



重慶理工大學

CHONGQING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

明德篤行
自強日新



工程电磁场

Engineering Electromagnetics

电气与电子工程学院



电磁场复习

第1章 矢量分析

1. 矢量与矢量乘积分两种定义

a. 标量积（点积）：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \theta$$

b. 矢量积（叉积）：



2. 标量场及其梯度

在直角坐标系中，标量场 Φ 的梯度 $\nabla \Phi$ 可表示为

$$\text{grad } \Phi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

3. 矢量场的通量及散度

矢量 A 沿某一有向曲面 S 的通量，以标量 Ψ 表示，即

$$\Psi = \int_S A \cdot dS$$

通量可为正、负或零。

散度

- 散度代表矢量场的通量源的分布特性

常用坐标系中，散度的计算公式：

直角坐标系中：

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

4. 矢量场的环量与旋度

矢量场 A 沿一条有向曲线 l 的环量，即

$$\Gamma = \oint_l A \cdot dl$$

直角坐标系中，旋度可用矩阵表示为

$$\operatorname{curl} A = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad \text{或者} \quad \operatorname{curl} A = \nabla \times A$$

两个重要的恒等式：

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

5. 矢量场积分定理

高斯散度定理 (Gauss)

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

斯托克斯定理 (Stokes)

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

6. 矢量场的无旋和无散特性

(1) **无旋场**的旋度恒为零, 即: $\nabla \times \mathbf{F} = 0$

由 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ 可以定义一个标量场 $\varphi(\mathbf{r})$: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r})$

(2) **无散场**的散度恒为零, 即: $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$

由上式可定义一个矢量位函数 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$: $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$

给定矢量函数 $\vec{F} = y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$, 试求从点P1 (3,1, -1) 移动到点P2 (12, 2, -1) 处的线积分 $\int \vec{F} \cdot d\vec{l}$ 。

(1) 沿曲线 $x = 3y^2$;(2)沿连接两点的直线; (3) F是保守场吗?

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int (y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) \cdot (\vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz) = \int (ydx + xdy)$$

$$dx = 6ydy$$

$$(1) \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int (ydx + xdy) = \int_1^2 9y^2 dy = 21$$

$$(2) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \longrightarrow \quad x = 9y - 6$$

$$dx = 9dy$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int (ydx + xdy) = \int_1^2 (12y - 4)dy = 21$$

第2章 静电场

1.库仑定律 电场强度

电场对某点单位正电荷的作用力称为该点的电场强

度, 以 E 表示。

$$E = \frac{F}{q}$$

a) 点电荷产生的电场强度

$$\mathbf{F} = \frac{q q_t}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

b) N 个点电荷产生的电场强度 (注意:矢量叠加)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k'|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{R_k^2} \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad \text{V/m}$$

c) 连续分布电荷产生的电场强度

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq(\mathbf{r}')$$

体电荷分布 $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$

面电荷分布: $dq = \sigma(\mathbf{r}')ds'$

线电荷分布: $dq = \tau(\mathbf{r}')dl'$

2. 静电场的无旋性 · 电位

静电场是一个无旋场,有: $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv 0$

因此引出电位 φ 的微分与 E 关系: $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$

则电场 E 与电位 φ 的积分关系:

$$\varphi(p) = \int_p^{p_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

P_0 为参考点

由斯托克斯定理, 得: $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_s (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \equiv 0$

- 在静电场中, 电场强度沿着闭合回路的环境恒等于零。

当电荷分布已知时,

点电荷:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C$$

点电荷群:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i'|} + C$$

连续分布电荷:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma'} \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C$$

$$dq: \quad \rho dV, \quad \sigma dS, \quad \tau dl$$

3.静电场中的导体与电介质

大多数介质发生极化时, 极化强度 \mathbf{P} 与该点电场强度 \mathbf{E} $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$, 有: $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$

极化强度 $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ 与极化电荷的关系为:

体极化电荷密度: $\rho_p = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')$ 面极化电荷密度: $\sigma_p = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_n$

介质内部总体极化电荷为:

$$q' = \int_V \rho'(\mathbf{r}) dV = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) dV = -\oint_S \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

电介质的构成 (本构) 关系: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 或 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$

4.高斯定律

真空中的高斯定律:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

闭合面 S 内包围有 n 个点电荷: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$

闭合面 S 内电荷按体密度分布: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} \rho dV'$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

介质中的静电场方程:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

其中 \mathbf{D} 为: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$

5. 静电场的基本方程 分界面上的衔接条件

1) 静电场的基本方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\mathbf{E} = -\nabla \varphi) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \end{array} \right.$$

电介质的构成（本构）关系： $D = \varepsilon_0 E + P$ 或 $D = \varepsilon E$

2) 介质分界面上的衔接条件

$$E_{1t} = E_{2t} \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad \text{导体表面} \quad E_t = 0 \quad D_n = \sigma$$

在两种介质的边界上不可能存在表面自由电荷时, $D_{1n} = D_{2n}$

此时满足折射定律:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

3) 用电位函数 φ 表示分界面上的衔接条件

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

表明: 在介质分界面上, 电位是连续的。

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma$$



$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

表明: 一般情况下 ($\sigma \neq 0$), 电位的导数是不连续的。

对于导体与理想介质分界面, 用电位 φ 表示的衔接条件:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \qquad \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma$$

假设圆导体表面有均匀分布的面电荷密度 $\sigma_s = 100 \times 10^{-12} \text{ C / m}^2$ 的电荷

导体周围的介质介电常数为 $3\epsilon_0$ 求导体周围的电场强度大小及方向。

$$E_n = \frac{D_n}{3\epsilon_0} = \frac{\sigma_s}{3\epsilon_0}$$

方向为半径R方向

6. 电位微分方程与边值问题

1) 泊松方程与拉普拉斯方程

泊松方程: $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ 当 $\rho = 0$ 时 $\nabla^2 \varphi = 0$ 拉普拉斯方程

