第五章 定积分

第一节 定积分的概念与性质

一、定积分问题举例

1.曲边梯形的面积

设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上非负、连续，由直线 $x=a,x=b,y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 围成的图形称为曲边梯形，其中曲线弧 $y=f(x),x\in[a,b]$ 称为曲边。求曲边梯形面积。

1) **分割** 在闭区间 $[a,b]$ 上任取分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$，得 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 和对应的小曲边梯形，在 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取点 ξ_i，记小区间长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$；

2) **近似求和** 当 Δx_i 充分小即 $[x_{i-1},x_i]$ 充分小时,由于 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上连续,故 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的函数值相差不大,故可用 $f(\xi_i)$ 代替 $[x_{i-1},x_i]$ 上各点的函数值,此时第 i 个小曲边梯形面积 A_i 可用同底、高为 $f(\xi_i)$ 的矩形面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似,即 $A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i,i=1,2,\cdots,n$,且 Δx_i 越小近似效果越好;当每个 Δx_i 都充分小时,整个曲边梯形面积 A 就是 n 个矩形面积和的近似，即 $A=\sum_{i=1}^{n}A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$;

3) **取极限** 令 $\lambda=\max(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)$,则 $\lambda\to 0$，$f(\xi_i)\Delta x_i\to A_i$，$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\to\sum_{i=1}^{n}A_i=A$,因此，

$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

注 这里是 $\lambda\to 0$ 而不是 $n\to\infty$，这是因为 $\lambda\to 0$ 可保证每个小矩形面积趋于对应小曲边梯形面积，即 $A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i,i=1,2,\cdots,n$，而 $n\to\infty$ 不能保证这个结果；另外，$\lambda\to 0$ 时有 $n\to\infty$，反之不成立。

除了上述面积是和式极限外，在实践中，还有许多其他的量，比如变速直线运动的路程(p225)等,也都可表示成类似的和式极限，从这些量出发，去掉相关问题的具体含义，便抽象出定积分的概念。

定义 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 上任取分点 $x_i:a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$，在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取点 $\xi_i(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\lambda=\max(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)$。若和式极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 都存在且等于同一个常数(亦即和式极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 与分点 x_i 和点 ξ_i 的取法无关)，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，极限值 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$。

注 1)由定义,$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在时,它的值与分点 x_i 和点 ξ_i 的取法无关,从而只与被积函数和积分区间有关,因此与积分变量用什么字母表示无关,有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du=\int_a^b f(t)dt$；

2）根据定义，上述曲边梯形面积 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$；

3）在几何上，当 $f(x)\geq 0$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 表示 x 轴上方曲边梯形的面积；当 $f(x)\leq 0$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 表示 x 轴下方曲边梯形面积 A 的负值，这是因为 $f(x)\leq 0$ 时，曲边梯形在 x 轴下方，它关于 x 轴的对称面积等于 $\int_a^b[-f(x)]dx$，而 $A=\int_a^b[-f(x)]dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\Delta x_i=-\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=-\int_a^b f(x)dx$；当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负时，$\int_a^b f(x)dx$ 表示 x 轴上方曲边梯形面积和与 x 轴下方曲边梯形面积和的差。

可积条件

定理 1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

定理 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且间断点只有有限个，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

二、定积分的性质

为计算和应用方便，补充规定 $\int_a^a f(x)dx=0,\ \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$。

性质 1 $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$；

性质 2 对常数 k，有 $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$；

注 对非零常数 k，有 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$（$k=0$ 时不成立）。

性质 3 对 $a<c<b$，有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

证 当 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在时，其值与分点 x_i 和点 ξ_i 的取法无关. 因此，对 $a<c<b$，我们总可以取 c 为分点：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i_0}=c<x_{i_0+1}<\cdots<x_n=b$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum\limits_{i=i_0+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，这里 $\sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\Delta x_i$ 和 $\sum\limits_{i=i_0+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 分别是 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上的积分和。让 $\lambda=\max(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots\Delta x_{i_0},\Delta x_{i_0+1},\cdots\Delta x_n)\to 0$ 即得结论。

