第六章 定积分的应用

第一节 定积分的元素法

设所求量为U，取x为积分变量，$x\in[a,b]$，在$[a,b]$上任取子区间$[x,x+dx]$，若U在此区间上的部分量$\Delta U\approx f(x)dx$（称$dU=f(x)dx$为U的微元，且$\Delta U-dU=o(dx)$），则$U=\int_a^b dU=\int_a^b f(x)dx$。这种方法称为**定积分的元素法**或**微元法**。

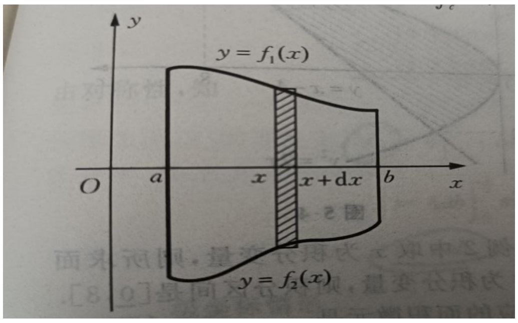
若取y为积分变量，$y\in[c,d]$，在$[c,d]$上任取子区间$[y,y+dy]$，若U在此区间上的部分量$\Delta U\approx g(y)dy$（称$dU=g(y)dy$为U的微元，且$\Delta U-dU=o(dy)$），则$U=\int_c^d dU=\int_c^d f(y)dy$。

第二节 定积分在几何学上的应用

一、平面图形的面积

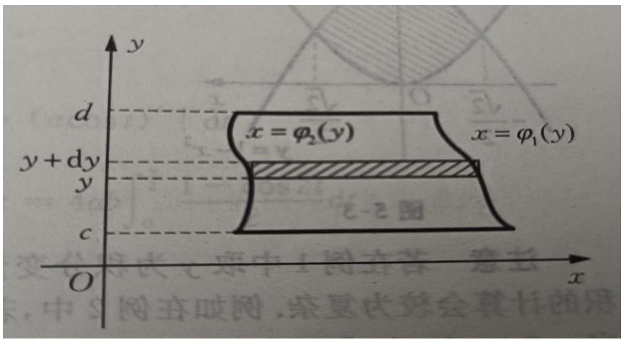
1. 直角坐标情形

(1) **求曲线**$y=f_1(x),y=f_2(x),f_1(x)\ge f_2(x)$**和直线**$x=a,x=b,a<b$**围成的平面图形面积**$A$.



取x为积分变量，$x\in[a,b]$，在$[a,b]$上任取子区间$[x,x+dx]$，平面图形在此区间上的对应部分面积$\Delta A\approx[f_1(x)-f_2(x)]dx=dA$（**面积元素**），则$A=\int_a^b dA=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx$，即取$x$为积分变量，平面图形面积=(上边界方程-下边界方程)作被积函数定积分。

(2) **求曲线**$x=\varphi_1(y),x=\varphi_2(y),\varphi_1(y)\ge\varphi_2(y)$**和直线**$y=c,y=d,c<d$**围成的平面图形面积**$A$.



取 y 为积分变量， $y\in[c,d]$，在 $[c,d]$ 上任取子区间 $[y,y+dy]$，平面图形在此区间上的对应部分面积 $\Delta A\approx[\varphi_1(y)-\varphi_2(y)]dy=dA$（**面积元素**），则 $A=\int_c^d dA=\int_c^d[\varphi_1(y)-\varphi_2(y)]dy$，即取 y 为积分变量，平面图形面积=(右边界方程-左边界方程)作被积函数定积分。

例 求曲线 $y^2=x,y=x^2$ 围成的平面图形面积 A

解 取 x 为积分变量，$x\in[0,1]$，平面图形上边界方程为 $y=\sqrt{x}$，下边界方程为 $y=x^2$，所求平面图形面积 $A=\int_0^1[\sqrt{x}-x^2]dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$；

取 y 为积分变量，$y\in[0,1]$，平面图形右边界方程为 $x=\sqrt{y}$，左边界方程为 $x=y^2$，所求平面图形面积 $A=\int_0^1[\sqrt{y}-y^2]dy=\frac{1}{3}$.

