第8章　有限长冲激响应滤波器（FIR）的设计

8.2　线性相位滤波器的特点

8.3 窗函数设计法

8.4　频率抽样设计法

8.6　应用MATLAB设计FIR数字滤波器

有限长单位冲激响应数字滤波器的特点:

- 有限长单位冲激响应（FIR）可以做成具有严格的线性相位，同时又可以具有任意的幅度特性。
- FIR滤波器的单位抽样响应是有限长的，因而FIR滤波器一定是稳定的。
- 只要经过一定的延时，任何非因果有限长序列都能变成因果的有限长序列，总能用因果系统来实现。
- FIR滤波器由于单位冲激响应是有限长的，因而可以用快速傅里叶变换（FFT）算法来实现过滤信号，从而可大大提高运算效率。
- 在滤波器性能要求相同的情况下，FIR滤波器H(z)的阶次比IIR滤波器的要高。
- FIR滤波器和IIR滤波器的设计方法不同，因为FIR滤波器的系统函数是多项式，而IIR滤波器的系统函数是有理分式。
- 本章主要讨论线性相位滤波器，非线性相位滤波器如果用IIR 滤波器实现，阶数更小，更节约成本。

8. 2 线性相位FIR滤波器的特点

8.1.1 线性相位条件

如果一个线性移不变系统的频率响有如下形式：

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)} = |H(e^{j\omega})|\, e^{-j\alpha\omega}$$

则其具有线性相位。这里 α 是一个实数。

因而，线性相位系统有一个恒定的群延时

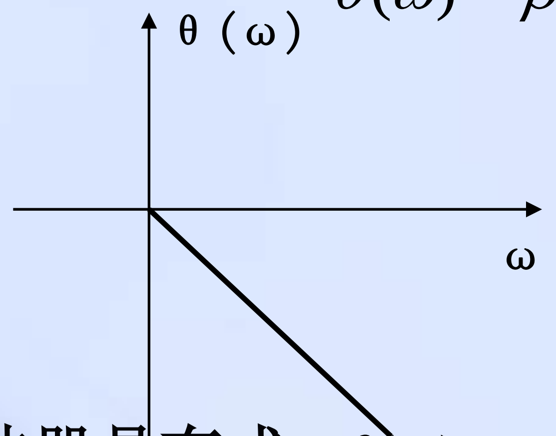
$$\tau = \alpha$$

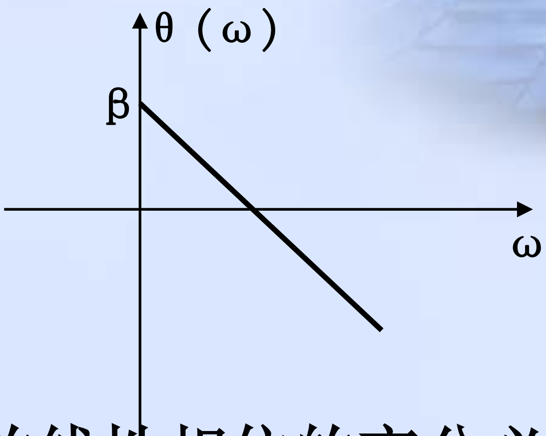
τ＝－dθ(ω)/dω

在实际应用中，有两类准确的线性相位，分别要求满足

$$\theta(\omega) = -\tau\omega$$

$$\theta(\omega) = \beta - \tau\omega$$





FIR滤波器具有式 $\theta(\omega) = -\tau\omega$ 的线性相位的充分必要条件是：

单位抽样响应 $h(n)$关于群延时 τ 偶对称，即满足：

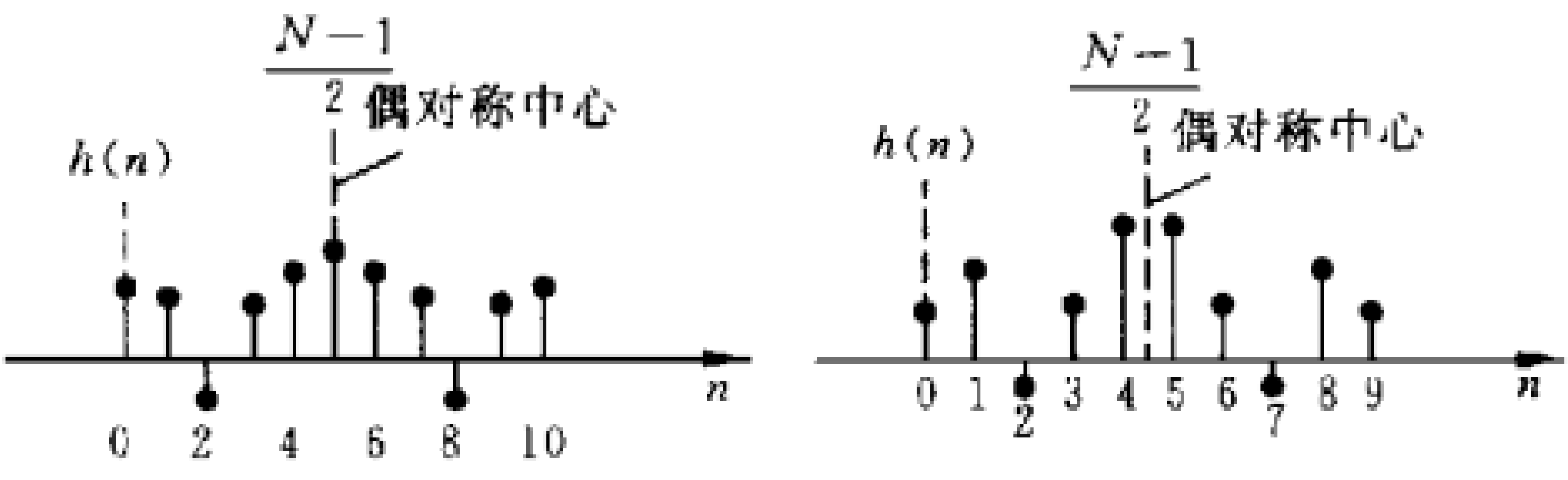
$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

$$h(n) = h(N-1-n) \quad 0 \le n \le N-1$$

满足上面两个偶对称条件的FIR滤波器分别称为:

I型线性相位滤波器(N为奇数)

II型线性相位滤波器(N为偶数)



(a) I型线性相位滤波器

(b) II型线性相位滤波器

FIR滤波器具有式 $\theta(\omega)=\beta-\tau\omega$ 的线性相位的充分必要条件是：

单位抽样响应 $h(n)$关于群延时 τ 奇对称，即满足

$$\tau=\frac{N-1}{2}$$

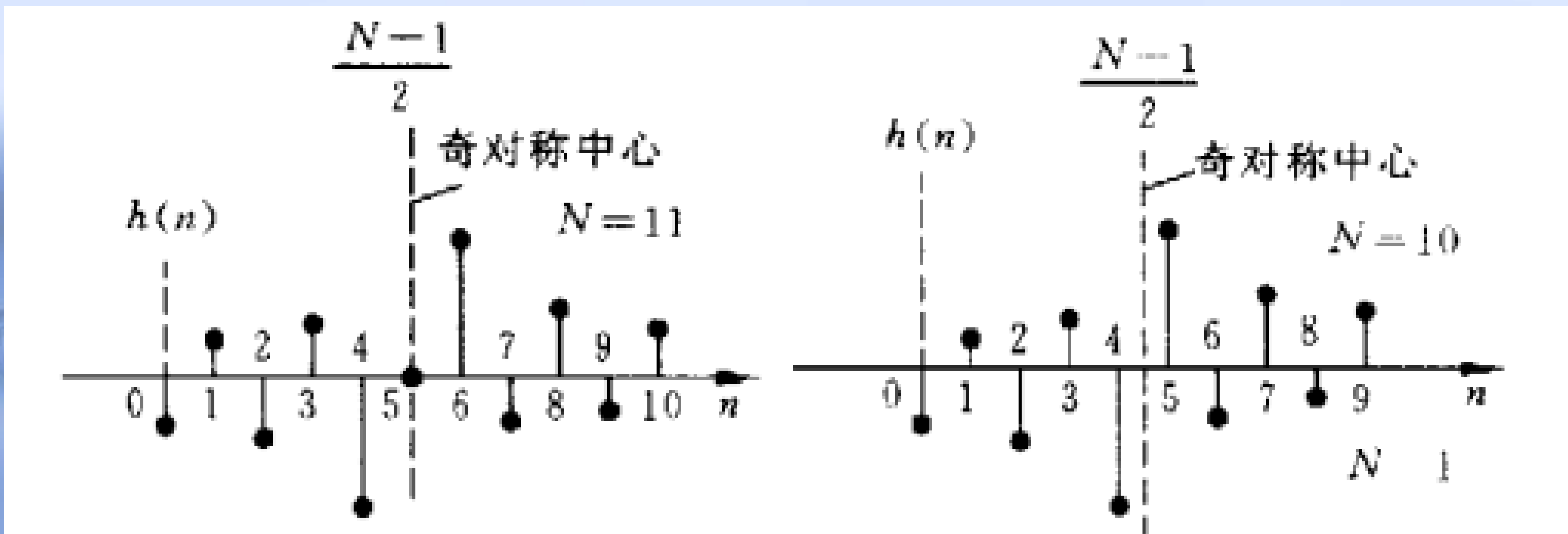
$$\beta=\pm\frac{\pi}{2}$$

$$h(n)=-h(N-1-n) \quad 0\le n\le N-1$$

把满足上面三个奇对称条件的FIR滤波器分别称为:

Ⅲ型线性相位滤波器(N为奇数)

