2.4 随机变量函数的分布

1 离散型随机变量函数的分布

2 连续型随机变量函数的分布

3 一个重要定理

1 离散型随机变量函数的分布

例: 随机变量 X 的概率分布律如下所示，试求 X^2、$|X|$ 的分布律

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p_k	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

解: (1) X^2 的值分别为 0, 1, 4, 9, 16

$P(X^2=0)=P(X=0)=0.15,\quad P(X^2=1)=P(X=1)+P(X=-1)=0.35$

$P(X^2=4)=P(X=2)+P(X=-2)=0.25,\quad P(X^2=9)=P(X=3)=0.15$

$P(X^2=16)=P(X=4)=0.10$

故 X^2 的分布律为

X^2	0	1	4	9	16
p_k	0.15	0.35	0.25	0.15	0.10

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p_k	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

(2) $|X|$ 的值分别为 0, 1, 2, 3, 4

$P(|X|=0)=P(X=0)=0.15$, $P(|X|=1)=P(X=1)+P(X=-1)=0.35$

$P(|X|=2)=P(X=2)+P(X=-2)=0.25$, $P(|X|=3)=P(X=3)=0.15$

$P(|X|=4)=P(X=4)=0.10$

故$|X|$ 的分布律为

$\lvert X\rvert$	0	1	2	3	4
p_k	0.15	0.35	0.25	0.15	0.10

2 连续型随机变量函数的分布

(1). $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 那么 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

(2). $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 那么 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

(3). 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x), -\infty < x < \infty$. 求随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度函数

一个重要的公式:

$$\left(\int_{g(x)}^{f(x)} \phi(t)dt\right)' = \phi\big(f(x)\big)f'(x) - \phi\big(g(x)\big)\,g'(x)$$

(2) 首先求 $Y=aX+b$ 的分布函数或者密度函数. 假设 $a>0$, 则

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)=P\left(X\le\frac{y-b}{a}\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}\left(\frac{y-b}{a}\right)'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma}e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a\sigma}e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2(a\sigma)^2}}$$

上式表明 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$.

注：当 $a<0$时，有相同的结果.

(3). 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x), -\infty < x < \infty$. 求随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度函数

首先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$

当 $y \le 0, F_Y(y) = 0$.　　故 $f_Y(y) = 0$

当 $y > 0, F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx$

$$f_Y(y) = F_Y{}'(y) = f_X(\sqrt{y})\left(\sqrt{y}\right)' - f_X(-\sqrt{y})\left(-\sqrt{y}\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$$

此处，y 可以等于 0 吗？

所以，$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right], & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$

当 $X \sim N(0,1)$ 时，其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty.$$

则 $Y = X^2$ 的概率密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

上例中关键的一步在于将事件“$Y \leqslant y$”由其等价事件“$-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}$”代替，即将事件“$Y \leqslant y$”转换为有关 X 的范围所表示的等价事件. 下面我们仅对 $Y = g(X)$，其中 $g(x)$ 为严格单调函数，写出一般结论.

例. 设 $X \sim N(0,1)$, 求以下随机变量函数 Y 的概率密度函数

1). $Y = e^X$; 2). $Y = 2X^2 + 1$; 3). $Y = |X|$

提示: 首先求 Y 的概率分布函数 $F_Y(y)$, 然后求导得 $f_Y(y)$.

解: 1). 由 $Y = e^X$ 知 Y 的取值为正。故当 $y \leq 0$ 时, $F_Y(y) = 0$

当 $y > 0$ 时, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y) = \int_{-\infty}^{\ln y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$f_Y(y) = F_Y{}'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} (\ln y)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$$

故 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

2). 由 $Y=2X^2+1$ 知 $Y\geq 1$ 故当 $y\leq 1$ 时， $F_Y(y)=0$

当 $y>1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2X^2+1\leq y)=P(X^2\leq \frac{y-1}{2})$

$$=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leq X\leq \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)=\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)^2}{2}}\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)'-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)^2}{2}}\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-1}}e^{-\frac{y-1}{4}}$$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-1}}e^{-\frac{y-1}{4}}, y>1, \\ 0, \qquad y\leq 1.\end{cases}$ 注：此处，y 不能等于1

3). 由 $Y=|X|$ 知 $Y\geq 0$ 故当 $y\leq 0$ 时， $F_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(|X|\leq y)$ $=P(-y\leq X\leq y)$

$$=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}(y)'-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}(-y)'$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

故 $\boldsymbol{f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}}$

定理. 设 $f_X(x)$ 为某连续型随机变量的密度函数. $g(x)$ 处处可导且 $g'(x) > 0$ (or $g'(x)$ <0) . 则 $Y = g(X)$ 也是连续型随机变量，其密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这里 $h(y)$ 是 $y = g(x)$ 的反函数，$\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}$
$\beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}$.

我们只证 $g'(x) > 0$ 的情形. 由于 $g'(x) > 0$，因此 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调递增，它的反函数 $h(y)$ 存在，且在 (α, β) 上严格单调递增、可导. 我们先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$，再通过对 $F_Y(y)$ 求导求出 $f_Y(y)$.

