1.3 条件概率、全概率公式

1. 条件概率的定义

2. 乘法定理

3. 全概率公式和贝叶斯公式

1. 条件概率的定义

目标：探讨 “**事件B的发生**” 如何影响事件A的概率.

例1: 医院针对某种疾病设计了一种血液检验.

事件 A： 某个个体患有一种特殊疾病.

如果血检结果程阴性，那么事件 A 发生的概率将会变化。

如何变化？上升还是降低？

应该降低，但是通常不会降低至0，这是因为血液检测的结果不是绝对可靠的。

如果检测结果呈阳性，该个体患此病的概率将升高.

$P(A|B)$ 表示 B 已经发生的条件下，事件A 发生的条件概率，B 称为条件事件

例 2: 某工厂使用A 和 A' 两种生产线组装某复杂原件. 生产线 A 使用旧设备, 因此一定程度上更慢且不可靠. 假设某天生产线A 组建了 8件产品, 其中 2 件经检测是次品 (B) , 6件是正品 (B'); 同时 A' 组装了 1件次品 9 件正品. 总结如下:

		条件	
		$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{B'}$
生产线	A	2	6
	A'	1	9

销售经理随机从 18 件产品中抽出1件进行测试.

$$P(\text{该件产品由}A\text{生产}) = P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

如果经检测该件产品是次品，则事件 B 发生.

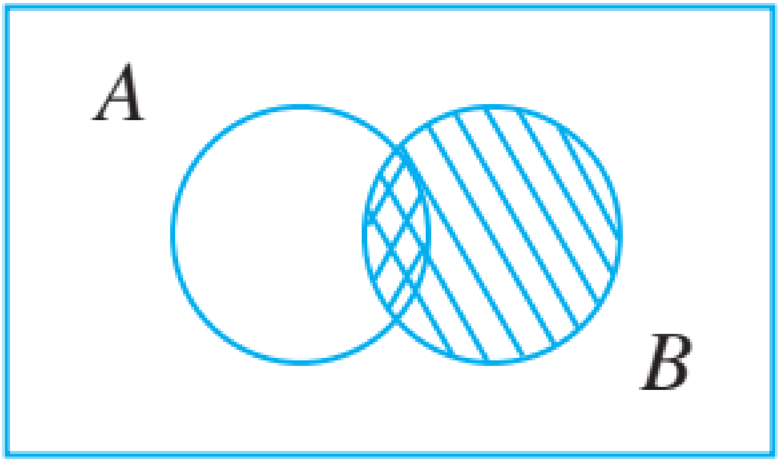
该件产品必定是 B 列中 3 件中的 1 件，且被等可能抽出.

在 B 发生的条件下，A 发生的概率

$$P(A|B)=\frac{2}{3}=\frac{2/18}{3/18}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

		条件	
		$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{B'}$
生产线	A	2	6
	A'	1	9

$$P(A|B)=\frac{2}{3}=\frac{2/18}{3/18}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$



条件概率可以表示为无条件概率的比值:

分子: 积事件 AB 的概率

分母: 条件事件 B 的概率.

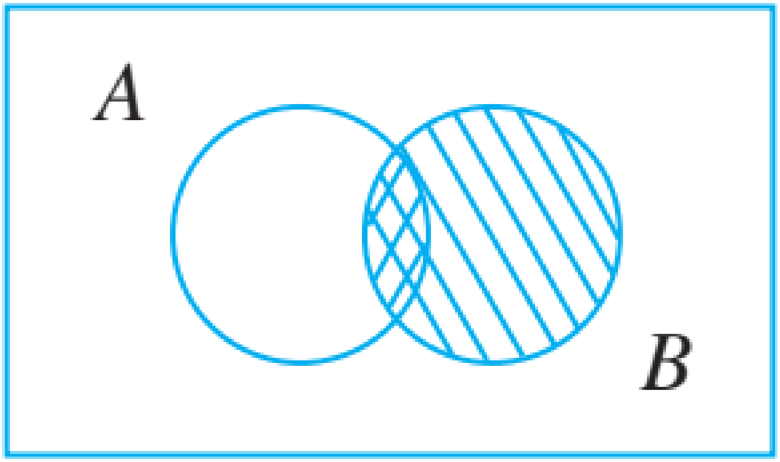
在事件 B 已经发生的条件下，相对样本空间已经不再是 S 而是 B;

A 发生当且仅当 AB 中的结果发生，所以在B 发生的条件下A发生的概率与概率 $P(A\cap B)$ 成正比.

