微积分重要公式及性质

目　录

第一章 函 数

1. 集合运算律

交换律 $A \cup B = B \cup A$;$A \cap B = B \cap A$;

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

摩根律 $(A \cup B)' = A' \cap B'$;$(A \cap B)' = A' \cup B'$.

2. 函数的四种特性

单调性、有界性、奇偶性、周期性

3. 奇偶函数的运算性质

(1) 设 $f(x)$、$g(x)$ 均为偶函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 及 $f(x) \cdot g(x)$ 必为偶函数.

(2) 设 $f(x)$、$g(x)$ 均为奇函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 必为奇函数,而 $f(x) \cdot g(x)$ 必为偶函数.

(3) 设 $f(x)$ 为偶函数,$g(x)$ 为奇函数,则当 $f(x) \neq 0$ 时,$f(x) \cdot g(x)$ 必为奇函数,但 $f(x) \pm g(x)$ 未必是奇(偶)函数.

(4) 设 $\varphi(x)$ 为任意函数,则 $f(x) = \varphi(x) + \varphi(-x)$ 必为偶函数,$g(x) = \varphi(x) - \varphi(-x)$ 必为奇函数,且

$\varphi(x)=\frac{f(x)}{2}+\frac{g(x)}{2}$.

4. 常见三角函数与反三角函数的定义域、值域.

	定义域	值　域
$\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
$\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
$\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$
$\cot x$	$x\neq k\pi$	$(-\infty,+\infty)$
$\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\mathrm{arccot}\, x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$

第二章　极限与连续

1. 极限的四则运算法则

若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$（A，B 均为有限数），则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,$$
$$\lim f(x)\cdot g(x)=A\cdot B,$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},(\text{当 } B\neq 0).$$

2. 极限存在的两个准则

（1）单调有界数列必有极限

（2）夹逼准则

若当$x\in\{x\mid 0<|x-x_0|<h\}$（或$|x|>M$）时，恒有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

3. 两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e}.$$

4. 无穷小量的运算性质

(1) 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

(2) 有限个无穷小量的积仍是无穷小量.

(3) 无穷小量与有界函数的乘积仍是无穷小量.

(4) 等价无穷小代换. 设 $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 是自变量同一变化过程中的无穷小且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，$\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 存在，则 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=\lim\frac{\beta}{\alpha}$.

5. 闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则有：

(1) $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

(2) 最大值与最小值定理　$f(x)$ 在$[a,b]$上有最大值和最小值，即至少存在点 ξ 和 $\eta\in[a,b]$，使对一切 $x\in[a,b]$，有 $f(\eta)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi)$.

(3) 介值定理　设 μ 是介于 $f(a),f(b)[f(a)\neq f(b)]$ 间的任何一个数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\mu$.

(4) 零点定理　若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

第三章　导数与微分

1. 基本初等函数的导数公式：

(1)$C'=0$

(2)$(x^{a})'=ax^{a-1}$

(3)$(a^{x})'=a^{x}\ln a$，$(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$

(4)$(\log_{a}|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(5)$(\sin x)'=\cos x$

(6)$(\cos x)'=-\sin x$

(7)$(\tan x)'=\sec^{2}x=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$

(8)$(\cot x)'=-\csc^{2}x=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}$

(9)$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$

(10)$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

(11)$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$，$|x|<1$

(12)$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$，$|x|<1$

(13)$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$

(14) $(\operatorname{arccot}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

2. 四则运算法则：设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均可导，则

① $(u\pm v)'=u'\pm v'$，$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$.

② $(uv)'=u'v+uv'$，$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$.

若 $u(x)$，$v(x)$ 均 n 阶可导，则有下面的莱布尼兹公式：

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}\text{，其中 } u^{(0)}=u,v^{(0)}=v.$$

③ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$，

$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\ (v\neq 0)$.

