知识点

1. $F^{'}(x)=f(x)\Leftrightarrow F(x)是f(x)的原函数\Leftrightarrow\int f(x)dx=F(x)+C$

2. $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的原函数全体，也是 $f(x)$ 的带任意常数的原函数； $f(x)$ 的任意两个原函数相差一个常数；

3. $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x),\ \int f^{'}(x)dx=f(x)+C,\ \int 1d(f(x))=f(x)+C$；

4. $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线，$\int f(x)dx$ 的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线族。

5. 能灵活运用教材上列出的 20 几个常见函数的不定积分公式；

6. 第一换元法（凑微法）

$\int f(x)dx\overset{凑微}{=}\int g(\varphi(x))d\varphi(x)\overset{换元：令u=\varphi(x)}{=}\int g(u)du=G(u)+C=G(\varphi(x))+C$，这里

$G(u)为的g(u)原函数$；

7. 第二换元法（主要适用于 $\int f(x)dx$ 的被积函数中带根号）

$\int f(x)dx\overset{换元：令x=\psi(t)}{=}\int f(\psi(t))\psi^{'}(t)dt(可用基本积分公式和第一换元法解决)$，这里在具体换元时，

当 $f(x)$ 中含

$(1)\sqrt{a^2-x^2},a>0时,注意到-a\le x\le a$（或 $-a<x<a$，当 $\sqrt{a^2-x^2}$ 做分母时），

$令x=a\sin t,t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$（或 $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 当 $\sqrt{a^2-x^2}$ 做分母时），此时 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$dx=a\cos tdt$；

$(2)\sqrt{a^2+x^2},a>0时,注意到-\infty\le x\le\infty$，

$令x=a\tan t,t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),此时\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$，$dx=a\sec^2 tdt$；

$(3)\sqrt{x^2-a^2},a>0时,注意到x>a$，或 $x<-a$

当 $x>a$ 时，令 $x=a\sec t,t\in(0,\frac{\pi}{2})$，此时 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$，$dx=a\sec t\tan tdt$；

当 $x<-a$ 时，令 $u=-x$，此时借助已得到的 $x>a$ 时的 $\int f(x)dx$ 表达式直接可得到 $x<-a$ 时 $\int f(x)dx$ 的表达式；

最后将 $x>a$ 和 $x<-a$ 时的 $\int f(x)dx$ 的表达式合起来写，即加绝对值。

$(4)\sqrt{ax^2+bx+c}时,配方得\sqrt{a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}$，再在 $\int f(x)dx$ 中凑微解决；

$(5)\sqrt[n]{ax+b}时,令t=\sqrt[n]{ax+b}$ 代入 $\int f(x)dx$ 中解决；

(5)$\sqrt[n]{ax+b}$和$\sqrt[m]{ax+b}$时,令$t=\sqrt[k]{ax+b}$,$k$是$m,n$的最小公倍数，再代入$\int f(x)dx$解决

(6)$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\frac{a}{c}\neq\frac{c}{d}$时,可令$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$后代入$\int f(x)dx$转化为有理函数积分求解；

8.分部积分法

分部积分公式：$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$

适用情形1：归纳的四级函数中的任两级函数的任两个函数相乘时做被积函数不定积分，需将较低级函数凑微到d后再用分部积分公式；

适用情形2：反三角函数、对数函数、$\sec^3 x$等做被积函数不定积分需用分部积分公式；

9.两个多项式的商称为有理函数或有理分式，若分子次数比分母次数低，称为有理真分式，否则称为有理假分式；多项式除法可将有理假分式化为多项式和有理真分式之和，于是有理函数的不定积分转化为有理真分式的不定积分；

10.设$\frac{P(x)}{Q(x)}$为有理真分式，当$Q(x)$含有因式$(ax+b)^m$、$(cx^2+dx+e)^n$，

这里$a,b,c,d,e$均为实数，$m,n$为正整数，$cx^2+dx+e$不能再分解为一次因式的积，则可设

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\cdots+\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(ax+b)^m}+\frac{B_1x+C_1}{cx^2+dx+e}+\frac{B_2x+C_2}{(cx^2+dx+e)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(cx^2+dx+e)^n}+\cdots$$

