前言

离散系统 z 域分析相关内容

一、从拉氏变换到z变换

对连续信号进行均匀冲激取样后，就得到离散信号：

> $$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

两边取双边拉氏变换得：

> $$F_{sb}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

令：$z = e^{sT}$，上式成为复变量z的函数

> $$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-k} \tag{1}$$
>
> $$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)e^{-k} \tag{2}$$

- **（1）式成为序列 $f(k)$ 的双边z变换**
- **（2）式成为序列 $f(k)$ 的单边边z变换**

注：若 $f(k)$ 为因果序列，则单边、双边z变换相等。

二、收敛域

z变换定义为一无穷幂级数之和，显然只有当该幂级数收敛，即：

> $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)z^{-k}| < \infty$$

时，z变换才存在。

1、收敛域定义

对于序列 $f(k)$ 满足

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)z^{-k}| < \infty$$

所有z值组成的集合称为z变换 $F(z)$ 的收敛域。

2、例题

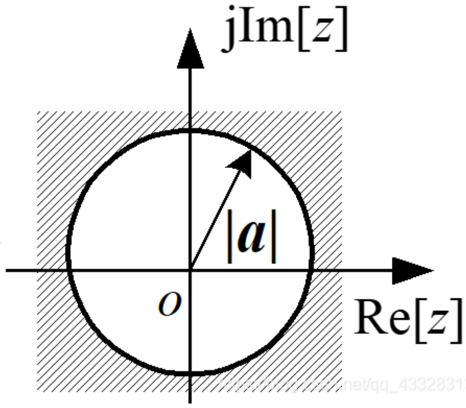
求因果序列 $f_y(k)=a^k\varepsilon(k)=\begin{cases}0, & k<0\\ a^k, & k\ge 0\end{cases}$ 的z变换（式中a为常数）。

解：代入定义

$$F_y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}(az^{-1})^k=\lim_{N\to\infty}\frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}}$$

可见，仅当 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$ 时，其z变换存在。

$$F_y(z)=\frac{z}{z-a}$$ 收敛域为 $|z|>|a|$



求反因果序列 $f_f(k)=\begin{cases}b^k, & k<0\\ 0, & k\ge 0\end{cases}=b^k\varepsilon(-k-1)$ 的z变换。

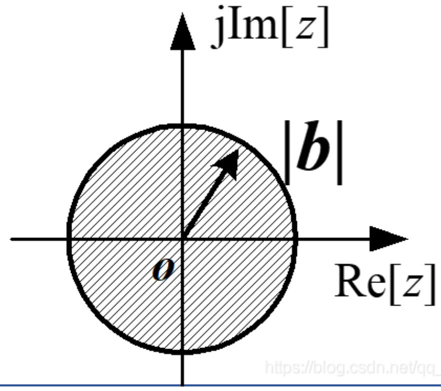
解

$$F_f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}(bz^{-1})^k=\sum_{m=1}^{\infty}(b^{-1}z)^m=\lim_{N\to\infty}\frac{b^{-1}z-(b^{-1}z)^{N+1}}{1-b^{-1}z}$$

可见，$|b^{-1}z|<1$，即 $|z|<|b|$ 时，其z变换存在，

$$F_f(z)=\frac{-z}{z-b}$$

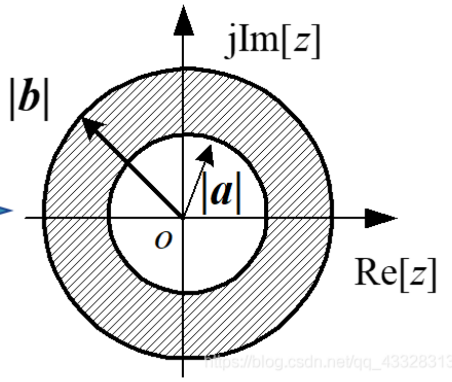
收敛域为 $|z|<|b|$



双边序列$f(k)=f_y(k)+f_f(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ a^k, & k\ge 0 \end{cases}$的z变换。

解 $$F(z)=F_y(z)+F_f(z)=\frac{-z}{z-b}+\frac{z}{z-a}$$

可见，其收敛域为 $|a|<|z|<|b|$（显然要求 $|a|<|b|$，否则无共同收敛域)



