重庆理工大学本科生课程考试

参考答案及评分标准

2022 —2023 学年第二学期

课程编号：10573　　课程名称：高等数学【机电（2）】　　试卷类别：A 卷

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
B	**D**	**C**	**A**	**C**

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
$2dx+dy$	$x-2y+3z-6=0$	$\sqrt{3}\pi$	$\dfrac{3}{5}$	xe^{-x}

三、计算题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，总计 30 分）

11、**解：**令 $A(1,1,-1)$、 $B(-2,-2,2)$、 $C(1,-1,2)$

则 $\overrightarrow{AB}=(-3,-3,3)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-2,3)$

于是所求平面的法向量为： $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3,9,6)=-3(1,-3,-2)$　　（4 分）

故所求平面方程为：$(x-1)-3(y-1)-2(z+1)=0$，

即 $x-3y-2z=0$　　（2 分）

12、解答： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}$（4 分）

$=\dfrac{1}{2}\cdot 0=0$　（2 分）

13、解： $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^4y^2-4y$　（或 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3y^3-\arctan(x+1)-\dfrac{x}{1+(x+1)^2}$）（3 分）

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=12x^3y^2$　　$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=12$　　（3 分）

14、解：令 $P=xy^2-3y,\ Q=yx^2-3z,\ R=3z-zx^2-zy^2$ ，Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 围成的闭区域，

由高斯公式， (2 分)

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+x^2+3-x^2-y^2)dv \qquad （4 分）$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}3dv=4\pi \qquad （2 分）$$

15、解： 由于 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad -1<x<1$ （2 分）

故 $\frac{1}{x+4}=\frac{1}{6+(x-2)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{6}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(x-2)^n,\quad -4<x<8$ （4 分）

四、解答题（本大题共 5 小题，每小题 8 分，总计 40 分）

16、解： 特征方程为：$r^2-4r+3=0$

解得 $r_1=1,\ r_2=3$

于是对应的齐次线性微分方程的通解为：$Y=c_1e^x+c_2e^{3x}$ （5 分）

令特解 $y^*=Ae^{-x}$，代入原方程，解得 $A=\frac{1}{4}$

故所求微分方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{3x}+\frac{1}{4}e^{-x}$ （3 分）

17、解：（1） 旋转曲面 Σ 为 $4z=x^2+y^2$ （3 分）

（2）$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dv=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2 d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{1}{4}\rho^2}^{1}\rho^2 dz$ （3 分）

$$=\frac{32\pi}{15} \qquad （2 分）$$

18、解： 令 $P=x^2-xy,\ Q=xy^2-y$，由格林公式得

$$\oint_L(x^2-xy)dx+(xy^2-y)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=\iint\limits_D(y^2+x)d\sigma \quad （4 分）$$

$$=\iint\limits_D y^2 d\sigma+\iint\limits_D x d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3 d\rho=\pi \quad （4 分）$$

或：$\oint_L(x^2-xy)dx+(xy^2-y)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=\iint\limits_D(y^2+x)d\sigma$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(\rho^2\sin^2\theta+\rho\cos\theta)\rho d\rho=\pi$$

19、解：令 $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}$ ，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3n-2}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{3n-2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，

于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}$ 发散.（4 分）

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}$ 是交错级数，$\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}>\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}=0$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}$ 收敛且条件收敛.（4 分）

20、解：先求驻点，令 $\begin{cases}f_x(x,y)=6y-3x^2=0\\f_y(x,y)=6x-3y^2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ ，$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

即驻点为 $(0,0)$ ，$(2,2)$ （3 分）

为了判断这两个驻点是否为极值点，求二阶导数

$$\begin{cases}f_{xx}(x,y)=-6x\\f_{xy}(x,y)=6\\f_{yy}(x,y)=-6y\end{cases}$$ （2 分）

在点 $(0,0)$ 处，$A=f_{xx}(0,0)=0,\ B=f_{xy}(0,0)=6,\ C=f_{yy}(0,0)=0$

因为 $AC-B^2=-36<0$,所以 $(0,0)$ 不是极值点。

类似的，在点 $(2,2)$ 处，$A=f_{xx}(1,1)=-12,\ B=f_{xy}(1,1)=6,\ C=f_{yy}(1,1)=-12$

因为 $A=-12<0,\ AC-B^2=108>0$，

所以 $(2,2)$ 是极大值点，极大值为 $f(2,2)=8$.（3 分）