解析函数

1. 复变函数的导数

(1) Def

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{1}$$

如果等式右侧极限存在（注意要沿不同路径），则称$f(z)$在z_0可导。

且，若$f(z)$在D内处处可导，就说$f(z)$在D内可导。

同时$f(z)$在z_0处的**微分**：$d\ f(z_0)=f'(z_0)\cdot\ dz$

(2) 可导与连续

可导$\Rightarrow$**连续**，但是**不能由连续推知可导**。

(3)求导公式与法则

与实变函数的法则相同。

2. 解析函数

$w=f(z)$在z_0**及其邻域**处处可导$\Rightarrow$ $f(z)$在z_0处解析。

$w=f(z)$在区域D内每一点解析 $\Rightarrow$ $f(z)$在D内解析 / $f(z)$是D内的解析函数

- $f(z)$在z_0处解析$\Rightarrow$ z_0处可导。

注意不能在一点处由可导推解析。

- **区域内可导 等价于 区域内解析**（注意是区域内！！）
- 奇点：$f(z)$在此处不解析（一般为使分母为0的点）

解析函数的和、差、积、商（分母不为0）仍为解析函数；

解析函数的复合函数也仍为解析函数。

3. 柯西-黎曼方程(C-R方程)

$f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \tag{2}$$

有什么用?

- $f(z)$在点$z=x+iy$处可导$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}、\frac{\partial u}{\partial y}、\frac{\partial v}{\partial x}、\frac{\partial v}{\partial y}在(x,y)处存在\\ 满足C-R方程\end{cases}$
- $f(z)$在D内解析$\Leftrightarrow\begin{cases}u(x,y),v(x,y)在D内可微\\ 满足C-R方程\end{cases}$
- $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

> 只要能说明u,v具有一阶连续偏导，且满足$C-R$方程，函数$f(z)=u+i\cdot v$一定可导/解析

4. 初等函数

不要忘记欧拉公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

(1)指数函数

$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$

特殊记忆下面两个性质：

- $e^{z+2\pi i} = e^z$，**以$2\pi i$为周期**
- $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$不存在

(2) 对数函数

$e^w = z$，$z \neq 0$。则有$w = Ln\ z = \ln|z| + i \cdot \arg z + 2k\pi i$，这里的$k$以及下面的$k$，均满足$k \in z$

其中我们规定$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z$称为$Ln\ z$的**主值**；而$Ln\ z = \ln z + 2k\pi i$称为$Ln\ z$的**所有分支。**

特别注意：$Ln\ z^n \neq n \cdot Ln\ z$，$Ln\ z^{\frac{1}{n}} \neq \frac{1}{n} Ln\ z$

> 与实数不同，$Ln\ z$的各分支在**除去原点与负实轴**的复平面内处处连续，处处解析。

$(\ln z)' = \frac{1}{z}$

(3)幂函数

$w = z^\alpha = e^{\alpha Ln\ z}$，其中$\alpha$为复常数，$z \neq 0$，且$Ln\ z$取$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z$

其中α**的取值**，对于幂函数的值有着影响：

- 正整数n，$w = z^n = |z|^n e^{i \cdot n \arg z}$，**单值**
- $\frac{1}{n}$（n为正整数），则$w = z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}$，$(k = 0, 1, \cdots, n-1)$，$n$**值**
- 0，则$z^0 = 1$
- $\frac{p}{q}$，其中p, q互质，且$q > 0$，那么有$w = z^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}\ln|z| + i\frac{p}{q}(\arg z + 2k\pi)}$，$(k = 0, 1, \cdots, q-1)$,$q$值
- 无理数/复数：$w = z^\alpha$有无穷多值

> $w = z^\alpha$的相应分支，在**除去原点与负实轴**的复平面内处处连续，处处解析。

$(z^\alpha)' = \alpha \cdot z^{\alpha - 1}$

(4) 三角函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \tag{3}$$

这两个函数在复平面上处处解析，周期为2π，且为**单值函数。**

注意：

- $|\sin z|, |\cos z|$无界
- $\lim\limits_{z\to\infty} \sin z$，$\lim\limits_{z\to\infty} \cos z$不存在

这里没有涉及到的（双曲函数相关内容）感觉应该不会考，就略过了 - -