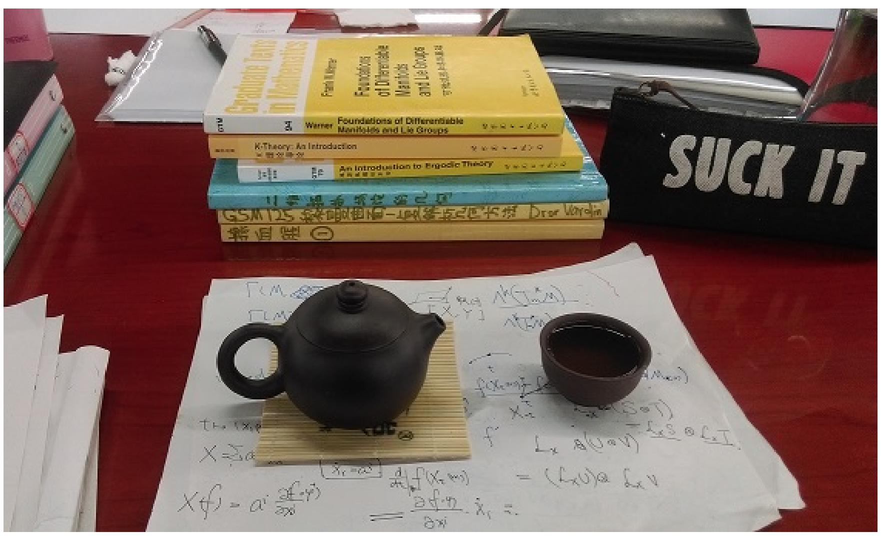
一份超甜的微积分习题集

曲豆豆 码字

欢迎给曲豆豆投喂题目！

2019 年 7 月 7 日

第 00-9 稿



图：毕业季的曲豆豆在合肥南七技校东区图书馆五楼自习室

拍摄于 2017.3.12 - 13：42

曲豆豆的高数讨论 qq 群：1022388218

本文持续更新中……

曲豆豆新坑《近代分析基础》零基础入门度量空间、赋范空间，即将开坑！

目录

每日一题 -日期索引

第 1 章　数列极限

习题 1. 已知正数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$，

（*1*）证明：数列 $\{a_n\}$ 存在正的下界（换句话说，存在 $\varepsilon > 0$，使得 $a_n \geq \varepsilon$ 对任意 $n \geq 1$ 都成立）；

（*2*）举例说明数列 $\{a_n\}$ 之中可能没有最小数。

证明. **(1)** 由数列极限的定义，存在正整数 N，使得对任意 $n > N$，都有 $a_n > \frac{A}{2}$；对于这个 N，注意 $a_1, a_2, ..., a_N$ 都为正数，从而考虑

$$\varepsilon := \min\{a_1, a_2, ..., a_N; \frac{A}{2}\}$$

易知如此的 ε 是数列 $\{a_n\}$ 的一个正下界。

(2) 例如 $a_n = A + \frac{1}{n}$. □

习题 2. 已知正数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，证明：存在正数列 $\{b_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$.

证明. 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，从而存在正整数 N_1，使得当 $n > N_1$ 时，$a_n < \frac{1}{1^2}$. 之后考虑子列 $\{a_n\}_{n=N_1}^{+\infty}$，该数列也趋于 0，从而存在正整数 $N_2 > N_1$，使得当 $n > N_2$ 时，$a_n < \frac{1}{2^2}$.

如此不断地归纳构造下去，可得到一列 $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots$，使得对任意 $k \geq 1$，若 $n > N_k$，则 $a_n < \frac{1}{k^2}$. 注意到对任何正整数 n，要么 $n \leq N_1$，要么存在唯一的 $k \geq 1$，使得 $N_k < n \leq N_{k+1}$. 构造数列 $\{b_n\}$ 如下：

$$b_n = \begin{cases} a_n & n \leq N_1 \\ ka_n & N_k < n \leq N_{k+1} \end{cases}$$

则当 $N_k < n \leq N_{k+1}$ 时，$b_n = ka_n < k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$，于是易知 $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$；又因为 $N_k < n \leq N_{k+1}$ 时，$\frac{b_n}{a_n} = k$，由此易知 $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$. □

另一种更直接的构造是 $b_n = \sqrt{a_n}$。

此题表明，不存在“收敛速度最慢”的数列。

习题 3. 设 $a_1, a_2, ..., a_N$ 是 N 个给定的正数，证明：

$$\lim_{n\to+\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_N^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_1, a_2, ..., a_N\}$$

证明. 令 $A := \max\{a_1, a_2, ..., a_N\}$，则一方面有

$$(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_N^n)^{\frac{1}{n}} \leq (NA^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{N}A \to A \qquad (n \to +\infty)$$

另一方面，$\left\{a_i \middle| 1 \leq i \leq N\right\}$ 之中至少有一个为 A，从而

$$(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_N^n)^{\frac{1}{n}} \geq (A^n)^{\frac{1}{n}} = A$$

从而由夹逼原理，$\lim_{n\to+\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_N^n)^{\frac{1}{n}} = A = \max\{a_1, a_2, ..., a_N\}$ □

习题 4. 已知数列 $\{a_n\}$ 使得 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 存在，证明 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

证明. 记数列 $\{a_n\}$ 的部分和 $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则由题意 $A := \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$ 存在。从而有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1}\right) = A - 1 \cdot A = 0$$

□

习题 5. 计算极限：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n\binom{n}{k}}$$

解. ：对于 $n \geq 2$，注意对任意的 $2 \leq k \leq n-2$，成立

$$\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

因此对于 $n \geq 4$，成立

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n\binom{n}{k}} &= \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{n+1-k}{n\binom{n}{k}} \\
&\leq \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{n}{n\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{2(n-4)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$，则上式右边趋于 0；又因为 $\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n\binom{n}{k}} > 0$，从而由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n\binom{n}{k}} = 0$$

□

习题 6. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{1}}{n^2+n+1} + \frac{2+\frac{1}{2}}{n^2+n+2} + \frac{3+\frac{1}{3}}{n^2+n+3} + \cdots + \frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n+n} \right)$$

解. 使用夹逼原理。对于 $n \geq 1$，注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k+\frac{1}{k}}{n^2+n+k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n+k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{k}}{n^2+n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \to \frac{1}{2} \qquad (n \to +\infty)
\end{aligned}$$

另一方面，我们还有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+\frac{1}{k}}{n^2+n+k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n+k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+2n} = \frac{n+1}{2(n+2)} \to \frac{1}{2} \qquad (n \to +\infty)$$

因此由夹逼原理，原极限存在，并且等于 $\frac{1}{2}$. □

习题 7. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)$$

证明. 对于 $x>0$，注意不等式 $x-\frac{1}{6}x^3<\sin x<x$，从而有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}=1$$

$$\begin{aligned}1-\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}\right)&<\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n^2}\right)^3<\frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{2n}k^3\\&<\frac{1}{6n^6}\int_1^{2n+1}x^3\mathrm{d}x<\frac{(3n)^4}{24n^6}\to0\qquad(n\to+\infty)\end{aligned}$$

于是由夹逼原理立刻得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)=1.$ □

另证. 首先仍由 $\sin x\le x$ 得出 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}\le1$. 不过另一边不等号可以这样估计：注意到极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，从而对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意 $|x|<\delta$，都有 $\frac{\sin x}{x}>1-\varepsilon$，即 $\sin x>x-\varepsilon x$. 现在取足够大的 N，使得 $N>\frac{2}{\delta}$，则对任意 $n>N$，$\frac{1}{n^2},\frac{3}{n^2},\ldots,\frac{2n-1}{n^2}$ 都小于 δ，因此有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}\ge\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n^2}-\varepsilon\frac{2k-1}{n^2}\right)=1-\varepsilon$$

因此由数列极限的定义，即得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)=1.$

□

习题 8. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}+n\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

解. 首先注意到

$$\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}+\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{(n-k)\pi}{n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+\cos\frac{(n-k)\pi}{n}\right)=0$$

因此

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}+n\left(\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}-\cos\frac{0\cdot\pi}{n}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

习题 9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{1^2}+\sqrt{\frac{1}{2^2}+\sqrt{\cdots+\sqrt{\frac{1}{n^2}}}}}$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在，并且

$$\lim_{n\to+\infty}a_n<1.471$$

证明. 显然 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，为证其极限存在，只需再证它有上界。我们令

$$b_n:=\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}}_{n\text{ 个根号}}$$

显然 $a_n\le b_n$，以及递推关系 $b_{n+1}=\sqrt{1+b_n}$. 断言对任意 $n\ge 1$，都有 $b_n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，这是因为 $b_1=1<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，并且由数学归纳法 $b_{n+1}=\sqrt{1+b_n}<\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 从而对任意 $n\ge 1$，$a_n\le b_n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 从而 $\{a_n\}$ 是单调递增的有界数列，故极限存在。并且我们得到

$$\lim_{n\to+\infty}a_n\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.61803\cdots<1.619$$

为得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 更精确的估计，对于 $n\ge 3$，令

$$c_n:=\underbrace{\sqrt{\frac{1}{3^2}+\sqrt{\frac{1}{4^2}+\sqrt{\cdots+\sqrt{\frac{1}{n^2}}}}}}_{n-2\text{ 个根号}}$$

则有 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{4}+c_n}}$. 注意到

$$c_n \le \underbrace{\sqrt{\frac{1}{3^2}+\sqrt{\frac{1}{3^2}+\sqrt{\cdots+\sqrt{\frac{1}{3^2}}}}}}_{n-2\text{ 个根号}} =: d_n$$

而类似地，我们知道 $\{d_n\}$ 单调递增且极限存在，并且其极限 $d>0$ 满足 $d^2=\frac{1}{3^2}+d$，从而 $d=\frac{3+\sqrt{13}}{6}$. 因此有 $c_n\le d=\frac{3+\sqrt{13}}{6}$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \le \sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{4}+d}}=\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3+\sqrt{13}}{6}}}=1.47047\cdots<1.471$$

□

习题 10. 设 $a>0$，$x_1>0$，数列 $\{x_n\}$ 满足递推关系

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)\quad \forall n\ge 1$$

试证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值。

解. 首先注意 $x_1>0$ 以及 $a>0$，用数学归纳法已知 $x_n>0$ 对任意 $n\ge 1$ 成立，因此数列 $\{x_n\}$ 有下界。对任意 $n\ge 2$，使用平均值不等式可知

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{4}\left(3x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}^3}\right)=\frac{1}{4}\left(x_{n-1}+x_{n-1}+x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}^3}\right)\\ &\ge \sqrt[4]{x_{n-1}\cdot x_{n-1}\cdot x_{n-1}\cdot\frac{a}{x_{n-1}^3}}=\sqrt[4]{a}\end{aligned}$$

因此对任意 $n\ge 2$，$x_n\ge\sqrt[4]{a}$，进而

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{x_n^3}-x_n\right)<0$$

这表明数列 $\{x_n\}$ 在 $n\ge 2$ 是单调递减的。又因为此数列有下界，从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。设其极限值为 x，则对 $x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)$ 两边取 $n\to\infty$，得

$$x=\frac{1}{4}\left(3x+\frac{a}{x^3}\right)$$

由因为每个 $x_n>0$，故极限值 $x\ge 0$，因此从上式解得 $x=\sqrt[4]{a}$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt[4]{a}$. □

习题 11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n}$，并且 $a_1>0$. 证明：极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(a_n-n)$ 存在。

证明. 由 $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n}$ 可知，

$$\begin{aligned} a_{n+1}-(n+1) &= a_n-n+\frac{n-a_n}{a_n}=\left(1-\frac{1}{a_n}\right)(a_n-n) \\ a_n-n &= (a_2-2)\prod_{k=2}^{n-1}\left(1-\frac{1}{a_k}\right) \end{aligned}$$

对于 $n\geq 2$，由平均值不等式与数学归纳法，$a_n=a_{n-1}+\frac{n-1}{a_{n-1}}\geq 2\sqrt{n-1}\geq 2$，从而 $0<1-\frac{1}{a_n}<1$，从而数列 $\left\{\prod\limits_{k=2}^{n-1}\left(1-\frac{1}{a_k}\right)\right\}$ 单调递减且有下界 0，故极限存在。记

$$b:=\prod_{k=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{a_k}\right)$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-n)=(a_2-2)b$，于是

$$\frac{1/n}{1/a_n}=\frac{a_n}{n}=\frac{a_n-n}{n}+1\to 1\quad (n\to+\infty)$$

又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散，从而无穷乘积 $\prod\limits_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{a_k}\right)$ 发散于 0，即 $b=0$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-n)=0$.

因此存在 $N>0$，使得对任意 $n\geq N$，成立 $a_n<n+\frac{1}{2}$. 再注意到

$$\begin{aligned} (n+1)\left[a_{n+1}-(n+1)\right] &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{a_n}\right)n(a_n-n) \\ n(a_n-n) &= N(a_N-N)\prod_{k=N}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{a_k}\right)\quad (n\geq N) \end{aligned}$$

注意到 $n>N$ 是成立 $a_n<n+\frac{1}{2}$，从而

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{a_n}\right)<\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)=1-\frac{1}{n(2n+1)}<1$$

于是数列 $\{n(a_n-n)\}$ 在 n 充分大（$>N$）时是单调递减的，并且有下界 0，从而极限存在。 □

习题 12. 记 $H_n := \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，则众所周知，极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_n-\ln n)$ 存在，并且其极限值为 *Euler* 常数 $\gamma\approx 0.577$. 证明：存在常数 α,β，使得当 $n\to+\infty$ 时成立

$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

并求出 α,β 的值。

解. 注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_n-\ln n-\gamma)=0$，从而使用 Stolz 定理，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n(H_n-\ln n-\gamma) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{H_n-\ln n-\gamma}{1-\frac{1}{n}} \xlongequal{\text{Stolz}} \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n+1}+o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

接下来我们继续考虑：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n^2(H_n-\ln n-\gamma-\frac{1}{2n}) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{H_n-\ln n-\gamma-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^2}} \xlongequal{\text{Stolz}} \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}}\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-2\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}}\end{aligned}$$

接下来的计算过程中（灵活使用等价无穷小、泰勒展开可简化计算），注意当 $n\to+\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2} &= \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\sim\frac{2}{n^3}\\ \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\\ \ln(1+\frac{1}{n}) &= \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

因此有

$$\text{原式} = -\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}-2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}\right)+o(\frac{1}{n^3})}{\frac{2}{n^3}}=-\frac{1}{12}$$

因此可知，$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})$，特别地，$\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=-\frac{1}{12}$. □

习题 13. 已知数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $x_{n+1}=y_n+\theta x_n\,(\forall n\geq 1)$，其中 $0<\theta<1$ 为常数。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$ 存在。

证明. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，注意到 $y_n=x_{n+1}-\theta x_n$，两边取极限立刻知道 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$ 存在。

我们只需考察另一方面，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$ 存在，记其极限值为 y，则对 $x_{n+1}=y_n+\theta x_n\,(\forall n\geq 1)$ 两边取上、下极限，有

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to+\infty}x_n &= \varlimsup_{n\to+\infty}(y_n+\theta x_n)\leq\varlimsup_{n\to+\infty}y_n+\theta\varlimsup_{n\to+\infty}x_n=y+\theta\varlimsup_{n\to+\infty}x_n\\ \varliminf_{n\to+\infty}x_n &= \varliminf_{n\to+\infty}(y_n+\theta x_n)\geq\varliminf_{n\to+\infty}y_n+\theta\varliminf_{n\to+\infty}x_n=y+\theta\varliminf_{n\to+\infty}x_n\end{aligned}$$

再注意到 $\{y_n\}$ 收敛，从而为有界数列，记 M 为 $\{y_n\}$ 的一个上界，从而 $|x_{n+1}|\leq|y_n|+\theta|x_n|\leq M+\theta|x_n|$. 由数学归纳法易知 $|x_n|\leq\frac{M}{1-\theta}$，因此 $\{x_n\}$ 为有界数列，从而 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}x_n$ 与 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}x_n$ 为有限值，从而有

$$\frac{1}{1-\theta}y\leq\varliminf_{n\to+\infty}x_n\leq\varlimsup_{n\to+\infty}x_n\leq\frac{1}{1-\theta}y$$

因此极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，且极限值为 $\frac{y}{1-\theta}$.

□

第 2 章　连续函数

习题 14. 已知函数

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}$$

求 $f(x)$ 的自然定义域以及值域；

解法一. 由二次函数知识，$x^2 \pm x + 1$ 恒大于 0，从而 f 的自然定义域为全体实数。接下来我们证明 f 的值域为 $(-1, 1)$. 一方面，注意到

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2 \\ &= 2x^2 + 2 - 2\sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} \\ &= 2\left(\sqrt{(x^2+1)^2} - \sqrt{(x^2+1)^2 - x^2}\right) \\ &= 2\frac{x^2}{x^2 + 1 + \sqrt{(x^2+1)^2 - x^2}} \\ &< 2\frac{x^2}{x^2 + x^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

因此有 $|f(x)| < 1$ 恒成立，也就是说 $-1 \leq f(x) \leq 1$. 另一方面，由于

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

可知，

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

再由 f 的连续性，可知 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$. $\square$

解法二. 我们还可以用别的方法求 $f(x)$ 的值域。首先用第一种解法得 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp 1$，之后再断言 f 为单调递减函数，再由 f 的连续性也可证明 f 的值域恰为 $(-1,1)$. 接下来我们证明 f 单调递减。注意到

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x) < 0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} < \left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-x+1} \tag{$*$}$$

当 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ 时，$(*)$ 式左边为负，右边为正，从而该不等式成立；而 $|x| \geq \frac{1}{2}$ 时，不妨 $x \geq \frac{1}{2}$ ($x < -\frac{1}{2}$ 的情形类似)，此时只需证明

$$\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 < \left(\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-x+1}\right)^2$$

把平方打开，整理得

$$x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} < x^4 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

而当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时此式明显成立。证毕。 □

习题 15. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，回答以下问题：

（1）若每个实数都是 $f\circ f$ 的不动点（也就是说，$f(f(x)) = x$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 都成立），则满足此条件的 f 有多少个？

（2）在（1）的条件下，若 $f(x)$ 还是单调递增的，求 $f(x)$.

（3）如果 $f\circ f$ 只有两个不动点 $a,b(a\neq b)$，那么只可能 $\begin{cases} f(a)=a \\ f(b)=b \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} f(a)=b \\ f(b)=a \end{cases}$.

解. **(1)**有无穷多个。比如对任意 $a<b$，考虑函数 $f_{ab}(x) = \begin{cases} b & (x=a) \\ a & (x=b) \\ x & (x\neq a,b) \end{cases}$，则如此的 $f_{ab}(x)$ 均满足题设，这样的函数有无穷多个。

(2)此时必有 $f(x)=x$. 这是因为，如果存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $f(a)\neq a$，我们分 $f(a)>a$ 与 $f(a)<a$ 两种情况考虑。若 $f(a)>a$，则由 f 单调递增知 $f(f(a))\geq f(a)$，再注意任何实数都是 $f\circ f$ 的不动点，特别地 $f(f(a))=a$，因此

$$a = f(f(a)) \geq f(a)$$

这与 $f(a)>a$ 矛盾。而 $f(a)<a$ 的情形也类似得到矛盾。因此必有 $f(x)=x$.

