-t}e(t)$

(4) $t^2e^{-at}e(t)$ (5) $\sin pt[e(t)-e(t-1)]$ (6) $\sin wt\cos wte(t)$

(7) $\sin wte(t-t)$ (8) $\sin w(t-t)e(t)$ (9) $\sin^2 te(t)$

(10) $|\sin t|e(t)$ (11) $te^{-at}\cos wte(t)$ (12) $\dfrac{\sin at}{t}e(t)$

(13) $\int_0^t \sin p t dt$ (14) $\int_0^t\int_0^t \sin pxdxdt$ (15) $\dfrac{d}{dt}\left[e^{-at}\sin wte(t)\right]$

(16) $e^{-a(t-t_0)}\sin(wt+q)e(t)$ (17) $\dfrac{d^2}{dt^2}[\sin pte(t)]$ (18) $\dfrac{d^2\sin pt}{dt^2}e(t)$

(19) $\int_0^t t\sin tdt$ (20) $e^{-at}f\left(\dfrac{t}{b}\right)e(t)$

【知识点窍】主要考察拉普拉斯变换性质以及零极点图画法。

【逻辑推理】首先分析每一个信号，看是由哪些基本信号的图形组合，然后通过基本信号的拉普拉斯变换和拉普拉斯变换基本性质来求取其拉普拉斯变换。

解：(1) $(t+1)e(t-1) = (t-1)e(t-1) + 2e(t-1)$

因为 $te(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s^2} \qquad e(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s}$

由时移特性可得： $F(s) = \dfrac{1}{s^2}e^{-s} + \dfrac{2}{s}e^{-s} = \dfrac{1}{s}e^{-s}\left(2+\dfrac{1}{s}\right) = \dfrac{2s+1}{s^2}e^{-s}$

其零极点图如图 4.4（a）**所示。**

(2) **设** $f_0(t) = te(t-t) = (t-t)e(t-t) + te(t-t)$

因为 $te(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s^2} \qquad e(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s}$

由时移特性可得： $F_0(s) = \dfrac{1}{s^2}e^{-st} + \dfrac{t}{s}e^{-st} = \dfrac{1}{s}e^{-st}\left(t+\dfrac{1}{s}\right) = \dfrac{ts+1}{s^2}e^{-st}$

由频移特性可得：$te^{-t}e(t-t)=f_0(t)e^{-t}\leftrightarrow F_0(s+1)=\dfrac{t(s+1)+1}{(s+1)^2}e^{-(s+1)t}$

其零极点图如图 4.4（b）所示。

（3）设 $f_0(t)=(t+1)e(t)=te(t)+e(t)$

因为 $te(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s^2}$ $\qquad e(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s}$

由时移特性可得：$F_0(s)=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{s+1}{s^2}$

由频移特性可得：$(t+1)e^{-t}e(t)=f_0(t)e^{-t}\leftrightarrow F_0(s+1)=\dfrac{s+2}{(s+1)^2}$

其零极点图如图 4.4（c）所示。

（4）因为 $t^ne(t)\leftrightarrow\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ 　即得 $t^2e(t)\leftrightarrow\dfrac{2!}{s^3}=\dfrac{2}{s^3}$

由频移特性可得：$t^2e^{-at}e(t)\leftrightarrow\dfrac{2}{(s+a)^3}$

其零极点图如图 4.4（d）所示。

（5）因为

$$\begin{aligned}\sin pt\left[e(t)-e(t-1)\right]&=\sin pt\,e(t)-\sin pt\,e(t-1)\\&=\sin pt\,e(t)+\sin p(t-1)e(t-1)\end{aligned}$$

又因为 $\sin pt\,e(t)\leftrightarrow\dfrac{p}{s^2+p^2}$

由拉氏变换时移性质有 $\sin p(t-1)e(t-1)\leftrightarrow\dfrac{p}{s^2+p^2}e^{-s}$

由线性性质即得 $\sin pt\left[e(t)-e(t-1)\right]\leftrightarrow\dfrac{p}{s^2+p^2}\left(1+e^{-s}\right)$

其零极点图如图 4.4（e）所示。

（6）因为 $\sin wt\cos wt\,e(t)=\dfrac{1}{2}\sin(2wt)e(t)$

又因为 $\sin 2wt\,e(t)\leftrightarrow\dfrac{2w}{s^2+(2w)^2}$

由线性性质即得 $\sin wt\cos wt\,e(t)\leftrightarrow\dfrac{w}{s^2+(2w)^2}$

其零极点图如图 4.4（f）所示。

（7）因为

$$\sin wt e(t-t)=\frac{1}{2j}\left(e^{jwt}-e^{-jwt}\right)e(t-t)$$

$$=\frac{e^{jwt}}{2j}e^{jw(t-t)}e(t-t)-\frac{e^{-jwt}}{2j}e^{-jw(t-t)}e(t-t)$$

又因为 $$e^{\pm at}e(t)\leftrightarrow\frac{1}{s\mp a}$$

即可得 $$e^{jwt}e(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-jw}\qquad e^{-jwt}e(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+jw}$$

由拉氏变换的时移特性得

$$e^{jw(t-t)}e(t-t)\leftrightarrow\frac{1}{s-jw}e^{-st}\qquad e^{-jw(t-t)}e(t-t)\leftrightarrow\frac{1}{s+jw}e^{-st}$$

由拉氏变换线性特性可得

$$\sin wt e(t-t)\leftrightarrow\frac{e^{jwt}}{2j}\frac{1}{s-jw}e^{-st}-\frac{e^{-jwt}}{2j}\frac{1}{s+jw}e^{-st}$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{e^{jwt}}{s-jw}-\frac{e^{-jwt}}{s+jw}\right]e^{-st}$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{s\left(e^{jwt}-e^{-jwt}\right)+jw\left(e^{jwt}+e^{-jwt}\right)}{s^2+w^2}e^{-st}$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{s2j\sin wt+2jw\cos wt}{s^2+w^2}e^{-st}$$

$$=\frac{s\sin wt+w\cos wt}{s^2+w^2}e^{-st}$$

其零极点图如图 4.4（g）**所示。**

（8）**因为**

$$\sin w(t-t)e(t)=\frac{1}{2j}\left(e^{jw(t-t)}-e^{-jw(t-t)}\right)e(t)$$

$$=\frac{e^{-jwt}}{2j}e^{jwt}e(t)-\frac{e^{jwt}}{2j}e^{-jwt}e(t)$$

又因为 $$e^{\pm at}e(t)\leftrightarrow\frac{1}{s\mp a}$$

即可得 $$e^{jwt}e(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-jw}\qquad e^{-jwt}e(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+jw}$$

由拉氏变换线性特性可得

$$sin\, w\left(t-t\right)e\left(t\right)\leftrightarrow\frac{e^{-jwt}}{2j}\frac{1}{s-jw}-\frac{e^{jwt}}{2j}\frac{1}{s+jw}$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{e^{-jwt}}{s-jw}-\frac{e^{jwt}}{s+jw}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{s\left(e^{-jwt}-e^{jwt}\right)+jw\left(e^{-jwt}+e^{jwt}\right)}{s^2+w^2}$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{-s2jsinwt+2jw\,cos\,wt}{s^2+w^2}$$

$$=\frac{-ssin\,wt+w\,cos\,wt}{s^2+w^2}$$

其零极点图如图 4.4（h）**所示。**

（9）**因为** $$sin^2 te\left(t\right)=\frac{1-cos\,2t}{2}e\left(t\right)=\frac{1}{2}e\left(t\right)-\frac{1}{2}cos\,2te\left(t\right)$$

又因为 $$e\left(t\right)\leftrightarrow\frac{1}{s}\qquad cos\,w\,te\left(t\right)\leftrightarrow\frac{s}{s^2+w^2}$$

由拉氏变换线性特性可得

$$sin^2 te\left(t\right)\leftrightarrow\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+w^2}=\frac{w^2}{2\left(s^2+w^2\right)}$$

其零极点图如图 4.4（i）**所示。**

（10）**设** $$f_0\left(t\right)=sinte\left(t\right)+sin\left(t-p\right)e\left(t-p\right)$$

则由题 4.6（5）**可知** $$f_0\left(t\right)\leftrightarrow\frac{1}{s^2+1}\left(1+e^{-sp}\right)$$

则 $$\left|sint\right|e\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}f_0\left(t-np\right)e\left(t-np\right)$$

由拉氏变换时移特性可知 $$\left|sint\right|e\left(t\right)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-sp}}F_0\left(s\right)=\frac{1+e^{-sp}}{1-e^{-sp}}\frac{1}{s^2+1}$$

其零极点图如图 4.4（j）**所示。**

（11）**因为** $$t\cos wte\left(t\right)\leftrightarrow\frac{s^2-w^2}{\left(s^2+w^2\right)^2}$$

由拉氏变换的频移特性可得

$$te^{-at}\cos wte\left(t\right)\leftrightarrow\frac{\left(s+a\right)^2-w^2}{\left[\left(s+a\right)^2+w^2\right]^2}$$

其零极点图如图 4.4（k）**所示。**

（12）因为 $$\sin wte(t)\leftrightarrow\frac{w}{s^2+w^2}$$

即得 $$\sin ate(t)\leftrightarrow\frac{a}{s^2+a^2}$$

由 S 域积分定理可得

$$\frac{\sin at}{t}e(t)\leftrightarrow\int_s^\infty\frac{a}{s_1^2+a^2}ds_1=\int_s^\infty\frac{1}{\left(\frac{s_1}{a}\right)^2+1}d\left(\frac{s_1}{a}\right)=\arctan\frac{s_1}{a}\Big|_s^\infty=\frac{p}{2}-\arctan\left(\frac{s}{a}\right)=\arctan\left(\frac{s}{a}\right)$$

其零极点图如图 4.4（l）所示。

（13）因为 $$\sin wte(t)\leftrightarrow\frac{w}{s^2+w^2}$$

即得 $$\sin pte(t)\leftrightarrow\frac{p}{s^2+p^2}$$

由时域积分定理可得

$$\int_0^t\sin p\,tdt\ \leftrightarrow\frac{1}{s}\frac{p}{s^2+p^2}=\frac{p}{s(s^2+p^2)}$$

其零极点图如图 4.4（m）所示。

（14）因为 $$\sin wte(t)\leftrightarrow\frac{w}{s^2+w^2}$$

即得 $$\sin pte(t)\leftrightarrow\frac{p}{s^2+p^2}$$

由时域积分定理可得

$$\int_0^t\int_0^t\sin pxdxdt\ \leftrightarrow\frac{1}{s^2}\frac{p}{s^2+p^2}=\frac{p}{s^2(s^2+p^2)}$$

其零极点图如图 4.4（n）所示。

（15）因为 $$\sin wte(t)\leftrightarrow\frac{w}{s^2+w^2}$$

由拉氏变换的频移特性可得

$$e^{-at}\sin wte(t)\leftrightarrow\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$$

由拉氏变换时域微分定理可得

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-at}\sin wte(t)\right]\leftrightarrow s\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$$

其零极点图如图 4.4（0）所示。

（16）因为 $\sin(wt+q)e(t)=[\sin(wt)\cos q+\cos(wt)\sin q]e(t)$

所以 $e^{-a(t-t_0)}\sin(wt+q)e(t)=e^{at_0}\cos q\left[e^{-at}\sin(wt)e(t)\right]+e^{at_0}\sin q\left[e^{-at}\cos(wt)e(t)\right]$

又因为 $\sin wte(t)\leftrightarrow\dfrac{w}{s^2+w^2}$ $\qquad$ $\cos wte(t)\leftrightarrow\dfrac{s}{s^2+w^2}$

由拉氏变换的频移特性可得

$$e^{-at}\sin wte(t)\leftrightarrow\frac{w}{(s+a)^2+w^2}\qquad e^{-at}\cos wte(t)\leftrightarrow\frac{s}{(s+a)^2+w^2}$$

由拉氏变换的线性特性有：

$$e^{-a(t-t_0)}\sin(wt+q)e(t)\leftrightarrow e^{at_0}\frac{w\cos q+s\sin q}{(s+a)^2+w^2}$$

其零极点图如图 4.4（p）所示。

（17）因为 $\sin pte(t)\leftrightarrow\dfrac{p}{s^2+p^2}$

由拉氏变换的时域微分定理得 $\dfrac{d^2}{dt^2}[\sin pte(t)]\leftrightarrow\dfrac{ps^2}{(s^2+p^2)}$

其零极点图如图 4.4（q）所示。

（18）因为 $\dfrac{d^2\sin pt}{dt^2}e(t)=p\dfrac{d\cos pt}{dt}e(t)=-p^2\sin pte(t)$

又因为 $\sin pte(t)\leftrightarrow\dfrac{p}{s^2+p^2}$

由拉氏变换线性特性得 $\dfrac{d^2\sin pt}{dt^2}e(t)\leftrightarrow-\dfrac{p^3}{s^2+p^2}$

其零极点图如图 4.4（r）所示。

（19）因为 $\int_0^t t\sin t\,dt=-\int_0^t t\,d\cos t=-t\cos t\Big|_0^t+\int_0^t\cos t\,dt=-t\cos te(t)+\int_0^t\cos t\,dt$

由于 $t\cos te(t)\leftrightarrow\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$ $\qquad$ $\cos te(t)\leftrightarrow\dfrac{s}{s^2+1}$

由拉氏变换的时域积分特性和线性特性可得

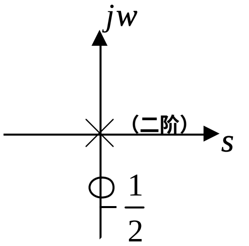
$$\int_0^t t\sin t\,dt\leftrightarrow-\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}+\frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1}=\frac{2}{(s^2+1)^2}$$

其零极点图如图 4.4（s）所示。

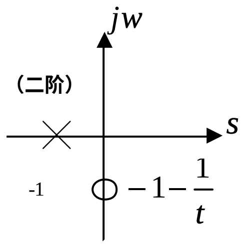
(20) 设 $f(t)\varepsilon(t)\leftrightarrow F(s)$

由拉氏变换的尺度变换特性可得 $$f\left(\frac{t}{b}\right)\varepsilon(t)\leftrightarrow bF(bs)$$

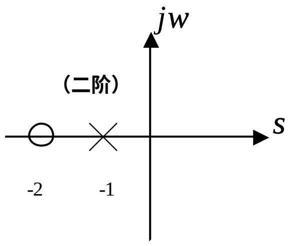
由拉氏变换的频移特性可得 $$e^{-at}f\left(\frac{t}{b}\right)\varepsilon(t)\leftrightarrow bF[b(s+a)]$$



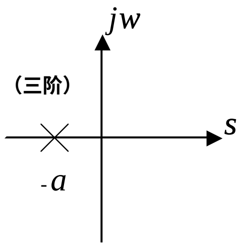
(a)



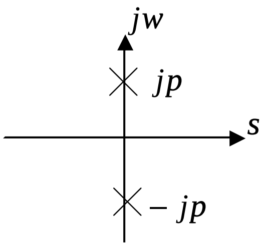
(b)



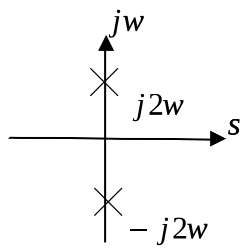
(c)



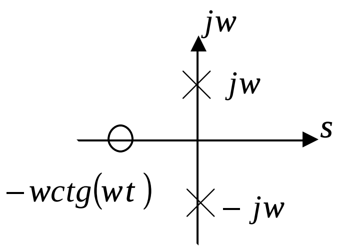
(d)



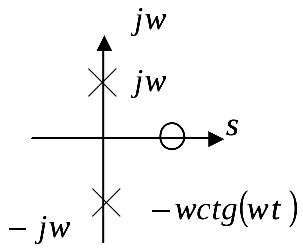
(e)



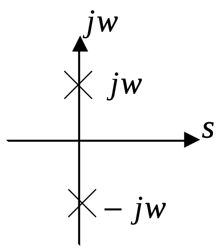
(f)



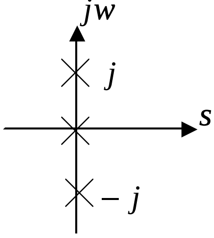
(g)



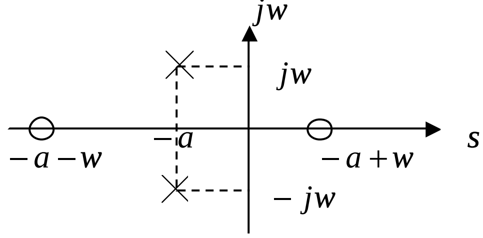
(h)



(i)



(j)



(k)

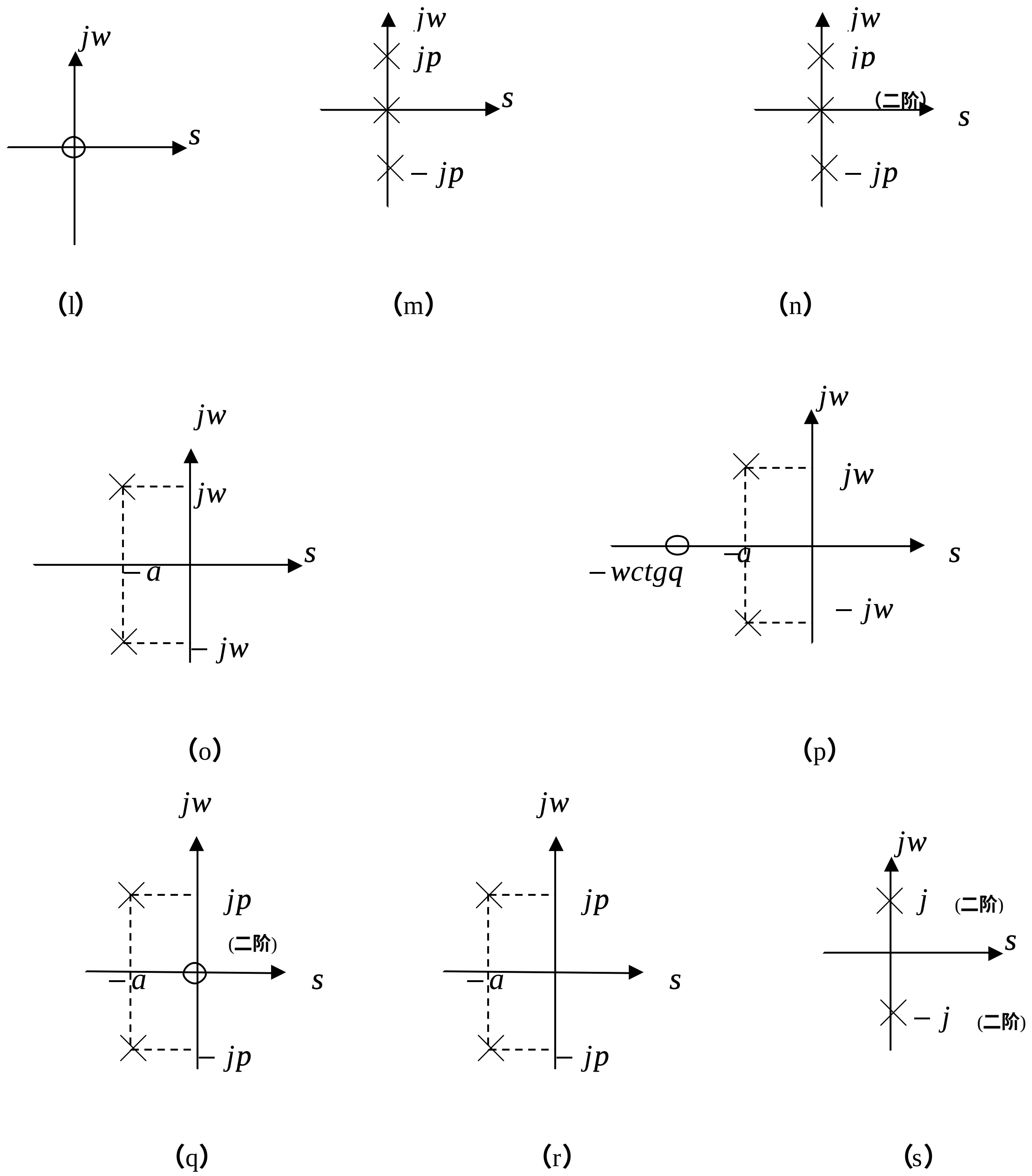


图 4.4

4.7 **求图** 4.5 **所示单边周期信号的拉氏变换。**

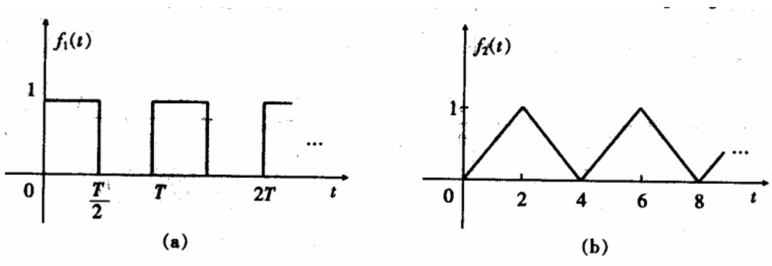


图 4.5

【知识点窍】主要考察拉普拉斯变换时移特性。

【逻辑推理】首先确定信号第一周期的信号，然后利用时移特性进行求解。即周期信号的拉普拉斯变换等于其第一周期波形的拉普拉斯变换式乘以 $\dfrac{1}{1-e^{-sT}}$。

解：(a) **该信号第一周期内波形可表示为**

$$f_0(t)=e(t)-e\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

其拉普拉斯变换式为

$$F_0(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-\frac{ST}{2}}}{s}=\frac{1-e^{-\frac{ST}{2}}}{s}$$

由拉氏变换的时移特性可得

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-ST}}F_0(s)=\frac{1-e^{-\frac{ST}{2}}}{s\left(1-e^{-ST}\right)}$$

(b) **该信号第一周期内波形可表示为**

$$f_0(t)=\frac{1}{2}te(t)-(t-2)e(t-2)+\frac{1}{2}(t-4)e(t-4)$$

其拉普拉斯变换式为

$$F_0(s)=\frac{1}{2s^2}-\frac{e^{-2S}}{s^2}+\frac{e^{-4S}}{2s^2}=\frac{1-2e^{-2S}+e^{-4S}}{2s^2}$$

由拉氏变换的时移特性可得

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{1}{1-e^{-ST}}F_0(s)=\frac{1}{1-e^{-4S}}F_0(s)\\&=\frac{1-2e^{-2S}+e^{-4S}}{2s^2\left(1-e^{-4S}\right)}\end{aligned}$$

4.8 **求下列象函数的拉氏反变换** $f(t)$。

(1) $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+2s+2}$　　(2) $F(s)=\dfrac{s^2e^{-s}}{s^2+2s+5}$　　(3) $F(s)=\dfrac{s}{(s+1)(s+2)}$

(4) $F(s)=\dfrac{s^2}{s^3+3s^2+7s+5}$　　(5) $F(s)=\ln\dfrac{s-1}{s}$　　(6) $F(s)=\dfrac{s^2-s+1}{s^3-s^2}$

【知识点窍】主要考察拉普拉斯反变换求法。

【逻辑推理】将以上式子先用部分分式展开，变成常用信号的拉氏变换，然后再进行拉氏反变

换或者利用拉氏变换的基本性质来求反变换。

解：(1) $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+2s+2}=\dfrac{s+3}{(s+1)^2+1}=\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}+\dfrac{2}{(s+1)^2+1}$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得：

$$f(t)=e^{-t}\cos te(t)+2e^{-t}\sin te(t)=e^{-t}[\cos t+2\sin t]e(t)$$

(2) $F(s)=\dfrac{s^2e^{-s}}{s^2+2s+5}=\left[1-\dfrac{2s+5}{s^2+2s+5}\right]e^{-s}=\left[1-\dfrac{2s+5}{(s+1)^2+4}\right]e^{-s}$

$$=\left[1-\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+4}\right]e^{-s}$$

$$=e^{-s}-\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4}e^{-s}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+4}e^{-s}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得：

$$f(t)=d(t-1)-2e^{-(t-1)}\cos 2(t-1)e(t-1)-\frac{3}{2}e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)e(t-1)$$

(3) $F(s)=\dfrac{s}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{K_1}{s+1}+\dfrac{K_2}{s+2}$

其中

$$K_1=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}=-1$$

$$K_2=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=2$$

所以

$$F(s)=-\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得：

$$f(t)=\left(-e^{-t}+2e^{-2t}\right)e(t)$$

(4) $F(s)=\dfrac{s^2}{s^3+3s^2+7s+5}=\dfrac{s^2}{(s+1)(s^2+2s+5)}$

$$=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+1-2j}+\frac{K_3}{s+1+2j}$$