，去分母后利用同次幂系数相等建立$A_i,B_i,C_i$的代数方程组解出后，再代入

$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$求解；

11. 可做变换后转换为有理函数不定积分的不定积分类型

（1）$\int R(\sin x,\cos x)dx$,可令$t=\tan\frac{x}{2}$,代入$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$后转化为有理函数不定积分求解

（2）$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx$或$\int R(\sqrt[n]{ax+b})dx$,可用第二换元法令$t=\sqrt[n]{ax+b}$后代入转化为有理函数不定积分求解

(3)$\int R(\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b})dx$,可用第二换元法令$t=\sqrt[k]{ax+b}$,（$k$为$m,n$的最小公倍数）后代入转化为有理函数不定积分求解

（4）$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$或$\int R(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx,\frac{a}{c}\neq\frac{c}{d}$,可用第二换元法令$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$后代入转化为有理函数不定积分求解

教材

习题 4-2

2.（31）

$$\int\frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx\overset{t=2x}{=}\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{t}{2}}{\sqrt{9-t^2}}dt\overset{\substack{t=3\sin u,u\in(0,\frac{\pi}{2})\\ dt=3\cos udu}}{=}\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{3}{2}\sin u}{3\cos u}3\cos udu=\frac{1}{2}u+\frac{3}{4}\cos u+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{9-t^2}}{3}+C=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\cdot\sqrt{9-4x^2}+C$$

注：第二个积分 $t$ 的变化范围是 $9-t^2\geq 0$，故由第二换元法令 $t=3\sin u,u\in(0,\frac{\pi}{2})$，在变量 $u$ 还原为变量 $t$ 时一定要借助直角三角形才简便。

（34）$\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}dx=\frac{-1}{3}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}\right)dx=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$

（37）注意到 $x$ 的范围是 $x>1或x<-1$

当 $x>1$ 时，$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx\overset{\substack{x=\sec t,t\in(0,\frac{\pi}{2})\\ dx=\sec t\tan t}}{=}\int\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C$

当 $x<-1$ 时，令 $u=-x,则u>1$，代入原不定积分并利用上述结果得

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{1}{-u\sqrt{u^2-1}}(-du)=\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}=\arccos\frac{1}{u}+C=\arccos\frac{1}{-x}+C$$

综上，$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\arccos\frac{1}{|x|}+C$

38）

$$\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx=\int\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx\overset{\substack{x=\tan t,t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ dx=\sec^2 tdt}}{=}\int\frac{1}{\sec^3 t}\sec^2 tdt=\int\cos tdt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

$$=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

注：第一个积分 $x$ 的变化范围是 $(-\infty,\infty)$，故由第二换元法令 $x=\tan t,t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，在变量 $t$ 还原为变量 $x$ 时一定要借助直角三角形才简便。

（39）类似（37）的求解。注意到 $x$ 的范围是 $x>3或x<-3$

当$x>3$时，

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx\overset{\substack{x=3\sec t,t\in(0,\frac{\pi}{2})\\ dx=3\sec t\tan t}}{=}\int\frac{3\tan t}{3\sec t}\cdot 3\sec t\tan tdt=3\int\left(\sec^2 t-1\right)dt=3\tan t-3t+C$$

$$=3\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}-3\arccos\frac{3}{x}+C=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C$$