(3)不妨 $a<b$. 按逻辑讲，有且仅有以下三种情况：$f(a)=a$，$f(a)=b$，以及 $f(a)\neq a,b$.

如果 $f(a)=a$，那么我们记 $c:=f(b)$，注意 $f(f(c))=f(f(f(b)))=f(f\circ f(b))=f(b)=c$，也就是说 c 是 f 的不动点，因此由题设可知 $c=a$ 或 $c=b$. 但此时 $c=a$ 不成立，因为如果 $c=a$，则 $b=f(f(b))=f(c)=f(a)=a$，与 $a\neq b$ 矛盾，所以必有 $c=b$，因此 $\begin{cases} f(a)=a \\ f(b)=b \end{cases}$.

如果 $f(a)=b$，那么 $a=f(f(a))=f(b)$，所以 $\begin{cases} f(a)=b \\ f(b)=a \end{cases}$.

如果 $f(a)\neq a,b$，记 $d:=f(a)$，则由（1）中的讨论，知 d 也为 $f\circ f$ 的不动点，因此由题设 $d=a$ 或 $d=b$，这与 $d=f(a)\neq a,b$ 矛盾。因此这种情况不存在。综上得证。

□

习题 16. 用函数极限的定义直接证明：

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x}{2x-1}=3$$

证明. 首先注意到，如果 $|x-1|<\frac{1}{3}$，那么 $x>\frac{2}{3}$，因此 $2x-1>\frac{1}{3}$. 现在，对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta:=\min\{\frac{1}{3},\frac{\varepsilon}{9}\}$，则对于任意的 x，若 $|x-1|<\delta$，则有

$$\left|\frac{3x}{2x-1}-3\right|=\frac{3|x-1|}{2x-1}<\frac{3\delta}{1/3}=9\delta\leq 9\cdot\frac{\varepsilon}{9}=\varepsilon$$

从而证毕。 □

如果在考场上，出于对出题人、阅卷人的嘲讽，曲豆豆更倾向于下述证法:

特别傻逼的另证. 首先注意到，如果 $|x-1|<\frac{1}{2}-\frac{1}{4666}$，那么 $x>\frac{1}{2}+\frac{1}{4666}$，因此 $2x-1>\frac{1}{2333}$. 现在，对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta:=\min\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4666},\frac{\varepsilon}{6999}\}$，则对于任意的 x，若 $|x-1|<\delta$，则有

$$\left|\frac{3x}{2x-1}-3\right|=\frac{3|x-1|}{2x-1}<\frac{3\delta}{1/2333}=6999\delta\leq 6999\cdot\frac{\varepsilon}{6999}=\varepsilon$$

从而证毕。

□

习题 17. 用函数极限的定义直接证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{2}=+\infty$$

证明. 对任意 $M>0$，令 $N:=4M^2$，则对任意 $x>N$，都有

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{2}\geq\frac{\sqrt{x}}{2}\geq\frac{\sqrt{4M^2}}{2}=M$$

从而由函数极限的定义知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{2}=+\infty.$ □

习题 18. （黎曼函数）考虑闭区间 $[0,1]$ 上的函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & 若 x=\frac{p}{q}，其中 p 与 q 为互素的整数，且 q\geq 0\\ 0 & 若 x 为无理数\end{cases}$$

则 $R(x)$ 在哪些点连续，在哪些点不连续？

证明. $R(x)$ 在 $x_0\in[0,1]$ 处连续，当且仅当 x_0 是无理数。这可用连续性的定义直接验证。

（1）若 $x_0\in[0,1]$ 为无理数，断言 $R(x)$ 在 x_0 处连续，也就是说 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=R(x_0)=0.$对任意 $\varepsilon>0$， 注意到集合 $X_\varepsilon:=\left\{\frac{p}{q}\middle|q\geq 1,\frac{1}{q}>\varepsilon,0\leq p\leq q\right\}$ 是有限集，且该集合包括所有的分母小于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的有理数。注意 x_0 为无理数，从而 $x_0\notin X_\varepsilon$. 于是

$$\delta:=\min\left\{|x_0-r|\middle|r\in X_\varepsilon\right\}>0$$

取定这个 δ，则对于任意的 $x\in[0,1]$，如果 $|x-x_0|<\delta$，若 x 为无理数，$R(x)=0$，从而 $|R(x)-R(x_0)|<\varepsilon$ 自动成立；而 x 为有理数时，由 δ 的定义，不难知道此时 $R(x)<\varepsilon$，因此总之有$|R(x)-R(x_0)|=|R(x)|<\varepsilon$，从而 $R(x)$ 在无理点 x_0 处连续。

(2)若 $x_0\in[0,1]$ 为有理数，显然 $R(x)$ 在 x_0 不连续。因为此时 $R(x_0)>0$，但另一方面取一列趋近于 x_0 的无理数序列 $\{x_n\}$，注意 $R(x_n)=0$ 对任意 $n\geq 0$ 成立，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}R(x_n)=0\neq R(x_0)$，因此 $R(x)$ 在 x_0 不连续。 □

习题 19. 记 $C[0,+\infty)$ 为定义在非负实轴上的连续函数之全体。对于 $f,g\in C[0,+\infty)$，如果

$$\exists x_0>0, \forall x>x_0, |f(x)-g(x)|<1$$

则称 f **“猥亵”** g；而如果

$$\forall x_0>0, \exists x>x_0, |f(x)-g(x)|<1$$

则称 f **“骚扰”** g. 判断以下命题的正误，并说明理由或举出反例：

（1）任意 $f,g\in C[0,+\infty)$，如果 f 猥亵 g，那么 g 猥亵 f;

（2）任意 $f,g\in C[0,+\infty)$，如果 f 骚扰 g，那么 g 骚扰 f;

（3）任意 $f,g\in C[0,+\infty)$，如果 f 猥亵 g，那么 f 骚扰 g;

（4）任意 $f,g\in C[0,+\infty)$，如果 f 骚扰 g，那么 f 猥亵 g;

（5）任意 $f,g,h\in C[0,+\infty)$，如果 f 猥亵 g 且 g 猥亵 h，那么 f 猥亵 h;

（6）任意 $f,g,h\in C[0,+\infty)$，如果 f 骚扰 g 且 g 骚扰 h，那么 f 骚扰 h.

（7）任意 $f,g\in C[0,+\infty)$，如果 f 猥亵 g，那么存在 $h\in C[0,+\infty)$，使得 f,g,h 之中任何两个都猥亵。

（8）任意 $f,g\in C[0,+\infty)$，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$ 存在且绝对值小于 1，则 f 猥亵 g.

（9）任意 $f,g\in C[0,+\infty)$，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=1$，则 f 猥亵 g.

解. （1）（2）显然正确，因为 $|f(x)-g(x)|<1 \iff |g(x)-f(x)|<1$.

（3）正确，（4）错误。由“骚扰”与“猥亵”的定义，显然猥亵一定骚扰; 但反之未必，例如 $f(x)=2\sin x$，$g(x)=0$ 是“骚扰而不猥亵”的例子。

（5）（6）都错误，例如 $f(x)=0.6$，$g(x)=0$，$h(x)=-0.6$ 均为常函数，易验证 f 猥亵 (骚扰)g，g 猥亵 (骚扰)h, 但 f 并不猥亵（骚扰）h.

（7）正确，比如可以取 $h(x)=f(x)$.

（8）正确，记 $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$，则 $|A|<1$，从而存在（足够小的）正数 ε，使得 $-1<A-\varepsilon<A+\varepsilon<1$，则由函数极限的定义，存在 $x_0>0$，使得对任意 $x>x_0$，

$$A-\varepsilon\le f(x)-g(x)\le A+\varepsilon$$

因此对于此 x_0，若 $x>x_0$，则 $|f(x)-g(x)|<1$. 从而 f 猥亵 g.

（9）错误，例如 $f(x)=1+\frac{1}{x+1}$，$g(x)=-\frac{1}{x+1}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=1$，但是由于 $|f(x)-g(x)|$ 恒大于 1，故 f 不可能猥亵 g. □

纯逻辑题，关键是理解“猥亵”与“骚扰”的定义。建议思考一下，若 f 骚扰（猥亵）g，则 f 与 g 的函数图像之间有何位置关系，这可以加深直观认识。

习题 20. 概念、记号同上题。设 $\left\{f_k \middle| k \geq 1\right\}$ 为任意给定的一列 $C[0,+\infty)$ 中的函数，证明：存在 $g \in C[0,+\infty)$，使得 g 骚扰所有的 f_k（也就是说，任意 $k \geq 1$，g 骚扰 f_k）。

证明. 我们具体构造一个满足题设的 g. 对于任意正整数 p，以及正整数 k，如果 $k \leq p$，我们定义正实数

$$x_{pk} := p + \frac{k-1}{p}$$

则我们得到点列 $\left\{x_{p,k} \middle| p \geq 1, 1 \leq k \leq p\right\}$（将这些数从小到大依次排列）；之后定义函数 $g \in C[0,+\infty)$ 如下：g 的函数图像是以 $(0,0)$ 为起点，顺次连接端点 $(x_{pk}, f_k(x_{pk}))$ 所得到的无穷折线段，那么 g 显然连续，并且 g 骚扰每一个 f_n. □

对于 $f_n(x) = n$ 为常函数的具体例子，请读者画出如此构造的 g 的函数图像作为练习。

习题 21. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $f(0) = f(1)$. 证明：对任意 $0 < \alpha < 1$，存在 $x \in (0,1]$，使得 $f(x) = f(\alpha x)$.

证明. 不妨 $f(0) = f(1) = 0$. 考虑 $[0,1]$ 上的连续函数

$$g(x) := f(x) - f(\alpha x)$$

只需要证明 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 上有零点。由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 连续，从而 $f(x)$ 能取到最大值或者最小值。不妨 f 的最值不在端点 $x = 0,1$ 取到（否则 f 是常函数）。

令 $\beta \in (0,1)$ 为 f 的一个最大值点，则 $g(\beta) = f(\beta) - f(\alpha\beta) \geq 0$. 如果再有 $g(1) \leq 0$，那么由 g 的介值性，$g(x)$ 在 $[\beta,1]$ 之中存在零点。

令 $\gamma \in (0,1)$ 为 f 的一个最小值点，则 $g(\gamma) = f(\gamma) - f(\alpha\gamma) \leq 0$. 如果再有 $g(1) \geq 0$，那么由 g 的介值性，$g(x)$ 在 $[\gamma,1]$ 之中存在零点。

综上所述，无论 $g(1) \leq 0$ 还是 $g(1) \geq 0$，$g(x)$ 在 $(0,1]$ 都存在零点。从而证毕。 □

习题 22. 设 f 为定义在 $[0,1]$ 上的函数，$f(0) = 1, f(1) = 0$，并且存在 $[0,1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得 $f(x) + g(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增。

（1）f 一定是连续函数吗？说明理由。

（2）证明：$f(x)$ 可以取到 $[0,1]$ 当中的任何值。

证明. **(1)**满足题设的 f 不一定是连续函数。例如 $f(x)=\begin{cases}-2333x+1 & x\in[0,1)\\ 0 & x=1\end{cases}$，则 $f(0)=1, f(1)=0$. 考虑连续函数 $g(x)=23333x$，则 $f(x)+g(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增——但是 $f(x)$ 并不是连续函数，因为在 $x=1$ 处间断。

（2） 由于 $f+g$ 单调递增，所以对任意 $x_0\in(0,1)$，左、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}(f(x)+g(x))$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}(f(x)+g(x))$ 都存在，并且

$$\lim_{x\to x_0^-}(f(x)+g(x))\le f(x_0)+g(x_0)\le \lim_{x\to x_0^+}(f(x)+g(x))$$

又因为 $g(x)$ 连续，从而由极限的运算性质可知

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)\le f(x_0)\le \lim_{x\to x_0^+}f(x) \tag{$*$}$$

对任意的 $x_0\in(0,1)$ 都成立。

现在我们要证明 $f(x)$ 的值域包含 $[0,1]$. 我们已经知道 $f(0)=1, f(1)=0$，即 $0,1$ 在 f 的值域中，故只需再证 $(0,1)$ 位于 f 的值域。反证法，假设存在 $y_0\in(0,1)$，使得 y_0 不位于 f 的值域，则考虑集合

$$\mathcal{L}:=\left\{x\in[0,1]\,\middle|\,\forall 0\le t\le x,\ f(t)>y_0\right\}$$

则显然 $0\in\mathcal{L}$，故 $\mathcal{L}\ne\varnothing$. 由确界存在原理，考虑 $\mathcal{L}$ 的上确界

$$x_0:=\sup\mathcal{L}$$

则 $0\le x_0\le 1$. 先断言 $x_0\in\mathcal{L}$. 这是因为，如果 $x_0\notin\mathcal{L}$，则由集合 $\mathcal{L}$ 的定义可知 $f(x_0)\le y_0$. 而又由集合 $\mathcal{L}$ 的定义，易知 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\ge y_0$，再注意 $(*)$ 式左边的不等号，从而有

$$y_0\ge f(x_0)\ge \lim_{x\to x_0^-}f(x)\ge y_0$$

这迫使 $f(x_0)=y_0$，这与 y_0 不在 f 的值域的假设矛盾。因此 $x_0\in\mathcal{L}$，特别地 $f(x_0)>y_0$.

再断言 $x_0=1$. 如果 $x_0<1$，则由上确界 x_0 的定义可知，存在一列 $\{x_n\}_{n\ge1}$，使得 $x_k\in(x_0,x_0+\frac{1}{k})$，$f(x_k)\le y_0$ 对任意 $k\ge1$ 成立，因此 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\le y_0$. 再注意 $f(x_0)>y_0$，从而与 $(*)$ 式矛盾。

因此有 $1=x_0\in\mathcal{L}$，特别地 $f(1)>y_0>0$，与 $f(1)=0$ 矛盾。上述一系列矛盾表明，最初的假设“存在 $y_0\in(0,1)$ 不位于 f 的值域”是错的，因此原命题得证。 □

习题 23. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数，$f(0)\ne f(1)$. 证明：存在 $x_0\in(0,1)$，使得 x_0 不是 f 的极值点。

证明. 不妨 $f(0) < f(1)$. 对于 $s \in (0,1)$，我们称 s 为函数 f 的“**阳光点**”，如果

$$\forall t \in [0,s), \quad f(t) < f(s)$$

一方面，对于任意 $y \in (f(0), f(1))$，由连续函数介值原理，集合

$$f^{-1}(y) := \left\{x \in (0,1) \middle| f(x) = y\right\}$$

非空，因此由确界存在原理，考虑 $s_y := \inf f^{-1}(y) \in (0,1)$，则由有关定义容易验证 $f(s_y) = y$，并且 s_y 为阳光点。也就是说，对每个 $y \in (f(0), f(1))$，我们都能至少找到一个相应的阳光点 s_y，并且显然不同的 y 对应不同的阳光点 s_y. 特别地，f 有不可数个阳光点。

另一方面，假设 $(0,1)$ 当中所有的点都是 f 的极值点，则阳光点只能是极大值点。因此对于 f 的任何一个阳光点 s，存在 s 的右邻域 $I_s := (s, s+\delta_s)$，使得对任意 $x \in I_s$，$f(x) \le f(s)$。从而区间 I_s 中的所有点都**不是**f 的阳光点。因此，对于 f 的任何两个不同的阳光点 s_1 与 s_2，$I_{s_1} \cap I_{s_2} = \varnothing$. 也就是说集合族

$$\mathcal{S} := \left\{I_s \middle| s \in (0,1)\text{是 } f \text{ 的阳光点}\right\}$$

是一族两两不交的开区间，从而是至多可数集。特别地，f 的阳光点至多可数个。

综上两方面，得到矛盾。此矛盾表明假设“$(0,1)$ 当中所有的点都是 f 的极值点”不正确，从而原命题得证。 □

习题 24. 计算极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\frac{e^{2x}-1}{2}\right)^{\sin 2x} - 1}{1-\cos x}$$

解. 等价无穷小量的运用：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\frac{e^{2x}-1}{2}\right)^{\sin 2x} - 1}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x \ln(1+\frac{e^{2x}-1}{2})} - 1}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x \ln(1+\frac{e^{2x}-1}{2})}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{2x\frac{e^{2x}-1}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{e^{2x}-1}{x} = 4
\end{aligned}$$

□

第 3 章　一元微分学

3.1　导数的基本概念与计算

习题 25. 对于任意给定的定义在 $x=0$ 某邻域的函数 $f(x)$，如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某去心邻域上可导，试判断下列命题的对错：

（1）如果 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = A$，则 $f'(0)$ 存在并且 $f'(0) = A$；

（2）如果 $f'(0)$ 存在并且 $f'(0) = A$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = A$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \infty$，则 $f'(0)$ 不存在；

（4）如果 $f'(0)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \infty$.

证明. （3）正确，（1）（2）（4）不正确。原因如下：

首先考虑函数 $f(x) := \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 满足题设（即在 $x=0$ 某邻域有定义，在 $x=0$ 某去心邻域可导）。注意这个 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$，但是 $f'(0)$ 不存在，这个反例说明了（1）不正确；再注意此时 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 \neq \infty$，从而（4）不正确。

再考虑另一个例子 $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$，则 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$；但是对于 $x \neq 0$，$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$，易知 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在。这个反例说明（2）不正确。

最后断言（3）正确。采用反证法，假设 $f'(0)$ 存在，令 $A := f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$. 于是由极限的定义知，存在 $\delta > 0$，使得对任意 $0 < |x| < \delta$ 都成立

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| \leq |A| + 1$$

于是对任意的 $0 < |x| < \delta$，有

$$\left| \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right| = \left| 2\frac{f(x)-f(0)}{x} - \frac{f(\frac{x}{2}) - f(0)}{\frac{x}{2}} \right| \leq 2\left| \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| + \left| \frac{f(\frac{x}{2}) - f(0)}{\frac{x}{2}} \right| \leq 3(|A|+1)$$

而由拉格朗日中值定理，存在介于 $\frac{x}{2}$ 与 x 之间的 ξ，使得 $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$.

以上论述表明，任意 $x > 0$，存在 ξ 使得 $0 < |\xi| < x$，并且 $|f'(\xi)| \le 3(|A|+1)$. 而这与 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \infty$ 的定义矛盾。 □

注记： 在（1）中，如果额外增加条件“$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续”，则此时（1）正确。这是因为此时有

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{1} = A$$

注意额外增加的条件保证了使用洛必达法则的合法性。

习题 26. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有定义，在 $x=0$ 处可导，并且满足 $f(0)=0$，$f'(0)=1$. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(\frac{1}{n^2}) + f(\frac{2}{n^2}) + \cdots + f(\frac{n}{n^2}) \right)$$

解. 对于足够大的 $n > 1$（使得 $[0, \frac{1}{n}]$ 位于 f 的定义域中），定义数列

$$\begin{aligned} a_n &:= f(\frac{1}{n^2}) + f(\frac{2}{n^2}) + \cdots + f(\frac{n}{n^2}) \\ b_n &:= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \end{aligned}$$

则有 $b_n = \frac{n+1}{2n}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$. 如果我们证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$，那么就有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}[(a_n-b_n)+b_n] = \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) + \lim_{n\to\infty} b_n = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

接下来我们证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = 0$，从而完成本题。对于任意 $\varepsilon > 0$，由于 $f'(0)=1$，从而存在 $N > 0$，使得对任意 $0 < x < \frac{1}{N}$，成立

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 1 \right| < \varepsilon$$

即 $|f(x)-x| < \varepsilon x$. 特别地，对任意 $n > N$ 以及任意 $1 \le k \le N$，成立

$$\left| f(\frac{k}{n^2}) - \frac{k}{n^2} \right| < \varepsilon \frac{k}{n^2}$$

因此对于任意 $n > N$，有

$$|a_n - b_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left(f(\frac{k}{n^2}) - \frac{k}{n^2} \right) \right| \le \sum_{k=1}^{n} \left| f(\frac{k}{n^2}) - \frac{k}{n^2} \right|$$

$$< \quad \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \varepsilon \frac{n+1}{2n} \leq \varepsilon$$

这表明 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. □

习题 27. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可导，$A \in \mathbb{R}$ 为常数。

（1）如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = A$，证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$.