3. 对数求导法则：当函数 $f(x)$ 的表达式是幂指函数形式或是若干因式连乘积，商或乘方，开方的形式，可在函数式两边先取对数，然后在等式两端对 x 求导.

4. 复合函数求导法则：设 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，$y=f(u)$ 在 $u=\varphi(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\text{ 或 } y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

5. 反函数求导数：设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 也可导且反函数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\text{ 或 } x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

6. 隐函数求导数：由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称为 y 是自变量 x 的隐函数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的方法有以下两种：

① 在方程两边分别对 x 求导，特别要注意 y 是 x 的函数，于是 y 的函数对 x 来说就是复合函数.

② 利用一阶微分形式不变性，在方程两边求微分，然后解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

第四章　中值定理与导数的应用

1. 罗尔定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)$，则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=0,\xi\in(a,b).$$

2. 拉格朗日中值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\xi\in(a,b).$$

3. 柯西定理：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

4. 函数单调性的判定定理：设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，并在(a,b)内可导，则

(1) $f(x)$ 在$[a,b]$上是单调递增的 $\Leftrightarrow f'(x)\geqslant 0,x\in(a,b)$.

(2) $f(x)$ 在$[a,b]$上单调递减的 $\Leftrightarrow f'(x)\leqslant 0,x\in(a,b)$，其中使 $f'(x)=0$ 成立的点仅有有限个.

5. 极值存在的必要条件(费马定理):设 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值,且 $f'(x_0)$ 存在,则 $f'(x_0)=0$.

6. 极值存在的第一充分条件:设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内连续并可导(但 $f'(x_0)$ 可以不存在).

(1) 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)>0$;当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$.

(2) 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)<0$;当 $\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$.

(3) 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 和 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时,$f'(x)$ 不变号,则 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值.

7. 极值存在的第二充分条件:设 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数,且 $f'(x_0)=0,f''(x_0)\neq 0$,则

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

8. 函数凹凸性的判定定理:设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数,则

(1) 当 $f''(x)>0$ 时,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.

(2) 当 $f''(x)<0$ 时,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

9. 经济学中常见的几个函数.

需求函数	$q=f(p)$
供给函数	$q=\varphi(p)$
总成本函数	$C=C(q)=C_1+C_2(q)$
边际成本函数	$C'=C'(q)$
总收益函数	$R=R(q)$

边际收益函数 $R' = R'(q)$

利润函数 $L = L(q) = R(q) - C(q)$

边际利润 $L' = L'(q) = R'(q) - C'(q)$

其中 p 为商品价格，q 为商品量，C_1 为固定成本，C_2 为可变成本.

第五章 不定积分

1. 不定积分的基本性质：

(1) $\int [f(x) \pm g(x)] \mathrm{d}x = \int f(x) \mathrm{d}x \pm \int g(x) \mathrm{d}x$

(2) $\int kf(x) \mathrm{d}x = k \int f(x) \mathrm{d}x$ （k 为非零常数）

(3) $\int f(x) g'(x) \mathrm{d}x = f(x) g(x) - \int g(x) f'(x) \mathrm{d}x$

（分部积分法）

(4) 设 $x = \varphi(t)$ 单调可导且其导函数连续，则

$\int f(x) \mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) \mathrm{d}t$ （换元积分法）

2. 基本积分公式：

(1) $\int x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1$

(2) $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln |x| + C$

(3) $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

(4) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^x + C, a > 0, a \neq 1$

(5) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$

(6) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$

(7) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

(8) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(10) $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C$ 或 $-\operatorname{arccot} x + C$

(11) $\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

(12) $\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(13) $\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(14) $\int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, a \neq 0$

(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0$

(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

第六章　定积分

1. 定积分性质：

(1) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$

(2) $\int_a^b kf(x) \mathrm{d}x = k\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ （k 为常数）

(3) $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \mathrm{d}x$

(4) $\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \mathrm{d}x$

$$= f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) \mathrm{d}x$$

（分部积分法）

(5) $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) \mathrm{d}t$，其中 $x = \varphi(t)$ 单调，存在连续导数，且 $a = \varphi(\alpha)$，$b = \varphi(\beta)$ （换元积分法）.