当$x<-3$时，令$u=-x,$则$u>3$，代入原不定积分并利用上述结果得

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{u^2-9}}{-u}(-du)=\int\frac{\sqrt{u^2-9}}{u}du=\sqrt{u^2-9}-3\arccos\frac{3}{u}+C$$

$$=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{-x}+C$$

综上，$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{|x|}+C$

4-3

17. $\int(x^2-1)\sin 2xdx=\int x^2\sin 2xdx-\int\sin 2xdx$

这里利用凑微法和分部积分法可得

$$\int x^2\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int x^2(-\sin 2x)d2x=-\frac{1}{2}\int x^2d\cos 2x=\frac{-1}{2}\left[x^2\cos 2x-\int\cos 2x\cdot 2xdx\right]$$

$$=\frac{-1}{2}x^2\cos 2x+\int x\cos 2xdx=\frac{-1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1$$

其中$\int x\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int xd\sin 2x=\frac{1}{2}\left[x\sin 2x-\int\sin 2xdx\right]=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{4}\int\sin 2xd2x$

$$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1$$

运用凑微法得

$\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}\int\sin 2xd2x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_2$，于是原不定积分

$$\int(x^2-1)\sin 2xdx=\frac{-1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{3}{4}\cos 2x+C$$

19. 先运用第二换元法，再运用分部积分法可得

$$\int e^{\sqrt[3]{x}}dx\overset{\substack{t=\sqrt[3]{x}\\ dx=3t^2dt}}{=}\int e^t3t^2dt=3\int t^2e^tdt=3\int t^2de^t=3\left[t^2e^t-\int 2te^tdt\right]=3t^2e^t-6\int te^tdt$$

其中$\int te^tdt=\int tde^t=te^t-\int e^tdt=te^t-e^t+C_1$

于是 $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx = 3t^2e^t - 6te^t + 6e^t + C = 3\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}} + 6e^{3\sqrt{x}} + C$

4-4

5. 注意到 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1), x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

设 $\dfrac{3}{x^3+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$，去分母按 $x$ 同次幂系数相等建立 $A,B,C$ 的方程组解得 $A=1,B=-1,C=2$，于是原积分化为

$$\int\frac{3}{x^3+1}dx=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx$$

这里 $\displaystyle\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx=\frac{-1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}d(x^2-x+1)+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$

$$\int\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}+C_1$$

于是原积分

$$\int\frac{3}{x^3+1}dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

15. $\displaystyle\int\frac{1}{3+\cos x}dx \overset{\substack{t=\tan\frac{x}{2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}}}{=} \int\frac{1+t^2}{4+2t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$$

17.

$$\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx \overset{\substack{t=\tan\frac{x}{2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}}}{=} \int\frac{1+t^2}{2+2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

19.

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx \overset{\substack{t=\sqrt[3]{x+1}\\ dx=3t^2dt}}{=} \int \frac{1}{1+t}3t^2dt = 3\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = 3\int (t-1+\frac{1}{1+t})dt = 3(\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|)+C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C$$

22. $$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx \overset{\substack{t=\sqrt[4]{x}\\ dx=4t^3dt}}{=} \int \frac{4t^3dt}{t^2+t} = 4\int \frac{t^2dt}{1+t} = 4\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = 4\int (t-1+\frac{1}{1+t})dt$$

$$= 2t^2 - 4t + 4\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right| + C$$

练习册习题十九

P59 一大题的 2 小题

解析：连续函数一定有原函数（✓）证明见定积分一章第二节定理 1，但不连续函数也可能有原函数，如 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \qquad x=0, \end{cases}$ 显然 $f(x)=F'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0 \qquad ,x=0 \end{cases}$ 在

$x=0$ 不连续从而为不连续函数，但有原函数 $F(x)$。

P61 一 1 解析：

$$\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx = \int f'(\ln x)d\ln x \overset{u=\ln x}{=} \int f'(u)dlu = f(u)+C = f(\ln x)+C = e^{-2\ln x}+C = \frac{1}{x^2}+C$$

二 4 解析：

$$\int \frac{f'(\frac{1}{x})}{x^2}dx = -\int f'(\frac{1}{x})d\frac{1}{x} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} -\int f'(u)dlu = -f(u)+C = -f(\frac{1}{x})+C = -\cos\frac{1}{x}+C$$