其中

$$K_1=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}=\frac{1}{4}$$

$$K_2 = (s+1-2j)F(s)\big|_{s=-1+2j} = \frac{3+4j}{8}$$

$$K_3 = (s+1+2j)F(s)\big|_{s=-1-2j} = \frac{3-4j}{8}$$

所以

$$F(s) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{3+4j}{8}\cdot\frac{1}{s+1-2j} + \frac{3-4j}{8}\cdot\frac{1}{s+1+2j}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得：

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3+4j}{8}e^{(-1+2j)t} + \frac{3-4j}{8}e^{-(1+2j)t}\right]e(t) \\ &= \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{8}e^{-t}\left(e^{2jt}+e^{-2jt}\right) + \frac{1}{2}je^{-t}\left(e^{2jt}-e^{-2jt}\right)\right]e(t) \\ &= \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t\right]e(t) \\ &= \frac{1}{4}e^{-t}[1+3\cos 2t - 4\sin 2t]e(t) \end{aligned}$$

（5） $F(s) = \ln\frac{s-1}{s}$

则有 $$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{s}{s-1}\cdot\left(-\frac{1}{s^2}\right) = -\frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得：

$$L^{-1}\left[\frac{dF(s)}{ds}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right] = e(t) - e^{t}e(t)$$

根据拉普拉斯变换的微分特性，有：

$$-tf(t) = e(t) - e^{t}e(t)$$

则有

$$f(t) = \frac{e(t)-e^{t}e(t)}{-t} = \frac{1}{t}\left(e^{t}-1\right)e(t)$$

（6） $F(s) = \frac{s^2-s+1}{s^3-s^2} = \frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2}$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得：

$$f(t) = \left(e^{t}-t\right)e(t)$$

4.9 **求下列各象函数的原函数 $f(t)$ 的初值与终值。**

(1) $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$　　(2) $F(s)=\dfrac{s^2+5}{s(s^2+2s+4)}$　　(3) $F(s)=\dfrac{s}{s^4+5s^2+4}$

(4) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{5s^2(s-2)^3}$　　(5) $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$　　(6) $F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}$

【知识点窍】主要考察初值定理、终值定理。

【逻辑推理】若有 $f(t)\leftrightarrow F(s)$ 　$s>s_0$ 且 $f(t)$ 连续可导和 $\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$ 存在，则

$$f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

若有 $f(t)\leftrightarrow F(s)$ 　$s>s_0$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$ 存在，则

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)$$

解：初值定理的应用条件是，$F(s)$ 必须是真分式；

终值定理应用的条件是：(1) $F(s)$ 的极点必须在 s 平面的左半开平面。(2) 在 $s=0$ 处，$F(s)$ 只能有一阶极点。也就是说，终值定理只有在 $f(t)$ 有终值的情况下才能应用。例如，当 $f(t)$ 为周期函数时，终值定理就不适用了。

(1) $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}=\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

$$f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\lim_{s\to\infty}\left[1-\frac{2}{s^2+3s+2}\right]=1$$

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)=\lim_{s\to0}\left[1-\frac{2}{s^2+3s+2}\right]=0$$

(2) $F(s)=\dfrac{s^2+5}{s(s^2+2s+4)}=\dfrac{s^2+5}{s(s+1+\sqrt{3}j)(s+1-\sqrt{3}j)}$

$$f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{s^2+5}{s(s^2+2s+4)}=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2+5}{s^2+2s+4}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{1+\dfrac{5}{s^2}}{1+\dfrac{2}{s}+\dfrac{4}{s^2}}=1$$

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)=\lim_{s\to0}\frac{s^2+5}{s^2+2s+4}=\frac{5}{4}$$

（3） $F(s)=\dfrac{s}{s^4+5s^2+4}=\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$

因$F(s)$在 jw 轴上有两对共轭极点，故与$F(s)$对应的 $f(t)$不存在终值。

$$f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{s}{s^4+5s^2+4}=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{s^4+5s^2+4}$$
$$=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^2+5+\dfrac{4}{s^2}}=0$$

（4） $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{5s^2(s-2)^3}$

因$F(s)$在s平面的右半开平面上有极点$s=2$，且在$s=0$处，$F(s)$有二阶极点，故与$F(s)$对应的 $f(t)$不存在终值。

$$f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{e^{-s}}{5s^2(s-2)^3}=\lim_{s\to\infty}\frac{e^{-s}}{5s(s-2)^3}=0$$

（5） $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$

$$f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}=0$$

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}=0$$

（6） $F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}$

$$f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)=\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{s}{s+1}\right)=2$$

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)=\lim_{s\to0}\left(1+\frac{s}{s+1}\right)=1$$

4.10 **已知** LTI **因果系统的系统函数$H(s)$及输入信号 $f(t)$，求系统的响应 $y(t)$。**

（1） $H(s)=\dfrac{2s+3}{s^2+6s+8},\ f(t)=e(t)$ （2） $H(s)=\dfrac{s+4}{s(s^2+3s+2)},\ f(t)=e^{-t}e(t)$

（3） $H(s)=\dfrac{s^2+2s}{s(s^2+9)},\ f(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$　　（4） $H(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6},\ f(t)=te^{-t}\varepsilon(t)$

【知识点窍】主要考察利用拉氏变换求解系统的响应。

【逻辑推理】首先求取激励的拉氏变换，然后根据系统函数的特性求出系统响应的拉氏变换，再求其拉氏反变换即得系统的响应。

解：（1）**当** $f(t)=\varepsilon(t)$**时，有** $F(s)=\dfrac{1}{s}$

则有

$$Y(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{2s+3}{s^2+6s+8}\cdot\frac{1}{s}=\frac{2s+3}{s(s+2)(s+4)}$$
$$=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+4}$$

其中

$$K_1=sY(s)\big|_{s=0}=\frac{3}{8}$$
$$K_2=(s+2)Y(s)\big|_{s=-2}=\frac{1}{4}$$
$$K_3=(s+4)Y(s)\big|_{s=-4}=-\frac{5}{8}$$

所以

$$Y(s)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{s+4}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得系统响应为

$$y(t)=\frac{3}{8}\varepsilon(t)+\frac{1}{4}e^{-2t}\varepsilon(t)-\frac{5}{8}e^{-4t}\varepsilon(t)=\frac{1}{8}\left(3+2e^{-2t}-5e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

（2）**当** $f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$**时，有** $F(s)=\dfrac{1}{s+1}$

则有

$$Y(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{s+4}{s(s^2+3s+2)}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{s+4}{s(s+1)^2(s+2)}$$
$$=\frac{K_{11}}{(s+1)^2}+\frac{K_{12}}{s+1}+\frac{K_2}{s}+\frac{K_3}{s+2}$$

其中

$$K_{11}=(s+1)^2Y(s)\big|_{s=-1}=-3$$

$$K_{12}=\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2Y(s)\right]\Big|_{s=-1}=-1$$

$$K_2=sY(s)\big|_{s=0}=2$$

$$K_3=(s+2)Y(s)\big|_{s=-2}=-1$$

所以

$$Y(s)=\frac{-3}{(s+1)^2}+\frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s}+\frac{-1}{s+2}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得系统响应为

$$y(t)=-3te^{-t}e(t)-e^{-t}e(t)+2-e^{-2t}e(t)=\left(-3te^{-t}-e^{-t}+2-e^{-2t}\right)e(t)$$

（3）**当** $f(t)=e^{-2t}e(t)$**时，有** $F(s)=\dfrac{1}{s+2}$

则有

$$Y(s)=H(s)\cdot F(s)=H(s)=\frac{s^2+2s}{s(s^2+9)}\cdot\frac{1}{s+2}=\frac{1}{s^2+9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{s^2+9}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得系统响应为

$$y(t)=\frac{1}{3}\sin 3te(t)$$

（4）**当** $f(t)=te^{-t}e(t)$**时，有** $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}$

则有

$$Y(s)=H(s)\cdot F(s)=H(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$
$$=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+3}$$

其中

$$K_1=(s+1)Y(s)\big|_{s=-1}=\frac{1}{2}$$

$$K_2=(s+2)Y(s)\big|_{s=-2}=-1$$

$$K_3=(s+3)Y(s)\big|_{s=-3}=\frac{1}{2}$$

所以

$$Y(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得系统响应为

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right)e(t)$$

4.11 **计算下列微分方程描述的因果系统的系统函数**$H(s)$**。若系统最初是松弛的，而且** $f(t)=e(t)$**，求系统的响应** $y(t)$**。**

（1） $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f'(t)+f(t)$

（2） $y''(t)+4y'(t)+5y(t)=f'(t)$

如果 $f(t)=e^{-t}e(t)$**，系统的响应** $y(t)$**又是什么？**

【知识点窍】主要考察利用拉氏变换求解系统的响应。

【逻辑推理】首先由系统的微分方程求取系统函数，然后求出系统响应的拉氏变换，再求其拉氏反变换即得系统的响应。

解：Ⅰ.当 $f(t)=e(t)$**时，有** $F(s)=\frac{1}{s}$

（1）**由微分方程**$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f'(t)+f(t)$**，可得系统函数**

$$H(s)=\frac{s+1}{s^2+4s+3}=\frac{s+1}{(s+1)(s+3)}=\frac{1}{s+3}$$

则有

$$Y(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{s}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+3}$$

其中：

$$K_1=sY(s)\big|_{s=0}=\frac{1}{3}$$

$$K_2=(s+3)Y(s)\big|_{s=-3}=-\frac{1}{3}$$

所以

$$Y(s)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+3}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得系统响应为

$$y(t)=\frac{1}{3}e(t)-\frac{1}{3}e^{-3t}e(t)=\frac{1}{3}\left(1-e^{-3t}\right)e(t)$$

（2）**由微分方程** $y''(t)+4y'(t)+5y(t)=f'(t)$**，可得系统函数**

$$H(s)=\frac{s}{s^2+4s+5}$$

则有

$$Y(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{s}{s^2+4s+5}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2+4s+5}=\frac{1}{(s+2)^2+1}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得系统响应为

$$y(t)=e^{-2t}\sin te(t)$$

II. **当** $f(t)=e^{-t}e(t)$**时，有** $F(s)=\dfrac{1}{s+1}$

（1）**由微分方程** $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f'(t)+f(t)$**，可得系统函数**

$$H(s)=\frac{s+1}{s^2+4s+3}=\frac{s+1}{(s+1)(s+3)}=\frac{1}{s+3}$$

则有

$$Y(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+3}$$

其中：

$$K_1=(s+1)Y(s)\big|_{s=-1}=\frac{1}{2}$$

$$K_2=(s+3)Y(s)\big|_{s=-3}=-\frac{1}{2}$$

所以

$$Y(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得系统响应为

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{-t}e(t)-\frac{1}{2}e^{-3t}e(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)e(t)$$

（2）**由微分方程** $y''(t)+4y'(t)+5y(t)=f'(t)$**，可得系统函数**

$$H(s)=\frac{s}{s^2+4s+5}$$

则有

$$Y(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{s}{s^2+4s+5}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{s}{(s+1)(s^2+4s+5)}$$

$$=\frac{K_1}{s+2-j}+\frac{K_2}{s+2+j}+\frac{K_3}{s+1}$$

其中：

$$K_1=(s+2-j)Y(s)\big|_{s=-2+j}=\frac{1-3j}{4}$$

$$K_2=(s+2+j)Y(s)\big|_{s=-2-j}=\frac{1+3j}{4}$$

$$K_3=(s+1)Y(s)\big|_{s=-1}=-\frac{1}{2}$$

所以

$$Y(s)=\frac{1-3j}{4}\frac{1}{s+2-j}+\frac{1+3j}{4}\frac{1}{s+2+j}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得系统响应为

$$\begin{aligned}y(t)&=\left[\frac{1-3j}{4}e^{(-2+j)t}+\frac{1+3j}{4}e^{(-2-j)t}-\frac{1}{2}e^{-t}\right]\varepsilon(t)\\&=\left[\frac{1}{4}e^{-2t}\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)+\frac{3}{4}je^{-2t}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)-\frac{1}{2}e^{-t}\right]\varepsilon(t)\\&=\left[\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t+\frac{3}{2}e^{-2t}\sin t-\frac{1}{2}e^{-t}\right]\varepsilon(t)\end{aligned}$$

4.12 对一个 LTI 系统，已知：输入信号 $f(t)=4e^{2t}\varepsilon(-t)$；输出响应 $y(t)=e^{2t}\varepsilon(-t)+e^{-2t}\varepsilon(t)$

（1）确定系统的系统函数 $H(s)$ 及收敛域；

（2）求系统的单位冲激响应 $h(t)$；

（3）如果输入信号 $f(t)$ 为 $f(t)=e^{-t},-\infty<t<\infty$，求输出 $y(t)$。

【知识点窍】主要考察系统函数的特性。

【逻辑推理】首先分别对输入信号和输出信号进行拉氏变换，然后利用系统函数的定义确定系统系统函数，然后对其求拉氏反变换即得单位冲激响应。

解：（1）输入信号为 $f(t)=4e^{2t}\varepsilon(-t)$，则其拉氏变换为

$$F(s)=-\frac{4}{s-2}$$

$$\lim_{t\to\infty}4e^{2t}e^{-st}=\lim_{t\to\infty}4e^{(2-s)t}=0 \qquad 2-s>0$$

即收敛域为 $s<2$。

输出响应 $$y(t)=e^{2t}\varepsilon(-t)+e^{-2t}\varepsilon(t)$$

其拉普拉斯变换为 $$Y(s)=-\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}$$

$$\lim_{t\to\infty}e^{2t}e^{-st}+\lim_{t\to\infty}e^{-2t}e^{-st}=0 \qquad 2-s>0 \text{且} 2+s>0$$

即收敛域为$-2<s<2$。

所以 $$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{-\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}}{-\frac{4}{s-2}}=\frac{1}{s+2}$$

其收敛域为$-2<s<2$。

（2）根据收敛域为$-2<s<2$可得到：

$$L^{-1}[H(s)]=e^{-2|t|}$$

即单位冲激响应为 $h(t)=e^{-2|t|}$

（3）若输入信号 $f(t)$为 $f(t)=e^{-t},-\infty<t<\infty$

输入

$$\begin{aligned}y(t)&=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|t|}\cdot e^{-(t-t)}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\cdot e^{-(t-t)}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-2t}\cdot e^{-(t-t)}dt\\&=\int_{-\infty}^{0}e^{3t}\cdot e^{-t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t}\cdot e^{-t}dt=e^{-t}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{3t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t}dt\right)\\&=e^{-t}\left[\left(\frac{1}{3}e^{3t}\right)\Big|_{-\infty}^{0}+\left(-e^{-t}\right)\Big|_{0}^{\infty}\right]\\&=\frac{4}{3}e^{-t}\qquad\qquad -\infty<t<\infty\end{aligned}$$

4.13 描述某 LTI 系统的微分方程为$y'(t)+2y(t)=f'(t)+f(t)$，求下列激励下的零状态响应。

（1） $f(t)=e(t)$ （2） $f(t)=e^{-t}e(t)$

（3） $f(t)=e^{-2t}e(t)$ （4） $f(t)=te(t)$

【知识点窍】主要考察系统函数的特性。

【逻辑推理】首先由系统的微分方程求取系统函数，然后求出零状态响应的拉氏变换，再求其拉氏反变换即得系统零状态响应。

解：由微分方程可得系统函数

$$H(s)=\frac{s+1}{s+2}$$

（1） $f(t)=e(t)$，则有 $F(s)=\frac{1}{s}$

$$Y_{zs}(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{s+1}{s+2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s}$$

其中： $K_1=(s+2)Y_{zs}(s)\big|_{s=-2}=\dfrac{1}{2}$

$$K_2=sY_{zs}(s)\big|_{s=0}=\frac{1}{2}$$

所以

$$Y_{zs}(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得零状态响应为

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}e(t)+\frac{1}{2}e(t)=\frac{1}{2}\left[1+e^{-2t}\right]e(t)$$

（2） $f(t)=e^{-t}e(t)$**，则有** $F(s)=\dfrac{1}{s+1}$

$$Y_{zs}(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{s+1}{s+2}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s+2}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得零状态响应为

$$y_{zs}(t)=e^{-2t}e(t)$$

（3） $f(t)=e^{-2t}e(t)$**，则有** $F(s)=\dfrac{1}{s+2}$

$$Y_{zs}(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{s+1}{s+2}\cdot\frac{1}{s+2}=\frac{K_{11}}{(s+2)^2}+\frac{K_{12}}{s+2}$$

其中：

$$K_{11}=\left[(s+2)^2Y_{zs}(s)\right]\big|_{s=-2}=(s+1)\big|_{s=-2}=-1$$

$$K_{12}=\left\{\frac{d}{ds}\left[(s+2)^2Y_{zs}(s)\right]\right\}\bigg|_{s=-2}=1$$

所以

$$Y_{zs}(s)=\frac{-1}{(s+2)^2}+\frac{1}{s+2}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得零状态响应为

$$y_{zs}(t)=-te^{-2t}e(t)+e^{-2t}e(t)=(1-t)e^{-2t}e(t)$$

（4） $f(t)=te(t)$**，则有** $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$

$$Y_{zs}(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{s+1}{s+2}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{K_{11}}{s^2}+\frac{K_{12}}{s}+\frac{K_2}{s+2}$$

其中：

$$K_{11}=\left[s^2Y_{zs}(s)\right]_{s=0}=\left.\frac{s+1}{s+2}\right|_{s=0}=\frac{1}{2}$$

$$K_{12}=\left.\left\{\frac{d}{ds}\left[s^2Y_{zs}(s)\right]\right\}\right|_{s=0}=\frac{1}{4}$$

$$K_2=(s+2)Y_{zs}(s)\big|_{s=-2}=-\frac{1}{4}$$

所以

$$Y_{zs}(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得零状态响应为

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{2}te(t)+\frac{1}{4}e(t)-\frac{1}{4}e^{-2t}e(t)=\frac{1}{4}\left(2t+1-e^{-2t}\right)e(t)$$

4.14 **描述某 LTI 系统的微分方程为** $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+4f(t)$**，求在下列条件下的零输入响应和零状态响应。**

（1） $f(t)=e(t),y(0_-)=0,y'(0_-)=1$

（2） $f(t)=e^{-2t}e(t),y(0_-)=1,y'(0_-=1)$

【知识点窍】主要考察利用拉氏变换求解系统的响应。

【逻辑推理】首先由系统的微分方程求取系统函数，然后求出系统零状态响应的拉氏变换，再求其拉氏反变换即得系统零状态的响应。对于零输入响应其求出可以采用两种方式：利用经典解法，由微分方程特征根直接写出其形式，再代入初始条件即可求得；另外，直接将微分方程两边求拉氏变换，代入初始条件即可求零输入响应的拉氏变换，然后求其反变换即得。

解：由微分方程可得系统函数

$$H(s)=\frac{s+4}{s^2+3s+2}=\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$$

由微分方程可得其特征方程为

$$l^2+3l+2=0$$

可解得特征根为 $l_1=-1,l_2=-2$

则系统的零输入响应为 $y_{zi}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

（1）**当输入** $f(t)=e(t)$**时，有** $F(s)=\frac{1}{s}$。

则有

$$Y_{zs}(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s}-\frac{3}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得到系统的零状态响应

$$\begin{aligned}y_{zs}(t)&=2e(t)-3e^{-t}e(t)+e^{-2t}e(t)\\&=\left(2-3e^{-t}+e^{-2t}\right)e(t)\end{aligned}$$

微分方程零输入响应为 $$y_{zi}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$$

则有 $$y'_{zi}(t)=-C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t}$$

将初始条件 $y(0_-)=0, y'(0_-)=1$ 代入以上两式，有：

$$y(0_-)=C_1+C_2=0$$

$$y'(0_-)=-C_1-2C_2=1$$

由以上两式求得： $$C_1=1, C_2=-1$$

故得到系统零输入响应为

$$y_{zi}(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)e(t)$$

（2）当输入 $f(t)=e^{-2t}e(t)$ 时，有 $F(s)=\dfrac{1}{s+2}$。

则有

$$Y_{zs}(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{1}{s+2}\cdot\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

将 $Y_{zs}(s)$ 进行部分分式展开得：

$$Y_{zs}(s)=\frac{K_{11}}{(s+2)^2}+\frac{K_{12}}{s+2}+\frac{K_2}{s+1}$$

求得 $K_{11}=-2$，$K_{12}=-3$，$K_2=3$

故得

$$Y_{zs}(s)=\frac{-2}{(s+2)^2}+\frac{-3}{s+2}+\frac{3}{s+1}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得到系统的零状态响应

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= -2te^{-2t}e(t) - 3e^{-2t}e(t) + 3e^{-t}e(t) \\ &= \left[-2te^{-2t} - 3e^{-2t} + 3e^{-t}\right]e(t) \end{aligned}$$

微分方程零输入响应为 $\quad y_{zi}(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$

则有 $\quad y'_{zi}(t) = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t}$

将初始条件 $y(0_-) = 1, y'(0_-) = 1$ **代入以上两式，有：**

$$y(0_-) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0_-) = -C_1 - 2C_2 = 1$$

由以上两式求得： $\quad C_1 = 3, C_2 = -2$

故得到系统零输入响应为

$$y_{zi}(t) = \left(3e^{-t} - 2e^{-2t}\right)e(t)$$

4.15 **求下列方程所描述** LTI **系统的冲激响应** $h(t)$ **和阶跃响应** $g(t)$。

（1） $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = f'(t) - 3f(t)$

（2） $y''(t) + y'(t) + y(t) = f'(t) + f(t)$

【知识点窍】主要考察系统函数的特性。

【逻辑推理】首先由系统的微分方程求取系统函数，然后求其反拉氏变换即系统的冲激响应。利用系统函数的定义求出阶跃响应的拉氏变换，再求其反变换即得阶跃响应。

解：（1）**由微分方程可得系统函数**

$$H(s) = \frac{s-3}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s-3}{(s+1)(s+3)}$$

①系统的冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) = L^{-1}[H(s)] &= L^{-1}\left[\frac{s-3}{(s+1)(s+3)}\right] = L^{-1}\left[\frac{-2}{s+1} + \frac{3}{s+3}\right] \\ &= -2e^{-t}e(t) + 3e^{-3t}e(t) \\ &= \left(-2e^{-t} + 3e^{-3t}\right)e(t) \end{aligned}$$

②当输入 $f(t) = e(t)$ **时，有** $F(s) = \dfrac{1}{s}$**，此时响应为系统的阶跃响应（因为阶跃响应是零状态响应）。**

则有

$$Y_{zs}(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{s-3}{(s+1)(s+3)}=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+3}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得到系统的阶跃响应

$$g(t)=-e(t)+2e^{-t}e(t)-e^{-3t}e(t)=\left(2e^{-t}-e^{-3t}-1\right)e(t)$$

（2）由微分方程可得系统函数

$$H(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}=\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

①系统的冲激响应为

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=L^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]$$

$$=e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}te(t)+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}te(t)$$

$$=e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e(t)$$

②当输入 $f(t)=e(t)$时，有 $F(s)=\frac{1}{s}$，此时响应为系统的阶跃响应。

则有

$$Y_{zs}(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

将$Y_{zs}(s)$进行部分分式展开得：

$$Y_{zs}(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j}+\frac{K_3}{s+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j}$$

求得 $K_1=1$，$K_2=-\dfrac{3+\sqrt{3}j}{6}$，$K_3=\dfrac{-3+\sqrt{3}j}{6}$

故得

$$Y_{zs}(s)=\frac{1}{s}-\frac{\frac{3+\sqrt{3}j}{6}}{s+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j}-\frac{\frac{3-\sqrt{3}j}{6}}{s+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得到系统的阶跃响应

$$\begin{aligned}g(t)&=e(t)-\frac{3+\sqrt{3}j}{6}e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}e(t)-\frac{3-\sqrt{3}j}{6}e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}e(t)\\&=e(t)-\left[e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]e(t)\\&=\left[1-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]e(t)\end{aligned}$$

4.16 已知某 LTI 系统的阶跃响应 $g(t)=\left(1-e^{-2t}\right)e(t)$，欲使系统的零状态响应

$$y_{zs}(t)=\left(1-e^{-2t}+te^{-2t}\right)e(t)$$

求系统的输入信号 $f(t)$。

【知识点窍】主要考察系统函数的特性。

【逻辑推理】首先由系统的阶跃响应求取系统函数，然后根据利用系统函数的定义求出输入信号的拉氏变换，再求其反变换即得输入信号。

解：当输入 $f(t)=e(t)$时，有 $F(s)=\dfrac{1}{s}$

此时系统的响应为阶跃响应 $g(t)=\left(1-e^{-2t}\right)e(t)$

其拉氏变换为 $G(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}$

由此可得到系统函数

$$H(s)=\frac{G(s)}{F(s)}=\frac{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}}{\frac{1}{s}}=1-\frac{s}{s+2}=\frac{2}{s+2}$$