注 1）对 a,b,c 任意大小关系，都有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$，比如当 $c<b<a$ 时，根据性质 3 有 $\int_c^a f(x)dx=\int_c^b f(x)dx+\int_b^a f(x)dx$，根据补充规定，有 $-\int_a^c f(x)dx=\int_c^b f(x)dx-\int_a^b f(x)dx.$

2）一般，对具有任意大小关系的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都有

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

性质 4 $\int_a^b 1dx = b-a$。(由图形易得)

性质 5 若 $f(x)\ge 0, x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$。

证 因为 $f(x)\ge 0, x\in[a,b]$，故 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0, \xi_i\in[x_{i-1},x_i]\subset[a,b]$，所以

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$。

推论 1 若 $f(x)\ge g(x), x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$。

证 设 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(x)\ge 0, x\in[a,b]$，且由性质 5 得 $\int_a^b F(x)dx\ge 0$，即 $\int_a^b (f(x)-g(x))dx \ge 0$，再由性质 1 即得 $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \ge 0$。

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx,\ \ a<b$。

证 因为 $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|, x\in[a,b]$，所以根据推论 1 知，

$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$, 即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx,\ \ a<b$。

性质 $5'$ 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负、连续，且不恒等于 0，则 $\int_a^b f(x)dx>0$.(由图形易得)

性 质 $5''$ 设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续，且 $f(x)\ge g(x), x\in[a,b]$ 但不恒等，则 $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.(由图得)

性质 6 设 M 和 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大、最小值，则

$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$。

证 因为 $m\le f(x)\le M, x\in[a,b]$，所以根据推论 1 知，$\int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx$，再由性质 2、4 知，$\int_a^b mdx = m\int_a^b 1dx = m(b-a),\ \int_a^b Mdx = M\int_a^b 1dx = M(b-a)$，即得结论。

性质 7(积分中值定理) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$。

注 当$f(x)\geq 0, x\in[a,b]$时，积分中值定理在几何上表示曲边梯形的面积等于同底、高为$f(\xi)$的矩形面积。由于$f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$可看成连续曲线弧$y=f(x)$在$[a,b]$上的平均高度，即可看成$[a,b]$上函数值$f(x)$的平均值，故称为**$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的平均值**，这是有限个数平均值概念的拓广。

证 由$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，故$f(x)$在区间$[a,b]$上必取到最大值M和最小值m，根据性质 6，有$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$，即$m\leq\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq M$，这说明$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$是介于最大值$M$和最小值$m$之间的一个实数值，根据闭区间上连续函数的介值定理知，至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，结论成立。

例 根据几何意义，$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=$__________$(\dfrac{\pi}{4})$；$\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx=$__________$(0)$；

例 对连续函数$f(x)$，若$\int_0^1 xdx=\dfrac{1}{2}, f(x)=x+3\int_0^1 f(t)dt$，则函数$f(x)=$__________。

解 因为连续函数$f(x)$必可积，故$\int_0^1 f(t)dt$是常数，在$f(x)=x+3\int_0^1 f(t)dt$两边对x定积分得，$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_0^1(3\int_0^1 f(t)dt)dx$，而常数 3$\int_0^1 f(t)dt$可以提到积分号外，得$\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{2}+3\int_0^1 f(t)dt\int_0^1 1dx=\dfrac{1}{2}+3\int_0^1 f(t)dt$，于是$\int_0^1 f(t)dt=-\dfrac{1}{4}, f(x)=x-\dfrac{3}{4}$.