例 求曲线 $y^2=2x,y=x-4$ 围成的平面图形面积 A。

解 取 x 为积分变量，$x\in[0,8]$，

当 $x\in[0,2]$ 时，平面图形上边界方程为 $y=\sqrt{2x}$，下边界方程为 $y=-\sqrt{2x}$，此时平面图形面积为 $\int_0^2[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})]dx=2\int_0^2\sqrt{2x}dx=\frac{16}{3}$；

当 $x\in[2,8]$ 时，平面图形上边界方程为 $y=\sqrt{2x}$，下边界方程为 $y=x-4$；此时平面图形面积为 $\int_2^8[\sqrt{2x}-(x-4)]dx=\frac{56}{3}-6=\frac{38}{3}$；

所求平面图形面积 $A=\frac{16}{3}+\frac{38}{3}=\frac{54}{3}=18$.

取 y 为积分变量，$y\in[-2,4]$，平面图形右边界方程为 $x=4+y$，左边界方程为 $x=\frac{1}{2}y^2$，平面图形面积为 $A=\int_{-2}^4[4+y-(\frac{1}{2}y^2)]dy=(4y+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}y^3)\Big|_{-2}^4=18$.

例 求曲线 $y=e^x-2,x\in[-2,2]$ 与 x 轴围成的平面图形面积 A。

解 取 x 为积分变量，$x\in[-2,2]$，

当 $x\in[-2,\ln 2]$ 时，平面图形上边界方程为 $y=0$，下边界方程为 $y=e^x-2$，此时平面图形面积为 $\int_{-2}^{\ln 2}[0-(e^x-2)]dx=e^{-2}-2+2(\ln 2+2)=2\ln 2+2+e^{-2}$；

当 $x\in[\ln 2,2]$ 时，平面图形上边界方程为 $y=e^{x}-2$，下边界方程为 $y=0$；此时平面图形面积为

$$\int_{\ln 2}^{2}[e^{x}-2-0]dx=e^{2}-2-2(2-\ln 2)=2\ln 2-6+e^{2}；$$

所求平面图形面积 $A=4\ln 2+e^{2}+e^{-2}-4$.

例 求椭圆曲线 $\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1(a,b>0)$ 围成的平面图形面积 A。

解　根据对称性，$A=4$ 倍第一象限图形面积 A_1. 下求 A_1，取 x 为积分变量，$x\in[0,a]$，平面图形上边界方程为 $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^{2}}{a^{2}}}=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}$，下边界方程为 $y=0$，面积

$$A_1=\int_0^a[\frac{b}{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}-0]dx\overset{}{\underset{x=a\sin t,t\in[0,\frac{\pi}{2}]}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}b\cos t\cdot a\cos tdt=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{ab}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi ab}{4}$$ 。所求平面图形面积 $A=4A_1=\pi ab$。

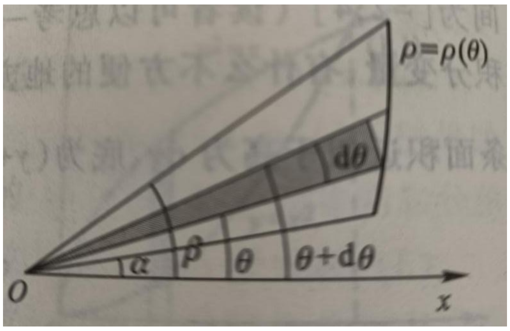
2. **极坐标情形**

定义　在直角坐标平面上，称坐标原点为**极点**，x 轴正半轴为**极轴**。任一点 $A(x,y)$ 到原点(极点)的距离 $\rho\in[0,+\infty)$ 称为**点 A 的极径**，从 x 轴正半轴(极轴)出发逆时针旋转到点 A 的极径形成的角度 $\theta\in[0,2\pi]$ 称为**点 A 的极角**. 二维数组 (ρ,θ) 称为**点 A 的极坐标**。故同一点 A 既有直角坐标 (x,y)，又有极坐标 (ρ,θ)，它们的关系为 $\rho=\sqrt{x^{2}+y^{2}},\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 或 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$。

