2017～ 2018 学年第二学期

2017 级《高等数学》（下） 联考试卷参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1	2	3	4	5
B	A	C	D	D

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

6	7	8	9	10
$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$	$(1,-2,-1)$	$x+y+z-2=0$	π	重邮： 0 交大： $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 理工： $y=(c_1+c_2x)e^{\frac{1}{2}x}$

三、计算题（本大题共 2 个小题，每小题 10 分，总计 20 分）

11、解：（1）由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=(1+xy)e^{xy}$； $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^{xy}$ ………（3 分）

于是 $dz\Big|_{\substack{x=-1\\y=0}}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=-1\\y=0}}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=-1\\y=0}}dy=dx+dy$ ………（5 分）

（2） 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=x(2+xy)e^{xy}$ 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=-1\\y=0}}=-2$ ………（10 分）

12、解：（1） $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln y f_1'-\frac{y}{x^2}f_2'$ ……… (5 分)

（2）方程组两边对 x 求导得

$$\begin{cases}1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0\\ x+y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=0\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{x-z}{z-y}\\ \frac{dz}{dx}=\frac{y-x}{z-y}\end{cases}$$ ……… (10 分)

四、计算题（本大题共 2 个小题，每小题 10 分，总计 20 分）

13、解： $I=\iint\limits_{D}2017dxdy+\iint\limits_{D}4y^2dxdy$

$=2017\pi+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 4\rho^3\sin^2\theta d\rho$ ……… (7 分)

$=2017\pi+\pi=2018\pi$ ………(10 分)

或 $I=\iint\limits_{D}2017dxdy+\iint\limits_{D}4y^2dxdy=2017\pi+2\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$

$=2017\pi+2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho$ ……… (7 分)

$=2017\pi+\pi=2018\pi$ ……… (10 分)

14、解：令 $P=2x+z,\ Q=0,\ R=z$ ，Ω 是曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 围成的闭区域.

由于 Σ 取的是 Ω 的整个边界曲面的内侧，故由高斯公式有

$I=-\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=-\iiint\limits_{\Omega}3dv$ ……… (4 分)

$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^1 3\rho dz$

$=-2\pi\int_0^1 3\rho(1-\rho^2)d\rho$ ……… (10 分)

$=-\frac{3}{2}\pi$

或 $I=-\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=-\iiint\limits_{\Omega}3dv$ ……… (4 分)

$=-\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}3dxdy$

$=-\int_0^1 3\pi zdz$ ……… (10 分)

$=-\frac{3}{2}\pi$

五、综合题（本大题共 2 个小题，每小题 10 分，总计 20 分）

15、（1）证明：令 $P=e^y+2x,\ Q=xe^y$

则整个 xoy 平面有 $\frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x}$

故该曲线积分在整个 xoy 平面上与路径无关 ……… (5 分)

（2）解： $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(e^y+2x)dx+xe^ydy=\int_0^1(1+2x)dx+\int_0^1 e^ydy=1+e$ ……… (10 分)

16、解：（1）令 $a_n = \dfrac{1}{n2^{n-1}}$，

$\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{2}$，所以收敛半径 $R = 2$　……… (2 分)

当 $x = 2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^{n-1}}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n}$ 发散；

当 $x = -2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^{n-1}}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2}{n}$ 收敛；

所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^{n-1}}x^n$ 收敛域为 $[-2,2)$　……… (5 分)

（2）设和函数为 $S(x)$，即 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^{n-1}}x^n$， $x\in[-2,2)$

由逐项求导得：

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}\ (-2<x<2)，\quad ………\ (8\ 分)$$

于是 $S(x) = \int_0^x \dfrac{2}{2-x}dx = -2\ln(2-x) + 2\ln 2 = 2\ln\dfrac{2}{2-x},\ (-2\le x<2)$　…… (10 分)

六、综合题（本大题总计 10 分）

17、解：先求驻点，令 $\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$， $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

即驻点为 $(0,0)$， $(1,1)$　………（3 分）

为了判断这两个驻点是否为极值点，求二阶导数

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) = 6x \\ f_{xy}(x,y) = -3 \quad ………（5\ 分） \\ f_{yy}(x,y) = 6y \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处， $A = f_{xx}(0,0) = 0,\ B = f_{xy}(0,0) = -3,\ C = f_{yy}(0,0) = 0$

因为 $AC - B^2 = -9 < 0$，所以 $(0,0)$ 不是极值点。　………（7 分）

类似的，在点 $(1,1)$ 处， $A = f_{xx}(1,1) = 6,\ B = f_{xy}(1,1) = -3,\ C = f_{yy}(1,1) = 6$

因为 $A = 6 > 0,\ AC - B^2 = 27 > 0$，

所以 $(1,1)$ 是极小值点，极小值为 $f(1,1) = -1$　………（10 分）