4.1-4.2 数学期望，
Expected value，mean value, mathematical expectation

方差， variance;

标准差， standard deviation

1. 离散型随机变量的数学期望与方差.

2. 连续型随机变量的数学期望与方差.

3. 随机变量函数的数学期望与方差

4. 常用分布的期望与方差

1. 数学期望的定义

简略地说，数学期望就是随机变量取值的平均数.

要评判一个射手的射击水平，需要知道射手平均命中环数. 设射手 A 在同样条件下进行射击，命中的环数 X 是随机变量，其分布律如表 4－1 所示.

表 4－1

X	10	9	8	7	6	5	0
p_k	0.1	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.1

若射手 A 共射击 N 次，击中10 环大约多少次？ $0.1 \times N$ 次

击中9 环大约多少次？ $0.1 \times N$ 次

击中8 环大约多少次？ $0.2 \times N$ 次

击中7 环大约多少次？ $0.3 \times N$ 次

…… ……

于是在这 N 次射击中，射手 A 击中的环数之和为

$$10\times0.1N+9\times0.1N+8\times0.2N$$
$$+7\times0.3N+6\times0.1N+5\times0.1N+0\times0.1N.$$

平均每次击中的环数约为

$$\frac{1}{N}(10\times0.1N+9\times0.1N+8\times0.2N$$
$$+7\times0.3N+6\times0.1N+5\times0.1N+0\times0.1N)$$

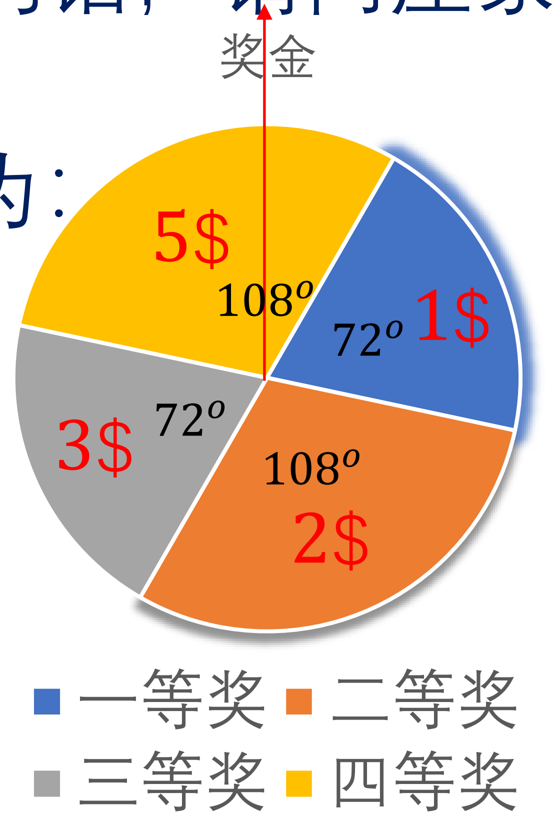
$$=10\times0.1+9\times0.1+8\times0.2$$
$$+7\times0.3+6\times0.1+5\times0.1+0\times0.1=6.7(\text{环}).$$

随机变量所有可能取值与其相应的概率乘积之和，

以概率为权数的加权平均值　“数学期望”

例: 某抽奖转盘设四个奖区，玩家用力发动转盘转动，假设细指针落到每个奖区的概率与其面积成正比。每个分区大小及中奖金额如图所示。假设每次抽奖花费3$。如果玩的人比较多的话，请问庄家是否盈利?

解: 玩家奖项金额X取值为$1, 2, 3, 5.$ 相应概率分布为:



X	1	2	3	5
p_k	1/5	3/10	1/5	3/10

玩家收益： $1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{10}=2.9<3$

长期来看，庄家会赢

2. 离散型随机变量的期望（expected value，mean, mathematical expectation）

情形1: 有限个可能的取值

定义: 离散型随机变量 X 只有有限个取值 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，概率分布律为

$$P(X = x_k) = p_k, \qquad k = 1,2,3,\ldots,n$$

有期望值或者均值 $$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

或 $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$.