例 已知$\int_{-1}^1 3f(x)dx=18, \int_{-1}^3 f(x)dx=4$，则根据定积分性质，$\int_1^3 f(x)dx=$______$(-6+4=-2)$

例 估计积分的值$\int_0^{\pi}\dfrac{1}{3+\sin^3 x}dx$。

解 $0\leq\sin^3 x\leq 1, x\in[0,\pi]$，故$\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{3+\sin^3 x}\leq\dfrac{1}{3}$，根据性质 6，$\dfrac{1}{4}\pi\leq\int_0^{\pi}\dfrac{1}{3+\sin^3 x}dx\leq\dfrac{1}{3}\pi$。

例 比较积分值的大小：(1) $\int_0^1 x^2dx$与$\int_0^1 x^3dx$；(2) $\int_0^1 e^xdx$与$\int_0^1(1+x)dx$。

解 (1)因为$x\in[0,1], x^2\geq x^3$，且不恒相等，根据性质$5''$，得$\int_0^1 x^2dx>\int_0^1 x^3dx$；

(2)因为$x\in[0,1], e^x\geq 1+x$，且不恒相等，根据性质$5''$，得$\int_0^1 e^xdx>\int_0^1(1+x)dx$；

例 设$f(x)$可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，求$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}t\sin\dfrac{3}{t}f(t)dt$。

解 当x为充分大的正数时，根据积分中值定理，有$\int_x^{x+2}t\sin\dfrac{3}{t}f(t)dt=\xi\sin\dfrac{3}{\xi}f(\xi)\cdot(x+2-x)$，$\xi\in[x,x+2]$，故$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}t\sin\dfrac{3}{t}f(t)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}2\xi\sin\dfrac{3}{\xi}f(\xi)=2\lim\limits_{\xi\to+\infty}3\dfrac{\sin\frac{3}{\xi}}{\frac{3}{\xi}}f(\xi)=6\lim\limits_{\xi\to+\infty}f(\xi)=6.$

第二节 微积分基本公式

一、积分上限的函数及其导数

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\forall x\in[a,b]$，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,x]$ 上连续，从而 $f(x)$ 在区间 $[a,x]$ 上可积，即 $\int_a^x f(t)dt$ 存在，且是定义在 $[a,b]$ 上的函数，称为**积分上限的函数**，记为 $\Phi(x)$，即 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt, x\in[a,b]$。

定理 1 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，且 $\Phi'(x)=\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt)=f(x), x\in[a,b]$。

证 当 $x\in(a,b)$，设 $x+\Delta x\in(a,b)$，由定积分性质，$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$

$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x,\ \xi$ 介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间。于是 $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$；

当 $x=a$，设 $a+\Delta x\in(a,b]$，同上得到 $\Delta\Phi(a)=\Phi(a+\Delta x)-\Phi(a)=f(\xi)\Delta x,\ a\le\xi\le a+\Delta x$，于是 $\Phi'_+(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta\Phi(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{\xi\to a^+} f(\xi)=f(a)$；

当 $x=b$，设 $b+\Delta x\in[a,b)$，同上得到 $\Delta\Phi(b)=\Phi(b+\Delta x)-\Phi(b)=f(\xi)\Delta x,\ b+\Delta x\le\xi\le b$，于是 $\Phi'_-(b)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta\Phi(b)}{\Delta x}=\lim\limits_{\xi\to b^-} f(\xi)=f(b)$；综上，结论得证。

注 1) 由定理 1 知，闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 有原函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt, x\in[a,b]$；

2) 积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 的导数公式 $\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt)=f(x)$ 与常数 a 没有关系。另外，实际中常用更一般的积分上限函数求导公式 $\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt)=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$（只要注意到复合结构 $\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt)---\varphi(x)---x$，运用复合函数求导和积分上限函数求导公式即得该式）.