欲使系统的零状态响应为 $y_{zs}(t)=\left(1-e^{-2t}+te^{-2t}\right)e(t)$

其拉氏变换为 $$Y_{zs}(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+2)^2}$$

则有

$$F(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{H(s)}=\frac{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+2)^2}}{\frac{2}{s+2}}=\frac{s+2}{2s}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}=\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

故可得此时的系统输入信号为

$$f(t)=e(t)+\frac{1}{2}e^{-2t}e(t)=\left(1+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)e(t)$$

4.17 某 LTI 系统，当输入 $f(t)=e^{-t}e(t)$ 时其零状态响应 $y_{zs}(t)=\left(e^{-t}-2e^{-2t}+3e^{-3t}\right)e(t)$，求该系统的阶跃响应 $g(t)$。

【知识点窍】主要考察系统函数的特性。

【逻辑推理】首先由输入信号和零状态响应求取系统函数，利用系统函数的定义求出阶跃响应的拉氏变换，再求其反变换即得阶跃响应。

解：当输入 $f(t)=e^{-t}e(t)$ 时，有 $F(s)=\frac{1}{s+1}$

此时，零状态响应

$$y_{zs}(t)=\left(e^{-t}-2e^{-2t}+3e^{-3t}\right)e(t)$$

其拉氏变换为

$$Y_{zs}(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{3}{s+3}$$

由此得到系统函数

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{3}{s+3}}{\frac{1}{s+1}}=1-\frac{2(s+1)}{s+2}+\frac{3(s+1)}{s+3}=2+\frac{2}{s+2}-\frac{6}{s+3}$$

当输入 $f(t)=e(t)$ 时，有 $F(s)=\frac{1}{s}$

此时系统响应即为阶跃响应

$$G(s)=F(s)H(s)=\frac{1}{s}\left(2+\frac{2}{s+2}-\frac{6}{s+3}\right)=\frac{2}{s}+\frac{2}{s(s+2)}-\frac{6}{s(s+3)}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s+3}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即得到系统的阶跃响应

$$g(t)=e(t)-e^{-2t}e(t)+2e^{-3t}e(t)=\left(1-e^{-2t}+2e^{-3t}\right)e(t)$$

4.18 电路如图 4.6 所示。在 $t=0$ 之前开关 K 位于“1”端，电路已进入稳态，$t=0$ 时刻开关从“1”转至“2”，试求 $u_c(t), i_c(t)$。

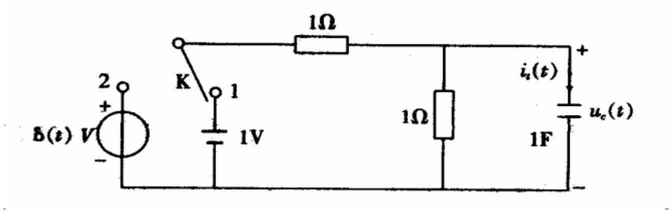


图 4.6

【知识点窍】主要考察利用拉氏变换求电路回路响应。

【逻辑推理】对于这方面题可以采用两种方法：方法一，根据电路图直接写出拉氏变换等效电路图，然后再利用回路之间关系求解；方法二，根据电路图直接写出微分方程，再对微分方程求拉氏变换即可求解。

解：方法一：先列出系数的微分方程，再用拉氏变换求解。

以 $u_c(t)$ 作为输出写出系统的微分方程如下：

$$\frac{d}{dt}u_c(t)+2u_c(t)=e(t)$$

本例属于具有非零初始值的系统求完全响应的问题，为此需采用单边拉氏变换的 0^- 系统，即将初始值包含在变换式中，并避免求 0^- 到 0^+ 的跳变。但采用 0^- 系统积分的下限是 0^-，因而微分方程必须描述 0^- 至 ∞ 的系统行为。一般为了方便，让微分方程能在 $-\infty<t<\infty$ 的范围内描述系统，所以激励 $e(t)$ 应为

$$e(t)=d(t)+e(-t)$$

于是微分方程为

$$\frac{d}{dt}u_c(t)+2u_c(t)=d(t)+e(-t)$$

两边进行拉氏变换得

$$sU(s)-u_c(0^-)+2U(s)=1$$

由题可知 $u_c(0^-)=\frac{1}{2}$ **，有** $$U(s)=\frac{\frac{3}{2}}{s+2}$$

所以

$$u_c(t)=\frac{3}{2}\cdot e^{-2t}e(t)$$

$$I(s)=sU(s)-u_c(0^-)=1-\frac{3}{s+2}$$

故

$$i_c(t)=d(t)-3e^{-2t}e(t)$$

在本例中，若认为 $e(t)=d(t)$ **也能得到一致的结果，这是因为** $e(-t)$ **的拉氏变换为** 0**。但方程没有正确描述** $t<0$ **的情况，对于拉氏变换的** 0^- **下限没有保证，这样可能会导致错误。如本例先计算** $i_c(t)$ **便会如此。**

以 $i_c(t)$ **为输出的微分方程为**

$$\frac{d}{dt}i_c(t)+2i_c(t)=\frac{d}{dt}e(t)$$

取 $e(t)=d(t)+e(-t)$ **代入方程得**

$$\frac{d}{dt}i_c(t)+2i_c(t)=d'(t)-d(t)$$

两边进行拉氏变换

$$sI(s)+2I(s)=s-1$$

$$I(s)=\frac{s-1}{s+2}$$

$$i_c(t)=d(t)-3e^{-2t}e(t)$$

这时认为 $e(t)=d(t)$ **则会得出不正确的结果。**

方法二：画出 S **域模型如图** 4.7 **所示。**

由 S **域中的** KVL **可写出方程**

$$\frac{1}{s}I_c(s)+\frac{1}{s}u_c(0^-)-[I(s)-I_c(s)]=0$$

$$I(s)+[I(s)-I_c(s)]=E(s)$$

其中 $E(s)=L[d(t)]=1$ $u_c(0)=\frac{1}{2}$ **，将其代入上面两式，由此可得**

$$I_c(s)=\frac{s-1}{s+2}$$

对其求拉氏反变换可得： $i_c(t)=d(t)-3e^{-2t}e(t)$

由图 4.7 **可得：**

$$U_c(s)=\frac{1}{s}I_c(s)+\frac{1}{s}u_c(0^-)=\frac{s-1}{s(s+2)}+\frac{1}{2s}=\frac{3/2}{s+2}$$

对其求拉氏反变换可得： $u_c(t)=\frac{3}{2}\cdot e^{-2t}e(t)$

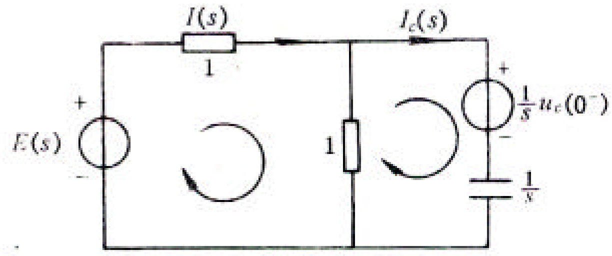
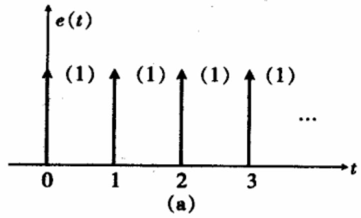


图 4.7

4.19 **已知如图** 4.8（b）**所示** RC **电路，激励信号** $e(t)=\sum_{n=0}^{\infty}d(t-n)$**，波形如习题图** 4.8（a）**所示，试求零状态响应** $u_c(t)$**，并指出瞬态响应分量和稳态响应分量。**



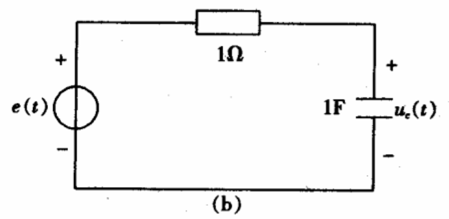


图 4.8

【知识点窍】主要考察利用拉氏变换求电路回路响应。

【逻辑推理】先求出激励的拉氏变换和利用电路写出回路方程，求出其零状态响应拉氏变换，然后对其求反变换即得零状态响应。

解：由图 4.8（a）**可得：**

$$E(s)=L\left[\sum_{n=0}^{\infty}d(t-n)\right]=\frac{1}{1-e^{-s}}=1+e^{-s}+e^{-2s}+\cdots$$

由图 4.8（b）**可得：**

$$U(s)=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}E(s)=\frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}=\frac{1}{s+1}+\frac{e^{-s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s+1}+\cdots$$

所以

$$u_c(t)=L^{-1}[U(s)]=e^{-t}e(t)+e^{-(t-1)}e(t-1)+e^{-(t-2)}e(t-1)+\cdots$$

瞬态响应和稳态响应分量可由其拉氏变换极点的位置来判断，因而需对$U(s)$**分母进行因式分解，再利用部分分式展开法求出相应的分量。**

因式$(1-e^{-s})$**对应这极点**$s=j2np\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$**，于是有：**

$$U(s)=\frac{1}{(s+1)s(s-j2p)(s+j2p)\cdots(s-j2np)(s+j2np)\cdots}$$
$$=\frac{B}{s+1}+\frac{A_0}{s}+\frac{A_{11}}{s-j2p}+\frac{A_{12}}{s+j2p}+\cdots+\frac{A_{n1}}{s-j2np}+\frac{A_{n2}}{s+j2np}+\cdots$$

式中

$$B=(s+1)\frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}\bigg|_{s=-1}=\frac{1}{1-e}$$

$$A=s\frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}\bigg|_{s=0}=\frac{\frac{d}{ds}s}{\frac{d}{ds}[(s+1)(1-e^{-s})]}\Bigg|_{s=0}=1$$

$$A_{n1}=(s-j2np)\frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}\bigg|_{s=j2np}=\frac{\frac{d}{ds}(s-j2np)}{\frac{d}{ds}[(s+1)(1-e^{-s})]}\Bigg|_{s=j2np}=\frac{1}{1+j2np}$$

$$A_{n2}=\frac{1}{1-j2np}$$

于是

$$U(s)=\frac{1}{1-e}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s}+\frac{1}{1+j2p}\cdot\frac{1}{s-j2p}+\frac{1}{1-j2p}\cdot\frac{1}{s+j2p}+\cdots$$
$$+\frac{1}{1+j2np}\cdot\frac{1}{s-j2np}+\frac{1}{1-j2np}\cdot\frac{1}{s+j2np}+\cdots$$

故

$$u_c(t)=\frac{1}{1-e}e^{-t}e(t)+e(t)+\frac{1}{1+j2p}e^{j2pt}e(t)+\frac{1}{1-j2p}e^{-j2pt}+\cdots$$
$$+\frac{1}{1+j2np}e^{j2npt}e(t)+\frac{1}{1-j2np}e^{-j2npt}+\cdots$$
$$=\underbrace{\frac{1}{1-e}e^{-t}e(t)}_{\text{瞬态响应}}$$
$$\underbrace{+e(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{1+(2np)^2}}\cos(2npt-arctg2np)e(t)}_{\text{稳态响应}}$$

4.20 **电路如图** 4.9 **所示，在** $t=0$ **以前开关** K **位于“** 1 **”，且电路已达到稳态。** $t=0$ **时刻开关倒向“** 2 **”。试求对于下列** e_1,e_2 **时电容两端电压** $u_c(t)$ **：**

（1） $e_1=0V, e_2=e^{-2t}e(t)$ （2） $e_1=1V, e_2=0V$

（3） $e_1=1V, e_2=e^{-2t}e(t)$ （4） $e_1=1V, e_2=2V$

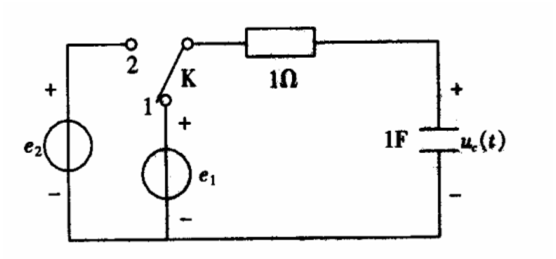


图 4.9

【知识点窍】主要考察利用拉氏变换求电路回路响应。

【逻辑推理】先画出运算形式的等效电路图，写出回路方程，再进行拉氏反变换。

解：利用电路元件的 s **域模型。**

图 4.9 **的** s **域模型如图** 4.10 **所示。**

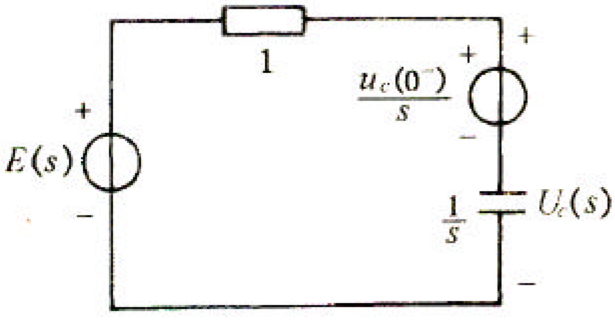


图 4.10

在这里以 $U_C(s)$ **作为输出，而不是以** $I_C(s)$ **，根据** s **域中的** KVL **可得：**

$$U_C(s)+1\cdot\frac{\left[U_C(s)-\frac{u_c(0^-)}{s}\right]}{\frac{1}{s}}=E(s)$$

所以 $$U_C(s)=\frac{E(s)+u_c(0^-)}{s+1}=\frac{E(s)}{s+1}+\frac{u_c(0^-)}{s+1}$$

式中 $\frac{E(s)}{s+1}$ **对应零状态响应的拉氏变换，** $\frac{u_c(0^-)}{s+1}$ **对应零输入响应的拉氏变换，组合起来形成全响应。**

（1） $e_1=0V,\ e_2=e^{-2t}e(t)$**时，** $u_{c1}(t)$ **为零状态响应**

$$u_c(0^-)=e_1=0$$

$$E(s)=L[e_2(t)]=\frac{1}{s+2}$$

所以

$$u_{c1}(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$u_{c1}(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)e(t)$$

（2） $e_1=1V, e_2=0V$ **时，** $u_{c2}(t)$ **为零输入响应**

$$u_c(0^-)=e_1=1$$

$$E(s)=0$$

所以

$$u_{c2}(s)=\frac{u_c(0^-)}{s+1}=\frac{1}{s+1}$$

$$u_{c2}(t)=e^{-t}e(t)$$

（3） $e_1=1V, e_2=e^{-2t}e(t)$**时，** $u_{c3}(t)$ **为全响应**

$$u_c(0^-)=e_1=1$$

$$E(s)=L[e_2(t)]=\frac{1}{s+2}$$

所以

$$u_{c3}(s)=\frac{E(s)}{s+1}+\frac{u_c(0^-)}{s+1}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$u_{c3}(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

可见 $$u_{c3}(t)=u_{c1}(t)+u_{c2}(t)$$

即全响应等于零输入响应和零状态响应之和。

因为$u_{c3}(s)$**的极点均在**s**左半开平面，利用终值定理可求得**

$$u_{c3}(\infty)=\lim_{t\to\infty}u_{c3}(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=0$$

（4） $e_1=1V,e_2=2V$ **时，全响应为**$u_{c4}(t)$

$$u_c(0^-)=e_1=1$$

$$E(s)=L[e_2(t)]=\frac{2}{s}$$

所以

$$u_{c4}(s)=\frac{2}{s(s+1)}+\frac{1}{s+1}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+1}=\frac{s+2}{s(s+1)}$$

特别地，当$e_1=1V,e_2=1V$ **时有**$u_c(t)=e(t)$

$$u_{c4}(\infty)=\lim_{t\to\infty}u_{c4}(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{s+2}{s(s+1)}=2$$

由（3），（4）可知利用终值定理求得电容电压的终值与电路的实际观察是一致的。

4.21 **如图** 4.11 **所示双口网络，已知其** s **域阻抗矩阵为** $Z(s)=\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$**，且**

$R_L=1\Omega,R_s=2\Omega$**，试求输出电压的冲激响应**$h(t)$**。**

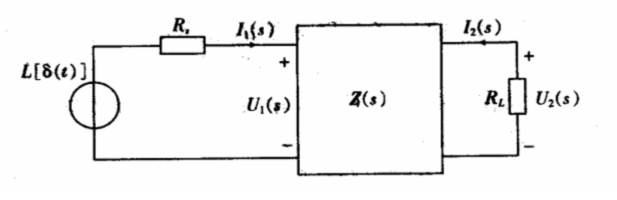


图 4.11

【知识点窍】主要考察利用拉氏变换求电路回路响应。

【逻辑推理】利用运算形式的等效电路图，写出回路方程，再进行拉氏反变换。

解：由图 4.11 可得：

$$U_1(s)=1-R_S I_1(s) \quad ①$$

$$I_2(s)=\frac{U_2(s)}{R_L} \quad ②$$

因双口网络的 z 参数已知，故可写出 z 方程为

$$U_1(s)=z_{11}I_1(s)+z_{12}I_2(s) \quad ③$$

$$U_2(s)=z_{21}I_1(s)+z_{22}I_2(s) \quad ④$$

将式①代入式③中得到： $I_1(s)=\dfrac{1-z_{12}I_2(s)}{R_S+z_{11}}$ ⑤

将式②和式⑤代入式④中得到：

$$U_2(s)=\frac{z_{21}R_L}{z_{22}z_{11}-z_{21}z_{12}+z_{22}R_S+z_{11}R_L+R_S R_L} \quad ⑥$$

将 R_S，R_L 代入式⑥得：

$$U_2(s)=\frac{s+1}{2s^2+8s+7}$$

$$H(s)=U_2(s)=\frac{s+1}{2\left(s+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(s+2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{s+2+\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{1-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{s+2-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

所以该双口网络的冲激响应为

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=\frac{s+1}{2\left(s+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(s+2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$=\left[\frac{1+\sqrt{2}}{4}e^{-\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)t}+\frac{1-\sqrt{2}}{4}e^{-\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)t}\right]e(t)$$

4.22 **如图** 4.12 **所示零状态电路，图中** $ku_2(t)$ **是受控源，试求：**

（1）**系统函数** $H(s)=\dfrac{U_3(s)}{U_1(s)}$；

（2）k **为何值时系统稳定；**

（3）**取** $k=2, u_1(t)=\sin te(t)$ **时，求响应** $u_3(t)$；

（4）**取** $k=3, u_1(t)=\cos te(t)$ **时，求响应** $u_3(t)$；

（5）**取** $k=3, u_1(t)=\cos 2te(t)$ **时，求响应** $u_3(t)$。

【知识点窍】主要考察利用拉氏变换求电路回路响应。

【逻辑推理】先画出运算形式的等效电路图，写出回路方程，再进行拉氏反变换。

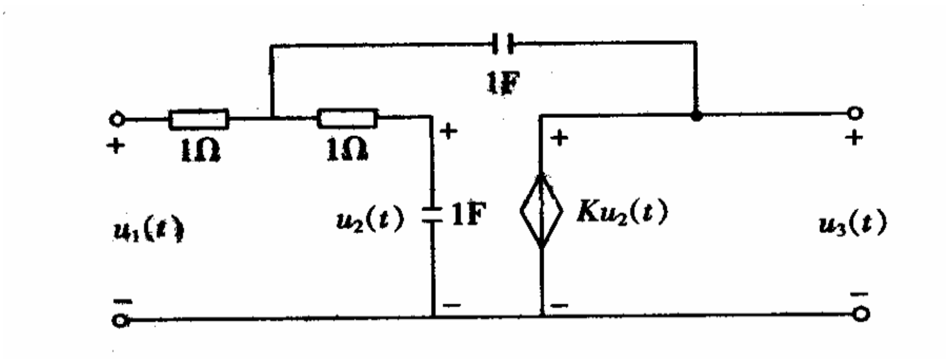


图 4.12

解：

（1）**当** $t>0$ **时的** s **域电路如图** 4.13 **所示。以** $I_1(s)$、$I_2(s)$ **为变量对两个网孔列** KVL **方程为：**

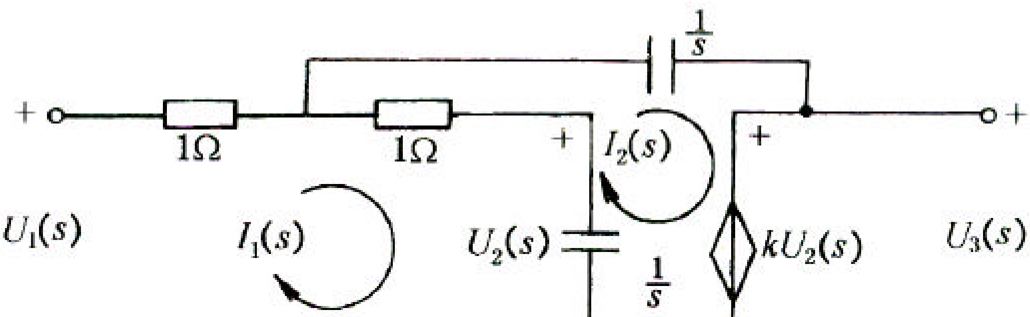


图 4.13

$$\left(1+1+\frac{1}{s}\right)I_1(s)-\left(1+\frac{1}{s}\right)I_2(s)=U_1(s)$$

$$-\left(1+\frac{1}{s}\right)I_1(s)+\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\right)I_2(s)=-kU_2(s)$$

又有

$$U_2(s)=\frac{1}{s}[I_1(s)-I_2(s)]$$

$$U_3(s)=kU_2(s)$$

整理以上四式，并联解得

$$U_3(s)=\frac{k}{s^2+(3-k)s+1}U_1(s)$$

即有

$$H(s)=\frac{U_3(s)}{U_1(s)}=\frac{k}{s^2+(3-k)s+1}$$

（2）**若** $H(s)$ **的极点全部位于** s **平面的左半开平面，系统就是稳定的。**

欲使整个系统稳定，则必须有 $3-k>0$ **，故得** $k<3$

（3）**取** $k=2, u_1(t)=\sin te(t)$ **时，有**

$$U_3(s)=\frac{2}{s^2+s+1}U_1(s)$$

$$U_1(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

将 $U_1(s)=\frac{1}{s^2+1}$ **代入** $U_3(s)$ **中，得到：**

$$U_3(s)=\frac{2}{s^2+s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$=2\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{s}{s^2+1}\right]$$

故得

$$u_3(t)=2e^{-\frac{1}{2}t}\left[cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]e(t)-2coste(t)$$

（4）**取** $k=3, u_1(t)=\cos te(t)$ **时，有**

$$U_3(s)=\frac{3}{s^2+1}U_1(s)$$

$$U_1(s)=\frac{s}{s^2+1}$$

将 $U_1(s)=\frac{s}{s^2+1}$ **代入** $U_3(s)$ **中，得到：**

$$U_3(s)=\frac{3}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

故得

$$u_3(t)=\frac{3}{2}t\sin te(t)$$

（5）**取**$k=3,u_1(t)=\cos 2te(t)$**时，有**

$$U_3(s)=\frac{3}{s^2+1}U_1(s)$$
$$U_1(s)=\frac{s}{s^2+4}$$

将$U_1(s)=\dfrac{s}{s^2+4}$**代入**$U_3(s)$**中，得到：**

$$U_3(s)=\frac{3}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+4}=\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}$$

故得

$$u_3(t)=(\cos t-\cos 2t)e(t)$$

第五章　离散时间系统的时域与频域分析

5.1　学习重点

1、 深刻理解离散时间系统的基本概念，学会建立离散系统的数学模型—— 差分方程。

2、掌握离散时间系统的时域分析方法，灵活应用迭代法、经典法求解单位响应、 单位阶跃响应、 零输入响应、 零状态响应和全响应等。

3、 理解卷积和的定义，掌握求解卷积和的方法，包括图解法、 阵列表法和解析法等；会用卷积和求零状态响应。

4、了解周期离散时间信号的离散傅里叶级数的表示方法，非周期离散时间信号的离散时间傅里叶变换以及周期序列的离散时间傅里叶变换。

5、 熟悉离散时间傅里叶变换的性质，并会灵活应用。

6、 掌握离散时间LTI 系统的频域分析方法。

7、 用MATLAB 进行离散时间系统的时域与频域分析

5.2　教材习题同步解析

5.1 设信号 $f(t)$ 为包含 $0\sim w_m$ 的频带有限信号，试确定 $f(3t)$ 的抽样频率。

【知识点窍】 主要考察奈奎斯特频率的概念。

【逻辑推理】 时域的信号的压缩在频域中将会扩展。时域中压缩多少培，频域中将扩展多少培。另外，抽样频率等于奈奎斯特频率与 $2p$ 之比。

解：因为信号 $f(t)$ 为包含 $0\sim w_m$ 的频带有限信号，则信号 $f(3t)$ 为包含 $0\sim 3w_m$ 的频带有限信号。

则其奈奎斯特频率 $\Omega_N = 2\times 3w_m$，故 $f(3t)$ 的抽样频率 $f_s \geq \frac{\Omega_N}{2p} = \frac{3w_m}{p}$。