三 2 解析：

$$\int \frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}(\arccos x)^2 + C$$

其中对 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$，

**方法一** 注意到 $xdx = \frac{1}{2}dx^2 = -\frac{1}{2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}d(1-x^2)$，于是

对 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}+C$

方法二 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \overset{\substack{x=\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ dx=\cos tdt, \sqrt{1-x^2}=\cos t}}{=} \int \frac{\sin t}{\cos t}\cos tdt = \int \sin tdt = -\cos t + C = -\sqrt{1-x^2} + C$

62页5题（不要求掌握!）

解析：$\int \frac{dx}{x(x^6+4)} = \int \frac{x^5dx}{x^6(x^6+4)} = \frac{1}{6}\int \frac{dx^6}{x^6(x^6+4)} \overset{u=x^6}{=} \frac{1}{6}\int \frac{du}{u(u+4)}$

设$\frac{1}{u(u+4)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+4}$，则$1 = A(u+4) + Bu =$（$A+B$）$u + 4A$，故$A+B=0$，$4A=1$ 得 $A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}$，从而

$$\int \frac{du}{u(u+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u+4} = \frac{1}{4}(\ln|u| - \ln|u+4|) + C_1 = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u}{u+4}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\frac{x^6}{x^6+4} + C_1$$

$\int \frac{dx}{x(x^6+4)} = \frac{1}{24}\ln\frac{x^6}{x^6+4} + C$，$C = \frac{1}{6}C_1$

63页1.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a-x^2}}dx \overset{\substack{x=a\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ dx=a\cos tdt, \sqrt{a-x^2}=a\cos t}}{=} \int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\cos tdt = a^2\int \sin^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int (1-\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t) + C$$

注意到$t = \arcsin\frac{x}{a}$，$\frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$，故

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$$

3.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx \overset{\substack{x=2\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ dx=2\cos tdt, \sqrt{4-x^2}=2\cos t}}{=} \int \frac{1}{2\sin t 2\cos t}2\cos tdt = \int \frac{1}{2\sin t}dt = \frac{1}{2}\int \csc tdt = \frac{1}{2}\ln|\csc t - \cot t| + C$$

注意到$\csc t = \frac{1}{\sin t} = \frac{2}{x}$，$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$，故

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + C$$

4. $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}dx \overset{\substack{t=\sqrt{2x}, \\ dx=tdt}}{=} \int \frac{1}{1+t}tdt = \int \frac{1+t-1}{1+t}dt = \int 1dt - \int \frac{dt}{1+t} = t - \ln|1+t| + C$

$$=\sqrt{2x}-\ln\left|1+\sqrt{2x}\right|+C$$

5. $\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx \overset{\substack{t=\sqrt{2-x},x=2-t^2\\ dx=-2tdt}}{=} -\int\frac{4-4t^2+t^4}{t}2tdt=-2\int(4-4t^2+t^4)dt=-2\left(4t-\frac{4}{3}t^3+\frac{t^5}{5}\right)+C$

$$=-8\sqrt{2-x}+\frac{8}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}}+C$$

6 $\int\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx \overset{\substack{t=\sqrt{e^x+1},x=\ln(t^2-1)\\ dx=\frac{2t}{t^2-1}dt}}{=} \int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int\frac{1}{t^2-1}dt=2\frac{1}{2\times1}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$$

65 页二题的

1.解析：(不要求掌握！)

因$\frac{\sin x}{x}$是$f(x)$的原函数，故$\int f(x)dx=\frac{\sin x}{x}+C_1$，$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，则

$$\int xf'(2x)dx=\frac{1}{2}\int xf'(2x)d2x=\frac{1}{2}\int xdf(2x)=\frac{1}{2}[xf(2x)-\int f(2x)dx]$$
$$=\frac{1}{2}xf(2x)-\frac{1}{4}\int f(2x)d2x=\frac{1}{2}xf(2x)-\frac{1}{4}\frac{\sin 2x}{2x}+C,C=\frac{1}{4}C_1$$
$$=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{8x}-\frac{\sin 2x}{8x}+C=\frac{x\cos 2x-\sin 2x}{4x}+C$$