例: 计算如下具有两点分布的 X 和 Y 的期望

X	0	1
p_k	$1-p$	p

Y	-2	1
p_k	$1-p$	p

$$E(X) = p$$

$$E(Y) = -2 + 3p$$

例: 随机变量 X 的概率分布律如下，求其期望值.

X	0	1	2	3	4	5	6
p_k	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

$$\begin{aligned} E(X) &= 0\times 0.05 + 1\times 0.10 + 2\times 0.15 + 3\times 0.25 + 4\times 0.20 \\ &\quad + 5\times 0.15 + 6\times 0.10 \\ &= 3.3 \end{aligned}$$

注: X 的期望值又称为其所有可能取值的加权平均（weighted average), 这里的权重即为该值出现的概率

算术平均: $\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n} = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n$, 其权重皆为 $\frac{1}{n}$.

情形2: 离散型随机变量(可能的取值有可数无穷个)

定义: 如果离散型随机变量 X 在一个可数无穷集合中取值，相应的概率分布律为

$$P(X = x_k) = p_k, \qquad k = 1,2,3,\ldots,$$

则 X 的期望值为

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 是绝对收敛的，或者 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$ 收敛

例: 计算泊松分布 $X\sim P(\lambda)$ 的数学期望（均值）.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots$$

$$\mathrm{E}(X)=(0\times\frac{\lambda^0}{0!}+1\times\frac{\lambda^1}{1!}+2\times\frac{\lambda^2}{2!}+3\times\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots+n\times\frac{\lambda^n}{n!}+\cdots)e^{-\lambda},$$

$$=(1\times\frac{\lambda^1}{1!}+2\times\frac{\lambda^2}{2!}+3\times\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots+n\times\frac{\lambda^n}{n!}+\cdots)e^{-\lambda},$$

$$=\lambda(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots+\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots)e^{-\lambda},$$

$$=\lambda e^{\lambda}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda$$

λ 又称为单位时间、或面积上的平均数，即为均值，期望值

例：设随机变量 X 的概率分布律如下 $P(X=k)=\frac{a}{k^2}, k=1,2,3,\ldots$

(1) 求 a 的值，(2) X 的期望是否存在？.

已知 $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots,$

解：$1=a\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=\frac{a\pi^2}{6},$ 故 $a=\frac{6}{\pi^2}.$

$$E(X)=\frac{6}{\pi^2}\left(1\times 1+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{3^2}+\cdots+n\times\frac{1}{n^2}+\cdots\right),$$

$$=\frac{6}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right)=\infty$$

X 的期望不存在.

注1： 期望值是测量数据分布中心（center）的一种方法

注2： 无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的绝对收敛性保证了改变或者重排级数的项之后，其和不变，即期望值存在且唯一.

注3：随机变量具有概率分布，但不一定有期望（中心）

2. 连续型随机变量的期望

定义: 设$f_X(x)$为连续型随机变量 X 的概率密度，若积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

绝对收敛，则称该积分值 X 的数学期望。即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

注: 与离散型随机变量 X 的期望值公式 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$,

（级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 是绝对收敛的）进行比较

例: 当常数 c 取何值时，实函数 $f_X(x)=\dfrac{c}{1+x^2},-\infty<x<\infty$ 为某连续型随机变量 X 的概率密度? 期望是否存在?

解 由 $1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{1+x^2}dx \ =c\arctan x\,|_{x=-\infty}^{x=\infty}=\pi c$

得 $c=\frac{1}{\pi}$

X 的期望若存在，仅当积分 $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ 绝对收敛。然而，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{x}{1+x^2}\right|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$$

$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\,|_0^{\infty}=\infty$ 因此，该随机变量的期望不存在

注：该分布称为柯西分布(Cauchy distribution)。

例: 已知随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 2-x, & 1\le x\le 2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$

求 $E(X)$

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{1} x\cdot xdx+\int_{1}^{2} x\cdot(2-x)dx+\int_{2}^{\infty} x\cdot 0dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{1} x\cdot xdx+\int_{1}^{2} x\cdot(2-x)dx+\int_{2}^{\infty} x\cdot 0dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3|_{x=0}^{x=1}+\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)|_{x=1}^{x=2}$$

$$=1$$

随机变量函数的数学期望 教材P92

在实际问题与理论研究中，我们对随机变量 X 的函数$h(X)$ 的期望值更感兴趣，而不仅仅是 $E(X)$.