(6) 若在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x) \geqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$.

(7) 积分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

(8) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

2. 牛顿-莱布尼兹公式:若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$F(x)$ 为 $f(x)$ 的任一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

3. 函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的平均值为 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

第七章　无穷级数

1. 级数的性质

（1）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，其和为 S，k 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛，且其和为 kS，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty}u_n = kS.$$

（2）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于 S 和 σ，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}v_n = S \pm \sigma.$$

（3）一个级数去掉或加上有限项，不影响级数的敛散性，在原级数收敛时，仅可能改变级数的和.

（4）收敛级数的各项按原次序分组加括号后，所成的新级数仍收敛，且其和不变；反之，不一定成立.

(5) 级数收敛的必要条件：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

2. 正项级数的敛散性

(1) 基本定理. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 S_n 有界.

(2) 比较审敛法. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，

(ⅰ) 若 $u_n \leqslant v_n (n = 1,2,\cdots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

(ⅱ) 若 $u_n \geqslant v_n (n = 1,2,\cdots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

(ⅲ) 比较审敛法的极限形式：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l (0 \leqslant l \leqslant +\infty)$：

① 若 $0 \leqslant l < +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

② 若 $0 < l \leqslant +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

(4) 比值审敛法. 设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则

(ⅰ) 当 $0 \leqslant \rho < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(ⅱ) 当 $1 < \rho \leqslant +\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

3. 交错级数审敛法

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足

(ⅰ) $u_n \geqslant u_{n+1}$；

(ⅱ) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

则该交错级数收敛，且其和 $S \leqslant u_1$，余项的绝对值 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

4. 绝对收敛与条件收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为绝对收敛级数；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为条件收敛.

5. 幂级数的收敛半径

设 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$，其中 a_n、a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项的系数，如果

(ⅰ) $\rho \neq 0$，则 $R = \frac{1}{\rho}$；

(ⅱ) $\rho=0$，则 $R=+\infty$；

(ⅲ) $\rho=+\infty$，则 $R=0$.

6. 幂级数的和函数性质

(1) 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内是连续的.

(2) 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内是可导的，并且有逐项求导公式

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

且逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

(3) 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内是可积的，并且有逐项积分公式

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)\mathrm{d}x&=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\end{aligned}$$

且逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

7. 常用函数的幂级数展开式

(1) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$

$(-1<x<1)$.

(2) $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$

$(-\infty<x<+\infty)$.

(3) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$

$(-\infty < x < +\infty)$.

(4) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

$(-\infty < x < +\infty)$.

(5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$

$(-1 < x \leqslant 1)$.

第八章 多元函数

1. 常见的曲面及其方程

(1) 球面方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

其中球心坐标为(a,b,c),半径为R.

(2) 柱面方程:准线为$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$母线平行于$z$轴的柱面方程为$f(x,y)=0$.

(3) 旋转曲面:曲线$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$绕$Ox$轴旋转的旋转曲面方程为$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$;绕$Oy$轴旋转的旋转曲面方程为$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

(4) 椭球面:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,其中$a$、$b$、$c$为椭球面的半轴.

(5) 二次锥面:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

2. 偏导数

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

3. 全微分

(1) 全微分公式 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

(2) 可微的充分条件. 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处两个偏导数连续,则 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微.

(3) 可微的必要条件. 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微,则 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处两个偏导数存在.

4. 复合函数微分法

设 $z=f(u,v)$,并设 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$,则 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 是 x,y 的复合函数. 如果 $z=f(u,v)$ 可微,$u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$ 对 x,y 的偏导数存在,则 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 对 x,y 的偏导数存在,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

5. 一阶全微分形式不变性

设 $z=f(u,v)$,$u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$ 分别有连续的偏导数,则复合函数 $z=f(u(x,y),u(x,y))$ 在 x,y 处的 $\mathrm{d}z$ 仍可表示为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

6. 隐函数微分法

(1) 公式法.