条件概率的定义:

设 A, B 为两个事件, 且 $P(B)>0$, 事件B已经发生的条件下事件A发生的条件概率为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$



条件概率依然满足概率的公理化定义:

(1).对任一事件 A, $P(A|B)\geq 0$;

(2). $P(S|B)=1$;

(3). $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)$, 其中 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$互不相容.

(4). $P(A_1\cup A_2)= \quad P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$

(5). $P(A_1\cup A_2|B)= \quad P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$

(6). $P(\bar{A}|B)= \quad 1-P(A|B)$

例 1.12 某电子元件厂有职工180人,其中男职工有100人,女职工有80人,男女职工中非熟练工人分别有 20 人与 5 人. 现从该厂中任选一名职工,

(1) 该职工为非熟练工人的概率是多少?

(2) 若已知被选出的是女职工,她是非熟练工人的概率又是多少?

解 设A表示“任选一名职工为非熟练工人” B“选出女职工”

$$P(A)=\frac{25}{180}=\frac{5}{36} \quad P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{5}{180}\Big/\frac{80}{180}=\frac{1}{16}.$$

例 3: 假定在购买某款相机的顾客中, 60% 的会额外购买一张存储卡, 40% 的会额外购买电池, 30% 的二者都要.

考虑随机选取一位顾客: 令 $A=\{$购买存储卡$\}$, $B=\{$购买电池$\}$.

$P(A)=0.60$, $P(B)=0.40$, $P($购买存储卡和电池$)=P(A\cap B)=0.30$.

假定该随机抽取的顾客购买了电池，即B已经发生,
那么，该顾客亦购买了存储卡的概率为:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.3}{0.4}=0.75$$

就是说，在那些已经购买电池的顾客中 75%的比例购买了一张存储卡

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.6}=0.5$$

注意到 $P(A|B)\neq P(A)$
$P(B|A)\neq P(B)$

例 4: 已知某动物活到 20 岁和 25 岁的概率分别为 0.7 和 0.56.
求一只 20 岁的动物能活到 25 岁的概率。

解: 令 $A=\{\text{活到20岁}\}$, $B=\{\text{活到25岁}\}$.

$$P(A)=0.7,\ P(B)=0.56,\quad \text{且}\quad B\subset A.$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.56}{0.7}=0.8$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

例 5: 一个盒子装有 5 个元件, 其中 2 支是次品. 现从中取元件两次， 每次一支， 不放回抽样. 求第一次取到正品的情况下第二次也取到正品的概率.

解: 方法1

令 $A=\{\text{第一次是正品}\}$,

$B=\{\text{第二次是正品}\}$

则

$P(A)=\frac{3}{5}$, $P(AB)=\frac{3\times 2}{5\times 4}=\frac{3}{10}$

因此 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}$.

方法 2

假定正品编号分别为 1,2,3;

次品编号为4,5;

若 A 已经发生， 那么 1,2,3 中的一个被抽取. 第二次选取时， 剩余4个球， 其中两个是次品， 两个正品.