Ⅳ型线性相位滤波器（N为偶数）



(c) III型线性相位滤波器　　(d) Ⅳ型线性相位滤波器

8.1.2 线性相位滤波器频率响应的特点

1. I型线性相位滤波器(偶对称，N为奇数)

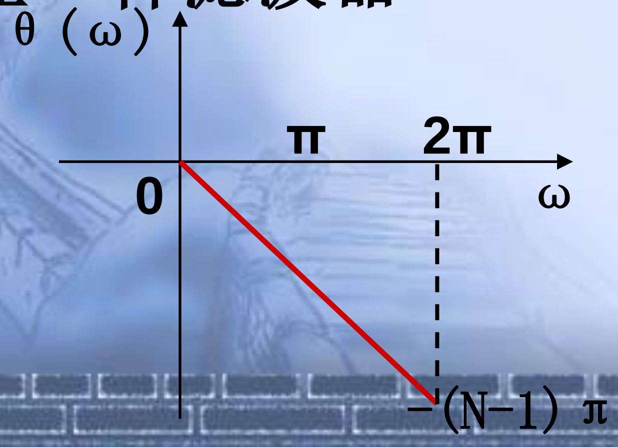
幅度函数和相位函数的特点：

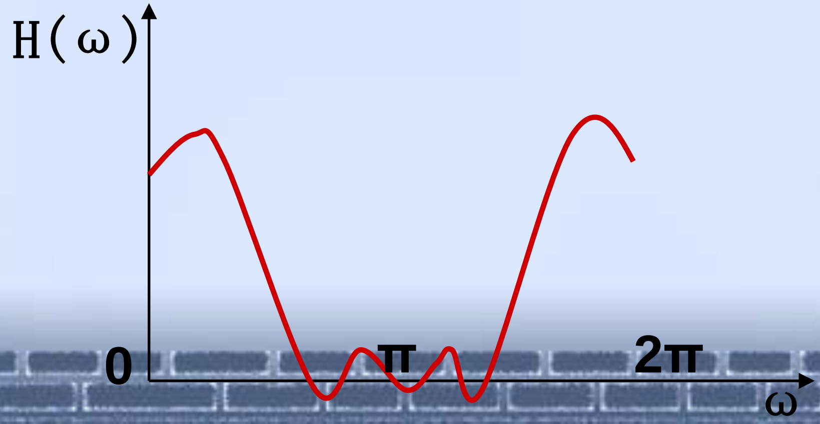
h(n)对 $\tau=\frac{N-1}{2}$ 偶对称，

幅度函数对 $\omega=0,\pi,2\pi$ 也呈偶对称；

相位函数为准确的线性相位。

这种情况下，可以作为低通、高通、带通、带阻中的任一种滤波器





2. Ⅱ型线性相位滤波器（偶对称，N为偶数）

Ⅱ型线性相位滤波器的幅度函数和相位函数的特点：

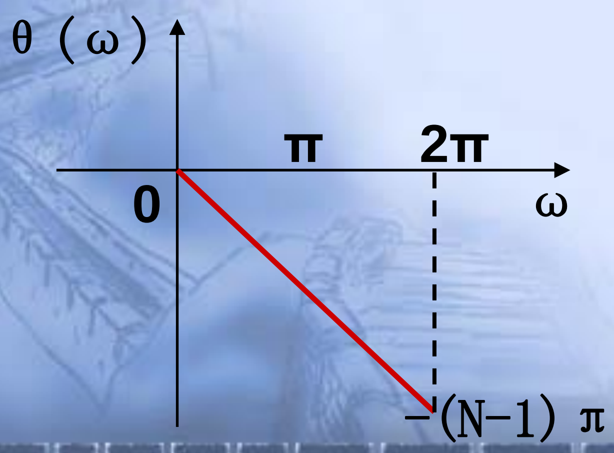
幅度函数的特点：

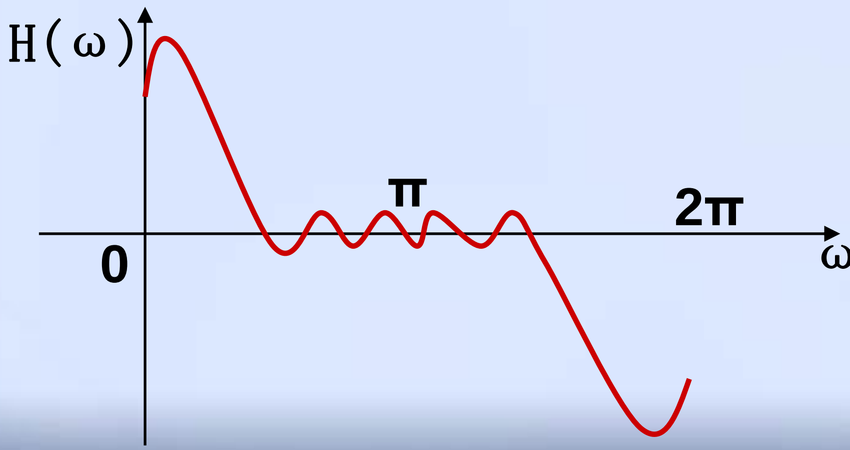
（1）当 $\omega=\pi$ 时，$H(\pi)=0$，也就是说$H(z)$在$z=-1$处必然有一个零点；

（2）$H(\omega)$对$\omega=\pi$呈奇对称，对$\omega=0,2\pi$呈偶对称。

相位函数的特点：准确的线性相位

这种情况下只能设计低通和带通滤波器。





3. Ⅲ型线性相位滤波器(奇对称，N为奇数)

Ⅲ型线性相位滤波器的幅度函数和相位函数的特点：

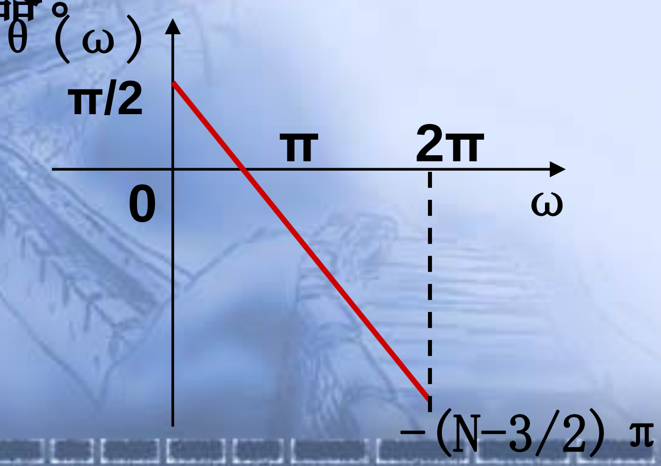
<u>幅度函数的特点：</u>

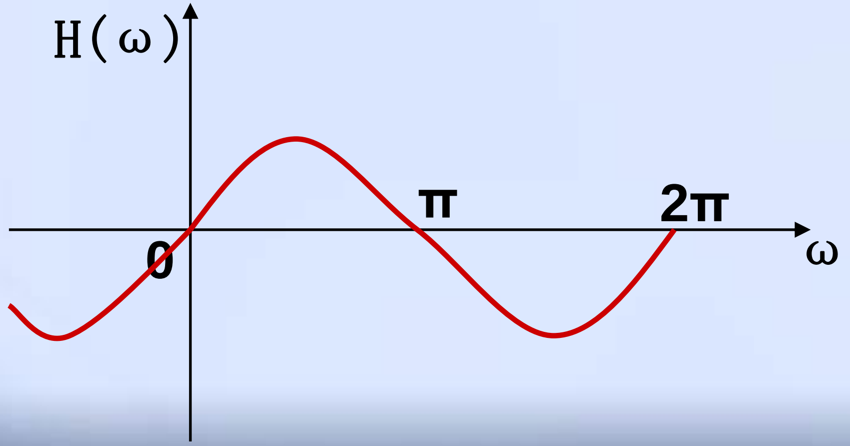
（1）当ω=0, π, 2π时，H(ω)=0, 也就是H(z)说在z=±1处都为零点；

（2）H(ω)对ω= 0, π, 2π都呈奇对称。

<u>相位函数的特点：</u>既是准确的线性相位，又增加了π/2的相移，又称90°移相器。

这种情况只能设计带通滤波器，不能设计高通、低通及带阻滤波器。





4. Ⅳ型线性相位滤波器(奇对称，N为偶数)

Ⅳ型线性相位滤波器的幅度函数和相位函数的特点：

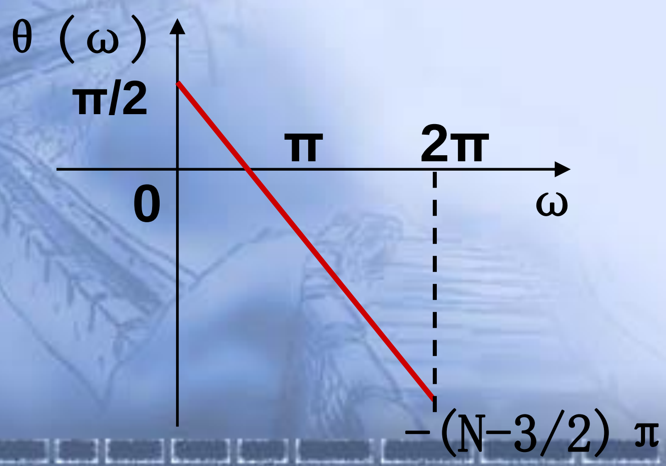
幅度函数的特点：

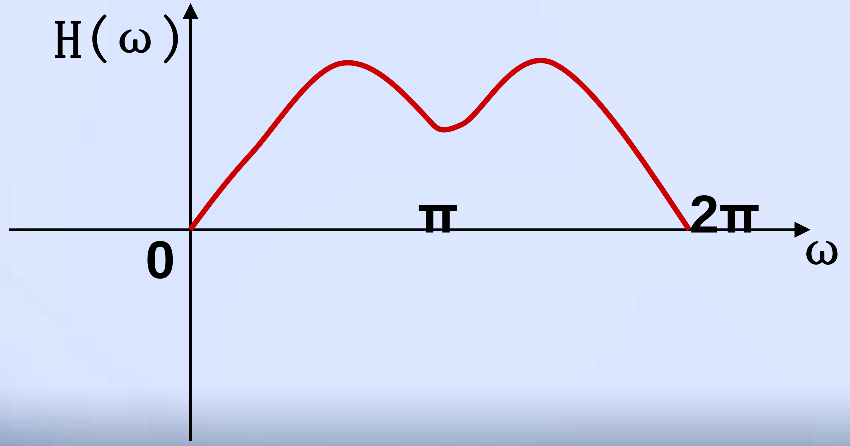
（1）当ω=0,2π时，H(ω)=0,也就是说H(z)在z＝1处为零点；

（2）H(ω)在ω= 0,2π处呈奇对称，在ω＝π处呈偶对称。

相位函数的特点：既是准确的线性相位，又增加了π/2的相移，又称90°移相器。

这种情况只能设计高通及带通滤波器。





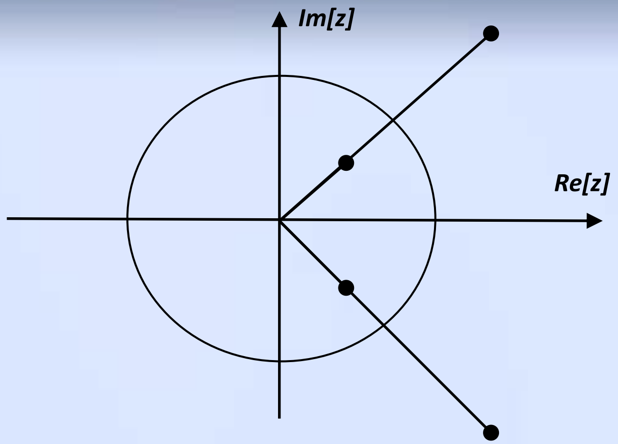
8.1.3 线性相位FIR滤波器的零点

零点的约束：

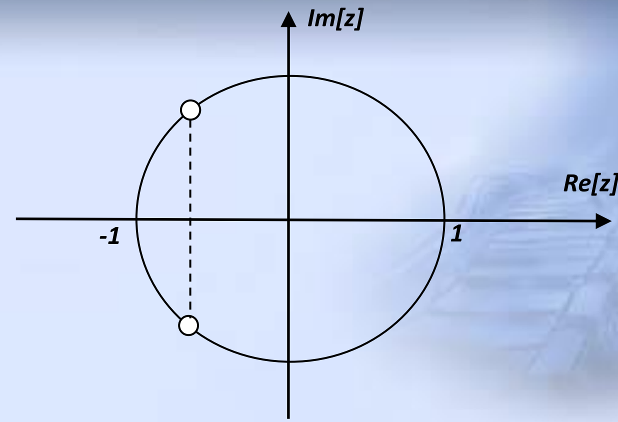
1）若 $z = z_i$ 是H(z)的零点，

则 $z = 1/z_i$ 也一定是H(z)的零点。

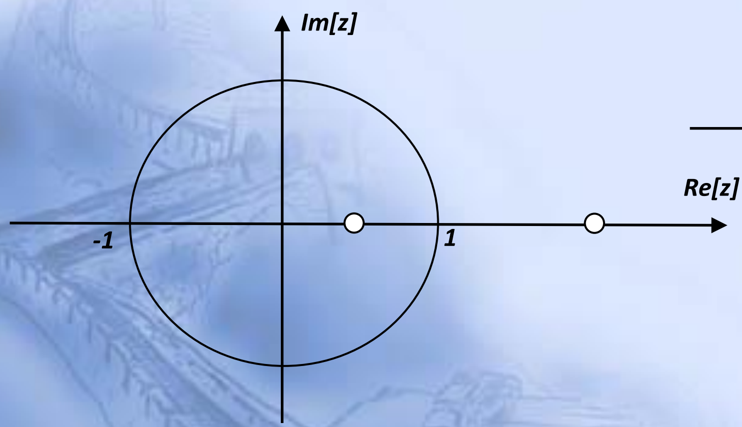
2）由于h(n)是实数，所以H(z)的复数零点也一定是共轭对存在，故若 $z = z_i^*$ 是H(z)的零点，则 $z = 1/z_i^*$ 也一定是H(z)的零点。



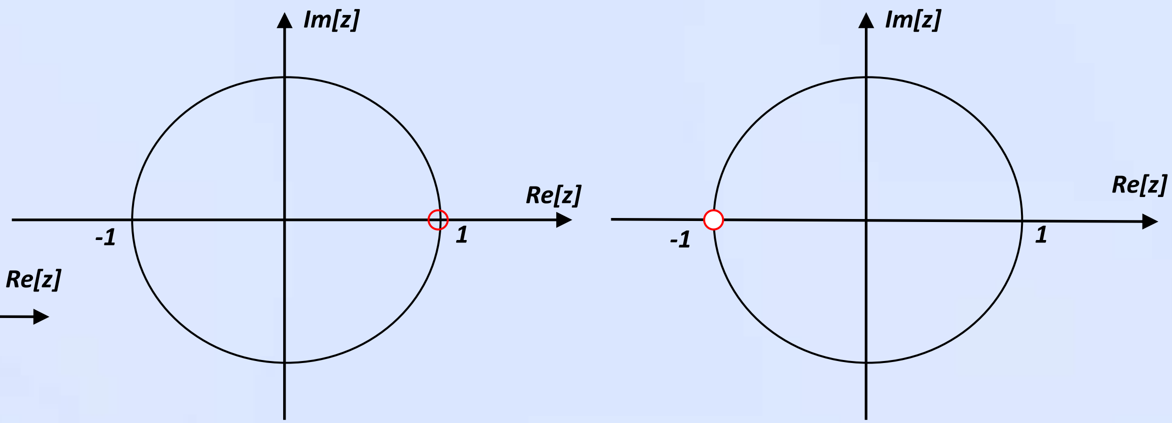
（1）零点互为倒数的两组共轭对



（2）零点在单位圆上的共轭对



（3）零点在实轴上，互为倒数



（4）零点在实轴上及单位圆上，
此时只有一个零点，要么为1，要么为-1

- 例：已知线性相位FIR滤波器的部分零点为

$$z_1 = 2, \qquad z_2 = \mathrm{j}0.5, \qquad z_3 = \mathrm{j}$$

（1）确定该滤波器的其他零点；

（2）设h(n)=1，求该滤波器的系统函数H(z).