例：设随机变量 X 的概率分布如下。求 X^2 及 $3X$ 的概率分布律及期望。

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p_k	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

解:

X^2	0	1	4	9	16
p_k	0.15	0.35	0.25	0.15	0.10

$P(X^2=16)=P(X=4)=0.10$

$P(X^2=9)=P(X=3)=0.15$

$P(X^2=4)=P(X=2)+P(X=-2)=0.25$

$P(X^2=1)=P(X=1)+P(X=-1)=0.35$

$P(X^2=0)=P(X=0)=0.15$

故 X^2 的期望为

$$E(X^2)=0\times 0.15+1\times 0.35+4\times 0.25+9\times 0.15+16\times 0.10$$
$$=4.3$$
$$=0^2\times 0.15+(-1)^2\times 0.1+1^2\times 0.25+2^2\times 0.20+(-2)^2\times 0.05+3^2\times 0.15+4^2\times 0.10.$$

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p_k	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

$$E(X) = (-2)\times 0.05 + (-1)\times 0.10 + 0\times 0.15 + 1\times 0.25 + 2\times 0.20 + 3\times 0.15 + 4\times 0.10 = 1.3$$

$3X$	-6	-3	0	3	6	9	12
p_k	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

$$E(3X) = (-6)\times 0.05 + (-3)\times 0.10 + 0\times 0.15 + 3\times 0.25 + 6\times 0.20 + 9\times 0.15 + 12\times 0.10.$$

$$= 3\times(-2)\times 0.05 + 3\times(-1)\times 0.10 + 3\times 0\times 0.15 + 3\times 1\times 0.25 + 3\times 2\times 0.20 + 3\times 3\times 0.15 + 3\times 4\times 0.10$$

$$= 3E(X) = 3.9$$

$X+b$	-2+b	-1+b	0+b	1+b	2+b	3+b	4+b
p_k	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

$$E(X+b) = (-2+b)\times 0.05 + (-1+b)\times 0.10 + (0+b)\times 0.15 + (1+b)\times 0.25 + (2+b)\times 0.20 + (3+b)\times 0.15 + (4+b)\times 0.10$$

$$= 1.3 + b$$

$$= E(X) + b$$

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

线性运算

定理 4.1 设Y是随机变量X的函数$Y=g(X)$(g是连续函数).

问题：Y 是不是随机变量？ 是。

1° X是离散型随机变量，它的分布律为$P\{X=x_k\}=p_k$，$k=1,2,\cdots$，若$\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$绝对收敛，则有 注：此处也有教材要求 $E(X)$ 存在

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k. \tag{4-3}$$

2° X是连续型随机变量，它的概率密度为$f(x)$，若$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x. \tag{4-4}$$

注：该定理求$E(Y)$时，并不需要知道Y的分布

推广到两个或两个以上随机变量的函数情形

设 Z 是随机变量 X,Y 的函数 $Z=g(X,Y)$（g 是连续函数），Z 也是随机变量.

当(X,Y)是二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$$

若 $\sum_i \sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_i \sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}; \qquad (4-5)$$

当(X,Y)是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$ 时，若

$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (4-6)$$

特别地，有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例: 某电器设备由5个相互独立且分布相同的电子元件组成. 电子元件的寿命X_i'服从如下指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\theta>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

1. 在元件串联的情况下，求该设备的期望寿命.

2. 在元件并联的情况下，求该设备的期望寿命

累积函数（或分布函数）$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

解

(1) 串联 $N=\min\{X_1,X_2,\dots,X_5\}$ 分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F_N(x)=P(N\le x)=1-P(N>x)$$

$$=1-P(X_1>x,X_2>x,\dots,X_5>x)$$

$$=1-\big(1-F(x)\big)\big(1-F(x)\big)\cdots\big(1-F(x)\big)=\begin{cases}1-e^{-\frac{5x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

所以 N 的期望值为

$$E(N)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,dF_N(x)=\int_0^{\infty}\frac{5x}{\theta}e^{-\frac{5x}{\theta}}dx=\frac{\theta}{5}.$$

