

第六章 定积分的应用

第一节 定积分的元素法

回顾曲边梯形的面积求法

求连续曲线 $y = f(x) \geq 0$ 和直线 $x = a, x = b, a < b, y = 0$ 围成的曲边梯形面积 A 。

1) 分割 在闭区间 $[a, b]$ 上任取分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$, 得 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 和对应的 n 个小曲边梯形, 记小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;

2) 近似求和 在第 i 个小区间 $[x_{i-1}, x_i] = [x_{i-1}, x_{i-1} + \Delta x_i]$ 上任取点 ξ_i , 当 Δx_i 充分小时, 第 i 个小曲边梯形面积 (称为面积 A 在第 i 个小区间 $[x_{i-1}, x_{i-1} + \Delta x_i]$ 上的部分量) $\Delta A \approx f(\xi_i) \Delta x_i, i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\Delta A \approx f(\xi_i) \Delta x_i, i = 1, 2, \cdots, n, \quad (1)$$

当 $\lambda = \max(\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n)$ 充分小时, $A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$;

$$3) \text{取极限 } A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

易见, 将(1)式中的 ξ_i 换为 x , Δx_i 换为 dx , 再加定积分号 \int_a^b 即得(2)式。上述作法略去下标可简化为: 在 $[a, b]$ 上任取子区间 $[x, x + dx]$, 则曲边梯形在此区间上的对应部分面积 $\Delta A \approx f(x) dx$,

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

一般, 设所求量为 U , 取 x 为积分变量, $x \in [a, b]$, 在 $[a, b]$ 上任取子区间 $[x, x + dx]$, 若 U 在此区间上的部分量 $\Delta U \approx f(x) dx$ (称 $dU = f(x) dx$ 为 U 的微元, 且 $\Delta U - dU = o(dx)$), 则

$$U = \int_a^b dU = \int_a^b f(x) dx. \text{ 这种方法称为定积分的元素法或微元法。}$$

若取 y 为积分变量, $y \in [c, d]$, 在 $[c, d]$ 上任取子区间 $[y, y + dy]$, 若 U 在此区间上的部分量 $\Delta U \approx g(y) dy$ (称 $dU = g(y) dy$ 为 U 的微元, 且 $\Delta U - dU = o(dy)$), 则 $U = \int_c^d dU = \int_c^d g(y) dy$ 。

第二节 定积分在几何学上的应用

一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

(1) 求曲线 $y = f(x), y = g(x), f(x) \geq g(x)$ 和直线 $x = a, x = b, a < b$ 围成的平面图形面积 A 。

取 x 为积分变量, $x \in [a, b]$, 在 $[a, b]$ 上任取子区间 $[x, x + dx]$, 平面图形在此区间上的对应部分面积 $\Delta A \approx [f(x) - g(x)] dx = dA$ (面积元素), 则 $A = \int_a^b dA = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$, 即取 x 为积分变量, 平面图形面积 = (上边界方程 - 下边界方程) 作被积函数定积分。

(2) 求曲线 $x=\psi_1(y), x=\psi_2(y), \psi_1(y) \geq \psi_2(y)$ 和直线 $y=c, y=d, c < d$ 围成的平面图形面积 A .

取 y 为积分变量, $y \in [c, d]$, 在 $[c, d]$ 上任取子区间 $[y, y+dy]$, 平面图形在此区间上的对应部

分面积 $\Delta A \approx [\psi_1(y) - \psi_2(y)]dy = dA$ (面积元素), 则 $A = \int_c^d dA = \int_c^d [\psi_1(y) - \psi_2(y)]dy$, 即取 y 为积分变量, 平面图形面积 = (右边界方程 - 左边界方程) 作被积函数定积分。

