



重慶理工大學

CHONGQING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

明德篤行
自強日新



工程电磁场

Engineering Electromagnetics

沈启平

电气与电子工程学院



- 基本概念：
- 电介质中的静电场
 - 导电媒质中的恒定电场与电流场
 - 导电媒质周围电介质中的静态电场

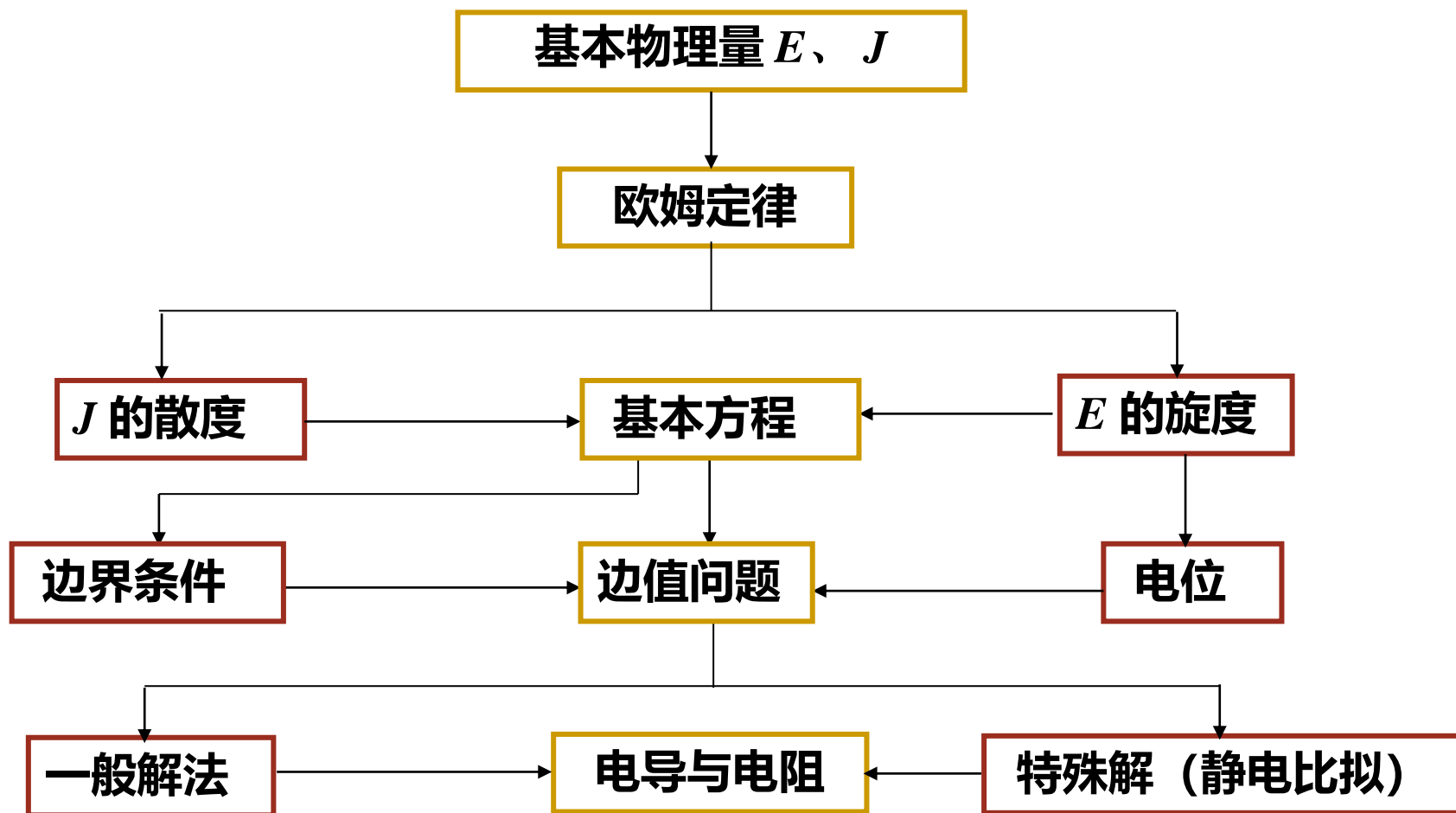


图 3.0.1 恒定电场的知识结构框图

1. 电流

分类：传导电流与运流电流。

传导电流是**导体**中的自由电子（或空穴）
或者是**电解液**中的离子运动形成的电流。

运流电流是电子、离子或其他带电粒子在
真空或**气体**中运动形成的电流。

电流：单位时间内穿过某一截面的电荷量称为**电流**，以 I 表示。电流的单位为A（安培）。

因此，电流 I 与电荷 q 的关系为

$$I = \frac{dq}{dt}$$

电流密度是一个矢量，以 J 表示。其方向为**正**电荷的运动方向，大小为单位时间内**垂直**穿过单位面积的电荷量。

穿过任一有向面元 dS 的电流 dI 与电流密度 J 的关系为

$$dI = J \cdot dS$$

穿过某一截面的**电流**等于穿过该截面电流密度的**通量**，即

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

