1. （选择题）**设函数** $f(x)=x(x-2)(x-4)(x-6)$**，则方程** $f'(x)=0$ **在** $(-\infty,+\infty)$ **内有（　　）个实根。**

A. 1；　B. 2；　C. 3；　D. 4

选 C.

解析: 因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导且 $f(0)=0=f(2)$，所以根据罗尔定理，至少存在 $\xi_1\in(0,2)$，使得 $f'(\xi_1)=0$，即方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,2)$ 内至少有一个根 ξ_1；同理，根据罗尔定理，方程 $f'(x)=0$ 在 $(2,4)$ 内至少有一个根 ξ_2；方程 $f'(x)=0$ 在 $(4,6)$ 内至少有一个根 ξ_2； 所以，方程 $f'(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有 3 个实数根；

另一方面，$f(x)$ 为 4 次多项式，$f'(x)$ 为 3 次多项式，从而方程 $f'(x)=0$ 为 3 次代数方程，在 $(-\infty,+\infty)$ 内最多有 3 个实数根。综上，方程 $f'(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有且仅有 3 个实根。

2. （填空题）设函数 $f(x)=x^4$ 在区间 $[1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，则中值 $\xi=$__________。

解析: $\dfrac{2^4-1^4}{2-1}=4\xi^3\Rightarrow\xi=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$

二、证明

1. 已知函数 $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上连续，在** $(0,1)$ **内可导，且** $f(1)=1$**。证明：存在** $\xi\in(0,1)$**，使得** $f(\xi)+\xi f'(\xi)=1$**。**

证 即证存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)-1=0$，注意到 $f(x)+xf'(x)-1=[xf(x)-x]'$，故构造辅助函数 $\varphi(x)=xf(x)-x$。 因为 $\varphi(x)=xf(x)-x$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\varphi(0)=0=\varphi(1)$，所以根据罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$。结论得证。

2. 若 $f(x)>0$ **在** $[a,b]$ **上连续，在** (a,b) **内可导，则存在** $\xi\in(a,b)$**，使得**

$$\ln\frac{f(b)}{f(a)}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a)。$$

证 即证存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{\ln f(b)-\ln f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}$，故构造辅助函数 $\varphi(x)=\ln f(x)$。

因为$\varphi(x)=\ln f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，所以根据拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\varphi'(\xi)$。结论得证。

3. $\forall 0<x<\dfrac{\pi}{2}$，**证明**$x<\tan x<\dfrac{x}{\cos^2 x}$。

证　即证$1<\dfrac{\tan x}{x}<\dfrac{1}{\cos^2 x}$，亦即证$1<\dfrac{\tan x-\tan 0}{x-0}<\dfrac{1}{\cos^2 x}$。

因为$\varphi(x)=\tan x$在$[0,x]$上连续，在$(0,x)$内可导，由拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(0,x)$，使得$\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\varphi'(\xi)$，　即$\dfrac{\tan x-\tan 0}{x-0}=\dfrac{1}{\cos^2\xi}$。注意到

当$0<\xi<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\cos^2 x<\cos^2\xi<\cos^2 0$，结论得证。