2013～ 2014 学年第一学期高等数学[(1)机电]

A 卷参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
C	A	A	A	C	B	D	D	D	D

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
-3	$-\dfrac{1}{1+x^2}dx$	0	0	$[-3,-1]$

三、求解下列各题（本大题共 10 小题，每小题 6 分，共 60 分）

(1) 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^t-\cos t)dt}{(\arcsin x)^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^t-\cos t)dt}{x^2}$ ……(2分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{2x}$ ……(4分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{2}$ ……(5分)

$=\dfrac{1}{2}$ ……(6分)

(2) 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$=\dfrac{3e^{3t}f'(e^{3t}-1)}{f'(t)}$ ……(4分)

$\therefore\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{3f'(0)}{f'(0)}=3$ ……(6分)

(3) 解：方程两边对x求导得

$e^{2x+y}(2+y')+(y+xy')\sin(xy)=0$ ……(2分)

把(0,1)代入上式得 $\left.y'\right|_{(0,1)}=-2$ ……(3分)

过点(0,1)的法线的斜率为$k=\dfrac{1}{2}$ ……(4分)

故所求法线方程为：$y-1=\dfrac{1}{2}(x-0)$,

即 $x-2y+2=0$ ……(6分)

或 解：方程两边对x求导得

$e^{2x+y}(2+y')+(y+xy')\sin(xy)=0$

得 $y'=-\dfrac{2e^{2x+y}+y\sin(xy)}{e^{2x+y}+x\sin(xy)}$ ……(2分)

得 $\left.y'\right|_{(0,1)}=-2$ ……(3分)

过点(0,1)的法线的斜率为$k=\dfrac{1}{2}$……(4分)

故所求法线方程为：$y-1=\dfrac{1}{2}(x-0)$,

即 $x-2y+2=0$ ……(6分)

（4）解：令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2, dx=2tdt$

故 $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$

$$=\int \frac{t}{1+t^3}\cdot 2tdt=\int \frac{2t^2}{1+t^3}dt \quad \cdots(2分)$$

$$=\frac{2}{3}\int \frac{1}{1+t^3}d(1+t^3) \quad \cdots\cdots\cdots(3分)$$

$$=\frac{2}{3}\ln\left|1+t^3\right|+c \quad \cdots\cdots\cdots(5分)$$

$$=\frac{2}{3}\ln(1+x\sqrt{x})+c \quad \cdots\cdots\cdots(6分)$$

（5）解：$\int_1^2 x^2\ln x dx$

$$=\int_1^2 \ln x d\frac{x^3}{3} \quad \cdots\cdots(1分)$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{3}dx \quad \cdots\cdots(3分)$$

$$=\frac{8}{3}\ln 2-\left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 \quad \cdots\cdots(5分)$$

$$=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9} \quad \cdots\cdots(6分)$$

（6）解：令$x=\sec t$，

则$dx=\sec t\tan tdt$ $\cdots\cdots(2分)$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec t\sqrt{\sec^2 t-1}}dt \quad \cdots\cdots(4分)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \quad \cdots\cdots(5分)$$

$$=[t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots(6分)$$

或解：令$\sqrt{x^2-1}=t$，

则$dt=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$ $\cdots\cdots(2分)$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt \quad \cdots\cdots(4分)$$

$$=\left[\arctan t\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots(6分)$$

（7） 解：由于点$(1,3)$在曲线上，

故 $3=a+b$ ……(1分)

又点$(1,3)$为曲线的拐点，

故 $12a+6b=0$ ……(2分)

解得 $a=-3,b=6$ ……(3分)

此时

$$y''=-36x^2+36x=36x(1-x)$$

因此$(0,0),(1,3)$为曲线的拐点，

曲线在区间$[0,1]$上是凹的，

在区间$(-\infty,0]$及$[1,+\infty)$上是凸的。 ……(6分)

（8）解：$\int\frac{\arcsin x+2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\cdots\cdots\cdots 2分$$

$$=\int\arcsin x\,\mathrm{d}\arcsin x-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)\cdots\cdots\cdots 4分$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin^2 x-2\sqrt{1-x^2}+c\cdots\cdots\cdots 6分$$

（9）解：由$f(x)=x^n$得$f'(1)=n$,

于是过点$(1,1)$的切线为

$y=nx-n+1$ ……（2分）

故切线与x轴的交点为：

$(\xi_n,0)=\left(\frac{n-1}{n},0\right)$ ……（3分）

故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

$=\frac{1}{e}$ ……（6分）

(10）解：如图示

两曲线的交点坐标为(1,1)……(1分)

所求面积：

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx \qquad \cdots\cdots(2分)$$

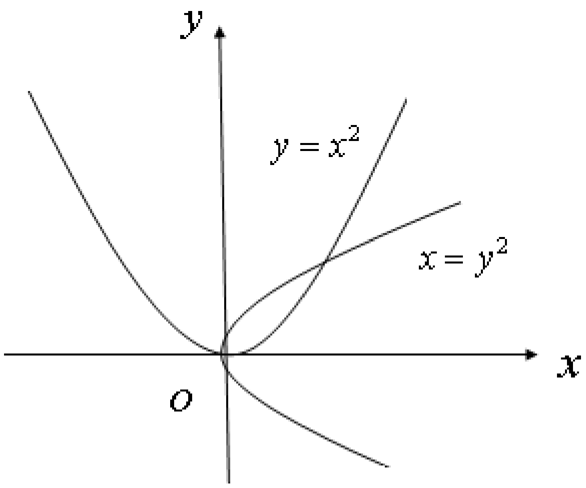
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots(3分)$$

所求体积为：

$$V=\int_0^1(\pi(\sqrt{y})^2-\pi(y^2)^2)dy \cdots\cdots(5分)$$

$$=\left[\frac{1}{2}\pi y^2-\frac{1}{5}\pi y^5\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{10}\pi \qquad \cdots\cdots(6分)$$



四、证明题（5 分）

证明：设$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$………(2分)

$\because F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0, \therefore F(x)$单调递减………(2分)

则当$a<x<b$时，$F(x)<F(a)$,即,$\dfrac{f(x)}{g(x)}<\dfrac{f(a)}{g(a)}$。证毕。………(1分)