注意: 泊松方程与拉普拉斯方程只适用于各向同性、线性的均匀媒质。

2) 静电场的边值问题

根据给定的边界条件求解空间任一点的电位就是静电场的**边值问题**。

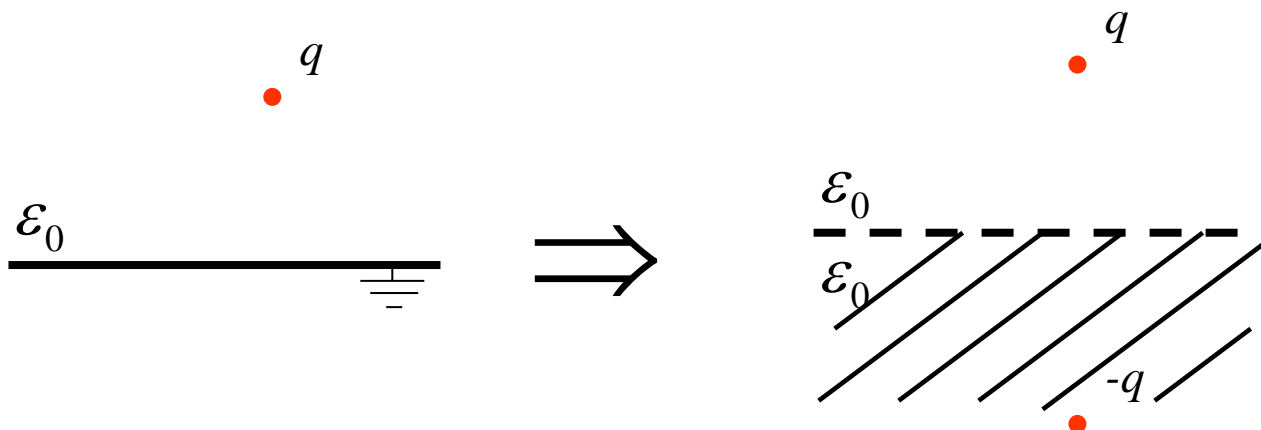
若静电场的边界为导体, 此时给定导体上的**电位**就是**第一类边界**。

若给定导体表面上的**电荷量**, 表面电荷给定等于给定了电位的法向导数值, 就是**第二类边界**可见。因此

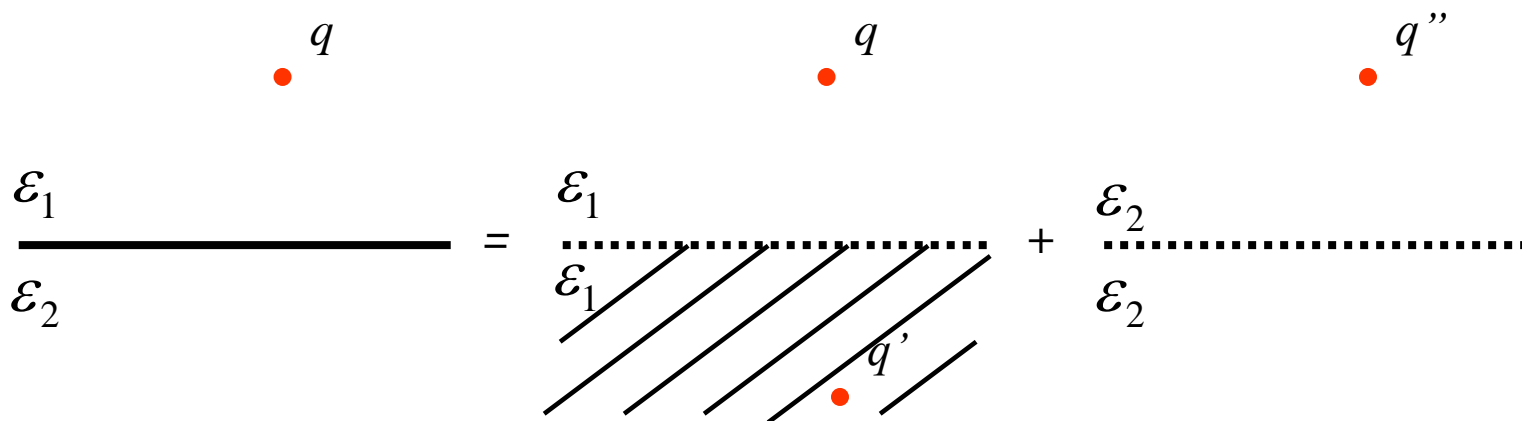
$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}$$

7. 静电场的间接求解方法— 镜像法

(1) 点电荷与无限大的导体平面



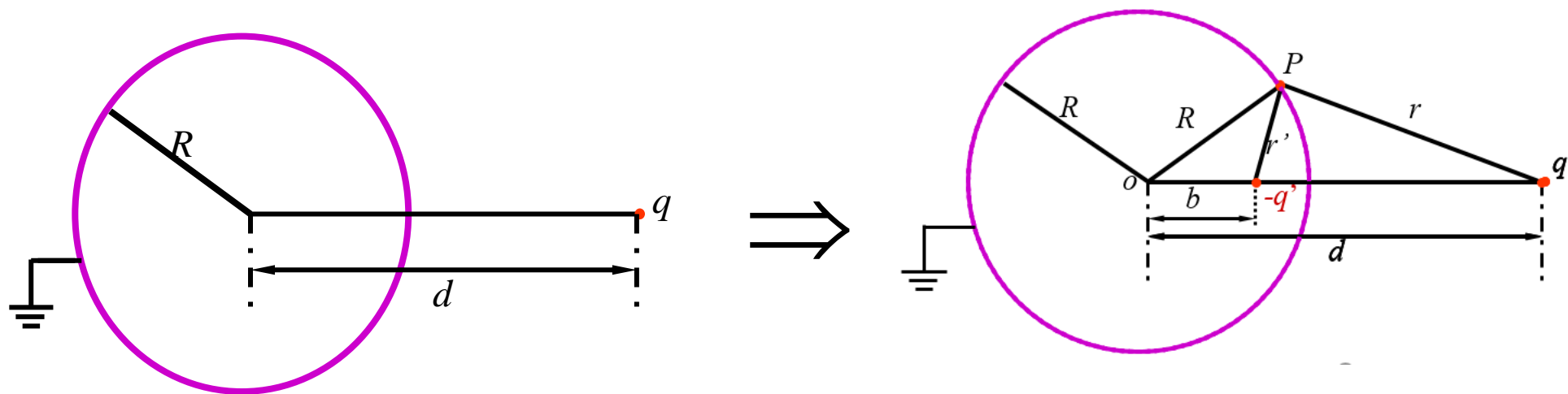
(2) 点电荷在不同介质分界面的镜像



$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

$$q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q = q - q'$$

(3) 点电荷与导体球面的镜像



$$\begin{cases} q' = \frac{R}{d} q \\ b = \frac{R^2}{d} \end{cases}$$

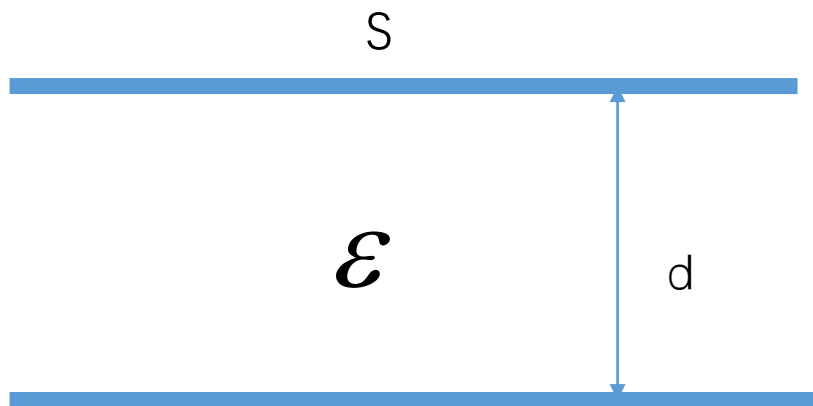
8. 电容与部分电容

$$C = \frac{Q}{U} \quad \text{单位: F(法拉), } \mu\text{F}, \text{pF}$$

a. 设 $Q(-Q)$ $\xrightarrow{\text{高斯定律}}$ E $\xrightarrow{\int E \cdot dl}$ $U = U(Q)$ \longrightarrow $C = \frac{Q}{U}$

b. 设 U $\xrightarrow{\text{解边值问题}}$ φ $\xrightarrow{E = -\nabla \varphi}$ E $\xrightarrow{\text{边界条件}}$ σ $\xrightarrow{\int_s \sigma ds}$ $Q = Q(U) \longrightarrow C$