（2）如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x) + xf'(x)\ln x = A$，证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$.

证明. （1）注意到

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(f(x)e^x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = A$$

又因为 $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$，从而由洛必达法则，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(f(x)e^x)'}{(e^x)'} = A$$

（2）与（1）完全类似，只需注意 $f(x) = \frac{f(x)\ln x}{\ln x}$. □

习题 28. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数，并且满足 $f(f(x)) = f(x)$. 证明：$f(x) \equiv x$.

证明. 令 $R(f)$ 为 f 的值域。由于 f 可微知 f 连续，从而 $R(f)$ 为 $\mathbb{R}$ 的连通子集。由 $f(f(x)) = f(x)$ 立刻得到，任意 $x \in R(f)$，成立 $f(x) = x$. 从而只需证明 $R(f) = \mathbb{R}$.

记 $A := \sup R(f)$ 为 f 的值域的上确界，断言 $A = +\infty$. 如果 $A < +\infty$，则由 $f(x) = x$ 在 $R(f)$ 上成立以及 f 的连续性可知 $f(A) = A$，特别地 $A \in R(f)$. 再注意 f 在 $x = A$ 可微，以及在 $x = A$ 的足够小的左邻域当中成立 $f(x) = x$，从而必然 $f'(A) = 1$. 因此存在 $\delta > 0$，使得 $f(A+\delta) \geq f(A) + \frac{1}{2}\delta > A$，这与 A 的定义矛盾。此矛盾表明 $A = +\infty$.

同理 $\inf R(f) = -\infty$. 从而由 $R(f)$ 的连通性可知 $R(f) = \mathbb{R}$。 □

习题 29. 已知函数 $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，计算 f 的 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$.

解. 注意到 $\sqrt{1-x^2}f(x)=\arcsin x$，两边求导有

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f(x)+\sqrt{1-x^2}f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\Rightarrow \qquad (1-x^2)f'(x)-xf(x)=1$$

对上式两边求 $(n-1)$ 阶导，注意使用对乘积求高阶导数的 Leibniz 法则，得到

$$(1-x^2)f^{(n)}(x)-2(n-1)xf^{(n-1)}(x)-2\binom{n-1}{2}f^{(n-2)}(x)-xf^{(n-1)}(x)-(n-1)f^{(n-2)}(x)=0$$

令 $x=0$，可以得到递推关系 $f^{(n)}(0)=(n-1)^2f^{(n-2)}(0)$，由此递推关系容易得到

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}[(2k)!!]^2 & n=2k+1\\ 0 & n=2k\end{cases}$$

□

3.2 泰勒公式与极限的计算

习题 30. 已知定义在 $0\in\mathbb{R}$ 附近的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，并且 $f'(0)$ 存在，试计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}$$

解. 因为 $f(0)=0$ 且 $f'(0)$ 存在，所以对于 $x\to 0$，有

$$f(x)=xf'(0)+o(x)$$

因此使用等价无穷小代换，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)f'(0)}{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}\\ &= \lim_{x\to 0}f'(0)\frac{1}{1+\cos x\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}}\\ &= \frac{f'(0)}{1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}}\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-2x^2+o(x^3)}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2+o(x^3))}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

从而原式 $=\frac{1}{3}f'(0)$. □

习题 31. 计算极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{e^x-1}-\sin x+2\cos x-3}{\tan x-\sin x}$$

解. 首先注意到 $x\to 0$ 时

$$\begin{aligned}\tan x-\sin x &= \sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}-1\right)\\ &= \left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

即得等价无穷小量 $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3\quad(x\to 0)$. 再注意到

$$\begin{aligned}e^{e^x-1} &= e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\\ &= 1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2\\ &\quad+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o(x^3)\\ &= 1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}(x^2+x^3)+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\\ &= 1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}e^{e^x-1}-\sin x+2\cos x-3 &= \left(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)+2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-3+o(x^3)\\ &= x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{e^x-1}-\sin x+2\cos x-3}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{1}{2}x^3}=2$$

□

习题 32. 已知实数 α, β 满足

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\left(1-(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})\right)=\beta$$

并且 $\beta\neq 0$. 求 α 与 β.

解. 注意到当 $x\to+\infty$ 时，有泰勒展开 $\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})$，从而有

$$\begin{aligned}1-(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x}) &= 1-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right)\\ &= 1-\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)\\ &= -\frac{1}{12x^2}+o(\frac{1}{x^2})\end{aligned}$$

因此立刻得到 $\alpha=2, \beta=-\frac{1}{12}$. □

习题 33. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{2})^n}{n^2}$$

解. 只需先计算其对数的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\ln(2\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{2})-2\ln n\right]$. 注意到

$$n\ln(2\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{2})-2\ln n=\ln 2+n\ln\left[1+2\left(\sqrt[n]{\frac{n}{2}}-1\right)\right]-2\ln n$$

$$\sqrt[n]{\frac{n}{2}}-1=e^{\frac{1}{n}\ln\frac{n}{2}}-1=\frac{1}{n}\ln\frac{n}{2}+\frac{1}{2n^2}\ln^2\frac{n}{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\ln^2\frac{n}{2}\right)\qquad(n\to+\infty)$$

因此有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[n\ln(2\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{2})-2\ln n\right] &= \lim_{n\to+\infty}\left[\ln 2+n\ln\left(1+\frac{2}{n}\ln\frac{n}{2}+\frac{1}{n^2}\ln^2\frac{n}{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\ln^2\frac{n}{2}\right)\right)-2\ln n\right]\\ &= \ln\frac{1}{2}+\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\ln^2\frac{n}{2}+o\left(\frac{1}{n}\ln^2\frac{n}{2}\right)\right]=\ln\frac{1}{2}\end{aligned}$$

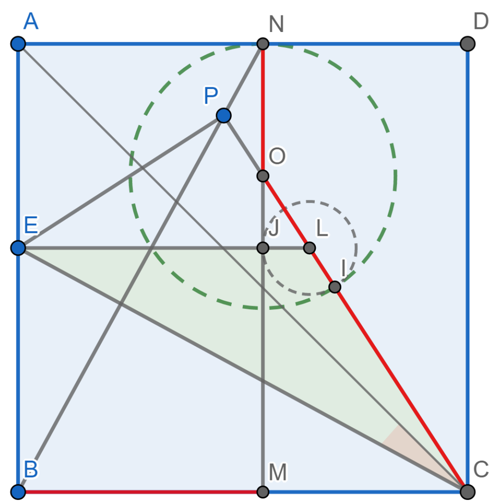
因此原极限 $=\exp\left(\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. □

习题 34. 考虑平面上的边长为 1 的正方形 $ABCD$，E 为线段 AB 上的任意一点，点 P 与点 B 关于线段 CE 对称，直线 BP 交线段 AD 于 N，过 N 作 BC 的垂线，垂足为 M. 过 E 作 MN 的垂线，垂足为 J，直线 EJ 交 PC 于 L. 记 O 为 MN 与 PC 的交点；以 O 为圆心，ON 为半径作圆，该圆交 OC 于 I.

（1）证明：$LJ = LI$，并且 $BM + ON = OC$;

（2）记 CE 与 CA 所夹的锐角为 φ，线段 ON 的长度为 R，线段 LI 的长度为 r；将 R 与 r 视为 φ 的函数。证明当 $\varphi \to 0^+$ 时有等价无穷小

$$R(\varphi) \sim \varphi, \qquad r(\varphi) \sim 2\varphi^2$$



习题34示意图

证明. 记 $\angle BCE = \theta$，则 $\theta = \frac{\pi}{4} - \varphi$（$\varphi$ 的定义见第 2 问），以及 $\angle OCM = 2\theta$.

（1）： 直接计算可知 $BE = \tan\theta$，从而 $CM = 1 - \tan\theta$，所以

$$\begin{aligned} OC &= \frac{CM}{\cos 2\theta} = \frac{1-\tan\theta}{\cos 2\theta} \\ ON &= 1 - OM = 1 - OC\sin 2\theta = 1 - (1-\tan\theta)\tan 2\theta \end{aligned}$$

因此有

$$OC - ON - BM = \frac{1-\tan\theta}{\cos 2\theta} - (1 - (1-\tan\theta)\tan 2\theta) - \tan\theta$$

$$\begin{aligned}
&\xlongequal{t:=\tan\theta} \quad \frac{1-t}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} - \left(1 - \frac{(1-t)\cdot 2t}{1-t^2}\right) - t \\
&= \quad \frac{1+t^2}{1+t} - \frac{1-t}{1+t} - t = 0
\end{aligned}$$

这就证明了 $OC = ON + BM$. 再注意到 $ON = OI$，$BM = EJ$，从而

$$OC = ON + BM = OI + EJ$$

因此 $EJ = CI$. 又由 $\angle LCE = \angle ECB = \angle LEC$ 得到 $LE = LC$，因此 $LE - EJ = LC - CI$，即 $LJ = LI$.

(2)：直接计算得

$$\begin{aligned}
R &= 1 - (1-\tan\theta)\tan 2\theta = 1 - \left[1 - \tan(\frac{\pi}{4} - \varphi)\right]\tan(\frac{\pi}{2} - 2\varphi) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi}\right)\frac{1-\tan^2\varphi}{2\tan\varphi} = \tan\varphi \sim \varphi
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
r &= LI = LJ = EL - EJ = \frac{EC}{2\cos 2\theta} - BM \\
&= \frac{1}{1+\cos 2\theta} - \tan\theta = \frac{1}{1+\sin 2\varphi} - \frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi} \\
&= \frac{2\tan^2\varphi}{(1+\tan\varphi)^2} \sim 2\varphi^2
\end{aligned}$$

□

3.3 隐函数与参数方程的求导

习题 35. 设 $0 < \varepsilon < 1$，函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - \varepsilon\sin y = x$ 决定，试求 $y''(x)$.

证明. 将方程两边对 x 求导，得 $y' - \varepsilon\cos y \cdot y' = 1$，从而 $y' = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$. 再求导，得

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-\varepsilon\cos y} = -\frac{\varepsilon\sin y\cdot y'}{(1-\varepsilon\cos y)^2} = -\frac{\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$$

□

习题 36. 设函数 $y=\varphi(x)$ 定义在 $x=0$ 附近，在 $x=0$ 处可导，且满足方程

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2} \tag{$*$}$$

其中 $a,b,c>0$ 为常数。证明：当 $x\to 0$ 时，成立

$$\varphi(x)=a^{-4}c^2x^3+o(x^3)$$

证明. 考虑广义极坐标换元 $\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$，则约束方程 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$ 化为 $r^2=\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta$，因此函数 $y(x)$ 具有参数表示

$$\begin{cases} x=a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{3}{2}}\theta \\ y=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{-1}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta \end{cases}$$

特别地，$\theta\to 0^+$ 时有等价无穷小

$$x\sim a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\theta^{\frac{1}{2}} \tag{$**$}$$

注意由 $(*)$ 的对称性可知隐函数 $y=y(x)$ 为偶函数，由 $y'(0)$ 存在可知 x 在 0 附近时，参数 θ 在 0 附近（而不是 $\frac{\pi}{2}$ 附近）从而我们只需考虑 $y(x)$ 在参数 $\theta=0$ 处的右导数即可。我们只需要求出 $\left.\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=0}$，之后用泰勒公式即可。

首先 $y(0)=0$，从而由定义，

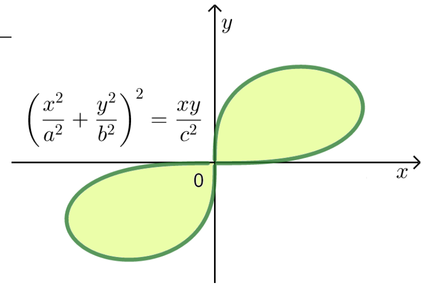
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{y}{x}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{-1}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta}{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{3}{2}}\theta}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{b}{a}\tan\theta=0$$

而对于 $x=0(\theta=0)$ 附近的点，由参数方程求导法则，容易得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}=a^{-1}b\frac{\frac{3}{2}\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{3}{2}}\theta-\frac{1}{2}\sin^{\frac{5}{2}}\theta\cos^{-\frac{1}{2}}\theta}{\frac{1}{2}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{5}{2}}\theta-\frac{3}{2}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta} \\ &= a^{-1}b\frac{3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta}\sim 3a^{-1}b\theta \qquad (\theta\to 0^+)\end{aligned}$$

从而由二阶导数的定义直接计算，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{y'(x)}{x}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{3a^{-1}b\theta}{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\theta^{\frac{1}{2}}}=0$$



图：隐函数 $y=y(x)$ 的图像为原点附近“贴近” x-轴的那一支

我们继续计算 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的三阶导数。在 $x=0(\theta=0)$ 附近，有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\\
&= a^{-1}b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)\cdot 2a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}c\cdot\frac{\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta}{\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta}\\
&= 2a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}c\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta\times\\
&\quad\Bigg(\frac{(3\cos^3\theta-6\sin^2\theta\cos\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)(\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)}{(\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)^3}\\
&\quad-\frac{(-3\cos^2\theta\sin\theta-6\sin\theta\cos^2\theta+3\sin^3\theta)(3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta)}{(\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)^3}\Bigg)\\
&= 6a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}c\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta\times\frac{(\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)^2+(\sin^3\theta-3\sin\theta\cos^2\theta)^2}{(\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)^3}\\
&\sim 6a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}c\theta^{\frac{1}{2}}\qquad(\theta\to 0^+)
\end{aligned}$$

从而直接由三阶导数的定义，有

$$y'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{y''(x)-y''(0)}{x}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{6a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}c\theta^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\theta^{\frac{1}{2}}}=6a^{-4}c^2$$

因此由 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开，

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{1}{2}y''(0)x^2+\frac{1}{6}y'''(0)x^3+o(x^3)=a^{-4}c^2x^3+o(x^3)$$

□

3.4 微分中值定理

习题 37. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 处处可导。

（1）是否对于每个 $x_0 \in (a,b)$，都一定存在 $\xi,\eta \in (a,b)$，使得 $\xi \neq \eta$，并且 $\frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} = f'(x_0)$？

（2）对于 $x_0 \in (a,b)$，如果 f 在 x_0 处二阶可导，并且 $f''(x_0) \neq 0$，证明：存在 $\xi,\eta \in (a,b)$，使得 $\xi \neq \eta$，并且

$$\frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} = f'(x_0)$$

证明. **(1)**这不一定。例如 $(a,b) = (-1,1)$，$x_0 = 0$，考虑函数 $f(x) = x^3$，则 $f'(x_0) = 0$；但是注意到对任意的 $\xi,\eta \in (-1,1)$，如果 $\xi \neq \eta$，那么一定有 $f(\xi) \neq f(\eta)$，从而

$$\frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} \neq 0 = f'(x_0)$$

因此不存在如此的 ξ,η.

(2)此时，不妨 $f''(x_0) > 0$（若 $f''(x_0) < 0$，则我们考虑 $-f(x)$，完全类似）。我们定义新的函数

$$g(x) := f(x) - f'(x_0)x$$

则 $g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$，以及 $g''(x_0) = f''(x_0) > 0$. 因此，x_0 是函数 $g(x)$ 的严格极小值点。也就是说，存在 x_0 的邻域 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq (a,b)$，使得 $g(x) > g(x_0)$ 对任何满足 $0 < |x-x_0| < \varepsilon$ 的 x 都成立。记

$$M_- := g(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}) \qquad M_+ := g(x_0 + \frac{\varepsilon}{2})$$

则 M_- 与 M_+ 都大于 $g(x_0)$，从而 $\min\{M_-, M_+\} > g(x_0)$. 之后，分别在区间 $(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \frac{\varepsilon}{2})$ 当中对 $g(x)$ 使用连续函数介值原理，可知存在 $\xi \in (x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0)$ 以及 $\eta \in (x_0, x_0 + \frac{\varepsilon}{2})$，使得

$$g(\xi) = g(\eta) = \frac{\min\{M_-, M_+\} + f(x_0)}{2}$$

所以有

$$\frac{g(\xi)-g(\eta)}{\xi-\eta} = 0 = g'(x_0)$$

易验证上式等价于

$$\frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} = f'(x_0)$$

从而证毕。 $\square$

习题 38. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，并且 $f(0)=f(1)$，给定常数 $\alpha\in(0,1)$. 在习题*21*中我们已经证明了存在 $x\in(0,1]$ 使得 $f(x)=f(\alpha x)$. 现在，若再假定 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 可导，并且对任意 $x\neq y\in(0,1)$ 成立 $f'(x)\neq\alpha f'(y)$. 证明：使得 $f(x)=f(\alpha x)$ 的 $x\in(0,1]$ 是唯一的。

证明. 反证法，假设存在 $x_1\neq x_2\in(0,1]$ 使得 $f(x_i)=f(\alpha x_i)\,,(i=1,2)$. 不妨 $x_1<x_2$.

Case1：如果 $x_1\leq\alpha x_2$，则开区间 $(\alpha x_1,x_1)$ 与 $(\alpha x_2,x_2)$ 不交。由罗尔定理，取 $\eta_1\in(\alpha x_1,x_1)$ 以及 $\eta_2\in(\alpha x_2,x_2)$，使得 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$. 显然 $\eta_1\neq\eta_2$，但是 $f'(\eta_1)=0=\alpha f'(\eta_2)$，从而与题设矛盾。

Case2：如果 $x_1>\alpha x_2$，则有 $0<\alpha x_1<\alpha x_2<x_1<x_2\leq 1$. 此时令 $f(x_i)=f(\alpha x_i)=A_i\,,(i=1,2)$，则由拉格朗日中值定理：

$$\begin{aligned}\exists\xi\in(x_1,x_2),\qquad & f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{A_2-A_1}{x_2-x_1}\\ \exists\eta\in(\alpha x_1,\alpha x_2),\qquad & f'(\eta)=\frac{f(\alpha x_2)-f(\alpha x_1)}{\alpha x_2-\alpha x_1}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{A_2-A_1}{x_2-x_1}\end{aligned}$$

则 $\xi\neq\eta$，但是 $f'(\xi)=\alpha f'(\eta)$，从而与题设矛盾。综上证毕。 □

习题 39. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$. 证明：存在 $\xi\in[0,1]$ 以及 $\eta\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$$

证明. 令 $g(x):=f(x)-\frac{1}{2}x$，则 $g(0)=g(1)=0$. 我们只需要证明：存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得

$$g(\xi)-\frac{1}{2}\xi=\eta-g'(\eta)-\frac{1}{2}$$

Case1 如果存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $-\frac{1}{2}<\eta-g'(\eta)-\frac{1}{2}<0$，则注意到 $g(0)-\frac{1}{2}\cdot 0=0$ 以及 $g(1)-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}$，从而对连续函数 $x\mapsto g(x)-\frac{1}{2}x$ 使用介值原理即可找到满足题设的 ξ.