故， $P(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

2. 乘法定理

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\qquad P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(AB)=P(B)P(A|B),P(B)>0 \\ P(AB)=P(A)P(B|A),P(A)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$$

可以推广至3个、n 个事件的情形：

$$P(ABC)=P(ABC)=P(AB)P(C|AB),\qquad P(AB)>0$$

$$=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例 6: 某仓库中有100台电视机,其中10台是次品. 考虑随机连续抽取三台，且不放回. 求直到第三次才取到正品的概率。

解: 令 $A_i, i = 1,2,3$, 表示第 i 次取到正品.则直到第3次才取到正品的事件可表示为:

$\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$： 第一次次品，且第二次次品，且第三次正品

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = P(\bar{A}_1)(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$= \frac{10}{100}\frac{9}{99}\frac{90}{98} \approx 0.0083$$

例 7: 一个盒子含有 m 个红球, n 个白球. 考虑有放回抽球问题且再放入 k 个颜色相同的球。假定该试验进行了4次. 求前两次取得红球后两次取得白球的概率。

解: 令 $R_i, i=1,2,3,4$ 表示第 i 次取得红球, 则 $\bar{R}_i, i=1,2,3,4$ 表示第 i 次取得白球.

$$P(R_1R_2\bar{R}_3\bar{R}_4)=P(R_1)\quad P(R_2|R_1)\quad P(\bar{R}_3|R_1R_2)\quad P(\bar{R}_4|R_1R_2\bar{R}_3)$$

$$=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m+k}{m+n+k}\cdot\frac{n}{m+n+2k}\cdot\frac{n+k}{m+n+3k}$$

例 8: 一个盒子含有 n 个球, 其中 1 个是白色的, $n-1$ 个红色的. 现有 n 名同学依次抽取一球且不放回. 求第 i 名同学取得白球的概率.

解: 令 A_i : "第 i 位同学取得白球", 则 $P(A_1)=\frac{1}{n}$

注意到 $\bar{A}_1 \supset A_2$, 故有 $A_2=\bar{A}_1 A_2$, 那么

$$P(A_2)=P(\bar{A}_1 A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) \quad =\frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$$

类似地, $P(A_3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)\,P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$

$$=\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n-1}\,\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}$$

$$\ldots\ P(A_n)=\frac{1}{n}$$

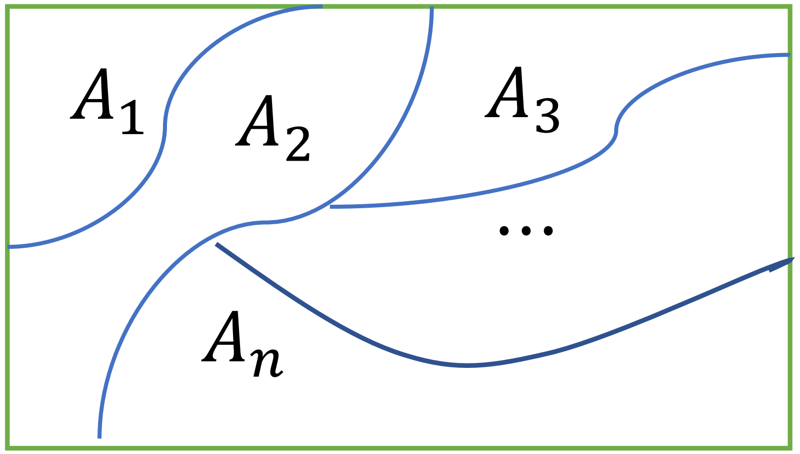
全概率公式和 Bayes'（贝叶斯） 公式

定义: 令 S 为某试验的样本空间， $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为一事件集. 如果

(1) $A_i A_j = \emptyset, i \neq j; i, j = 1,2, \cdots, n.$

(2) $\cup_{i=1}^{n} A_i = S$.

