一、求下列方程组确定的函数的导数或偏导数

1. 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$。

解 在方程组两边同时对 x 求导，得 $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 2x + 2y\dfrac{dy}{dx} & (1) \\ 2x + 4y\dfrac{dy}{dx} + 6z\dfrac{dz}{dx} = 0 & (2) \end{cases}$，（1）代入（2）解得

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}$，再代入（1）得到 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x}{3z+1}$。

2. 设方程组 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$ 确定了二元函数 $u = u(x,y), v = v(x,y)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解 在方程组两边同时对 x 求导，并注意到 x, y 同为自变量，u 和 v 都是 x 的函数，得

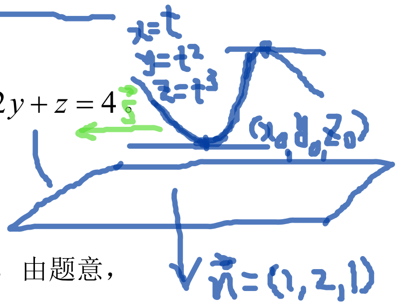
$\begin{cases} 1 = e^u u_x + u_x \sin v + u\cos v v_x & (1) \\ 0 = e^u u_x - u_x \cos v - u(-\sin v)v_x & (2) \end{cases}$，即 $\begin{cases} 1 = (e^u + \sin v)u_x + u\cos v v_x & (3) \\ 0 = (e^u - \cos v)u_x + u\sin v v_x & (4) \end{cases}$，由（4）

得 $u_x = \dfrac{-u\sin v \cdot v_x}{e^u - \cos v}$，代入（3）得 $1 = \dfrac{-(e^u + \sin v)u\sin v \cdot v_x}{e^u - \cos v} + u\cos v \cdot v_x$，解得

$$v_x = 1 \Big/ [u\cos v - \frac{(e^u + \sin v)u\sin v}{e^u - \cos v}] = \frac{e^u - \cos v}{u\cos v e^u - u\cos^2 v - e^u u\sin v - u\sin^2 v}$$

$= \dfrac{e^u - \cos v}{u[e^u(\cos v - \sin v) - 1]}$，于是得 $u_x = \dfrac{-\sin v}{e^u(\cos v - \sin v) - 1} = \dfrac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$。

二、1. 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上的点，使在该点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$



解 设所求点为 (x_0, y_0, z_0)，对应参数为 t_0，则有 $x_0 = t_0, y_0 = t_0^2, z_0 = t_0^3$。

又曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的切线方向向量 $\vec{S} = (1, 2t_0, 3t_0^2)$，由题意，

$\vec{S} = (1, 2t_0, 3t_0^2) \perp \vec{n} = (1,2,1)$，故 $1 \times 1 + 2 \times 2t_0 + 1 \times 3t_0^2 = 0$，得 $t_0 = -\dfrac{1}{3}$ 或 -1，于是所求

点 $(x_0, y_0, z_0) = (\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27})$ 或 $(-1,1,-1)$.

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程。

解　设曲线的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=w(t) \end{cases}$，则有 $\begin{cases} 2x\cdot x_t+2y\cdot y_t+2z\cdot z_t-3x_t=0 \\ 2x_t-3y_t+5z_t=0 \end{cases}$ （*）。

又因为点（1,1,1）满足题目给出的方程组，所以点（1,1,1）和它对应的参数 t_0 满足方程组（*），故得 $\begin{cases} 2\varphi'(t_0)+2\psi'(t_0)+2w'(t_0)-3\varphi'(t_0)=0 \\ 2\varphi'(t_0)-3\psi'(t_0)+5w'(t_0)=0 \end{cases}$，解得 $\varphi'(t_0)=-16w'(t_0)$

$\psi'(t_0)=-9w'(t_0),$，所求切线的方向向量

$(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),w'(t_0))=(-16w'(t_0),-9w'(t_0),w'(t_0))//(16,9,-1)$，可取为 $(16,9,-1)$，