解： （1）根据FIR滤波器的零点分布特点可得

$$z_4 = z_2^* = \text{-j}0.5, \qquad z_5 = z_3^* = \text{-j}$$

每个零点的倒数也为零点，故

$$z_6 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{2}, \qquad z_7 = \frac{1}{z_2} = -2j, \qquad z_8 = \frac{1}{z_3} = -j = z_5$$

$$z_9 = \frac{1}{z_4} = 2j, \qquad z_{10} = \frac{1}{z_5} = j = z_3$$

实际有8个零点为别为2，0.5，±j0.5， ±j， ±j2

（2）系统函数为

$$H(z) = A\prod_{k=1}^{8}(1 - z^{-1}z_k)$$

由h(n)=0，得到A=1，所以

$$H(z)$$
$$=1-2.5z^{-1}+6.25z^{-2}+13.15z^{-3}+10.5z^{-4}+13.15z^{-5}+6.25z^{-6}-2.5z^{-7}+z^{-8}$$

例：设某FIR滤波器的系统函数为

$$H(z)=1+3z^{-1}+2z^{-2}+5z^{-3}+2z^{-4}+3z^{-5}+z^{-6}$$

试求：（1）系统的单位冲激响应h(n),判断是否为线性相位；

（2）幅频响应和相频响应表示式

解：（1）由系统函数得到

h(n)={1, 3, 2, 5, 2, 3, 1}

h(n)为偶对称，此滤波器为线性相位滤波器。

（2）频率响应为

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{6}h(n)e^{-j\omega n}$$

$$=e^{-j3\omega}\left(5+4\cos\omega n+6\cos 2\omega n+2\cos 3\omega n\right)$$

相位响应为 $\varphi(\omega)=-3\omega$

- FIR数字滤波器，主要指线性相位数字滤波器设计，主要方法有3种：
- 1、窗函数设计法（时域设计法）
- 2、频率设计法（频域设计法）
- 3、最优化方法（频域等波纹设计法）

8．3　窗函数设计法

8．3.1　设计方法

给出所要求的理想低滤波器频率响应 $H_d(e^{j\omega})$

设计一个FIR滤波器频率响应

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}\xrightarrow{\text{逼近}}H_d(e^{j\omega})$$

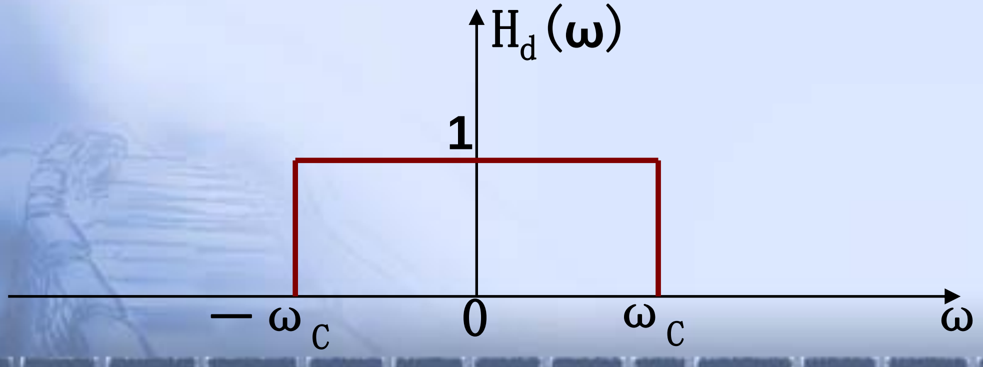
一、窗函数设计法的原理

设计是在时域进行

$$H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{傅立叶反变换}} h_d(n) \xrightarrow{\text{(加窗)截断}} h(n) \xrightarrow{\text{傅立叶变换}} H(e^{j\omega})$$

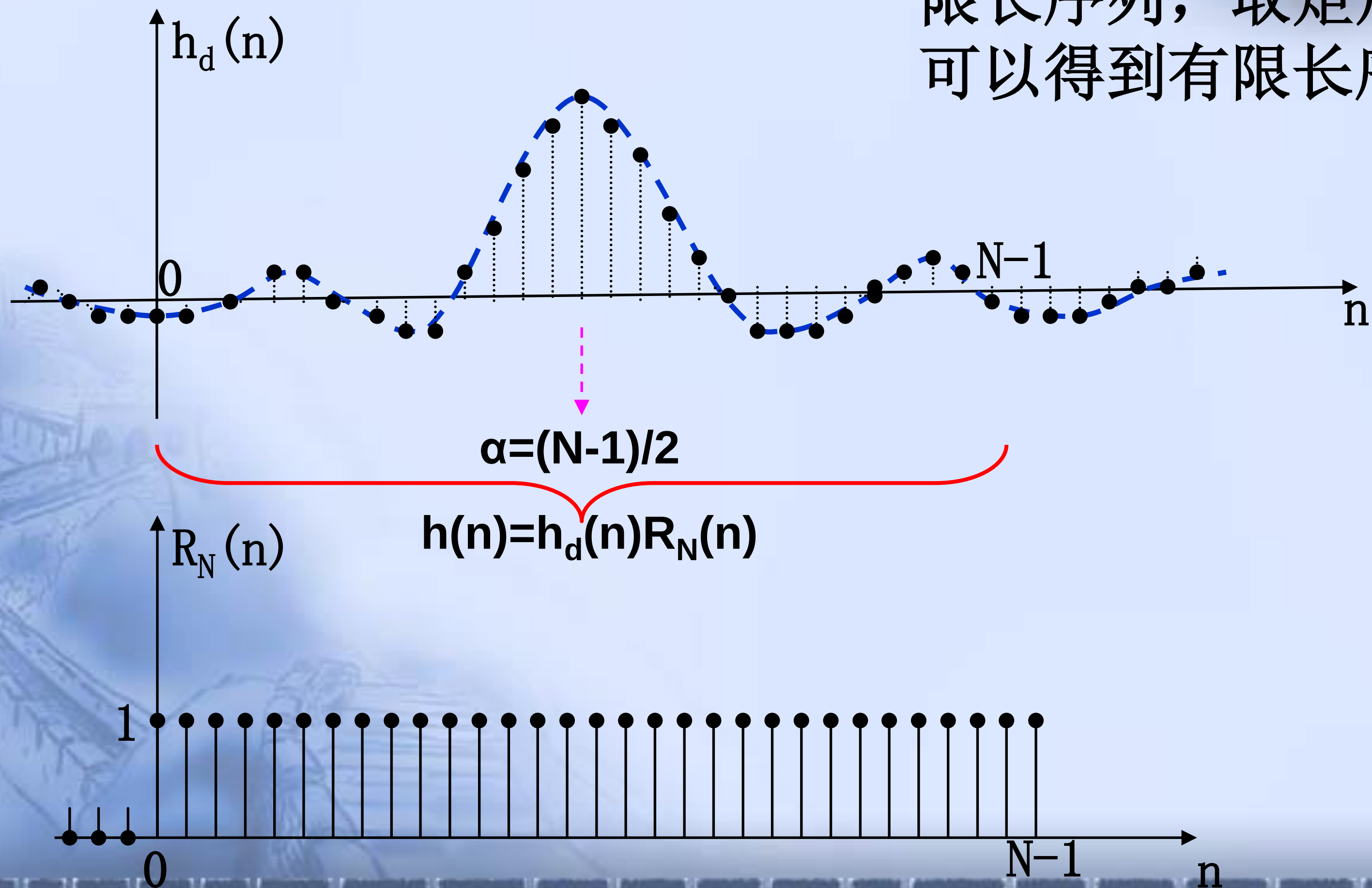
以一个截止频率为ω_c线性相位的理想矩形幅度特性的低通滤波器为例。设低通特性的群延时为α，即

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & -\pi \le \omega \le -\omega_c, \omega_c \le \omega \le \pi \end{cases}$$



$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{-\omega_c} e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

$h_d(n)$是中心点在α的无限长序列，取矩形窗就可以得到有限长序列。



依照线性相位滤波器的约束，h(n)必须是偶对称的，对称中心就为长度的一半(N-1)/2.

因此有

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases} h_d(n) & 0\le n\le N-1 \\ 0 & n\text{为其他值} \end{cases}$$

$$\alpha=\frac{N-1}{2}$$

$$h(n)=\begin{cases} \dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin\left[\omega_c(n-\dfrac{N-1}{2})\right]}{\omega_c(n-\dfrac{N-1}{2})}, & 0\le n\le N-1 \\ 0, & n\text{为其它值} \end{cases}$$

二、加窗处理对频率响应的影响

按照复卷积公式，时域相乘，则在频域上是周期性卷积关系，即

$$h(n) = h_d(n) \bullet w(n)$$

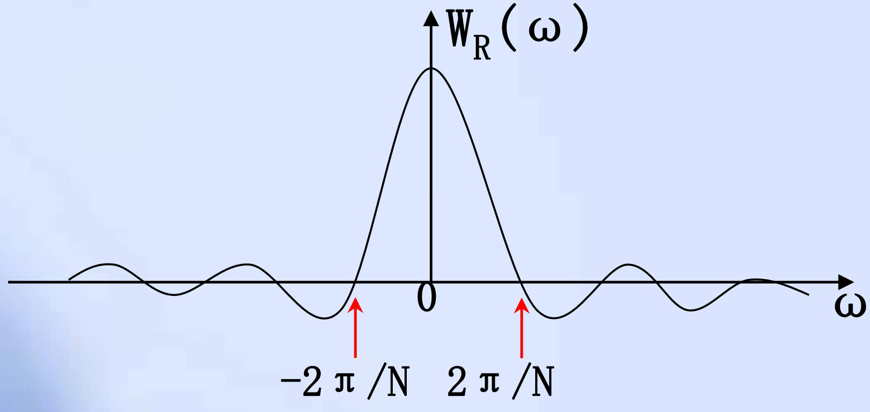
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) w(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

矩形窗的频率特性

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-\frac{j\omega N}{2}}\left[e^{\frac{j\omega N}{2}} - e^{-\frac{j\omega N}{2}}\right]}{e^{-\frac{j\omega}{2}}\left[e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}}\right]}$$

$$= e^{j\left[-\frac{\omega N}{2}+\frac{\omega}{2}\right]} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\omega N}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega}{2}\right]} = W_R(\omega) e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

$W_R(e^{j\omega})$就是频率内插函数，其幅度函数$W_R(\omega)$在$\omega=\pm 2\pi/N$之内为一个主瓣，两侧形成许多衰减振荡的旁瓣， $W_R(\omega)$是周期函数。