(2) 并联 $M=\max\{X_1,X_2,\ldots,X_5)$ 分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$F_M(x)=P(M\le x)$$

$$=P(X_1\le x,X_2\le x,\ldots,X_5\le x)$$

$$=F(x)\cdot F(x)\cdot F(x)\cdot F(x)\cdot F(x)=\begin{cases}\left(1-e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^5, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

M 的期望值

$$E(M)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,dF_M(x)=\int_0^{\infty}x\,d(1-e^{-\frac{x}{\theta}})^5=\frac{137}{60}\theta.$$

例 4.6 对球的直径作近似测量，设其值均匀分布在区间$[a,b]$内，求球体积的数学期望。

解 设随机变量 X 表示球的直径，Y 表示球的体积，依题意，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

球体积 $Y=\dfrac{1}{6}\pi X^3$，由(4-6)式，得

$$E(Y)=E\left(\frac{1}{6}\pi X^3\right)=\int_a^b \frac{1}{6}\pi x^3\ \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{6(b-a)}\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2).$$

例 4.7 设国际市场每年对我国某种出口商品的需求量 X(单位:t) 服从区间 $[2\,000, 4\,000]$ 上的均匀分布. 若售出这种商品 1 t,可挣得外汇 3 万元,但如果销售不出而囤积于仓库,则每吨需保管费 1 万元. 问应预备多少吨这种商品,才能使国家的收益最大?

解 设预备这种商品 y t$(2\,000 \leqslant y \leqslant 4\,000)$,则收益(万元)为

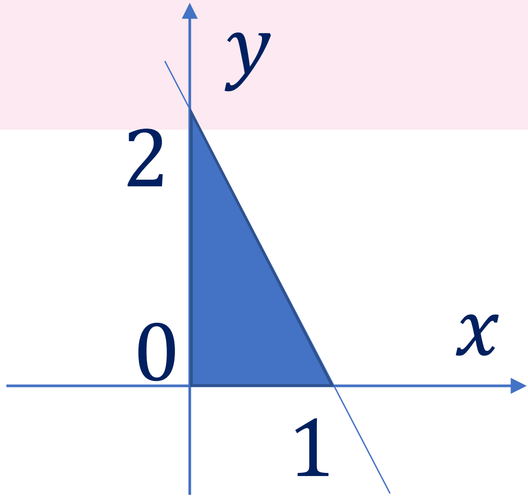
$$g(X) = \begin{cases} 3y, & X \geqslant y, \\ 3X - (y - X), & X < y, \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x = \int_{2\,000}^{4\,000} g(x) \cdot \frac{1}{4\,000 - 2\,000} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\,000} \int_{2\,000}^{y} [3x - (y - x)] \mathrm{d}x + \frac{1}{2\,000} \int_{y}^{4\,000} 3y \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1\,000} (-y^2 + 7\,000y - 4 \times 10^6). \end{aligned}$$

当 $y = 3\,500$ t 时,上式达到最大值. 所以预备 3 500 t 此种商品能使国家的收益最大,最大收益为 8 250 万元.

例 4.8 设二维随机变量(X,Y)在区域A上服从均匀分布，其中A为x轴，y轴及直线$x+\frac{y}{2}=1$所围成的三角区域，求$E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$.



解：区域A的面积为1，(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in A\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

X和Y的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2(1-x)}1dy, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{1-y/2}1dx, & 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1-y/2, & 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

X 和 Y 独立？ 不独立

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2(1-x) dx = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^2 y \cdot \left(1 - \frac{y}{2}\right) dy = \frac{2}{3}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2(1-x)} xy\, dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2(1-x)} xy\, dy\right) dx \qquad = \int_0^1 2x(1-x)^2 dx = \frac{1}{6}$$

3. 数学期望的性质

定理 4.2 设随机变量 X,Y 的数学期望 $E(X),E(Y)$ 存在.

1° $E(c)=c$，其中 c 是常数；

2° $E(cX)=cE(X)$；

3° $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；对任意的 X 和 Y 皆成立

4° 若 X,Y 是相互独立的，则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

反之不成立。即，若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，推不出 X 和 Y 的独立性

证 3° 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，边缘密度 $f_X(x),f_Y(y)$，

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=E(X)+E(Y).$$

4° 若 X 和 Y 相互独立，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，

故 $$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=E(X)E(Y).$$

性质 3° 可推广到任意有限个随机变量之和的情形；

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$$

性质 4° 可推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情形.