求电容器电容



假设极板电荷为 Q , $-Q$

根据衔接条件有:

$$D = \frac{Q}{S}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon S}$$

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

9. 静电能量与电场力

电量为 Q 的孤立带电体具有的能量为: $W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ 或者为 $W_e = \frac{1}{2} \Phi Q$

1) 连续分布电荷系统的静电能量

体电荷系统的静电能量

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$$

面电荷系统

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS$$

线电荷系统

$$W_e = \frac{1}{2} \int_L \tau \varphi dl$$

2) 带电导体系统

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k$$

特例: 带等值异号的两导体 (电容器), 设 $q_2 = -q_1$, 所以 $C = \frac{q^2}{2W_e} = \frac{2W_e}{U^2}$

3) 静电能量的分布及能量体密度

静电能量

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V w_e dV \quad \text{J(焦耳)}$$

能量密度定义为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad \text{J/m}^3$$

4) 静电力

$$f = qE$$

$$df = E dq$$

$$f = \int E dq$$

虚位移法: $dW = dW_e + f dg = \sum \varphi_k dq_k$

外源提供能量

=

静电能量增量

+

电场力所作功

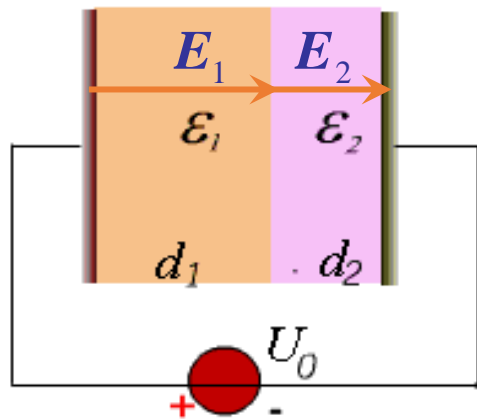
常电荷系统:

$$f = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial g} \right|_{q_k = \text{const.}}$$

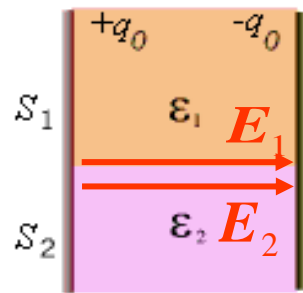
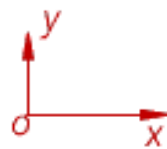
常电位系统:

$$f = + \left. \frac{\partial W_e}{\partial g} \right|_{\varphi_k = \text{const.}}$$

例 2.5.2 如图(a) 与图(b) 所示平行板电容器,已知 $d_1, d_2, S_1, S_2, \varepsilon_1$ 和 ε_2 ,图(a)已知极板间电压 U_0 , 图(b)已知极板上总电荷 q_0 ,试分别求其中的电场强度。



(a)



(b)

在导体与介质分界面上 $D'_{2n} = \sigma$
 $D'_{1n} = 0$

图 2.5.6 平行板电容器

解：忽略边缘效应 $D_{1n} = D_{2n}$

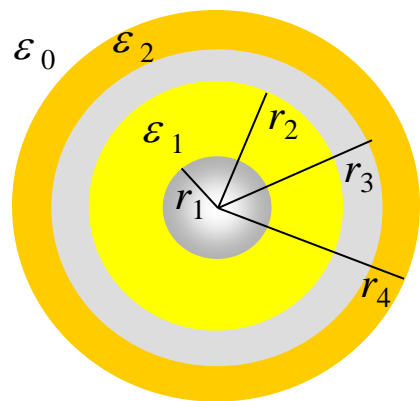
$$\text{图 (a)} \quad \therefore \begin{cases} \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \\ E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} E_1 = \frac{\varepsilon_2 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \mathbf{e}_x \\ E_2 = \frac{\varepsilon_1 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \mathbf{e}_x \end{cases}$$

$$\text{图 (b)} \quad \therefore \begin{cases} \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = q_0 \\ \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} \end{cases}$$

$$\therefore E_1 = E_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \mathbf{e}_x = \frac{q_0}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2} \mathbf{e}_x$$

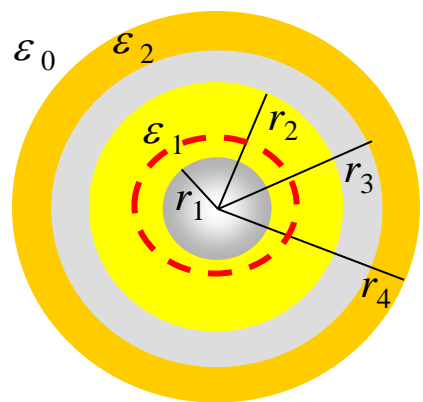
例2.5.3 已知半径为 r_1 的**导体球**携带的**正电荷量**为 q ，该导体球被内半径为 r_2 的**导体球壳**所包围，球与球壳之间填充介质，其介电常数为 ε_1 ，球壳的外半径为 r_3 ，球壳的外表面敷有一层介质，该层介质的外半径为 r_4 ，介电常数为 ε_2 ，外部区域为真空，如左下图所示。



试求：

- ① 各区域中的**电场强度**；
- ② 各个表面上的**自由电荷**和**束缚电荷**。

可以应用**高斯定律**求解吗？



解 在 $r < r_1$ 及 $r_2 < r < r_3$ 区域中

$$E = 0$$

在 $r_1 < r < r_2$ 区域中

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$



$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \mathbf{e}_r$$

同理，在 $r_3 < r < r_4$ 区域中，求得

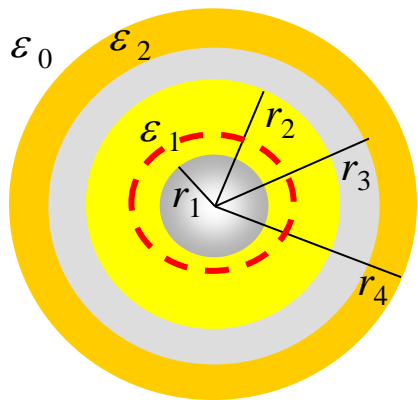
$$\mathbf{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_2 r^2} \mathbf{e}_r$$