大多数导电介质中，某点的传导电流密度 \mathbf{J} 与该点的电场强度 \mathbf{E} 成正比，即

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{欧姆定律的微分形式}$$

式中， σ 称为**电导率**，单位为 S/m。

σ 值愈大表明导电能力愈强。

电导率为**无限大**的导体称为**理想导电体**。

电导率为**零**的介质称为**理想介质**。

介 质	电导率(S/m)	介 质	电导率(S/m)
银	6.17×10^7	海 水	4
紫 铜	5.80×10^7	淡 水	10^{-3}
金	4.10×10^7	干 土	10^{-5}
铝	3.54×10^7	变压器油	10^{-11}
黄 铜	1.57×10^7	玻 璃	10^{-12}
铁	10^7	橡 胶	10^{-15}

在理想导电体中**能够存在**恒定电场？

运流电流的电流密度不与电场强度成正比，而且电流密度的方向与电场强度的方向也可能不同。

可以证明

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

式中的 ρ 为电荷密度。

介质的导电性能也有均匀与非均匀、线性与非线性以及各向同性与各向异性等特点，这些特性的含义与前相同。

上述公式仅适用于各向同性的线性介质。

2. 电动势

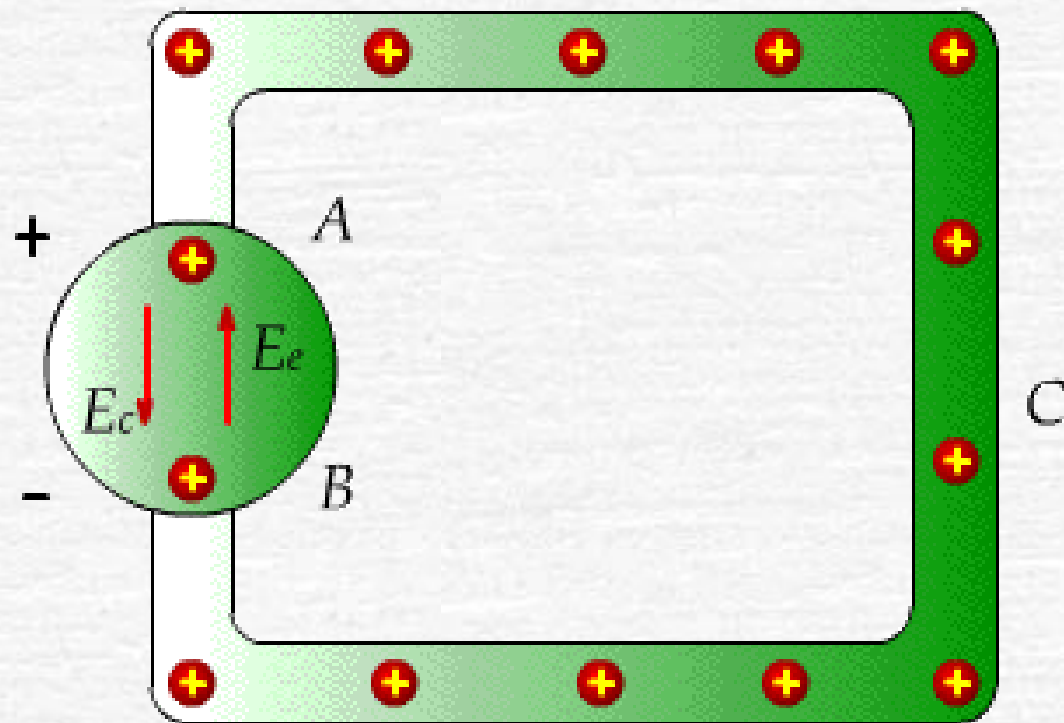
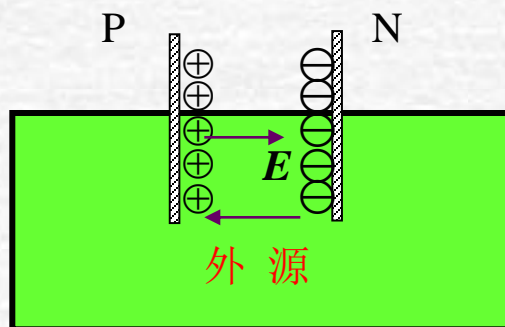