例 求曲线 $y^2 = x, y = x^2$ 围成的平面图形面积 A

解 取 x 为积分变量, $x \in [0, 1]$, 平面图形上边界方程为 $y = \sqrt{x}$, 下边界方程为 $y = x^2$, 所求平面图形

$$\text{面积 } A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

取 y 为积分变量, $y \in [0, 1]$, 平面图形右边界方程为 $x = \sqrt{y}$, 左边界方程为 $x = y^2$, 所求平面图形

$$\text{面积 } A = \int_0^1 [\sqrt{y} - y^2]dy = \frac{1}{3}.$$

例 求曲线 $y^2 = 2x, y = x - 4$ 围成的平面图形面积 A 。

解 取 x 为积分变量, $x \in [0, 8]$,

当 $x \in [0, 2]$ 时, 平面图形上边界方程为 $y = \sqrt{2x}$, 下边界方程为 $y = -\sqrt{2x}$, 此时平面图形面积为

$$\int_0^2 [\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})]dx = 2 \int_0^2 \sqrt{2x}dx = \frac{16}{3};$$

当 $x \in [2, 8]$ 时, 平面图形上边界方程为 $y = \sqrt{2x}$, 下边界方程为 $y = x - 4$; 此时平面图形面积为

$$\int_2^8 [\sqrt{2x} - (x - 4)]dx = \frac{56}{3} - 6 = \frac{38}{3};$$

$$\text{所求平面图形面积 } A = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = \frac{54}{3} = 18.$$

取 y 为积分变量, $y \in [-2, 4]$, 平面图形右边界方程为 $x = 4 + y$, 左边界方程为 $x = \frac{1}{2}y^2$, 平面

$$\text{图形面积为 } A = \int_{-2}^4 [4 + y - (\frac{1}{2}y^2)]dy = (4y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3)\Big|_{-2}^4 = 18.$$

例 求曲线 $y = e^x - 2, x \in [-2, 2]$ 与 x 轴围成的平面图形面积 A 。

解 取 x 为积分变量, $x \in [-2, 2]$,

当 $x \in [-2, \ln 2]$ 时, 平面图形上边界方程为 $y = 0$, 下边界方程为 $y = e^x - 2$, 此时平面图形面积

$$\text{为 } \int_{-2}^{\ln 2} [0 - (e^x - 2)]dx = e^{-2} - 2 + 2(\ln 2 + 2) = 2 \ln 2 + 2 + e^{-2};$$

当 $x \in [\ln 2, 2]$ 时, 平面图形上边界方程为 $y = e^x - 2$, 下边界方程为 $y = 0$; 此时平面图形面积为

$$\int_{\ln 2}^2 [e^x - 2 - 0] dx = e^2 - 2 - 2(2 - \ln 2) = 2 \ln 2 - 6 + e^2;$$

所求平面图形面积 $A = 4 \ln 2 + e^2 + e^{-2} - 4$.

例 求椭圆曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 围成的平面图形面积 A 。

解 根据对称性, $A = 4$ 倍第一象限图形面积 A_1 . 下求 A_1 , 取 x 为积分变量, $x \in [0, a]$, 平面图形上

边界方程为 $y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, 下边界方程为 $y = 0$, 面积

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^a \left[\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} - 0 \right] dx \stackrel{x=a \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \cos t \cdot a \cos t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

所求平面图形面积 $A = 4A_1 = \pi ab$ 。

2. 极坐标情形

定义 在直角坐标平面上, 称坐标原点为**极点**, x 轴正半轴为**极轴**. 任一点 $A(x, y)$ 到原点(极点)的距离 $\rho \in [0, +\infty)$ 称为**点 A 的极径**, 从 x 轴正半轴(极轴)出发逆时针旋转到点 A 的极径形成的角度 $\theta \in [0, 2\pi]$ 称为**点 A 的极角**. 二维数组 (ρ, θ) 称为**点 A 的极坐标**. 故同一点 A 既有直角坐标 (x, y) , 又有极坐标 (ρ, θ) , 它们的关系为 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$ 或 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 。

注 极坐标为 (ρ, θ) 和 $(\rho, \theta + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 的点都表示同一点, 比如极坐标为 $(1, \frac{3}{2}\pi), (1, -\frac{\pi}{2})$ 的点都表示直角坐标为 $(0, 1)$ 的同一点。

