2020-2021 学期半期考试试题解析

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. 函数 $y=\ln(1-x)+\arccos\dfrac{x+1}{2}$ **的定义域是(　　)**

A. $x<1$　　B. $-3\le x<1$　　C. $-3<x\le 1$　　D. $\{x|x\le 1\}\cup\{x|-3\le x\le 1\}$

解 由$\begin{cases}1-x>0\\ -1\le\dfrac{x+1}{2}\le 1\end{cases}$，得定义域为$-3\le x<1$。**选 B**

2. 对函数 $f(x)$**，已知** $f(1)=2, f'(1)=-2$**，则** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$（　　）

A.　-2　　B.　2　　C.　1　　D.　0

解 由 $f(1)=2, f'(1)=-2$，得$-2=f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}$，得

$\lim\limits_{x\to 1}(f(x)-2)=0$，得 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$。

选 B

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x^2)}{x^3-x}$ **有（　　）个可去间断点(　　)**

A. 0　　B. 1　　C.2　　D. 3

解 函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x^2)}{x^3-x}$ 无意义的点 $x=0,-1,1$ 是间断点，又因为

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2)}{x(x^2-1)}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2)}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x^2}2x}{1}=\infty$，故 $x=0$ 为无穷间断点；

$\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{\ln(x^2)}{x(x^2-1)}=-\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{\ln(x^2)}{x^2-1}=-\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{\frac{1}{x^2}2x}{2x}=1$，故 $x=-1$ 为可去间断点；

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2)}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x^2}2x}{2x}=1$，故 $x=-1$ 为可去间断点；

选 C

4. 设函数 $f(x)$ **在点** a **满足：**$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{2020}}=2021$**，则在点** a **处**（　　）

A. 不可导　**B.** 可导且 $f'(a)=2021$　**C.** 取得极小值　**D.** 取得极大值

解 因$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{2020}}=2021>0$，由函数极限性质的保号性知，在$x=a$左右两侧附近，

$\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{2020}}>0$，于是在$x=a$左右两侧附近，$f(x)-f(a)>0$，根据极值定义知，$f(a)$

为$f(x)$的一个极小值。**选 C**

5. 对函数$f(x)$，已知$f(0)=1,f'(0)=-1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\dfrac{1}{n})-1]=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D.∞

解 由$f(0)=1,f'(0)=-1$，得$-1=f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$，这里$\Delta x$是取实数值的变量，当$\Delta x=\dfrac{1}{n}$时，得$-1=f'(0)=\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\dfrac{1}{n})-1]$。**选 A**

6. 设函数$f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中$n$为正整数，则$f'(0)=$（　　）

A. $(-1)^n(n-1)!$　**B.** $(-1)^{n-1}(n-1)!$　**C.** $(-1)^n n!$　**D.** $(-1)^{n-1}n!$

解 根据一点的导数定义得，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$

$=(-1)(-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ **选 B**

7. 设$f(x)=e^{2-x}$，则其n阶导数$f^{(n)}(x)=$（　　）

A. e^{2-x}　**B.** $(-1)^n e^{2-x}$　**C.** $-e^{2-x}$　**D.** $(-2)^n e^{2-x}$

解 选 **B** 略

8. 设$y=f(x^2)$，其中$f(x)$函数可导，则$\dfrac{dy}{dx}=$（　　）

A. $f'(x^2)$　**B.** $f'(2x)$　**C.** $2xf'(x^2)$　**D.** $x^2f'(x^2)$

解 选 **C** 略

9. 函数$f(x)=\sqrt{x}$按$(x-4)$的幂展开的带佩亚诺余项的 2 阶泰勒公式是（　　）

A. $2+\dfrac{1}{4}(x-4)-\dfrac{1}{32}(x-4)^2+o((x-4)^2)$　B. $2+\dfrac{1}{4}(x-4)-\dfrac{1}{32}(x-4)^2+o((x-4)^n)$

C. $2+\dfrac{1}{4}(x-4)-\dfrac{1}{64}(x-4)^2+o((x-4)^2)$　D. $2+\dfrac{1}{4}(x-4)-\dfrac{1}{64}(x-4)^2+o((x-4)^n)$

解 函数 $f(x)$ 在 x_0 的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

由此只能选 A, C 之一，注意到 $f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}, f''(x)=-\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{2}}, f''(4)=\frac{-1}{4}(4)^{\frac{-3}{2}}=\frac{-1}{32}$,

$\frac{f''(4)}{2!}=-\frac{1}{64}$，故只能**选 C**.

