

一、填空题

1. 曲线  $y = \ln x$  上与直线  $x + y = 1$  垂直的切线方程为\_\_\_\_\_;

2. 若函数  $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f'(0) =$ \_\_\_\_\_;

3. 已知  $f'(x) = \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$ , 且  $f(-1) = 1$ , 则  $y = f(x)$  的反函数  $x = \varphi(y)$  的导数  $\varphi'(1) =$ \_\_\_\_\_;

4. 若  $f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{x+\frac{1}{x}}$ , 则  $f'(x) =$ \_\_\_\_\_。

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x} =$ \_\_\_\_\_;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} =$ \_\_\_\_\_。

二、选择题

1. 设函数  $y(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ , 其中  $n$  是正整数, 则  $y'(0) =$  ( )

A.  $(-1)^{n-1}(n-1)!$ ; B.  $(-1)^n(n-1)!$ ; C.  $(-1)^{n-1}n!$ ; D.  $(-1)^nn!$

2. 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 下列结论错误的是 ( )

A. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$ ; B. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$ ;  
C. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f'(0)$  存在; D. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在, 则  $f'(0)$  存在。

三、计算 (写出计算过程)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$ ;

2. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1. \end{cases}$  在点  $x=1$  可导, 求常数  $a, b$  的值.

3. 设  $y = \sqrt{\sin e^{x^2}}$ , 求  $y'$ .