在 $r > r_4$ 区域中，求得

$$\mathbf{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

注意，各区域中的介电常数不同！

根据 $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D} = \rho_s$ 及 $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{P} = -\rho'_s$, 分别求得



$$r = r_1: \quad \rho_s = \frac{q}{4\pi r_1^2}$$

$$\rho'_s = \epsilon_0 E_{1n} - \rho_s = \frac{q}{4\pi r_1^2} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} - 1 \right) < 0$$

$$r = r_2: \quad \rho_{s2} = -\frac{q}{4\pi r_2^2}$$

$$\rho'_{s2} = -\epsilon_0 E_{1n} - \rho_{s2} = \frac{q}{4\pi r_2^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right) > 0$$

$$r = r_3: \quad \rho_{s3} = \frac{q}{4\pi r_3^2}$$

$$\rho'_{s3} = \epsilon_0 E_{2n} - \rho_{s3} = \frac{q}{4\pi r_3^2} \left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} - 1 \right) < 0$$

$$r = r_4: \quad \rho_s = 0$$

$$\rho'_{s4} = \epsilon_0 (E_{0n} - E_{2n}) = \frac{q}{4\pi r_4^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r2}} \right) > 0$$

2-12 如题图 2-12 所示球形电容器中填充有介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 两种均匀介质，两介质交界面

是以球心为中心的圆环面。在内、外导体间施加电压 U 时，试求：

- (1) 电容器中的电位函数和电场强度；
- (2) 内导体两部分表面上的自由电荷密度。

设内导体带电荷为 Q ，外导体带电荷 $-Q$ ，选球坐标，应用高斯定律

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

由媒质分界面条件可知，在两种介质中 $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ ， $\vec{D}_1 \neq \vec{D}_2$ ，所以

$$\int_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \varepsilon_1 \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \varepsilon_2 \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) E = Q \quad \therefore \quad \vec{E} = \frac{Q}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \vec{e}_r \quad (1)$$

令外导体为参考导体，则电位函数为

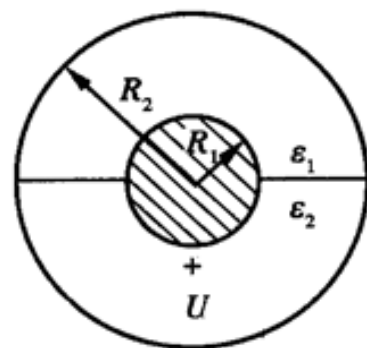
$$\varphi = \int_r^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_2} \frac{Q}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot dr = \frac{Q}{2\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2)$$

$$\therefore U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot dr = \frac{Q}{2\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\therefore \frac{Q}{2\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \frac{UR_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

将上式带入 (1) (2) 得

$$\therefore \vec{E} = \frac{UR_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r, \quad \varphi = \frac{UR_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$



题图 2-12

(2) 两种介质中的电位移矢量分别为

$$\vec{D}_1' = \varepsilon_1 \vec{E}_1, \quad \vec{D}_2' = \varepsilon_2 \vec{E}_2$$

根据分界面条件 $\sigma = \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)$

对于本题，设媒质 2 为介质，媒质 1 为导体，因此有 $\vec{D}_1 = 0$ ， $\sigma = \vec{D}_2 \cdot \vec{e}_n$

则内导体两部分表面上的自由电荷密度为

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 \vec{E}(R_1) \cdot \vec{e}_n = \frac{\varepsilon_1 UR_2}{R_2 - R_1}, \quad \sigma_2 = \varepsilon_2 \vec{E}(R_1) \cdot \vec{e}_n = \frac{\varepsilon_2 UR_2}{R_2 - R_1}$$

2-6 半径为 b 的无限长圆柱中，有体密度为 ρ_0 的电荷，与它偏轴地放有一半径为 a 的无限长圆柱空洞，两者轴线平行且距离为 d ，如图 2-6 所示，求空洞内的电场强度。

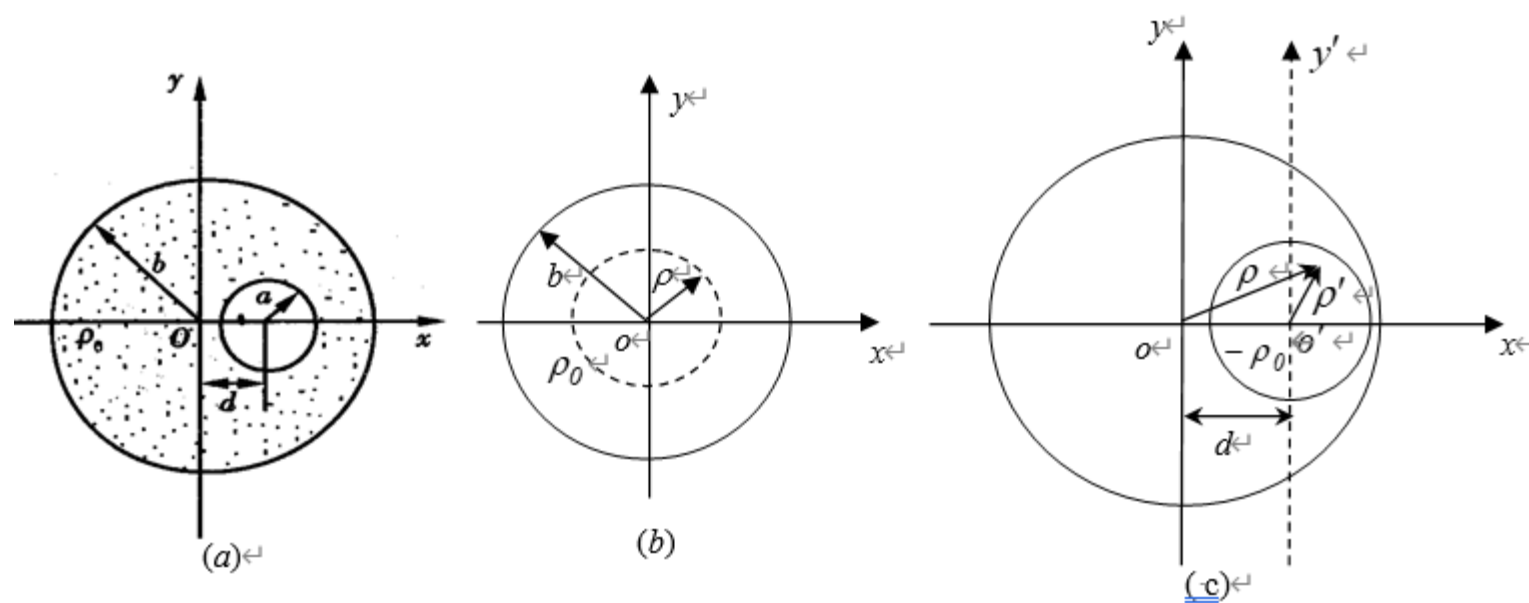


图 2-6

2-6 半径为 b 的无限长圆柱中，有体密度为 ρ_0 的电荷，与它偏轴地放有一半径为 a 的无限长圆柱空洞，两者轴线平行且距离为 d ，如图 2-6 所示，求空洞内的电场强度。↵

第一步 ρ_0 单独作用，如图 (b) 所示，由体密度为 ρ_0 的电荷产生的电场强度为 \vec{E}_1 ，由高斯定理↵

$$\oint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S}_1 = q_1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 E_1 2\pi\rho l = \rho_0 \pi \rho^2 l \quad \leftarrow$$