2. $\int\ln xdx=x\ln x-\int xd\ln x=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$

3. 将原积分凑微运用分部积分法得

$$\int x^3e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int x^2e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}\int x^2d(e^{-x^2})=-\frac{1}{2}\left(x^2e^{-x^2}-\int e^{-x^2}2xdx\right)$$

再凑微得$\int e^{-x^2}2xdx=-\int e^{-x^2}d(-x^2)=-\int 1de^{-x^2}=-e^{-x^2}+C_1$，于是原积分为

$$\int x^3e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C,C=\frac{1}{2}C_1$$

三题 2.

$$\int x\arccos xdx=\int\arccos xd\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\arccos x-\int\frac{x^2}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \overset{\substack{x=\sin t,t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ dx=\cos tdt,\sqrt{1-x^2}=\cos t}}{=} \int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos tdt=\int\sin^2 tdt=\frac{1}{2}(\int 1dt-\int\cos 2tdt)$ 这里用到第二换元法

$$=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\int\cos 2td2t=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C_1$$

故$\int x\arccos xdx=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{4}\arcsin x-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C, C=\frac{1}{2}C_1$

3. $\int\sin\sqrt{x}dx\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int\sin t2tdt=2\int td(-\cos t)=2\left(-t\cos t-\int-\cos tdt\right)=-2t\cos t+2\int\cos tdt$

$$=-2t\cos t+2\sin t+C=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$$

4. $\int x\tan^2 xdx=\int x(\sec^2 x-1)dx=\int x\sec^2 xdx-\int xdx$

而$\int x\sec^2 xdx=\int xd\tan x=x\tan x-\int\tan xdx=x\tan x-(-\ln|\cos x|)+C$

故$\int x\tan^2 xdx=-\frac{x^2}{2}+x\tan x+\ln|\cos x|+C$

8 (不要求！)凑微再分部积分得

$\int\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}}dx=2\int\ln(1+x)d\sqrt{x}=2\left(\sqrt{x}\ln(1+x)-\int\sqrt{x}\frac{1}{1+x}dx\right)$，其中

$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int\frac{t}{1+t^2}2tdt=2\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=2\left(\int 1dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt\right)=2t-2\arctan t+C_1$

$=2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+C_1$，上面积分应用到第二换元法。

故$\int\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln(1+x)-4\sqrt{x}+4\arctan\sqrt{x}+C, C=-2C_1$

67 页 2　因$x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$，设$\frac{2x+3}{x^2+3x-10}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$，去分母得

$2x+3=A(x+5)+B(x-2)=(A+B)x+5A-2B$，于是得到$A+B=2$，$5A-2B=3$

解得$A=1$，$B=1$，原积分

$\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+5}=\ln|x-2|+\ln|x+5|+C=\ln|x^2+3x-10|+C$

69 页一题的 5　（╳）

因为如果$\int f(x)dx=F(x)+C$成立，则$f(x)=F'(x), x\in(-\infty,+\infty)$，注意到

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\arctan x-1}{x}=+\infty$，即左导数$F'_-(0)$不存在，从而导数

$F'(0)=f(0)$不存在，但$f(0)=1$，矛盾！

二 4　选（D）　解析：因为$f'(\cos^2 x)=\sin^2 x=1-\cos^2 x$，令$u=\cos^2 x$，则$f'(u)=1-u$，

从而$f(u)+C=\int f'(u)du=\int(1-u)du=u-\frac{1}{2}u^2$，由$f(0)=0$得 C=0，于是$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$.