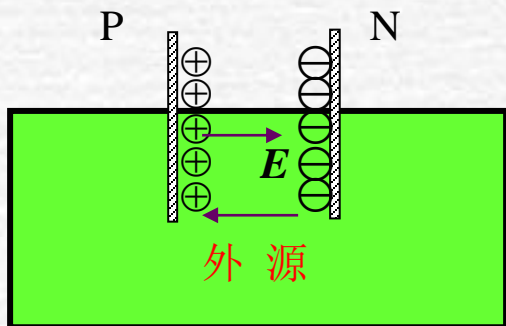
图3.1.1 恒定电流的形成

首先讨论**开路**情况下外源内部的作用过程。

在外源中**非静电力**作用下，**正**电荷不断地移向**正极板** P，**负**电荷不断地移向**负极板** N。



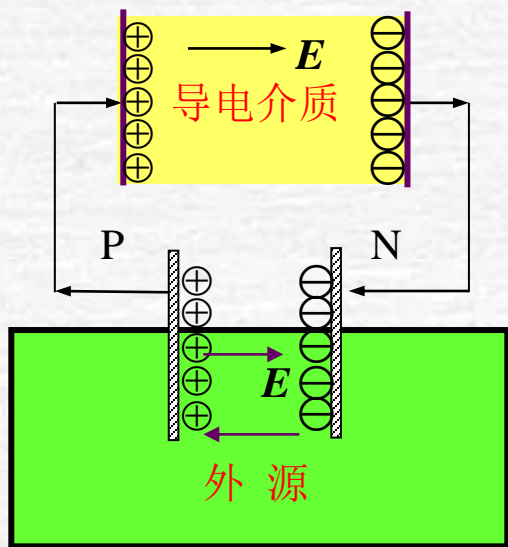
极板上的电荷在外源中形成电场 E ，其方向由**正极板**指向**负极板**。



极板上电荷产生的电场力阻止电荷移动，一直到该电场力**等于**非静电力时，电荷运动方才**停止**，极板上的电荷也就保持**恒定**。

既然外源中的非静电力表现为对于**电荷**的作用力，因此，这种非静电力是由**外电场**产生的，以 E' 表示。

当 $E = -E'$ 时，电荷运动停止。



若外源的极板之间**接上导电介质**，
正极板上的**正电荷**通过导电介质移
向**负极板**；负极板上的**负电荷**通过
导电介质移向**正极板**。

因而导致 $E < E'$ ，外电场又使外源中的电荷再次**移动**，外源不断地向**正极板**补充新的正电荷，向**负极板**补充新的**负电荷**。

极板上的电荷通过导电介质不断**流失**，外源又不断地向极板**补充**新电荷，从而维持了**连续不断**的电流。因此，为了在导电介质中产生连续不断的电流，必须依靠**外源**。