Case2 如果 Case1 不成立，那么只可能有以下两种情况：

$$\begin{cases}\forall x\in(0,1),\ x-g'(x)-\frac{1}{2}\leq-\frac{1}{2} & (2.1)\\ \forall x\in(0,1),\ x-g'(x)-\frac{1}{2}\geq 0 & (2.2)\end{cases}$$

如果 (2.1) 成立，即 $g'(x)\geq x$ 对任意 $x\in(0,1)$ 成立；但是另一方面对 $g(x)$ 使用罗尔定理，存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $g'(x_0)=0<x_0$，产生矛盾，即 (2.1) 不可能发生。

若 (2.2) 成立，即 $g'(x) \le x - \frac{1}{2}$ 对任意 $x \in (0,1)$ 成立，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x) - \frac{x^2 - x}{2}\right) \le 0 \qquad \Rightarrow \qquad g(x) \le \frac{x^2 - x}{2}$$

特别地 $g(1) \le \frac{1^2-1}{2} = 0$. 又因为 $g(0) = 0$，上述不等式取到等号迫使 $g(x) = \frac{x^2-x}{2}$. 此时取 $\xi = 0$，任取 $\eta \in (0,1)$ 即可满足题设。

综上，证毕。 □

习题 40. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 二阶可导，$f(0) = f'(0)$，并且 $f(\frac{1}{2}) = 0$. 证明：存在 $\xi \in (0,\frac{1}{2})$，使得

$$f''(\xi) = \frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$$

证明. 考虑函数

$$g(x) := (1-2x)f'(x) - f(x)$$

则 $g(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 可导，并且 $g(0) = f'(0) - f(0) = 0$ 以及 $g(\frac{1}{2}) = 0 \times f'(0) - f(\frac{1}{2}) = 0$. 从而由罗尔定理，存在 $\xi \in (0,\frac{1}{2})$ 使得 $g'(\xi) = 0$，即 $-2f'(\xi) + (1-2\xi)f''(\xi) - f'(\xi) = 0$，整理得

$$f''(\xi) = \frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$$

□

习题 41. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0) = f(1)$，并且对任意 $x \in [0,1]$ 成立 $|f''(x)| \le A$，其中 A 为常数。证明：

$$|f'(x)| \le \frac{A}{2}, \quad \forall x \in [0,1]$$

证明. 对于任意 $x \in [0,1]$，分别将 $f(1)$ 与 $f(0)$ 在 x 处作泰勒展开，有

$$\begin{aligned} f(1) &= f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(1-x)^2 \\ f(0) &= f(x) + f'(x)(-x) + \frac{1}{2}f''(\eta)(-x)^2 \end{aligned}$$

其中 $\xi \in [x,1]$ 以及 $\eta \in [0,x]$. 将以上两式相减，注意 $f(0) = f(1)$，整理得

$$f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(1-x)^2 - \frac{1}{2}f''(\eta)(-x)^2 = 0$$

因此有

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \frac{1}{2}\left|f''(\xi)(1-x)^2 - f''(\eta)x^2\right| \le \frac{1}{2}\Big(|f''(\xi)|(1-x)^2 + |f''(\eta)|x^2\Big)\\ &\le \frac{A}{2}((1-x)^2+x^2) \le \frac{A}{2}\end{aligned}$$

□

习题 42. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 二阶可导，并且 $f''(x)$ 有界。证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. 此外，如果去掉“$f''(x)$ 有界”的条件，那么要证明的结论还一定成立吗？

证明. 由于 $f''(x)$ 有界，从而存在 $M>0$，使得 $|f''(x)| \le M$ 对任意 $x \ge 0$ 成立。对任意 $\varepsilon > 0$，记 $h := \frac{2\varepsilon}{3M}$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，因此存在 $N>0$，使得对任意 $x > N$ 都成立 $|f(x)| \le \frac{h}{3}\varepsilon$. 因此对于任意 $x > N$，由泰勒公式得

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi)$$

其中 $\xi \in (x, x+h)$. 因此有

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \left|\frac{1}{h}\Big(f(x+h)-f(x)\Big) - \frac{1}{2}hf''(\xi)\right|\\ &\le \frac{1}{h}\Big(|f(x+h)|+|f(x)|\Big) + \frac{1}{2}h|f''(\xi)|\\ &\le \frac{1}{h}\Big(\frac{h}{3}\varepsilon + \frac{h}{3}\varepsilon\Big) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\varepsilon}{3M}M\\ &= \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

如果去掉条件“$f''(x)$ 有界”的条件，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ 未必成立。例如考虑函数

$$f(x) = \frac{1}{x+1}\sin(x^2)$$

容易验证 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 二阶可导，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，但是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在。 □

习题 43. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 二阶可导，并且成立

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=2,$$

（1）证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$；
（2）证明：存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f(\eta)=f''(\eta)$.

证明. 首先注意 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 连续，从而容易知道 $f(0)=f(1)=0$，以及 $f'(0)=1,f'(1)=2$. 再由洛必达法则，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$，从而 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续。同理 $f'(x)$ 也在 $x=1$ 连续。又因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 二阶可导，所以综上可知 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 连续。

（1） 由极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1$ 的定义可知，存在 $0<\delta<1$，使得对任意 $x\in(0,\delta)$，都有 $f(x)>\frac{1}{2}x$. 特别地，存在 $x_1\in(0,\frac{1}{2})$，使得 $f(x_1)>0$. 同理由 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=2$ 可知，存在 $x_2\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(x_2)<0$. 因此由连续函数介值原理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$.

（2） 反证法。如果不存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f(\eta)=f''(\eta)$，则由 f'' 与 f 的介值性可知，要么 $f''(x)>f(x)$ 在 $(0,1)$ 恒成立，要么 $f''(x)<f(x)$ 在 $(0,1)$ 恒成立。

（2.1） 如果 $f''(x)>f(x)$，则由之前所述的 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性可知存在（$x=0$ 附近的）$y_1\in(0,1)$，使得 $\begin{cases}f(y_1)>0\\ f'(y_1)>0\end{cases}$. 考虑集合

$$\mathcal{S}:=\left\{x\in[y_1,1]\,\middle|\,f(t)\geq f(y_1),\ \forall t\in[y_1,x]\right\}$$

则由 $f(x)$ 的连续性，$\mathcal{S}$ 为 $[y_1,1]$ 的闭子集。又 $y_1\in\mathcal{S}$，从而 $\mathcal{S}$ 非空。

再断言 $\mathcal{S}$ 是 $[y_1,1]$ 的开子集。对于任意 $x\in\mathcal{S}$（不妨 $x\neq1$），则 $f(t)\geq f(y_1)>0$ 在 $[y_1,x]$ 成立，又因为 $f''>f$，从而 $f''(t)>f(t)>0$ 在 $[y_1,x]$ 成立，从而 $f'(t)$ 在 $[y_1,x]$ 单调递增，特别地 $f'(x)\geq f'(y_1)>0$. 从而存在 $\delta>0$，使得 $f(t)\geq f(x)\geq f(y_1)$ 在 $t\in[x,x+\delta)$ 成立。这就证明了 $\mathcal{S}$ 为 $[y_1,1]$ 的开子集。从而 $\mathcal{S}$ 非空，且在 $[y_1,1]$ 中既开又闭，因此由 $[y_1,1]$ 的连通性，必有 $\mathcal{S}=[y_1,1]$，特别地 $1\in\mathcal{S}$，从而 $f(1)\geq f(y_1)>0$，与 $f(1)=0$ 矛盾。

(2.2) 如果 $f''(x)<f(x)$ 在 $(0,1)$ 成立，则由 f' 在 $x=1$ 的连续性，存在（$x=1$ 附近的）$y_2\in(0,1)$，使得 $\begin{cases}f(y_2)<0\\ f'(y_2)>0\end{cases}$. 与上一种情况类似，考虑集合

$$\mathcal{T}:=\left\{x\in[0,y_2]\,\middle|\,f(t)\leq f(y_2),\ \forall t\in[x,y_2]\right\}$$

完全类似的方法可说明 $\mathcal{T}=[0,y_2]$，从而 $0\in\mathcal{T}$，从而 $f(0)\leq f(y_2)<0$，与 $f(0)=0$ 矛盾。

以上矛盾可知，必存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f(\eta)=f''(\eta)$，从而证毕。 $\square$

这种做法适用于一般的 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = A > 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = B > 0 \end{cases}$ 的情形，而此题是 $A=1, B=2$ 的特例。对于 $A=1, B=2$ 的特殊情形（事实上是 $\frac{B}{e} < A < Be$ 的情形），我们有**奇技淫巧**的做法如下：

第（2）问的另证. 取辅助函数 $\begin{cases} g(x) := e^{-x}(f(x)+f'(x)) \\ h(x) := e^{x}(f(x)-f'(x)) \end{cases}$，则由之前论述已知 g 与 h 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导。如果存在 $\eta \in (0,1)$ 使得 $g'(\eta)=0$ 或者 $h'(\eta)$=0，那么如此的 η 即为所求。现在，采用反证法，假设对任意 $x\in(0,1)$，$g'(x)\neq 0$ 且 $h'(x)\neq 0$。

由于对任意 $x\in(0,1)$，$g'(x)=e^{-x}(f''(x)-f(x))\neq 0$，则由导函数的介值性，$g'(x)$ 恒正或者恒负。由拉格朗日中值定理，存在 $y_1\in(0,1)$ 使得 $g'(y_1)=g(1)-g(0)=\frac{2}{e}-1<0$，因此 $g'(x)<0$ 在 $(0,1)$ 成立，从而得出 $f''(x)<f(x)$ 在 $(0,1)$ 成立。类似地，由于对任意 $x\in(0,1)$，$h'(x)=e^{x}(f(x)-f''(x))\neq 0$，注意 $h(1)-h(0)=(-2e)-(-1)<0$，从而必有 $h'(x)$ 在 $(0,1)$ 恒负，这表明 $f(x)<f''(x)$ 在 $(0,1)$ 成立。

因此得出对任意 $x\in(0,1)$，$f''(x)<f(x)$ 且 $f(x)<f''(x)$，这是自相矛盾的。从而证毕。 □

3.5 用导数研究函数的单调性与最值

习题 44. 求平面曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上的点 A，使得该曲线在点 A 处的法线被该曲线所截得线段的长度最短。

证明. 对于曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上的一点 $A:(x_0,\frac{1}{2}x_0^2)$，由关于 y 轴的对称性，不妨 $x_0>0$. 容易求出该曲线在 A 处的法线 ℓ 的方程为

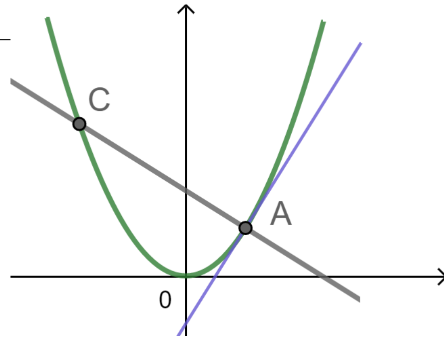
$$y-\frac{1}{2}x_0^2=-\frac{1}{x_0}(x-x_0)$$

记 ℓ 与该曲线的另一个交点为 $C:(x_1,y_1)$，则联立曲线方程与法线 ℓ 的方程，可知 x_1 满足方程

$$x^2+\frac{2}{x_0}x-(x_0^2+2)=0$$

此方程的两个根为 x_0 与 x_1，由韦达定理有 $x_0+x_1=-\frac{2}{x_0}$，从而点 C 的横坐标 $x_1=-\frac{2}{x_0}-x_0$. 从而线段 AC 的长度

$$l(x_0)=|x_1-x_0|\sqrt{1+\frac{1}{x_0^2}}=2\sqrt{1+x_0^2}\left(1+\frac{1}{x_0}\right)$$



习题44示意图

只需求 $x_0>0$ 时 $l(x_0)$ 的最小值点。求导得

$$l'(x_0)=2\left(\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}\frac{1+x_0^2}{x_0^2}-2\frac{\sqrt{1+x_0^2}}{x_0^3}\right)=\frac{2\sqrt{1+x_0^2}}{x_0^3}(x_0^2-2)$$

从而 $x_0=\sqrt{2}$ 为驻点，且易验证为 $x_0>0$ 当中的最小值点。因此 $(\sqrt{2},1)$ 为所求；由对称性，$(-\sqrt{2},1)$ 也为所求。因此 A 的坐标为 $(\pm\sqrt{2},1)$. □

第 4 章　一元积分学

4.1　不定积分的计算

习题 45. 计算不定积分

$$\int e^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$$

证明. 考虑换元 $x=t^3$，从而有

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x &= \int e^t\mathrm{d}(t^3)=3\int t^2\mathrm{d}e^t=3\left(t^2e^t-\int e^t\mathrm{d}t^2\right)\\ &= 3t^2e^t-6\int t\mathrm{d}e^t=3t^2e^t-6\left(te^t-\int e^t\mathrm{d}t\right)\\ &= (3t^2-6t+6)e^t+C\\ &= (3x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+6)e^{\sqrt[3]{x}}+C\end{aligned}$$

□

习题 46. 计算不定积分:

$$\int \cos 2x\cos 3x\cos 4x\mathrm{d}x$$

解. 注意使用三角函数的积化和差公式 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$，从而有

$$\begin{aligned}\int \cos 2x\cos 3x\cos 4x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos x)\cos 4x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int(\cos 9x+\cos x+\cos 5x+\cos 3x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{20}\sin 5x + \frac{1}{36}\sin 9x + C$$

□

习题 47. 计算不定积分：

$$\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$$

解. 考虑换元 $u = \sqrt{x-1}$，有

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{u\arctan u}{u^2+1}2u\mathrm{d}u \\
= \ & 2\int \arctan u\mathrm{d}u - 2\int \frac{\arctan u}{u^2+1}\mathrm{d}u \\
= \ & 2\left(u\arctan u - \int \frac{u}{u^2+1}\mathrm{d}u\right) - \arctan^2 u + C \\
= \ & 2u\arctan u - \ln|u^2+1| - \arctan^2 u + C \\
= \ & 2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1} - \ln|x| - \arctan^2\sqrt{x-1} + C
\end{aligned}$$

□

习题 48. 计算不定积分：

$$\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$$

解. 我们首先注意到

$$\begin{aligned}
\int x\arctan x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\left(x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}[(1+x^2)\arctan x - x] + C
\end{aligned}$$

注意利用上述结果，我们有

$$\begin{aligned}
\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}[(1+x^2)\arctan x - x] \\
&= \frac{1}{2}\left([(1+x^2)\arctan x - x]\ln(1+x^2) - \int\left(2x\arctan x - \frac{2x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(1+x^2)\arctan x - x}{2}\ln(1+x^2) - \int x\arctan x\mathrm{d}x + \int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(1+x^2)\arctan x - x}{2}[\ln(1+x^2)-1] + x - \arctan x + C
\end{aligned}
$$

□

4.2 定积分的计算

习题 49. 用定积分的定义证明 *Dirichlet* 函数

$$
D(x) := \begin{cases} 1 & \text{若 } x \text{ 是有理数} \\ 0 & \text{若 } x \text{ 是无理数} \end{cases}
$$

在闭区间 $[0,1]$ 上不可积。

证明. 注意到函数 $D(x)$ 的值域为 $\{0,1\}$，并且满足性质：对任何开区间 $(a,b) \subseteq [0,1]$，存在 $\xi,\eta \in (a,b)$，使得 $D(\xi)=0$ 以及 $D(\eta)=1$（也就是说函数值为 0,1 的点都在定义域中稠密）。

注意到对区间 $[0,1]$ 的任何一个划分

$$
0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1
$$

则对任意 $k=1,2,...,N$，总可以在 (x_{k-1},x_k) 当中取一点 ξ_k，使得 $D(\xi_k)=0$，于是有

$$
\sum_{k=0}^{N}(x_k - x_{k-1})D(\xi_k) = 0
$$

于是由定积分的定义可知，如果 $\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x$ 存在，则必有 $\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x = 0$. 但是另一方面，同样也总可以在 (x_{k-1},x_k) 当中取标记点 η_k 使得 $D(\eta_k)=1$，因此

$$
\sum_{k=0}^{N}(x_k - x_{k-1})D(\eta_k) = \sum_{k=0}^{N}(x_k - x_{k-1})\cdot 1 = 1
$$

从而推出：如果 $\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x$ 存在，则必有 $\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x = 1$.