所以： $\vec{E}_1 = \frac{\rho_0 \rho}{2\varepsilon_0} \vec{e}_\rho$ ↵

第二步 $-\rho_0$ 单独作用产生的电场强度为 \vec{E}_2 ，如图 (c) 所示。↵

$$\oint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S}_2 = q_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 E_2 2\pi\rho' l = -\rho_0 \pi \rho'^2 l \quad \leftarrow$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho_0 \rho'}{2\varepsilon_0} \vec{e}_{\rho'} \quad \leftarrow$$

第三步 将 ρ_0 和 $-\rho_0$ 在空洞中产生的场进行叠加，即↵

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} (\rho \vec{e}_\rho - \rho' \vec{e}_{\rho'}) = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x \quad \leftarrow$$

注： $\vec{\rho} - \vec{\rho}' = \vec{d} = d \vec{e}_x$ ↵

2-8 具有两层同轴介质的圆柱形电容器，内导体的直径为 2cm，内层介质的相对介电常数 $\epsilon_{r1} = 3$ ，

外层的相对介电常数 $\epsilon_{r2} = 2$ ，要使两层介质中的最大场强相等，并且内层介质所承受的电压和外层介质相等，问两层介质的厚度各为多少？

解：以圆柱心为坐标原点，径向为 ρ 轴，设单位长度上带电荷为 τ ，由高斯定理

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2\pi\rho l D = \tau \cdot l, \vec{D} = \frac{\tau}{2\pi\rho} \vec{e}_\rho (R_1 \leq \rho \leq R_3). \vec{E}_1 = \frac{\vec{D}}{\epsilon_1} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_{r1}\epsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\rho} \vec{e}_\rho (R_1 \leq \rho \leq R_2)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}}{\epsilon_2} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_{r2}\epsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}\rho} \vec{e}_\rho (R_2 \leq \rho \leq R_3), \vec{E}_{1\max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}R_1} \vec{e}_\rho, \vec{E}_{2\max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}R_2} \vec{e}_\rho$$

$$\because R_1 = 1\text{cm}, \epsilon_{r1} = 3, \epsilon_{r2} = 2, \vec{E}_{1\max} = \vec{E}_{2\max} \quad \therefore R_2 = 1.5\text{cm}$$

$$\text{将电位参考点设在外导体上，即 } \varphi|_{\rho=R_3} = 0, \text{ 则 } \varphi_2 = \int_{\rho}^{R_3} \vec{E}_2 \left(d\rho \vec{e}_\rho \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_{r2}} \ln \frac{R_3}{\rho} (R_2 \leq \rho \leq R_3)$$

$$\varphi_2 = \int_{\rho}^{R_3} \vec{E} \left(d\rho \vec{e}_\rho \right) = \int_{\rho}^{R_2} \vec{E}_1 \left(d\rho \vec{e}_\rho \right) + \varphi_2|_{\rho=R_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{R_2}{\rho} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} (R_2 \leq \rho \leq R_3),$$

$$\because \varphi_1|_{\rho=R_1} - \varphi_1|_{\rho=R_2} = \varphi_2|_{\rho=R_2} - \varphi_2|_{\rho=R_3},$$

$$\therefore \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_1} - 0$$

即 $R_3 = 1.5^{5/3} = 1.96\text{cm}$ ，所以，内 $R_2 - R_1 = 0.5\text{cm}$ ，外 $R_3 - R_2 = 0.46\text{cm}$

第3章 恒定电场

1. 电流

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad \text{A(C/s)}$$

2. 恒定电场的基本物理量——电流密度

体电流密度:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

, 或

$$\mathbf{J} = \frac{dI}{dS} \mathbf{e}_n$$

$$\frac{-I}{hw} \mathbf{e}_z$$

面电流密度:

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$$

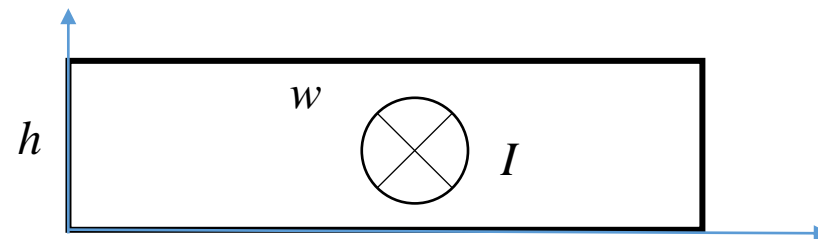
, 或

$$\mathbf{K} = \frac{dI}{dl} \mathbf{e}_n$$

$$\frac{-I}{w} \mathbf{e}_z$$

线电流:

$$I = \tau v$$



3. 欧姆定律的微分形式

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$$

4. 焦尔定律的微分形式

功率密度

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

W/m³

各向同性线性媒质

$$p = \gamma E^2 = \frac{J^2}{\gamma}$$

$$(\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E})$$

5. 恒定电场(电源外) 的基本方程

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

恒定电流连续性原理

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

恒定电场是无旋场

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$$

6. 导电介质分界面衔接条件

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}}$$

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{J}_{1n} = \mathbf{J}_{2n}}$$

折射定律为

$$\boxed{\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$$

恒定电场的边值问题：

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$$

拉普拉斯方程

分界面衔接条件

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \\ \gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{aligned}}$$

导电媒质中的恒定电场与无源区静电场的比拟

恒定电场

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

无源区静电场

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

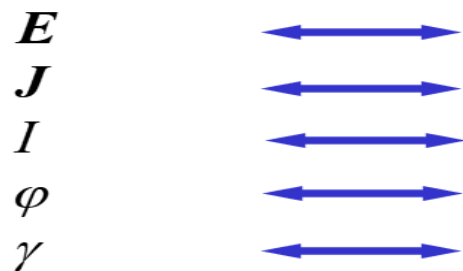
$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\psi_D = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

对偶量

恒定电场



无源区静电场

电导的计算方法:

$$\text{设 } I \rightarrow J \rightarrow E = \frac{J}{\gamma} \rightarrow U = \int E \cdot dl \rightarrow G = \frac{I}{U}$$

$$\text{设 } U(\text{或} \varphi) \rightarrow E \rightarrow J = \gamma E \rightarrow I = \int J \cdot dS \rightarrow G = \frac{I}{U}$$

第 4 章 恒定磁场

1. 安培力定律

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{Idl \times (I'dl' \times e_R)}{R^2}$$

2. 毕奥——沙伐定律 · 磁感应强度

电流回路 l' 在场点 r 处的磁感应强度为:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I'dl' \times (r - r')}{|r - r'|^3}$$

3. 磁通连续性原理

$$\Phi = \int_S B \cdot dS$$

$$\int_V \nabla \cdot B dV \xrightarrow{\text{散度定理}} \oint_S B \cdot dS = 0$$

所以

$$\nabla \cdot B = 0$$

4. 真空中的安培环路定律

真空中安培环路定律积分形式

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

真空中安培环路定律的微分形式:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

5. 矢量磁位

由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

令 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 称为库伦规范, 使得 \mathbf{A} 唯一确定。

真空中 \mathbf{A} 的微分方程:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

(泊松方程)

当 $\mathbf{J} = 0$ 时

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

(拉普拉斯方程)