3、序列收敛域的几种情况

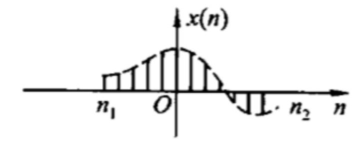
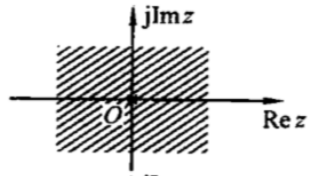
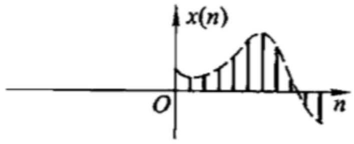
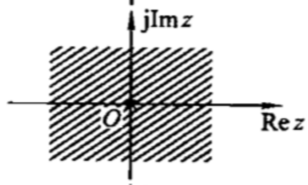
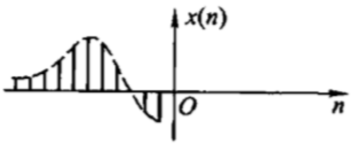
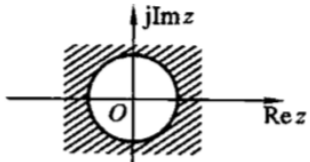
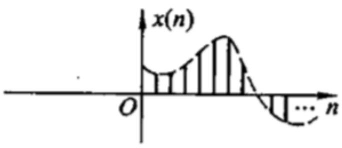
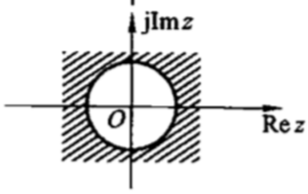
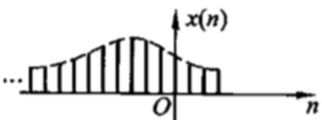
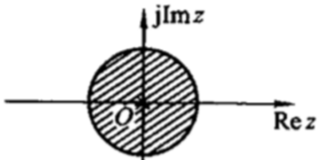
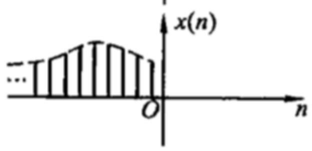
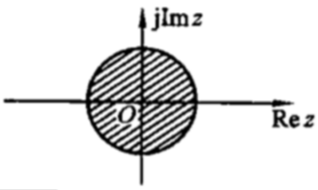
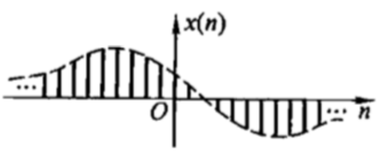
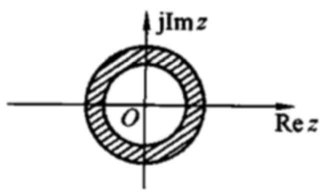
（1）有限长序列，其双边z变换在整个平面；

（2）因果序列，其z变换的收敛域为某个圆外区域；

（3）反因果序列，其z变换的收敛域为某个圆内区域；

（4）双边序列，其z变换的收敛域为环状区域；

表 8－1 序列的形式与双边 z 变换收敛域的关系

序列形式		z 变换收敛域	
有限长序列 ① $n_1<0$, $n_2>0$			$\infty>\lvert z\rvert>0$
② $n_1\geqslant 0$, $n_2>0$			$\lvert z\rvert>0$
③ $n_1<0$, $n_2\leqslant 0$			$\infty>\lvert z\rvert$
右边序列 ① $n_1<0$, $n_2=\infty$			$\infty>\lvert z\rvert>R_{x1}$
② $n_1\geqslant 0$, $n_2=\infty$ （因果序列）			$\lvert z\rvert>R_{x1}$
左边序列 ① $n_1=-\infty$, $n_2>0$			$R_{x2}>\lvert z\rvert>0$
② $n_1=-\infty$, $n_2\leqslant 0$			$R_{x2}>\lvert z\rvert$
双边序列 $n_1=-\infty$, $n_2=\infty$			$R_{x2}>\lvert z\rvert>R_{x1}$

三、常用序列z变换

> 1、
>
> $$\delta(k) \longleftrightarrow 1, |z| > 0$$
>
> 2、
>
> $$\epsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$
>
> 3、
>
> $$-\epsilon(-k-1) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}, |z| < 1$$
>
> 4、
>
> $$a^k\epsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}, |z| > a$$
>
> 5、
>
> $$k\epsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}, |z| > 1$$

总结

> Z变换（英文：z-transformation）可将时域信号（即：离散时间序列）变换为在复频域的表达式。它在离散时间信号处理中的地位，如同拉普拉斯变换在连续时间信号处理中的地位。离散时间信号的Z变换是分析线性时不变离散时间系统问题的重要工具，在数字信号处理、计算机控制系统等领域有着广泛的应用。