综上，如果 $\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x = 0$ 并且 $\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x = 1$，自相矛盾。因此 $\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x$ 不存在，即 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 不可积。 □

习题 50. 回顾我们在习题18当中定义的 $[0,1]$ 上的函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & 若x=\frac{p}{q}，其中\ p\ 与\ q\ 为互素的整数，且q\geq 0\\ 0 & 若\ x\ 为无理数\end{cases}$$

请用定积分的定义直接证明：$R(x)$ 在 $[0,1]$ 上是可积的，并且

$$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$$

证明. 对任意 $\varepsilon>0$，注意到集合 $A:=\left\{x\in[0,1]\middle|R(x)\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ 是有限集，记 A 的元素个数为 N，取 $\delta:=\frac{\varepsilon}{2N}$。则对于 $[0,1]$ 的任何带标记点的分割

$$(\pi,\xi):0=x_0<x_1<\cdots<x_M=1$$
$$\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ \forall 1\leq i\leq M$$

如果 $\max\left\{|x_i-x_{i-1}|\middle|1\leq i\leq M\right\}<\delta$，那么注意到集合划分

$$\{1,2,...,M\}=\left\{1\leq i\leq M\middle|[x_{i-1},x_i]\cap A\neq\varnothing\right\}\bigsqcup\left\{1\leq i\leq M\middle|[x_{i-1},x_i]\cap A=\varnothing\right\}$$

将上式右边的两个集合分别记为 B_1,B_2，则显然 B_1 的元素个数 $\leq A$ 的元素个数 $(=N)$. 再注意到 $0\leq R(x)\leq 1$ 总成立，从而我们对函数 $R(x)$ 关于划分 (π,ξ) 的黎曼和有如下估计：

$$\begin{aligned}0\leq\sum_{i=1}^{M}(x_i-x_{i-1})R(\xi_i) &= \sum_{i\in B_1}(x_i-x_{i-1})R(\xi_i)+\sum_{i\in B_2}(x_i-x_{i-1})R(\xi_i)\\ &\leq \sum_{i\in B_1}\delta\cdot 1+\sum_{i\in B_2}(x_i-x_{i-1})\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq |B_1|\cdot\delta+1\cdot\frac{\varepsilon}{2}\leq N\cdot\frac{\varepsilon}{2N}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了 $R(x)$ 为 $[0,1]$ 上的可积函数，并且 $\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$. □

习题 51. 对于常数 $a>1$，计算定积分：

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}\mathrm{d}x$$

解. 考虑三角换元 $x=\sin t$，则

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{a-\sin t}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{a-\sin t}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t+a+\frac{1-a^2}{a-\sin t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \pi a+(1-a^2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a-\sin t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

使用万能代换 $u=\arctan\frac{t}{2}$，有

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a-\sin t}\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{a-\frac{2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{2}{a}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(u-\frac{1}{a}\right)^2+1-\frac{1}{a^2}}\mathrm{d}u\\ &= \frac{2}{a}\int_{-1-\frac{1}{a}}^{1-\frac{1}{a}}\frac{1}{v^2+\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}\mathrm{d}v\\ &= \frac{2}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}\arctan\frac{v}{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}\Bigg|_{-1-\frac{1}{a}}^{1-\frac{1}{a}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(\arctan\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}+\arctan\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\end{aligned}$$

从而：

$$原式=\pi a+(1-a^2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a-\sin t}\mathrm{d}t=\pi a+(1-a^2)\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}=\frac{\pi}{a+\sqrt{a^2-1}}$$

□

注记 52. 我们可以利用对称性技巧处理积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a-\sin t}\mathrm{d}t$，使得简化计算。考虑换元 $t\mapsto -t$，易知

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a-\sin t}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin t}\mathrm{d}t$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a-\sin t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{a-\sin t}+\frac{1}{a+\sin t}\right)\mathrm{d}t\\ &= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2-\sin^2 t}\mathrm{d}t=a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2-\frac{u^2}{1+u^2}}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\\ &= \frac{a}{a^2-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2+\frac{a^2}{a^2-1}}\mathrm{d}u=\frac{a}{a^2-1}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\pi=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\end{aligned}$$

习题 53. 设常数 $d > r > 0$，计算定积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{d + r\cos\theta} \mathrm{d}\theta$$

解. 直接考虑万能代换 $t = \tan\frac{\theta}{2}$，得到

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{d + r\cos\theta} \mathrm{d}\theta &= 2\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{d + r\cos\theta} \mathrm{d}\theta \xlongequal{t=\tan\frac{\theta}{2}} 2\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{d + r\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \mathrm{d}t \\
&= 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{(d-r)t^2 + (d+r)} \frac{1-t^2}{1+t^2} \mathrm{d}t \\
&= \frac{8}{d-r}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \frac{d+r}{d-r}} \cdot \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t - \frac{4}{d-r}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \frac{d+r}{d-r}} \\
&= \frac{8}{d-r} \cdot \frac{d-r}{2r} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2 + \frac{d+r}{d-r}} \right) \mathrm{d}t - \frac{4}{d-r}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \frac{d+r}{d-r}} \\
&= \frac{4}{r}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{d+r}{d-r}}} \right) - \frac{2\pi}{\sqrt{d^2 - r^2}} = \frac{2\pi}{r}\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - r^2}}\right)
\end{aligned}$$

□

习题 54. 已知定义在 $x = 0$ 附近的函数

$$F(x) := \int_0^{x^2} t^2 \sin\sqrt{x^2 - t^2} \mathrm{d}t$$

求极限：

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{x^7}$$

曲豆豆试过，企图对 $F(x)$ 求导用洛必达，非常难算。甚至不可能算出来。

解. 只需注意到

$$\frac{F(x)}{x^7} \le \frac{1}{x^7}\int_0^{x^2} t^2 \sin x \mathrm{d}t \le \frac{1}{x^6}\int_0^{x^2} t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}$$

$$\frac{F(x)}{x^7} \geq \frac{\sin\sqrt{x^2-x^4}}{x^7}\int_0^{x^2} t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\frac{\sin(x\sqrt{1-x^2})}{x} \to \frac{1}{3} \quad (x \to 0^+)$$

从而由夹逼原理，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x^7} = \frac{1}{3}$. □

习题 55. 计算极限：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

解. 先取对数，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}\right] &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2x\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x}e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{2x^2}e^{x^2}+e^{x^2}}{e^{x^2}} = 1
\end{aligned}$$

所以有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]\right) = e$$

□

习题 56. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} ne^{n^2}\int_n^{n+1} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

解. 令函数 $f(x) = xe^{x^2}\int_x^{x+1} e^{-t^2}\mathrm{d}t\,(x \geq 0)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则该极限等于原极限。而

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+1} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}e^{-x^2}} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}-e^{-(x+1)^2}}{2e^{-x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x-1}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

习题 57. 设函数 $f(x)$ 连续，且满足

$$f(x)=x\sin x+\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t \qquad (*)$$

求 $f(x)$.

解. 对 $(*)$ 两边对 x 求导两次，得到

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x+x\cos x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \\ f''(x) &= 2\cos x-x\sin x+f(x) \end{aligned}$$

在 $(*)$ 式与上式当中令 $x=0$ 即可得到 $f(0)=f'(0)=0$. 因此函数 $f(x)$ 满足如下的初值问题：

$$\begin{cases} f''(x)-f(x)=2\cos x-x\sin x \\ f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$$

该微分方程的齐次部分 $f''(x)-f(x)=0$ 通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$；为求原方程的一个特解，采用待定系数法，令

$$f(x)=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$$

代入方程 $f''(x)-f(x)=2\cos x-x\sin x$ 比较有关系数得 $\begin{cases} C-A &= 0 \\ A+D-B &= 2 \\ -A-C &= -1 \\ C-B-D &= 0 \end{cases}$，从而 $\begin{cases} A &= \frac{1}{2} \\ B &= -\frac{1}{2} \\ C &= \frac{1}{2} \\ D &= 1 \end{cases}$，

因此原方程有特解 $f(x)=\frac{(x-1)\cos x+(x+2)\sin x}{2}$. 由线性常微分方程的理论，原方程的通解形如

$$f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{(x-1)\cos x+(x+2)\sin x}{2}$$

再将上式代入初值条件 $f(0)=f'(0)=0$，即可确定常数 $C_1=\frac{1}{2}, C_2=-1$，从而

$$f(x)=\frac{1}{2}e^x-e^{-x}+\frac{(x-1)\cos x+(x+2)\sin x}{2}$$

□

4.3 定积分的估计与放缩

习题 58. 证明对任意 $n \geq 1$，成立不等式

$$\frac{3n+1}{2n+2} < \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n < \frac{2n+1}{n+1}$$

证明. 考虑定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x) = nx^n$，则 f 为单调递增的严格凸函数。我们考虑“阶梯函数” $g(x) := f(\frac{k}{n})$（如果 $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}), k \in \mathbb{Z}$）；以及“折线函数” $h(x)$ 定义为：$h(x)$ 的图像是依次连接点 $(0, f(0)), (\frac{1}{n}, f(\frac{1}{n})), \ldots, (\frac{n}{n}, f(\frac{n}{n}))$ 所得的折线。则易知 $g(x) < f(x) < h(x)$，从而知 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x < \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x < \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$，也就是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} n\left(\frac{k}{n}\right)^n < \int_0^1 nx^n\mathrm{d}x < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2}\cdot\left[\left(\frac{k}{n}\right)^n + \left(\frac{k-1}{n}\right)^n\right]$$

整理上式即得 $\frac{3n+1}{2n+2} < \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n < \frac{2n+1}{n+1}$. □

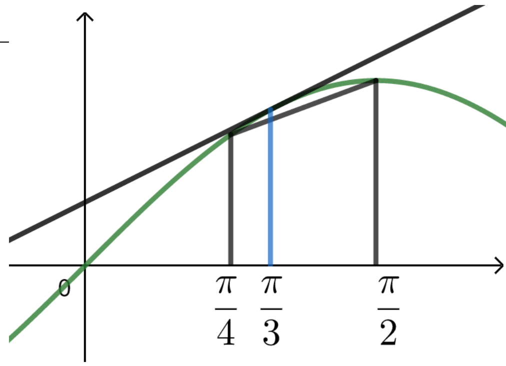
习题 59. 证明：

$$(\sqrt{2}-1)(\ln 2 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{8} + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\ln 2$$

（提示：对于函数 $f(x) = \sin x$，考虑连接 $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$ 与 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 两点的线段；再考虑 f 在点 $(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3}))$ 处的切线）

证明. 考虑函数 $f(x) = \sin x, x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$，则 $f''(x) \leq 0$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 成立。考虑连接 $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$ 与 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 两点的线段，易求该线段所在直线的解析式为 $y = \frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}x + (\sqrt{2}-1)$. 再考虑 $\frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$，易求 $f(x)$ 的图像在 $(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3}))$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$. 于是由 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上的凸性可知，对于 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$，成立

$$\begin{aligned}
\sin x &\geq \frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}x + (\sqrt{2}-1) \\
\sin x &\leq \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}
\end{aligned}$$



习题59示意图

将此式代入积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ 当中即可。 □

习题 60. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续且非负，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \max\left\{f(x)\middle| a\le x\le b\right\}$$

证明. 记 $A := \left\{f(x)\middle| a\le x\le b\right\}$，由于 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，从而存在 $x_0\in[a,b]$，使得 f 在 x_0 处取到最大值 A.

对任意 $\varepsilon>0$，注意函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，从而存在 x_0 的邻域 $x_0\in[a',b']\subseteq[a,b]$，使得当 $f(x)>A-\frac{\varepsilon}{2}$ 在 $[a',b']$ 成立。记 $\delta:=b'-a'>0$ 为此区间的长度。从而有

$$\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \ge \left(\int_{a'}^{b'} f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \ge \delta^{\frac{1}{n}}(A-\frac{\varepsilon}{2})$$

$$\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(\int_a^b A^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \le (b-a)^{\frac{1}{n}}A$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta^{\frac{1}{n}}=1=\lim\limits_{n\to+\infty}(b-a)^{\frac{1}{n}}$，因此存在 $N>0$，使得对于任意 $n\ge N$，都有

$$A-\varepsilon\le\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\le A+\varepsilon$$

从而证毕。 □

习题 61. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$$

证法一.（分部积分直接计算）

令 $I_n:=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$，注意到对于 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 总有 $0\le\sin^{n+1}x\le\sin^n x$，所以 $I_n\ge I_{n+1}\ge 0$，即 $\{I_n\}$ 为单调递减的非负数列。再注意

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x\\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x=(n-1)(I_{n-2}-I_n)\end{aligned}$$

从而得到递推关系 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 因此对任意 $n\ge 1$，注意存在唯一的 $k\ge 0$ 使得 $2k\le n\le 2k+1$，从而

$$\begin{aligned}I_n &\le I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}I_{2k-2}=\cdots=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{1}{2}I_0\\ &= e^{\sum\limits_{m=1}^{k}\ln\left(1-\frac{1}{2m}\right)}I_0\le e^{-\sum\limits_{m=1}^{k}\frac{1}{2m}}I_0\end{aligned}$$

注意当 $n\to+\infty$ 时，$k\to+\infty$，从而 $\sum\limits_{m=1}^{k}\frac{1}{2m}\to+\infty$. 因此当 $n\to+\infty$ 时，上式最右端趋于 0；又因为 $I_n\ge 0$，从而由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}I_n=0$$

□

证法二.（放缩估计）

直接用数列极限的定义证明之。对于任意 $\varepsilon>0$（不妨 $\varepsilon<1$），取足够大的正整数 N 使得

$$\left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^N<\frac{\varepsilon}{\pi}$$

则对于任意 $n\ge N$，成立

$$0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&\le \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\mathrm{d}x \\
&\le \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^N \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \frac{\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = 0$. □

习题 62. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\mathrm{d}x = 0$$

此题与上题很像，但远比上题困难。这个积分一般无法直接计算。

证法一. （利用积分第二中值定理）

对于正整数 n，注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\mathrm{d}x = \int_0^1\sin(x^n)\mathrm{d}x + \int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\mathrm{d}x &= \int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{nx^{n-1}}\cdot nx^{n-1}\sin(x^n)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{积分第二中值定理}} \frac{1}{n}\int_1^{\xi_n} nx^{n-1}\sin(x^n)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}\int_1^{\xi_n}(-\cos(x^n))'\mathrm{d}x = \frac{1}{n}(-\cos(\xi_n^n)+\cos 1)
\end{aligned}$$

其中 $\xi_n\in[1,\frac{\pi}{2}]$ 为某个与 n 有关的常数。从而有

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\mathrm{d}x\right| &\le \int_0^1\sin(x^n)\mathrm{d}x + \frac{1}{n}|-\cos(\xi_n^n)+\cos 1| \\
&\le \int_0^1 x^n\mathrm{d}x + \frac{2}{n} = \frac{1}{n+1}+\frac{2}{n}
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，则上式右端趋于 0，于是由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\mathrm{d}x = 0$. □

上述证法巧妙使用积分第二中值定理。若不熟悉此定理，或者想不到它，还可以有如下常规做法：

证法二. （换元，然后划分区间）

对于 $n\geq 1$，首先注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\mathrm{d}x \xlongequal{x^n=t} \frac{1}{n}\int_0^{(\frac{\pi}{2})^n} t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t$$

对于 $n\geq 2$，注意到对于 $n\geq 0$，存在唯一正整数 M_n，使得

$$2M_n\pi \leq (\frac{\pi}{2})^n < 2(M_n+1)\pi$$

此时有 $\left|(\frac{\pi}{2})^n - 2M_n\pi\right| \leq 2\pi$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = +\infty$. 注意到：

$$\frac{1}{n}\int_0^{(\frac{\pi}{2})^n} t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M_n}\left(\int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi} t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{n}\int_{2M_n\pi}^{(\frac{\pi}{2})^n} t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t \qquad (*)$$

$$\begin{aligned}\int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi} t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t &= \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t + \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t \\ &= \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} -\sin t\left((t-\pi)^{\frac{1}{n}-1} - t^{\frac{1}{n}-1}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

固定上式的 n 与 k，当 $k\geq 2$ 时，对于 $(2k-1)\pi\leq t\leq 2k\pi$，对函数 $f(u)=u^{\frac{1}{n}-1}$ 在 $[t-\pi,t]$ 使用拉格朗日中值定理，得

$$\begin{aligned}\left|(t-\pi)^{\frac{1}{n}-1} - t^{\frac{1}{n}-1}\right| &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\xi^{\frac{1}{n}-2} \leq (t-\pi)^{\frac{1}{n}-2} \\ &\leq ((2k-2)\pi)^{\frac{1}{n}-2} \leq \frac{1}{\pi^2(2k-2)^2}(M_n\pi)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \frac{1}{\pi^2(2k-2)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2\pi(2k-2)^2}\end{aligned}$$

而 $k=1$ 时，有估计

$$\left|\int_0^{2\pi} t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right| t^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} t^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi}(2\pi)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} 2\pi\mathrm{d}t = 4\pi^2$$

综上所述，有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M_n}\left(\int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi} t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{n}\int_{2M_n\pi}^{(\frac{\pi}{2})^n} t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{M_n}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}|\sin t|\cdot\left|(t-\pi)^{\frac{1}{n}-1} - t^{\frac{1}{n}-1}\right|\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\left|\int_0^{2\pi} t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t\right| + \frac{1}{n}\int_{2M_n\pi}^{(\frac{\pi}{2})^n} t^{\frac{1}{n}-1}|\sin t|\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{M_n}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{1}{2\pi(2k-2)^2}\mathrm{d}t + \frac{4\pi^2}{n} + \frac{2\pi}{n} \leq \frac{1}{8n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right) + \frac{4\pi^2}{n} + \frac{2\pi}{n}\end{aligned}$$

可见 $n\to\infty$ 时，上式右端趋于 0. 于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\mathrm{d}x = 0$. □

习题 63. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负、严格单调递增的连续函数。对于任意 $n\geq 1$，由积分中值定理，存在 $x_n\in[0,1]$，使得

$$f^n(x_n)=\int_0^1 f^n(t)\mathrm{d}t$$

则由 f 的单调性容易知道 x_n 是唯一的。

试求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

证明. 注意到 x_n 满足

$$f(x_n)=\left(\int_0^1 f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}$$

利用习题60的结论，有

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{x\in[0,1]} f(x)=f(1)$$

再由 f 的单调性与连续性，可得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1$.

□

4.4 Good kernel 及其应用

习题 64. 设 $\left\{f_n\middle|n\geq 1\right\}$ 是一族定义在闭区间 $[-1,1]$ 上的连续函数，并且满足以下条件：

(1) $\int_{-1}^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1$ 对任何 $n\geq 1$ 都成立；

(2) 存在 $M>0$，使得对任意 $n\geq 1$，都有 $\int_{-1}^1|f_n(x)|\mathrm{d}x\leq M$；

(3) 对任意的 $0<\delta<1$，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq 1}|f_n(x)|\mathrm{d}x=0$.

证明：对于任何定义于 $[-1,1]$ 的连续函数 $g(x)$，都成立

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^1 f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=g(0)$$

证明. 对于在 $[-1,1]$ 上的连续函数 $g(x)$，记 M' 为 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值。

对于任意 $\varepsilon>0$，由于 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而存在 $\delta>0$，使得对任意 $x\in[-1,1]$，如果 $|x|\leq\delta$，就有 $|g(x)-g(0)|<\frac{\varepsilon}{2M}$.（其中 M 为条件（2）中的那个）. 不妨 $\delta<1$. 对于如此的 δ，

由条件（3）可知存在正整数 N，使得对于任意 $n \geq N$，

$$\int_{\delta \leq |x| \leq 1} |f_n(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4M'}$$

于是，对于任意的 $n \geq N$，注意到条件（1），我们有：

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-1}^{1} f_n(x) g(x) \mathrm{d}x - g(0) \right| &= \left| \int_{-1}^{1} f_n(x)(g(x) - g(0)) \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \left(\int_{|x| \leq \delta} + \int_{\delta \leq |x| \leq 1} \right) f_n(x)(g(x) - g(0)) \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_{|x| \leq \delta} |f_n(x)| \cdot |g(x) - g(0)| \mathrm{d}x + \int_{\delta \leq |x| \leq 1} |f_n(x)| \cdot |g(x) - g(0)| \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2M} \int_{|x| < \delta} |f_n(x)| \mathrm{d}x + 2M' \int_{\delta \leq |x| \leq 1} |f_n(x)| \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2M} M + 2M' \frac{\varepsilon}{4M'} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

从而证毕。 □

习题 65. 设 $f(x)$ 为定义在 $[-1,1]$ 上的连续函数，证明：

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n f(x) \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \mathrm{d}x} = f(0)$$

证明. 我们利用上一题（习题64）的结论来做。令

$$\varphi_n(x) := \frac{(1 - x^2)^n}{\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \mathrm{d}x}$$

我们只需要验证函数族 $\left\{ \varphi_n(x) \middle| n \geq 1 \right\}$ 满足习题64的条件（1）（2）（3）. 而（1）（2）是显然成立的，我们只剩下（3）.