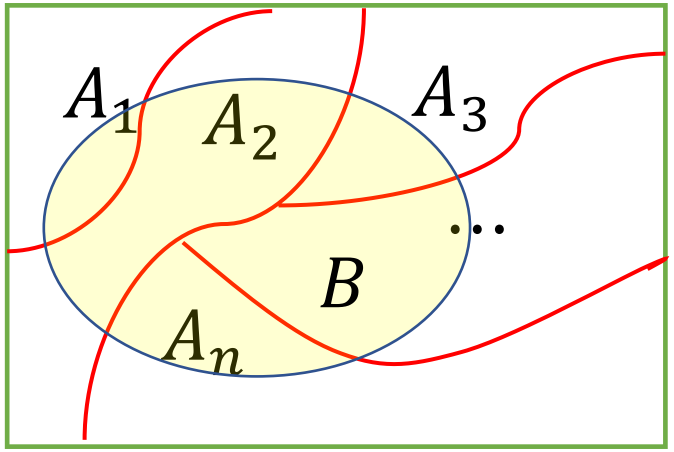
那么, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 称为样本空间 S 的一个分割（ **partition** ）



注1： A 和 $\bar{A}$ 是 S 的一个分割

注2：在一个试验中，有且仅有 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 中的一个发生。

全概率公式（The Law of Total Probability）



设 B 是样本空间 S 的一个事件，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 S 的一个分割. 那么

$$B = A_1B \cup A_2B \cup \cdots \cup A_nB$$

$$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + \cdots + P(A_nB)$$

$$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

在一次试验中，如果不容易计算事件 B 的概率，但是，易找到样本空间的一个分割 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，以及概率 $P(A_i)P(B|A_i)$.
则全概率给出了计算 $P(B)$ 的一个方法.

例 9: 小明有 3 个不同的邮箱， 其中 70% 的邮件进入账户 #1, 20% 的进入账户 #2， 剩余的 10% 进入账户 #3. 在账户 #1 的邮件中, 仅有 1% 是垃圾邮件, 账户 #2 和 #3 中的邮件率分别为 2% 和 5%. 在三个邮箱中任选一份邮件， 求该邮件是垃圾邮件的概率.

解: 令 A_i： "所选邮件来自账户 # i"， $i = 1,2,3.$

B： 邮件是垃圾邮件

由题意可知

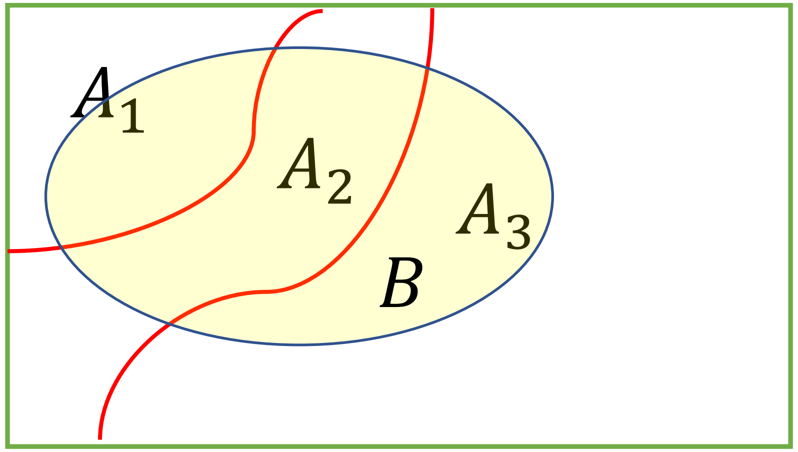
$$P(A_1) = 0.70; \quad P(A_2) = 0.20; \quad P(A_3) = 0.10.$$

$$P(B|A_1) = 0.01; \quad P(B|A_2) = 0.02; \quad P(B|A_3) = 0.05.$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$
$$= 0.70 \times 0.01 + 0.20 \times 0.02 + 0.10 \times 0.05 = 0.016.$$

注: $A_i = \{$邮件来自账户 # $i\}$, $i = 1,2,3.$

$B = \{$邮件是垃圾邮件$\}$.