5.2 若电视信号占有的频带为 1~6MHz ，电视台每秒发送 25 幅图像，每幅图像又分为 625 条水平扫描线，问每条水平线至少要有多少个抽样点？

【知识点窍】主要考察香农取样定理及理想取样点数求法。

【逻辑推理】最小取样频率 $f_{s\min} = 2f_m$ （等于 2 倍的信号最高频率）。

香农取样间隔 $T_{s\max} = \frac{1}{f_{s\min}}$

最小理想取样点数 $n_{\min} = \frac{t(\text{时间间隔})}{T_{s\max}}$

解：电视信号占有的频带为 1~6MHz，即带宽为 $f_m = 5\text{MHz}$，

则抽样频率为 $f_s \geq 10\text{MHz}$。

抽样点的个数为 $n = \frac{25f_s}{625} = 4000$ 个

5.3 设有差分方程为 $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]= f[n]$，初始状态 $y[-1]=-\frac{1}{2},\quad y[-2]=\frac{5}{4}$，试求系统的零输入响应。

【知识点窍】主要考察系统零输入响应的概念，会用特征值求零输入响应。

【逻辑推理】首先由差分方程得到特征方程，由此求出特征根，然后代入初始条件求出零输入响应。

解：由差分方程得其特征方程为 $l^2+3l+2=0$

由此解得其特征根 $l_1=-1, l_2=-2$。

故系统的零输入响应为

$$y_{zi}[n]= A_1(-1)^n + A_2(-2)^n$$

将初始状态 $y[-1]=-\frac{1}{2},\quad y[-2]=\frac{5}{4}$ 代入上式，有：

$$y[-1]= y_{zi}[-1]= A_1(-1)^{-1} + A_2(-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$$

$$y[-2]= y_{zi}[-2]= A_1(-1)^{-2} + A_2(-2)^{-2} = \frac{5}{4}$$

联立以上两式可解得： $A_1 = 2$，$A_2 = -3$

则系统的零输入响应为

$$y_{zi}[n] = 2(-1)^n - 3(-2)^n$$

5.4 **设有离散系统的差分方程为** $y[n] + 4y[n-1] + 3y[n-2] = 4f[n] + f[n-1]$**，试画出其时域模拟图。**

【知识点窍】主要考察由系统的差分方程画出系统的直接模拟图，掌握直接模拟图的意义。

【逻辑推理】将差分方程各个环节分别用加法器及延时器来表示。

解：时域模拟图如图 5.1

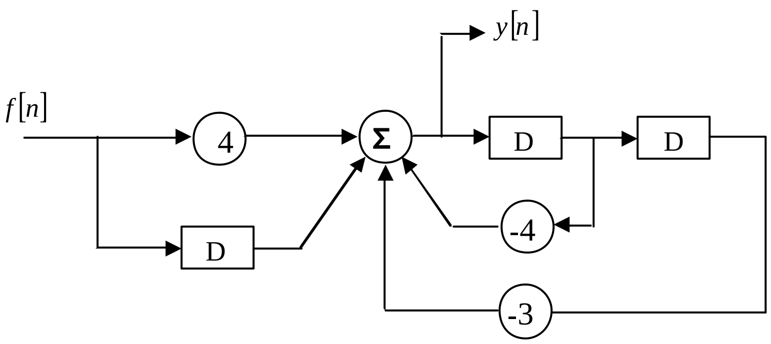


图 5.1

5.5 **设有一阶系统为**

$$y[n] - 0.8y[n-1] = f[n]$$

（1）**试求单位响应** $h[n]$**；**

（2）**试求阶跃响应** $g[n]$**。**

【知识点窍】主要考察系统的单位响应和阶跃响应的概念及其求解方法。

【逻辑推理】利用迭代法求解。

解：（1）**令输入激励** $f[n] = d[n]$**，系统在冲激序列** $d[n]$ **的激励下的零状态响应就为单位响应** $h[n]$**。即隐含初始条件为** $n < 0$ **时** $h[n] = 0$

则给定的差分方程变为

$$h[n] = 0.8h[n-1] + d[n]$$

可依次迭代得

$$
\begin{aligned}
h[0] &= 0.8h[-1] + d[0] = 1 \\
h[1] &= 0.8h[0] + d[1] = 0.8 \\
h[2] &= 0.8h[1] + d[2] = 0.8^2 \\
&\cdots \\
h[n] &= 0.8h[n-1] + 0 = 0.8^n
\end{aligned}
$$

该一阶系统的单位响应是

$$h[n] = 0.8^n e[n]$$

（2）令输入激励 $f[n] = e[n]$，系统在阶跃序列$e[n]$的激励下的零状态响应就为单位阶跃响应 $g[n]$。

即隐含初始条件为$n < 0$时 $g[n] = 0$。

则给定的差分方程变为

$$g[n] = 0.8g[n-1] + e[n]$$

可依次迭代得

$$
\begin{aligned}
g[0] &= 0.8g[-1] + e[0] = 1 \\
g[1] &= 0.8g[0] + e[1] = 0.8 + 1 \\
g[2] &= 0.8g[1] + e[2] = 0.8^2 + 0.8 + 1 \\
&\cdots \\
g[n] &= 0.8g[n-1] + e[n] = 0.8^n + 0.8^{n-1} + \cdots + 0.8^2 + 0.8 + 1 \\
&= \frac{1 - 0.8^{n+1}}{1 - 0.8} \\
&= 5\left(1 - 0.8^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

则该一阶系统的单位响应是

$$g[n] = 5\left(1 - 0.8^{n+1}\right)e[n]$$

5.6 **设离散系统的单位响应为$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n e[n]$，输入信号为 $f[n] = 2^n$，试求** $f[n] * h[n]$。

【知识点窍】主要考察离散系统的卷积和概念及计算方法

【逻辑推理】卷积和计算方法通常有：1）图解计算法

卷积和的图解计算法是把取卷积的过程分解为反褶、平移、相乘、求和四个步骤。具体求序列的卷积和 $f_1[n] * f_2[n]$ 按下述步骤进行：

①将序列 $f_1[n]$、$f_2[n]$的自变量用i替换，然后将序列 $f_2[i]$ 以纵坐标为轴线反褶，成为 $f_2[-i]$；

②将序列 $f_2[-i]$ 沿正 n 轴平移 n 个单位，成为 $f_2[n-i]$；

③求乘积 $f_1[i]f_2[n-i]$；

④按式 $f_1[n]*f_2[n]=\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}f_1[i]f_2[n-i]$ 求出各乘积之和。

2）阵列表法

3）解析法：利用卷积和定义求解。

解：$f[n]*h[n]=\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}h[i]f[n-i]=\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i e[i]2^{n-i}=2^n\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^i$

上式是公比为 $\frac{1}{6}$ 的等比无穷级数求和的问题，按求和公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a}$$

所以

$$f[n]*h[n]=2^n\cdot\frac{6}{5}e[n]=\frac{3}{5}\cdot 2^{n+1}e[n]$$

5.7　已知系统的的响应

$$h[n]=a^n e[n]\qquad (0<a<1)$$

输入信号 $f[n]=e[n]-e[n-6]$，试求系统的零状态响应。

【知识点窍】主要考察离散系统的零状态响应概念及求解。

【逻辑推理】利用系统的零状态响应的卷积和求解。即：$y_{zs}[n]=f[n]*h[n]$

解：因为

$$a^n e[n]*e[n]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a^i e[i]\cdot e[n-i]=\sum_{i=0}^{n}a^i=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}e[n]$$

同理可得

$$a^n e[n]*e[n-6]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a^i e[i]\cdot e[n-6-i]=\sum_{i=0}^{n-6}a^i=\frac{1-a^{n-5}}{1-a}e[n-6]$$

故系统的零状态响应为

$$\begin{aligned}y_{zs}[n]&=f[n]*h[n]=a^n e[n]*(e[n]-e[n-6])\\&=a^n e[n]*e[n]-a^n e[n]*e[n-6]\end{aligned}$$

$$=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}e[n]-\frac{1-a^{n-5}}{1-a}e[n-6]$$

5.8　**描述某线性非时变离散系统的差分方程为** $y[n]-2y[n-1]=f[n]$**，若已知初始状态** $y[-1]=0$**，激励为单位阶跃序列，即** $f[n]=e[n]$**，试求** $y[n]$**。**

【知识点窍】主要考察系统的阶跃响应的概念及其求解方法。

【逻辑推理】利用迭代法求解。

解：由给定的差分方程变得　$y[n]=2y[n-1]+f[n]$

因为激励为 $f[n]=e[n]$**，所以当** $n<0$ **时**　$f[n]=0$

可依次迭代得

$$
\begin{aligned}
y[0]&=2y[-1]+e[0]=1\\
y[1]&=2y[0]+1=3\\
y[2]&=2y[1]+1=7\\
y[3]&=2y[2]+1=15\\
&\cdots\\
y[n]&=2y[n-1]+1=2^{n+1}-1
\end{aligned}
$$

求得

$$y[n]=\left(2^{n+1}-1\right)e[n]$$

5.9　**如有齐次差分方程为** $y[n]+y[n-1]-6y[n-2]=0$**，已知** $y[0]=3, y[1]=1$**，试求其齐次解。**

【知识点窍】主要考察系统的齐次解的概念及其求解方法。

【逻辑推理】首先通过差分方程得特征方程，由特征方程求得特征根，代入条件即可求得齐次解。

解：其特征方程为　$l^2+l-6=0$

其特征根 $l_1=-3, l_2=2$**。其齐次解为**

$$y_h[n]=A_1(-3)^n+A_2(2)^n$$

将初始状态 $y[0]=3, y[1]=1$ **代入上式，有：**

$$y[0]=y_h[0]=A_1(-3)^0+A_2(2)^0=3$$

$$y[1]=y_h[1]=-3A_1+2A_2=1$$

联立以上两式可解得： $A_1=1$**，** $A_2=2$

于是齐次解为

$$y_h[n]=(-3)^n+2^{n+1}$$

5.10　**如有齐次差分方程为** $y[n]+4y[n-1]+4y[n-2]=0$ **，已知** $y[0]=y[1]=-2$ **，试求其齐次解。**

【知识点窍】主要考察系统的齐次解的概念及其求解方法。

【逻辑推理】首先通过差分方程得特征方程，由特征方程求得特征根，代入条件即可求得齐次解。

解：其特征方程为 $l^2+4l+4=0$

其特征根 $l_{1,2}=-2$ **。其齐次解为**

$$y_h[n]=A_1n(-2)^n+A_2(-2)^n$$

将初始状态 $y[0]=y[1]=-2$ **代入上式，有：**

$$y[0]=y_h[0]=A_2=-2$$

$$y[1]=y_h[1]=-2A_1-2A_2=-2$$

联立以上两式可解得： $A_1=3$**，** $A_2=-2$

于是齐次解为

$$y_h[n]=3n(-2)^n+(-2)^{n+1}$$

5.11　**解下列非齐次差分方程**

(1) $y[n]+2y[n-1]=f[n],\ f[n]=(n-2)e[n],\ f[0]=1$

(2) $y[n]-2y[n-1]=f[n],\ f[n]=2e[n],\ y[0]=0$

(3) $y[n]+2y[n-1]+y[n-2]=f[n],\ f[n]=\dfrac{4}{3}(3)^n e[n],\ y[0]=y[-1]=0$

【知识点窍】主要考察系统差分方程的求解方法。

【逻辑推理】差分方程的解由齐次解 $y_h[n]$ **和特解** $y_p[n]$ **构成，即**

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]。$$

解：(1）首先，求方程的齐次解。

其特征方程为 $l+2=0$

其特征根 $l=-2$ **。方程的齐次解为**

$$y_h[n] = A_1(-2)^n$$

根据激励 $f[n] = (n-2)e[n]$**的形式，得方程的特解**

$$y_p[n] = P_1 n + P_0$$

将它代入到原差分方程中，得

$$P_1 n + P_0 + 2[P_1(n-1) + P_0] = n - 2$$

等式左右对应，即得 $P_1 = \dfrac{1}{3}$**，** $P_0 = -\dfrac{4}{9}$

于是方程的特解为 $\qquad y_p[n] = \dfrac{1}{3}n - \dfrac{4}{9}$

将齐次解与特解相加，得方程的全解

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = A_1(-2)^n + \frac{1}{3}n - \frac{4}{9}$$

因 $f[0] = 1$**，则有** $y[0] = f[0] - 2y[-1] = 1$

将初始状态 $y[0] = 1$**代入** $y[n]$**式，得** $\quad A_1 = \dfrac{13}{9}$

所以方程的解为

$$y[n] = \frac{13}{9}(-2)^n + \frac{1}{3}n - \frac{4}{9}$$

（2）**首先，求方程的齐次解。**

其特征方程为 $\qquad l - 2 = 0$

其特征根 $l = 2$**。方程的齐次解为**

$$y_h[n] = A_1(2)^n$$

根据激励 $f[n] = 2e[n]$**的形式，得方程的特解**

$$y_p[n] = P$$

将它代入到原差分方程中，得

$$P - 2P = 2$$

等式左右对应，即得 $P = -2$

于是方程的特解为 $\qquad y_p[n] = -2$

将齐次解与特解相加，得方程的全解

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = A_1(2)^n - 2$$

将初始状态 $y[0]=0$ 代入上式，得 $A_1=2$

所以方程的解为

$$y[n]=2\cdot(2)^n-2=2[(2)^n-1]$$

（3）首先，求方程的齐次解。

其特征方程为 $l^2+2l+1=0$

其特征根 $l_{1,2}=-1$。方程的齐次解为

$$y_h[n]=A_1n(-1)^n+A_2(-1)^n$$

根据激励 $f[n]=\frac{4}{3}(3)^n e[n]$ 的形式，得方程的特解

$$y_p[n]=P(3)^n$$

将它代入到原差分方程中，得

$$P(3)^n+2P(3)^{n-1}+P(3)^{n-2}=\frac{4}{3}(3)^n$$

等式左右对应，即得 $P=\frac{3}{4}$

于是方程的特解为 $y_p[n]=\frac{3}{4}(3)^n$

将齐次解与特解相加，得方程的全解

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=A_1n(-1)^n+A_2(-1)^n+\frac{3}{4}(3)^n$$

将初始状态 $y[0]=y[-1]=0$ 代入上式，得 $A_1=-1$，$A_2=-\frac{3}{4}$

所以方程的解为

$$y[n]=-n(-1)^n-\frac{3}{4}(-1)^n+\frac{3}{4}(3)^n$$

5.12 图 5.2 所示各系统

（1）求单位响应；

（2）当 $f[n]=e[n]$ 时，求系统的零状态响应。

【知识点窍】主要考察系统模拟图与系统差分方程关系。

【逻辑推理】先将系统的模拟图转化为差分方程形式，再求该方程所示系统的单位响应，然后利用零状态响应与单位响应关系求其零状态响应。即：$y_{zs}[n]=f[n]*h[n]$

解：(a）由图可得差分方程为 $y[n]=\frac{1}{3}y[n-1]+f[n]$

(1）令输入激励 $f[n]=d[n]$，系统在冲激序列 $d[n]$ 的激励下的零状态响应就为单位响应 $h[n]$。

即隐含初始条件为 $n<0$ 时 $h[n]=0$。

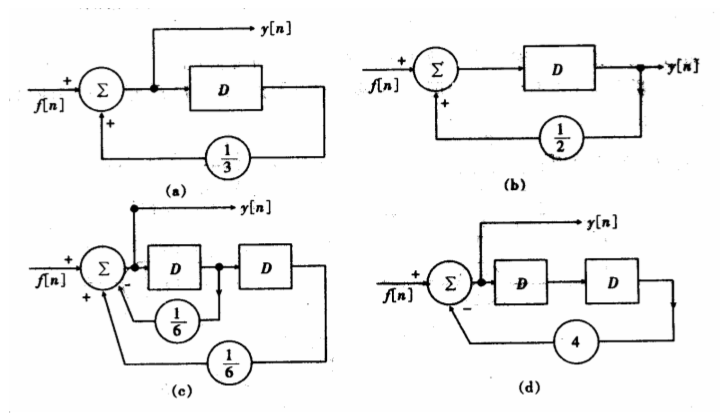


图 5.2　系统模拟图

则给定的差分方程变为

$$h[n]=\frac{1}{3}h[n-1]+d[n]$$

可依次迭代得

$$h[0]=\frac{1}{3}h[-1]+d[0]=1$$

$$h[1]=\frac{1}{3}h[0]+d[1]=\frac{1}{3}$$

$$h[2]=\frac{1}{3}h[1]+d[2]=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\cdots$$

$$h[n]=\frac{1}{3}h[n-1]+0=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

该系统的单位响应是

$$h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n e[n]$$

(2）由激励为 $f[n]=e[n]$，可得 $n<0$ 时 $f[n]=0$

可依次迭代得

$$y_{zs}[0]=\frac{1}{3}y[-1]+e[0]=1$$

$$y_{zs}[1]=\frac{1}{3}y[0]+1=\frac{1}{3}+1$$

$$y_{zs}[2]=\frac{1}{3}y[1]+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}+\frac{1}{3}+1$$

$$\cdots$$

$$y_{zs}[n]=\frac{1}{3}y[n-1]+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots+1=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

求得

$$y_{zs}[n]=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]e[n]$$

（b）由图可得差分方程为 $y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+f[n-1]$

（1）令输入激励 $f[n]=d[n]$，系统在冲激序列$d[n]$的激励下的零状态响应就为单位响应$h[n]$。

即隐含初始条件为$n<0$时 $h[n]=0$。

则给定的差分方程变为

$$h[n]=\frac{1}{2}h[n-1]+d[n-1]$$

可依次迭代得

$$h[0]=\frac{1}{2}h[-1]+d[-1]=0$$

$$h[1]=\frac{1}{2}h[0]+d[0]=1$$

$$h[2]=\frac{1}{2}h[1]+d[1]=\frac{1}{2}$$

$$h[3]=\frac{1}{2}h[2]+d[2]=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$\cdots$$

$$h[n]=\frac{1}{2}h[n-1]+0=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

该系统的单位响应是

$$h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}e[n-1]$$

（2）由激励为 $f[n]=e[n]$，可得$n<0$时 $f[n]=0$

可依次迭代得

$$
\begin{aligned}
y_{zs}[0] &= \frac{1}{2}y[-1]+e[-1]=0 \\
y_{zs}[1] &= \frac{1}{2}y[0]+1=1 \\
y_{zs}[2] &= \frac{1}{2}y[1]+1=\frac{1}{2}+1 \\
y_{zs}[3] &= \frac{1}{2}y[2]+1=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1 \\
&\cdots \\
y_{zs}[n] &= \frac{1}{2}y[n-1]+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\cdots+1=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

求得

$$y_{zs}[n]=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]e[n-1]$$

（c）由图可得差分方程为 $y[n]=-\frac{1}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]+f[n]$

即 $$y[n]+\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]=f[n]$$

（1）求单位响应，即输入激励 $f[n]=d[n]$ 时的响应。

当 $n=0$ 时， $$y[0]=-\frac{1}{6}y[-1]+\frac{1}{6}y[-2]+d[n]=1$$

当 $n>0$ 时， $$y[n]+\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]=0$$

其特征方程为 $$l^2+\frac{1}{6}l-\frac{1}{6}=0$$

其特征根 $l_1=-\frac{1}{2}, l_2=\frac{1}{3}$。系统的冲激响应为

$$h[n]=A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n+A_2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

激励 $f[n]=d[n]$，在 $n=0$ 时刻作用于系统，故初始状态 $h[-1]=0$

将 $h[-1]=0$，$h[0]=1$ 代入上式，得 $A_1=\frac{3}{5}$，$A_2=\frac{2}{5}$

综上可得，系统的零状态响应为

$$y_{zs}[n]=\left[\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]e[n]$$

（2）若激励为 $f[n]=e[n]$ ，首先，求方程的齐次解。

其特征方程为 $l^2+\frac{1}{6}l-\frac{1}{6}=0$

其特征根 $l_1=-\frac{1}{2}, l_2=\frac{1}{3}$。齐次解为

$$y_h[n]=A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n+A_2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

根据激励 $f[n]=e[n]$的形式，得方程的特解

$$y_p[n]=P$$

将它代入到原差分方程中，得

$$P+\frac{1}{6}P-\frac{1}{6}P=1$$

等式左右对应，即得 $P=1$

于是方程的特解为 $y_p[n]=1$

将齐次解与特解相加，得方程的全解

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n+A_2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1$$

激励 $f[n]=ne[n]$，在 $n=0$ 时刻作用于系统，故初始状态为 $y[-1]$， $y[-2]$，对零状态响应则有

$y[-1]=0$ ，$y[-2]=0$。

将 $y[-1]=0$ ，$y[-2]=0$ 代入上式，得 $A_1=\frac{1}{5}$，$A_2=-\frac{1}{5}$

所以系统的零状态响应为

$$y[n]=\left(\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\right)e[n]$$

（d）由图可得差分方程为 $y[n]=-4y[n-2]+f[n]$

（1）令输入激励 $f[n]=d[n]$，系统在冲激序列$d[n]$的激励下的零状态响应就为单位响应$h[n]$。

即隐含初始条件为$n<0$时 $h[n]=0$。

则给定的差分方程变为

$$h[n] = -4h[n-2] + d[n]$$

可依次迭代得

$$\begin{aligned}
h[0] &= -4h[-2] + d[0] = 1 \\
h[1] &= -4h[-1] + 0 = 0 \\
h[2] &= -4h[0] + 0 = -4 \\
h[3] &= -4h[1] + 0 = 0 \\
h[4] &= -4h[2] + 0 = (-4)^2 \\
h[5] &= -4h[3] + 0 = 0 \\
h[6] &= -4h[4] + 0 = (-4)^3 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

该系统的单位响应是

$$h[n] = \begin{cases} (-4)^{\frac{n}{2}} e[n] & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数} \end{cases}$$

（2）**若激励为** $f[n] = e[n]$ **，首先，求方程的齐次解。**

其特征方程为 $l^2 + 4 = 0$

其特征根 $l_1 = 2j, l_2 = -2j$**。方程的齐次解为**

$$y_h[n] = A_1(2j)^n + A_2(-2j)^n$$

根据激励 $f[n] = e[n]$**的形式，得方程的特解**

$$y_p[n] = P$$

将它代入到原差分方程中，得 $P + 4P = 1$

等式左右对应，即得 $P = \frac{1}{5}$

于是方程的特解为 $y_p[n] = \frac{1}{5}$

将齐次解与特解相加，得方程的全解

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = A_1(2j)^n + A_2(-2j)^n + \frac{1}{5}$$

激励 $f[n] = ne[n]$**，在** $n = 0$ **时刻作用于系统，故初始状态为** $y[-1]$**，** $y[-2]$**，对零状态响应则有** $y[-1] = 0$ **，** $y[-2] = 0$**。**

将 $y[-1]=0$，$y[-2]=0$ 代入上式，得 $A_1=\dfrac{2-j}{5}$，$A_2=\dfrac{2+j}{5}$

所以系统的零状态响应为

$$y[n]=\left(\frac{2-j}{5}(2j)^n+\frac{2+j}{5}(-2j)^n+\frac{1}{5}\right)\varepsilon[n]$$

5.13　各序列的图形如图 5.3 所示，试求下列卷积和。

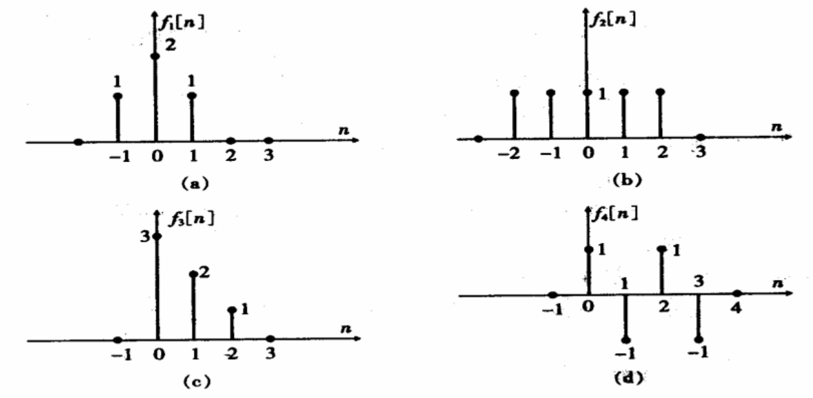


图 5.3

(1)　$f_1[n]*f_2[n]$　　(2)　$f_2[n]*f_3[n]$　　(3)　$f_3[n]*f_4[n]$

【知识点窍】主要考察卷积和定义及计算方法。

【逻辑推理】$f_1[n]*f_2[n]=\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}f_1[i]f_2[n-i]$，卷积和的计算是通过反褶、平移、相乘、叠加四步完成的。