现在，对于任意给定的 $0 < \delta < 1$，我们需要证明：

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\int_{\delta \leq |x| \leq 1} (1 - x^2)^n \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \mathrm{d}x} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\int_{\delta}^{1} (1 - x^2)^n \mathrm{d}x}{\int_{0}^{1} (1 - x^2)^n \mathrm{d}x} = 0$$

易知有不等式 $\begin{cases} 1 - x^2 \geq -\delta x + 1 & (0 \leq x \leq \delta) \\ 1 - x^2 \leq 1 - \delta^2 & (\delta \leq x \leq 1) \end{cases}$，从而有

$$\int_{\delta}^{1} (1 - x^2)^n \mathrm{d}x \quad \leq \quad (1 - \delta^2)^n$$

$$\int_0^\delta (1-x^2)^n \mathrm{d}x \quad \geq \quad \int_0^\delta (1-\delta x)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{\delta}\frac{1}{n+1}\left[1-(1-\delta^2)^n\right]$$

因此有如下估计：

$$\begin{aligned}\frac{\int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x}{\int_\delta^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x} &= 1+\frac{\int_0^\delta (1-x^2)^n \mathrm{d}x}{\int_\delta^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x} \geq 1+\frac{\frac{1}{\delta}\frac{1}{n+1}\left(1-(1-\delta^2)^n\right)}{(1-\delta^2)^n} \\ &= 1-\frac{1}{(n+1)\delta}+\frac{1}{\delta(n+1)(1-\delta^2)^n}\end{aligned}$$

注意 $0<1-\delta^2<1$，从而当 $n\to+\infty$ 时，上式右端趋于 $+\infty$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_\delta^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=+\infty$，也就是说，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\int_\delta^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=0$，从而证毕。 □

习题 66. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\mathrm{d}x$$

证明. **Step1** 首先注意到当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$\sin x\leq x\leq\tan x$，从而

$$n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^n x\mathrm{d}x\leq n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x\mathrm{d}x\leq n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^{n-1}x\mathrm{d}x$$

上式最左边和最右边的积分可以通过换元法直接计算。令 $n\to+\infty$，由夹逼原理不难知道

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x\mathrm{d}x=1$$

因此有

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x\mathrm{d}x}$$

Step2 令 $\varphi_n(x):=\frac{x\cos^n x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^n x\mathrm{d}x}$，则我们只需计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi_n(x)\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$.

我们对 $\{\varphi_n(x)\}$ 利用习题64的结论（把区间 $[-1,1]$ 改为 $[0,\frac{\pi}{2}]$，完全类似），只需再证明：对任意 $0<\delta<\frac{\pi}{2}$，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0$ 即可。如果这个成立，我们将立刻得到

$$\text{原极限}=\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\bigg|_{x\to 0}=\ln 2$$

Step3对于给定的 $0<\delta<\frac{\pi}{2}$，注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0$ 等价于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^\delta x\cos^n x\mathrm{d}x}{\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x\mathrm{d}x}=+\infty \tag{$*$}$$

我们考察函数 $f_n(x) := x\cos^n x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的单调性。注意

$$f_n'(x) = \cos^n x - nx\cos^{n-1} x \sin x = (\cos x)^{n-1}(\cos x - nx\sin x)$$

从而易知 $f_n(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有唯一的极大值点，记为 x_n，并且 $f_n(x)$ 在 $[0, x_n]$ 单调递增，在 $[x_n, \frac{\pi}{2}]$ 单调递减。其中 x_n 满足方程 $\cos x_n = nx_n \sin x_n$，从而

$$\frac{1}{nx_n} = \tan x_n \geq x_n$$

所以极大值点 $x_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$，特别地 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. 于是对于 $\delta > 0$，当 n 足够大时，$x_n < \delta$，从而 $x\cos^n x$ 在 $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ 单调递减，因此有

$$\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x\mathrm{d}x \leq \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \delta\cos^n \delta\mathrm{d}x \leq \frac{\pi\delta}{2}\cos^n \delta \tag{$**$}$$

Step4 断言对于足够大的 n，$f_n''(x) \leq 0$ 在 $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ 上成立，并且 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\delta}{2}$. 从而 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ 上是凸函数。我们先假定这个断言成立（将在后文 Step 5 给出证明），则由凸函数的性质，当 n 足够大的时候成立

$$\int_0^\delta x\cos^n x\mathrm{d}x \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} x\cos^n x\mathrm{d}x \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cos^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right) x\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\cos^n \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n}\cos^n \frac{\delta}{2} \tag{$***$}$$

因此由 $(**)$ 与 $(***)$ 可知，

$$\frac{\int_0^\delta x\cos^n x\mathrm{d}x}{\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x\mathrm{d}x} \geq \frac{1}{n\pi\delta}\left(\frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\delta}\right)^n \to +\infty \qquad (n \to +\infty)$$

这就证明了（*），从而完成。

Step5 至此，我们只剩下：对于足够大的 n，$f_n''(x) \leq 0$ 在 $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ 成立。

直接计算 $f_n(x)$ 的二阶导数，有

$$f_n''(x) = nx\cos^{n-2} x\left(-2\frac{\sin x}{x} - \cos^2 x + (n-1)\sin^2 x\right)$$

当 $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ 时，$(n-1)\sin^2 x \leq (n-1)\sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{n-1}{n} < 1$；另一方面，当 n 足够大时，对任意的 $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ 都有

$$2\frac{\sin x}{x} + \cos^2 x \geq 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

（这利用了 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 以及 $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x = 1$ 的定义）。因此，当 n 足够大时，对任意 $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$，成立

$$-2\frac{\sin x}{x} - \cos^2 x + (n-1)\sin^2 x \leq -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

从而 $f''(x) < 0$. 完成了断言的证明。

总结： 综合 Step1-5，得到

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\mathrm{d}x = \ln 2$$

□

此题还有其它解法，详见 http://tieba.baidu.com/p/4923216320?share=9105&fr=share&see_lz=0&sfc=qqfriend&client_type=2&client_version=10.2.8.0&st=1558143174&unique=0CEDEA7D19F2AB0E21408D38406AE031

第 5 章　无穷级数与反常积分

习题 67. 设 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 为正数列，$S_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 为其部分和。

证明：对任意 $\varepsilon > 0$，级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{S_k^{1+\varepsilon}}$ 收敛。

证明. 如果 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k = a < +\infty$，则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{S_k^{1+\varepsilon}} \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{x_1^{1+\varepsilon}} = \frac{a}{x_1^{1+\varepsilon}} < +\infty$. 故不妨 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k = +\infty$. 注意到

$$
\begin{aligned}
\frac{x_k}{S_k^{1+\varepsilon}} &= \frac{1}{S_k^{1+\varepsilon}}(S_k - S_{k-1}) = \int_{S_k}^{S_{k-1}} \frac{1}{S_k^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}x \leq \int_{S_k}^{S_{k-1}} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}x \\
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{S_k^{1+\varepsilon}} &\leq \frac{x_1}{S_1^{1+\varepsilon}} + \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}x = \frac{1}{x_1^{\varepsilon}} + \int_{S_1}^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} < +\infty
\end{aligned}
$$

因此级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{S_k^{1+\varepsilon}}$ 收敛。 □

习题 68. 判断下列级数的敛散性：

$$
(1)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} \qquad\qquad (2)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln\ln n}}
$$

证明. **(1)**注意到 $(\ln\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n\cdot\ln\ln\ln n} = n^{\ln\ln\ln n}$. 当 $n > e^{e^{e^2}}$ 时，$\ln\ln\ln n > 2$，因此 $n^{\ln\ln\ln n} > n^2$，从而

$$
\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}
$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，从而原级数收敛。

(2)注意到

$$
\ln[(\ln\ln n)^{\ln\ln n}] = \ln\ln n\cdot\ln\ln\ln n < [\ln\ln n]^2
$$

而对于足够大的实数 x，总有 $\ln x < \sqrt{x}$. 取 $x = \ln n$（n 足够大），则 $\ln\ln n < \sqrt{\ln n}$，所以 $[\ln\ln n]^2 < \ln n$，因此有

$$\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln[(\ln\ln n)^{\ln\ln n}]}} > \frac{1}{e^{[\ln\ln n]^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而原级数发散。 □

习题 69. 设 $a > 0$ 为常数，试讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} x_n$ 的敛散性，其中：

（1）$x_n = \dfrac{\ln 2\cdot\ln 3\cdots\ln n}{\ln(2+a)\cdot\ln(3+a)\cdots\ln(n+a)}$ （2）$x_n = (2-\sqrt{a})(2-\sqrt[3]{a})\cdots(2-\sqrt[n]{a})$

证明. 注意当 n 足够大时，（1）（2）中的 x_n 都不再变号。

（1）：此时有 $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\ln(n+2+a)}{\ln(n+2)}$，从而

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\ln(1+\frac{a}{n+2})}{\ln(n+2)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n+2}a+o(1)}{\ln(n+2)} = 0$$

有 Rabbe 判别法可知级数（1）发散。

（2）：若 $0 < a \le 1$，则易知 $x_n \ge 1$ 对任意 $n \ge 2$ 都成立，从而原级数发散。于是不妨 $a > 1$. 注意到 $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{2-\sqrt[n+1]{a}}$，从而

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(\sqrt[n+1]{a}-1)}{2-\sqrt[n+1]{a}} = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{\ln a}{n+1} = \ln a$$

从而有 Rabbe 判别法可知，当 $\ln a > 1$ 即 $a > e$ 时，原级数收敛；$1 < a < e$ 是原级数发散。而 $a = e$ 时 Rabbe 判别法失效，于是采用更精细的 Gauss 判别法如下：

$$\lim_{n\to+\infty}\ln n\left(n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\ln n\cdot\frac{ne^{\frac{1}{n+1}}-n-2+e^{\frac{1}{n+1}}}{2-e^{\frac{1}{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty}\ln n\left(\frac{1}{2(n+1)}+o(\frac{1}{n})\right) = 0$$

从而有 Gauss 判别法知 $a = e$ 时原级数发散。综上，原级数在 $0 < a \le e$ 时发散，在 $a > e$ 时收敛。 □

习题 70. 对于常数 $p, q > 0$，讨论以下级数的的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}$$

解. 我们令

$$a_n := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n)} = \frac{1}{qn^p}\left(\frac{1}{q+1}\cdot\frac{2}{q+2}\cdots\frac{n}{q+n}\right)$$

注意到该级数是正项级数，考虑 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = (\frac{n+1}{n})^p \cdot \frac{n+q}{n}$，从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left[(1+\frac{1}{n})^p\cdot(1+\frac{q}{n})-1\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} n\left[\left((1+\frac{1}{n})^p-1\right)\cdot(1+\frac{q}{n})+\frac{q}{n}\right] = p+q\end{aligned}$$

于是由 Raabe 判别法可知当 $p+q>1$ 时原级数收敛；$p+q<1$ 时原级数发散。而 $p+q=1$ 时 Raabe 判别法失效，我们考虑更精细的 Gauss 判别法：此时

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] &= \lim_{n\to+\infty} \ln n\left[n\left((1+\frac{1}{n})^p-1\right)\left(1+\frac{q}{n}\right)-p\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \ln n\left[\left(n\left((1+\frac{1}{n})^p-1\right)-p\right)\left(1+\frac{q}{n}\right)+p\cdot\frac{q}{n}\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[pq\cdot\frac{\ln n}{n}+\ln n\left(\frac{p(p-1)}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)\left(1+\frac{q}{n}\right)\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

从而 $p+q=1$ 时原级数发散。综上，当 $p+q>1$ 时原级数收敛，$p+q\le 1$ 时原级数发散。 □

习题 71. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\mathrm{d}x$，$p>0$ 为正实数。讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 的敛散性。

证明. 该级数在 $p>1$ 时收敛，在 $0<p\le 1$ 时发散。我们先断言当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时成立

$$\frac{16}{\pi^2}x^2 \le \tan x \le \frac{4}{\pi}x$$

令 $g(x) := \frac{16}{\pi^2}x^2$ 以及 $h(x) := \frac{4}{\pi}x$，则注意到 $g(0)=\tan 0 = h(0) = 0$ 以及 $g(\frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4} = h(\frac{\pi}{4}) = 1$. 容易求导验证 $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|_{x=0}(\tan x - g(x)) > 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|_{x=\frac{\pi}{4}}(\tan x - g(x)) < 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\tan x - g(x)) \le 0, \forall x\in[0,\frac{\pi}{4}] \end{cases}$，因此 $\tan x \ge g(x) = \frac{16}{\pi^2}x^2$. 而 $\tan x \le \frac{4}{\pi}x$ 更容易验证。因此有

$$a_n \ge \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{16}{\pi^2}x^2)^n\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$a_n \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{4}{\pi}x)^n \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1}$$

因此，若 $p>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p \le (\frac{\pi}{4})^p \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p} < +\infty$，因此原级数收敛；而当 $0<p\le 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p \ge (\frac{\pi}{4})^p \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^p} = +\infty$，因此原级数发散。 □

习题 72. 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n^2-1}$ 的和函数。

证明. 直接计算之，有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{x^2}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\
&= \frac{x^2-1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}+\frac{1}{2}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)\\
&= \frac{1-x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}
\end{aligned}$$

□

习题 73. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，其零点为 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n<\cdots$，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$. 证明：如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

证明. 我们用 Cauchy 收敛准则来说明反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

对任意 $\varepsilon>0$，由级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知存在 $N>0$，使得对任意 $n_2>n_1\ge N$，都有

$$\left|\sum_{k=n_1}^{n_2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

再注意到 $\{x_k\}$ 为连续函数 $f(x)$ 的全部零点，从而由连续函数的性质可知对任意 $k\ge 0$，$f(x)$ 在区间 (x_k,x_{k+1}) 不变号，从而对于 (x_k,x_{k+1}) 的任何一个子区间 (x_k',x_{k+1}')，必有

$$\left|\int_{x_k'}^{x_{k+1}'} f(x)\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

回顾我们已经取定的 N，现在我们令 $M := x_{N+1}$，则对于任意 $a_2 > a_1 \geq M$，必存在唯一的 n_1，使得 $a_1 \in [x_{n_1-1}, x_{n_1})$；以及唯一的 n_2，使得 $a_2 \in [x_{n_2}, x_{n_2+1})$. 容易知道 $n_1, n_2 \geq N+1$. 从而有

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{a_1}^{x_{n_1}} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=n_1}^{n_2-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_{n_2}}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \left|\int_{a_1}^{x_{n_1}} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\sum_{k=n_1}^{n_2-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_{n_2}}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \left|\int_{x_{n-1}}^{x_{n_1}} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\sum_{k=n_1}^{n_2-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_{n_2}}^{x_{n_2+1}} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

从而反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。 □

第 6 章　多元微分学

习题 74. 已知函数 $f(x,y,z)=x^{y^z}$，求偏导 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial z}$.

解. 易求 $\frac{\partial f}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$. 再看 f 关于 y,z 的偏导。注意到

$$f(x,y,z)=x^{y^z}=e^{y^z\ln x}$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{y^z\ln x}\frac{\partial}{\partial y}(y^z\ln x)=x^{y^z}\ln x\cdot zy^{z-1}=x^{y^z}y^{z-1}z\ln x\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= e^{y^z\ln x}\frac{\partial}{\partial z}(y^z\ln x)=x^{y^z}\ln x\cdot y^z\ln y=x^{y^z}y^z\ln x\cdot\ln y\end{aligned}$$

□

习题 75. 令 $r:=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的函数，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的可微函数，令

$$u(x,y,z;t):=\frac{1}{r}(\varphi(r-at)+\psi(r+at))$$

其中 $a\in\mathbb{R}$ 为常数。证明：u 满足**波方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\triangle u=0$$

证明. 无非是直接求偏导验证，注意利用 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$（以及对 y,z 求偏导的类似情形）。一方面

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a}{r}[\psi'(r+at)-\varphi'(r-at)]\right)=\frac{a^2}{r}[\psi''(r+at)+\varphi''(r-at)]$$

另一方面，我们计算 $\triangle u$. 注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{x}{r^3}[\varphi(r-at)+\psi(r+at)]+\frac{1}{r}\left(\varphi'(r-at)\cdot\frac{x}{r}+\psi'(r+at)\cdot\frac{x}{r}\right)\\ &= -\frac{x}{r^3}[\varphi(r-at)+\psi(r+at)]+\frac{x}{r^2}\left(\varphi'(r-at)+\psi'(r+at)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{r^3-3r^2\cdot\frac{x^2}{r}}{r^6}[\varphi(r-at)+\psi(r+at)]-\frac{x}{r^3}\cdot\frac{x}{r}[\varphi'(r-at)+\psi'(r+at)]\\ &\quad+\frac{r^2-2r\cdot\frac{x^2}{r}}{r^4}[\varphi'(r-at)+\psi'(r+at)]+\frac{x}{r^2}\cdot\frac{x}{r}[\varphi''(r-at)+\psi''(r+at)]\\ &= \frac{3x^2-r^2}{r^5}[\varphi(r-at)+\psi(r+at)]+\frac{r^2-3x^2}{r^4}[\varphi'(r-at)+\psi'(r+at)]+\frac{x^2}{r^3}[\varphi''(r-at)+\psi''(r+at)]\end{aligned}$$

同理可计算出 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，只需要将上式中的 x 分别替换成 y,z 即可。注意到 $x^2+y^2+z^2=r^2$，从而直接得到

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r}[\varphi''(r-at)+\psi''(r+at)]$$

从而 $a^2\triangle u=\frac{\partial u}{\partial t}$，证毕。 □

习题 76. 已知二元函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$. 证明：$f(x,y)$ 有无穷多个极大值点，但没有极小值点。

证明. 由于 $f(x,y)$ 可微，故若 (x_0,y_0) 为 f 的极值点，则必有 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0\end{cases}$，于是

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=(1-e^{y_0})\sin x_0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=e^{y_0}(\cos x_0-y_0-1)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}(1-e^{y_0})\sin x_0 &= 0\\ \cos x_0-y_0-1 &= 0\end{cases}$$

解得如下两组解（驻点）：

$$(x_0,y_0)=(2k\pi,0)\quad(k\in\mathbb{Z})\qquad\text{或者}\qquad(x_0,y_0)=((2k+1)\pi,-2)\quad(k\in\mathbb{Z})$$

接下来验证 f 在这些驻点附近的行为。f 的 Hessian 为

$$\mathrm{Hess}(f)(x,y)=\begin{pmatrix}(1-e^y)\cos x & -e^y\sin x\\ -e^y\sin x & e^y(\cos x-y-2)\end{pmatrix}$$

Case 1若 $(x_0,y_0)=(2k\pi,0)$，则 f 的 Hessian 满足

$$\mathrm{Hess}(f)(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\leq 0$$

从而 $(2k\pi, 0)$ 为 f 的极大值点 $(\forall k \in \mathbb{Z})$；

Case 1若 $(x_0, y_0) = ((2k+1)\pi, 0)$，则 f 的 Hessian 满足

$$\mathrm{Hess}(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} e^{-2}-1 & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{pmatrix} \leq 0$$

从而 $((2k+1)\pi, -2)$ 为 f 的极大值点 $(\forall k \in \mathbb{Z})$.