由于 $Y=g(X)$ 在 (α,β) 上取值，因此

当 $y\leqslant\alpha$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当 $y\geqslant\beta$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$；

当 $\alpha<y<\beta$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}$$
$$=P\{X\leqslant h(y)\}=\int_{-\infty}^{h(y)}f_X(x)\mathrm{d}x.$$

于是得概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\cdot h'(y), & \alpha<y<\beta,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于 $g'(x)<0$ 的情形可以同样证明,即

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\cdot(-h'(y)), & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

将上面两种情况合并,得

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\,|\,h'(y)\,|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

注:若 $f(x)$ 在$[a,b]$ 之外为零,则只需假设在(a,b) 上恒有 $g'(x)>0$(或恒有$g'(x)<0$),此时

$$\alpha=\min\{g(a),g(b)\},\quad \beta=\max\{g(a),g(b)\}.$$

例. 设随机变量 $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$. 证明 X 的线性函数 $Y = aX + b$ （$a \neq 0$）也服从正态分布。

解 X 的概率密度为 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty.$

令 $y = g(x) = ax + b$, 得 $x = \frac{y-b}{a} \triangleq h(y)$, 那么 $h'(y) = \frac{1}{a}$,

得 $f_Y(y) = f_X\big(h(y)\big)|h'(y)| = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} e^{-\frac{\left(y-(a\mu+b)\right)^2}{2a^2\sigma^2}}, -\infty < y < \infty$$

故有 $Y = aX + b \backsim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

例 2.17

由统计物理学知,分子运动速度的绝对值 X 服从麦克斯韦(Maxwell)分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $a>0$ 为常数,求分子动能 $Y=\dfrac{1}{2}mX^2$(m 为分子质量)的概率密度.

解 已知 $y=g(x)=\dfrac{1}{2}mx^2$,$f(x)$ 只在区间$(0,+\infty)$上非零且 $g'(x)$ 在此区间恒单调递增,由

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\cdot|h'(y)|, & \alpha<y<\beta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得 Y 的概率密度为

$$\psi(y)=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{2y}}{m^{3/2}a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{2y}{ma^2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

随机变量 $X=X(e)$ 是定义在样本空间 $\Omega=\{e\}$ 上的实值单值函数，它的取值随试验结果而定，是不能预先确定的，且它的取值有一定的概率，因而它与普通函数是不同的. 引入随机变量，就可以用微积分的理论和方法对随机试验与随机事件的概率进行数学推理与计算，从而完成对随机试验结果的规律性的研究.

分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\},\quad -\infty<x<+\infty$$

反映了随机变量 X 的取值不大于实数 x 的概率. 随机变量 X 落入实轴上任意区间 $(x_1,x_2]$ 上的概率也可用 $F(x)$ 来表示，即

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1).$$

因此掌握了随机变量 X 的分布函数，就了解了随机变量 X 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的概率分布，可以说分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性.

本书只讨论了两类重要的随机变量.一类是离散型随机变量,对于离散型随机变量,我们需要知道它可能取哪些值,以及它取每个可能值的概率,常用分布律

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

或用表 2-8 表示它取值的统计规律性.要掌握已知分布律求分布函数 $F(x)$ 的方法以及已知分布函数 $F(x)$ 求分布律的方法.分布律与分布函数是一一对应的.

表 2-8

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

另一类是连续型随机变量，设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，若存在非负函数 $f(x)$，使得对于任意 x，有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

则称 X 是连续型随机变量，其中 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数. 连续型随机变量的分布函数是连续的，但不能认为凡是分布函数为连续函数的随机变量就是连续型随机变量. 判别一个随机变量是不是连续型的，要看符合定义条件的 $f(x)$ 是否存在（事实上存在分布函数 $F(x)$ 连续，但又不能以非负函数的变上限的定积分表示的随机变量）.

要掌握已知 $f(x)$ 求 $F(x)$ 的方法，以及已知 $F(x)$ 求 $f(x)$ 的方法. 由连续型随机变量的定义可知，改变 $f(x)$ 在个别点的函数值，并不改变 $F(x)$ 的值，因此改变 $f(x)$ 在个别点的值是无关紧要的.

读者要掌握分布函数、分布律、密度函数的性质.

本章还介绍了几种重要的随机变量的分布：$(0-1)$ 分布、二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布、正态分布. 读者必须熟练掌握这几种分布的分布律或密度函数，还需知道每一种分布的概率意义，对这几种分布的理解不能仅限于知道它们的分布律或密度函数.

随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 也是一个随机变量.求 Y 的分布时,首先要准确界定 Y 的取值范围(在离散型时要注意相同值的合并),其次要正确计算 Y 的分布,特别是当 Y 为连续型随机变量时的情形.当 $y=g(x)$ 单调或分段单调时,可按定理写出 Y 的密度函数 $f_Y(y)$,否则应先按分布函数定义求出 $F_Y(y)$,再对 y 求导,得到 $f_Y(y)$(即使是当 $y=g(x)$ 单调或分段单调时,也应掌握先求出 $F_Y(y)$,再求出 $f_Y(y)$ 的一般方法).

重要术语及主题

随机变量	分布函数	离散型随机变量及其分布律
连续型随机变量及其密度函数		(0—1)分布
二项分布	泊松分布	均匀分布
指数分布	正态分布	随机变量函数的分布