$P(A_1) = 0.70; P(A_2) = 0.20; P(A_3) = 0.10.$

以上概率称为**先验概率**

在B发生的条件下 A_i 发生的概率:

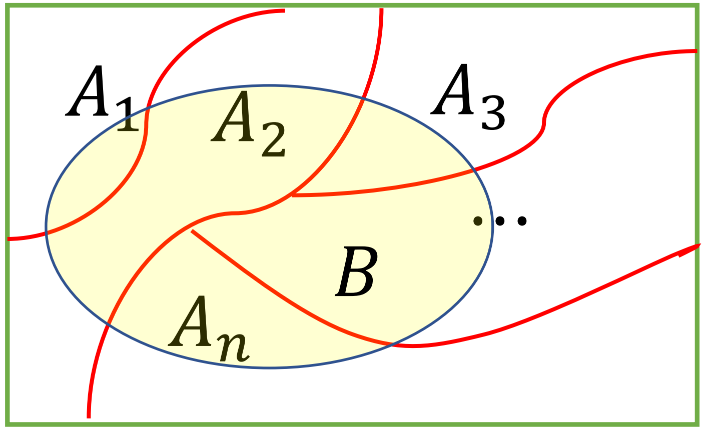
$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.70 \times 0.01}{0.016} = 43.75\%$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.20 \times 0.02}{0.016} = 25\%$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.10 \times 0.05}{0.016} = 31.25\%$$

后验概率

逆概率公式、贝叶斯公式



定理: 令 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为某样本空间 S 的一个分割，$P(A_i)$ 为先验概率 $i = 1,2,\dots,n$. 对任意事件 B 且$P(B) > 0$,
在B发生的条件下 A_i 发生的后验概率为

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

贝叶斯公式的应用: 按时还款如何对个人信用产生影响?

令 $A=\{张华按时还款\}$　　$B=\{张华有信用\}$

$P(B)=0.5,\quad P(\bar{B})=0.5;$

$P(A|B)=0.9;\quad P(\bar{A}|B)=0.1;\quad P(A|\bar{B})=0.5;\quad P(\bar{A}|\bar{B})=0.5;$

$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.5\cdot 0.9+0.5\cdot 0.5=0.7;$

现在，银行发现张某按时还款, 即事件A 发生了. 那么,

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{0.5\cdot 0.9}{0.7}=0.64$$

所以张某的信用从 0.5 升至 0.64.

如果张某再一次按时还款，信用该如何变化?

$$A=\{\text{张某按时还款}\} \qquad B=\{\text{张某有信用}\}$$

$$P(B)=0.64, P(\bar{B})=0.36;$$

$$P(A|B)=0.9;\quad P(\bar{A}|B)=0.1;\quad P(A|\bar{B})=0.5;\quad P(\bar{A}|\bar{B})=0.5;$$

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.64\cdot 0.9+0.36\cdot 0.5=0.756$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{0.64\cdot 0.9}{0.64\cdot 0.9+0.36\cdot 0.5}\approx 0.762$$

信用从 0.64 升至 0.762.

如果张某连续 4 次按时还款，那么他的信用将会升到 0.91.

例 10: *稀有疾病的发病率*. 在1000个人群中约有1个患有某种疾病，为此发明了一种诊断性测试如下：

- 如果某个个体患有这种疾病， 那么99% 的结果会显示阳性，
- 如果某个个体没有患此疾病， 那么2% 的结果会显示阳性，

现随机抽取一人对其进行测试， 测试结果显示呈阳性。
求此人患病的概率。

解： 令$A=\{\text{该个体患有此病}\}$　$B=\{\text{测试结果呈阳性}\}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.001, P(B|A)=0.99 \\ P(\bar{A})=0.999, P(B|\bar{A})=0.02 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\ &= 0.001\cdot 0.99+0.999\cdot 0.02 \\ &= 0.02097 \end{aligned}$$

$A=\{$该个体患病$\}$　　　　$B=\{$测试结果呈阳性$\}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.001, P(B|A)=0.99 \\ P(\bar{A})=0.999, P(B|\bar{A})=0.02 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\ &= 0.001\cdot 0.99+0.999\cdot 0.02 \\ &= 0.02097. \end{aligned}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.001\cdot 0.99}{0.02097}=0.047$$

