2021-2022（1）机电高数期末考题解析

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 函数 $y=\arcsin\frac{x+1}{2}-\frac{\sqrt{1-x}}{3}$ 的定义域为（　　）

A. $x\le 1$　　**B.** $-3\le x\le 1$　　**C.** $-3<x<1$　　**D.** $\{x|x<1\}\cap\{x|-3\le x\le 1\}$

解析：由 $\begin{cases}\left|\frac{x+1}{2}\right|\le 1\\ 1-x\ge 0\end{cases}\Rightarrow -3\le x\le 1$，选 **B.**

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)(1-2x)(1-3x)+a}{\sin x}=-6$，则 $a=$（　　）

A. 1　　**B.** 3　　**C.** -1　　**D.** -3

解析：选 **C.** 因为 $-6=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)(1-2x)(1-3x)+a}{\sin x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}[(1-x)(1-2x)(1-3x)+a]=0\Rightarrow 1+a=0$。

3. $x=0$ 是 $f(x)=\frac{x^2+x}{|x|}$ 的（　　）

A. 连续点　　**B.** 无穷间断点　　**C.** 可去间断点　　**D.** 跳跃间断点

解析：$x=0$ 是 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 无意义的点，故为间断点，又

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{|x|},\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{-x}=-\lim_{x\to 0^-}(x+1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1,$$ 故选 **D.**

4. 当 $x\to 0^+$ 时，$\ln^{\alpha}(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的可能取值范围是（　　）

A. $(0,2)$　　**B.** $(0,\frac{1}{2})$　　**C.** $(2,+\infty)$　　**D.** $(1,2)$

解析：由高阶无穷小的定义以及等价无穷小替换，得

$$0=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^{\alpha}(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(2x)^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to 0^+}2^{\alpha}x^{\alpha-1},\quad 0=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}2^{-\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{2}{\alpha}-1},$$

得 $\begin{cases}\alpha-1>0\\ \frac{2}{\alpha}-1>0\end{cases}\Rightarrow 1<\alpha<2$，选 **D**

5. 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数且 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=$（　　）

A. -1　　**B.** -2　　**C.** 0　　**D.** 1

解析：因 $f(x)$ 的二阶导数连续，则 $f(x),f'(x),f''(x)$ 在 $x=0$ 均连续，得

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)=1,\ \lim\limits_{x\to0}f''(x)=f''(0)=-2$，从而由洛必达法则

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}=-1$。选 **A.**

6. 设 $f(x)=\dfrac{x^n-1}{x-1}$, 则 $f^{(n)}(2)=$（　　）

A. $n!$　**B.** $-n!$　**C.** 0　**D.** 1

解析： $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1),\ f(x)=\dfrac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ 的最高幂次项是 x^{n-1}, 得 $f^{(n-1)}(x)=(n-1)!,\ f^{(n)}(x)=0$，故选 **C.**

7. 函数 $y=\left(\dfrac{1-x^2}{x^2-x-2}\right)^{2022}$ 的水平渐近线方程为（　　）

A. $y=-2$　**B.** $y=-1$　**C.** $y=1$　**D.** $y=2$

解析： 因 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{x^2-x-2}\right)^{2022}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{x^2-x-2}\right)^{2022}=(-1)^{2022}=1$，函数的水平渐近线 $y=1$，选 **C.**

8. 设 xe^{x^2} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_0^1 xf'(x)dx=$（　　）

A. $2e+1$　**B.** $e+1$　**C.** $2e$　**D.** e

解析： 由 xe^{x^2} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)=(xe^{x^2})'=e^{x^2}+xe^{x^2}(2x)=e^{x^2}(1+2x^2)$，再由分部积分公式和牛莱公式得 $\int_0^1 xf'(x)dx=\int_0^1 xdf(x)=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx=f(1)-xe^{x^2}\Big|_0^1=f(1)-e=3e-e=2e$,选 **C.**