解：(1) 根据卷积和的定义，可以得到

当 $n<-3$ 时，$f_1(n)*f_2(n)=0$

当 $n=-3$ 时，$f_1(n)*f_2(n)=1$

当 $n=-2$ 时，$f_1(n)*f_2(n)=3$

当 $n=-1$ 时，$f_1(n)*f_2(n)=4$

当 $n=0$ 时，$f_1(n)*f_2(n)=4$

当 $n=1$ 时，$f_1(n)*f_2(n)=4$

当 $n=2$ 时，$f_1(n)*f_2(n)=3$

当 $n=3$ 时，$f_1(n)*f_2(n)=1$

当 $n>3$ **时，** $f_1(n)*f_2(n)=0$

卷积和计算结果如图 5.4（a）**所示。**

（2）**根据卷积和的定义，可以得到**

当 $n<-2$ **时，** $f_2(n)*f_3(n)=0$

当 $n=-2$ **时，** $f_2(n)*f_3(n)=3$

当 $n=-1$ **时，** $f_2(n)*f_3(n)=5$

当 $n=0$ **时，** $f_2(n)*f_3(n)=6$

当 $n=1$ **时，** $f_2(n)*f_3(n)=6$

当 $n=2$ **时，** $f_2(n)*f_3(n)=6$

当 $n=3$ **时，** $f_2(n)*f_3(n)=3$

当 $n=4$ **时，** $f_2(n)*f_3(n)=1$

当 $n>4$ **时，** $f_2(n)*f_3(n)=0$

卷积和计算结果如图 5.4（b）**所示。**

（3）**根据卷积和的定义，可以得到**

当 $n<-0$ **时，** $f_3(n)*f_4(n)=0$

当 $n=0$ **时，** $f_3(n)*f_4(n)=3$

当 $n=1$ **时，** $f_3(n)*f_4(n)=-1$

当 $n=2$ **时，** $f_3(n)*f_4(n)=2$

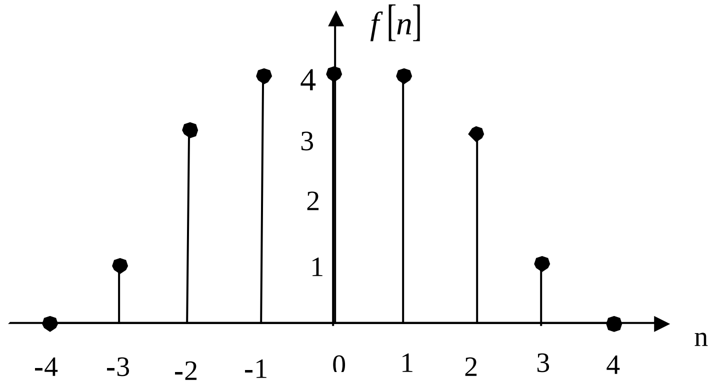
当 $n=3$ **时，** $f_3(n)*f_4(n)=-2$

当 $n=4$ **时，** $f_3(n)*f_4(n)=-1$

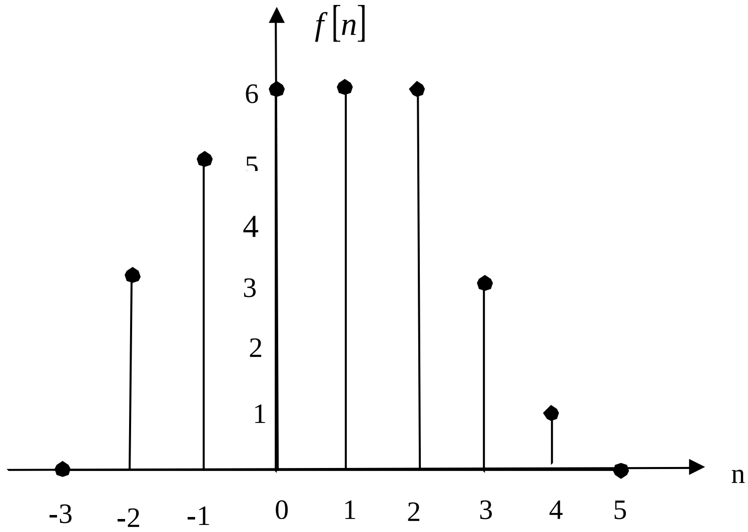
当 $n=5$ **时，** $f_3(n)*f_4(n)=-1$

当 $n>5$ **时，** $f_3(n)*f_4(n)=0$

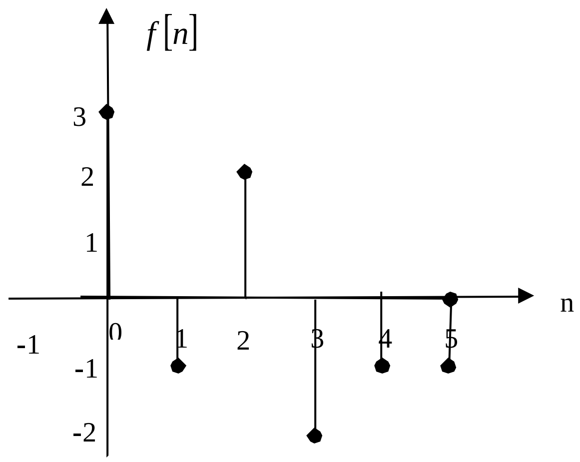
卷积和计算结果如图 5.4（c）**所示。**



(a)



(b)



(c)

图 5.4

5.14　**已知系统的激励 $f[n]$ 和单位响应 $h[n]$ 如下，试求系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$，并画出其图形。**

(1)　$f[n]=h[n]=e[n]$

(2)　$f[n]=e[n],h[n]=d[n]-d[n-3]$

(3)　$f[n]=h[n]=e[n]-e[n-4]$

【知识点窍】主要考察图解法求系统卷积和及零状态响应的方法。

【逻辑推理】 $y_{zs}[n]=f[n]*h[n]$**，是通过反褶、平移、相乘、叠加四步完成的。**

解：(1) **已知** $f[n]=h[n]=e[n]$**，则**

$$
\begin{aligned}
y_{zs}[n] &= f[n]*h[n]=e[n]*e[n]=\sum_{i=0}^{n}e[i]\cdot e[n-i]=\sum_{i=0}^{n}1 \\
&=(n+1)e[n]
\end{aligned}
$$

零状态响应 $y_{zs}[n]$ **的图形如图** 5.5 (a) **所示。**

(2) **已知** $f[n]=e[n],h[n]=d[n]-d[n-3]$

则　$y_{zs}[n]=f[n]*h[n]=e[n]*d[n]-e[n]*d[n-3]=e[n]-e[n-3]$

零状态响应 $y_{zs}[n]$ **的图形如图** 5.5 (b) **所示。**

(3) **已知** $f[n]=h[n]=e[n]-e[n-4]$

则

$$
\begin{aligned}
y_{zs}[n] &= f[n]*h[n]=(e[n]-e[n-4])*(e[n]-e[n-4]) \\
&=e[n]*e[n]-2e[n]*e[n-4]+e[n-4]*e[n-4] \\
&=(n+1)e[n]-2(n-3)e[n-4]+(n-7)e[n-8]
\end{aligned}
$$

零状态响应 $y_{zs}[n]$ **的图形如图** 5.5 (c) **所示。**

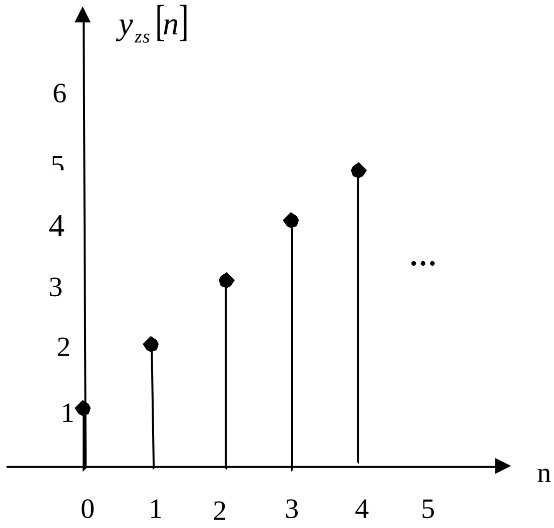
5.15　**对于线性非时变系统，**

(1) **如已知系统的单位响应** $h[n]$**，如何求阶跃响应** $g[n]$(**阶跃响应是激励为单位阶跃序列时，系统的零状态响应**)**；**

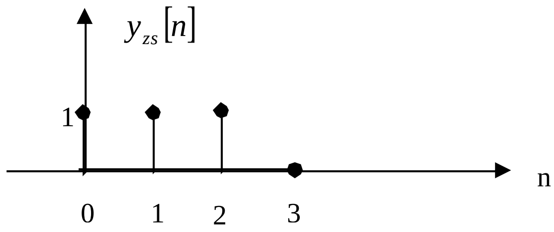
(2) **如已知系统的阶跃响应** $g[n]$**，如何求系统的单位响应** $h[n]$**。**

【知识点窍】主要考察单位响应与阶跃响应之间关系。

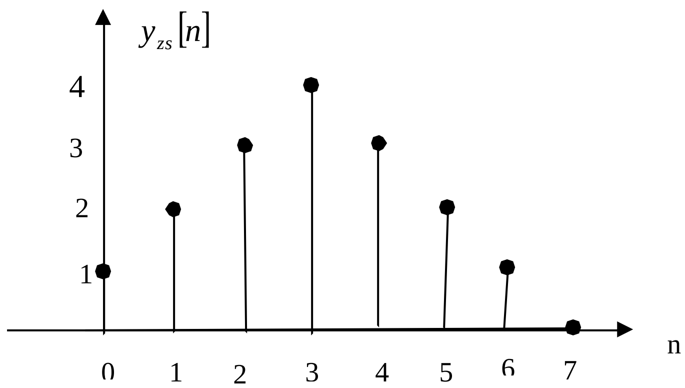
【逻辑推理】利用系统的线性性质求解。



(a)



(b)



(c)

图 5.5

解：(1) 系统的单位响应 $h[n]$ **是由激励** $d[n]$ **产生的，阶跃响应** $g[n]$ **是由激励** $e[n]$ **产生的，因**

$e[n]=\sum_{i=-\infty}^{n} d[i]$**，系统的单位响应** $h[n]$ **已知，则根据线性非时变系统的累加和性质，得到阶跃响应**

$$g(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}h[i]$$

（2）因$d[n]=\nabla e[n]=e[n]-e[n-1]$，系统的阶跃响应$g[n]$已知，则根据线性非时变系统的差分性质，得到单位响应

$$h(n)=\nabla g[n]=g[n]-g[n-1]$$

5.16 如图 5.6 为系统的模拟图，试求输入 $f[n]$分别为（1） $f[n]=e[n]$；(2) $f[n]=ne[n]$时的零状态响应。

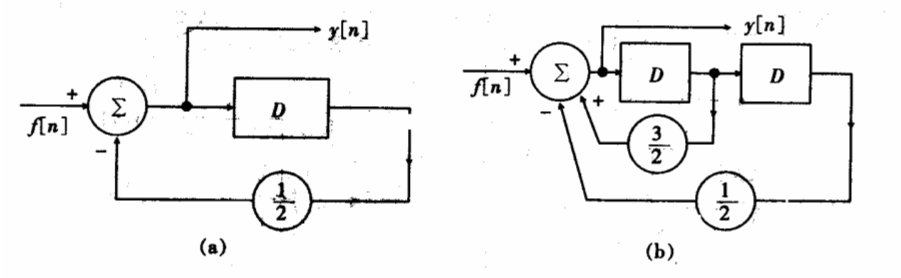


图 5.6

【知识点窍】主要考察系统模拟图与系统差分方程关系。

【逻辑推理】先将系统的模拟图转化为差分方程形式，再求该方程所示系统的单位响应，然后利用零状态响应与单位响应关系求其零状态响应。即：$y_{zs}[n]=f[n]*h[n]$

解：(a) 由图可得差分方程为 $$y[n]=-\frac{1}{2}y[n-1]+f[n]$$

（1）由激励为 $f[n]=e[n]$，可得$n<0$时 $f[n]=0$

可依次迭代得

$$y_{zs}[0]=-\frac{1}{2}y[-1]+e[0]=1$$

$$y_{zs}[1]=-\frac{1}{2}y[0]+1=-\frac{1}{2}+1$$

$$y_{zs}[2]=-\frac{1}{2}y[1]+1=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+1$$

$$\cdots$$

$$y_{zs}[n]=-\frac{1}{2}y[n-1]+1=\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+1=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

求得

$$y_{zs}[n]=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]e[n]$$

（2）由图可得差分方程为 $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=f[n]$

首先求齐次解。齐次差分方程为

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=0$$

其特征方程为 $l+\frac{1}{2}=0$

其特征根 $l=-\frac{1}{2}$。方程的齐次解为

$$y_h[n]=A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

根据激励 $f[n]=ne[n]$的形式，得方程的特解

$$y_p[n]=P_1n+P_0$$

将它代入到原差分方程中，得

$$P_1n+P_0+\frac{1}{2}[P_1(n-1)+P_0]=n$$

等式左右对应，即得 $P_1=\frac{2}{3},P_0=\frac{2}{9}$

于是方程的特解为 $y_p[n]=\frac{2}{3}n+\frac{2}{9}$

将齐次解与特解相加，得方程的全解

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}n+\frac{2}{9}$$

激励 $f[n]=ne[n]$，在 $n=0$ 时刻作用于系统，故初始状态为 $y[-1]$，对零状态响应则有 $y[-1]=0$。

将 $y[-1]=0$ 代入上式，得 $A_1=-\frac{2}{9}$

所以系统的零状态响应为

$$y_{zs}[n]=\left[-\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}n+\frac{2}{9}\right]e[n]$$

（b）由图可得差分方程为 $y[n]=\frac{3}{2}y[n-1]-\frac{1}{2}y[n-2]+f[n]$

即 $$y[n]-\frac{3}{2}y[n-1]+\frac{1}{2}y[n-2]= f[n]$$

首先求齐次解。齐次差分方程为

$$y[n]-\frac{3}{2}y[n-1]+\frac{1}{2}y[n-2]=0$$

其特征方程为 $$l^2-\frac{3}{2}l+\frac{1}{2}=0$$

其特征根 $l_1=\frac{1}{2}, l_2=1$。**方程的齐次解为**

$$y_h[n]=A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+A_2(1)^n$$

根据激励的形式，确定方程的特解

（1）**当激励** $f[n]=e[n]$**时，方程的特解为** $y_p[n]=P_0n$

将它代入到原差分方程中，得

$$P_0n-\frac{3}{2}P_0(n-1)+\frac{1}{2}P_0(n-2)=1$$

等式左右对应，即得 $P_0=2$

于是方程的特解为 $y_p[n]=2n$

将齐次解与特解相加，得方程的全解

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+A_2(1)^n-2n$$

激励 $f[n]=e[n]$**，在** $n=0$ **时刻作用于系统，故初始状态为** $y[-1]$**，** $y[-2]$**，对零状态响应则有**

$y[-1]=0$**，** $y[-2]=0$。

将 $y[-1]=0$**，** $y[-2]=0$ **代入上式，得** $A_1=1$**，** $A_2=0$

所以系统的零状态响应为

$$y_{zs}[n]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n\right]e[n]$$

（2）**当** $f[n]=ne[n]$**时，方程的特解为** $y_p[n]=n(P_1n+P_0)$

将它代入到原差分方程中，得

$$n(P_1n+P_0)-\frac{3}{2}(n-1)(P_1(n-1)+P_0)+\frac{1}{2}(n-2)(P_1(n-2)+P_0)=n$$

等式左右对应，即得 $P_1=1, P_0=-1$

于是方程的特解为 $y_p[n]=n(n-1)=n^2-n$

将齐次解与特解相加，得方程的全解

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+A_2(1)^n+n^2-n$$

激励 $f[n]=ne[n]$**，在** $n=0$ **时刻作用于系统，故初始状态为** $y[-1]$**，** $y[-2]$**，对零状态响应则有**

$y[-1]=0$**，** $y[-2]=0$**。**

将 $y[-1]=0, y[-2]=0$ **代入上式，得** $A_1=-2, A_2=2$

所以系统的零状态响应为

$$y_{zs}[n]=\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+2+n^2-n\right]e[n]$$

5.17 **如已知某线性非时变系统的输入为** $f[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 4, & n=1,2\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$ **时，其零状态响应为**

$y_{zs}[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ 9, & n\geq 0\end{cases}$ **试求此系统的单位响应。**

【知识点窍】主要考察系统单位响应与系统零状态响应关系。

【逻辑推理】 $y_{zs}[n]=f[n]*h[n]$

解：因

$$\begin{aligned}y_{zs}[n]&=f[n]*h[n]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f[i]\cdot h[n-i]\\&=f[0]\cdot h[n]+f[1]\cdot h[n-1]+f[2]\cdot h[n-2]\end{aligned}$$

由已知条件 $f[0]=1, f[1]=4, f[2]=4$**，** $y_{zs}[n]=9e[n]$**，**

故得差分方程为 $h[n]+4h[n-1]+4h[n-2]=9e[n]$

其特征方程为 $l^2+4l+4=0$

故得特征根 $l_{1,2}=-2$**，差分方程的齐次解为**

$$h_x[n]=\left[P_1n(-2)^n+P_2(-2)^n\right]e[n]$$

设差分方程的特解为$h_P[n]=P_0e[n]$，故$h_P[n-1]=h_P[n-2]=P_0e[n]$

代入差分方程，得： $P_0+4P_0+4P_0=9$

解之得$P_0=1$，故得 $h_P[n]=e[n]$

$$h[n]=[P_1n(-2)^n+P_2(-2)^n+1]e[n]$$

又 $h[-1]=P_1(-2)^{-1}+P_2(-2)^{-1}+1=0$

$$h[-2]=-2P_1(-2)^{-2}+P_2(-2)^{-2}+1=0$$

联解求得 $P_1=6$，$P_2=8$

故得此系统的单位响应

$$h[n]=[6n(-2)^n+8\cdot(-2)^n+1]e[n]$$

5.18 已知离散时间系统的差分方程为$y[n]-0.5y[n-1]=f[n]$，试用叠代法求其单位响应。

【知识点窍】主要考察利用叠代法求解系统的单位响应。

【逻辑推理】先将差分方程的$f[n]$和$y[n]$分别用$d[n]$和$h[n]$形式代入，再利用冲激信号的特性逐步进行求解。

解：令输入激励$f[n]=d[n]$，系统在冲激序列$d[n]$的激励下的零状态响应就为单位响应$h[n]$。即隐含初始条件为$n<0$时 $h[n]=0$。

则给定的差分方程变为

$$h[n]=0.5h[n-1]+d[n]$$

可依次迭代得

$$\begin{aligned}h[0]&=0.5h[-1]+d[0]=1\\h[1]&=0.5h[0]+d[1]=0.5\\h[2]&=0.5h[1]+d[2]=0.5^2\\&\cdots\\h[n]&=0.5h[n-1]+0=0.5^n\end{aligned}$$

该离散时间系统的单位响应是

$$h[n]=0.5^ne[n]$$

5.19 系统差分方程式为$y[n]-3y[n-1]+3y[n-2]-y[n-3]=f[n]$，用经典法求系统的单位响应。

【知识点窍】主要考察利用经典法求解系统的单位响应。

【逻辑推理】利用单位响应定义进行求解。它是零状态响应，但其解的形式与零输入响应相同。

解：求单位响应，即求输入激励 $f[n]=d[n]$时的响应。

当$n=0$时，$y[0]=3y[-1]-3y[-2]+y[-3]+d[n]=1$

当$n>0$时，$y[n]-3y[n-1]+3y[n-2]-y[n-3]=0$

其特征方程为 $l^3-3l^2+3l-1=0$

其特征根 $l_{1,2,3}=1$。系统的冲激响应为

$$h[n]=A_1n^2(1)^n+A_2n(1)^n+A_3(1)^n$$

激励 $f[n]=d[n]$，在$n=0$时刻作用于系统，故初始状态$h[-1]=0$， $h[-2]=0$

将$h[-1]=0$， $h[-2]=0$，$h[0]=1$代入上式，得 $A_1=\frac{1}{2}$，$A_2=\frac{3}{2}$，$A_3=1$

综上可得，系统的单位响应为

$$h[n]=\left[\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1\right]e[n]$$

5.20 已知系统的差分方程模型为 $y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=f[n]-3f[n-2]$，求系统的单位响应。

【知识点窍】主要考察利用经典法求解系统的单位响应。

【逻辑推理】利用单位响应定义进行求解。它是零状态响应，但其解的形式与零输入响应相同。

解：求单位响应，即求输入激励 $f[n]=d[n]$时的响应。

当$n=0$时，$y[0]=5y[-1]-6y[-2]+d[n]-3d[n-2]=1$

当$n=1$时，$y[1]=5y[0]-6y[-1]+d[1]-3d[-1]=5$

当$n=2$时，$y[2]=5y[1]-6y[0]+d[2]-3d[0]=16$

当$n>3$时，$y[n]-3y[n-1]+3y[n-2]-y[n-3]=0$

其特征方程为 $l^2-5l+6=0$

其特征根 $l_1=2, l_2=3$。系统的冲激响应为

$$h[n]=A_1(2)^n+A_2(3)^n$$

将 $h[2]=16$，$h[1]=5$ 代入上式，得　$A_1=-\dfrac{1}{2}$，$A_2=2$

于是　　$h[n]=\left[-\dfrac{1}{2}(2)^n+2(3)^n\right]e[n-1]$

当 $n=0$ 时，$y[0]=1$

综上可得，系统的单位响应为

$$h[n]=-\frac{1}{2}d[n]+\left[-\frac{1}{2}(2)^n+2(3)^n\right]e[n]$$

5.21 已知如下两个序列

$$f[n]=\begin{cases}3, & n=0\\ 2, & n=1\\ 1, & n=2\\ 0, & \text{其余}\end{cases}\qquad h[n]=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

试用“阵列表”法求它们的卷积。

【知识点窍】主要考察卷积和“阵列表”求解法。

【逻辑推理】首先画出序列阵表图，左部放 $f[n]$，上部放 $h[n]$，然后以 $f[n]$ 的每个数去乘 $h[n]$ 各数，并将结果放入相应的行，最后把虚斜线上的数分别相加即得卷积和结果序列。

解：如题可得表 5.1，由此可求得

表 5.1

	$h[0]$ 1	$h[1]$ $\frac{1}{2}$	$h[2]$ $\frac{1}{4}$	$h[3]$ $\frac{1}{8}$	$h[4]$ $\frac{1}{16}$	$\cdots$
$f[0]$　3	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	
$f[1]$　2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	
$f[2]$　1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	
$f[3]$　0	0	0	0	0	0	
$\vdots$						

$$y[n]=f[n]*h[n]=\left\{3,\frac{7}{2},\frac{11}{4},\frac{11}{8},\frac{21}{16},\cdots\right\}$$

5.22 **系统的单位响应为** $h[n]=a^n e[n]$ **，其中** $0<a<1$ **。若激励信号为一矩形序列，即** $f[n]=e[n]-e[n-N]$ **，试求响应** $y[n]$ **。**

【知识点窍】主要考察系统单位响应与系统零状态响应关系。

【逻辑推理】 $y_{zs}[n]=f[n]*h[n]$

解：由系统单位响应与零状态响应关系可得

$$\begin{aligned}y[n]&=f[n]*h[n]=a^n e[n]*(e[n]-e[n-N])\\&=a^n e[n]*e[n]-a^n e[n]*e[n-N]\end{aligned}$$

因为 $$a^n e[n]*e[n]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a^i e[i]\cdot e[n-i]=\sum_{i=0}^{n}a^i=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}e[n]$$

同理 $$a^n e[n]*e[n-N]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a^i e[i]\cdot e[n-N-i]=\sum_{i=0}^{n-N}a^i=\frac{1-a^{n-N+1}}{1-a}e[n-N]$$