10.函函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}$ 的铅直渐近线方程为（　　）

A. $y=0$　　B. $y=1$　　C. $x=1$　　D. $x=-1$

解 函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}$ 无意义的点为 $x=-1,1$，又 $\lim\limits_{x\to(-1)}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\infty$，故 $x=-1$ 为垂直渐近线；$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-1}{2x}=\frac{1}{2}$，故 $x=1$ 不是垂直渐近线；**选 D**

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

11.极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x$ =____________________。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x-1})^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{x+2}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{3}{x-1})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\frac{3}{x-1}}=e^3$；

12.函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x^2+1}, x\le1\\ -x+k, x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则 $k=$____________________。

解 由函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x^2+1}, x\le1,\\ -x+k, x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，得 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$，即 $\lim\limits_{x\to1^+}(-x+k)=2$，得 $k=3$。

13.设 $f(x)$ 是可导函数，且 $f'(x)=\sin^2[\ln(x+1)+\frac{\pi}{4}], f(0)=3, f(x)$ 的反函数是 $y=\varphi(x)$，则 $\varphi'(3)=$____________________。

解 由反函数求导结论：若 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$，则 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$，及已知

$f(0)=3$，$f'(x)=\sin^2[\ln(x+1)+\dfrac{\pi}{4}]$，得 $\varphi'(3)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$；

14. 曲线 $y=x^4(12\ln x-7)$ 的拐点坐标是____________________。

解 拐点横坐标在函数定义域 $x>0$ 内，$y'=4x^3(12\ln x-7)+x^4\dfrac{12}{x}=4x^3(12\ln x-7)+12x^3$，

$y''=12x^2(12\ln x-7)+4x^3\dfrac{12}{x}+36x^2=(12x)^2\ln x$，注意到拐点横坐标处的二阶导数为 0 或不存在，因为 $y''=(12x)^2\ln x$ 在定义域 $x>0$ 内任一点都能取值，故只可能出现拐点横坐标处的二阶导数为 0，令 $y''=(12x)^2\ln x=0$ 得拐点横坐标 $x=1$，代入函数表达式得拐点纵坐标 $y=-7$，得拐点为 $(1,-7)$；

15. 抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率为_______2___________。

三、解答题（每小题 10 分，共 50 分）

16. 求极限：（1） $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$；

解 $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-e^x+1}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-e^x+1}{x\cdot x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-e^x}{2}=-1;$$

（2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1+x}-1}$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x}=2(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x})=2$；

17.（1）设 $y=e^{-x}\sin x+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$**，求** $dy\big|_{x=0}$

解 $y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x+\dfrac{\dfrac{1}{1+x}(1+x)^2-\ln(1+x)2(1+x)}{(1+x)^4}$

$=e^{-x}(\cos x-\sin x)+\dfrac{1+x-2\ln(1+x)}{(1+x)^3}$，故 $dy=[e^{-x}(\cos x-\sin x)+\dfrac{1+x-2\ln(1+x)}{(1+x)^3}]dx$

得 $dy\big|_{x=0}=[e^{-x}(\cos x-\sin x)+\dfrac{1+x-2\ln(1+x)}{(1+x)^3}]\big|_{x=0}dx=2dx$；

（2）设 $y=f(x)$ **由** $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$ **所确定，求** $\dfrac{d^2y}{dx^2}\big|_{t=1}$

解 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$；

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}(t+\sqrt{1+t^2})'=\dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}(1+\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}})=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$；

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{-\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{-t^3}$； $\dfrac{d^2y}{dx^2}\big|_{t=1}=-\sqrt{2}$；

18. 设曲线 $y=x^2+ax+b$ **和** $2y=-1+xy^3$ **在点** $(1,-1)$ **处相切，其中** a,b **为常数。**

（1）求 a,b **的值；**

（2）求曲线 $y=x^2+ax+b$ **和** $2y=-1+xy^3$ **在点** $(1,-1)$ **处的公切线与法线方程。**

解 （1）由 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 相切，得

$-1=1+a+b$；且公切线斜率相等，因为 $y'=2x+a$，$2y'=y^3+x3y^2y'$ 即 $y'=\dfrac{y^3}{2-3xy^2}$，

由于在点 $(1,-1)$ 处的公切线斜率相等，故得 $2+a=\dfrac{-1}{2-3}$，得 $a=-1$，从而 $b=-1$；

（2）因为公切线斜率为 1，得公切线方程为 $y-(-1)=1(x-1)$，即 $y=x-2$，法线方程为

$y-(-1)=-1(x-1)$，即 $y=-x$。

19. **函数** $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ **在** $x=\frac{\pi}{3}$ **处取得极值。**

（1）求 a **的值；（2）求此极值，并说明是极大值还是极小值。**

解 略

20. **设函数** $f(x)$ **在** $[0,+\infty)$ **上可导，** $f(0)=0$ **，且** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ **，证明：**

（1）存在 $a>0$ **，使得** $f(a)=1$ **；**

（2）对（1）中的 a **，存在** $\xi\in(0,a)$ **，使得** $f'(\xi)=\frac{1}{a}$ **。**

证 （1）证 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$，故存在充分大的正数 x_0，使得 $f(x_0)>1.5$。设 $F(x)=f(x)-1$，则由已知得 $F(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，且 $F(0)=-1<0, F(x_0)=f(x_0)-1>0$，根据零点定理知，存在 $a\in(0,x_0)\subset(0,+\infty)$，使得 $F(a)=0$，结论得证；

（2）略