综上，f 有无数个极大值点，无极小值点。 □

习题 77. 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 为二元连续可微函数，且 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) \neq 0$. 已知点 $(0,0)$ 为函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的条件极值点，判断下列命题正误：

（1）若 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$，则 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$；

（2）若 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$，则 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$；

（3）若 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$，则 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$；

（4）若 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$，则 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$；

证明. 注意到 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) \neq 0$，所以由隐函数定理，存在定义于 $x=0$ 附近的连续可微函数 $\psi(x)$，使得 $\varphi(x, \psi(x)) = 0$ 在 $x=0$ 附近恒成立，特别地 $\psi(0)=0$。也就是说，约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 等价于 $y=\psi(x)$. 于是 $x=0$ 是单变量函数

$$x \mapsto f(x, \psi(x))$$

的极值点，因此

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} f(x, \psi(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\psi'(0)$$

由上式容易判断（4）正确，（3）一定不正确，（1）（2）不一定正确。 □

习题 78. 设方程组 $\begin{cases} x = u + vz \\ y = -u^2 + v + z \end{cases}$ 在点 $(x,y,z) = (2,1,1)$ 的某一邻域内确定了隐函数 $u(x,y,z)$ 与 $v(x,y,z)$，并且 $u(2,1,1) > 0$. 试计算 $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{(2,1,1)}$ 的值。

解. 解方程组容易算出 $u(2,1,1) = v(2,1,1) = 1$. 令函数

$$\begin{cases} F_1(x,y,z;u,v) = x - u - vz \\ F_2(x,y,z;u,v) = y + u^2 - v - z \end{cases}$$

则关于 x,y,z 的隐函数 u,v 由 $F_1=F_2=0$ 决定。由隐映射定理，直接计算之，

$$\begin{aligned}\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{pmatrix}\right|_{(2,1,1)} &= -\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}\right|_{(2,1,1)}\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{pmatrix}\right|_{(2,1,1)}\\ &= -\left.\begin{pmatrix}-1 & -z\\ 2u & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -v\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\right|_{(u,v)=(1,1)}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此有 $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{(2,1,1)}=\frac{1}{3}(1+1+0)=\frac{2}{3}$. □

习题 79. 设 $u(x,y,z)$ 与 $F(x,y,z)$ 均为 $\mathbb{R}^3$ 上的可微函数，其中 $u(x,y,z)$ 是由方程 $F(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=0$ 决定的隐函数。证明：$u(x,y,z)$ 满足偏微分方程

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{u}$$

证明. 设四元函数 $G(x,y,z,u):=F(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)$，则 $u(x,y,z)$ 是由方程 $G(x,y,z,u)=0$ 确定的隐函数，从而有隐映射定理直接写出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial u}=-\frac{-2x\frac{\partial F}{\partial x}}{2u\frac{\partial F}{\partial x}+2u\frac{\partial F}{\partial y}+2u\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{x}{u}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}}$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{u}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}}\qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{u}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}}$$

因此有

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{u}\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{1}{u}$$

□

习题 80. 设 $F(x,y,z)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的可微函数。如果方程 $F(x,y,z)=0$ 决定了可微的隐函数 $x=x(y,z)$、$y=y(x,z)$ 以及 $z=z(x,y)$，证明：

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

证明. 由关于 $x=x(y,z)$ 的隐映射定理，有

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x}$$

同理也有 $\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial y}$ 以及 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$. 因此 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$. □

习题 81. 证明球面上的曲线

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}$$

与该球面上的每一条经线相交成定角。其中 φ 为经度，ψ 为纬度，k 为常数。

证明. 建立空间直角坐标系，使得该球面以原点为球心，北极点坐标为 $(0,0,1)$. 于是该球面有参数方程 $\begin{cases} x=\cos\psi\cos\varphi \\ y=\cos\psi\sin\varphi \\ z=\sin\psi \end{cases}$. 对该球面上任何一点 $\boldsymbol{r}(\varphi,\psi)$，考虑球面在该点处的切向量

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi} &= (-\cos\psi\sin\varphi,\cos\psi\cos\varphi,0)\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\psi} &= (-\sin\psi\cos\varphi,-\sin\psi\sin\varphi,\cos\psi)\end{aligned}$$

容易验证 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}$ 与 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\psi}$ 垂直，并且 $\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\right\|=\cos\psi$, $\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\psi}\right\|=1$.

对曲线方程两边微分，得

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}=ke^{k\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}=2ke^{k\varphi}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=k\sin\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)=k\cos\psi$$

从而对于曲线上的一点 $\boldsymbol{r}(\varphi,\psi)$，曲线在该点处的切向量不妨为 $\boldsymbol{v} := \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} + k\cos\psi\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \psi}$. 而与经线的夹角 θ 即为切向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \psi}$ 的夹角，其余弦值

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \psi}\rangle}{\|\boldsymbol{v}\|\cdot\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \psi}\right\|} = \frac{k\cos\psi}{\sqrt{k^2+1}\cos\psi} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

为定值。从而证毕。 □

习题 82. （电偶极子）考虑三维空间中的点电荷 A_1, A_2，它们的位置分别为 $\boldsymbol{l}, -\boldsymbol{l}$（即关于原点对称），电荷量分别为 $Q, -Q$. 对于位置为 $\boldsymbol{r}$、电荷量为 q 的点电荷 B，证明 A_1, A_2 对 B 的总静电力 $\boldsymbol{F}$ 满足如下近似公式：当 $r := \|\boldsymbol{r}\| \to +\infty$ 时，

$$\boldsymbol{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right) + o(\frac{1}{r^3})$$

其中 $\boldsymbol{p} := 2Q\boldsymbol{l}$ 为点电荷系统 $\{A_1, A_2\}$ 的**电偶极矩**，ε_0 为常数（**真空介电常数**）。

提示（库仑定律）：若点电荷 A_1, A_2 的位置分别为 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$，电荷量分别为 q_1, q_2，则 A_2 所受 A_1 的静电力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{\|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\|^3}$$

证明. 记 $\boldsymbol{e}_r := \frac{\boldsymbol{r}}{r}$，以及 $\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{\boldsymbol{l}}{r}$，则由库伦定律直接计算之，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}\|^3} - \frac{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}\|^3}\right) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - \frac{\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right) \\
&= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{e}_r - \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right]
\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} = (1+2\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\varepsilon^2)^{-\frac{3}{2}}$$

而当点电荷 B 到原点的距离 r 趋于无穷时，$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{l}}{r}$ 为无穷小量，从而 $2\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\varepsilon^2$ 也为无穷小量。利用 Taylor 展开式 $(1+x)^{-\frac{3}{2}} = 1-\frac{3}{2}x+o(x)$，可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} &= 1-3\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r+o(\frac{1}{r}) \\
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} &= 1+3\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r+o(\frac{1}{r})
\end{aligned}$$

代入 $\boldsymbol{F}$ 的表达式，得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}-\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{e}_r-\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}+\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right] \\
&= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left((6\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r-2\boldsymbol{\varepsilon}+o(\frac{1}{r})\right) \\
&= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{(6\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{2\boldsymbol{l}}{r}\right)+o(\frac{1}{r^3}) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right)+o(\frac{1}{r^3})
\end{aligned}$$

□

习题 83. 考虑三维空间中关于原点对称分布的两个质点 A_1, A_2，它们的质量均为 m. 记 A_1 的位置向量为 $\boldsymbol{l}$，则 A_2 的位置为 $-\boldsymbol{l}$. 现在，对空间中的质量为 M 的质点 B，其位置向量为 $\boldsymbol{r}$. 我们企图计算质点 A_1, A_2 对 B 的总引力 $\boldsymbol{F}$。有一种偷懒的方法是，用 A_1, A_2 两点的质心对 B 的引力来近似替代，也就是说考虑位于原点、质量为 $2m$ 的质点 C，则 C 对 B 的引力 $\boldsymbol{F}'=-\frac{2GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ 约等于 A_1, A_2 对 B 的总引力 $\boldsymbol{F}$，其中 $r:=\|\boldsymbol{r}\|, \boldsymbol{e}_r:=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$，$G$ 为常数（引力常量）。

证明：当 r 很大时，成立

$$\boldsymbol{F}=-\frac{2GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r-\frac{GMm}{r^4}\left[\left(15(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{l})^2-3\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}\right)\boldsymbol{e}_r-6l(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{l})\boldsymbol{e}_l\right]+o(\frac{1}{r^4})$$

其中 $l:=\|\boldsymbol{l}\|, \boldsymbol{e}_l:=\frac{\boldsymbol{l}}{l}$.

证明. 我们记 $\boldsymbol{\varepsilon}:=\frac{\boldsymbol{l}}{r}=\frac{l}{r}\boldsymbol{e}_l$. 由众所周知的牛顿万有引力定律，质点 A_1, A_2 对 B 的总引力 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= -GMm\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}\|^3}+\frac{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}\|^3}\right) \\
&= -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r-GMm\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}\|^3}+\frac{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}\|^3}-\frac{2\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \\
&= -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r-\frac{GMm}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}+\frac{\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}-2\boldsymbol{e}_r\right) \\
&= -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r-\frac{GMm}{r^2}\left[\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}+\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}-2\right)\boldsymbol{e}_r\right. \\
&\qquad \left.+\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}-\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right]
\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}=(1+2\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\varepsilon^2)^{-\frac{3}{2}}$$

而当质点 B 到原点的距离 r 趋于无穷时，$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{l}}{r}$ 为无穷小量，从而 $2\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^2$ 也为无穷小量。利用 Taylor 展开式 $(1+x)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + o(x^2)$，可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{\varepsilon}\|^3} &= 1 - 3\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e}_r - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{15}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e}_r)^2 + o(\frac{1}{r^2}) \\
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{\varepsilon}\|^3} &= 1 + 3\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e}_r - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{15}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e}_r)^2 + o(\frac{1}{r^2})
\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{\varepsilon}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - 2 &= -3\varepsilon^2 + 15(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e}_r)^2 + o(\frac{1}{r^2}) \\
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{\varepsilon}\|^3} &= -6\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e}_r + o(\frac{1}{r^2})
\end{aligned}$$

将它们代回 $\boldsymbol{F}$ 的表达式，有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r - \frac{GMm}{r^2}\left[\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{\varepsilon}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - 2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right] \\
&= -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r - \frac{GMm}{r^2}\left[\left(-3\varepsilon^2 + 15(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e}_r)^2 + o(\frac{1}{r^2})\right)\boldsymbol{e}_r + \left(-6\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e}_r + o(\frac{1}{r^2})\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right] \\
&= -\frac{2GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r - \frac{GMm}{r^4}\left[\left(15(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{l})^2 - 3\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{l}\right)\boldsymbol{e}_r - 6l(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{l})\boldsymbol{e}_l\right] + o(\frac{1}{r^4})
\end{aligned}$$

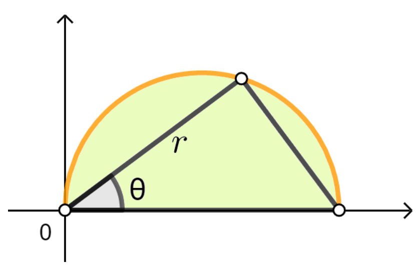
□

第 7 章　多重积分

习题 84. 设 $a>0$，计算二重积分

$$\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x+y)^2\mathrm{d}y$$

解. 先将该累次积分写为二重积分，易知积分区域为 $D:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|(x-a)^2+y^2<a,y>0\right\}$.



习题84积分区域 D 示意图

考虑极坐标换元 $\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{array}\right.$，则变换后的积分区域为 $D':=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\middle|\theta\in(0,\frac{\pi}{2}),r\in(0,2a\cos\theta)\right\}$. 因此有

$$\begin{aligned}\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x+y)^2\mathrm{d}y &= \iint_D(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta(1+2\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= 4a^4\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}+2\int_0^1 t^5\mathrm{d}t\right)=4a^4\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

□

习题 85. 计算平面上的二重积分:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解. 考虑极坐标换元 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\cos(r^2)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\cos(r^2)\mathrm{d}r=\pi\int_0^{+\infty}e^{-u}\cos u\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{2}e^{-u}(\sin u-\cos u)\Big|_{u=0}^{u=+\infty}=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

□

习题 86. 设 $\mathbb{H}$ 为上半平面 $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|y>0\right\}$，计算重积分

$$\iint_{\mathbb{H}}\frac{y}{(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解. 极坐标换元，有

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{H}}\frac{y}{(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{r\sin\theta}{r^2(r^2-2r\cos\theta+1)}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
=& \int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{r^2-2r\cos\theta+1}\mathrm{d}r=\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}\arctan\frac{x}{\sin\theta}\Big|_{-\cos\theta}^{+\infty} \\
=& \int_0^{\pi}(\pi-\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$

□

习题 87. 对于常数 $a>0$，计算重积分

$$\iint_D \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中区域 $D:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|0<x,y<a\right\}$.

证明. 先通过伸缩换元把积分区域化为单位正方形 $(0,1)\times(0,1)$，再直接累次积分，有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{a}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^1\frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{1+x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{y=\sqrt{1+x^2}t}\frac{1}{a}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{a}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{t=\tan\theta}\frac{1}{a}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{a}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\\
&\xlongequal{x=\tan\varphi}\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi\xlongequal{u=\sin\varphi}\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2-u^2}}=\frac{1}{a}\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6a}
\end{aligned}$$

□

习题 88. 设 $a>0$，平面区域 D 是**旋轮线**

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$$

与 x 轴围成的区域，试计算重积分

$$\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解. 考虑变量替换

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=\lambda a(1-\cos t)\end{cases}\quad (t,\lambda)\in[0,2\pi]\times[0,1]$$

其 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\lambda)} = \det\begin{pmatrix} a(1-\cos t) & 0 \\ * & a(1-\cos t) \end{pmatrix} = a^2(1-\cos t)^4$$

因此有

$$\begin{aligned}\iint_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^{2\pi} \lambda^2 a^2(1-\cos t)^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\lambda)}\right| \mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda = a^4\int_0^1 \lambda^2\mathrm{d}\lambda \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\mathrm{d}t \\ &= \frac{32}{3}a^4\int_0^{\pi}\sin^8\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{64}{3}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 u\mathrm{d}u = \frac{64}{3}a^4\frac{7!!}{8!!}\frac{\pi}{2} = \frac{35}{12}\pi a^4\end{aligned}$$

□

习题 89. 计算平面曲线

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2} \qquad (a,b,c>0)$$

所围成区域的面积 S.

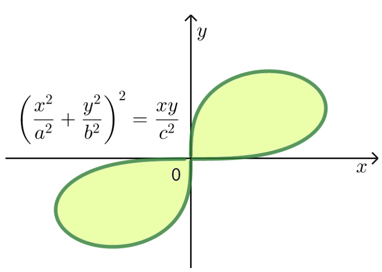
解. 从曲线表达式容易看出该曲线不经过第二、四象限，并且位于第一、三象限的部分关于原点中心对称。从而我们只需考虑该曲线所围成的区域在第一象限的部分（记为 D）即可。

考虑坐标变换 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$，则区域 D 变为 $D' := \left\{(r,\theta)\middle|\theta\in(0,\frac{\pi}{2}), r\in(0,\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta})\right\}$.

因此有

$$\begin{aligned} S &= 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D'} abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta}} r\mathrm{d}r \\ &= \frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{a^2b^2}{2c^2}\end{aligned}$$

□



习题89示意图

习题 90. 对于常数 $b > a > 0$，计算三重积分

$$\iiint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

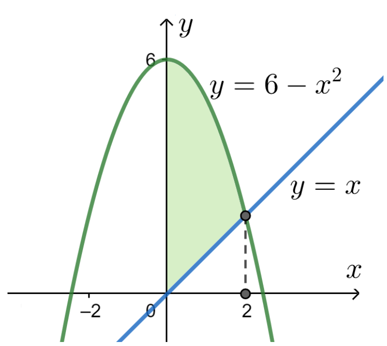
其中 $\mathbb{R}^3$ 中的区域 $D := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| z \geq 0,\, a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\right\}$.

解. 考虑球坐标换元 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$，其中 $(r,\theta,\varphi) \in [a,b] \times [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,2\pi]$. 从而

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^b r^2\sin^2\theta \cdot r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_a^b r^4\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{4\pi}{15}(b^5-a^5) \end{aligned}$$

□

习题 91. 计算由曲面 $z = 6-x^2-y^2$ 与曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所围成区域的体积。



习题91示意图

证明. 如图所示，易知该空间区域为图中绿色阴影部分绕 y 轴旋转所得的旋转体。从而该旋转体的体积为

$$V = \int_0^2 2\pi x \mathrm{d}x \int_x^{6-x^2} \mathrm{d}y = 2\pi \int_0^2 (-x^3 - x^2 + 6x)\mathrm{d}x = \frac{32}{3}\pi$$

□

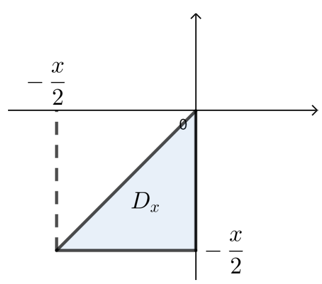
习题 92. 计算极限：

$$\lim_{x\to 0} \int_{-\frac{x}{2}}^{0} \mathrm{d}t \int_{-\frac{x}{2}}^{t} \frac{e^{-(t-u)^2}}{1-e^{-\frac{x^2}{4}}} \mathrm{d}u$$

解. 首先注意等价无穷小 $1-e^{-\frac{x^2}{4}} \sim \frac{x^2}{4} \quad (x \to 0)$，从而

$$\lim_{x\to 0} \int_{-\frac{x}{2}}^{0} \mathrm{d}t \int_{-\frac{x}{2}}^{t} \frac{e^{-(t-u)^2}}{1-e^{-\frac{x^2}{4}}} \mathrm{d}u = \lim_{x\to 0} \frac{4}{x^2} \iint_{D_x} e^{-(t-u)^2} \mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

其中积分区域 D_x 是以 $(-\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}), (0,0), (0, -\frac{x}{2})$ 这三个点为顶点的三角形区域。注意积分区域 D_x 的面积为 $\frac{x^2}{8}$.