6. 磁介质磁化 安培环路定律的一般形式

体磁化电流密度:

$$J_m = \nabla \times M$$

M 表示磁化的程度,即**磁化强度**

面磁化电流密度:

$$K_m = M \times e_n$$

安培环路定律一般形式的积分形式: $\oint_L H \cdot dl = \sum I$

安培环路定律一般形式的微分形式:

$$\nabla \times H = J$$

恒定磁场是有旋的

7. 各向同性线性媒质的构成方程

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

或

$$B = \mu_0 (H + M)$$

各向同性的线性磁介质的构成方程(性能方程、本构关系):

$$B = \mu H$$

8. 磁标量位

恒定磁场无电流区域:

$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{H} = -\nabla \varphi_m} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi_m(p) = \int_p^{ref} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l}}$

磁位 φ_m 的微分方程: $\boxed{\nabla^2 \varphi_m = 0}$ (适用于无自由电流区域)

磁位 φ_m 磁矢位 \boldsymbol{A} 与电位 φ 的比较:

位 函 数 比较内容	电位 (φ) (有源或无源)	磁位 (φ_m) (无源)	磁矢位 (\boldsymbol{A}) (有源或无源)
引入位函数的依据	$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$	$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$
位与场的关系	$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi$ $\varphi = \int_p^{ref} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$	$\boldsymbol{H} = -\nabla \varphi_m$ $\varphi_m = \int_p^{ref} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l}$	$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ $\oint_l \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$
微分方程	$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon$ $\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi_m = 0$	$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \quad \nabla^2 \boldsymbol{A} = 0$
位与源的关系	$\varphi = \int_v \frac{\rho dV}{4\pi \varepsilon R}$	$\varphi_m = -\frac{I}{4\pi} \Omega$	$\boldsymbol{A} = \int_v \frac{\mu_0 \boldsymbol{J} dV}{4\pi R}$

9. 恒定磁场的基本方程 · 分界面上的衔接条件

1)恒定磁场的基本方程:

	积分形式	微分形式	物理意义
磁通连续原理	$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	1、恒定磁场没有通量源; 2、 \boldsymbol{B} 线是无头无尾的矢量线。
安培环路定律	$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I$	$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$	1、恒定磁场有漩涡源, 漩涡源为电流; 2、磁场为非保守场, 线积分与路经有关。
构成方程: $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ (适用于各向同性线性媒质)			

2) 分界面上的衔接条件

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

\mathbf{H} 的切向分量不连续

$$H_{1t} = H_{2t}$$

\mathbf{H} 的切向分量连续

$$B_{1n} = B_{2n}$$

\mathbf{B} 的法向分量连续

在分界面无自由电流线密度 \mathbf{K} , 即 $\mathbf{K} = 0$

可得

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

折射定理

3) 用磁位表示的媒质分界面边界条件

$$A_1 = A_2$$

表明在媒质分界面上磁矢位 A 是连续的。

$$\mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 \right) = \mathbf{K}$$

φ_m 推导方法与静电场类似,

$$\text{由} \begin{cases} H_{1t} = H_{2t} \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases} \quad (H = -\nabla \varphi_m) \quad \begin{matrix} \text{推导得} \\ \begin{cases} \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \\ \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \end{cases} \end{matrix}$$

10. 电 感

$$L = \frac{\psi}{I}$$

自感又分为内自感 L_i 和外自感 L_0 $L = L_i + L_0$

自感计算的一般步骤:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{设} & I \rightarrow H & \xrightarrow{\mu H} & B & \xrightarrow{\int_S B \cdot dS} & \Phi & \xrightarrow{N\Phi} \psi \rightarrow L(L_i, L_0) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow & \\ & & & A & \xrightarrow{\oint_l A \cdot dl} & & \end{array}$$

$$\text{互感} \rightarrow M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} \quad M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2} \quad \text{可以证明} \quad M_{12} = M_{21}$$

互感计算的一般步骤:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{设} & I_1 \rightarrow H_1 \rightarrow B_1 \rightarrow \Phi_{21} = \int_S B_1 \cdot dS & \xrightarrow{N_2 \Phi_{21}} & \psi_{21} \rightarrow M = \frac{\psi_{21}}{I_1} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow & \\ & & & A & \xrightarrow{\oint_L A \cdot dl} & & \end{array}$$

11. 磁场能量与磁场力

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k I_k^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k$$

自有能
(n 项)

互有能
($\frac{n^2-n}{2}$ 项)

磁场能量的分布:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \int_V w_m dV \quad \text{单位: J (焦耳)}$$

磁能密度定义:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} ;$$

单位: J / m³

各向同性 线性媒质 : $w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$

磁场力的计算方法:

1. 安培力 $F = \oint_l I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

2. 虚位移法 (虚功原理)

$$dW_{ext} = dW_m + f dg$$

电源提供的能量 = 磁场能量的增量 + 磁场力所做的功

常电流系统

$$f = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{I_k = \text{常量}}$$

常磁链系统

$$f = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{\psi_k = \text{常量}}$$

- 在实际问题中，若要求相互作用力，只需求出互有磁能，并以相对

位置为广义坐标，利用 $f = \frac{\partial W_m}{\partial g} \Big|_{I_k = \text{常量}} = - \frac{\partial W_m}{\partial g} \Big|_{\psi_k = \text{常量}}$ 即可得到相应的广义力。

因为
$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k I_k^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n M_{ij} I_i I_j = W_{m\text{自}} + W_{m\text{互}}$$

所以
$$f = \frac{\partial W_{m\text{互}}}{\partial g} \Big|_{I_k = \text{常量}}$$

求磁场力步骤：

1、求 $W_m(g)$ 或 $W_{m\text{互}}(g)$ ，并表示成对应广义坐标的函数；

1、求 $\partial W_m(g) / \partial g$ 或 $\partial W_{m\text{互}}(g) / \partial g$

例 4.7.2 设传输线的长度为 l ，试求图示两线传输线的自感。

解：总自感 $L = L_{i1} + L_{i2} + L_0$

1) 内导体的内自感 $L_{i1} = (0 \leq \rho \leq R)$

设安培环路包围部分电流 I' 则有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I' = \frac{I}{\pi R^2} \pi \rho^2 = \frac{I}{R^2} \rho^2$$

$$H = \frac{I}{2\pi R^2} \rho, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \rho$$