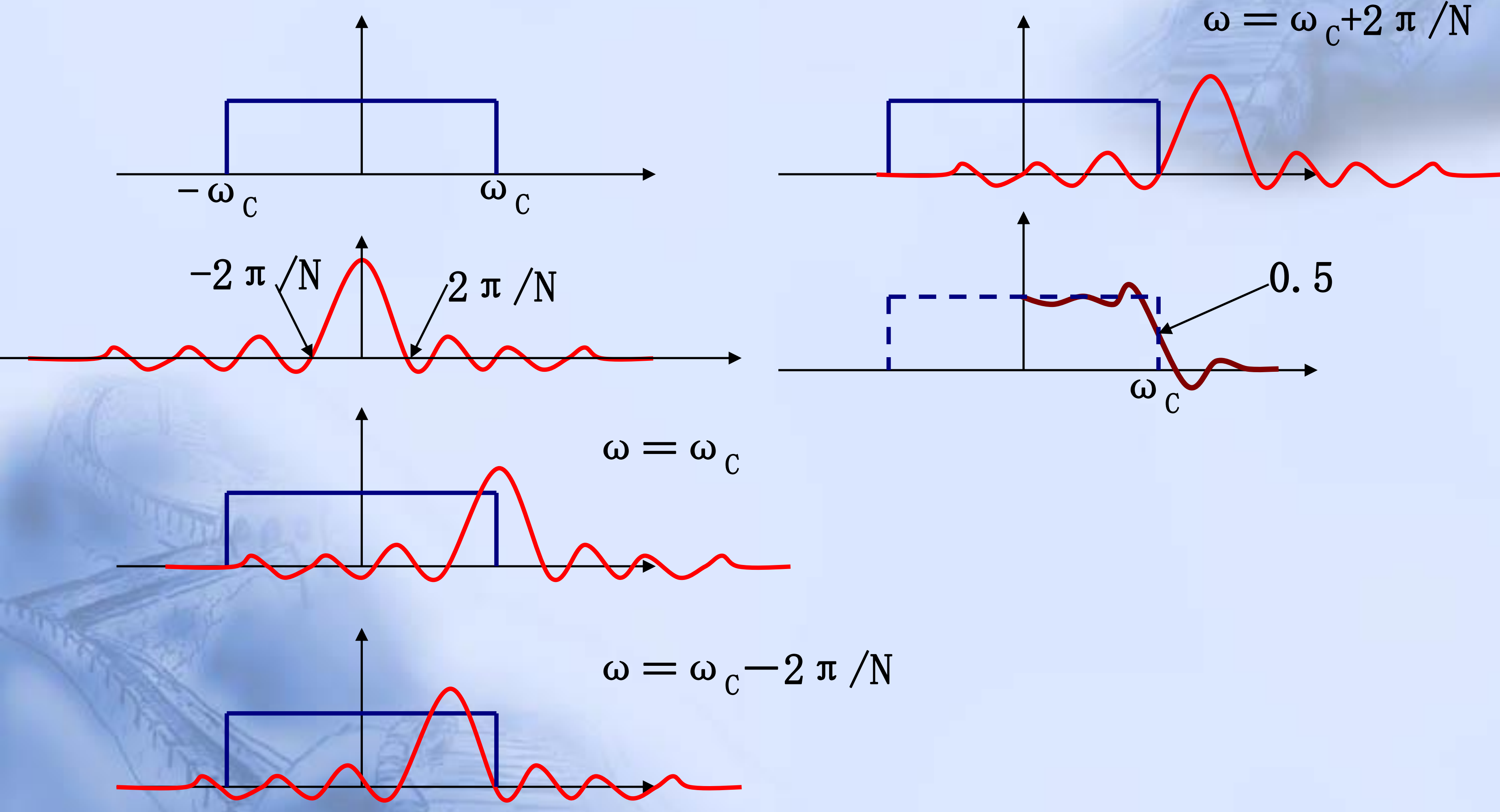
理想低通滤波器的频率响应

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

FIR滤波器的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\theta} w_R(\omega-\theta)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)(\omega-\theta)}d\theta$$

$$= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)w_R(\omega-\theta)d\theta$$



$-\omega_c$
ω_c
$\omega=\omega_c+2\pi/N$
$-2\pi/N$
$2\pi/N$
0.5
ω_c
$\omega=\omega_c$
$\omega=\omega_c-2\pi/N$

加窗处理对理想矩形频率产生的几点影响:

1、使理想频率特性在不连续点处形成一个过渡带，过渡带的宽度等于窗频率响应的主瓣宽度

$\triangle\omega=4\pi/N$;

2、在截止频率$\omega=\omega_C\pm2\pi/N$的地方，$H(\omega)$出现最大的肩峰值，在肩峰的两侧形成起伏振荡，其振荡幅度取决于旁瓣的多少;

3、当截取长度增加时，只会减小过渡带的宽度$4\pi/N$,而不会改变肩峰的相对值，这种现象称为吉布斯效应。

例7.1 设计一低通滤波器，所希望的频率响应截止频率 $H_d(e^{j\omega})$ **在** $0\le\omega\le0.25\pi$ **之间为1，在** $0.25\pi\le\omega\le\pi$ **之间为0，分别取N= 11,21, 41，观察其频谱响应的特点。**

解：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j(N-1)\omega/2} & 0\le\omega\le0.25\pi\\ 0 & 0.25\pi\le\omega\le\pi\end{cases}$$

取 $\omega(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ **，即取矩形窗**

$$h(n)=h_d(n-\frac{N-1}{2})=\frac{\sin[0.25\pi\times(n-\frac{N-1}{2})]}{\pi(n-\frac{N-1}{2})}$$

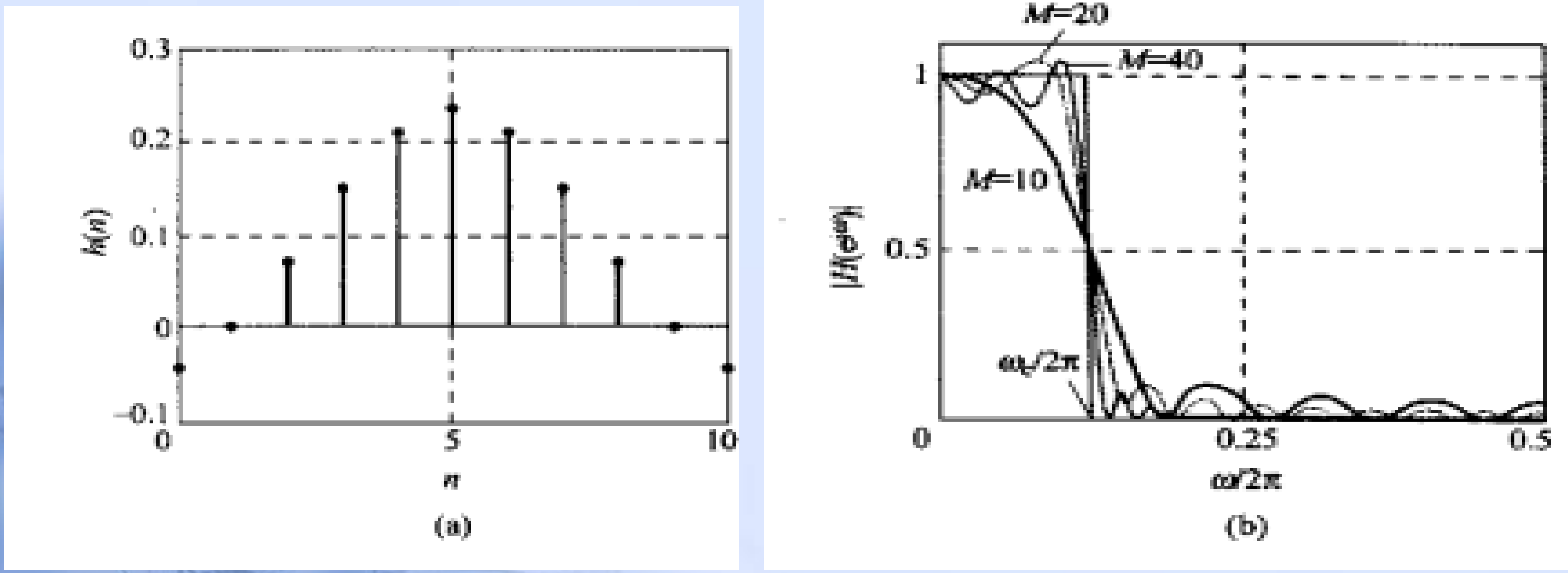
$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin\left[\omega_c(n-\frac{N-1}{2})\right]}{\omega_c(n-\frac{N-1}{2})}, & 0\le n\le N-1\\ 0, & n\text{为其它值}\end{cases}$$

当N=11时，求得

$$h(0)=h(10)=-0.045,\quad h(1)=h(9)=0,\quad h(2)=h(8)=0.075$$

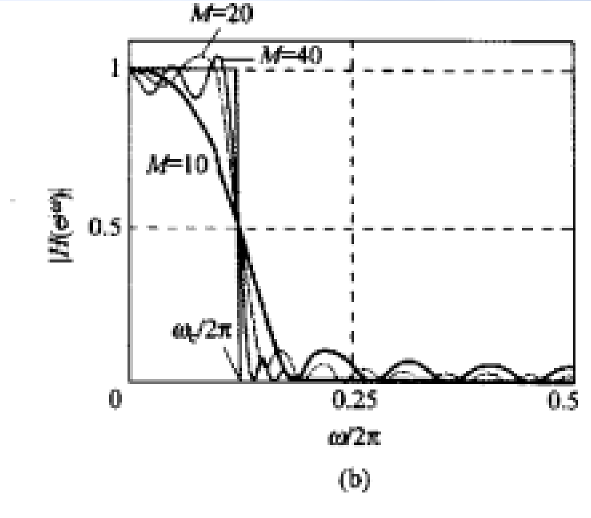
$$h(3)=h(7)=0.1592,\quad h(4)=h(6)=0.2251,\quad h(5)=0.25$$

显然 $\tau=\frac{N-1}{2}=5$ ，满足对称关系。



根据序列h(n)，分别求得N=11,21,41时的幅频特性

由图可以看出，当N取的过小时，通频带过窄，且阻带内波纹较大，过渡带较宽，当N增大时，$H(e^{j\omega})$与$H_d(ej\omega)$的近似程度越来越好。但当N增大时，通带内出现了波纹，而且随着N的继续增大，这些波纹并不消失，只是最大的尖峰处越来越接近于间断点，这种现象称作吉布斯现象。



吉布斯现象的产生是由于对$h_d(n)$突然截短的结果。

为了减少吉布斯现象，应选取旁瓣较小的窗函数。

8.3.2　各种窗函数

希望窗函数满足两个要求：

1、窗谱主瓣尽可能的窄，以获得较陡的过渡带；

2、尽量减少窗谱的最大旁瓣的相对幅度，也就是使能量尽量集中于主瓣，使肩峰和波纹减小，可增大阻带的衰减。

选用其它形状的窗函数，在边沿处(n=0和n=N-1附近)的变换比矩形窗要缓慢和平缓，这样可以减小陡峭边沿所引起的旁瓣分量，使阻带衰减增大；

但是窗谱的主瓣宽度就比矩形窗要宽，这会造成滤波器幅度函数过渡带的加宽。

1．矩形窗

窗函数为 $\omega(n)=R_N(n)$

幅度函数为 $W_R(\omega)=|W_R(e^{j\omega})|=\dfrac{\sin(\frac{N\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$

主瓣宽度 $4\pi/N=2\times2\pi/N$，过渡带宽 $\Delta\omega=0.9\times2\pi/N$。

2．汉宁（Hanning）窗（又称升余弦窗）

窗函数为 $\omega(n)=[0.5-0.5\cos(\frac{2\pi n}{N-1})]R_N(n)$

幅度函数为 $W(\omega)=0.5W_R(\omega)+0.25[W_R(\omega-\frac{2\pi n}{N-1})+W_R(\omega+\frac{2\pi n}{N-1})]$

主瓣宽度 $4\times2\pi/N=8\pi/N$，过渡带宽 $\Delta\omega=3.1\times2\pi/N$。

3. 海明（Hamming）窗（又称改进的升余弦窗）

窗函数为 $$\omega(n)=[0.54-0.46\cos(\frac{2\pi n}{N-1})]R_N(n)$$

幅度函数为 $$W(\omega)=0.54W_R(\omega)+0.23[W_R(\omega-\frac{2\pi n}{N-1})+W_R(\omega+\frac{2\pi n}{N-1})]$$

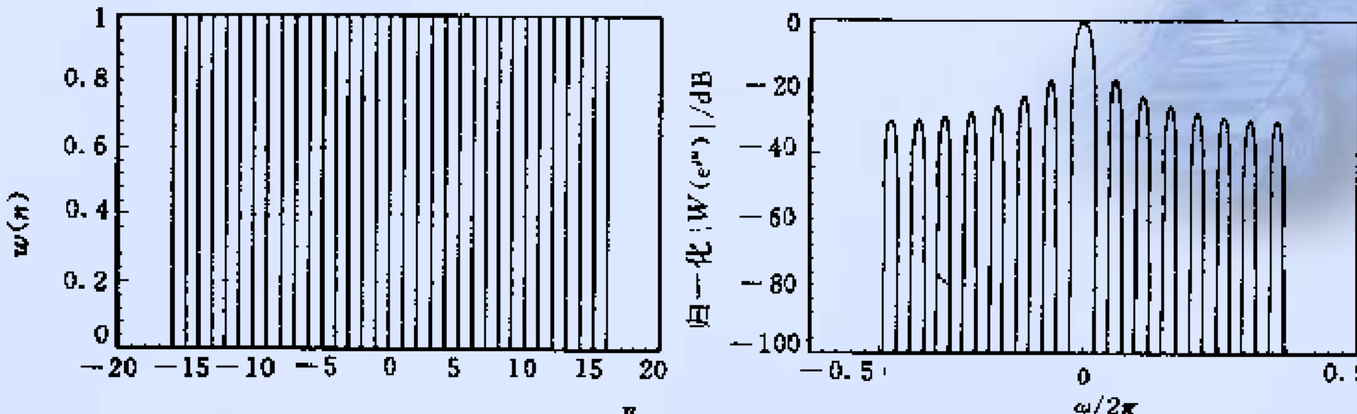
主瓣宽度 $4\times 2\pi/N=8\pi/N$，过渡带宽 $\Delta\omega=3.3\times 2\pi/N$ 。