例 $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} e^t dt=\frac{d}{dx}[\int_{x^2}^a e^t dt+\int_a^{x^3} e^t dt]=\frac{d}{dx}[\int_a^{x^3} e^t dt-\int_a^{x^2} e^t dt]=e^{x^3}\cdot(x^3)'-e^{x^2}\cdot(x^2)'$

例 若 $f(x)=\int_0^x xf(t)dt$，则 $f'(x)=$ $xf(x)+\int_0^x f(t)dt$

解 由于被积函数中 x 不是积分变量，故可提到积分号外，得 $f(x)=x\int_0^x f(t)dt$，于是

$f'(x)=(x\int_0^x f(t)dt)'=\int_0^x f(t)dt+x(\int_0^x f(t)dt)'=\int_0^x f(t)dt+xf(x)$。

二、牛顿-莱布尼兹公式

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且有原函数 $F(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \underset{记为}{=} F(x)\Big|_a^b$。

证 因为 $F(x)$ 和 $\int_a^x f(t)dt$ 均为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的原函数，故 $F(x)-\int_a^x f(t)dt = C$，

令 $x=a$，得 $F(a)=C$；再令 $x=b$，得到 $F(b)-\int_a^b f(t)dt = F(a)$，结论得证。

例 $\int_{-2}^2 \max(1,x^2)dx = \int_{-2}^{-1}\max(1,x^2)dx + \int_{-1}^1 \max(1,x^2)dx + \int_1^2 \max(1,x^2)dx$。

$$= \int_{-2}^{-1} x^2 dx + \int_{-1}^1 1dx + \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{-1} + x\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3}+2+\frac{7}{2} = \frac{20}{3}$$

例 $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx = \int_0^{\pi}|\sin x|dx + \int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|dx = \int_0^{\pi}\sin xdx + \int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx$

$= -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2+2=4$。

例 对函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2, x>1 \end{cases}$，$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 (x+1)dx + \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 dx$

$= \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{6}x^3\Big|_1^2 = \frac{3}{2}+\frac{7}{6}=\frac{8}{3}$。

例 正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴围成的平面图形面积为 $\int_0^{\pi}\sin xdx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2$。

例 **求** $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos tdt = 0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$。

解 方程两端对 x 求导，注意复合结构：$\int_0^y e^t dt --- y --- x$，运用复合函数求导和积分上限函数求导公式，得 $e^y\cdot y' + \cos x = 0$，得到 $\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos x}{e^y}$。

例 求函数 $y=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 的极值。

解 令 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^x te^{-t^2}dt = xe^{-x^2} = 0$ 的驻点 $x=0$，当 $x<0$ 时，$\frac{dy}{dx}<0$；当 $x>0$ 时，$\frac{dy}{dx}>0$，故 $y(0)=0$ 为极小值。

例 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$。 解 该极限是 $\frac{0}{0}$ 型极限，运用洛必达法则和积分上限函数求导公式得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)'}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}\cdot \sin x}{2x} = \frac{e^{-1}}{2}$$。

第三节 定积分的换元法和分部积分法

一、定积分的换元法

$$\int_a^b f(x)dx \begin{cases} \xlongequal[\text{凑微}]{} \int_a^b g(\varphi(x))d\varphi(x) \xlongequal[\substack{\text{换元}u=\varphi(x)\\ u\text{从}\varphi(a)\text{到}\\ \varphi(b)}]{} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(u)du \xlongequal[\text{牛莱公式}]{} G(u)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\text{，}G(u)\text{为}g(u)\text{的原函数} \\ \xlongequal[\substack{\text{换元}x=\psi(t)\\ \psi(\alpha)=a\\ \psi(\beta)=b}]{} \int_\alpha^\beta f[\psi(t)]\psi'(t)dt \xlongequal[\text{牛莱公式}]{} F(t)\Big|_\alpha^\beta\text{，}F(t)\text{是}f[\psi(t)]\psi'(t)\text{的原函数} \end{cases}$$

注 定积分的换元法就是不定积分的第一、第二换元作用在定积分上；计算定积分是为了算出其数值，为方便计算，原积分变量换元为新积分变量后只要积分上下限相应变动，求出原函数后就不必还原积分变量了。