得切线方程为 $\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$ 及法平面方程为 $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$。

即 $16x+9y-z-24=0$

3. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面及法线方程。

解　点 $(2,1,0)$ 的坐标满足曲面方程，故点 $(2,1,0)$ 是曲面 $e^z-z+xy=3$ 上的点。

设 $F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$，则 $F_x=y, F_y=x, F_z=e^z-1$，从而曲面 $e^z-z+xy=3$ 在它上面的点 $(2,1,0)$ 处的切平面法向量 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(2,1,0)}=(1,2,0)$（也是法线的方向向量）。故所求切平面方程为 $1(x-2)+2(y-1)+0(z-0)=0$ 即 $x+2y-4=0$；法线方程为

$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{0}$ 或化简为 $\begin{cases} \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2} \\ z=0 \end{cases}$。

$\frac{x-2}{1}=\frac{z-0}{0}$

三. 1. 函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $P(1,2)$ 到点 $Q(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数等于____________________。

解　$\overrightarrow{PQ}=(1,\sqrt{3})$. 从点 $P(1,2)$ 到点 $Q(2,2+\sqrt{3})$ 的方向 l 的方向余弦

$\cos\alpha=\frac{1}{2}, \cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$；又 $z_x(1,2)=2, z_y(1,2)=4$，故所求方向导数

$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(1,2)}=z_x(1,2)\cos\alpha+z_y(1,2)\cos\beta=1+2\sqrt{3}$。

2. 求函数$u=xy^2z$在点$(1,-1,2)$处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数。

解 $gradu(1,-1,2)=(u_x,u_y,u_z)\big|_{(1,-1,2)}=(y^2z,\ \ 2xyz,\ \ xy^2)\big|_{(1,-1,2)}=(2,-4,1)$。

函数$u=xy^2z$在点$(1,-1,2)$处增加最快的方向l即梯度$gradu(1,-1,2)=(2,-4,1)$方向，且沿这个方向的方向导数$\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,-1,2)}=\left|gradu(1,-1,2)\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^1}=\sqrt{21}$；

函数$u=xy^2z$在点$(1,-1,2)$处减少最快的方向l即负梯度$-gradu(1,-1,2)=(-2,4,-1)$方向，且沿这个方向的方向导数$\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,-1,2)}=-\left|gradu(1,-1,2)\right|=-\sqrt{21}$。

四. 1. 求函数$f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$的极值。

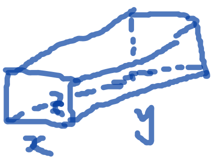
解 由$\begin{cases} f_x(x,y)=4-2x=0 \\ f_y(x,y)=-4-2y=0 \end{cases}$得驻点$(2,-2)$。又$f_{xx}(x,y)=-2, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=-2$。

在驻点$(2,-2)$处，$A=f_{xx}(2-2)=-2, B=f_{xy}(2-2)=0, C=f_{yy}(2-2)=-2$，

$AC-B^2=4>0, A<0$，故$f(2,-1)=8$为极大值。

2. 建造一个体积为$4\,m^3$的长方体无盖水池，如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小。

解 设长方体水池的长、宽和高分别为x,y,z（单位为m）。则问题转化为求函数



$f(x,y,z)=2yz+2xz+xy$在条件$xyz=4$下的最小值。设拉格朗日函数

$L=2yz+2xz+xy+\lambda(xyz-4)=0$，令$\begin{cases} L_x=2z+y+\lambda yz=0.....(1) \\ L_y=2z+x+\lambda xz=0.....(2) \\ L_z=2y+2x+\lambda xy=0.....(3) \\ L_\lambda=xyz-4=0.....(4) \end{cases}$，由方程$(1),(2)$知

$x=y$，代入（3）得$\lambda y=-4$，再代入（1）得$y=2z$，最后结合（4）得$z=1, x=y=2$，

于是得唯一驻点$(2,2,1)$，故长方体水池的长、宽和高分别为$2m,2m,1m$时，表面积最小，从而用料最省。