4. 凯泽（Kaiser）窗

窗函数为

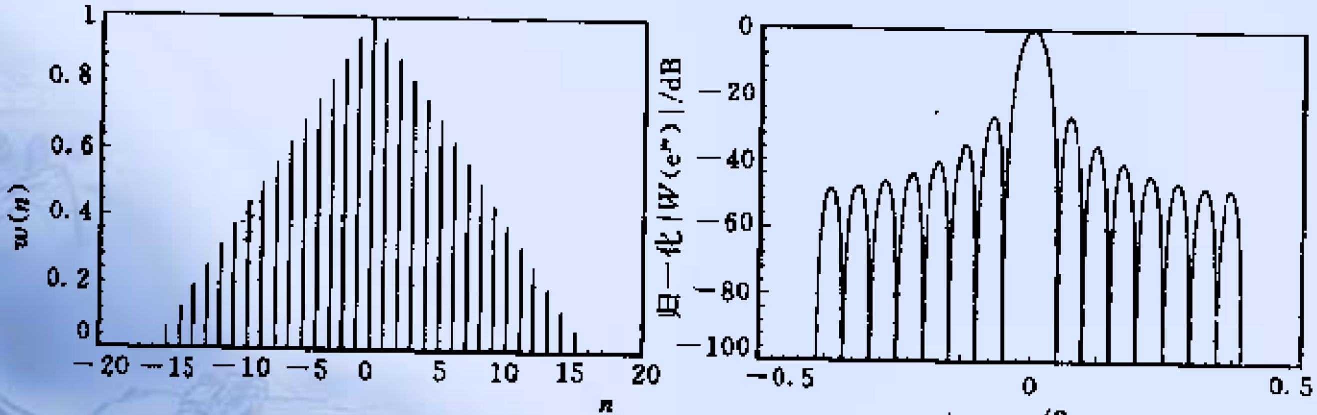
$$\omega(n)=\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-(1-\frac{2n}{N-1})^2}\right)}{I_0(\beta)},\qquad 0\le n\le N-1$$

其中$I_0(\ )$为第一类变形零阶贝塞尔函数，β 是一个可自由选择的参数，改变 β 值就可对主瓣宽度与旁瓣衰减进行选择，一般选择 $4<\beta<9$ 。过渡带宽$\Delta\omega=5\times 2\pi/N$ 。



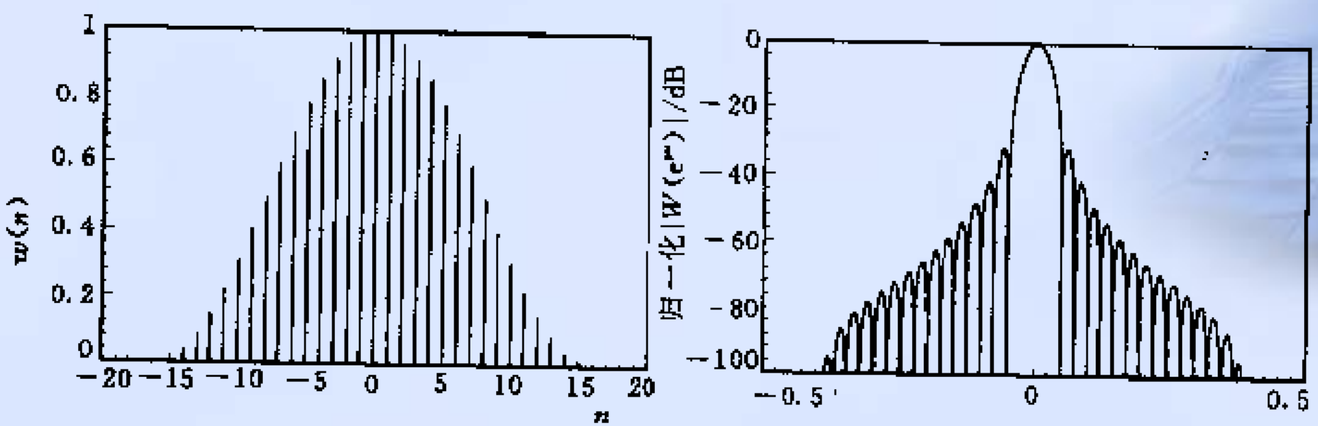
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
w(n)
−20 −15 −10 −5 0 5 10 15 20
n
0
−20
−40
−60
−80
−100
归一化|W(e^{jω})|/dB
−0.5 0 0.5
ω/2π

(a)

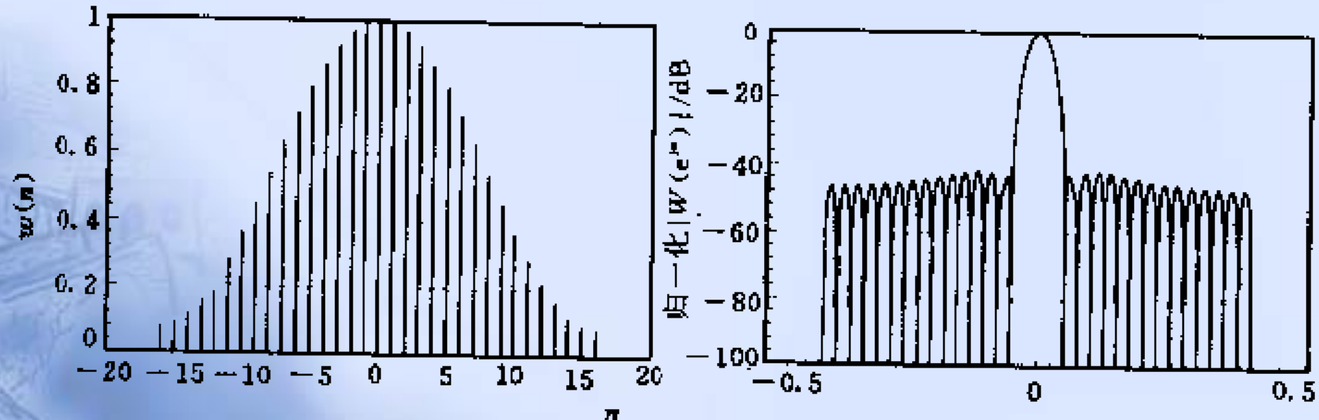


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
w(n)
−20 −15 −10 −5 0 5 10 15 20
n
0
−20
−40
−60
−80
−100
归一化|W(e^{jω})|/dB
−0.5 0 0.5
ω/2π

(b)



(c)



(d)

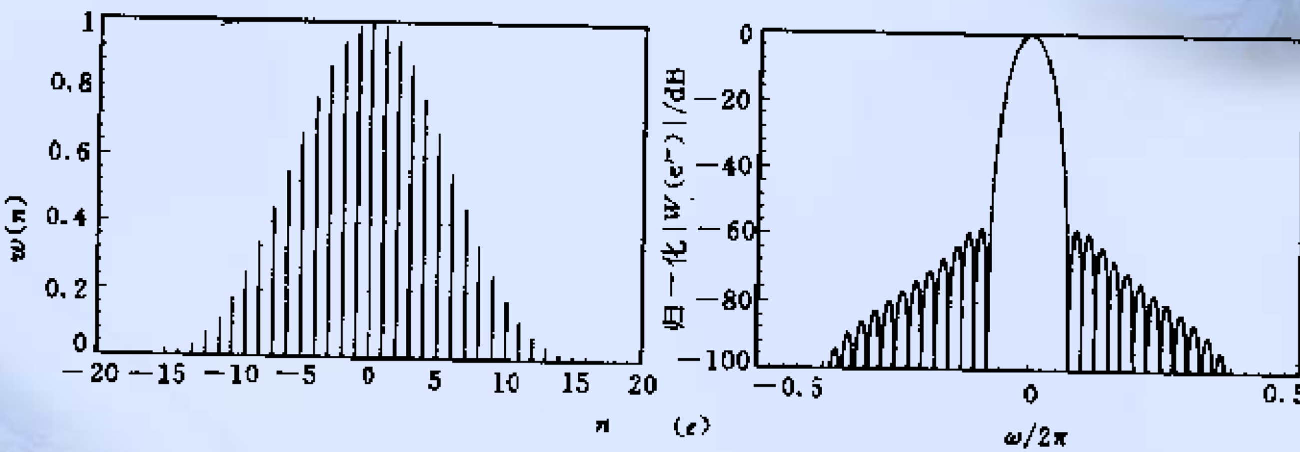


图 8.2.2　五种窗函数的时域图形及归一化对数幅频曲线

(a) 矩形窗； (b) 三角窗； (c) Hanning 窗； (d) Hamming 窗； (e) Blackman 窗

窗函数	窗谱性能指标		加窗后滤波器性能指标		
	旁瓣峰值（dB）	主瓣宽度	过渡带宽度	阻带最小衰减（dB）	通带边沿衰减（dB）
矩形窗	-13	4π/N	1.8π/N	21	0.815
三角形窗	-25	8π/N	6.1π/N	25	0.503
汉宁窗	-31	8π/N	6.2π/N	44	0.055
海明窗	-41	8π/N	6.6π/N	53	0.021
布莱克曼窗	-57	12π/N	11π/N	74	0.00173
凯泽窗（B=7.865）	-57		10π/N	80	0.000868

8.2.3 窗函数的设计方法

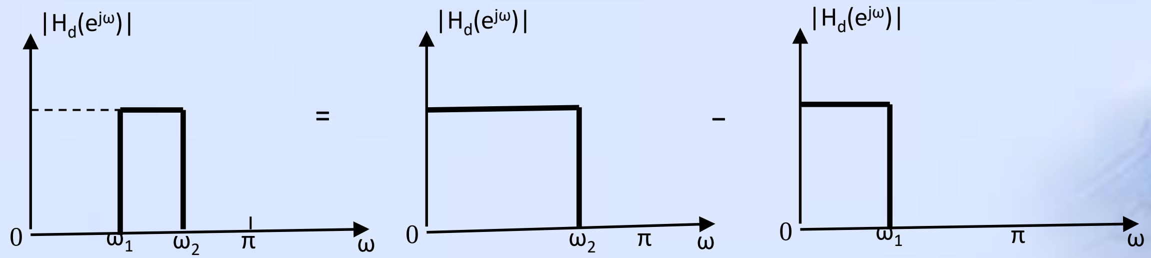
1、给定要求的频率响应函数$H_d(e^{j\omega})$；

2、对$H_d(e^{j\omega})$求离散傅立叶反变换，得到$h_d(n)$；

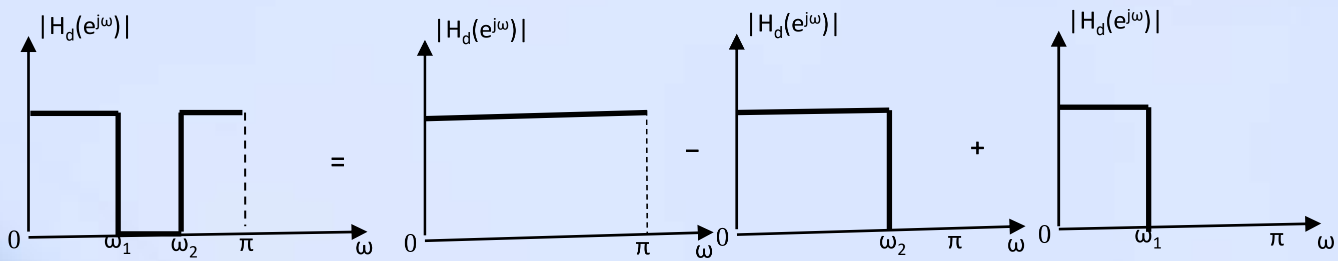
3、由过渡带宽度及阻带最小衰减的要求，选定窗的形状和N的大小；

4、求得所设计的FIR滤波器的单位抽样响应$h(n)=h_d(n)w(n)$

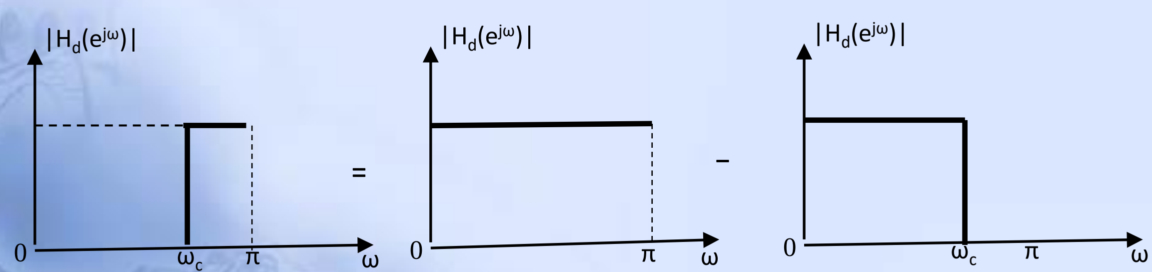
5、对$h(n)$求傅立叶变换，得到$H(e^{j\omega})$，检验是否满足要求，若不满足，则考虑改变窗形状或改变窗的长度N，重复第3、4步，直到满足设计要求为止。


|Hd(ejω)|
0
ω1
ω2
π
ω
=
|Hd(ejω)|
0
ω2
π
ω
–
|Hd(ejω)|
0
ω1
π
ω

带通


|Hd(ejω)|
0
ω1
ω2
π
ω
=
|Hd(ejω)|
0
π
ω
–
|Hd(ejω)|
0
ω2
π
ω
+
|Hd(ejω)|
0
ω1
π
ω