当达到**动态平衡**时，极板上的电荷分布保持**不变**。这样，极板电荷在外源中以及在导电介质中产生**恒定电场**，且在外源内部保持 $E = -E'$ ，在包括外源及导电介质的整个回路中维持**恒定**的电流。

注意，极板上的电荷分布虽然不变，但是极板上的电荷并不是静止的。它们是在不断地更替中保持分布特性不变，因此，这种电荷称为驻立电荷。

驻立电荷是在外源作用下形成的，一旦外源消失，驻立电荷也将随之逐渐消失。

外电场由负极板 N 到正极板 P 的线积分称为外源的电动势，以 e 表示，即

$$e = \int_N^P E' \cdot dl$$

达到动态平衡时，在外源内部 $E = -E'$ ，所以上式又可写为

$$e = -\int_N^P E \cdot dl$$

驻立电荷产生的恒定电场与静止电荷产生的静电场一样，也是一种保守场。因此，

$$\oint_l E \cdot dl = 0$$

考虑到 $J = \sigma E$ ，那么，上式可写成

$$\oint_l \frac{J}{\sigma} \cdot dl = 0$$

对于均匀导电介质，上式变为

$$\oint_l \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

根据旋度定理

$$\oint_l \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) = 0$$

$$\oint_l \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{J} = 0$$

可见，均匀导电介质中，恒定电流场是无旋的。

3. 恒定电流场

设驻立电荷的体密度为 ρ , 则

$$q = \int_V \rho \, dV$$

那么

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

恒定电流场的电荷分布与时间无关, 即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$,
得

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

电流密度通过任一闭合面的通量为零。

可见电流线是连续闭合的, 这一特性称为电流连续性原理。

根据散度定理

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

上式为电荷守恒定律的**微分形式**。

对于恒定电流场

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

恒定电流场是**无散的**。

4. 恒定电流场边界条件

已知恒定电流场方程的积分形式为

$$\oint_l \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

由此导出边界两侧电流密度的切向和法向分量关系分别为

$$\frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2} \qquad J_{1n} = J_{2n}$$

可见，电流密度的切向分量不连续，但其法向分量连续。

$$\frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2}$$

$$J_{1n} = J_{2n}$$

已知 $J = \sigma E$, 那么导电介质中**恒定电场**的边界条件为

$$E_{1t} = E_{2t}$$

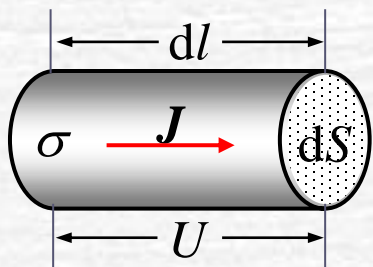
$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

理想导电体表面不可能存在切向电场, 因而也不可能存在**切向恒定电流**。

当电流由理想导电体**进出**时, 电流线总是**垂直**于理想导电体表面。

5. 导电介质的损耗

在导电介质中，自由电子移动时要与原子晶格发生碰撞，结果产生热耗。



沿电流方向取出一个圆柱体，如图所示。令圆柱体的端面分别为两个等位面。

在 dt 时间内有 dq 电荷自左端面移至右端面，那么电场力作的功为

$$dW = dqE \cdot dl = Edqdl$$

电场损失的功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = E \frac{dq}{dt} dl = EIdl = EJdSdl = EJdV$$