该结果和直觉相差甚多; 诊断性测试看起来如此准确，我们希望一个阳性结果很可能表明该个体患病。然而，事实上患病的概率仅有4.7%

例 1.18 某工厂生产的产品以 100 件为一批，假定每一批产品中的次品数最多不超过 4 件，且具有如下的概率：

一批产品中的次品数	0	1	2	3	4
概率	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

现进行抽样检验，从每批中随机取出 10 件来检验，若发现其中有次品，则认为该批产品不合格，求一批产品通过检验的概率.

解 设 A_i 表示事件"一批产品中有 i 件次品"，$i=0,1,2,3,4$，B 表示事件"通过检验"，则由题意得

$$P(A_0)=0.1,\quad P(B\mid A_0)=1,$$

$$P(A_1)=0.2,\quad P(B\mid A_1)=\frac{C_{99}^{10}}{C_{100}^{10}}=0.9,$$

$$P(A_2)=0.4,\quad P(B\mid A_2)=\frac{C_{98}^{10}}{C_{100}^{10}}\approx 0.809,$$

$$P(A_3)=0.2,\quad P(B\mid A_3)=\frac{C_{97}^{10}}{C_{100}^{10}}\approx 0.727,$$

$$P(A_4)=0.1,\quad P(B\mid A_4)=\frac{C_{96}^{10}}{C_{100}^{10}}\approx 0.652.$$

由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{4}P(A_i)P(B\mid A_i)\approx 0.814.$$

例 1.19 设某工厂有甲、乙、丙 3 个车间生产同一种产品，产量依次占全厂的 45%，35%，20%，且各车间的次品率分别为 4%，2%，5%. 现在从一批产品中检查出 1 个次品，问该次品是由哪个车间生产的可能性最大？

解 设 A_1,A_2,A_3 表示产品分别来自甲、乙、丙 3 个车间，B 表示“产品为次品”的事件，易知 A_1,A_2,A_3 是样本空间 Ω 的一个划分，且有

$$P(A_1)=0.45,\quad P(A_2)=0.35,\quad P(A_3)=0.2,$$
$$P(B\mid A_1)=0.04,\quad P(B\mid A_2)=0.02,\quad P(B\mid A_3)=0.05.$$

由全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)\\&=0.45\times0.04+0.35\times0.02+0.2\times0.05=0.035.\end{aligned}$$

由贝叶斯公式，得

$P(A_1\mid B)=\dfrac{0.45\times0.04}{0.035}\approx0.514$，$P(A_2\mid B)=\dfrac{0.35\times0.02}{0.035}=0.200$，

$P(A_3\mid B)=\dfrac{0.20\times0.05}{0.035}\approx0.286$. 由此可见，该次品由甲车间生产的可能性最大.

练习

4. 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$. 0.6

6. 设 A,B,C 为 3 个事件，已知 $P(A)=P(B)=\frac{1}{4}, P(C)=\frac{1}{3}$ 且 $P(AB)=P(BC)=0, P(AC)=\frac{1}{12}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率. 0.75

23. 设 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B \mid A\cup\overline{B})$. 0.25

33. 3 人独立地破译一个密码，他们能破译的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$，求将此密码破译出的概率.

0.6

习题选讲

1.（习题册P20）假设事件A和B满足 $P(B|A)=1$，则

解析：由 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=1$, 得

$P(A)=P(AB)$ 或者 $P(A)-P(AB)=0$, 即 $P(A\bar{B})=0$. 选 D

注1：若 $A\subset B$, 则显然有 $P(B|A)=1$，但是反之不成立。

例如，在闭区间 $[1,2]$上随机选取一点。
令事件A：此点在 $[0,1]$, B: 此点在 $(0,1)$
则，A不是B的子事件，但是 $P(B|A)=1$