有些曲线, 其直角坐标方程较复杂, 但其极坐标方程较简单, 比如, 圆周 $x^2 + y^2 = R^2, R > 0$ 和射线 $y = x, x \geq 0$, 其极坐标方程分别为 $\rho = R, \theta = \frac{\pi}{4}$ 。当这些方程作被积函数积分时, 采用极坐标方程将使计算变得简单。

求曲线 $\rho = \varphi(\theta), \varphi(\theta) \geq 0$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha < \beta)$ 围成的平面图形面积 A 。

取 θ 为积分变量, $\theta \in [\alpha, \beta]$, 在 $[\alpha, \beta]$ 上任取子区间 $[\theta, \theta + d\theta]$, 平面图形在此区间上的对应部分面积 $\Delta A \approx \frac{1}{2} \varphi^2(\theta) d\theta = dA$ (**面积元素**), 则 $A = \int_{\alpha}^{\beta} dA = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta) d\theta$, 即取极角 θ 为积分变量, 包含原点(极点)的平面图形面积=曲边方程平方的一半作被积函数定积分。

例 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta, (a > 0)$ 上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴围成的平面图形面积 A 。

解 取极角 θ 为积分变量, $\theta \in [0, 2\pi]$, 曲边方程为 $\rho = a\theta (a > 0)$, 所求平面图形面积

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\theta^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3 a^2}{3}。$$

例 求心形曲线 $\rho = a(1 + \cos \theta), (a > 0)$, 即 $x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$ 围成的平面图形面积 A 。

解 根据对称性, $A =$ 极轴上方图形面积 A_1 的 2 倍。下求 A_1 , 取极角 θ 为积分变量, $\theta \in [0, \pi]$, 曲

边方程为 $\rho = a(1 + \cos \theta), (a > 0)$, 面积

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [a(1 + \cos \theta)]^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2\cos \theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2}\theta + 2\sin \theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right) \Big|_0^\pi = \frac{3}{4}\pi a^2。故所求平面图形面积 $A = \frac{3}{2}\pi a^2$ 。 \end{aligned}$$

二、体积

1. 旋转体的体积

(1) 求连续曲线 $y = f(x) \geq 0$ 和直线 $x = a, x = b, a < b, y = 0$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 V_x 。

取 x 为积分变量, $x \in [a, b]$, 在 $[a, b]$ 上任取子区间 $[x, x + dx]$, 旋转体在此区间上的对应部分体积 $\Delta V \approx \pi[f(x)]^2 dx = dV$ (体积元素), 则 $V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b f^2(x) dx$, 即取 x 为积分变量, 绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 = 曲边方程 $f(x)$ 平方的 π 倍作被积函数定积分。

(2) 求曲线 $x = \psi(y), \psi(y) \geq 0$ 和直线 $y = c, y = d, c < d, x = 0$ 围成的曲边梯形绕 y 轴旋转得到的旋转体体积 V_y 。

取 y 为积分变量, $y \in [c, d]$, 在 $[c, d]$ 上任取子区间 $[y, y + dy]$, 旋转体在此区间上的对应部分体积 $\Delta V \approx \pi[\psi(y)]^2 dy = dV$ (体积元素), 则 $V = \int_c^d dV = \pi \int_c^d \psi^2(y) dy$, 即取 y 为积分变量, 绕 y 轴旋转得到的旋转体体积 = 曲边方程 $\psi(y)$ 平方的 π 倍作被积函数定积分。

例 求连续曲线 $y = f(x), y = g(x), f(x) \geq g(x) \geq 0$ 和直线 $x = a, x = b, a < b$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 V_x 。

解 V_x = 曲线 $y = f(x) \geq 0$ 和直线 $x = a, x = b, a < b, y = 0$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 $\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$ 与曲线 $y = g(x) \geq 0$ 和直线 $x = a, x = b, a < b, y = 0$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 $\int_a^b \pi[g(x)]^2 dx$ 之差, 即 $V_x = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$ 。于是, 取 x 为积分变量, x 轴上方平面图形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积等于上、下边界方程平方差的 π 倍作被积函数定积分。

