级数

除特殊声明外，下面的n均为正整数，z均为复数，且$z=x+iy$.

1. 复数序列的极限

(1) Def

类似于二元实函数极限定理，故略。一般写法如下：

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \text{或} z_n \to z_0 (n\to\infty) \tag{1}$$

(2) 定理

设$z_n = x_n + i\cdot y_n$，$z_0 = x_0 + iy_0$，有：

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \tag{2}$$

2. 复数项级数

(1) Def

此处默认$\{z_n\}$为一复数序列。

- 复数项无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$
- 部分和序列：$S_n = \sum_{i=1}^{n} z_i = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$

若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a$（$a$存在），则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$**收敛**，且$a$为其**和**。若$\{S_n\}$不收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$发散。

绝对收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$收敛；**条件收敛**：$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$不收敛。

(2) 性质

- 级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛$\Leftrightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$同时收敛
- 级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$（联想调和级数）
- 绝对收敛的级数，一定条件收敛。（反过来不一定成立）

3. 复变函数项级数

类似于实变函数的函数项级数

假定$\{f(z)\}$为区域D内的一复变函数序列。

- 复变函数项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$
- 部分和：$S_n(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z)$

若对于区域D内某一点z_0，有$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z_0) = S(z_0)$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$z_0$**收敛**，$S(z_0)$为其**和**；若级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$D$内处处收敛，则有$S(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$称为级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(z)$的**和函数**。

4. 幂级数

(1) Def

形如$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z_n$的的复级数，称为**幂级数。**（$c_n$为(复)常数）

注意：$z=0$时，幂级数必然收敛。

(2) Abel定理

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z_n$在$z_0$处收敛，则对于满足$|z|<|z_0|$的一切$z$，此级数绝对收敛；

若在z_0处发散，那在$|z|>|z_0|$中，此级数发散。

> 此定理表明幂级数的收敛域为**圆域**

收敛圆：$|z|=R$。需满足$|z|<R$时级数绝对收敛，$|z|>R$时发散，则称R为**收敛半径。**

注：$|z|=R$处的敛散性需作具体分析！

(3) 求收敛半径

- 比值法：$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}|=\lambda$，则$R=\frac{1}{\lambda}$
- 根植法：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$，则$R=\frac{1}{\lambda}$

0对应∞，∞对应0

特别注意：幂级数缺项时，不可直接套公式。

例子：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} z^{2n-1}$

应该这样解决：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)\cdot 2^n\cdot |z|^{2n+1}}{(2n-1)\cdot 2^{n+1}\cdot |z|^{2n-1}}\right| = \frac{1}{2}|z|^2 \tag{3}$$

然后将$\frac{1}{2}|z|^2$与1进行比较。

(4) 性质

（下面的α，β为常数）

级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z_n$的收敛半径分别为$R_1$，$R_2$。

记$R=\min(R_1,R_2)$，则有：

- 线性性质：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\cdot a_n+\beta\cdot b_n)z_n=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot z_n+\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cdot z_n,\ |z|<R \tag{4}$$

- 乘法性质：

$$(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot z_n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cdot z_n)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cdot b_0+a_{n-1}\cdot b_1+\cdots a_0\cdot b_n)\cdot z_n,\ |z|<R \tag{5}$$

- 复合性质：（感觉不常用）

> 设当$|\xi|<r$时，$f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot \xi^n$，又设当$|z|<R$时，$\xi=g(z)$解析，且$|g(z)|<\xi$，则$|z|<R$时，$f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n$

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$的收敛半径为$R$，$R>0$

- 和函数$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$时收敛圆内的解析函数
- 和函数$S(z)$可在收敛圆内逐项求导/积分，且收敛半径不变。

5. 泰勒展开

(1) Def

$f(z)$在$(z-z_0)<R$内解析，则可展开为：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{6}$$

此式唯一

注：

> ① 若 $f(z)$在z_0处解析，a为$f(z)$距离z_0最近的一个奇点，则$f(z)$在z_0的泰勒展开式成立的圆域的收敛半径$R=|z_0-a|$
>
> ② 函数在一点处解析 ⇔ 在该点的邻域内可以展开为幂级数。

(2) 常用泰勒展开式

① $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,(-\infty<x<+\infty)$

② $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},(-\infty<x<+\infty)$

③ $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,(-1<x<1)$

④ $ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,(-1<x\le 1)$

⑤ $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},(-\infty<x<+\infty)$

⑥ $a^x=e^{xlna}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\cdot lna)^n}{n!},(-\infty<x<+\infty)$

⑦ $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},(-1<x<1)$

⑧ $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},(-1\le x\le 1)$

至于相关问题中，将函数进行泰勒展开的方法每个人都有每个人的方法，这里不再解释。

6. 洛朗展开

(1) 洛朗级数

形如$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$的级数。（其中$z_0$、$c_n$为复常数）

我们将$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$称为洛朗级数的**解析部分**；$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$称为洛朗级数的**主要部分**。

如果要洛朗级数在点$z=\xi$收敛，我们需要洛朗级数的解析部分与主要部分都在$z=\xi$处**收敛**。

注：**洛朗级数的收敛域必是圆环域。**

(2) 性质

洛朗级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$在其收敛圆环内的和函数解析，可以逐项积分/求导。

(3) 洛朗定理

图源百度百科，侵删

洛朗定理是函数在圆环内展为双边幂级数的定理。

定理一

在圆环$H: r<|z-a|<R\,(r\geq 0, R\leq +\infty)$内解析的函数f(z)可展成双边幂级数$f(z)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$，其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta(n=0,1,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

注意Γ为圆环域内绕a的任意一条正向简单闭曲线。

(4) 如何进行洛朗展开?

> "关键是化为$\frac{1}{1-f(z)}$的形式，利用圆环确定$f(z)$，使$|f(z)|<1$"

(5) 应用

利用洛朗级数求简单闭曲线上的积分。

我们认为$D: r<|z-z_0|<R$，假定$f(z)$在D内解析，C是D内环绕z_0的一条正向简单闭曲线，则有：

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i c_{-1} \tag{7}$$

其中c_{-1}为$f(z)$在区域D内的洛朗展开式中的$(z-z_0)^{-1}$的系数