一、填空题

1. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y-\sin x+y=1$ 确定的隐函数，则 $dy\big|_{x=0}=$______________；（答案填 $\frac{1}{2}dx$）

解析：$dy\big|_{x=0}=y'(0)dx$，为求 $y'(0)$，在方程 $e^y-\sin x+y=1$ 两边对 x 求导，得

$e^y\cdot y'-\cos x+y'=0$（由已知 $y=y(x)$ 知，这里 $y'=y'(x)$），

将 $x=0$ 代入 $e^y-\sin x+y=1$ 得 $y=0$，

将 $x=0, y=0$ 代入 $e^y\cdot y'-\cos x+y'=0$ 得 $y'(0)-1+y'(0)=0$，得 $y'(0)=\frac{1}{2}$。

2. 设 $f(x)=e^{2x-1}$，则 $f'''(0)=$_____________；(答案填 $\frac{8}{\mathrm{e}}$)

解析:

$$f'(x)=(e^{2x-1})'=e^{2x-1}(2x-1)'=2e^{2x-1}, f''(x)=(2e^{2x-1})'=2(e^{2x-1})'=4e^{2x-1},$$

$$f'''(x)=(4e^{2x-1})'=4(e^{2x-1})'=8e^{2x-1}, f'''(0)=\frac{8}{e}.$$

3. 函数 $y=\sin x$ 当 $x=\frac{\pi}{4}, dx=0.1$ 时的微分 $dy\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{4}\\ dx=0.1}}=$_____________；(答案填 $\frac{0.1}{\sqrt{2}}$)

解析：$dy\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{4}\\ dx=0.1}}=(\sin x)'dx\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{4}\\ dx=0.1}}=\cos\frac{\pi}{4}\times 0.1=\frac{0.1}{\sqrt{2}}$。

4. 函数 $y=\cos\sqrt{x}$ 的微分 $dy=$_____________；(答案填 $\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$)

解析：$dy=d(\cos\sqrt{x})=(\cos\sqrt{x})'dx=-\sin\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})'dx=\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$。

二、计算（写出计算过程）

1. 设 $y=1+xe^y$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解析：在方程 $y=1+xe^y$ 两边对 x 求导得，$y'=e^y+xe^y\cdot y'$，解得 $y'=\frac{e^y}{1-xe^y}$，注意等号右端中的 y 是方程 $y=1+xe^y$ 确定的 x 的隐函数，x, y 满足方程 $y=1+xe^y$，故利用该

方程化简 y' 得 $y'=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{2-y}$，于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^y}{2-y}\right)=\frac{e^y\cdot y'(2-y)-e^y(2-y)'}{(2-y)^2}=\frac{e^y y'(3-y)}{(2-y)^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}。$$

这里注意 y 是 x 的函数，故 $\frac{e^y}{2-y}$ 的分子、分母均是 x 的函数，所以求 $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^y}{2-y}\right)$ 要用商式求导公式。

2. 设 $y=f(x^2)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解析: $\frac{dy}{dx}=f'(x^2)(x^2)'=2xf'(x^2)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d}{dx}(2xf'(x^2))=2f'(x^2)+2x[f'(x^2)]'$$

$$=2f'(x^2)+2x[f''(x^2)2x]=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2).$$

3. 求参数方程 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$（设 $f''(t)\neq 0$）。

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{f''(t)}$。

4. 求 $y=\frac{\sqrt{x+2}\cdot(3-x)^4}{(x+1)^5}$ 的导数 y'。

解析: 先取绝对值得，$|y|=\frac{\sqrt{|x+2|}\cdot|3-x|^4}{|x+1|^5}$，再取对数得

$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln|x+2|+4\ln|x-3|-5\ln|x+1|$，两边对 x 求导数得，

$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1}$，得 $y'=\frac{\sqrt{x+2}\cdot(3-x)^4}{(x+1)^5}(\frac{1}{2(x+2)}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1})$。

5. 求 $y=(\sin x)^{\cos x}$ 的导数 y'。

解析：在 $y=(\sin x)^{\cos x}$ 两边取对数得，$\ln y=\cos x\ln\sin x$，两边对 x 求导得，

$$\frac{1}{y}y' = (\cos x)' \ln \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot (\sin x)' = -\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x},$$

得 $y' = (\sin x)^{\cos x}(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x)$。