9. 定积分 $\int_{-1}^1 x^{2022}(e^x-e^{-x}+1)dx=$（　　）

A. 0　**B.** $\dfrac{1}{2023}$　**C.** $\dfrac{2}{2023}$　**D.** $\dfrac{1}{1011}$

解析： 设 $f(x)=x^{2022}(e^x-e^{-x})$，则 $f(-x)=(-x)^{2022}(e^{-x}-e^x)=-x^{2022}(e^x-e^{-x})=f(x)$，即 $x^{2022}(e^x-e^{-x})$ 在 $[-1,1]$ 上是奇函数，故 $\int_{-1}^1 x^{2022}(e^x-e^{-x}+1)dx=\int_{-1}^1 x^{2022}dx=2\int_0^1 x^{2022}dx=\dfrac{2}{2023}$,故选 **C.**

10. 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+2x+5}dx=$（　　）

A. 0　**B.** $\dfrac{\pi}{2}$　**C.** π　**D.** 发散

解析：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+4}d(x+1)\overset{}{\underset{u=x+1}{=\!=\!=\!=}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2+2^2}du=\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$=\frac{1}{2}(\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\frac{u}{2}-\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan\frac{u}{2})=\frac{1}{2}[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})]=\frac{\pi}{2}$ 故选 B.

二、填空题（每题 2 分，共 10 分）

11. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}+\alpha x+\frac{3}{2})=\frac{1}{2}$，则常数 $\alpha=$ ________________。

解析： 通分并注意到 $x\to\infty$ 时，多项式的比值极限等于分子分母多项式中 x 的最高幂次的系数比，得 $\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}+\alpha x+\frac{3}{2})\Rightarrow-1=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}+\alpha x)\Rightarrow-1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+\alpha)x^2+\alpha x+1}{x+1}\Rightarrow\begin{cases}1+\alpha=0\\\alpha=-1\end{cases}\Rightarrow\alpha=-1$。

12. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^{3x}=e^5$，则 $k=$ ________________。

解析： $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^{3x}=e^5$ 是 1^∞ 型极限，故 $e^5=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^{3x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}3x(1+\frac{k}{x}-1)}=e^{3k}$， $k=\frac{5}{3}$。

13. 设 $y=f(x^2+1)$，其中函 $f(x)$ 数可导，则 $y'=$ ________________。

解析：按抽象复合函数的求导方法， $y'=\frac{d}{dx}[f(x^2+1)]=f'(x^2+1)(x^2+1)'=2xf'(x^2+1)$，这里 $f'(x^2+1)$ 表示 $f(x^2+1)$ 对 x^2+1 求导数。

14. 双曲线 $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率 K ________________。

解析： $y'=(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2},y''=(-x^{-2})'=-(-2)x^{-3}=\frac{2}{x^3}$，按曲率公式 $K=\frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{(1,1)}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$。

15. 已知 $\int f(x)dx=xe^x-e^x+C$，则 $\int f'(x)dx=$ ________________。

解析：由 $\int f(x)dx=xe^x-e^x+C$ 得 $f(x)=\frac{d}{dx}(\int f(x)dx)=(xe^x-e^x+C)'=e^x+xe^x-e^x=xe^x$，

注意到 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的原函数，按不定积分的定义得 $\int f'(x)dx=f(x)+C=xe^x+C$。

三、解答题（每题 12 分，共 60 分）

16. **求极限：（1）** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{x^2\ln(1+x)}$ **（2）** $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin x}{x^3}-\frac{1}{x^2})$。

解析：注意到 $x\to0$ 时，分子分母极限都是 0，是 $\frac{0}{0}$ 型极限， 用洛必达法则，原极限等于分子分母分别对 x 求导再求极限，但注意到 $x^2\ln(1+x)$ 对 x 求导较复杂，可以先用等价无穷小替