注　极坐标为 (ρ,θ) 和 $(\rho,\theta+2k\pi),k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ 的点都表示同一点，比如极坐标为 $(1,\dfrac{3}{2}\pi),(1,-\dfrac{\pi}{2})$ 的点都表示直角坐标为 $(0,1)$ 的同一点。

有些曲线，其直角坐标方程较复杂，但其极坐标方程较简单，比如，圆周 $x^{2}+y^{2}=R^{2},R>0$ 和射线 $y=x,x\geq 0$，其极坐标方程分别为 $\rho=R,\theta=\dfrac{\pi}{4}$。当这些方程作被积函数积分时，采用极坐标方程将使计算变得简单。

求曲线 $\rho=\varphi(\theta),\varphi(\theta)\geq 0$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 围成的平面图形面积 A。



取θ为积分变量，$\theta \in [\alpha,\beta]$，在$[\alpha,\beta]$上任取子区间$[\theta,\theta+d\theta]$，平面图形在此区间上的对应部分面积$\Delta A \approx \frac{1}{2}\varphi^2(\theta)d\theta = dA$(面积元素)，则$A=\int_\alpha^\beta dA=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta)d\theta$，即取极角$\theta$为积分变量，包含原点(极点)的平面图形面积=曲边方程平方的一半作被积函数定积分。

例 求阿基米德螺线$\rho = a\theta,(a>0)$上相应于θ从0变到2π的一段弧与极轴围成的平面图形面积A。

解　注意到A是射线$\theta=0,\theta=2\pi$及曲线$\rho=a\theta,(a>0)$围成的平面图形面积，故

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\theta)^2 d\theta=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\theta^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{4\pi^3a^2}{3}。$$

例 求心形曲线$\rho=a(1+\cos\theta),(a>0)$，即$x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$围成的平面图形面积$A$。

解　根据对称性，$A=$极轴上方图形面积A_1的 2 倍．注意到A_1是射线$\theta=0,\theta=\pi$及曲线$\rho=a(1+\cos\theta)$围成的平面图形面积，故

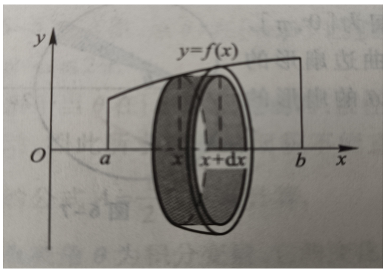
$$A_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[a(1+\cos\theta)]^2 d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta)\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{4}\pi a^2。$$故所求平面图形面积$A=\frac{3}{2}\pi a^2$。

二、体积

1.　旋转体的体积

(1)**求连续曲线$y=f(x)\ge 0$和直线$x=a,x=b,a<b,y=0$围成的曲边梯形绕x轴旋转得到的旋转体体积V_x。**



取 x 为积分变量，$x\in[a,b]$，在 $[a,b]$ 上任取子区间 $[x,x+dx]$，旋转体在此区间上的对应部分体积 $\Delta V\approx\pi[f(x)]^2dx=dV$（体积元素），则 $V=\int_a^b dV=\pi\int_a^b f^2(x)dx$，即取 x 为积分变量，绕 x 轴旋转得到的旋转体体积=曲边方程 $f(x)$ 平方的 π 倍作被积函数定积分。

(2) 求曲线 $x=\psi(y),\psi(y)\ge 0$ 和直线 $y=c,y=d,c<d,x=0$ 围成的曲边梯形绕 y 轴旋转得到的旋转体体积 V_y。

取 y 为积分变量，$y\in[c,d]$，在 $[c,d]$ 上任取子区间 $[y,y+dy]$，旋转体在此区间上的对应部分体积 $\Delta V\approx\pi[\psi(y)]^2dy=dV$（体积元素），则 $V=\int_c^d dV=\pi\int_c^d \psi^2(y)dy$，即取 y 为积分变量，绕 y 轴旋转得到的旋转体体积=曲边方程 $\psi(y)$ 平方的 π 倍作被积函数定积分。

