

一、求下列方程组确定的函数的导数或偏导数

1. 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ 。

2. 设方程组 $\begin{cases} x = e^u + u \sin v \\ y = e^u - u \cos v \end{cases}$ 确定了二元函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 。

二、1. 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上一点, 使在该点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$ 。

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 (1,1,1) 处的切线及法平面方程。

3. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 (2,1,0) 处的切平面及法线方程。

三. 1. 函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 (1,2) 处沿从点 $P(1,2)$ 到点 $Q(2, 2 + \sqrt{3})$ 的方向的方向导数。

2. 求函数 $u = xy^2z$ 在点 $(1, -1, 2)$ 处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数。

四. 1. 求函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的极值。

2. 建造一个体积为 4 m^3 的长方体无盖水池，如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小。