换，即用 $x^2\cdot x$ 替换 $x^2\ln(1+x)$ 后再求导简化计算， 得

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{x^2\ln(1+x)}\overset{}{\underset{x替换\ln(1+x)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{x^2\cdot x}\underset{分子分母分别对x求导}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\underset{分子e^{x^2}-1替换为x^2}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}。$$

（2）$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\underset{通分}{=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\underset{\frac{0}{0}型极限用洛必达法则}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\underset{分子\cos x-1替换为-\frac{1}{2}x^2}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}。$$

$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3}-\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}$ ×，因为差的极限等于极限的差，极限必须是常数才成立。

17. （1）函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-e^{x(1-y)}=2x$ 确定，求 $dy|_{x=0}$。

（2）设 $y=f(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=3t\\y=t\sin t\end{cases}$ 确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$。

解析：（1）方程 $y-e^{x(1-y)}=2x$ 两边同时对 x 确求导，得 $y'-e^{x(1-y)}(x(1-y))'=2$，即

$y'-e^{x(1-y)}(1-y+x(-y'))'=2\Rightarrow y'=\frac{2+(1-y)e^{x(1-y)}}{1+xe^{x(1-y)}}$，注意到由 $y-e^{x(1-y)}=2x$ 知 $x=0$ 时， $y=1$。

从而 $dy|_{x=0}=y'|_{x=0}dx=\left.\frac{2+(1-y)e^{x(1-y)}}{1+xe^{x(1-y)}}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}dx=2dx$。

（2）$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t+t\cos t}{3}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\cos t+\cos t-t\sin t}{3}}{3}=\frac{2\cos t-t\sin t}{9}$，

$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=\frac{2\cos t-t\sin t}{9}|_{t=0}=\frac{2}{9}$.

18（1）求不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}dx$；（2）设 $f(x)=\begin{cases}1-x^2,x>0\\xe^{-x},x\le0\end{cases}$，求 $\int_0^2f(x-1)dx$

解析：（1）法一：$\int\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}dx=2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}dx=2\int\sin\sqrt{x}d\sqrt{x}=-2\cos\sqrt{x}+C$，

法二：$\int\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}dx\underset{t=\sqrt{x},x=t^2,dx=2tdt}{=\!=\!=\!=\!=\!=}2\int\frac{1}{t}\sin t\cdot tdt=2\int\sin tdt=-2\cos t+C=-2\cos\sqrt{x}+C$

（2）法一：

$$\int_0^2f(x-1)dx\underset{t=x-1,dx=dt}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\int_{-1}^1f(t)dt=\int_{-1}^0te^{-t}dt+\int_0^1(1-t^2)dt=-\int_{-1}^0tde^{-t}+\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1=-[te^{-t}\Big|_{-1}^0-\int_{-1}^0e^{-t}dt]+\frac{2}{3}$$

$$=-[0-(-e)+e^{-t}\Big|_{-1}^0]+\frac{2}{3}=-[e+1-e]+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3};$$

法二：$f(x-1)=\begin{cases}1-(x-1)^2,x-1>0\\(x-1)e^{-(x-1)},x-1\le0\end{cases}=\begin{cases}x-x^2,x>1\\(x-1)e^{-(x-1)},x\le1\end{cases}$，因

$$\int_0^1 (x-1)e^{-(x-1)}dx=\int_0^1 (x-1)e^{-(x-1)}d(x-1)\overset{}{\underset{u=x-1}{=\!=\!=\!=\!=}}\int_{-1}^0 ue^{-u}du=-\int_{-1}^0 ude^{-u}=-(ue^{-u}\Big|_{-1}^0-\int_{-1}^0 e^{-u}du)$$

$=-[0-(-e)+e^u\Big|_{-1}^0]=-[e+1-e]=-1$；$\int_1^2 (2x-x^2)dx=x^2\Big|_1^2-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=3-\frac{1}{3}(8-1)=\frac{2}{3}$，得