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$$

确定的具有连续偏导数的函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的偏导数公式

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_y}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(2) 利用复合函数微分法. 设方程 $F(x,y)=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$,将 $y=y(x)$ 代入方程后,方程变为恒等式

$$F(x,y(x))=0,$$

应用复合函数微分法,有

$$F_x(x,y)\cdot 1+F_y(x,y)\cdot y_x=0.$$

从中解出 y_x 来.

反复利用上述方法,可以求得隐函数的高阶偏导数.

7. 多元函数的极值

(1) 普通极值问题

定理1(极值的必要条件)　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极值,且函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的两个偏导数存在,则 $F_x(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)=0$.

定理2(极值的充分条件)　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有二阶连续偏导数,又 $F_x(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)=0$,令

$$F_{xx}(x_0,y_0)=A,F_{xy}(x_0,y_0)=B,F_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则

1° 当 $AC-B^2>0$，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有极值，且 $A>0$ 时为极小值，$A<0$ 时为极大值.

2° 当 $AC-B^2<0$，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处无极值.

3° 当 $AC-B^2=0$，不能判定 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 是否有极值.

(2) 条件极值问题

可微函数 $z=f(x,y)$ 满足条件 $\varphi(x,y)=0$ 的条件极值的必要条件为

$$\begin{cases} F_x = f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ F_y = f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

上述方程组可以认为是函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 的无条件极值点的必要条件，其中 F 称为拉格朗日函数，λ 为拉格朗日乘数.

8. 二重积分的性质

(1) 被积函数中，常数因子可提到积分号外面. 即

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

(2) 函数代数和的积分等于各函数积分的代数和. 即

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

(3) 若 $D=D_1\cup D_2$，则

$$\iint f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

(4) 若 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$,

则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$,

特别有 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$

(5) 若 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$,区域 D 的面积为 σ,则有

$$m\sigma\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M\sigma$$

(6)(中值定理) 设 $f(x,y)$ 为有界闭区域 D 上的连续函数,则存在 $(\xi,\eta)\in D$ 使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$$

9. 二重积分的计算

(1) 在直角坐标系中计算二重积分. 如图 8-1 所示 D 为 X 型域且

$$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\},$$

则
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

若 D 为 Y 型域(图 8-2),且

$$D=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d,\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\},$$

则
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

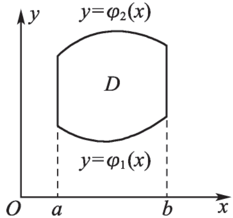

图 8-1

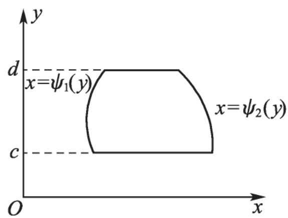

图 8-2

(2) 极坐标系中计算二重积分.

① 极点在 D 外(图 8-3),且

$D=\{(r,\theta)\mid \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\varphi_1(\theta)\leqslant r\leqslant\varphi_2(\theta)\}$,则

$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

② 极点在 D 的边界上(图 8-4),且 $D=\{(r,\theta)\mid \alpha\leqslant \alpha\leqslant\beta,0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta)\}$. 则

$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

③ 极点在 D 内(图 8-5),且 $D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta)\}$,则

$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

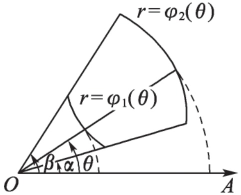

图 8-3

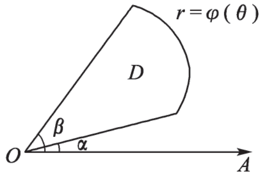

图 8-4

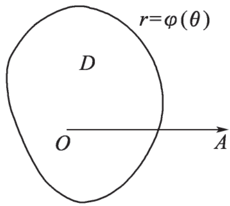

图 8-5

第九章 微分方程与差分方程简介

1. 变量可分离方程：形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 的方程. 分离变量后积分可得通解

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 齐次方程：形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$的方程. 经换元 $u=\frac{y}{x}$，可化齐次方程为变量可分离方程求解.