例 求连续曲线 $y=f_1(x),y=f_2(x),f_1(x)\ge f_2(x)\ge 0$ 和直线 $x=a,x=b,a<b$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 V_x。

解 $V_x=$ 曲线 $y=f_1(x)\ge 0$ 和直线 $x=a,x=b,a<b,y=0$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 $\int_a^b\pi[f_1(x)]^2dx$ 与曲线 $y=f_2(x)\ge 0$ 和直线 $x=a,x=b,a<b,y=0$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 $\int_a^b\pi[f_2(x)]^2dx$ 之差，即 $V_x=\pi\int_a^b[f_1^2(x)-f_2^2(x)]dx$。于是，**取 x 为积分变量，x 轴上方平面图形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积等于上、下边界方程平方差的 π 倍作被积函数定积分**。

注 类似推导可得，连续曲线 $x=\varphi_1(y),x=\varphi_2(y),\varphi_1(y)\ge\varphi_2(y)\ge 0$ 和直线 $y=c,y=d,c<d$ 围成的曲边梯形绕 y 轴旋转得到的旋转体体积 $V_y=\pi\int_c^d[\varphi_1^2(y)-\varphi_2^2(y)]dy$，即**取 y 为积分变量，y 轴右方平面图形绕 y 轴旋转得到的旋转体体积等于右、左边界方程平方差的 π 倍作被积函数定积分**。

例 求曲线 $y=\frac{r}{h}x,x=h,y=0$（r,h 均为正常数）围成的平面图形 (1) 绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 V_x；(2) 绕 y 轴旋转得到的旋转体体积 V_y.

解 (1) 取 x 为积分变量，$x\in[0,h]$，x 轴上方平面图形上边界方程为 $y=\frac{r}{h}x$，下边界方程为 $y=0$，所求旋转体体积 $V_x=\pi\int_0^h[(\frac{r}{h}x)^2-0^2]dx=\pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h$；

(2)取 y 为积分变量，$y\in[0,r]$，y 轴右方平面图形右边界方程为 $x=h$，左边界方程为 $x=\frac{yh}{r}$，所求旋转体体积 $V_y=\pi\int_0^r[h^2-(\frac{yh}{r})^2]dy=\pi[h^2y-\frac{1}{3}(\frac{h}{r})^2y^3]\Big|_0^r=\frac{2}{3}\pi h^2r$.

例 求椭圆曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 围成的平面图形 (1)绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 V_x；(2)绕 y 轴旋转得到的旋转体体积 V_y.

解 (1)取 x 为积分变量，$x\in[-a,a]$，x 轴上方平面图形上边界方程为 $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，下边界方程为 $y=0$，所求旋转体体积

$$V_x=\pi\int_{-a}^a[(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2})^2-0^2]dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^a(a^2-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-a}^a=\frac{4}{3}\pi ab^2;$$

(2)取 y 为积分变量，$y\in[-b,b]$，y 轴右方平面图形右边界方程为 $x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$，左边界方程为 $x=0$，所求旋转体体积 $V_y=\pi\int_{-b}^b[(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2})^2-0^2]dy=\frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^b(b^2-y^2)dy$

$$=\frac{\pi a^2}{b^2}(b^2y-\frac{1}{3}y^3)\Big|_{-b}^b=\frac{4}{3}\pi ba^2.$$

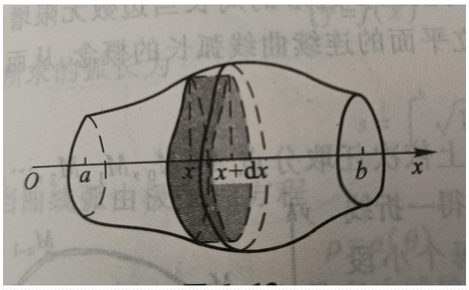
例 求圆周 $x^2+(y-b)^2=a^2(b>a>0)$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积 V_x.

