高数叔

打开微信学高数

级数

常数项级数

①调和级数是发散的

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\cdots$$

②等比级数（也叫几何级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n=1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots$$

当 $|q|<1$ 时收敛，和为 $\frac{1}{1-q}$；

当 $|q|\geq 1$ 时发散。

③p-级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

当 $p>1$ 时收敛；当 $p\leq 1$ 时发散。

其他

函数项级数

幂级数

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域的一般方法：

[1]先求出 ρ：$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$；

[2]再通过 $R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & \text{当}\ \rho\neq 0\ \text{时}\\ +\infty, & \text{当}\ \rho=0\ \text{时}\\ 0, & \text{当}\ \rho=+\infty\ \text{时}\end{cases}$，

确定收敛区间（－R，R）

[3]然后将 x=R 和 x=－R 分别代入 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,判断在端点 R和-R 的敛散性。

傅里叶级数

设 $y=f(x),x\in[-\pi,\pi]$，则傅里叶系数公式为：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,n=1,2,\cdots$$

而由此公式求出系数所得到的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

就称为 $f(x)$ 的傅里叶级数。

狄利克雷收敛定理：

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，如果它满足：

①在一个周期内连续或者只有有限个第一类间断点

②在一个周期内至多有有限个极值点

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases}f(x), & \text{x是连续点}\\ \frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)], & \text{x是间断点}\end{cases}$$

正项级数收敛判别法

正项级数是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，其中 $u_n\geq 0$。

①比较判别法：

a 一般形式：

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均为正项级数，且 $u_n\leq v_n$，如果 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，大级数收敛所以小级数收敛；如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，小级数发散，所以大级数发散。

b 极限形式：

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均为正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\rho,(0<\rho<+\infty)$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 具有相同的敛散性。

②比值判别法：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

则当 $\rho<1$ 时，级数收敛；当 $\rho>1$ 时，级数发散。

交错级数收敛判别法

莱布尼茨判别法：

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n(u_n>0)$ 满足

a $u_n\geq u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$

b $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛。

绝对收敛与条件收敛

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项是任意实数，若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，此时 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛。

幂级数求和

求幂级数的和函数，步骤如下：

①求幂级数收敛域，也就是求和函数的定义域

②在收敛区间内对幂级数逐项求导或逐项积分，得到一个等比级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x},x\in(-1,1);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x},x\in(-1,1);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1).$$

当幂级数 $\sum a_nx^n$ 的 a_n 是分式形式的时候（比如 $a_n=\frac{1}{n}$），我们就先进行逐项求导；而 a_n 不是分式形式的时候（比如 $a_n=n+1$），我们就先进行逐项积分。有时候，我们并不是通过一步的运算就可以得到等比级数，需要通过变换或者进行两次积分或求导。

③对得到的和函数进行与第二步相反的运算（之前求导则这里积分，之前积分则这里求导），便得到了所求幂级数的和函数。

幂级数展开

● 泰勒级数

$y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的幂级数展开为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,x\in(-R,R)$$

● 麦克劳林级数

麦克劳林级数是泰勒级数当 $x_0=0$ 时的一个特殊情况：

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x)+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,x\in(-R,R)$$

● 几个常用函数的幂级数展开：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},-\infty<x<\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!},-\infty<x<\infty$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!},-\infty<x<\infty$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},-1<x\leq 1$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,-1<x<1,\ \alpha\text{为实数}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$$