例 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal[\substack{x=a\sin t,t\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ dx=a\cos tdt}]{} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos tdt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle= \frac{a^2}{2}(\frac{\pi}{2}-0) = \frac{\pi a^2}{4}.$

例 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin xdx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xd\cos x \xlongequal[t=\cos x\text{，}t\text{从1到0}]{} -\int_1^0 t^5dt = -\frac{t^6}{6}\Big|_1^0 = \frac{1}{6}.$

注 **换元法计算定积分时，换了积分变量则积分上下限跟着变， 不换积分变量则积分上下限不变，**

如上例可写为 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin xdx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xd\cos x = -\frac{\cos x^6}{6}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}.$

例 $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx = \int_0^\pi\sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}dx = \int_0^\pi \sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|dx$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x\cos xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^{\frac{3}{2}} x(-\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} xd\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^{\frac{3}{2}} xd\sin x$

$\displaystyle= \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{2}{5}-\frac{2}{5}(0-1) = \frac{4}{5}$

例 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx \xlongequal[\substack{t=\sqrt{2x+1}\\ x=\frac{1}{2}(t^2-1)}]{} \int_1^3 \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)+2}{t}tdt = \frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)dt$

$\displaystyle= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}t^3+3t)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(9+9-(\frac{1}{3}+3)) = \frac{22}{3}$

例 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{当}f(x)\text{为偶函数} \\ 0, & \text{当}f(x)\text{为奇函数} \end{cases}$

证 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$；$\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)dx \xlongequal[x=-t]{} -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx$，

故 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))dx$，于是结论成立。

例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$。

证 (1) 即证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt$。

因为一个角 x 的正弦变到另一个角 t 的余弦，这两个角互余(相差 $\frac{\pi}{2}$)，故令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))d(-t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$$

(2) 即证 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)dt$。

因为一个角 x 的正弦变到另一个角 t 的正弦，这两个角互补(相差 π)，故令 $x = \pi - t$，得

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin(\pi - t)d(-t) = \int_0^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)dt,$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx;$$

故结论成立。

例 设 $f(x)$ 是连续的周期函数，周期为 T，则(1)对任意实数 a，有 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^{T} f(x)dx;$

(2) $\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^{T} f(x)dx;$

证 (1)由区间可加性，得 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^{T} f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx;$

$\int_T^{a+T} f(x)dx \underset{x=t+T}{===} \int_0^{a} f(t+T)dt = \int_0^{a} f(t)dt = \int_0^{a} f(x)dx = \int_0^{T} f(x)dx + \int_T^{a} f(x)dx,$ 得结论成立。

(2)由(1)知，周期函数在长度为一个周期 T 的区间上积分值相等，且都等于 $\int_0^{T} f(x)dx$，故

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^{a+2T} f(x)dx + \int_{a+2T}^{a+3T} f(x)dx + \cdots + \int_{a+(n-1)T}^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^{T} f(x)dx;$$

二、定积分的分部积分法

因为 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), x \in [a,b]$，所以 $\int_a^b [u(x)v(x)]'dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx;$

由微分定义并注意到 $u(x)v(x)$ 是 $[u(x)v(x)]'$ 的原函数，再运用牛顿-莱布尼兹公式，移项得

$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x),$ 此即**定积分的分部积分公式**。

例 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} xd\arcsin x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1。$$

例 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\dx=2tdt}}{=} \int_0^1 e^t 2tdt = 2\int_0^1 tde^t = 2[te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt] = 2[e-(e-1)] = 2$。

例 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & n=0 \\ 1, & n=1 \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{1}{2}\cdot I_0, & n=2,4,6,8,\cdots \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{2}{3}I_1, & n=3,5,7,9,\cdots \end{cases}$