带阻


|Hd(ejω)|
0
ωc
π
ω
=
|Hd(ejω)|
0
π
ω
–
|Hd(ejω)|
0
ωc
π
ω

高通

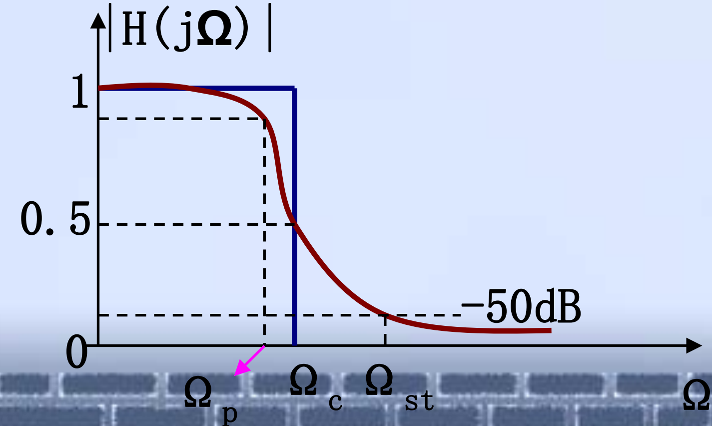
例1:设计一个线性相位的FIR滤波器，给定抽样频率为 $\Omega_s=2\pi\times1.5\times10^4$(rad/sec),通带截止频率为 $\Omega_p=2\pi\times1.5\times10^3$(rad/sec),阻带起始频率为 $\Omega_{st}=2\pi\times3\times10^4$(rad/sec),阻带的衰减不小于−50dB.

解：1、求对应的数字频率。

通带截止频率： $\omega_p=\Omega_pT=\Omega_p/f_s=2\pi\,\Omega_p/\Omega_s=0.2\pi$

阻带起始频率： $\omega_{st}=\Omega_{st}T=\Omega_{st}/f_s=2\pi\,\Omega_{st}/\Omega_s=0.4\pi$

阻带衰减相当于 $\delta_2=50dB$



2、设理想线性相位滤波器$H_d(e^{j\omega})$为

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega|\le\omega_c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求理想低通滤波器的截止频率

$$\Omega_c \cong \frac{1}{2}(\Omega_p+\Omega_{st})=2\pi\times 2.25\times 10^3(rad/\sec)$$

$$\omega_c=2\pi {\Omega_c}\big/{\Omega_s}=0.3\pi$$

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{-\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega=\begin{cases} \dfrac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}, & n\neq\tau \\ \omega_c/\pi, & n=\tau \end{cases}$$

3、确定窗形状及N的大小

由阻带衰减50dB查表，可选海明窗，其阻带最小衰减－53dB符合要求。

要求的数字频域的过渡带宽度$\Delta\omega=0.2\pi$

而海明窗过渡带带宽满足$\Delta\omega=6.6\pi/N$

因此 $N=6.6\pi/\Delta\omega=6.6\pi/0.2\pi=33$

$\tau=(N-1)/2=16$

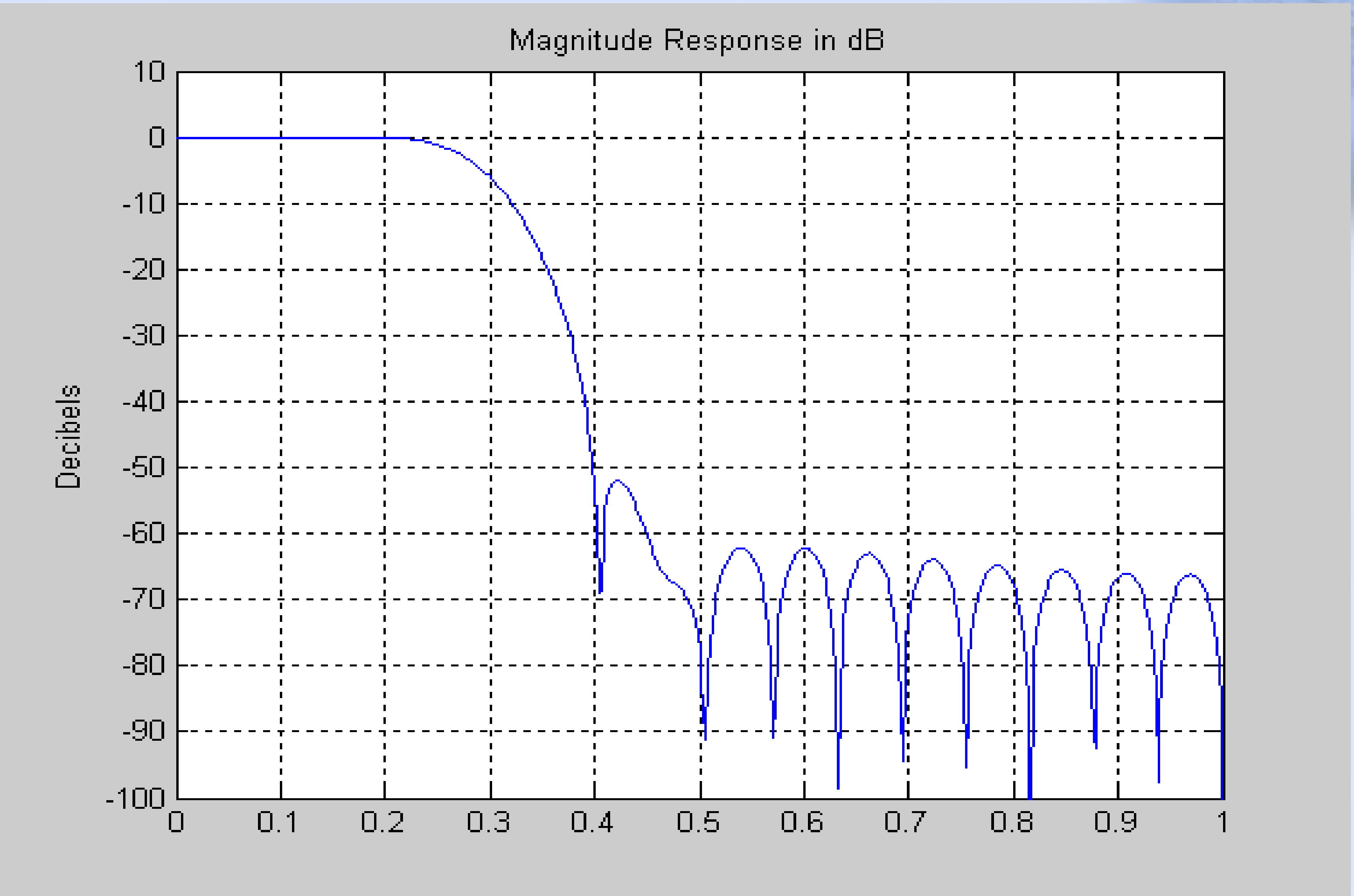
4、由海明窗表达式确定FIR滤波器的h(n)

$$W(n)=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$$

$$h_d(n)=\frac{\sin\left[0.3\pi(n-16)\right]}{\pi(n-16)}$$

$$h(n)=h_d(n)\cdot W(n)=\frac{\sin\left[0.3\pi(n-16)\right]}{\pi(n-16)}\cdot\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{\pi n}{16}\right)\right]R_N(n)$$

5、由h(n)确定$H(e^{j\omega})$，再检验指标是否符合要求，如果不满足，则改变N或窗函数的形状来重新计算。


Magnitude Response in dB
Decibels
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

例2:设计一个线性相位的FIR滤波器，给定通带截止频率为ω_p=0.3π，阻带起始频率为ω_{st}=0.5π，阻带的衰减As=40dB。

解：1、理想的线性相位低通滤波器的截止频率ω_c。

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_{st}}{2} = 0.4\pi$$

2、确定窗函数及N的大小

由阻带衰减40dB查表，可选汉宁窗，其阻带最小衰减44dB符合要求。

要求的数字频域的过渡带宽度$\Delta\omega=0.2\pi$

而海明窗过渡带带宽满足$\Delta\omega=6.2\pi/N$

因此　$N=6.2\pi/\Delta\omega=6.2\pi/0.2\pi=31$

$$\tau=(N-1)/2=15$$

3、由汉宁窗表达式确定FIR滤波器的h(n)

$$W(n)=0.5\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)=0.5\left[1-\cos\left(\frac{\pi n}{15}\right)\right]R_N(n)$$

$$h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin[0.4\pi(n-15)]}{\pi(n-15)} & n\neq 15\\ 0.4 & n=15\end{cases}$$

$$h(n)=h_d(n)\cdot W(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin[0.4\pi(n-15)]}{2\pi(n-15)}\cdot\left[1-\cos\left(\dfrac{\pi n}{15}\right)\right]R_N(n) & n\neq 15\\ 0.4 & n=15\end{cases}$$

4、由h(n)确定H($e^{j\omega}$)，再检验指标是否符合要求，如果不满足，则改变N或窗函数的形状来重新计算。

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{30}h(n)e^{-j\omega n}$$

8.4 频率抽样设计法

频率抽样法是从频域出发，把给定的理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 加以等间隔抽样，即

$$H_d(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi n}{k}} = H_d(k)$$

令

$$H(k) = H_d(k) = H_d(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi n}{k}}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \qquad （7.42）$$

由DFT定义，得

$$h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \qquad （7.43）$$

可求得滤波器的系统函数

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H_d(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H_d(k)\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}nk}z^{-n} \qquad (7.44)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H_d(k)\frac{1-z^{-N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}nk}z^{-1}}$$

该系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H_d(k)\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}nk}e^{-j\omega}} \qquad (7.45)$$

经过推导，有

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2}\sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j(N-1)k\pi/N} \frac{\sin\left[N(\omega-2\pi k/N)/2\right]}{N\sin\left[(\omega-2\pi k/N)/2\right]} \quad (7.46)$$

由式（7.46）可知，$H(e^{j\omega})$是由内插函数

$$\Phi(\omega) = e^{-j\frac{(N-1)}{2}\omega} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

的插值所决定的，即

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k)\Phi(\omega-\frac{2\pi}{N}k) \quad (7.47)$$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}H_d(k)\Phi(\omega-\frac{2\pi}{N}k) \qquad （7.47）$$

由内插公式（7.47）可知，在各频率抽样点上，滤波器的实际频率响应严格地和理想频率响应值相等。但是在抽样点之间的频率响应则是由N个离散值$H_d(k)$作为权重和插值函数$\Phi(\omega)$线性组合的结果。显然抽样点N取得越大，近似程度越好，N的选取要视在通带和阻带内的技术要求而定。