注 类似推导可得, 连续曲线 $x = \psi_1(y), x = \psi_2(y), \psi_1(y) \geq \psi_2(y) \geq 0$ 和直线 $y = c, y = d, c < d$ 围成的曲边梯形绕 y 轴旋转得到的旋转体体积 $V_y = \pi \int_c^d [\psi_1^2(y) - \psi_2^2(y)] dy$, 即 取 y 为积分变量, y 轴右方平面图形绕 y 轴旋转得到的旋转体体积等于右、左边界方程平方差的 π 倍作被积函数定积分。

例 求曲线 $y = \frac{r}{h}x, x = h, y = 0$ (r, h 均为正常数) 围成的平面图形 (1) 绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 V_x ; (2) 绕 y 轴旋转得到的旋转体体积 V_y 。

解 (1) 取 x 为积分变量, $x \in [0, h]$, x 轴上方平面图形上边界方程为 $y = \frac{r}{h}x$, 下边界方程为 $y = 0$,

$$\text{所求旋转体体积 } V_x = \pi \int_0^h \left[\left(\frac{r}{h}x \right)^2 - 0^2 \right] dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h;$$

(2) 取 y 为积分变量, $y \in [0, r]$, y 轴右方平面图形右边界方程为 $x = h$, 左边界方程为 $x = \frac{yh}{r}$,

$$\text{所求旋转体体积 } V_y = \pi \int_0^r \left[h^2 - \left(\frac{yh}{r} \right)^2 \right] dy = \pi \left[h^2 y - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^2 y^3 \right] \Big|_0^r = \frac{2}{3} \pi h^2 r.$$

例 求椭圆曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 围成的平面图形 (1) 绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 V_x ; (2) 绕 y 轴旋转得到的旋转体体积 V_y 。

解 (1) 取 x 为积分变量, $x \in [-a, a]$, x 轴上方平面图形上边界方程为 $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

$$\text{下边界方程为 } y = 0, \text{ 所求旋转体体积 } V_x = \pi \int_{-a}^a \left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 - 0^2 \right] dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a b^2;$$

(2) 取 y 为积分变量, $y \in [-b, b]$, y 轴右方平面图形右边界方程为 $x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$, 左

$$\begin{aligned} \text{边界方程为 } x = 0, \text{ 所求旋转体体积 } V_y &= \pi \int_{-b}^b \left[\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \right)^2 - 0^2 \right] dy = \frac{\pi a^2}{b^2} \int_{-b}^b (b^2 - y^2) dy \\ &= \frac{\pi a^2}{b^2} \left(b^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-b}^b = \frac{4}{3} \pi b a^2. \end{aligned}$$

例 求圆周 $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($b > a > 0$) 围成的平面图形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 V_x .

解 取 x 为积分变量, $x \in [-a, a]$, x 轴上方平面图形上边界方程为 $y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, 下边界方程为

$$y = b - \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ 所求旋转体体积 } V_x = \pi \int_{-a}^a [(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2] dx$$

$$= 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \stackrel{\text{定积分几何意义}}{=} 4\pi b \cdot \frac{\pi a^2}{2} = 2\pi^2 a^2 b;$$

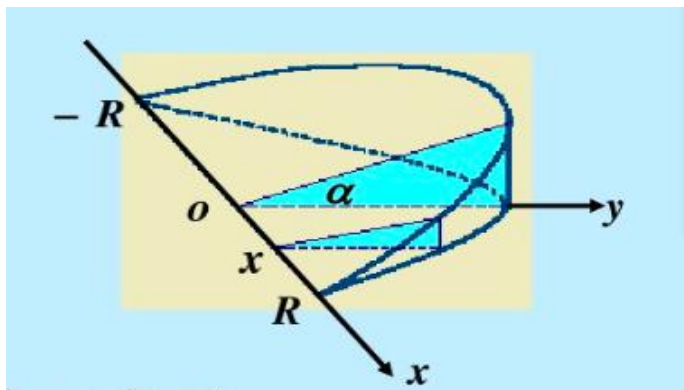
2. 平行截面面积已知的立体体积

一立体位于过点 $x = a, x = b$ 且垂直于 x 轴的两平面之间, 过 x 轴上一点 $x \in [a, b]$ 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$, 求立体体积。

