一、选择题

1. 在下面哪个区间内，函数 $f(x)=x^3+3x-5$ 一定有零点（ C ）

A. (-1,0)　B. (0,1)　C.(1,2)　D. (2,3)

解析：函数 $f(x)=x^3+3x-5$ 在区间[1,2]上满足零点定理条件。

2. 已知函数 f(x)的图形是连续不断的，且有如下函数值对应表：

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	23	9	-7	11	-5	-12

那么函数 f(x)在区间[1,6]上的零点至少有（ C ）个

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

解析：函数 f(x)分别在区间[2,3]、[3,4]和[4,5]上满足零点定理条件。

二、证明题（写出过程）

1. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0,b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$。

证 即证函数 $f(x)=x-a\sin x-b$ 在 $(0,a+b]$ 上至少有一零点，亦即证在区间 $(0,a+b]$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$。

因为 $f(x)=x-a\sin x-b$ 在 $[0,a+b]$ 上连续, 且 $f(0)=-b<0, f(a+b)=a(1-\sin(a+b))\geq 0$，

若 $f(a+b)=0$，则取 $\xi=a+b$，有 $f(\xi)=0$，结论成立；

若 $f(a+b)\neq 0$，则 $f(0)=-b<0$，$f(a+b)>0$，由零点定理，在开区间 $(0,a+b)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$；综上，结论成立。

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a, f(b)>b$，试证，在 (a,b) 内至少有一点 C，使得 $f(C)=C$。

证 设 $F(x)=f(x)-x$。因为 $f(x)$ 和函数 $y=x$ 均在 $[a,b]$ 上连续, 则 $F(x)=f(x)-x$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $F(a)=f(a)-a<0, F(b)=f(b)-b>0,$ 由零点定理, 在开区间 (a,b) 内至少有一点 C，使得 $F(C)=0$，结论成立。