例 4.9 设一电路中电流 $I(\mathrm{A})$ 与电阻 $R(\Omega)$ 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$g(i)=\begin{cases}2i, & 0\leqslant i\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\qquad h(r)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{9}, & 0\leqslant r\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求电压 $V=IR$ 的均值.

解 $E(V)=E(IR)=E(I)E(R)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}ig(i)\mathrm{d}i\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}rh(r)\mathrm{d}r\right]$

$$=\left(\int_0^1 2i^2\,\mathrm{d}i\right)\left(\int_0^3\frac{r^3}{9}\mathrm{d}r\right)=\frac{3}{2}(\mathrm{V}).$$

例 4.10 设对某一目标进行射击，命中 n 次才能彻底摧毁该目标，假定各次射击是独立的，并且每次射击命中的概率为 p，试求彻底摧毁这一目标平均消耗的炮弹数.

解 设 X 为 n 次击中目标所消耗的炮弹数，

X_k 表示第 $k-1$ 次击中后至第 k 次击中目标之间所消耗的炮弹数，

取值 $1,2,3,\cdots$，其分布律 其中 $q=1-p$.

X_k	1	2	3	$\cdots$	m	$\cdots$
$P\{X_k=m\}$	p	pq	pq^2	$\cdots$	pq^{m-1}	$\cdots$

X_1 为第一次击中目标所消耗的炮弹数，则 n 次击中目标所消耗的炮弹数为

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n.$$

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n) \qquad E(X_1)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=\frac{1}{p},$$

故 $E(X)=\dfrac{n}{p}$ 注：命中1次消耗的炮弹数的期望是一样的。

4. 常用分布的数学期望

（1）（0－1）分布. 设 X 的分布律如表 4－7 所示，

表 4－7

X	0	1
p_k	$1-p$	p

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p.$$

(2) 二项分布. 设 X 服从二项分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n,\quad 0<p<1,$$

令 X_i 为 $0-1$ 分布，且相互独立

X_i	0	1
p_k	$1-p$	p

$$E(X_i)=p,\ \ i=1,2,\cdots,n,$$

n 重伯努利试验中，事件 A 出现的次数 X:

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=np$$

（3）泊松分布. 设 X 服从泊松分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots,\quad \lambda>0,$$

则 X 的数学期望为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda$$

（4）均匀分布. 设 X 服从$[a,b]$上的均匀分布，其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 X 的数学期望为

注意，该公式不能写成

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x \quad =\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \quad ×$$

$$=\int_a^b x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x \quad √$$

$$=\frac{b+a}{2}$$

(5) 指数分布. 设 X 服从指数分布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

则 X 的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{0}^{+\infty}x\,\mathrm{d}e^{-\lambda x}=-\left(x\,e^{-\lambda x}\right)\Big|_{x=0}^{x=\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

(6) 正态分布. 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

则 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$,则 $E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$

注意到 $$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\mu,\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=0,$$

故有 $$E(X)=\mu.$$

第二节　方　差

1. 方差的定义

X	85	82.5	86	83.5	83
p_k	0.2	0.2	0.2	0.2	0.20

$E(X)=84$

Y	76	83	89	82	90
p_k	0.2	0.2	0.2	0.2	0.20

$E(Y)=84$

$[X-E(X)]^2$ 的期望

X	85	82.5	86	83.5	83
$[X-E(X)]^2$	1	2.25	4	2.25	1

$$E([X-E(X)]^2)=2.1$$

Y	76	83	89	82	90
$[Y-E(Y)]^2$	64	1	25	4	36

$$E([Y-E(Y)]^2)=26$$

定义: 设随机变量 X 的数学期望为 $E(X)$, 若随机变量 $[X-E(X)]^2$ 的期望存在。则称 $E([X-E(X)]^2)$ 为 X 的方差。

记为 σ_X^2, $Var(X)$, $D(X)$.

注1: 方差是随机变量的取值偏离其期望值程度的一种测量。
若 X 比较集中, 则 $D(X)$ 较小;
若 X 比较分散, 则 $D(X)$ 较大

注2: 方差总是非负的.