习题92：积分区域 D_x 示意图

从而由积分中值定理知，对任意 x，存在点 $(t_x, u_x) \in D_x$ 使得

$$\iint_{D_x} e^{-(t-u)^2} \mathrm{d}t\mathrm{d}u = \frac{x^2}{8} e^{-(t_x - u_x)^2}$$

而 $x \to 0$ 时，$(t_x, u_x) \to (0,0)$，由此可知原极限 $= \frac{1}{2}e^{-(0-0)^2} = \frac{1}{2}$. □

习题 93. 设 $f(x,y)$ 为定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的二元连续函数，并且 f 在原点 $(0,0)$ 处可微，且 $f(0,0)=0$. 计算极限：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f^2(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{1}{5}x^5}}$$

解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f^2(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{1}{5}x^5}} &= \lim_{x\to0^+}\frac{5\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f^2(t,u)\mathrm{d}u}{x^5}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f^2(t,u)\mathrm{d}u}{x^4}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}f^2(t,x)\mathrm{d}t}{x^4}\end{aligned}$$

而当 $x\to0^+$ 时，f 在原点可微表明 $f(t,x)=f_x't+f_y'x+o(x)$，其中 $f_x':=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $f_y':=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 为 f 在原点处的偏导。因此

$$f^2(t,x)=(f_x')^2t^2+2f_x'f_y'tx+(f_y')^2x^2+o(x^2)$$

$$\int_0^{x^2}f^2(t,x)\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}\left((f_x')^2t^2+2f_x'f_y'tx+(f_y')^2x^2+o(x^2)\right)\mathrm{d}t=(f_y')^2x^4+o(x^4)$$

因此有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f^2(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{1}{5}x^5}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}f^2(t,x)\mathrm{d}t}{x^4}=(f_y')^2:=\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]^2$$

□

习题 94. 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，证明：对任意 $n\geq1$ 以及任意 $a>0$,

$$\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_n=\frac{1}{n!}\left(\int_0^af(t)\mathrm{d}t\right)^n$$

常规做法. 对 n 使用数学归纳法。

起始步： $n=1$ 是显然正确。

归纳步： 对于 $n>1$，如果此命题对 $n-1$ 成立，则

$$\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_n$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^a f(x_1)\mathrm{d}x_1\left(\int_0^{x^1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_2)\cdots f(x_{n-1})\mathrm{d}x_n\right)\\
&\xlongequal{\text{归纳假设}} \int_0^a f(x_1)\cdot\frac{1}{(n-1)!}\left(\int_0^{x^1} f(t)\mathrm{d}t\right)^{n-1}\mathrm{d}x_1\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^a\left(\int_0^{x^1} f(t)\mathrm{d}t\right)^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\left(\int_0^{x^1} f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_1\\
&\xlongequal{\text{换元}u=\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t} \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\int_0^a f(t)\mathrm{d}t} u^{n-1}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right)^n
\end{aligned}
$$

从而证毕。 □

以上是此题的常规做法。话说对称性是好东西，我们早已见过很多【巧妙利用对称性化简计算】的例子。而对于此题，如果对称性用得好，就能够一眼看出它显然成立。以下给出利用对称性的做法:

另证. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维立方体区域

$$
D := \left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\middle|0<x_i<a,\ \forall 1\le i\le n\right\} = [0,a]^n
$$

再考虑 n 维单纯形

$$
\triangle := \left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\middle|0<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<a\right\}
$$

容易知道以下两件事：首先，题目中的累次积分化为 n 重积分，积分区域为 $\triangle$，即

$$
\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_n = \int_\triangle f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n
$$

再注意到：

$$
\int_D f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \left(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right)^n
$$

（前方高能预警，开始使用对称性了）

注意到对于任意 $\sigma\in S_n$，其中 S_n 为 n 元置换群，考虑变量代换

$$
x_i := x'_{\sigma(i)} \qquad (1\le i\le n)
$$

则成立

$$
\int_\triangle f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{\sigma(\triangle)} f(x'_1)f(x'_2)\cdots f(x'_n)\mathrm{d}x'_1\mathrm{d}x'_2\cdots\mathrm{d}x'_n
$$

$$= \int_{\sigma(\triangle)} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

上式右边的积分区域 $\sigma(\triangle)$ 为:

$$\sigma(\triangle) := \left\{(x_1', x_2', ..., x_n') \in \mathbb{R}^n \middle| 0 < x'_{\sigma(n)} < x'_{\sigma(n-1)} < \cdots < x'_{\sigma(1)} < a\right\}$$

至此，我们证明了，对任意 $\sigma \in S_n$，

$$\int_{\triangle} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{\sigma(\triangle)} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

上式左右两边的区别在于积分区域的变化。最后再注意到对于任意 $\sigma \neq \tau \in S_n$, $\sigma(\triangle)\cap\tau(\triangle) = \varnothing$，因此

$$\begin{aligned}
&\int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_n \\
=& \int_{\triangle} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
=& \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\int_{\sigma(\triangle)} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
=& \frac{1}{n!}\int_{\bigcup\limits_{\sigma\in S_n}\sigma(\triangle)} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
=& \frac{1}{n!}\int_D f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
=& \frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right)^n
\end{aligned}$$

从而证毕。 □

以上证法可用六个字概括：“由对称性显然”。

习题 95. 设平面 $\mathbb{R}^2$ 上的闭区域 $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leq x, y \leq 1\right\}$，定义在 D 上的四次连续可微函数 $f(x,y)$ 在 D 的边界处取值恒为 0，并且在 D 上成立

$$\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right| \leq b$$

其中 $b \geq 0$ 为常数。证明：

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq \frac{b}{144}$$

证明．对于任意 $y\in[0,1]$，注意到对任意实数 C_1,C_2 都成立

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x &= (x+C_1)f(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1(x+C_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\\ &= -\left(\frac{1}{2}(x+C_1)^2+C_2\right)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\left(\frac{1}{2}(x+C_1)^2+C_2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}\frac{1}{2}(C_1+1)^2+C_2=0\\ \frac{1}{2}C_1^2+C_2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}C_1=-\frac{1}{2}\\ C_2=-\frac{1}{8}\end{cases}$，因此

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathrm{d}x \tag{$*$}$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x^2-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathrm{d}y$$

注意到当 $y=0$ 或 1 时，总有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0$，从而类似 $(*)$ 式，同理可得

$$\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1(y^2-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\mathrm{d}y$$

因此，

$$\begin{aligned}\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| &= \left|\frac{1}{4}\iint_D(x^2-x)(y^2-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\ &\leq \frac{1}{4}\iint_D\left|(x^2-x)(y^2-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\leq \frac{b}{4}\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x\int_0^1(y-y^2)\mathrm{d}y\\ &= \frac{b}{144}\end{aligned}$$

□

第 8 章　曲线积分与曲面积分

习题 96. 设 3 维欧氏空间中的曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，其中 $a>0$ 为常数。求第一型曲线积分

$$I := \int_L x^2 \mathrm{d}s$$

解. 首先注意到积分区域是在平面 $x+y+z=0$ 上的以原点 $(0,0,0)$ 为圆心，半径为 a 的圆周。再注意到积分区域关于 x,y,z 的对称性，由换元积分容易得到

$$\int_L x^2 \mathrm{d}s = \int_L y^2 \mathrm{d}s = \int_L z^2 \mathrm{d}s$$

因此有

$$\int_L x^2 \mathrm{d}s \;=\; \frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\int_L 1\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3$$

□

这种对称性方法十分巧妙，大大简化计算。若没有想到对称性，直接用基础的“笨办法”求解也是可行的，如下：

另解. 我们暴力给出曲线 L 的参数方程，进而计算该曲线积分。注意到曲线 L 位于平面 P : $x+y+z=0$ 上，而该平面有法向量 $\mathbf{n}=(1,1,1)$. 再注意到向量 $\mathbf{u}:=(1,-1,0)$ 位于平面 P，从而向量

$$\mathbf{v} := \mathbf{n}\times\mathbf{u} = (1,1,-2)$$

也位于平面 P，并且与 $\mathbf{u}$ 垂直。

又因为曲线 L 位于平面 P，且是以原点为圆心，半径 a 的圆周，记 L 上的点为 $\mathbf{r}=(x,y,z)$，则直接写出 L 的参数方程

$$\mathbf{r} = \frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{u}\sin\theta + \frac{a}{\sqrt{6}}\mathbf{v}\cos\theta \qquad \theta\in[0,2\pi]$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta \\ y & = & -\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta \\ z & = & -2\frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta \end{array} \right.$$

因此有

$$\mathrm{d}s = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta}\right|\mathrm{d}\theta = \left|\frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{u}\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{6}}\mathbf{v}\sin\theta\right|\mathrm{d}\theta = \sqrt{\frac{a^2}{2}|\mathbf{u}|^2\cos^2\theta + \frac{a^2}{6}|\mathbf{v}|^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = a\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned} \int_L x^2\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta\right)^2 \cdot a\mathrm{d}\theta \\ &= a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta + \frac{1}{6}\cos^2\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

□

习题 97. 设三维空间中的曲面 S 是圆柱面 $x^2+y^2=9$ 夹在平面 $z=0$ 与平面 $z=2$ 之间的部分，计算积分

$$\iint_S (x^2y+z^2)\mathrm{d}S$$

解. 容易写出曲面 S 的参数方程

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3\cos u \\ y = 3\sin u \\ z = v \end{array} \right. \qquad (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,2]$$

则面积元 $\mathrm{d}S = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 3\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. 因此有

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2y+z^2)\mathrm{d}S &= \iint_{[0\times 2\pi]\times[0,2]} (27\cos^2 u\sin u + v^2)\cdot 3\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= 162\int_0^{2\pi}\cos^2 u\sin u\mathrm{d}u + 6\pi\int_0^2 v^2\mathrm{d}v = 16\pi \end{aligned}$$

□

事实上，由积分区域关于 xOz 平面的对称性，直接看出 $\iint_S x^2y\mathrm{d}S = 0$，从而原积分 $= \iint_S z^2\mathrm{d}S = 2\pi\times 3\int_0^2 z^2\mathrm{d}z = 16\pi$，可以口算出来。

习题 98. 设 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的部分。求 Σ 的面积。

解. 注意到曲面 Σ 关于 xOy 平面是对称的，并且 Σ 在 xOy 的上半部分 Σ^+ 具有参数表示

$$z(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\qquad (x-\frac{a}{2})^2+y^2<\frac{a^2}{4}$$

记向量 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 为曲面 Σ^+ 上的一点，则 $\begin{cases}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}=(1,0,-\frac{x}{z})\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}=(0,1,-\frac{y}{z})\end{cases}$，从而面积元

$$\mathrm{d}S=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right\|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $(x,y)\in D:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|(x-\frac{a}{2})^2+y^2<\frac{a^2}{4}\right\}$. 再考虑极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则此变换将区域 D 变为 $D'=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\middle|\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),r\in(0,a\cos\theta)\right\}$. 从而

$$\begin{aligned}\Sigma\text{ 的面积}&=2\iint_{\Sigma^+}\mathrm{d}S=2\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2a\iint_{D'}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r\\&=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=4a^2(\frac{\pi}{2}-1)\end{aligned}$$

□

习题 99. 求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 含在柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 内的部分的面积 S.

解. 考虑平面第一象限内的区域 $D:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x,y\geq 0,\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}<1\right\}$，则注意到题目中曲面的对称性，类似上一题，

$$S=8\iint_D\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

考虑变量代换 $\begin{cases}x=r\cos^3\theta\\ y=r\sin^3\theta\end{cases}$，则区域 D 变为 $D':=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\middle|r\in(0,1),\theta\in(0,\frac{\pi}{2})\right\}$，并且该变换的 Jacobian 为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\cos^3\theta & -3r\cos^2\theta\sin\theta\\ \sin^3\theta & 3r\sin^2\theta\cos\theta\end{pmatrix}=3r\sin^2\theta\cos^2\theta$$

使用此变换，可得

$$\begin{aligned}
S &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}} \cdot 3r\sin^2\theta\cos^2\theta \mathrm{d}r \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin^2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}} \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin^2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}} \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin^2\theta \mathrm{d}\theta \cdot \frac{2}{\cos^6\theta+\sin^6\theta}\left(1-\sqrt{1-(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}\right)
\end{aligned}$$

再注意到

$$\begin{aligned}
\cos^6\theta+\sin^6\theta &= (\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta) \\
&= (\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-3\cos^2\theta\sin^2\theta \\
&= 1-3\cos^2\theta\sin^2\theta
\end{aligned}$$

继续整理原式，得到

$$\begin{aligned}
S &= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{1-3\cos^2\theta\sin^2\theta}\left(1-\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= 12\int_0^{\pi} \frac{\frac{1}{4}\sin^2\theta}{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4-3\sin^2\theta}-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4-3\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta - 16\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4-3\sin^2\theta} - 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta + 4\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta - 16\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\mathrm{d}(\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta} - 4\pi + 4\sqrt{3} \\
&= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta - 16\sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{1+3t^2}\mathrm{d}t - 4\pi + 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

再注意到

$$\int_0^1 \frac{1}{1+3t^2}\mathrm{d}t \xlongequal{u=\sqrt{3}t} \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{5+3\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\cos\theta} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+4} = \frac{\pi}{4}$$

代入原式，即可得到

$$S = 32 \cdot \frac{\pi}{4} - 16\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - 4\pi + 4\sqrt{3} = 4(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$$

□

习题 100. 设 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部分。对于曲面 Σ 上的点 $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$，记 $\Pi_{\boldsymbol{p}}$ 为曲面 Σ 在点 $\boldsymbol{p}$ 处的切平面，再记 $\rho(\boldsymbol{p}) = \rho(x, y, z)$ 为原点到平面 $\Pi_{\boldsymbol{p}}$ 的距离。试计算曲面积分

$$\iint_\Sigma \frac{z}{\rho(x,y,z)} \mathrm{d}S$$

证明. 对于 $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$，容易计算出切平面 $\Pi_{\boldsymbol{p}_0}$ 的方程为 $x_0 x + y_0 y + 2z_0 z = 2$, 因此

$$\rho(\boldsymbol{p}_0) = \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (2z_0)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + z_0^2}}$$

考虑曲面 Σ 的参数表示 $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta \\ z = \sin\varphi \end{cases}$，其中 $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. 则容易验证切向量 $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta}$ 与 $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi}$ 垂直，并且 $\left\|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta}\right\| = \sqrt{2}\cos\varphi$，$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi}\right\| = \sqrt{1 + \sin^2\varphi}$. 从而面积元 $\mathrm{d}S = \sqrt{2}\cos\varphi\sqrt{1+\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. 从而

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \frac{z}{\rho(x,y,z)} \mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\cos\varphi\sqrt{1+\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi(1+\sin^2\varphi)\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^1 t(1+t^2)\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

□

习题 101. 设 Σ 为三维空间中质量分布均匀的曲面，表达式为

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (x, y, z \geq 0, x + y \leq a)$$

其中 $a > 0$ 为常数。求 Σ 的重心的坐标。

解. 设 Σ 的重心坐标为 (x_0, y_0, z_0). 由曲面 Σ 的对称性，容易看出 $x_0 = y_0$. 注意曲面 Σ 的参数表示 $z(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，其中 $(x,y) \in \triangle := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x, y \geq 0,\ x + y \leq a\right\}$. 容易求出 Σ 在此参数下的面积元 $\mathrm{d}S = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 从而有

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S &= a\iint_{\triangle} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = a\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{a-y} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x \\
&= a\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-y}{a+y}}\mathrm{d}y \xlongequal{u=\arcsin\sqrt{\frac{a-y}{a+y}}} a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 u\mathrm{d}\frac{\cos^2 u}{1+\sin^2 u} \\
&= -a^2\left(\left.\frac{u\cos^2 u}{1+\sin^2 u}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^2 u}{1+\sin^2 u}\mathrm{d}u\right) \\
&= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{1+\sin^2 u} - 1\right)\mathrm{d}u \xlongequal{t=\tan u} -\frac{\pi}{2}a^2 + 2a^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{2}a^2 + a^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi a^2 \\
\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S &= a\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^{a-y}\frac{x}{\sqrt{a^2-y^2-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^{(a-y)^2}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2-t}}\mathrm{d}t \\
&= a\int_0^a\left(\sqrt{a^2-y^2} - \sqrt{2y(a-y)}\right)\mathrm{d}y = \frac{2-\sqrt{2}}{8}\pi a^3 \\
\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S &= \iint_{\triangle}\frac{a\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\iint_{\triangle}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}a^3
\end{aligned}$$

因此 Σ 的重心的坐标 (x_0, y_0, z_0) 满足

$$\begin{aligned}
x_0 = y_0 &= \frac{\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S} = \frac{\sqrt{2}}{4}a \\
z_0 &= \frac{\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S} = \frac{\sqrt{2}+1}{\pi}a
\end{aligned}$$

□

习题 102. （*Poisson* 积分公式）

设单变量连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$a,b,c$ 为不全为零的常数，记 $\rho = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

（*1*）若 S 为三维空间中的单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，证明如下的 ***Poisson* 积分公式**：

$$\iint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^1 f(\rho t)\mathrm{d}t$$

（2）设 B 为三维空间中的单位球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$，证明：

$$\iiint_B f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1}f(\rho t)\mathrm{d}t$$

证明. **(1)**令三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}\frac{a}{\rho} & \frac{b}{\rho} & \frac{c}{\rho}\\ * & * & *\\ * & * & *\end{pmatrix}$，其中适当选取实数 $*$ 使得 A 为正交矩阵。考虑变量代换 $\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. 注意积分区域 S 的旋转对称性，易知

$$\iint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=\iint_S f(\rho u)\mathrm{d}S$$

之后将 $\mathbb{R}^3=\{(u,v,w)\}$ 中的单位球面（仍记为 S）视为绕 u 轴的旋转曲面，从而由旋转曲面的积分公式，

$$\iint_S f(\rho u)\mathrm{d}S \;=\; \int_{-1}^{1} f(\rho u)\cdot 2\pi\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sqrt{1-u^2}\right)^2}\mathrm{d}u=2\pi\int_{-1}^{1}f(\rho u)\mathrm{d}u$$

(2)记 $r:=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$\iiint_B f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2}f\left(\frac{ax+by+cz}{r}\right)\mathrm{d}S$$

对于每个 $0\le r\le 1$，考虑变量代换 $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}$，再注意利用已证明的（1），

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2}f\left(\frac{ax+by+cz}{r}\right)\mathrm{d}S=\int_0^1\mathrm{d}r\iint_S f(au+bv+cw)\cdot r^2\mathrm{d}S\\ &= \int_0^1 r^2\mathrm{d}r\int_S f(au+bv+cw)\mathrm{d}S=\frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1}f(\rho u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

□

习题 103. 设平面曲线 $L=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2=a^2\right\}$，其中 $a>0$ 为常数，曲线 L 取顺时针定向。计算积分：

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))\mathrm{d}y$$

解. 注意到在曲线 L 上，有 $\sqrt{x^2+y^2}=a$，从而

$$\text{原式}=\oint_L a\mathrm{d}x+y(xy+\ln(x+a))\mathrm{d}y=\oint_L (xy^2+y\ln(x+a))\mathrm{d}y$$

注意积分区域的对称性，$\oint_L y\ln(x+a)\mathrm{d}y=0$，从而原式 $=\oint_L xy^2\mathrm{d}x$. 注意曲线 L 的定向，取 L 的定向相容的参数表示 $\begin{cases} x=a\sin\theta \\ y=a\cos\theta \end{cases}$，从而

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi} a^3\sin\theta\cos^2\theta(-a\sin\theta)\mathrm{d}\theta=-4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{a^4\pi}{4}$$

□

习题 104. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的定向曲面 Σ 为区域

$$\Omega:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x>\sqrt{y^2+z^2}, 1<x^2+y^2+z^2<2\right\}$$

的外表面，$f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的可微函数，计算曲面积分

$$\iint_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[y^3+f(yz)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[z^3+f(yz)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解. 使用 Gauss 公式，有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iiint_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3)+\frac{\partial}{\partial y}[y^3+f(yz)]+\frac{\partial}{\partial z}[z^3+f(yz)]\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_\Omega(y+z)f'(yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

考虑变换 $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \\ z'=-z \end{cases}$，注意积分区域 Ω 关于此变换对称，利用如此对称性易知

$$\iiint_\Omega(y+z)f'(yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

之后考虑球坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$，则积分区域 Ω 变为 $\Omega' := \left\{(r,\theta,\varphi)\Big| r\in(1,\sqrt{2}),\ \theta\in(0,\frac{\pi}{4}),\ \varphi\in(0,2\pi)\right\}$，从而有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\iiint_{\Omega'} r^2\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= 3\int_1^{\sqrt{2}} r^4\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{5}(4\sqrt{2}-1)(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{5}(9\sqrt{2}-10) \end{aligned}$$

□

习题 105. 设 S 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 介于平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 之间部分的外侧，试计算曲面积分

$$\iint_S -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解. 注意到曲面 S 的法向量始终与 xOy 平面平行，从而由第二型曲面积分的几何意义容易知道

$$\iint_S (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

再注意曲面 S 关于 xOz 平面的对称性，容易知道

$$\iint_S -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 2\iint_{S'} -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

其中 S' 是曲面 S 位于 $\left\{(x,y,z)\Big| y\geq 0\right\}$ 的部分。考虑 S' 的与其定向相容的参数表示 (θ,z)：$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = z \end{cases}$，其中 $\theta\in[0,\pi]$, $0\leq z\leq 2-2\cos\theta$. 因此有

$$\begin{aligned} \iint_S -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\iint_{S'} -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -2\iint_{S'} 2\sin\theta\mathrm{d}z\wedge(-2\sin\theta\mathrm{d}\theta) \\ &= -8\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2-2\cos\theta}\mathrm{d}z \\ &= -16\int_0^{\pi}\sin^2\theta(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta = -8\pi \end{aligned}$$

□