解 取 x 为积分变量，$x\in[-a,a]$，x 轴上方平面图形上边界方程为 $y=b+\sqrt{a^2-x^2}$，下边界方程为 $y=b-\sqrt{a^2-x^2}$，所求旋转体体积 $V_x=\pi\int_{-a}^a[(b+\sqrt{a^2-x^2})^2-(b-\sqrt{a^2-x^2})^2]dx$

$$=4\pi b\int_{-a}^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\underset{\text{定积分几何意义}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}4\pi b\cdot\frac{\pi a^2}{2}=2\pi^2a^2b;$$

2. **平行截面面积已知的立体体积**

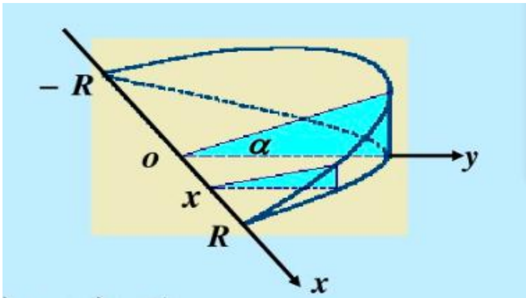
一立体位于过点 $x=a,x=b$ 且垂直于 x 轴的两平面之间，过 x 轴上一点 $x\in[a,b]$ 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$，求立体体积。



取 x 为积分变量，$x\in[a,b]$，在 $[a,b]$ 上任取子区间 $[x,x+dx]$，立体在此区间上的对应部分体积

$\Delta V\approx A(x)dx=dV$（体积元素），立体体积 $V=\int_a^b dV=\int_a^b A(x)dx$。

例 一平面经过半径为 R 的圆柱体底圆中心，并与底面交成角 α，求这个平面截圆柱体所得立体的体积 V。



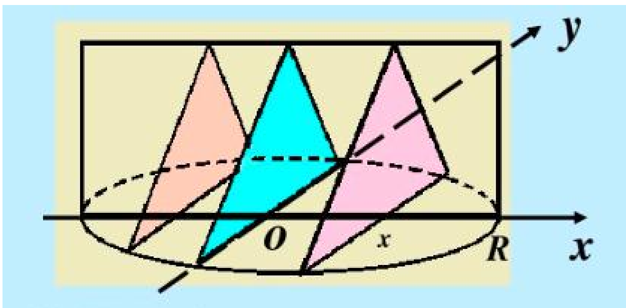
解　建立如图的直角坐标系，则所求立体位于过点 $x=-R,x=R$ 且垂直于 x 轴的两平面之间，过 x 轴上一点 $x\in[-R,R]$ 且垂直于 x 轴的截面面积为

$A(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha=\dfrac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$，立体体积为

$$V=\int_{-R}^{R}A(x)dx=\frac{1}{2}\tan\alpha\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=\tan\alpha\int_0^R(R^2-x^2)dx=\tan\alpha(R^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^R$$

$$=\tan\alpha(R^3-\frac{1}{3}R^3)=\frac{2}{3}\tan\alpha R^3.$$

例 一正劈锥体的底是半径为 R 的圆域，顶是平行且等于底圆直径的线段，高为 h，求该劈锥体的体积 V。



解　建立如图的直角坐标系，则所求劈锥体位于过点 $x=-R,x=R$ 且垂直于 x 轴的两平面之间，过 x 轴

上一点 $x \in [-R, R]$ 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)=\frac{1}{2}(2\sqrt{R^2-x^2})\cdot h$，该劈锥体的体积

$$V=\int_{-R}^{R}A(x)dx=h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx \xlongequal[\text{定积分的几何意义}]{} \frac{1}{2}\pi R^2 h.$$

三、平面曲线的弧长

1. 设曲线弧由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t\in[\alpha,\beta]$ 给出，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'(t),\psi'(t)$ 不同时为零，求弧长 s 。

取 t 为积分变量，$t\in[\alpha,\beta]$，在 $[\alpha,\beta]$ 上任取子区间 $[t,t+dt]$（相应于自变量增量 dt，函数 x,y 产生增量 $\Delta x=\varphi(t+dt)-\varphi(t),\ \Delta y=\psi(t+dt)-\psi(t)$），弧在此区间上的对应部分长度 Δs 近似等于弦长，即 $\Delta s\approx\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$（$dt$ 越小，参数 $t+dt$ 和 t 对应的点越靠近，弦、弧长度近似越好）；由函数增量的微分近似式 $\Delta x=\varphi(t+dt)-\varphi(t)\approx dx=\varphi'(t)dt$ 和 $\Delta y=\psi(t+dt)-\psi(t)\approx dy=\psi'(t)dt$（$dt$ 越小，增量和微分近似越好），故 $\Delta s\approx\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt=ds$（弧元素），于是所求弧长