$H_d(k)$ 的指定原则

（1）在通带内可令$|H_d(k)|=1$，阻带内$|H_d(k)|=0$，且在通带内赋给$H_d(k)$ 一相位函数；

（2）指定的 $H_d(k)$ 应保证由式（7.43）求出的$h(n)$是实序列；

（3）由 $h(n)$求出的$H(e^{j\omega})$应具有线性相位。

$H_d(k)$的指定

由式（7.46）知，若保证 $H_d(k)e^{j(N-1)k\pi/N}=$实数

则$H(e^{j\omega})$就具有线性相位，$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$

并考虑$|H_d(k)|=1$，等效地指定

$$H_d(k)=e^{-j(N-1)k\pi/N},\quad k=0,1,\ldots,N-1 \qquad （7.48）$$

根据DFT的性质可知，为保证$H_d(k)$是实序列，应满足下列对称关系

$$H_d^*(k)=H_d(-k)=H_d(N-k) \qquad （7.49）$$

由于

$$H_d(N-k)=e^{-j(N-1)(N-k)\pi/N}=e^{-j(N-1)\pi}e^{j(N-1)k\pi/N}=e^{-j(N-1)\pi}H_d^*(k) \quad （7.50）$$

当N为偶数时，$e^{-j(N-1)\pi}=-1$； 当N为奇数时，$e^{-j(N-1)\pi}=1$。这样当N为偶数时，若按式（7.48）对 $H_d(k)$ 赋值，就不能满足式（7.49）的对应关系。由此，按如下原则对 $H_d(k)$ 赋值。

N为偶数时

$$H_d(k)=\begin{cases} e^{-j(N-1)k\pi/N} & k=0,1,\ldots,N/2-1 \\ 0 & k=N/2 \\ -e^{-j(N-1)k\pi/N} & k=N/2+1,\ldots,N-1 \end{cases} \quad （7.51）$$

N为奇数时

$$H_d(k)=e^{-j(N-1)k\pi/N} \qquad k=0,1,\ldots,N-1 \quad （7.52）$$

用频率抽样法设计FIR数字滤波器的步骤：

（1）根据所设计的滤波器的通带与阻带的要求，根据N为偶数还是奇数，按式（7.51）、（7.52）指定$H_d(k)$，在阻带内，$H_d(k)=0$；

（2）由指定的$H_d(k)$构成所设计的滤波器的转移函数，也可由式（7.44）求得频率响应$H(e^{j\omega})$。

例7.3 用频率抽样法设计一个低通滤波器，其截止频率是抽样频率的1/10，取N=20。

解： 此处N为偶数，且在通带内对$H(e^{j\omega})$抽样时，仅得两个点，由式（7.51），有

$$H_d(0)=1$$

$$H_d(1)=e^{-j19\pi/20}$$

$$H_d(19)=H_d(20-1)=H_d^*(1)=e^{j19\pi/20}$$

在其它点处，$H_d(k)=0$

将 $H_d(k)$代入式（7.43），得 $h(n)$ 序列如下

$h(0)=h(19)=-0.04877$ $\quad$ $h(1)=h(18)=-0.0391$

$h(2)=h(17)=-0.0207$ $\quad$ $h(3)=h(16)=0.0046$

$h(4)=h(15)=0.03436$ $\quad$ $h(5)=h(14)=0.0656$

$h(6)=h(13)=0.0954$ $\quad$ $h(7)=h(12)=0.12071$

$h(8)=h(11)=0.1391$ $\quad$ $h(9)=h(10)=0.14877$

8. 4 应用MATLAB设计FIR数字滤波器

8.4.1 与本章内容有关的MATLAB文件

1． 窗函数

（1）bartlett.m （三角窗）

（2）blackman.m （布莱克曼窗）

（3）boxcar.m （矩形窗）

（4）hamming.m （海明窗）

（5）hanning.m （汉宁窗）

（6）triang.m （三角窗）

（7）chebwin.m （切比雪夫窗）

（8）kaiser.m （凯泽窗）

2．FIR数字滤波器的文件

（1）fir1.m

本文件采用窗函数法设计FIR数字滤波器，其调用格式是

1）b=fir1（N,Wn）

2）b=fir1（N,Wn,’high’）

3）b=fir1（N,Wn,’stop’）

式中N为滤波器的阶次，因此滤波器的长度为N+1；Wn是通带截止频率，其值在0~1之间，1对应抽样频率的一半；b是设计好的滤波器系数。

对于格式（1），若Wn是一标量，则可用来设计低通滤波器；若Wn是1×2的向量，则用来设计带通滤波器；若Wn是$1\times L$的向量，则可用来设计带滤波器，此时，格式将变为：

b=fir1（N,Wn,’DC-1’）或b=fir1（N,Wn,’DC-0’）

格式（2）用来设计高通滤波器；格式（3）用来设计带阻滤波器。

（2）fir2.m

本文件采用窗函数法设计具有任意幅频特性的FIR数字滤波器。其调用格式是

b=fir2（N,F,M）

其中F是频率向量，其值在0~1之间，M是与F相对应的所希望的幅频响应。不指定窗函数的类型，则自动选择汉明窗。

（3）remez.m

本文件用来设计采用切比雪夫最佳一致逼近FIR数字滤波器。同时，还可以用来设计希尔伯特变换器和差分器。其调用格式是

1）b=remez（N,F,A）

2）b=remez（N,F,A,W）

3）b=remez（N,F,A,W,’hilbert’）

4）b=remez（N,F,A,W,’differentiator’）

其中，N是给定的滤波器的阶次；b是设计的滤波器的系数，其长度为N+1；F是频率向量，其值在0~1之间；A是对应F的各频段上的理想幅频响应；W是各频段上的加权向量。

注意：若b的长度为偶数，设计高通和带阻滤波器时有可能出现错误，因此最好保证b的长度为奇数，即N应为偶数。

（4）remexord.m

本文件采用切比雪夫一致逼近设计FIR数字滤波器时所需要的滤波器阶次。其调用格式是

[N,Fo,Ao,W]=remexord（F,A,DEV,Fs）

式中，F、A的含义同文件（3），是通带和阻带上的偏差；该文件输出的是符合要求的滤波器阶次N、频率向量Fo、幅度向量Ao和加权向量W。若设计者事先不能确定自己要设计的滤波器的阶次，那么，调用remexord后，就可利用这一族参数再调用remez，即b=remez（N,Fo,Ao,W），从而设计出所需要的滤波器。因此，通常remez和remexord结合使用。

说明：remexord给出的阶次N有可能偏低，这时适当增加N即可；另外，若N为奇数，就可令其加1，使其变为偶数，这样b的长度为奇数。

（5）sgolay.m

本文件用来设计Savitzky-Golay平滑滤波器。其调用格式是

b=sgolay（k,f）

式中k是多项式的阶次，f是拟合的双边点数。要求 k＜f ，且f为奇数。

（6）firls.m

本文件用最小平方法设计线性相位FIR数字滤波器。可设计任意给定的理想幅频特性。

（7）fircls.m

用带约束的最小平方法设计线性相位FIR数字滤波器。可设计任意给定的理想幅频特性。

（8）fircls1.m

用带约束最小平方法设计线性相位FIR低通和高通滤波器。可设计任意给定的理想幅频特性。

（9）firrcos.m

用来设计低通线性相位FIR数字滤波器，其过渡带为余弦函数形状。

8.4. 2 应用MATLAB设计FIR数字滤波器

例7.3 令N=10，分别用矩形窗和海明窗重复例7.1。

解： 根据要求编制MATLAB程序如下：

```
clear all;
N=10;
b1=fir1(N,0.25,boxcar(N+1));    % 用矩形窗作为冲激响应的窗函数
b2=fir1(N,0.25,hamming(N+1));    % 用Hamming窗作为冲激响应的窗函数
%
M=128;
```

```
h1=freqz(b1,1,M);
h2=freqz(b2,1,M);
% 分别求两个滤波器的频率响应；
t=0:10;
subplot(221)
stem(t,b2,'.');hold on;
plot(t,zeros(1,11));grid;
f=0:0.5/M:0.5-0.5/M;
M1=M/4;
for k=1:M1
```

```
   hd(k)=1;
   hd(k+M1)=0;
   hd(k+2*M1)=0;
   hd(k+3*M1)=0;
end
subplot(222)
plot(f,abs(h1),'b-',f,abs(h2),'g-',f,hd,'-');grid;
```

运行结果如图7.5所示。

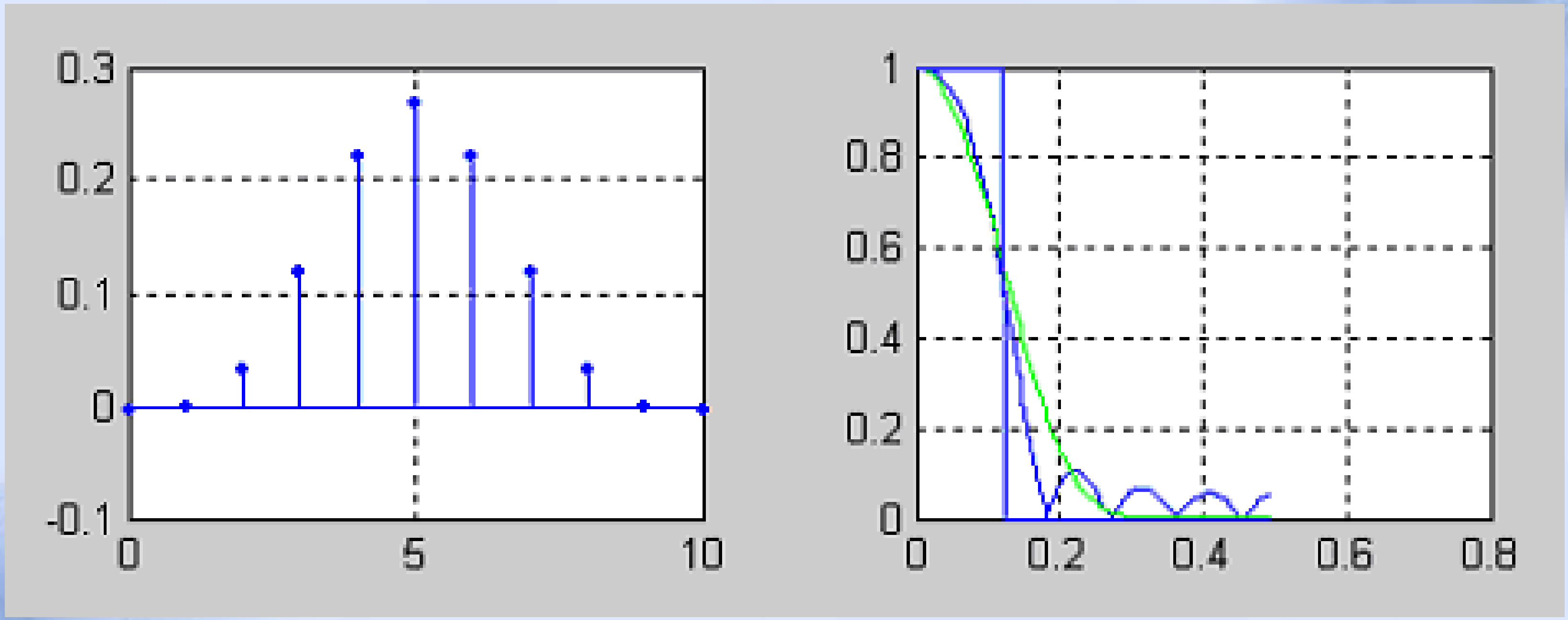


图7.5 运行结果

例7.4 设计一多带滤波器，要求理想幅频响应在归一化频率0.2~0.3，0.6~0.8之间为1，其余均为0。

解： 程序如下：

```
clear all;
f=[0 0.19 0.2 0.3 0.31 0.59 0.6 0.8 0.81 1];
% 给定频率轴分点；
m=[0 0 1 1 0 0 1 1 0 0];
% 给定在这些频率分点上理想的幅频响应
N1=30;
N2=90;
% 取两种不同的滤波器长度；
b1=fir2(N1,f,m);
b2=fir2(N2,f,m);
```

```
% 得到两个滤波器;

subplot(311);
stem(b1,'.');grid;
subplot(312);
stem(b2,'.');grid;

M=128;
[h1,w]=freqz(b1,1,M,1);
[h2,w]=freqz(b2,1,M,1);
subplot(313);
plot(w,abs(h1),'b-',w,abs(h2),'g-');grid;
```