证 一个角的正弦变到另一个角的余弦，这两个角互余(相差$\dfrac{\pi}{2}$)，故令$x=\dfrac{\pi}{2}-t$，得

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin(\dfrac{\pi}{2}-t)d(-t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$；

当$n=0,1$结论易得；当$n\ge 2$时，设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$，先凑微再分部积分得

$$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd\cos x = -[\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xd\sin^{n-1}x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\cos xdx$$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)[I_{n-2}-I_n]$；于是得到递推公式·

$$I_n = \frac{(n-1)}{n}I_{n-2} = \frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{n-2}I_{n-4} = \frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{n-2}\cdot\frac{(n-5)}{n-4}I_{n-6} = \cdots$$

$=\begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\dfrac{2}{3}I_1, n=3,5,7,9,\cdots \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\dfrac{1}{2}I_0, n=2,4,6,8,\cdots \end{cases}$，结论得证。

(注意到 奇数-偶数=奇数，偶数-偶数=偶数；所以奇数减去越来越大的偶数且结果非负，结果只能是 1，偶数减去越来越大的偶数且结果非负，结果只能是 0)．运用上述结论，可大大简化计算，比如，

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 xdx = \dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}I_1 = \dfrac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3} = \dfrac{16}{35}$； $\int_0^{\pi}\cos^4\dfrac{x}{2}dx \underset{t=\frac{x}{2}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt = 2\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}I_0 = \dfrac{3\pi}{8}$.

第四节 反常积分

一、无穷限的反常积分

定义 称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 均为**无穷限反常积分**。

牛顿莱布尼兹公式

exact

若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，则

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$；

(2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} F(x),$

当极限存在时，称相应的**无穷限反常积分收敛**，否则称相应的**无穷限反常积分发散**。

注 1)对无穷限反常积分，牛顿莱布尼兹公式仍成立，但无穷限的原函数值=原函数的无穷限极限；
2)求原函数同定积分。

例 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x - \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$ 。

例 求 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt, p>0$ 为常数。

解 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = \frac{-1}{p}\int_0^{+\infty} tde^{-pt} = \frac{-1}{p}(te^{-pt}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt) = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{-p^2}\int_0^{+\infty} de^{-pt}$

（$te^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{pt}} - 0 = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{pe^{pt}} = 0,\ \ e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{pt}} - 1 = -1$）

$= \frac{1}{-p^2} e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}$.

例 证明 反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散。

证 因为
$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \ln|x|\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln|x| - \ln a = +\infty, (p=1), \\ \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^{+\infty}, (p\ne 1) = \dfrac{1}{1-p}(\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-p} - a^{1-p}), (p\ne 1) = \begin{cases} +\infty, & 1-p>0, \\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & 1-p<0, \end{cases} \end{cases}$$

所以结论成立。

二、无界函数的反常积分

定义 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty, a<c<b$，则称 $\int_a^b f(x)dx$ 为**无界函数的反常积分**或**瑕积分**，点 a 或点 b 或点 c 分别称为**瑕点**。

注 瑕点一般考虑函数无意义的点。如由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty,\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-1}{x(2-x)}=-\infty,\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty,$，

故 $\int_0^1\dfrac{dx}{x}$，$\int_1^2\dfrac{-dx}{x(2-x)}$ 和 $\int_0^3\dfrac{dx}{(1-x)^2}$ 均为无界函数反常积分，或瑕积分，瑕点分别为 $x=0,x=2$ 和 $x=1.$

牛顿莱布尼兹公式

若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，则

(1) 当 a 为瑕点时，有 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$；

(2) 当 b 为瑕点时，有 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)-F(a)$；

(3) 当 $c\in(a,b)$ 为瑕点时，有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^c+F(x)\Big|_c^b=\lim_{x\to c^-}F(x)-F(a)+F(b)-\lim_{x\to c^+}F(x),$$