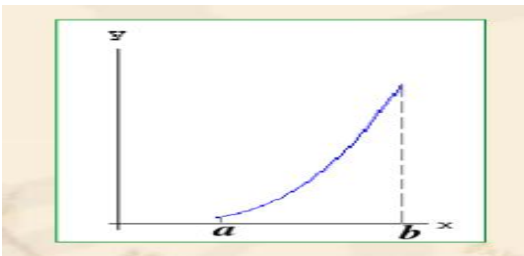
$$s=\int_{\alpha}^{\beta}ds=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt。$$

2. 当曲线弧由直角坐标方程 $y=f(x), x\in[a,b]$ 给出，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，此时曲线弧的参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=f(x) \end{cases}, x\in[a,b]$，弧元素 $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$，弧长 $s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$；

3. 当曲线弧由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$ 给出，其中 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，此时曲线弧的参数方程为 $\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}, \theta\in[\alpha,\beta]$，由于 $\begin{matrix} x'_\theta=\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta \\ y'_\theta=\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta, \end{matrix}$

所以弧元素 $ds=\sqrt{[\rho'(\theta)]^2+[\rho(\theta)]^2}\,d\theta$，弧长 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\rho'(\theta)]^2+[\rho(\theta)]^2}\,d\theta.$

例 求曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $a\le x\le b$ 的一段弧的长度 s .



解　$y' = x^{\frac{1}{2}}$，弧元素 $ds = \sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{1+x}dx$，所求弧的长度为

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^b = \frac{2}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}}].$$

特别地，当 $a=0, b=3$ 时，$s = \frac{14}{3}$.

例 求摆线 $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1-\cos\theta), a>0$ 的一拱 $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度 s.

解　$x'_\theta = a(1-\cos\theta)$，$y'_\theta = a\sin\theta$，弧元素 $ds = \sqrt{(x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2}d\theta = a\sqrt{2-2\cos\theta}d\theta$

$= 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$，所求弧的长度为 $s = \int_0^{2\pi} ds = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta = -2\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4a(1-(-1)) = 8a$。

例 求心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)(a>0)$ 即 $x^2+y^2 = a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ 的长度 s。

解 根据对称性，所求弧的长度 s 是极轴上方心形线长度 s_1 的 2 倍，下求 s_1，取 θ 为积分变量，$\theta \in [0,\pi]$，

$\rho(\theta) = a(1+\cos\theta)$，$\rho'(\theta) = -a\sin\theta$，弧元素 $ds = \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2}d\theta = a\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta$，弧长 $s_1 = \int_0^{\pi} ds = a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta = 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a$，于是所求长度 $s = 2s_1 = 8a$。

例 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta(a>0)$ 上相应于 $0 \le \theta \le 2\pi$ 的一段弧的长度 s。

解　$\rho(\theta) = a\theta$，$\rho'(\theta) = a$，弧元素 $ds = \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2}d\theta = a\sqrt{1+\theta^2}d\theta$，所求弧的长度为 $s = \int_0^{2\pi} ds = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta \underset{\text{分部积分法}}{=\!=\!=\!=} a[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\theta\cdot 2\theta}{2\sqrt{1+\theta^2}}d\theta]$

$$= 2\pi a\sqrt{1+4\pi^2} - a[\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta - \int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta]$$

$= 2\pi a\sqrt{1+4\pi^2} - a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta + a\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\Big|_0^{2\pi}$，这里所要求的积分 $a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta$ 再次出现，故上式移项得到

$2a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta = 2\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + a\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$，最后得到

$$s = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta = \frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})].$$

注 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}(a>0)=\begin{cases}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C，取 + \\ \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C，取 - \end{cases}$。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)=\arcsin\frac{x}{a}+C$$