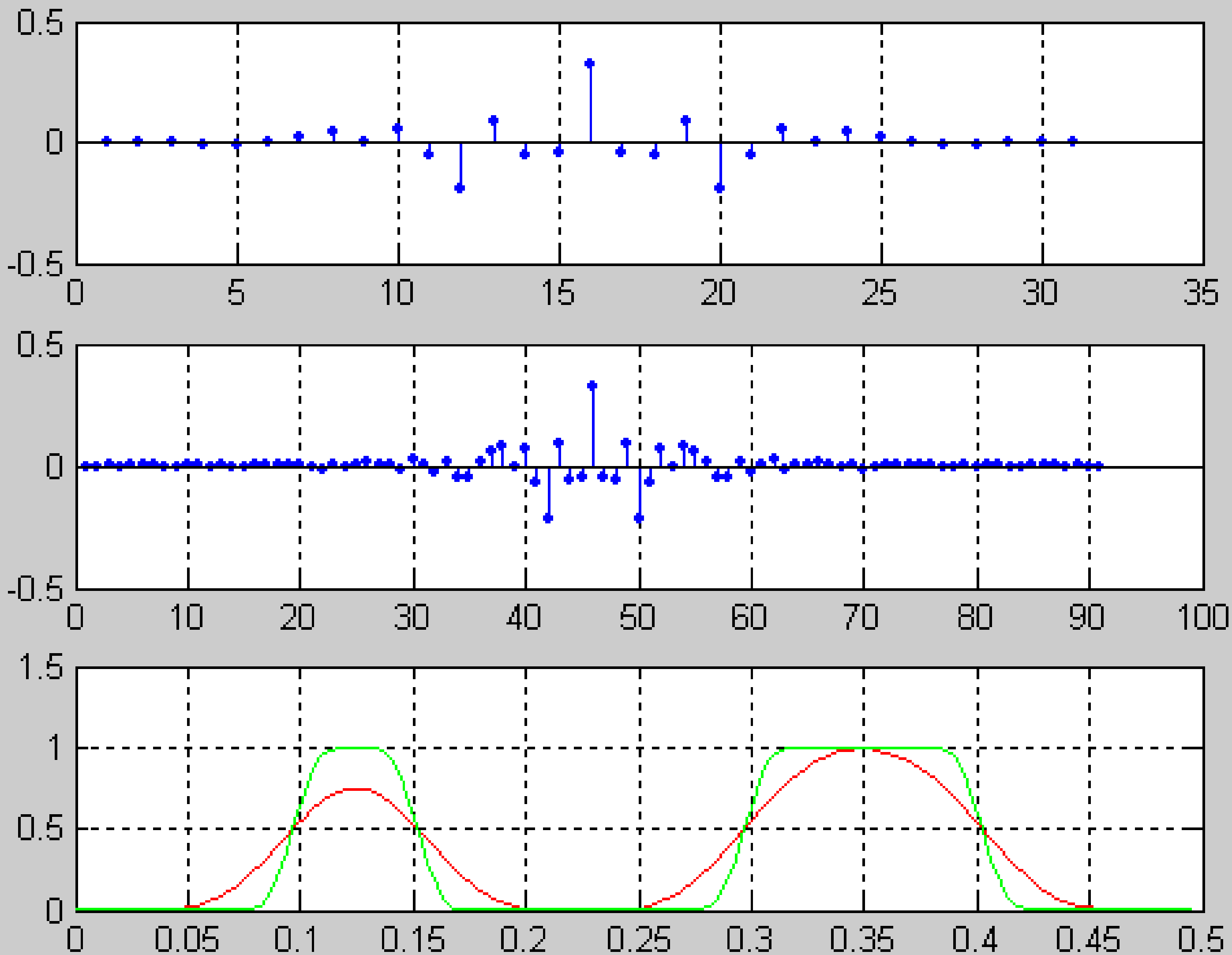


图7.6 滤波器单位抽样响应及其幅频响应曲线

例7.5 利用切比雪夫最佳一致逼近法设计一低通滤波器，要求通带边缘频率 $\omega_p = 0.6\pi$ 阻带边缘频率 $\omega_s = 0.7\pi$。

解： clear all;

f=[0 .6 .7 1];

% 给定频率轴分点；

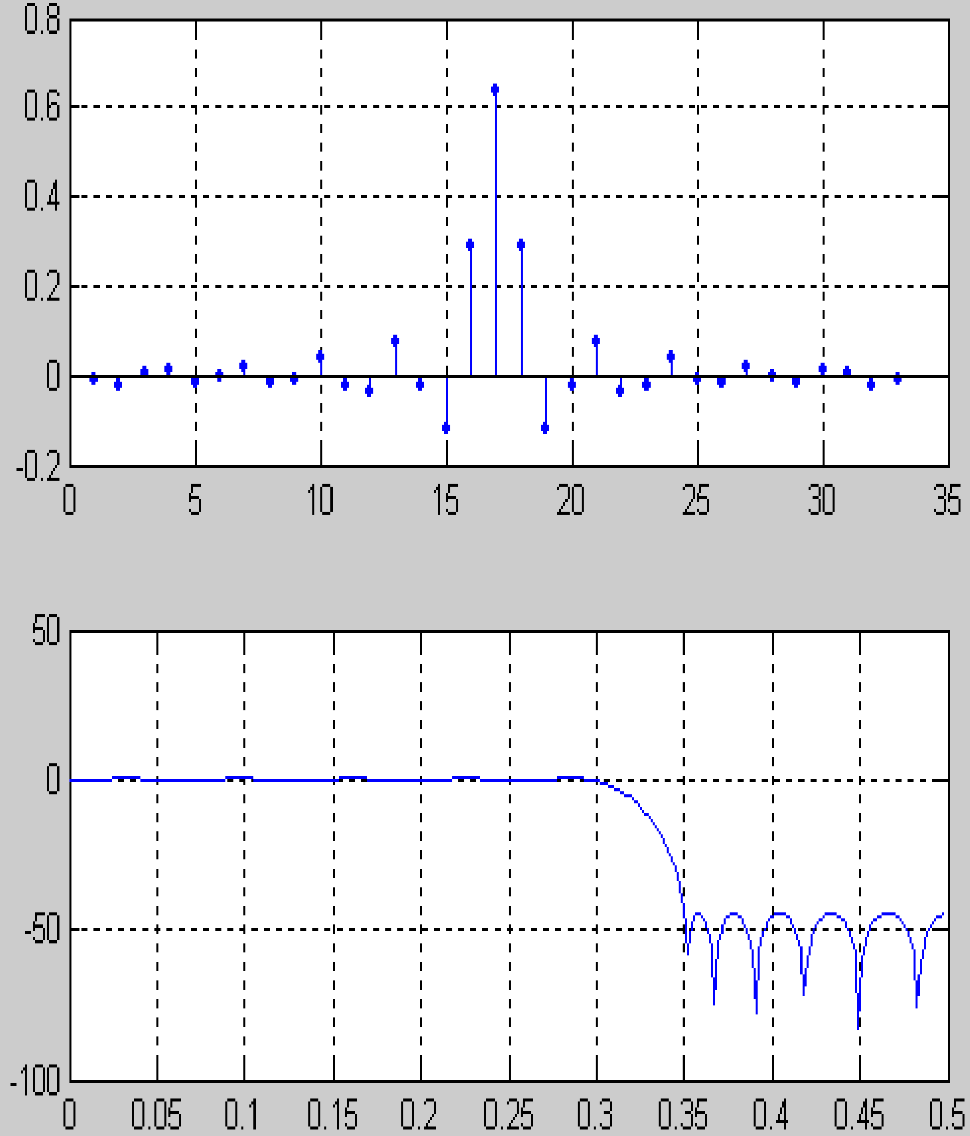
A=[1 1 0 0];

% 给定在这些频率分点上理想的幅频响应；

weigh=[1 10];

% 给定在这些频率分点上的加权；

```
b=remez(32,f,A,weigh);
% 设计出切比雪夫最佳一致逼近滤波器;
%
[h,w]=freqz(b,1,256,1);
h=abs(h);
h=20*log10(h);
figure(1)
stem(b,'.');grid;
figure(2)
plot(w,h);grid;
```


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0 5 10 15 20 25 30 35
50
0
-50
-100
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5

例7.6 利用切比雪夫最佳一致逼近法设计一个多阻带陷波器，数字系统的抽样频率为500Hz，去掉工频信号（50Hz）及二次、三次谐波的干扰。 。

解： clear all;

% 用切比雪夫最佳一致逼近设计线性相位多带FIR滤波器；

f=[0 .14 .18 .22 .26 .34 .38 .42 .46 .54 .58 .62 .66 1];

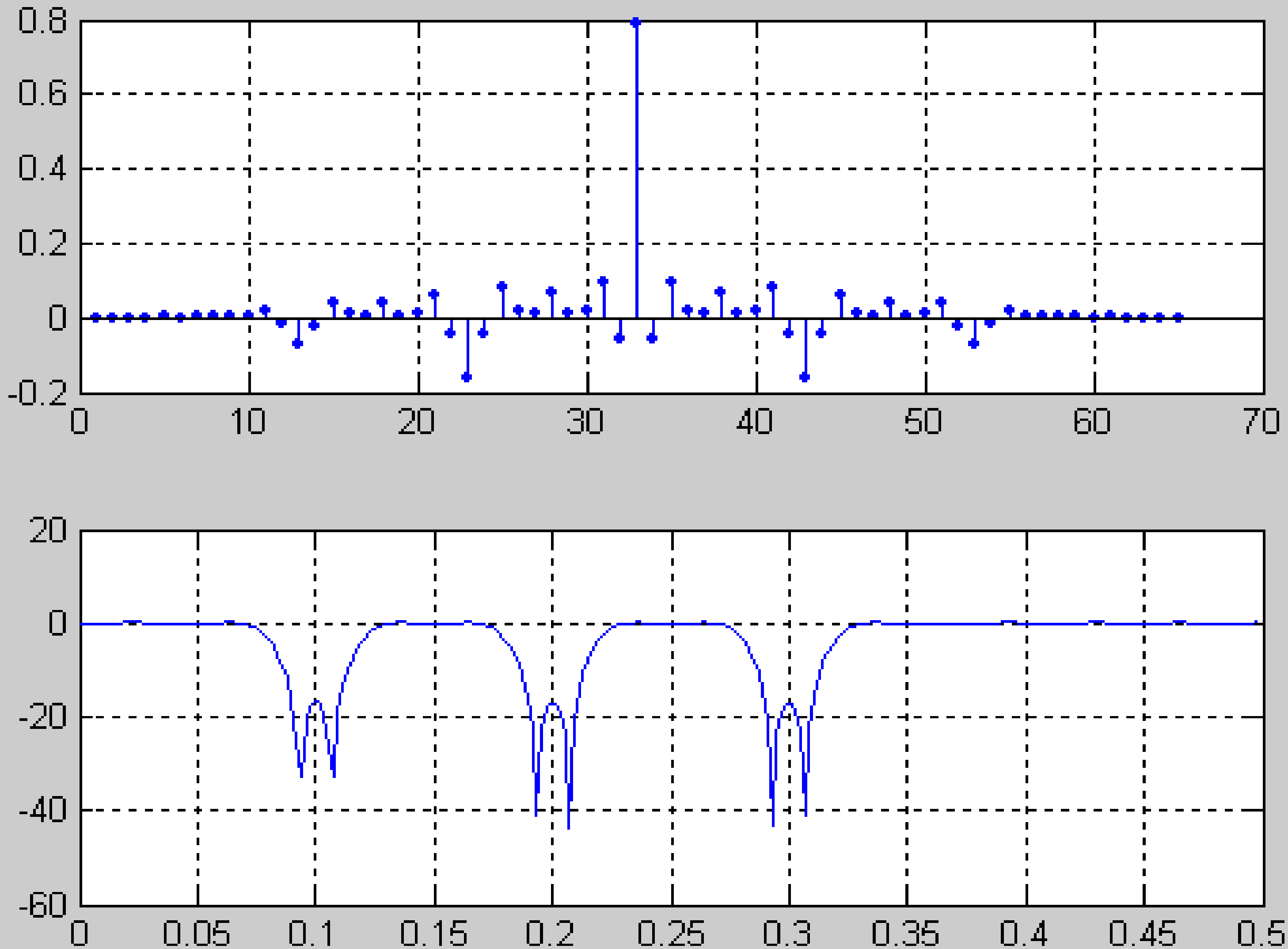
A=[1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1];

weigh=[8 1 8 1 8 1 8];

b=remez(64,f,A,weigh);

%

```
[h,w]=freqz(b,1,256,1);
hr=abs(h);
h=abs(h);
h=20*log10(h);
figure(1)
stem(b,'');grid;
figure(2)
plot(w,h);grid;
```



0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
10
20
30
40
50
60
70
20
0
-20
-40
-60
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5