取 x 为积分变量, $x \in [a, b]$, 在 $[a, b]$ 上任取子区间 $[x, x + dx]$, 立体在此区间上的对应部分体积

$$\Delta V \approx A(x)dx = dV \text{ (体积元素)}, \text{ 立体体积 } V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)dx.$$

例 一平面经过半径为 R 的圆柱体底圆中心, 并与底面交成角 α , 求这个平面截圆柱体所得立体的体积 V 。



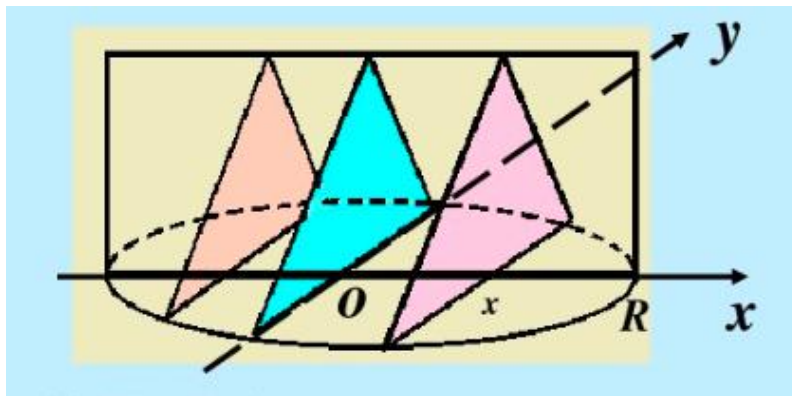
解 建立如图的直角坐标系, 则所求立体位于过点 $x = -R, x = R$ 且垂直于 x 轴的两平面之间, 过 x 轴

上一点 $x \in [-R, R]$ 且垂直于 x 轴的截面面积为

$$A(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \tan \alpha = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha, \text{ 立体体积为}$$

$$V = \int_{-R}^R A(x) dx = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \tan \alpha \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \tan \alpha \left(R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^R \\ = \tan \alpha \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{2}{3} \tan \alpha R^3.$$

例 一正劈锥体的底是半径为 R 的圆域，顶是平行且等于底圆直径的线段，高为 h ，求该劈锥体的体积 V 。



解 建立如图的直角坐标系，则所求劈锥体位于过点 $x = -R, x = R$ 且垂直于 x 轴的两平面之间，过 x 轴

上一点 $x \in [-R, R]$ 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x) = \frac{1}{2} (2\sqrt{R^2 - x^2}) \cdot h$ ，该劈锥体的体积

$$V = \int_{-R}^R A(x) dx = h \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \underset{\text{定积分的几何意义}}{=} \frac{1}{2} \pi R^2 h.$$

三、平面曲线的弧长

1. 设曲线弧由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ 给出，其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'(t), \psi'(t)$ 不同时为零，求弧长 s 。

取 t 为积分变量， $t \in [\alpha, \beta]$ ，在 $[\alpha, \beta]$ 上任取子区间 $[t, t + dt]$ （相应于自变量增量 dt ，函数 x, y 产生增量 $\Delta x = \varphi(t + dt) - \varphi(t)$ ， $\Delta y = \psi(t + dt) - \psi(t)$ ），弧在此区间上的对应部分长度 Δs 近似等于弦长，即

$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ （ dt 越小，参数 $t + dt$ 和 t 对应的点越靠近，弦、弧长度近似越好）；由函数增量的

微分近似式 $\Delta x = \varphi(t + dt) - \varphi(t) \approx dx = \varphi'(t)dt$ 和 $\Delta y = \psi(t + dt) - \psi(t) \approx dy = \psi'(t)dt$ （ dt 越小，增量和

微分近似越好），故 $\Delta s \approx \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = ds$ （弧元素），于是所求弧长