所以系统的零状态响应为

$$\begin{aligned}y[n]&=f[n]*h[n]\\&=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}e[n]-\frac{1-a^{n-N+1}}{1-a}e[n-N]\end{aligned}$$

5.23 **已知** $x[n]=1+\sin(2p/N)n+3\cos(2p/N)n+\cos(4pn/N+p/2)$ **式中** N **为整数，求其频谱。**

【知识点窍】主要考察离散时间信号的离散傅里叶级数。

【逻辑推理】 $x[n]=\sum_{k\in<N>}c_k e^{jk(2p/N)n}$

解　这个信号是周期的，其周期为 N**。将** $x[n]$ **直接开展成复指数形式，得**

$$x[n]=1+[e^{j(2p/N)n}-e^{-j(2p/N)n}]/2j+3[e^{j(2p/N)n}+e^{-j(2p/N)n}]/2$$

$$+[e^{j(4p/N+\frac{p}{2})}+e^{-j(4pn/N+\frac{p}{2})}]/2$$

将相应项归并后，得

$$x[n]=1+(3/2+1/2j)e^{j(2p/N)n}+(3/2-1/2j)e^{-j(2p/N)n}$$

$$+(e^{jp/2}/2)e^{j2(2p/N)n}+(e^{-jp/2}/2)e^{-j2(2p/N)n}$$

与 $x[n]=\sum_{k\in<N>}c_k e^{jk(2p/N)n}$ 比较，可得

$$c_0=1, c_1=3/2+1/2j=3/2-j1/2, c_{-1}=3/2+j1/2=c_1^*$$

$$c_2=j1/2 \quad c_{-2}=-j1/2=c_2^*$$

而在长度为 N 的周期内，其余系数均为 0 。这些系数是周期的，其周期为 N。例如，$c_N=c_{2N}=c_{-N}=c_0=1, c_{1+N}=c_{1+2N}=c_{1-2N}=c_1=3/2-j1/2, c_{2+N}=c_{2+2N}=c_{2-N}$

$=c_2=j1/2$ 等等。

5.24 某离散系统的系统函数 $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$，试求其系统频率响应。

【知识点窍】主要考察离散系统频率响应。

【逻辑推理】系统函数与系统频率响应关系为 $H(e^{jwT})=H(z)\big|_{z=e^{jwT}}$ 。

解 由 $H(z)$ 的表示式可知，其收敛域为 $\left|0.5z^{-1}\right|<1$，系统的频率响应（频率特性）

$$H(e^{jwT})=H(z)\big|_{z=e^{jwT}}=\frac{1+e^{-jwT}}{1-0.5e^{-jwT}}$$

$$=\frac{1+\cos wT-j\sin wT}{1-0.5\cos wT+j0.5\sin wT}$$

$$=\frac{\sqrt{(1+\cos wT)^2+\sin^2 wT}e^{jy}}{\sqrt{(1-0.5\cos wT)^2+(0.5\sin wT)^2}e^{jq}}$$

若令 $1+e^{-jwT}=Be^{jy}$， $1-0.5e^{-jwT}=Ae^{jq}$

可得
$$B=\sqrt{(1+\cos wT)^2+\sin^2 wT}=\sqrt{2(1+\cos wT)}$$

$$A=\sqrt{(1-0.5\cos wT)^2+(0.5\sin wT)^2}=\sqrt{1.25-\cos wT}$$

$$y=arctg\frac{-\sin wT}{1+\cos wT}$$

$$q=arctg\frac{0.5\sin wT}{1-0.5\cos wT}$$

若令系统的频率响应 $H(e^{jwT})=H_d(w)e^{jj_d(w)}$

则
$$H_d(w)=\frac{B}{A}=\sqrt{\frac{2(1+\cos wT)}{1.25-\cos wT}}$$

$$j_d(w) = y - q = arctg\frac{-\sin wT}{1+\cos wT} - aretg\frac{0.5\sin wT}{1-0.5\cos wT}$$
$$= -arctg\frac{3\sin wT}{1+\cos wT}$$

由幅频和相频特性的表示式可见，它们都以$w = \dfrac{2p}{T}$**周期性地重复变化。**

5.25 **一个** LTI **系统，其**$h[n] = a^n e[n], -1 < a < 1$**；输入**$x[n] = con(2pn/N)$**，**$N = 4$**，求系统响应。**

【知识点窍】主要考察离散系统频率分析。

【逻辑推理】如果系统的单位抽样响应为$h[n]$，**而输入为**$x[n] = z^n = e^{jwn}$**，式中**$z = e^{jw}, w$**为数字频率，可得系统输出**$y[n]$**为**

$$y[n] = H(z)e^{jwn} = H(e^{jw})e^{jwn}$$

系统对周期序列$x[n]$**输入的响应**$y[n]$**为**

$$y[n] = \sum_{k\in\langle N\rangle} c_k H\left(e^{j(2p/N)k}\right)e^{j(2p/N)kn}$$

系统对非周期序列$x[n]$**输入响应为**

$$y[n] = \frac{1}{2p}\int_{2p} X(e^{jw})H(e^{jw})e^{jwn}dw = \frac{1}{2p}\int_{2p} Y(e^{jw})e^{jwn}dw$$

解　将$x[n]$**写成离散傅里叶级数的形式，即**

$$x[n] = (e^{j(2p/N)n} + e^{-j(2p/N)n})/2$$

先求出
$$H[z] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k (e^{j2p/N})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(ae^{-j2p/N})^k$$

根据无穷项几何级数求和公式
$$\sum_{m=0}^{\infty} r^m = \frac{1}{1-r}$$

得到
$$H(e^{j2p/N}) = \frac{1}{1-ae^{(-j2p/N)}}$$

求系统响应，由$y[n] = \sum_{k\in\langle N\rangle} c_k H\left(e^{j(2p/N)k}\right)e^{j(2p/N)kn}$**得**

$$y[n] = \frac{1}{2}H(e^{j2p/N})e^{j(2p/N)n} + \frac{1}{2}H(e^{-j2p/N})e^{-j(2p/N)n}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-ae^{-j2p/N}}e^{j(2p/N)n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-ae^{j2p/N}}e^{-j(2p/N)n}$$

若令　$\dfrac{1}{1-ae^{-j2p/N}} = re^{jq}$**，则**　$\dfrac{1}{1-ae^{j2p/N}} = re^{-jq}$

$$y[n]=\frac{1}{2}re^{j(2pn/N+q)}+\frac{1}{2}re^{-j(2pn/N+q)} \;=r\cos(2pn/N+q\text{ ）}$$

由于 N=4, $\frac{1}{1-ae^{-j2p/4}}=\frac{1}{1+ja}$, **则** $r=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, $q=-arctga$

所以

$$y[n]=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cos(2pn/N-arctga)$$

5.26 **一个** LTI **离散系统，系统函数** $H(z)=\frac{0.4(1+z^{-1})}{1-0.2z^{-1}}$ **，系统的输入为幅度等于 10** v **，频率为 200** Hz **的正弦序列，设抽样频率为 1000** Hz **，求其稳态输出。**

【知识点窍】主要考察离散系统频率响应。

【逻辑推理】系统函数与系统频率响应关系为 $H(e^{jwT})=H(z)\big|_{z=e^{jwT}}$ **。**

解　根据系统函数 $$H(z)=\frac{0.4(1+z^{-1})}{1-0.2z^{-1}}$$

可得 $$H(e^{jwT})=H(z)\big|_{z=e^{jwT}}=\frac{0.4\left(1+\left(e^{jwT}\right)^{-1}\right)}{1-0.2\left(e^{jwT}\right)^{-1}}$$

又因输入信号幅度 $A=10v$ **，输入频率** $f=200Hz$ **，抽样频率** $1/T=1000Hz$ **，故** $wT=2pfT=2p/5$ **，所以输入信号表达为**

$$x[n]=10\sin(2pn/5)\cdot e[n]$$

将 $wT=2pfT=2p/5$ **代入** $H(e^{jwT})=\frac{0.4\left(1+\left(e^{jwT}\right)^{-1}\right)}{1-0.2\left(e^{jwT}\right)^{-1}}$ **，求出**

$$\left|H(e^{jwT})\right|=0.924\text{，和}\quad \angle H(e^{jwT})=-21.9^0$$

故系统的正弦稳态输出

$$y[n]\big|_{\text{稳态}}=9.24\sin\left[\frac{2p}{5}n-21.9^0\right]\cdot e[n]$$

5.27 **用计算机对测量所得的数据** $f(k)$ **进行平均处理。当收到一个测量数据后，计算机就把这一次输入的数据与前三次输入的数据进行平均，求这一数据处理过程的频率响应。**

【知识点窍】主要考察离散系统频率响应。

【逻辑推理】系统函数与系统频率响应关系为 $H(e^{jwT})=H(z)\big|_{z=e^{jwT}}$

解：由题意可知，系统的表示为

$$y[k]=\frac{1}{4}[f(k)+f(k-1)+f(k-2)+f(k-3)]$$

由此可得系统函数为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{1}{4}\left[1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\right]$$

根据系统函数与系统频率响应关系可得系统的频率响应为

$$H\left(e^{jwt}\right)=\frac{1}{4}\left[1+e^{-jwt}+e^{-j2wt}+e^{-j3wt}\right]$$

5.28 **求周期抽样序列串** $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d[n-kN]$ **的傅里叶频谱。**

【知识点窍】主要考察离散信号的傅里叶变换性质。

【逻辑推理】主要利用线性性质和时移特性求解。

解：因为 $d[n]\leftrightarrow 1$

由离散傅里叶变换的时移特性与线性可得

$$X\left(e^{jw}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-jwkN}=\lim_{M\to\infty}\frac{e^{jwNM}-e^{-jwN(M+1)}}{1-e^{-jwN}}=\lim_{M\to\infty}\frac{\sin\left[wN\left(M+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin wN}$$

5.29 **一个**LTI**系统离散时间系统，已知** $h[n]=d[n-m]$ $x[n]\leftrightarrow X\left(e^{jw}\right)$**，用频域分析法求** $x[n]$ **通过系统后的波形变化。**

【知识点窍】主要考察离散时间系统的频域分析。

【逻辑推理】利用离散时间信号的傅里叶变换时移特性。

解：系统的输出响应

$$y[n]=x[n]*h[n]=x[n]*d[n-m]=x[n-m]$$

因 $x[n]\leftrightarrow X\left(e^{jw}\right)$**，则有**

$$y[n]=x[n-m]\leftrightarrow X\left(e^{jw}\right)\cdot e^{-jwm}$$

所以，$x[n]$**通过系统后的波形幅频特性不变，相频特性附加一个线性的相移** $-wm$**。**

5.30 **有** LTI **系统，已知** $h[n]=a^{n}e[n]$, $x[n]=b^{n}e[n]$**，求系统响应。**

【知识点窍】主要考察离散时间系统的频域分析。

【逻辑推理】利用离散时间信号的傅里叶变换卷积定理。

解：由时域分析可知，系统的响应为

$$y[n]=h[n]*x[n]$$

由傅里叶变换卷积定理可得

$$Y(jw)=H(jw)X(jw)=\frac{1}{1-ae^{-jw}}\frac{1}{1-be^{-jw}}$$
$$=\frac{A}{1-ae^{-jw}}+\frac{B}{1-be^{-jw}}$$

由此可求得

$$A=\frac{a}{a-b}\qquad\qquad B=-\frac{b}{a-b}$$

即可得

$$Y(jw)=\frac{1}{a-b}\left[\frac{a}{1-ae^{-jw}}-\frac{b}{1-be^{-jw}}\right]$$

对上式求反变换即得系统响应为

$$y[n]=\frac{1}{a-b}\left[a^{n+1}-b^{n+1}\right]\varepsilon[n]$$

5.31 **已知描述离散系统的差分方程为** $y[n]-ay[n-1]=x[n],0<a<1$**，试求该系统的频响特性。**

【知识点窍】主要考察由离散系统的差分方程求解系统的频响特性。

【逻辑推理】首先将差分方程两边进行傅里叶变换，然后根据系统的频响特性定义即可求得。

解：方程两端进行傅里叶变换，得到：

$$Y(e^{jw})-ae^{-jw}Y(e^{jw})=X(e^{jw})$$

由此根据频响特性定义即得

$$H(e^{jw})=\frac{Y(jw)}{X(jw)}=\frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

5.32 **已知离散系统激励** $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}e[n]-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}e[n-1]$**，零状态响应** $y[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}e[n]$**，试求该系统的频响特性** $H(e^{jw})$**。**

【知识点窍】主要考察系统的频响特性定义。

【逻辑推理】系统的频响特性为零状态响应的傅里叶变换与激励傅里叶变换的比值。

解：根据离散时间信号的傅立叶变换 $a^n e[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-jw}}$

由傅里叶变换时移特性可得

$$X(jw) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}} - \frac{1}{4}\cdot e^{-jw}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}} = \frac{1-\frac{1}{4}e^{-jw}}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

$$Y(jw) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-jw}}$$

由系统的频响特性定义可得

$$H\left(e^{jw}\right) = \frac{Y(jw)}{X(jw)} = \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-jw}}}{\frac{1-\frac{1}{4}e^{-jw}}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-jw}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-jw}\right)} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}{1-\frac{7}{12}e^{-jw}+\frac{1}{12}e^{-2jw}}$$

第六章　离散系统的 Z 域分析

6.1　学习重点

1、离散信号 z 域分析法—z 变换，深刻理解其定义、收敛域以及基本性质；会根据 z 变换的定义以及性质求常用序列的 z 变换；理解 z 变换与拉普拉斯变换的关系。

2、熟练应用幂级数展开法、部分分式法及留数法，求 z 反变换。

3、离散系统 z 域分析法，求解零输入响应、零状态响应以及全响应。

4、z 域系统函数 $H(z)$及其应用。

5、离散系统的稳定性。

6、离散时间系统的 z 域模拟图。

7、用 MATLAB 进行离散系统的 Z 域分析。

6.2　教材习题同步解析

6.1　求下列序列的z 变换，并说明其收敛域。

（1）$\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$，$n \ge 0$　　（2）$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-n}$，$n \ge 0$

（3）$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$，$n \ge 0$　　（4）$\cos\frac{np}{4}$，$n \ge 0$

（5）$\sin\left(\frac{np}{2}+\frac{p}{4}\right)$，$n \ge 0$

【知识点窍】本题考察z 变换的定义式

【逻辑推理】对于有始序列离散信号 $f[n]$其z 变换的定义式为

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

解：（1）**该序列可看作**$\left(\frac{1}{3}\right)^n e[n]$

$$F(z)=Z\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n e[n]\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n e[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n$$

对该级数，当$\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right|<1$**，即**$|z|>\frac{1}{3}$**时，级数收敛，并有**

$$F(z)=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)}=\frac{3z}{3z-1}$$

其收敛域为 z **平面上半经**$|z|=\frac{1}{3}$**的圆外区域**

（2）**该序列可看作**$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-n} e[n]=(-3)^n e[n]$

$$F(z)=Z\left[(-3)^n e[n]\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n e[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-3z^{-1}\right)^n$$

对该级数，当$\left|-3z^{-1}\right|<1$**，即**$|z|>3$**时，级数收敛，并有**

$$F(z)=\frac{1}{1-\left(-3z^{-1}\right)}=\frac{z}{z+3}$$

其收敛域为 z **平面上半经**$|z|=3$**的圆外区域**

（3）**该序列可看作**$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}\right]e[n]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+3^n\right]e[n]$

$$F(z)=Z\left[\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+3^n\right]e[n]\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+3^n\right]e[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(3z^{-1}\right)^n$$

对该级数，当$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1$**且**$\left|3z^{-1}\right|<1$**，即**$|z|>3$**时，级数收敛，并有**

$$F(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-3z^{-1}}=\frac{2z}{2z-1}+\frac{z}{z-3}$$

其收敛域为 z **平面上半经**$|z|=3$**的圆外区域**

（4）**该序列可看作** $\cos\frac{np}{4}e[n]$

$$F(z)=Z\left[\cos\frac{np}{4}e[n]\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{np}{4}z^{-n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{j\frac{p}{4}n}+e^{-j\frac{p}{4}n}\right)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{j\frac{p}{4}}z^{-1}\right)^{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-j\frac{p}{4}}z^{-1}\right)^{n}$$

对该级数，当 $\left|e^{j\frac{p}{4}}z^{-1}\right|<1$ **且** $\left|e^{-j\frac{p}{4}}z^{-1}\right|<1$**，即** $|z|>1$ **时，级数收敛，并有**

$$F(z)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-e^{j\frac{p}{4}}z^{-1}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-e^{-j\frac{p}{4}}z^{-1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\frac{p}{4}}}+\frac{z}{z-e^{-j\frac{p}{4}}}\right)$$

$$=\frac{z^{2}-z\cos\frac{p}{4}}{z^{2}-2z\cos\frac{p}{4}+1}=\frac{z^{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}z}{z^{2}-\sqrt{2}z+1}$$

其收敛域为 z **平面上半经** $|z|=1$ **的圆外区域**

（5）**该序列可看作**

$$\sin\left(\frac{np}{2}+\frac{p}{4}\right)e[n]=\left(\sin\frac{p}{4}\cos\frac{np}{2}+\cos\frac{p}{4}\sin\frac{np}{2}\right)e[n]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{np}{2}+\cos\frac{np}{2}\right)e[n]$$

$$F(z)=Z\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{np}{2}+\cos\frac{np}{2}\right)e[n]\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{np}{2}z^{-n}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{np}{2}z^{-n}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z\sin\frac{p}{2}}{z^{2}-2z\cos\frac{p}{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z^{2}-z\cos\frac{p}{2}}{z^{2}-2z\cos\frac{p}{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{z^{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z^{2}}{z^{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}z^{2}+\sqrt{2}z}{2\left(z^{2}+1\right)}$$

其收敛域为 z **平面上半经** $|z|=1$ **的圆外区域**

6.2　**已知**　$d[n]\leftrightarrow 1$，$a^{n}e[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-a}$，$ne[n]\leftrightarrow\frac{z}{(z-1)^{2}}$，

试利用 z **变换的性质求下列序列的** z **变换。**

（1）$d[n-2]$　　　　（2）$0.6\left[1+(-1)^{n}\right]e[n]$

（3）$e[n]-2e[n-4]+e[n-8]$ （4）$(-1)^{n}ne[n]\cdot$

（5）$(n-1)e[n-1]$ （6）$n(n-1)e[n-1]$

（7）$(n-1)^{2}e[n-1]$ （8）$n[e[n]-e[n-1]]$

【知识点窍】本题考察 z 变换的性质

【逻辑推理】（1） **线性性质：z 变换的线性性质表现为齐次性和可加性，即**

若 $\begin{matrix} f_1[n]\leftrightarrow F_1(z) \\ f_2[n]\leftrightarrow F_2(z) \end{matrix}$ **则** $af_1[n]+bf_2[n]\leftrightarrow aF_1(z)+bF_2(z)$

式中 a 和 b 为任意常数。

（2）**移位特性：对于双边序列 $f[n]$，其右移 m 位后的单边 z 变换为**

$$f[n-m]\leftrightarrow z^{-m}\left[F(z)+\sum_{k=1}^{m}f[-k]z^{k}\right]$$

对于单边序列 $f[n-m]e[n-m]\leftrightarrow z^{-m}F(z)$

（3）**尺度变换：若** $f[n]\leftrightarrow F(z)$，**则 $f[n]$ 乘以指数序列的 z 变换为**

$$a^{n}f[n]\leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$$

（4）**初值定理：若 $f[n]\leftrightarrow F(z)$，且 $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)$ 存在，则 $f[n]$ 的初值为**

$$f[0]=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

（5）**终值定理：若 $f[n]\leftrightarrow F(z)$，则若 $f[n]$ 的终值为**

$$f[\infty]=\lim_{n\to\infty}f[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

（6）卷积定理：若 $f_1[n]\leftrightarrow F_1(z), f_2[n]\leftrightarrow F_2(z)$，**则 $f_1[n]$ 与 $f_2[n]$ 卷积和的 z 变换为**

$$f_1[n]*f_2[n]\leftrightarrow F_1(z)\cdot F_2(z)$$

解：（1）$d[n]\leftrightarrow 1$，**根据 z 变换的移位特性，有：**

$$Z[d[n-2]]=z^{-2}$$

（2）$a^{n}e[n]\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}$，**则有：**

$$0.6e[n] \leftrightarrow \frac{0.6z}{z-1} \quad ，0.6(-1)^n e[n] \leftrightarrow \frac{0.6z}{z+1}$$

根据 z 变换的线性，有：

$$Z\left[0.6\left[1+(-1)^n\right]e[n]\right] = \frac{0.6z}{z-1} + \frac{0.6z}{z+1} = \frac{1.2z^2}{z^2-1}$$

(3) $e[n] \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1}$，**根据 z 变换的移位特性，有：**

$$e[n-4] \leftrightarrow z^{-4}\frac{z}{z-1} = \frac{z^{-3}}{z-1} \quad ，e[n-8] \leftrightarrow z^{-8}\frac{z}{z-1} = \frac{z^{-7}}{z-1}$$

再根据 z 变换的线性，则有：

$$Z[e[n]-2e[n-4]+e[n-8]] = \frac{z}{z-1} - \frac{2z^{-3}}{z-1} + \frac{z^{-7}}{z-1} = \frac{z-2z^{-3}+z^{-7}}{z-1}$$

(4) **令** $f_1[n] = (-1)^n e[n]\cdot$，**则根据** $a^n e[n] \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$，**有** $F_1(z) = \dfrac{z}{z+1}$

所以 $$f[n] = (-1)^n ne[n] = nf_1[n]$$

根据 z 变换的微分性质，有：

$$F(z) = -z\frac{d}{dz}F_1(z) = -\frac{z}{(z+1)^2}$$

(5) $ne[n] \leftrightarrow \dfrac{z}{(z-1)^2}$，**根据 z 变换的移位特性，有：**

$$Z[(n-1)e[n-1]] = z^{-1}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}$$

(6) **令** $f_1[n] = (n-1)e[n-1]\cdot$，**有** $F_1(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$

所以 $$f[n] = n(n-1)e[n-1] = nf_1[n]$$

根据 z 变换的微分性质，有：

$$F(z) = -z\frac{d}{dz}F_1(z) = -z\cdot(-2)\frac{1}{(z-1)^3} = \frac{2z}{(z-1)^3}$$

(7) **令** $f_1[n] = (n-1)e[n-1]\cdot$，**有** $F_1(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$

所以 $$f[n] = (n-1)^2 e[n-1] = (n-1)f_1[n] = nf_1[n] - f_1[n]$$

根据 z 变换的微分特性和线性，有：

$$F(z)=-z\frac{d}{dz}F_1(z)-F_1(z)=\frac{2z}{(z-1)^3}-\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{z+1}{(z-1)^3}$$

(8) $f[n]=n[e[n]-e[n-1]]=ne[n]-(n-1)e[n-1]-e[n-1]$

$ne[n]\leftrightarrow\frac{z}{(z-1)^2}$，$e[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-1}$，根据 z 变换的移位特性，有：

$$Z[(n-1)e[n-1]]=\frac{1}{(z-1)^2}\quad,\quad Z[e[n-1]]=\frac{1}{z-1}$$

根据 z 变换的线性，有：

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}=0$$

6.3　求下列象函数的 z 反变换。

(1) $\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$，　$|z|>0.5$　　　(2) $\frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.25z^{-2}}$，　$|z|>0.5$

(3) $\frac{z-a}{1-az}$，　$|z|>\frac{1}{|a|}$　　　(4) $\frac{z^2}{z^2+3z+2}$，$|z|>2$

(5) $\frac{z^2+z+1}{z^2+z-2}$，　$|z|>2$　　　(6) $\frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.25)}$，$|z|>0.5$

(7) $\frac{1}{z^2+1}$，$|z|>1$　　　(8) $\frac{z}{(z-1)(z^2-1)}$，$|z|>1$

【知识点窍】本题考察 z 变换的反变换的方法

【逻辑推理】求反变换通常有 3 种方法

(1) 幂级数展开法：将 $F(z)$ 展开成 z^{-n} 的级数，由 z^{-n} 的系数就是 $f(n)$ 的相应项。

(2) 部分分式展开法：若 $\frac{F(z)}{z}$ 为有理分式，则可将 $\frac{F(z)}{z}$ 展开成部分分式，再乘以 z，再利用常用 z 变换进行反 z 变换。

(3) 留数法：$f[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)z^{n-1}dz=\sum_i \mathrm{Res}\left[F(z)z^{n-1}\right]\qquad n\geq 0$

解：(1) $F(z)=\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}=\dfrac{z}{z-0.5}$