定义: 标准差 (standard deviation) $\sigma_X=\sqrt{Var(X)}$.

方差的计算

由于方差是随机变量 X 的函数 $g(X)=[X-E(X)]^2$ 的数学期望，因此若离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$，则

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k. \qquad (4-8)$$

若连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x. \qquad (4-9)$$

由此可见，方差 $D(X)$ 是一个常数，它由随机变量的分布唯一确定.

方差的重要公式

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

证明

$$
\begin{aligned}
D(X) &= E[X - E(X)]^2 \\
&= E[X^2 - 2X \cdot E(X) + (E(X))^2] \\
&= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2.
\end{aligned}
$$

X 的方差等于X平方的期望减去期望的平方

例: 一枚硬币抛三次. 令 X 表示正面出现的次数. 求 X 的方差.

$$C_3^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}=C_3^k\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

解: X 的概率分布律如下

X	0	1	2	3
p_k	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$E(X)=1\times3\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\times3\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{2}.$$

$$E(X^2)=1^2\times3\left(\frac{1}{2}\right)^3+2^2\times3\left(\frac{1}{2}\right)^3+3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=3.$$

$$D(X)=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

例 4.11 设有甲、乙两个品种的棉花，从中各抽取等量的样品进行检验，结果如表 4－11 和表 4－12 所示，其中 X,Y 分别表示甲、乙两个品种的棉花的纤维长度(单位：mm)，求 $D(X)$ 与 $D(Y)$，并评定它们的质量.

表 4－11

X	28	29	30	31	32
p_k	0.1	0.15	0.5	0.15	0.1

表 4－12

Y	28	29	30	31	32
p_k	0.13	0.17	0.4	0.17	0.13

解 由于

$$E(X)=28\times0.1+29\times0.15+30\times0.5+31\times0.15+32\times0.1=30,$$

$$E(Y)=28\times0.13+29\times0.17+30\times0.4+31\times0.17+32\times0.13=30,$$

因此得

$$\begin{aligned}D(X)=&(28-30)^2\times0.1+(29-30)^2\times0.15+(30-30)^2\times0.5\\&+(31-30)^2\times0.15+(32-30)^2\times0.1=1.1,\end{aligned}$$

$$D(Y)=1.38.$$

因 $D(X)<D(Y)$，即甲种棉花纤维长度的方差小些，说明其纤维比较均匀，故甲种棉花质量较好.

例 4.12 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 $D(X)$.

解
$$E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\mathrm{d}x=0,$$
$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

于是

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}.$$

2. 方差的性质

定理 4.3 设随机变量 X 与 Y 的方差存在,则

1° 设 c 为常数,则 $D(c)=0$;

2° 设 c 为常数,则 $D(cX)=c^2D(X)$;

3° $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$;

4° 若 X,Y 相互独立,则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$;

5° 对任意的常数 $c\neq E(X)$,有 $D(X)<E[(X-c)^2]$.

证　仅证性质 4°、性质 5°.

$$4^\circ \quad D(X \pm Y) = E[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2$$

$$= E[(X - E(X)) \pm (Y - E(Y))]^2$$

$$= E[X - E(X)]^2 \pm 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))] + E[Y - E(Y)]^2$$

$$= D(X) + D(Y) \pm 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

注1 $D(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(X - E(X)\right)\right]$, 称为 X的方差

注2 $E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]$, 称为 X 和 Y 之间的协方差

记作 $\mathrm{cov}(X, Y) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(\mathrm{Y} - E(Y)\big)\big]$$

$$= E[\mathrm{XY} - E(Y)X - YE(X) + E(X)E(Y)]$$

$$= E[XY - E(Y)X - YE(X) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - E(E(Y)X) \ - E\big(YE(X)\big) + E\big(E(X)E(Y)\big)$$

$$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

X,Y的协方差等于其乘积的期望减去其期望的乘积,

特别地，当 X,Y 相互独立时， 有 $E(XY) = E(X)E(Y)$

故有 $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, and， $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

5° 对任意常数 c,有

$$\begin{aligned} E[(X-c)^2] &= E[X-E(X)+E(X)-c]^2 \\ &= E[X-E(X)]^2+2[E(X)-c]E[X-E(X)] \\ &\quad +[E(X)-c]^2 \\ &= D(X)+[E(X)-c]^2. \end{aligned}$$

故对任意常数 $c \neq E(X)$,有 $D(X) < E[(X-c)^2]$.