当极限存在时，称相应的**无界函数反常积分收敛**，否则称相应的**无界函数反常积分发散**。

注 1)对无界函数反常积分，牛顿莱布尼兹公式仍成立，但瑕点的原函数值=原函数的瑕点极限;
2)求原函数同定积分。

例 求 $\int_0^a\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$。 解 因为 $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty$，故 $x=a$ 是无界函数反常积分 $\int_0^a\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$ 的瑕点。$\int_0^a\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\underset{x=a\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{a\cos tdt}{a\cos t}\underset{\substack{\text{瑕点消失}\\\text{变为定积分}}}{====}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\dfrac{\pi}{2}$。

注 换元后若瑕点消失，则无界函数反常积分变为定积分。

例 求 $\int_1^2\dfrac{xdx}{\sqrt{x-1}}\underset{\substack{x=1\text{为瑕点}\\\text{换元:}t=\sqrt{x-1}}}{=====}2\int_0^1\dfrac{(t^2+1)tdt}{t}\underset{\substack{\text{瑕点消失}\\\text{变为定积分}}}{====}2\int_0^1(t^2+1)dt===2\cdot(\dfrac{t^3}{3}+t)\Big|_0^1=\dfrac{8}{3}$。

例 讨论 $\int_{-1}^1\dfrac{dx}{x^2}$ 敛散性。

解 错误做法：$\int_{-1}^1\dfrac{dx}{x^2}=-\dfrac{1}{x}\Big|_{-1}^1=-(1-(-1))=-2$，因为 $\dfrac{1}{x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上不连续，不能用牛莱公式；

正确做法：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$，所以 $x=0$ 为无界函数反常积分 $\int_{-1}^1\dfrac{dx}{x^2}$ 的瑕点，因为

$\int_{-1}^1\dfrac{dx}{x^2}=\int_{-1}^0\dfrac{dx}{x^2}+\int_0^1\dfrac{dx}{x^2}$，$\int_{-1}^0\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{-1}{x}\Big|_{-1}^0=-[\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{-1}]=+\infty$，故 $\int_{-1}^1\dfrac{dx}{x^2}$ 发散。

例 求$\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$。 解 因为$\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2} \xlongequal[x=1\text{为瑕点}]{} \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$，

$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2} \xlongequal[x=1\text{为瑕点}]{} \frac{1}{1-x}\Big|_0^1 \xlongequal[x=1\text{为瑕点}]{} \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-0} = +\infty$，故原积分发散。

例 证明 反常积分$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} (q>0)$当$0<q<1$时收敛，当$q \geq 1$时发散。

证 因为当$q>0$时，$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^q} = +\infty$，故$x=a$是无界函数反常积分$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$的瑕点。又因为

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \begin{cases} \ln|x-a|\Big|_a^b = \ln|b-a| - \lim\limits_{x\to a^+} \ln|x-a| = +\infty, (q=1) \\ \frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\Bigg|_a^b, (q\neq 1) = \frac{1}{1-q}[(b-a)^{1-q} - \lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^{1-q}], (q\neq 1) = \begin{cases} \frac{1}{1-q}(b-a)^{1-q}, 1-q>0 \\ +\infty, \quad 1-q<0, \end{cases} \end{cases}$$

所以结论成立。

注 定积分中奇偶函数关于原点对称区间上的积分性质在反常积分中不再成立，比如

例 讨论$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$的敛散性。

证 错误做法：$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = 0$；正确做法：$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{c} \frac{x}{1+x^2} dx + \int_{c}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$。又因为$\int_{-\infty}^{c} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{c} = -\infty$，故$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$发散。

例 讨论$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$的敛散性。

证 错误做法：$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = 0$；正确做法：$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx \xlongequal[x=0\text{为瑕点}]{} \int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx$。又因为$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx = \ln|x|\Big|_{-1}^{0} = \lim_{x\to 0^-} \ln|x| - \ln|-1| = -\infty$，故$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$发散。