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

2. 当曲线弧由直角坐标方程 $y = f(x), x \in [a, b]$ 给出，其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数，此

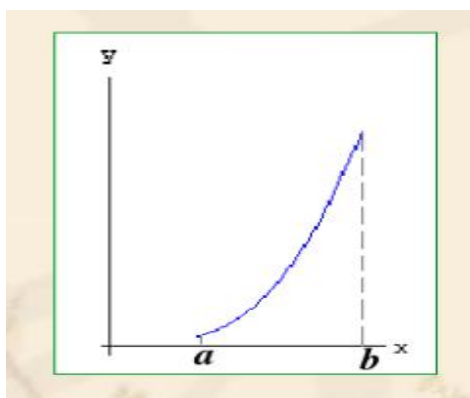
时曲线弧的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, x \in [a, b]$ ，弧元素 $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ ，弧长 $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ ；

3. 当曲线弧由极坐标方程 $\rho = \rho(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$ 给出, 其中 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数, 此

时曲线弧的参数方程为 $\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases}, \theta \in [\alpha, \beta]$, 由于 $\begin{cases} x'_\theta = \rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta \\ y'_\theta = \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta \end{cases}$,

所以弧元素 $ds = \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2} d\theta$, 弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2} d\theta$.

例 求曲线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $a \leq x \leq b$ 的一段弧的长度 s .



解 $y' = x^{\frac{1}{2}}$, 弧元素 $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + x} dx$, 所求弧的长度为

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \Big|_a^b = \frac{2}{3} [(1+b)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}}].$$

特别地, 当 $a=0, b=3$ 时, $s = \frac{14}{3}$.

例 求摆线 $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta), a > 0$ 的一拱 ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 的长度 s .

解 $x'_\theta = a(1 - \cos \theta), y'_\theta = a \sin \theta$, 弧元素 $ds = \sqrt{(x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2} d\theta = a\sqrt{2 - 2\cos \theta} d\theta$
 $= 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta$, 所求弧的长度为 $s = \int_0^{2\pi} ds = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = -2 \cdot 2a \cos \frac{\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4a(1 - (-1)) = 8a$.

例 求心形线 $\rho = a(1 + \cos \theta) (a > 0)$ 即 $x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$ 的长度 s .

解 根据对称性, 所求弧的长度 s 是极轴上方心形线长度 s_1 的 2 倍, 下求 s_1 , 取 θ 为积分变量, $\theta \in [0, \pi]$,

$\rho(\theta) = a(1 + \cos \theta), \rho'(\theta) = -a \sin \theta$, 弧元素 $ds = \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2} d\theta = a\sqrt{2 + 2\cos \theta} d\theta$, 弧长 $s_1 = \int_0^\pi ds = a \int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos \theta} d\theta = 2a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 4a$, 于是所求长度 $s = 2s_1 = 8a$.

例 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta (a > 0)$ 上相应于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 的一段弧的长度 s 。

解 $\rho(\theta) = a\theta$, $\rho'(\theta) = a$, 弧元素 $ds = \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2} d\theta = a\sqrt{1+\theta^2} d\theta$, 所求弧的长

$$\text{度为 } s = \int_0^{2\pi} ds = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta \underset{\text{分部积分法}}{=} a \left[\theta \sqrt{1+\theta^2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\theta \cdot 2\theta}{2\sqrt{1+\theta^2}} d\theta$$

$$= 2\pi a \sqrt{1+4\pi^2} - a \left[\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta \right]$$

$$= 2\pi a \sqrt{1+4\pi^2} - a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta + a \ln(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) \Big|_0^{2\pi}, \text{ 这里所要求的积分 } a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta$$

再次出现, 故上式移项得到

$$2a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta = 2\pi a \sqrt{1+4\pi^2} + a \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}), \text{ 最后得到}$$

$$s = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta = \frac{a}{2} [2\pi \sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})].$$

$$\text{注 } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} (a > 0) = \begin{cases} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, & \text{取 } + \\ \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, & \text{取 } - \end{cases}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0) = \arcsin \frac{x}{a} + C$$