对上式取反变换，则有： $f[n]=0.5^{n}e[n]$

(2) $F(z)=\dfrac{1-0.5z^{-1}}{1-0.25z^{-2}}=\dfrac{z^{2}-0.5z}{z^{2}-0.25}=\dfrac{z}{z+0.5}$

对上式取反变换，则有： $f[n]=(-0.5)^{n}e[n]$

(3) $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{a-z}{z(az-1)}=\dfrac{K_1}{z}+\dfrac{K_2}{az-1}$

$K_1=F(z)\big|_{z=0}=-a$

$K_2=(az-1)\dfrac{F(z)}{z}\bigg|_{z=\frac{1}{a}}=a^{2}-1$

所以有 $\dfrac{F(z)}{z}=-\dfrac{a}{z}+\dfrac{a^{2}-1}{az-1}$

故有 $F(z)=-a+\dfrac{(a^{2}-1)z}{az-1}=-a+\dfrac{a^{2}-1}{a}\dfrac{z}{z-\dfrac{1}{a}}$

对上式取反变换，则有：

$$f[n]=-ad[n]+\frac{a^{2}-1}{a}\left(\frac{1}{a}\right)^{n}e[n]=-ad[n]+(a^{2}-1)a^{-(n-1)}e[n]$$

(4) $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z}{z^{2}+3z+2}=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=\dfrac{K_1}{z+1}+\dfrac{K_2}{z+2}$

$K_1=(z+1)\dfrac{F(z)}{z}\Big|_{z=-1}=-1$

$K_2=(z+2)\dfrac{F(z)}{z}\Big|_{z=-2}=2$

所以有 $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{-1}{z+1}+\dfrac{2}{z+2}$

故有 $F(z)=\dfrac{-z}{z+1}+\dfrac{2z}{z+2}$

对上式取反变换，则有：

$$f[n]=-(-1)^{n}e[n]+2(-2)^{n}e[n]=(-1)^{n}(2^{n+1}-1)e[n]$$

(5) $\frac{F(z)}{z}=\frac{z^2+z+1}{z(z^2+z-2)}=\frac{z^2+z+1}{z(z+2)(z-1)}=\frac{K_1}{z}+\frac{K_2}{z+2}+\frac{K_3}{z-1}$

$K_1=F(z)\big|_{z=0}=-\frac{1}{2}$

$K_2=(z+2)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=-2}=\frac{1}{2}$

$K_3=(z-1)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=1}=1$

所以有$\frac{F(z)}{z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}$

故有$F(z)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z+2}+\frac{z}{z-1}$

对上式取反变换，则有：

$$f[n]=-\frac{1}{2}d[n]+\frac{1}{2}(-2)^n e[n]+e[n]$$

(6) $\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z-0.5)(z-0.25)}=\frac{K_1}{z-0.5}+\frac{K_2}{z-0.25}$

$K_1=(z-0.5)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=0.5}=2$

$K_2=(z-0.25)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=0.25}=-1$

所以有$\frac{F(z)}{z}=\frac{2}{z-0.5}+\frac{-1}{z-0.25}$

故有$F(z)=\frac{2z}{z-0.5}-\frac{z}{z-0.25}$

对上式取反变换，则有：

$$f[n]=2\cdot(0.5)^n e[n]-(0.25)^n e[n]=\left(2^{1-n}-2^{-2n}\right)e[n]$$

(7) $\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{K_1}{z}+\frac{K_2}{z+j}+\frac{K_3}{z-j}$

$K_1=F(z)\big|_{z=0}=1$

$K_2=(z+j)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=-j}=-\frac{1}{2}$

$K_3=(z-j)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=j}=-\frac{1}{2}$

所以有$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+j}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-j}$

故有$F(z)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z+j}-\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-j}$

对上式取反变换，则有：

$$f[n]=d[n]-\frac{1}{2}(-j)^n e[n]-\frac{1}{2}j^n e[n]=d[n]-\cos\frac{np}{2}e[n]$$

（8）$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z^2-1)}=\frac{1}{(z+1)(z-1)^2}=\frac{K_{11}}{(z-1)^2}+\frac{K_{12}}{z-1}+\frac{K_2}{z+1}$

$$K_{11}=\frac{1}{(1-1)!}\left[(z-1)^2\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1}=\frac{1}{2}$$

$$K_{12}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1}=-\frac{1}{4}$$

$$K_2=(z+1)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=-1}=\frac{1}{4}$$

所以有$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1}$

故有$F(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z+1}$

对上式取反变换，则有：

$$f[n]=\frac{1}{2}ne[n]-\frac{1}{4}e[n]+\frac{1}{4}(-1)^n e[n]=\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}(-1)^n-\frac{1}{4}\right)e[n]$$

6.4 **若序列的**z **变换如下，求** $f[0]$。

（1）$F(z)=\frac{z^2}{(z-2)(z-1)}$，$|z|>2$　　（2）$F(z)=\frac{z^2+z+1}{(z-1)(z+0.5)}$，$|z|>1$

（3）$F(z)=\frac{z^2-z}{(z-1)^3}$，$|z|>1$

【知识点窍】本题考察利用z **变换求取序列的初值**

【逻辑推理】初值定理：若 $f[n]\leftrightarrow F(z)$，**且**$\lim_{z\to\infty}F(z)$**存在，则** $f[n]$**的初值为**

$$f[0]=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

解：

（1） $f[0]=\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2}{(z-2)(z-1)}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{z}+\dfrac{2}{z^2}}=1$

（2） $f[0]=\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2+z+1}{(z-1)(z+0.5)}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}}{1-\dfrac{0.5}{z}+\dfrac{0.5}{z^2}}=1$

（3） $F(z)=\dfrac{z^2-z}{(z-1)^3}=\dfrac{z}{(z-1)^2}$

$$f[0]=\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{(z-1)^2}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z-2+\dfrac{1}{z}}=0$$

6.5 **若序列的 z 变换如下，能否应用终值定理？如果能？则求出 $f[\infty]$。**

（1） $F(z)=\dfrac{z^2+1}{\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{3}\right)}$ （2） $F(z)=\dfrac{z^2+z+1}{(z-1)(z+0.5)}$

（3） $F(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)}$

【知识点窍】本题考察利用 z 变换求取序列的终值

【逻辑推理】为了保证 $f[\infty]$ 存在，只有当 $n\to\infty$ 时， $f[n]$ 收敛才可应用，也就是说，其极点必须限制在单位圆内部，在单位圆上只能位于 $z=1$ 点且是一阶极点；否则， $f[n]$ 将随着 $n\to\infty$ 而无限地增长或者为不定值。

终值定理：若 $f[n]\leftrightarrow F(z)$，则若 $f[n]$ 的终值为

$$f[\infty]=\lim_{n\to\infty}f[n]=\lim_{z\to1}(z-1)F(z)$$

解：（1） $f[\infty]=\lim\limits_{n\to\infty}f[n]=\lim\limits_{z\to1}(z-1)F(z)=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{(z-1)(z^2+1)}{\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{3}\right)}=0$

（2） $f[\infty]=\lim\limits_{n\to\infty}f[n]=\lim\limits_{z\to1}(z-1)F(z)=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{z^2+z+1}{z+0.5}=2$

（3） $F(z)$ **收敛域为 $|z|>2$，不满足应用终值定理的条件，故终值不存在。**

6.6　**利用性质求下列序列的 z 变换。**

（1）$\cos\frac{np}{2}e[n]$　　　　（2）$n\sin\frac{np}{2}e[n]$

（3）$\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{np}{2}e[n]$　　　　（4）$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i$

【知识点窍】本题考察 z 变换的性质

【逻辑推理】（1）　**线性性质：z 变换的线性性质表现为齐次性和可加性，即**

若　$\begin{matrix} f_1[n]\leftrightarrow F_1(z) \\ f_2[n]\leftrightarrow F_2(z)\end{matrix}$　　**则**　$af_1[n]+bf_2[n]\leftrightarrow aF_1(z)+bF_2(z)$

式中 a 和 b 为任意常数。

（2）**移位特性：对于双边序列 $f[n]$，其右移 m 位后的单边 z 变换为**

$$f[n-m]\leftrightarrow z^{-m}\left[F(z)+\sum_{k=1}^{m}f[-k]z^k\right]$$

对于单边序列　$f[n-m]e[n-m]\leftrightarrow z^{-m}F(z)$

（3）**尺度变换：若 $f[n]\leftrightarrow F(z)$，则 $f[n]$ 乘以指数序列的 z 变换为**

$$a^n f[n]\leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$$

解：（1）$f[n]=\cos\frac{np}{2}e[n]=\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{p}{2}n}+e^{-j\frac{p}{2}n}\right)e[n]=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{jp}{2}}\right)^n e[n]+\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{jp}{2}}\right)^n e[n]$

因为　$a^n e[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-a}$

则有　$\left(e^{\frac{jp}{2}}\right)^n e(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-e^{\frac{jp}{2}}}$　　$\left(e^{-\frac{jp}{2}}\right)^n e(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-e^{-\frac{jp}{2}}}$

由线性性质可得：

$$F(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-e^{\frac{jp}{2}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-e^{-\frac{jp}{2}}}==\frac{1}{2}\cdot\frac{2z^2-z\left(e^{-j\frac{p}{2}}+e^{j\frac{p}{2}}\right)}{z^2-z\left(e^{-j\frac{p}{2}}+e^{j\frac{p}{2}}\right)+1}=\frac{z^2-z\cos\frac{p}{2}}{z^2-2z\cos\frac{p}{2}+1}=\frac{z^2}{z^2+1}$$

（2）**令** $f_1[n]=\sin\frac{np}{2}e[n]\cdot$，**则有：** $F_1(z)=\frac{z\sin\frac{p}{2}}{z^2-2z\cos\frac{p}{2}+1}=\frac{z}{z^2+1}$

所以 $f[n]=n\sin\frac{np}{2}e[n]=nf_1[n]$，根据 z 变换的微分性质，有：

$$F(z)=-z\frac{d}{dz}F_1(z)=-z\frac{1-z^2}{\left(z^2+1\right)^2}=\frac{z^3-1}{\left(z^2+1\right)^2}$$

（3）令 $f_1[n]=\cos\frac{np}{2}e[n]\cdot$，则有：

$$F_1(z)=\frac{z^2-z\cos\frac{p}{2}}{z^2-2z\cos\frac{p}{2}+1}=\frac{z^2}{z^2+1}$$

所以
$$f[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{np}{2}e[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n f_1[n]$$

根据 z 变换的尺度变换性质，有：

$$F(z)=F_1(2z)=\frac{4z^2}{4z^2+1}$$

（4）令 $f_1[n]=(-1)^n e[n]\cdot$，则有：

$$F_1(z)=\frac{z}{z+1}$$

所以
$$f[n]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i=\sum_{i=0}^{n}f_1[i]$$

故根据时域部分求和性质，有：

$$F(z)=\frac{z}{z-1}F_1(z)=\frac{z^2}{z^2-1}$$

6.7　**试用卷积定理证明以下关系：**

（1）$f[n]*d[n-m]=f[n-m]$

（2）$e[n]*e[n]=(n+1)e[n]$

【知识点窍】本题考察 z 变换的性质之一 —— 卷积定理

【逻辑推理】卷积定理：若 $f_1[n]\leftrightarrow F_1(z),\ f_2[n]\leftrightarrow F_2(z)$，**则** $f_1[n]$ **与** $f_2[n]$ **卷积和的** z **变换为**

$$f_1[n]*f_2[n]\leftrightarrow F_1(z)\cdot F_2(z)$$

证明：(1) 因$d[n]\leftrightarrow 1$，根据 z 变换的移位特性，有：

$$d[n-m]\leftrightarrow z^{-m}$$

令 $f[n]\leftrightarrow F(z)$，则根据卷积定理有：$f[n]*d[n-m]\leftrightarrow z^{-m}F(z)$

根据 z 变换的移位特性，可得：

$$Z^{-1}\left[z^{-m}F(z)\right]=f[n-m]$$

即有：
$$f[n]*d[n-m]=f[n-m]$$

(2) 令 $f_1[n]=f_2[n]=e[n]$，则有 $F_1(z)=F_2(z)=\dfrac{z}{z-1}$

$$F_1(z)\cdot F_2(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2}$$

故有 $\dfrac{F_1(z)\cdot F_2(z)}{z}=\dfrac{z}{(z-1)^2}=\dfrac{1}{(z-1)^2}+\dfrac{1}{z-1}$

即有
$$F_1(z)\cdot F_2(z)=\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

对上式求反变换，有
$$Z^{-1}[F_1(z)\cdot F_2(z)]=ne[n]+e[n]$$

根据卷积定理有：
$$f_1[n]*f_2[n]\leftrightarrow F_1(z)\cdot F_2(z)$$

所以
$$f_1[n]*f_2[n]=Z^{-1}[F_1(z)\cdot F_2(z)]=ne[n]+e[n]$$

即有：
$$e[n]*e[n]=(n+1)e[n]$$

6.8 已知上题的结论$e[n]*e[n]=(n+1)e[n]$，试求$ne[n]$的z变换。

【知识点窍】本题考察z变换的性质。

【逻辑推理】(1) 线性性质：z变换的线性性质表现为齐次性和可加性，即

若 $\begin{matrix} f_1[n]\leftrightarrow F_1(z) \\ f_2[n]\leftrightarrow F_2(z)\end{matrix}$ 则 $af_1[n]+bf_2[n]\leftrightarrow aF_1(z)+bF_2(z)$

式中 a 和 b 为任意常数。

(2) 卷积定理：若 $f_1[n]\leftrightarrow F_1(z), f_2[n]\leftrightarrow F_2(z)$，则 $f_1[n]$与 $f_2[n]$卷积和的z变换为

$$f_1[n]*f_2[n]\leftrightarrow F_1(z)\cdot F_2(z)$$

解：令 $f_1[n]=f_2[n]=e[n]$**，则有** $F_1(z)=F_2(z)=\dfrac{z}{z-1}$

所以 $$F_1(z)\cdot F_2(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2}$$

令 $f_3[n]=ne[n]$，$f_4[n]=e[n]$，**则有** $F_4(z)=\dfrac{z}{z-1}$

根据卷积定理 $$f_1[n]*f_2[n]\leftrightarrow F_1(z)\cdot F_2(z)$$

以及已知条件 $e[n]*e[n]=(n+1)e[n]$**，即** $f_1[n]*f_2[n]=f_3[n]+f_4[n]$

则可得： $$f_3[n]+f_4[n]\leftrightarrow F_1(z)\cdot F_2(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2}$$

再由 z **变换线性可知：** $f_3[n]+f_4[n]\leftrightarrow F_3(z)+F_4(z)$

则有： $$F_3(z)=F_1(z)\cdot F_2(z)-F_4(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

即 $$ne[n]\leftrightarrow\frac{z}{(z-1)^2}$$

6.9 **利用卷积定理，求下述序列的卷积** $y[n]=f[n]*h[n]$**。**

（1） $f(n)=a^n e(n),\qquad h(n)=d(n-2)$

（2） $f[n]=a^n e[n],\qquad h[n]=e[n-1]$

（3） $f[n]=a^n e[n],\qquad h[n]=b^n e[n]$

【知识点窍】本题考察 z **变换的性质（卷积定理）以及反变换求法。**

【逻辑推理】卷积定理：若 $f_1[n]\leftrightarrow F_1(z), f_2[n]\leftrightarrow F_2(z)$**，则** $f_1[n]$**与** $f_2[n]$**卷积和的** z **变换为**

$$f_1[n]*f_2[n]\leftrightarrow F_1(z)\cdot F_2(z)$$

解：（1） $f(n)=a^n e(n)$**，则有** $$F(z)=\frac{z}{z-a}$$

因 $d[n]\leftrightarrow 1$**，** $h(n)=d(n-2)$**，**

根据 z **变换的移位特性，有：** $H[z]=z^{-2}$

所以 $$F(z)\cdot H(z)=\frac{z}{z-a}\cdot z^{-2}=\frac{1}{z(z-a)}$$

根据卷积定理 $$y[n]=f[n]*h[n]\leftrightarrow F(z)\cdot H(z)$$

即有 $$Y(z)=F(z)\cdot H(z)=\frac{1}{z(z-a)}$$

求其 z 变换，将$Y(z)$进行部分分式展开，可得：

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{z^2(z-a)}=\frac{K_{11}}{z^2}+\frac{K_{12}}{z}+\frac{K_2}{z-a}$$

其中：$K_{11}=\frac{1}{(1-1)!}\left[z^2\frac{Y(z)}{z}\right]_{z=0}=-\frac{1}{a}$

$$K_{12}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{Y(z)}{z}\right]_{z=0}=-\frac{1}{a^2}$$

$$K_2=(z-a)\frac{Y(z)}{z}\Big|_{z=a}=\frac{1}{a^2}$$

所以有 $$\frac{Y(z)}{z}=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{z-a}$$

故 $$Y(z)=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{z}{z-a}$$

对上式求反变换有：$y[n]=-\frac{1}{a}d[n-1]-\frac{1}{a^2}d[n]+\frac{1}{a^2}\cdot a^n e[n]$

（2） $f(n)=a^n e(n)$，则有 $F(z)=\frac{z}{z-a}$

因 $e[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-1}$，$h(n)=e(n-1)$

根据 z 变换的移位特性，有： $H[z]=z^{-1}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{1}{z-1}$

所以 $$F(z)\cdot H(z)=\frac{z}{z-a}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{z}{(z-1)(z-a)}$$

根据卷积定理 $$y[n]=f[n]*h[n]\leftrightarrow F(z)\cdot H(z)$$

即有 $$Y(z)=F(z)\cdot H(z)=\frac{z}{(z-1)(z-a)}$$

求其 z 变换，将$Y(z)$进行部分分式展开，可得：

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z-a)}=\frac{K_1}{z-1}+\frac{K_2}{z-a}$$

其中： $K_1=(z-1)\frac{Y(z)}{z}\Big|_{z=1}=\frac{1}{1-a}$

$K_2=(z-a)\frac{Y(z)}{z}\Big|_{z=a}=\frac{1}{a-1}$

所以有 $\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{z-a}$

故 $Y(z)=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{1}{a-1}\cdot\frac{z}{z-a}$

对上式求反变换有： $y[n]=\frac{1}{1-a}e[n]+\frac{1}{a-1}a^n e[n]=\frac{1}{a-1}\left(a^n-1\right)e[n]$

（3） $f(n)=a^n e(n)$，**则有** $F(z)=\frac{z}{z-a}$

$h[n]=b^n e[n]$， **则有** $H(z)=\frac{z}{z-b}$

所以 $F(z)\cdot H(z)=\frac{z}{z-a}\cdot\frac{z}{z-b1}=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$

根据卷积定理 $y[n]=f[n]*h[n]\leftrightarrow F(z)\cdot H(z)$

即有 $Y(z)=F(z)\cdot H(z)=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$

求其 z **变换，将**$Y(z)$**进行部分分式展开，可得：**

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z}{(z-a)(z-b)}=\frac{K_1}{z-a}+\frac{K_2}{z-b}$$

其中： $K_1=(z-a)\frac{Y(z)}{z}\Big|_{z=a}=\frac{a}{a-b}$

$K_2=(z-b)\frac{Y(z)}{z}\Big|_{z=b}=\frac{b}{b-a}$

所以有 $\frac{Y(z)}{z}=\frac{a}{a-b}\cdot\frac{1}{z-a}+\frac{b}{b-a}\cdot\frac{1}{z-b}$

故 $Y(z)=\frac{a}{a-b}\cdot\frac{z}{z-a}+\frac{b}{b-a}\cdot\frac{z}{z-b}$

对上式求反变换有：

$$y[n]=\frac{a}{a-b}\cdot a^n e[n]+\frac{b}{b-a}\cdot b^n e[n]=\frac{1}{a-b}\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)e[n]$$

6.10 **用** z **变换求下列齐次差分方程。**

（1） $y[n]-0.9y[n-1]=0, \qquad y[-1]=1$

（2） $y[n]-y[n-1]+2y[n-2]=0, \qquad y[-1]=0, y[-2]=2$

（3） $y[n+2]-y[n+1]-2y[n]=0, \qquad y[0]=0, y[1]=3$

（4） $y[n]-y[n-1]-2y[n-2]=0, \qquad y[0]=0, y[1]=3$

【知识点窍】本题考察用 z 变换求解系统响应的方法。

【逻辑推理】利用 z 变换求解系统的差分方程的响应一般步骤为：

（1）对给定的差分方程进行 z 变换，将时域内的激励 $f[n]$ 和响应 $y[n]$ 分别变换成 z 域内的激励 $F(z)$ 和响应 $Y(z)$。

（2）对差分方程 z 变换后得到的代数方程求解，求得 z 域内的响应 $Y(z)$。

（3）对 $Y(z)$ 进行 z 反变换，即可求的得待求的时域响应 $y[n]$。

解：（1）对差分方程 z 变换，根据移位特性，可得

$$Y(z)-0.9\left[z^{-1}Y(z)+y[-1]\right]=0$$

则

$$Y(z)=\frac{0.9y[-1]}{1-0.9z^{-1}}$$

将初始条件 $y[-1]=1$ 代入 $Y(z)$ 的式中，整理后可得

$$Y(z)=\frac{0.9}{1-0.9z^{-1}}=\frac{0.9z}{z-0.9}$$

对 $Y(z)$ 进行 z 反变换，可得

$$y[n]=0.9^{n+1}e[n]$$

（2）对差分方程 z 变换，根据移位特性，可得

$$Y(z)-\left[z^{-1}Y(z)+y[-1]\right]+2\left[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]\right]=0$$

则

$$Y(z)=\frac{y[-1]-2y[-2]-2y[-1]z^{-1}}{1-z^{-1}+2z^{-2}}$$

将初始条件 $y[-1]=0, y[-2]=2$ 代入 $Y(z)$ 的式中，整理后可得

$$Y(z)=\frac{-4z^{2}}{z^{2}-z+2}$$

由此可得： $$\frac{Y(z)}{z}=\frac{-4z}{z^2-z+2}=\frac{-\frac{8}{3}}{z-2}+\frac{-\frac{8}{6}}{z+1}$$

即得： $$Y(z)=\frac{-\frac{8}{3}z}{z-2}+\frac{-\frac{8}{6}z}{z+1}$$

对上式求 z **反变换，即得**

$$y[n]=-\frac{8}{3}\left[2^n+\frac{1}{2}(-1)^n\right]e[n]$$

（3）**对差分方程** z **变换，根据移位特性，可得**

$$z^2\left[Y(z)-y[0]-z^{-1}y[1]\right]-z\left[Y(z)-y[0]\right]-2Y(z)=0$$

则 $$Y(z)=\frac{y[0]z^2+y[1]z-y[0]z}{z^2-z-2}$$

将初始条件 $y[0]=0, y[1]=3$ **代入** $Y(z)$ **的式中，整理后可得**

$$Y(z)=\frac{3z}{z^2-z-2}=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z+1}$$

对 $Y(z)$ **进行** z **反变换，可得**

$$y[n]=\left[2^n-(-1)^n\right]e[n]$$

（4）**对差分方程** z **变换，根据移位特性，可得**

$$Y(z)-\left[z^{-1}Y(z)+y[-1]\right]-2\left[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]\right]=0$$

则 $$Y(z)=\frac{y[-1]+2y[-2]+2y[-1]z^{-1}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}$$

由给定的初始条件 $y[0]=0, y[1]=3$ **确定所需的初始条件** $y[-1]$ **和** $y[-2]$ **，可以令差分方程中的** $n=1$ **和** $n=0$ **，则有**

$$\begin{aligned}&y[1]-y[0]-2y[-1]=0\\&y[0]-y[-1]-2y[-2]=0\end{aligned}$$

从中解出 $y[-1]=\frac{3}{2}, y[-2]=-\frac{3}{4}$

将初始条件 $y[-1]$ **和** $y[-2]$ **代入** $Y(z)$ **的式中，整理后可得**

$$Y(z)=\frac{3z}{z^2-z-2}=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z+1}$$