3. 一阶线性方程：形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的方程. 其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[C+\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right].$$

4. 贝努里方程：经过整理，可化为形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,1)$$

形式的方程，令 $z=y^{1-n}$ 可化成 z 的一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

5. 可降阶的高阶微分方程.

形如 $y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x,y')$ 及 $y''=f(y,y')$ 的微分方程均称为可降阶的高阶微分方程. 分别用逐次积分法和变量代换 $p=y'$ 降阶计算.

6. 二阶线性微分方程的性质

性质1　如果 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

的两个解，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是方程(1)的解，其中 C_1 与 C_2 为两个任意的常数. 当 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关，且 C_1 与 C_2 是相互独立的两个任意常数时，$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程(1)的通解.

性质2　如果 y^* 是二阶线性非齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \tag{2}$$

的一个特解，$Y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程(2)对应的齐次方程的通解，则 $y=Y+y^*$ 是方程(2)的通解.

7. 二阶常系数线性齐次方程

$$y''+py'+qy=0$$

的通解可按下表求出：

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
实根 $r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
实根 $r_1=r_2=r$	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$

8. 二阶常系数非齐次方程

$$y''+py'+qy=P_n(x)e^{\alpha x}$$

的特解形式为

$$y^*=x^kQ_n(x)e^{\alpha x},$$

其中 $P_n(x)$ 是已知 n 次多项式函数，$Q_n(x)$ 是待定的 n 次多项式函数，k 的取值按 α 不是特征根、是特征单根或特征重根，依次取 0、1 或 2.

9. 二阶常系数非齐次方程

$$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x+P_m(x)\sin\beta x)$$

的特解形式为

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}[Q_n^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_n^{(2)}\sin\beta x]$$

其中 $P_l(x)$、$P_m(x)$ 分别是 l 次、m 次多项式函数，$Q_n^{(1)}(x)$、$Q_n^{(2)}(x)$ 的待定的 n 次多项式函数，$n=\max\{l,m\}$，k 按 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 不是特征根或是特征根分别取 0 或 1.

10. 一阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=0 \quad (a\text{ 为非零常数})$$

的通解为 $Y_t=A(-a)^t$，其中 A 为任意常数（$t=0,1,2,\cdots$）

11. 一阶常系数线性非齐次差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=f(t)$$

的通解为 $y_t=Y_t+y_t^*=A(-a)^t+y_t^*$.

注：一阶线性差分方程（齐次，非齐次）的解的性质与线性微分方程的解的性质完全相同，且用待定系数法求非齐次差分方程特解的过程与用待定系数法求非齐次微分方程特解的过程类似，关键在于根据右端函数 $f(x)$（非齐次项）的形式以及它与差分方程系数 a 的关系正确设出特解 y_t^* 的形式. 即

(1) 若 $f(t)=P_m(t)$　（m 次多项式），则

当 $a\neq -1$ 时，$y_t^*=Q_m(t)$；

当 $a=-1$ 时，$y_t^* = tQ_m(t)$.

(2) 若 $f(t)=P_m(t)b^t$ （$b\neq 1$ 的实数），则

当 $a+b\neq 0$ 时，$y_t^* = Q_m(t)b^t$；

当 $a+b=0$ 时，$y_t^* = tQ_m(t)b^t$.

(3) 若 $f(t)=M\cos\omega t+N\sin\omega t$（$M,N,\omega$ 均为实数，且 $0<\omega<\pi$ 或 $\pi<\omega<2\pi$），则 $y_t^* = A\cos\omega t + B\sin\omega t$，其中 A,B 是待定系数.