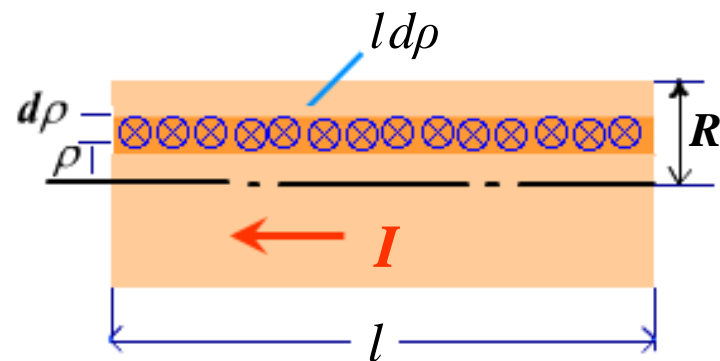
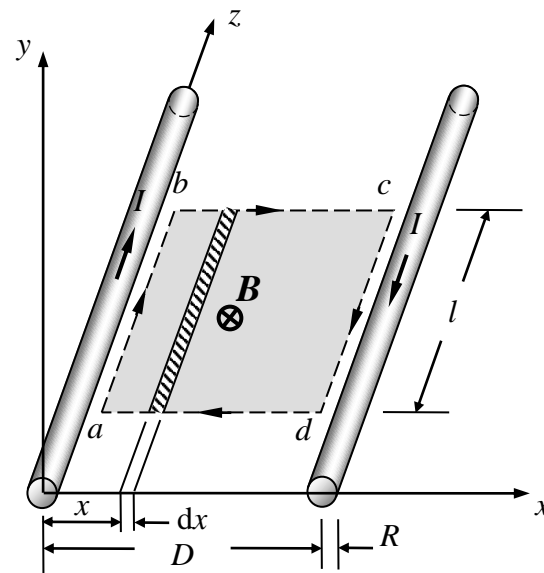
穿过宽度为 $d\rho$, 长度为 l 的矩形面积的磁通为 $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \rho l d\rho$

磁链中的匝数，可根据

$$I : 1 = I' : N \rightarrow N = \frac{I'}{I} = \frac{\rho^2}{R^2} \quad d\Psi = Nd\Phi$$

因此，有 $\Psi_{i1} = \int_s Nd\Phi = \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I l \rho}{2\pi R^2} \cdot \frac{\rho^2}{R^2} d\rho = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$

内自感 $L_{i1} = \frac{\Psi_{i1}}{I} = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$



电缆内导体纵截面

例 4.7.2 设传输线的长度为 l ，试求图示两线传输线的自感。

解: **总自感** $L = 2L_i + L_0$

内自感 $L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi}, \quad 2L_i = \frac{\mu_0 l}{4\pi}$

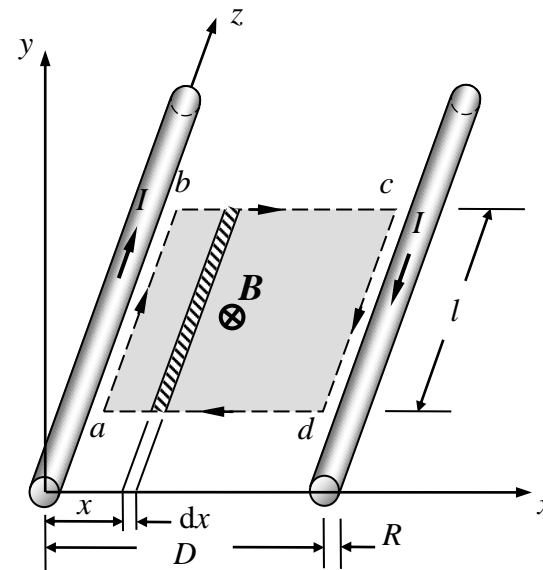
(由 $\mathbf{B} \rightarrow L_0$) $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$

设 $I \rightarrow \mathbf{H} = \left(\frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(D-x)} \right) (-\mathbf{e}_y) \rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

$\Psi_0 = \Phi_0 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad d\mathbf{S} = l dx (-\mathbf{e}_y)$

$= \mu_0 I \int_R^{D-R} \left(\frac{1}{2\pi x} + \frac{1}{2\pi(D-x)} \right) l dx = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$

$L_0 = \frac{\Psi_0}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$ **总自感为** $L = 2L_i + L_0 = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$



二线传输线的自感

例4.8.3 求图示正方形载流回路所受的磁场力。

解：首先计算系统的磁场能量。长直载流细导线视为一个载流回路 I_1 ，两电流回路构成的系统磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

载流回路为刚性， L_1 、 L_2 、 I_1 、 I_2 视为不变量，因此，上式中可能变化的是：

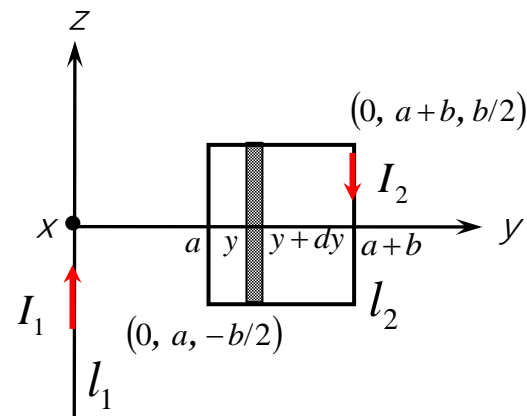
$$W_{m\text{互}} = M I_1 I_2 = I_2 (M I_1) = I_2 \psi_{21}$$

$$\psi_{21} = \phi_{21} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

将 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} (-\mathbf{e}_x)$, $d\mathbf{S} = b dy (-\mathbf{e}_x)$ 代入上式得

$$\psi_{21} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \cdot b dy = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$W_{m\text{互}} = I_2 \psi_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$



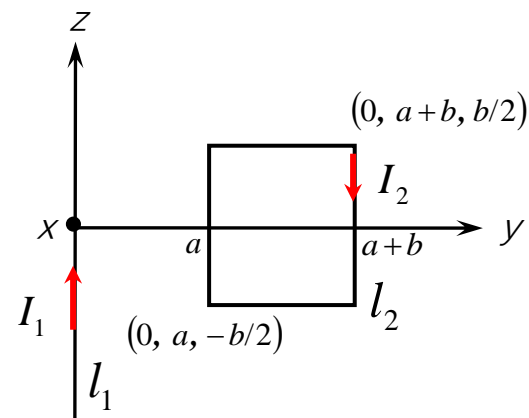
$$W_{m\overline{\text{H}}} = I_2 \psi_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$f = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{I_k=\text{常量}} = \left. \frac{\partial W_{m\overline{\text{H}}}}{\partial g} \right|_{I_k=\text{常量}} = \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial g} \left[\ln \frac{a+b}{a} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} b \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a} \right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b^2}{2\pi a(a+b)}$$

因为 $f < 0$ 所以磁场力的方向沿 a 减小的方向。



4-10 有内半径为 R_1 ，外半径为 R_2 ，厚度为 h ，磁导率为 μ ($\mu \gg \mu_0$) 的圆环形铁芯，其上均匀绕有 N 匝线圈，线圈中电流为 I ，如题 4-10 所示。求铁芯中的磁感应强度和铁芯截面上的磁通以及线圈的磁链。

解：由于磁场为轴对称场，建立圆柱坐标系 $\vec{B} = B(\rho) \cdot \vec{e}_\phi$

用安培环路定理可得：

$$\oint_1 \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad \Rightarrow \quad H \cdot 2\pi\rho = NI$$

$$\vec{H} = \frac{NI}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi \quad \therefore \quad \vec{B} = \frac{\mu NI}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi$$

