一、选择题

1. 当$x \to 0$时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小是（ ）

A. $1-e^{\sqrt{x}}$； B. $\ln\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$； C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$； D. $1-\cos\sqrt{x}$. 选(B).

解析： A. 当$x \to 0$时，$1-e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$； B. 当$x \to 0$时，$\ln\frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$，

C. 当$x \to 0$时，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$； D. 当$x \to 0$时，$1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}x$.

2. 当$n \to \infty$时，$n\sin\frac{1}{n}$是（ ）

A. 无穷小； B. 无穷大； C. 无界变量； D. 有界变量 选（D）

解析: 因为$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} \xlongequal{m=\frac{1}{n}} \lim\limits_{m\to 0}\frac{\sin m}{m} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$，所以数列$\{n\sin\frac{1}{n}, n \ge 1\}$为收敛数列，故必有界.

二、填空题

1. 若$x \to 0$时，$1-\sqrt{1+ax^2}$与x^2是等价无穷小，则常数$a =$__________(答案填-2)；

解析：因为$x \to 0$时，$1-\sqrt{1+ax^2}$与x^2是等价无穷小，则$1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+ax^2}}{x^2}$，于是得

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+ax^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-ax^2}{x^2(1+\sqrt{1+ax^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{-a}{1+\sqrt{1+ax^2}} = \frac{-a}{2}$$，得$a = -2$.

2. 当$x \to 0$时，$\tan x - \sin x$是x的______________无穷小；当$x \to 0$时，$\tan x - \sin x$是$x\sin^2 x$的______________无穷小；（填“高阶”、“低阶”、“同阶”和“等价”四者之一）。

解析：因为$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x\cos x} = 0$$

所以，当$x \to 0$时，$\tan x - \sin x$是x的高阶无穷小。

因为$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x\cdot\cos x} = \frac{1}{2}$$

所以，当$x \to 0$时，$\tan x - \sin x$是$x\sin^2 x$的同阶无穷小。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}=$______(答案填 1);　$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$________(答案填 1);

解析：因为 $x\to 0$ 时，有 $\sin x\to 0$，故 $\sin(\sin x)\sim\sin x$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}\ \underline{\underline{u=\dfrac{1}{x}}}\ \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x}{2}}=$________(答案填 $e^{\frac{1}{2}}$);

解析：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x}{2}}$ 是 1^{∞} 型极限，方法 1 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}(1+\frac{1}{x}-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

方法 2 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}\times\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

三、计算（写出计算过程）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}$；(注：求极限时遇到根号可以有理化时首先有理化处理；另外无穷大的导数是无穷小，利用无穷小的极限为 0 计算)

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\ \underline{\underline{t=\sqrt[4]{x}}}\ \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{t^2-1}=\dfrac{1}{2}$ (注：求极限时变量替换有时是一种重要的处理手段)

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{\dfrac{1}{2}x^2}=2$；

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\sin^2 x+x\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}(4x)^2}{\sin^2 x(2+\dfrac{x}{\cos^2 x})}=8\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2(2+\dfrac{x}{\cos^2 x})}=8\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x}{2\cos^2 x+x}=4$