前言

离散系统 z 域分析相关内容

概述

求逆 z 变换的方法有：

1、幂级数展开法

2、部分分数展开法

3、反演积分（留数法）

一般而言，双边序列可分解成因果序列 $f_1(k)$ 和反因果序列 $f_2(k)$ 两部分，即：

$f(k) = f_1(k) + f_2(k) = f(k)\epsilon(k) + f(k)\epsilon(-k-1)$

对应的，其 z 变换也有两个部分

$F(z) = F_1(z) + F_2(z), \alpha < |z| < \beta$

一、幂级数展开法

根据 z 变换的定义，因果序列和反因果序列的象函数分别是 $z^{-1}和z$ 的幂级数。其系数就是相应的序列值。

> 例：已知象函数
>
> $$F(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-2)} = \frac{z^2}{z^2 - z - 2}$$
>
> 其收敛域如下，分别求相对应的原序列 $f(k)$。
> （1）$|z| > 2$
> （2）$|z| < 1$
> （3）$1 < |z| < 2$

解 （1） 由于F(z)的收敛域在半径为2的圆外，故f(k)为因果序列。用长除法将F(z)展开为z^{-1}的幂级数：

$$z^2/(z^2-z-2)=1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\ldots$$

$$f(k)=\{\underset{\uparrow k=0}{1}, 1, 3, 5, \ldots\}$$

（2） 由于F(z)的收敛域为$|z|<1$，故f(k)为反因果序列。用长除法将F(z)（按升幂排列）展开为z的幂级数：

$$z^2/(-2-z-z^2)= -\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\cdots$$

$$f(k)=\left\{\cdots,\frac{5}{16},-\frac{3}{8},\frac{1}{4},-\frac{1}{2},0\right\}\leftarrow k=-1$$

https://blog.csdn.net/qq_43328313

(3) F(z)的收敛域为$1<|z|<2$，其原序列f(k)为双边序列。将F(z)展开为部分分式，有

$$F(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}$$

第一项属于因果序列的项函数$F_1(z)$，第二项属于反因果序列的象函数$F_2(z)$，

$$F_1(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}, \quad |z|>1 \qquad F_2(z)=\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}, \quad |z|<2$$

即将它们分别展开为z^{-1}及z的幂级数，有

$$F_1(z)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}-\frac{1}{3}z^{-3}+\cdots \qquad F_2(z)=\cdots+\frac{1}{12}z^3-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{3}z$$

$$f(k)=\left\{\cdots,-\frac{1}{12},-\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\underset{\uparrow}{\frac{1}{3}},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\cdots\right\}$$

难以写成闭合形式。

https://blog.csdn.net/qq_43328313

二、部分分数展开法

$$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0}, \text{式中} n\geq m$$

1、$F(z)$ 均为单极点，且不为0

例1： 已知象函数

$$F(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}$$

其收敛域分别为：（1）$|z|>2$ (2) $|z|<1$ (3) $1<|z|<2$

解 部分分式展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z+1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{3}}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}}{z-2}$$

$$F(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z+1}+\frac{2}{3}\frac{z}{z-2}$$

(1)当 $|z|>2$，故f(k)为因果序列 $f(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$

(2) 当 $|z|<1$，故f(k)为反因果序列

$$f(k)=[-\frac{1}{3}(-1)^k-\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(-k-1)$$

(3)当 $1<|z|<2$，

$$f(k)=\frac{1}{3}(-1)^k\varepsilon(k)-\frac{2}{3}(2)^k\varepsilon(-k-1)$$

https://blog.csdn.net/qq_43328313

例2： 已知象函数

$$F(z)=\frac{z(z^3-4z^2+\frac{9}{2}z+\frac{1}{z})}{(z-\frac{1}{2})(z-1)(z-2)(z-3)}$$

$,1<|z|<2$

的逆z变换。

解

$$F(z)=\frac{-z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{z-3}$$

由收敛域可知，上式前两项的收敛域满足 $|z|>1$，后两项满足 $|z|<2$。

$$f(k)=-(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)+2\varepsilon(k)+(2)^k\varepsilon(-k-1)-(3)^k\varepsilon(-k-1)$$

https://blog.csdn.net/qq_43328313

2、$F(z)$ 有共轭单极点

如$z_{1,2}=c\pm jd=\alpha e^{\pm j\beta}$, 则 $$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_1}{z-c-jd}+\frac{K_1^*}{z-c+jd}$$

令$K_1=|K_1|e^{j\theta}$ $$F(z)=\frac{|K_1|e^{j\theta}z}{z-\alpha e^{j\beta}}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}z}{z-\alpha e^{-j\beta}}$$

若$|z|>\alpha$，$f(k)=2|K_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$

若$|z|<\alpha$，$f(k)=-2|K_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(-k-1)$

https://blog.csdn.net/qq_43328313

3、$F(z)$ 有重极点

F(z)展开式中含 $\frac{z}{(z-a)^r}$ 项(r>1)，则逆变换为

若$|z|>\alpha$,对应原序列为 $$\frac{k(k-1).....(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}\varepsilon(k)$$

总结

逆 z 变换和拉普拉斯逆变换求解方法很相似，但是也要注意区别，常用的 z 变换要熟记。