例 4.13 设随机变量 X 的数学期望为 $E(X)$，方差 $D(X)=\sigma^2$，$\sigma>0$，令 $Y=\dfrac{X-E(X)}{\sigma}$，求 $E(Y)$，$D(Y)$.

解

$$E(Y)=E\left[\frac{X-E(X)}{\sigma}\right]=\frac{1}{\sigma}E[X-E(X)]$$

$$=\frac{1}{\sigma}[E(X)-E(X)]=0$$

$$D(Y)=D\left[\frac{X-E(X)}{\sigma}\right]=\frac{1}{\sigma^2}D[X-E(X)]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}D(X)=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1.$$

称 Y 为 X 的标准化随机变量.

3. 常用分布的方差（1）（0－1）分布　（2）二项分布.

例: 求二项分布 $X \sim b(n,p)$ 的期望及方差

$E(X) = np$

令 X_i 为 $0-1$ 分布，且相互独立

X_i	0	1
p_k	$1-p$	p

$E(X_i) = p$，$i = 1,2,\ldots,n$，

$E\left(X_i^2\right) = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$，$i = 1,2,\ldots,n$，

$D(X_i) = E\left(X_i^2\right) - E^2(X_i) = p - p^2$，$i = 1,2,\ldots,n$，

n 重伯努利试验中，事件 A 出现的次数 X:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n) = np(1-p)$$

（3）泊松分布. $X \sim P(\lambda)$. $E(X) \sim \lambda$

分布律 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+E(X)$$

$$=\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}+E(X)$$

$$=\lambda^2+\lambda$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

(4) 均匀分布. 设 X 服从$[a,b]$上的均匀分布

$$概率密度\ f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a\le x\le b\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)dx=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

(5) 指数分布. 设 X 服从参数为 λ 的指数分布,

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx=-\int_0^{+\infty}x^2\,de^{-\lambda x}=-\left(x^2e^{-\lambda x}\right)\Big|_{x=0}^{x=\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx^2$$

$$=\int_0^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx=-\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}x\,de^{-\lambda x}=\frac{2}{\lambda^2}$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

（6）正态分布. 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $E(X)=\mu$

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$ Let $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$, then

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mu e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_{-\infty}^{\infty}\sigma t e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sqrt{2\pi}\mu+0)$$

$$=\mu$$

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2) \ = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$ Let $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-t) de^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (-te^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_0^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(0 + \sqrt{2\pi}\right) = \sigma^2.$$

由此可知，正态分布的概率密度中的两个参数 μ 和 σ 分别是该分布的数学期望和均方差，因此正态分布完全可由它的数学期望和方差所确定.

若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，且它们相互独立，

则它们的线性组合 $c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n$ 仍然服从正态分布.

（$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是不全为零的常数）

即

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} c_i^2\sigma_i^2\right),$$

例 4.15 设活塞的直径(单位:cm)$X \sim N(22.40, 0.03^2)$，汽缸的直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$，X, Y 相互独立，任取一只活塞和一只汽缸，求活塞能装入汽缸的概率.

解 按题意，需求 $P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$. 令 $Z = X - Y$，则

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = 22.40 - 22.50 = -0.10,$$

$$D(Z) = D(X) + D(Y) = 0.03^2 + 0.04^2 = 0.05^2,$$

即 $\quad Z \sim N(-0.10, 0.05^2)$，

故有 $\quad P\{X < Y\} = P\{Z < 0\}$ 将Z单位化，标准化，得到标准正态分布

$$= P\left\{\frac{Z - (-0.10)}{0.05} < \frac{0 - (-0.10)}{0.05}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{0.10}{0.05}\right) = \Phi(2) = 0.9772.$$

练习：假设 X 的概率分布律如下。

（1）求 a 的值，（2）求$E(X)$，$D(X)$（3）求 X^2、 $3X$的概率分布律与期望。

X	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.3	0.2	a