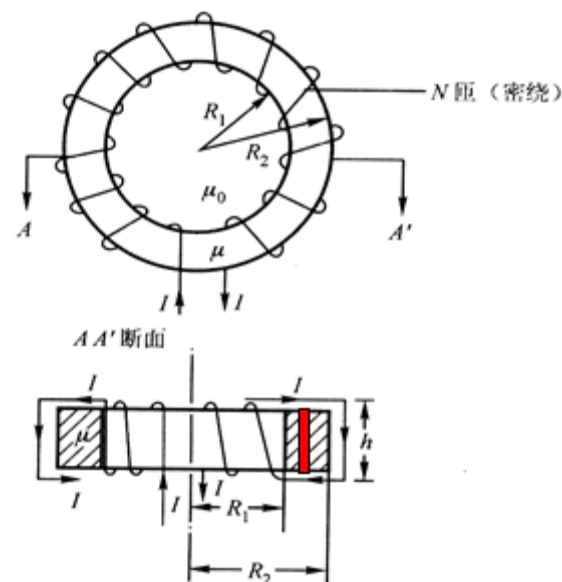
$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu NI}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi \cdot h d\rho \vec{e}_\phi = \frac{\mu NI h}{2\pi\rho} d\rho$$

$$\Phi_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu NI h}{2\pi\rho} d\rho = \frac{\mu NI h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由于每匝交链的磁通都相等

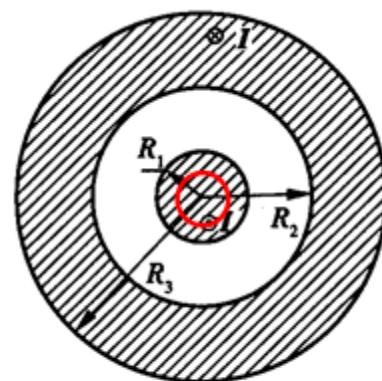
$$\Psi_m = N\Phi_m = \frac{\mu N^2 I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu N^2 I^2 h}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



题 4.10 图

如题图 4-8 所示, 同轴电缆通以电流 I , 求各处的磁感应强度。



题图 4-8

解: 选圆柱坐标, 应用安培环路定律: \leftarrow

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} \leftarrow$$

$$\dots\dots\dots \therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi \leftarrow$$

当 $0 < \rho < R_1$ 时: \leftarrow

当 $R_2 < \rho < R_3$ 时: \leftarrow

内导体上的电流密度: \leftarrow

外导体上的电流密度: \leftarrow

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{e}_z \leftarrow$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{e}_z \leftarrow$$

$$\dots\dots\dots \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \vec{e}_\phi \cdot \rho d\alpha \vec{e}_\phi = B 2\pi\rho = \mu_0 \frac{\pi\rho^2}{\pi R_1^2} I \leftarrow$$

$$\dots\dots\dots \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi\rho = \mu_0 \left(1 - \frac{\rho^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) I \leftarrow$$

$$\dots\dots\dots \therefore B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R_1^2}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R_1^2} \vec{e}_\phi \leftarrow$$

$$\dots\dots\dots \therefore B = \frac{\mu_0 I (R_3^2 - \rho^2)}{2\pi (R_3^2 - R_2^2) \rho}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I (R_3^2 - \rho^2)}{2\pi (R_3^2 - R_2^2) \rho} \vec{e}_\phi \leftarrow$$

当 $R_1 < \rho < R_2$ 时: \leftarrow

当 $R_3 < \rho$ 时: \leftarrow

$$\dots\dots\dots \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi\rho = \mu_0 I \leftarrow$$

$$\therefore \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \dots\dots\dots \therefore \vec{B} = 0 \leftarrow$$

第5章 时变电磁场

1. 感应电动势与感应场强的计算

感应电动势与感应电场的关系为

$$\nabla \times \mathbf{E}_{ind} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\varepsilon = \oint_l \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} = \int_s (\nabla \times \mathbf{E}_{ind}) \cdot d\mathbf{S} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

2. 感应电场的有散有旋性

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

3. 全电流定律

全电流定律(积分形式) :

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{s} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \int_s \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

全电流定律(微分形式) :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c (\mathbf{J}_v) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

恒定场	时变场
$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c$ $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla \cdot (\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c(\mathbf{J}_v) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_v) \cdot d\mathbf{S}$

4. 电磁场基本方程组

电磁场基本方程组 (Maxwell方程)为:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c \text{ (或 } \rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_s \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{全电流定律}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{电磁感应定律}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{磁通连续性原理}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad \text{高斯定律}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad \text{性能方程}$$

5. 分界面上的衔接条件

磁场:

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

$$H_{2t} - H_{1t} = k$$

电场:

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

折射定律

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

电磁场问题中的两种重要的特殊边界:

(1) 两种无损媒质的的分界面

此时两种媒质的电导率为零, 在分界面上一般不存在自由电荷和面电流。

$$\text{即} \quad \sigma = 0 \quad \vec{K} = 0$$

则边界条件为

$$n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad \text{或} \quad H_{1t} = H_{2t}$$

$$n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad \text{或} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

$$n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad \text{或} \quad B_{1n} = B_{2n}$$

$$n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \quad \text{或} \quad D_{1n} = D_{2n}$$

(2) 理想介质和理想导体的分界面

设1区为理想介质($\gamma_1=0$), 2区为理想导体($\gamma_2=\infty$), 理想导体内部的电磁场为0。

$$\text{则 } \vec{E}_2 = 0, \vec{B}_2 = 0, \vec{H}_2 = 0$$

边界条件为

$$n \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s \quad \text{或} \quad H_{1t} = J_s$$

$$n \times \vec{E}_1 = 0 \quad \text{或} \quad E_{1t} = E_{2t} = 0$$

$$n \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad \text{或} \quad B_{1n} = B_{2n} = 0$$

$$n \cdot \vec{D}_1 = \sigma \quad \text{或} \quad D_{1n} = \sigma$$

6. 坡印亭定理和坡印亭矢量

坡印亭定理

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J}_c dV - \int_V \frac{J_c^2}{\gamma} dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_v dV - \frac{\partial W}{\partial t}$$

物理意义： 体积V内电源提供的功率，除去电阻消耗的热功率和电荷运动消耗的机械功率，减去电磁能量的增加率，等于穿出闭合面S的电磁功率。

坡印亭矢量：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{W/m}^2$$

物理意义： 它描述了空间一点电磁能量传输或流动特性。表示单位时间内流过与电磁波传播方向相垂直单位面积上的电磁能量，亦称为功率流密度， \mathbf{S} 的方向代表波传播的方向，也是电磁能量流动的方向。

7. 趋肤效应、涡流、邻近效应及电磁屏蔽

趋肤效应：当频率较高时，电流几乎只在导体表面附近一层流动。

趋肤效应使导线在高频时电阻增大，损耗增大。工程上常用透入深度表示导体中的趋肤效应程度。

为减小趋肤效应的不利影响，工程上常采用：

- (1) 多股绝缘线代替单股导线，
- (2) 空心线代替实心线，
- (3) 导体表面涂一层高导电物质。

涡流：当导体置于交变的磁场中，与磁场正交的曲面上将产生闭合的感应电流，其特点：

- (1) 热效应
- (2) 去磁效应

邻近效应：相互靠近的导体通有交变电流时,会受到邻近导体的影响。