对$Y(z)$进行 z 反变换，可得

$$y[n]=\left[2^n-(-1)^n\right]e[n]$$

6.11 画出图 6.1 所示系统的 z 域模拟图，并求该系统的单位响应和阶跃响应。

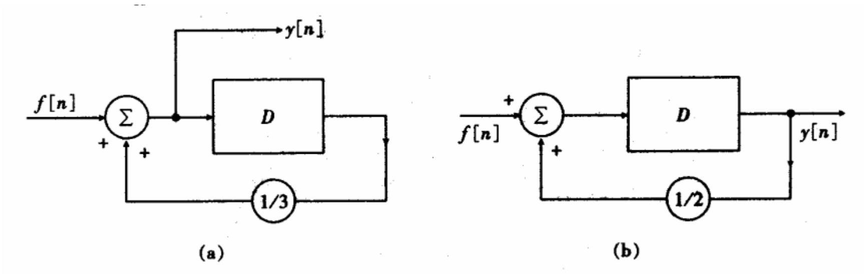


图 6.1

【知识点窍】本题考察系统 z 域模拟图的绘制方法。

【逻辑推理】首先由时域模拟图得到系统的差分方程，再由此求出系统的函数。根据系统的函数的定义即可求出单位响应和阶跃响应。

解：(a) 由 z 域模拟图可得： $y[n]=f[n]+\frac{1}{3}y[n-1]$

即差分方程为 $y[n]-\frac{1}{3}y[n-1]=f[n]$

在零状态下对差分方程两边取 z 变换，得：

$$\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)Y(z)=F(z)$$

故

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Z 域模拟图，如图 6.2

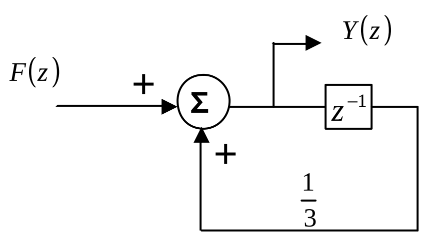


图 6.2

(1) 求系统的单位响应$h[n]$。

已经求得系统函数 $H(z)$，求其 z 反变换即求得 $h[n]$。

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

对上式取反变换即得单位响应

$$h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}e[n]$$

（2）求系统的阶跃响应 $g[n]$。

当输入 $f(n)=e(n)$ 时，有 $F(z)=\frac{z}{z-1}$

$$G(z)=H(z)\cdot F(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}\cdot\frac{z}{z-1}$$

将 $G(z)$ 进行部分分式展开得：

$$\frac{G(z)}{z}=\frac{z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-1)}=\frac{K_1}{z-\frac{1}{3}}+\frac{K_2}{z-1}$$

求出系数 $K_1=-\frac{1}{2},K_2=\frac{3}{2}$

所以有：

$$G(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{3}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-1}$$

取 $G(z)$ 的反变换即得阶跃响应：

$$g[n]=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}e[n]+\frac{3}{2}e[n]=\frac{1}{2}\left(3-3^{-n}\right)e[n]$$

（b）由 z 域模拟图可得： $y[n+1]-0.5y[n]=f[n]$

在零状态下对差分方程两边取 z 变换，得：

$$zY(z)-0.5Y(z)=F(z)$$

故

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{1}{z-0.5}$$

Z **域模拟图，如图** 6.3

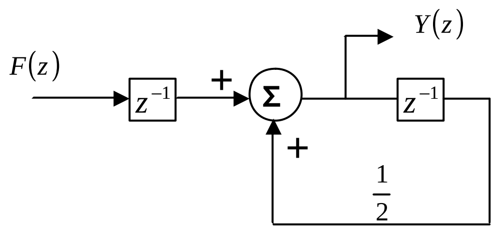


图 6.3

（1**）求系统的单位响应**$h[n]$。

已经求得系统函数$H(z)$**，求其** z **反变换即求得**$h[n]$。

$$H(z)=\frac{1}{z-0.5}$$

将$H(z)$**进行部分分式展开，得到：**

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{1}{z(z-0.5)}=\frac{K_1}{z}+\frac{K_2}{z-0.5}$$

求出系数$K_1=-2,K_2=2$

所以有： $$H(z)=-2+\frac{2z}{z-0.5}$$

对上式取反变换即得单位响应

$$h[n]=-2d[n]+2\cdot(0.5)^n e[n]$$

（2**）求系统的阶跃响应**$g[n]$。

当输入 $f(n)=e(n)$**时，有** $F(z)=\frac{z}{z-1}$

$$G(z)=H(z)\cdot F(z)=\frac{1}{z-0.5}\cdot\frac{z}{z-1}$$

将$G(z)$**进行部分分式展开得：**

$$\frac{G(z)}{z}=\frac{K_1}{z-0.5}+\frac{K_2}{z-1}$$

求出系数$K_1=-2,K_2=2$

所以有： $$G(z)=\frac{-2z}{z-0.5}+\frac{2z}{z-1}$$

取$G(z)$**的反变换即得阶跃响应：**

$$g[n]=-2(0.5)^n e[n]+2e[n]=2\cdot(1-0.5^n)e[n]$$

6.12 **已知系统的差分方程、输入序列和初始状态如下，试用**z**域分析法求系统的完全响应。**

（1） $y[n]+0.5y[n-1]=f[n] \qquad f[n]=(0.5)^n e[n], \qquad y[-1]=1$

（2） $y[n]-0.5y[n-1]=f[n]-0.5f[n-1] \qquad f[n]=e[n], \qquad y[-1]=0$

【知识点窍】本题考察用z**变换求解系统全响应的方法。**

【逻辑推理】利用z**变换求解系统的差分方程的响应一般步骤为：**

（1）对给定的差分方程进行z**变换，将时域内的激励**$f[n]$**和响应**$y[n]$**分别变换成**z**域内的激励**$F(z)$**和响应**$Y(z)$**。**

（2）对差分方程z**变换后得到的代数方程求解，求得**z**域内的响应**$Y(z)$**。**

（3）对$Y(z)$**进行**z**反变换，即可求得全响应**$y[n]$**。**

解：（1）对差分方程两边取z**变换，根据移位特性，可得**

$$Y(z)+0.5\left[z^{-1}Y(z)+y[-1]\right]=F(z) \tag{1}$$

当输入$f[n]=(0.5)^n e[n]$**时，有** $F(z)=\dfrac{z}{z-0.5}$

将初始条件$y[-1]=1, F(z)=\dfrac{z}{z-0.5}$**代入（1）式，即得**

$$Y(z)=\frac{0.5z}{z-0.5}$$

对其取反变换即得到系统的全响应为

$$y[n]=(0.5)^{n+1}e[n]$$

（2）对差分方程两边取z**变换，根据移位特性，可得**

$$Y(z)-0.5\left[z^{-1}Y(z)+y[-1]\right]=F(z)-0.5\left[z^{-1}F(z)+f[-1]\right] \tag{2}$$

当输入$f(n)=e(n)$**时，有**$F(z)=\dfrac{z}{z-1}$**，** $f[-1]=0$

将初始条件$y[-1]=0$**，**$F(z)=\dfrac{z}{z-1}$**，**$f[-1]=0$**代入（2）式，有：**

$$Y(z)-0.5\left[z^{-1}Y(z)\right]=\frac{z}{z-1}-\frac{0.5}{z-1}$$

故有：

$$Y(z)=\frac{\frac{z}{z-1}-\frac{0.5}{z-1}}{1-0.5z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

对上式取反变换即得到系统的全响应为：

$$y[n]=e[n]$$

6.13 **设系统的差分方程为** $y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=f[n]$ **，当** $f[n]=2e[n]$ **，初始状态** $y[-1]=3, y[-2]=2$ **时，求系统的响应** $y[n]$**。**

【知识点窍】本题考察用 z **变换求解系统全响应的方法。**

【逻辑推理】利用 z **变换求解系统的差分方程的响应一般步骤为：**

(1) 对给定的差分方程进行 z **变换，将时域内的激励** $f[n]$ **和响应** $y[n]$ **分别变换成** z **域内的激励** $F(z)$ **和响应** $Y(z)$**。**

(2) 对差分方程 z **变换后得到的代数方程求解，求得** z **域内的响应** $Y(z)$**。**

(3) 对 $Y(z)$ **进行** z **反变换，即可求得全响应** $y[n]$**。**

解：对差分方程 z **变换，根据移位特性，可得**

$$Y(z)-5\left[z^{-1}Y(z)+y[-1]\right]+6\left[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]\right]=F(z)$$

当输入 $f(n)=2e(n)$ **时，有** $F(z)=\frac{2z}{z-1}$

将初始条件 $F(z)=\frac{2z}{z-1}$ **，** $y[-1]=3, y[-2]=2$ **代入上式，可得：**

$$Y(z)-5\left[z^{-1}Y(z)+3\right]+6\left[z^{-2}Y(z)+3z^{-1}+2\right]=\frac{2z}{z-1}$$

故有：

$$Y(z)=\frac{\frac{2z}{z-1}-18z^{-1}+3}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\frac{5z^3-21z^2+18z}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{z(5z-6)(z-3)}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

$$=\frac{z(5z-6)}{(z-1)(z-2)}$$

将上式进行部分分式展开，得到：

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{5z-6}{(z-1)(z-2)}=\frac{K_1}{z-1}+\frac{K_2}{z-2}$$

求出系数 $K_1=1, K_2=4$

故
$$Y(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{4z}{z-2}$$

对上式取反变换即得到系统响应：

$$y(n)=e(n)+4(2)^n e(n)=\left[1+2^{n+2}\right]e(n)$$

6.14 **若一系统的输入** $f[n]=d[n]-4d[n-1]+2d[n-2]$**，系统函数为**

$$H(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

试求系统的零状态响应。

【知识点窍】本题考察利用系统函数求解系统零状态响应的方法。

【逻辑推理】系统函数定义为系统零状态响应和激励的 z **变换之比。即** $H(z)=\dfrac{Y_{zs}(z)}{F(z)}$**，由此可得：**$Y_{zs}(z)=H(z)F(z)$**，再将其求** z **反变换即可得零状态响应。**

解：当输入 $f[n]=d[n]-4d[n-1]+2d[n-2]$**时，则有：**

$$F(z)=1-4z^{-1}+2z^{-2}$$

已知系统函数 $H(z)$**，可得系统的零状态响应的象函数为：**

$$Y_{zs}(z)=H(z)\cdot F(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}\cdot(1-4z^{-1}+2z^{-2})=\frac{z^2-4z+2}{(z-1)(z-0.5)}$$

将上式进行部分分式展开，得到：

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{z^2-4z+2}{z(z-1)(z-0.5)}=\frac{K_1}{z}+\frac{K_2}{z-1}+\frac{K_3}{z-0.5}$$

求出系数 $K_1=4, K_2=-2, K_3=-1$

故
$$Y_{zs}(z)=4-\frac{2z}{z-1}-\frac{z}{z-0.5}$$

对上式取反变换即得到系统的零状态响应：

$$y(n)=4d[n]-2e[n]-0.5^n e[n]=4d[n]-(2+0.5^n)e[n]$$

6.15　**某数字系统的差分方程为** $y[n]-0.7y[n-1]+0.12y[n-2]=2f[n]-f[n-1]$

（1）**求系统函数** $H(z)$；

（2）**求单位响应** $h[n]$。

【知识点窍】本题考察由差分方程求解系统函数的方法。

【逻辑推理】系统函数定义为系统零状态响应和激励的 z **变换之比。即** $H(z)=\dfrac{Y_{zs}(z)}{F(z)}$。**由此可知，将差分方程两边按照零状态条件下进行** z **变换，然后求出响应和激励的** z **变换比值即为系统函数。**

解：（1）**求系统函数** $H(z)$。

在零状态下对差分方程两边取 z **变换，得：**

$$Y(z)-0.7z^{-1}Y(z)+0.12z^{-2}Y(z)=2F(z)-z^{-1}F(z)$$

故有：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{2-z^{-1}}{1-0.7z^{-1}+0.12z^{-2}}=\frac{2z^2-z}{z^2-0.7z+0.12}$$

（2）**求单位响应** $h[n]$。

已求得系统函数 $H(z)$，**取其** z **反变换即求得** $h[n]$。

将 $H(z)$ **进行部分分式展开得：**

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{2z-1}{z^2-0.7z+0.12}=\frac{2z-1}{(z-0.3)(z-0.4)}=\frac{K_1}{z-0.3}+\frac{K_2}{z-0.4}$$

求出系数 $K_1=4, K_2=-2$

所以有　$$H(z)=\frac{4z}{z-0.3}-\frac{2z}{z-0.4}$$

对上式取反变换即得到系统的单位响应：

$$h(n)=4(0.3)^n e[n]-2(0.4)^n e[n]=2\left[2\cdot(0.3)^n-0.4^n\right]e[n]$$

6.16　**设一系统的差分方程为**　$y[n]-\dfrac{1}{3}y[n-1]=f[n]$

（1）**试求单位响应** $h[n]$；

（2）若系统的零状态响应为 $y[n]=3\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\cdot e[n]$**，试求输入信号** $f[n]$**。**

（3）试判断该系统是否稳定？

【知识点窍】本题考察系统函数定义及系统是否稳定的判定的方法。

【逻辑推理】系统函数定义为系统零状态响应和激励的 z **变换之比。即** $H(z)=\dfrac{Y_{zs}(z)}{F(z)}$

系统稳定的条件是其单位响应绝对可和，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$**，即其系统函数** $H(z)$ **全部极点必须位于单位圆内。**

解：（1）求单位响应 $h[n]$**。**

在零状态下对差分方程两边取 z **变换，得：**

$$Y(z)-\frac{1}{3}z^{-1}Y(z)=F(z)$$

故有：

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

对上式取反变换即得单位响应 $h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n e[n]$

（2）系统的零状态响应为 $y[n]=3\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\cdot e[n]$**，则有：**

$$Y(z)=3\left[\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-\frac{1}{3}}\right]$$

由求得系统函数 $H(z)$**，则有：**

$$F(z)=\frac{Y(z)}{H(z)}=\frac{3\left[\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-\frac{1}{3}}\right]}{\frac{z}{z-\frac{1}{3}}}=3\left[\frac{z-\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{2}}-1\right]=\frac{\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}$$

将$F(z)$进行部分分式展开，得到：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{\frac{1}{2}}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)}=\frac{K_1}{z}+\frac{K_2}{z-\frac{1}{2}}$$

求出系数$K_1=-1,K_2=1$

故：

$$F(z)=-1+\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

对上式取反变换即得输入信号为：

$$f[n]=-d[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^n e[n]$$

（3）由于$H(z)$的极点为$z_1=\frac{1}{3}$，它位于单位圆内，故该系统是稳定的。

6.17 设离散系统输入为$f[n]=e[n]$时，零状态响应为 $y[n]=2(1-0.5^n)e[n]$，若输入为$f[n]=0.5^n e[n]$时，求系统的响应；该系统是否稳定？

【知识点窍】本题考察系统函数定义及系统是否稳定的判定的方法。

【逻辑推理】系统函数定义为系统零状态响应和激励的z变换之比。即 $H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}$

系统稳定的条件是其单位响应绝对可和，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$，即其系统函数$H(z)$全部极点必须位于单位圆内。

解：系统输入$f(n)=e(n)$时，有$F(z)=\frac{z}{z-1}$

零状态响应为 $y[n]=2(1-0.5^n)e[n]$，即有：

$$Y(z)=\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{z-0.5}$$

故

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{z-0.5}}{\frac{z}{z-1}}=2-\frac{2(z-1)}{z-0.5}=\frac{1}{z-0.5}$$

若输入为 $f[n]=0.5^n e[n]$**，则有** $F(z)=\dfrac{z}{z-0.5}$

故：$Y(z)=H(z)\cdot F(z)=\dfrac{1}{z-0.5}\cdot\dfrac{z}{z-0.5}=\dfrac{z}{(z-0.5)^2}$

对上式求 z **反变换，即得系统响应为：**

$$y[n]=n(0.5)^{n-1}e[n]$$

由于系统函数 $H(z)$**的极点为** $z_1=0.5$**，它位于单位圆内，故该系统是稳定的。**

6.18 **某一离散系统的系统函数为** $H(z)=\dfrac{z^2+3z+2}{2z^2-(k-1)z+1}$**，为使系统稳定，常数** K **应满足什么条件？**

【知识点窍】本题考察系统是否稳定的判定的方法。

【逻辑推理】系统稳定的条件是其单位响应绝对可和，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$**，即其系统函数** $H(z)$ **全部极点必须位于单位圆内。**

解：系统函数

$$H(z)=\frac{z^2+3z+2}{2z^2-(k-1)z+1}=\frac{(z+1)(z+2)}{2z^2-(k-1)z+1}$$

求系统函数 $H(z)$**的极点，有：** $2z^2-(k-1)z+1=0$

求解极点为 $z_{1,2}=\dfrac{(k-1)\pm\sqrt{(k-1)^2-8}}{4}$

为使系统稳定，系统函数 $H(z)$**的极点应位于单位圆内，故有：**

$$\left|\frac{(k-1)\pm\sqrt{(k-1)^2-8}}{4}\right|<1$$

解上述方程求得：$1-2\sqrt{3}<k<1+2\sqrt{3}$

当 $\dfrac{(k-1)\pm\sqrt{(k-1)^2-8}}{4}=-2$ **时，求得** $k=-\dfrac{7}{2}$**，即有：**

$$z_1=-2\text{，}\quad z_2=-\frac{1}{4}$$

从而求得$H(z)=\dfrac{z^2+3z+2}{2z^2+\dfrac{9}{2}z+1}=\dfrac{(z+1)(z+2)}{2(z+2)\left(z+\dfrac{1}{4}\right)}=\dfrac{z+1}{2\left(z+\dfrac{1}{4}\right)}$，系统稳定。

当$\dfrac{(k-1)\pm\sqrt{(k-1)^2-8}}{4}=-1$时，求得$k=-2$，即有：

$$z_1=-1，\ z_2=-\frac{1}{2}$$

从而求得$H(z)=\dfrac{z^2+3z+2}{2z^2+3z+1}=\dfrac{(z+1)(z+2)}{2(z+1)\left(z+\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{z+2}{2\left(z+\dfrac{1}{2}\right)}$，系统稳定。

所以，为使系统稳定，常数 K 应满足：

$$1-2\sqrt{3}<k<1+2\sqrt{3}\ \text{或}\ k=-\frac{7}{2}$$

6.19　设有系统函数$H(z)=\dfrac{z^2-2z+4}{z^2-0.5z+0.25}$

（1）试画出系统 Z 域模拟图；

（2）系统是否稳定？

（3）试画出系统的幅频特性和相频特性。

【知识点窍】本题考察由系统函数求解频率响应的方法。

【逻辑推理】若离散系统的系统函数$H(z)$的极点全部在单位圆内，则$H\left(e^{jw}\right)$称为离散系统的频率响应或频率特性。$H\left(e^{jw}\right)=H(z)\big|_{z=e^{jw}}$

即　$$H\left(e^{jw}\right)=\left|H\left(e^{jw}\right)\right|e^{jj(w)}$$

$\left|H\left(e^{jw}\right)\right|$称为离散系统的幅频响应，其随$w$变化的曲线称为系统的幅频特性曲线；$j(w)$称为离散系统的相频响应，其随$w$变化的曲线称为系统的相频特性曲线。

解：

（1）系统函数

$$H(z)=\frac{z^2-2z+4}{z^2-0.5z+0.25}=\frac{1-2z^{-1}+4z^{-2}}{1-0.5z^{-1}+0.25z^{-2}}$$

画出系统 Z 域模拟图，如图 6.4。

（2）求系统函数$H(z)$的极点，即求$z^2-0.5z+0.25=0$

可得 $z_1=\dfrac{0.5+0.5\sqrt{3}j}{2}$，$z_2=\dfrac{0.5-0.5\sqrt{3}j}{2}$

$H(z)$的两个极点均位于单位圆内，故该系统是稳定的。

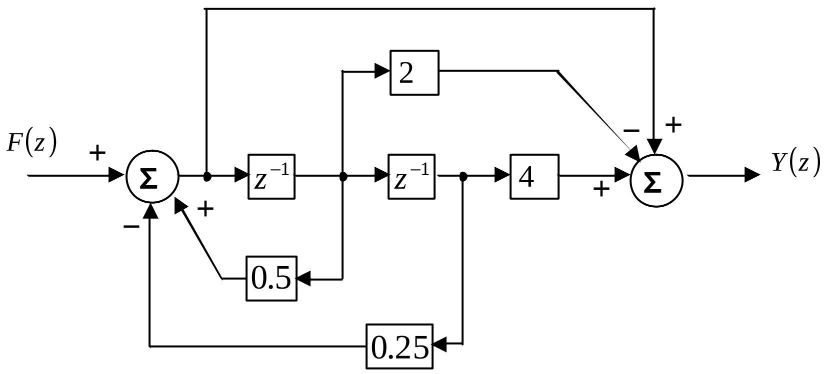
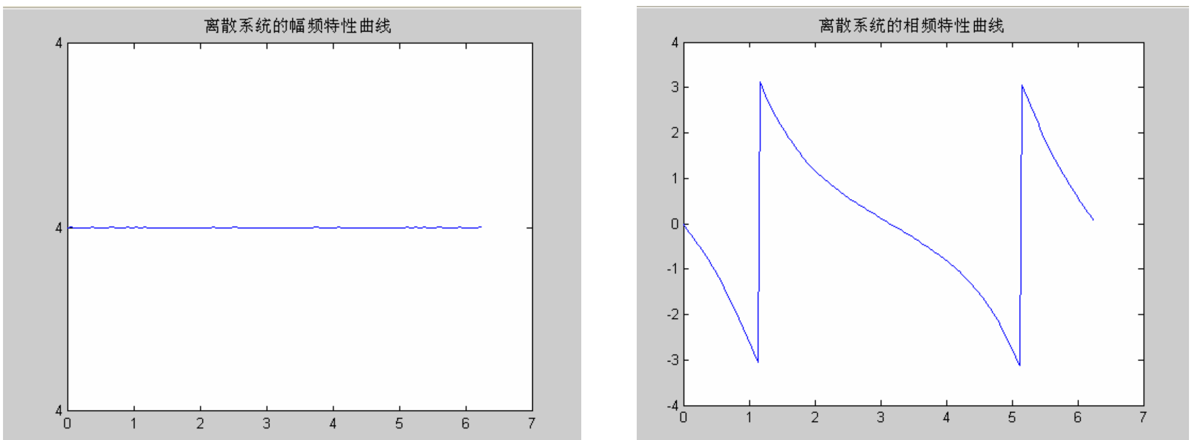


图 6.4

（3）由（2）可知系统函数的极点为均位于单位圆内，所以系统的频率响应为

$$H\left(e^{jw}\right)=H(z)\big|_{z=e^{jw}}=\left.\frac{z^2-2z+4}{z^2-0.5z+0.25}\right|_{z=e^{jw}}=\frac{\left(e^{jw}\right)^2-2\left(e^{jw}\right)+4}{\left(e^{jw}\right)^2-0.5\left(e^{jw}\right)+0.25}$$



(a) (b)

图 6.5

$w=0$ 时，$\left|H\left(e^{jw}\right)\right|=\dfrac{|B|}{|A|}=\dfrac{3}{0.75}=4$；

$0<w<p$ 时，随着 w 的增加，$\left|H\left(e^{jw}\right)\right|=\dfrac{|B|}{|A|}$ 值保持不变

$w=p$ 时，$\left|H\left(e^{jw}\right)\right|=\dfrac{|B|}{|A|}=\dfrac{7}{1.75}=4$

$0 < w < p$ 时，随着 w 的增加，$\left|H\left(e^{jw}\right)\right| = \dfrac{|B|}{|A|}$ 值保持不变

$w = p$ 时，$\left|H\left(e^{jw}\right)\right| = \dfrac{|B|}{|A|} = \dfrac{3}{0.75} = 4$

同理，可以分析 $j(w)$ 随 w 变化的情况。由此可得幅频特性和相频特性曲线如图 6.5 所示。

6.20　已知连续系统的 $H(s)$ 为　$H(s) = \dfrac{2}{(s+1)(s+3)}$，试用冲激响应不变法，求对应于 $H(s)$ 的离散系统函数 $H(z)$。

【知识点窍】本题考察由连续系统函数求解对应的离散系统的系统函数的方法。

【逻辑推理】$H(z)$ 和 $H(s)$ 之间的关系为

$$
\begin{aligned}
H(z) &= Z^{-1}[h(n)] = \frac{1}{2pj}\oint_C \frac{H(s)}{1 - z^{-1}e^{sT}}\,ds \\
&= \sum_i \operatorname{Re}s\left[\frac{H(s)}{1 - z^{-1}e^{sT}}\right]_{s=s_i}
\end{aligned}
$$

式中，s_i 为 $H(s)$ 的极点，T 为抽样周期。

解：已知

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$$

$H(s)$ 的极点为 $s_1 = -1, s_2 = -3$，所以

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \left[\frac{2}{(s+1)(s+3)\left(1 - z^{-1}e^{sT}\right)} \cdot (s+1)\right]_{s=-1} + \left[\frac{2}{(s+1)(s+3)\left(1 - z^{-1}e^{sT}\right)} \cdot (s+3)\right]_{s=-3} \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-T}} - \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-3T}} \\
&= \frac{z}{z - e^{-T}} - \frac{z}{z - e^{-3T}}
\end{aligned}
$$