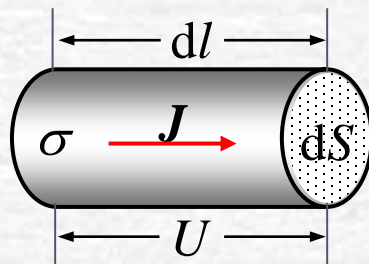
那么，单位体积中的功率损耗为

$$p_l = EJ = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma}$$

当 J 和 E 的方向不同时，单位体积中的功率损耗可以表示为

$$p_l = E \cdot J$$

此式称为焦耳定律的微分形式，它表示某点的功率损耗等于该点的电场强度与电流密度的标积。



设圆柱体两端的**电位差**为 U ，则 $E = \frac{U}{dl}$ 。

又知 $J = \frac{I}{dS}$ ，那么**单位体积**中的功率损失可表示为

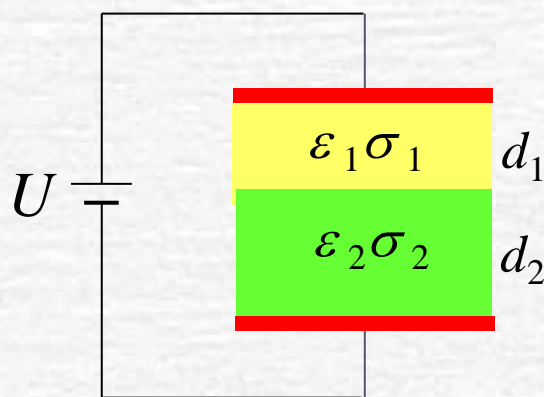
$$p_l = \frac{UI}{dSdl} = \frac{UI}{dV}$$

可见，圆柱体中的**总功率**损失为

$$P = p_l dV = UI$$

焦耳定律

例1 已知一平板电容器由两层非理想介质串联构成，如图所示。当外加恒定电压为 U 时，试求两层介质中的电场强度，电场储能密度及功率损耗密度。



解 电容器中的电流线与边界垂直，求得

$$\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$$

又

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U$$

求出两种介质中的电场强度分别为

$$E_1 = \frac{\sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} U \quad E_2 = \frac{\sigma_1}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} U$$

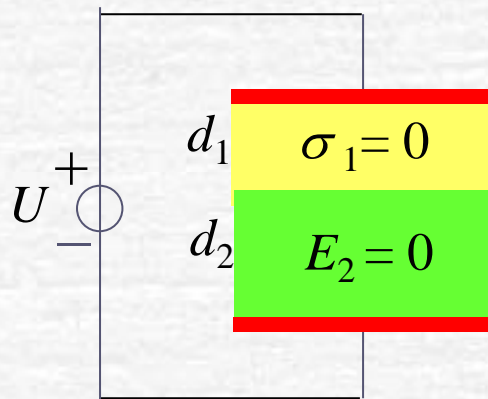
两种介质中电场储能密度分别为

$$w_{e1} = \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2, \quad w_{e2} = \frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2$$