$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_0^1 (x-1)e^{-(x-1)}dx+\int_1^2 (2x-x^2)dx=-1+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$。

19.设 $f(x)=-1+\frac{x}{(x+3)^2}$，求（1）函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;（2）函数 $f(x)$ 的凹凸区间及拐点。

解析:（1）函数的定义域为 $\{x|x\neq -3\}$，

$$f'(x)=[x(x+3)^{-2}]'=(x+3)^{-2}+x(-2)(x+3)^{-3}=(x+3)^{-3}[(x+3)-2x]=\frac{3-x}{(x+3)^3},$$

$$f''(x)=[(x+3)^{-3}(3-x)]'=(-3)(x+3)^{-4}(3-x)+(x+3)^{-3}(-1)=(x+3)^{-4}[(3x-9)-(x+3)]=\frac{2x-12}{(x+3)^4},$$

（1）由 $f'(x)=\frac{3-x}{(x+3)^3}<0$，得 $\begin{cases}3-x<0\\(x+3)^3>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3-x>0\\(x+3)^3<0\end{cases}$，得 $x>3$ 或 $x<-3$，从而单减区间为 $(-\infty,-3)$ 和 $[3,+\infty)$；

由 $f'(x)=\frac{3-x}{(x+3)^3}>0$，得 $\begin{cases}3-x<0\\(x+3)^3<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3-x>0\\(x+3)^3>0\end{cases}$，得 $-3<x<3$，从而单增区间为 $(-3,3]$；又 $f'(3)=0,f''(3)<0$，得极大值 $f(3)=-\frac{11}{12}$。

（2）由 $f''(x)=\frac{2x-12}{(x+3)^4}<0$，得 $x<6$，从而得凸区间为 $(-\infty,-3)$ 和 $(-3,6]$；

由 $f''(x)=\frac{2x-12}{(x+3)^4}>0$，得 $x>6$，从而得凹区间为 $[6,+\infty)$，得拐点 $(6,f(6))=(6,-\frac{75}{81})=(6,-\frac{25}{27})$。

20. 已知平面图形由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$ 围成，求

（1）该平面图形的面积;（2）该平面图形的面积绕轴旋转一周所得到的旋转体的体积。

解析:（1）法一: 选 x 为积分变量，由对称性，得椭圆盘的面积 A 为第一象限部分面积的 4 倍，第一象限部分椭圆盘的上边界曲线方程为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},0\le x\le a$，下边界曲线方程为 $y=0,0\le x\le a$，于是椭圆盘的面积为

$$A=4\int_0^a(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-0)dx=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx\underset{x=a\sin t,t\in[0,\frac{\pi}{2}]}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\cos tdt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=2ab[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}]=2ab[\frac{\pi}{2}+0]=\pi ab,$$

法二: 选 y 为积分变量，由对称性，得椭圆盘的面积 A 为第一象限部分面积的 4 倍，第一象限部分椭圆盘的右边界曲线方程为 $x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},0\le x\le b$，左边界曲线方程为 $x=0,0\le x\le b$，

于是椭圆盘的面积为

$$A=4\int_0^b (x-0)dy=\frac{4a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2-y^2}dy \underset{y=b\sin t,t\in[0,\frac{\pi}{2}]}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \frac{4a}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\cos t\cdot b\cos t dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\ dt=2ab[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}]$$

$$=2ab[\frac{\pi}{2}+0]=\pi ab$$ ；

（2） 此椭球体体积可看成 x 轴上方的半个椭圆盘绕 x 轴旋转得到的旋转体体积，此半个椭圆盘的上边界曲线方程为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},-a\le x\le a$，下边界曲线方程为 $y=0,-a\le x\le a$，于是椭球体的体积为

$$V=\pi\int_{-a}^{a}[(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2})^2-0^2]dx=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)dx=\frac{2\pi b^2}{a^2}(a^3-\frac{1}{3}a^3)=\frac{4}{3}\pi ab^2$$ 。