功率损耗密度分别为

$$p_{l1} = \sigma_1 E_1^2, \quad p_{l2} = \sigma_2 E_2^2$$

两种特殊情况：



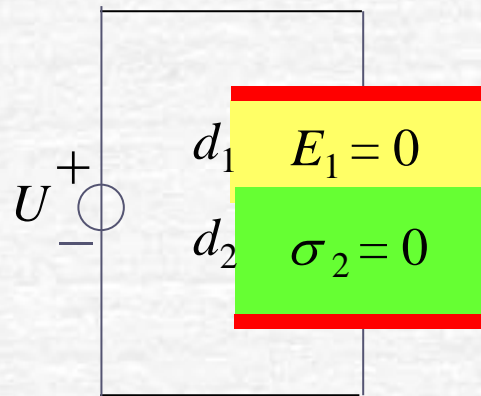
若 $\sigma_1 = 0$

则 $E_2 = 0$

$$E_1 = U / d_1$$

$$w_{e2} = 0$$

$$p_{l2} = 0$$



若 $\sigma_2 = 0$

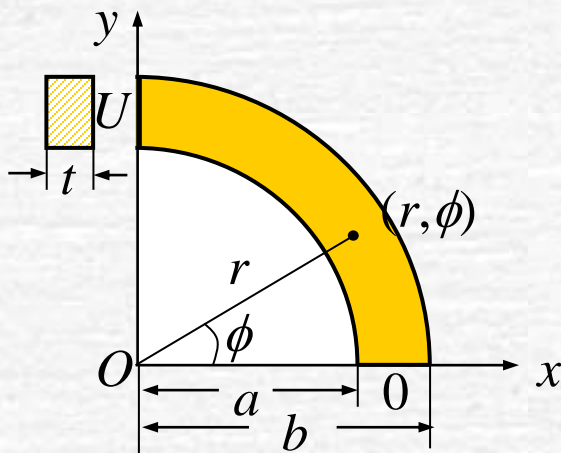
则 $E_1 = 0$

$$E_2 = U / d_2$$

$$w_{e1} = 0$$

$$p_{l1} = 0$$

例2 设一段环形导电介质，其形状及尺寸如图所示。计算两个端面之间的电阻。



解 选用圆柱坐标系。设两个端面之间的电位差为 U ，且令

当 $\phi = 0$ 时，电位 $\varphi_1 = 0$ 。

当 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 时，电位 $\varphi_2 = U$ 。

由于电位 φ 仅与角度 ϕ 有关，因此电位满足的

方程式为

$$\frac{d^2 \varphi}{d\phi^2} = 0$$

其通解为

$$\varphi = C_1 \phi + C_2$$

利用边界条件, 求得

$$\varphi = \frac{2U}{\pi} \phi$$

电流密度 J 为

$$J = \sigma E = -\sigma \nabla \varphi = -e_{\phi} \sigma \frac{\partial \varphi}{r \partial \phi} = -e_{\phi} \frac{2\sigma U}{\pi r}$$

由 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 的端面流进的电流 I 为

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(-e_{\phi} \frac{2\sigma U}{\pi r} \right) \cdot (-e_{\phi} t dr) = \frac{2\sigma U t}{\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

因此该导电块的两个端面之间的电阻 R 为

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\pi}{2\sigma t \ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

6. 恒定电流场与静电场的比拟

恒定电流场

$$(E' = 0)$$

$$\oint_l \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{J} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

静电场

$$(\rho = 0)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

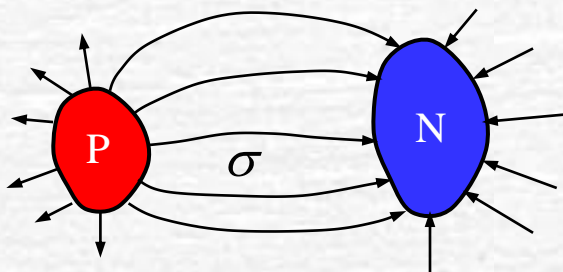
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

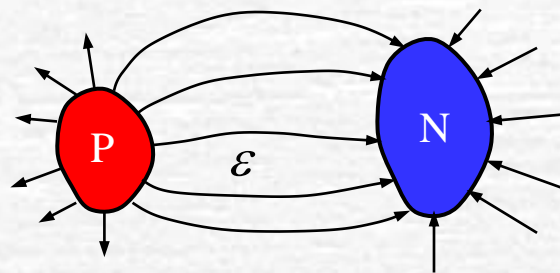
电流密度 \mathbf{J} — 电场强度 \mathbf{E}

电流线 — 电场线

当边界条件相同时，电流密度的分布与电场强度的分布特性完全相同。



电流场



静电场

根据这种类似性，可以利用静电场的结果直接求解恒定电流场。

由于恒定电流场容易实现且便于测量，可用边界条件与静电场相同的电流场来研究静电场的特性，这种方法称为静电比拟。

利用两种场方程，可以求出两个电极之间的电阻及电导与电容的关系为

$$R = \frac{\varepsilon}{C\sigma}$$

$$G = \frac{\sigma}{\varepsilon} C$$

若已知两电极之间的电容，根据上述两式，即可求得两电极间的电阻及电导。

已知面积为 S ，间距为 d 的平板电容器的电
容 $C = \frac{\varepsilon S}{d}$ ，若填充的非理想介质的电导率为 σ ，
则平板电容器极板间的漏电导为

$$G = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\sigma S}{d}$$

又知单位长度内同轴线的电容 $C_1 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$ 。
那么，若同轴线的填充介质具有的电导率为 σ ，
则单位长度内同轴线的漏电导为

$$G_1 = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$$