三 1. $\int x(1+x)^{10}dx=\int(1+x-1)(1+x)^{10}d(1+x)\overset{t=1+x}{=}\int(t-1)t^{10}dt$

$$=\frac{t^{12}}{12}-\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{(1+x)^{12}}{12}-\frac{(1+x)^{11}}{11}+C$$

70 页四题的 1 解析：原积分分母有理化得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{4}\int\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}\right)dx=\frac{1}{4}\int\sqrt{2x+3}dx-\frac{1}{4}\int\sqrt{2x-1}dx$$

应用第二换元法得 $\int\sqrt{2x+3}dx\overset{\substack{t=\sqrt{2x+3}\\ x=\frac{t^2-3}{2}\\ dx=tdt}}{=}\int t\cdot tdt=\frac{1}{3}t^3+C_1=\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}+C_1$，同理

$\int\sqrt{2x-1}dx\overset{\substack{u=\sqrt{2x-1}\\ x=\frac{u^2+1}{2}\\ dx=udu}}{=}\int u\cdot udu=\frac{1}{3}u^3+C_2=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C_2$，于是原积分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{12}\left[(2x+3)^{\frac{3}{2}}-(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]+C,\ C=\frac{1}{4}(C_1-C_2)$$

2. $\int\frac{1}{1+\tan x}dx\overset{\substack{u=\tan\frac{x}{2}\\ x=2\arctan u\\ dx=\frac{2du}{1+u^2}\\ \tan x=\frac{2u}{1+u^2}}}{=}\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2du}{1+u^2}=2\int\frac{d(1+u)}{(1+u)^2}=2(\frac{-1}{1+u})+C=\frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C$

5. (不要求！) $\int\arctan(1+\sqrt{x})dx\overset{\substack{t=\sqrt{x}\\ dx=2tdt}}{=}2\int\arctan(1+t)tdt=2\int\arctan(1+t)(1+t-1)dt$

$=2\int\arctan(1+t)(1+t)d(1+t)$ - $2\int\arctan(1+t)$ $d(1+t)$，其中

$$\int\arctan(1+t)(1+t)d(1+t)\overset{u=1+t}{=}\int u\arctan udu=\int\arctan ud\frac{u^2}{2}=\frac{u^2}{2}\arctan u-\int\frac{u^2}{2}\frac{1}{1+u^2}du$$

$$=\frac{u^2}{2}\arctan u-\frac{1}{2}\int\frac{u^2}{1+u^2}du=\frac{u^2}{2}\arctan u-\frac{1}{2}\int\frac{1+u^2}{1+u^2}du+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u^2}du$$

$$=\frac{u^2}{2}\arctan u-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\arctan u+C_1=\frac{(1+t)^2}{2}\arctan(1+t)-\frac{1}{2}(1+t)+\frac{1}{2}\arctan(1+t)+C_1$$

$$=\frac{2+2t+t^2}{2}\arctan(1+t)-\frac{1}{2}(1+t)+C_1$$

$$\int\arctan(1+t)\ d(1+t)\overset{v=1+t}{=}\int\arctan vdv=v\cdot\arctan v-\int\frac{v}{1+v^2}dv$$

$$=v\cdot\arctan v-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+v^2}d(1+v^2)=v\cdot\arctan v-\frac{1}{2}\ln(1+v^2)+C_2$$

$$=(1+t)\cdot\arctan(1+t)-\frac{1}{2}\ln(1+(1+t)^2)+C_2$$，故原积分

$$\int\arctan(1+\sqrt{x})dx=t^2\arctan(1+t)-t+\ln(1+(1+t)^2)+C,C=2(C_1-C_2)\text{-}1$$

$$=x\arctan(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln(1+(1+\sqrt{x})^2)+C$$

7.

$$\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\overset{\substack{x=\tan t,t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ t=\arctan x\\ dx=\sec^2 tdt}}{=}\int\frac{\sec^2 tdt}{(2\tan^2 t+1)\sec t}=\int\frac{\sec tdt}{\sec^2 t+\tan^2 t}=\int\frac{\cos tdt}{1+\sin^2 t}=\int\frac{d\sin t}{1+\sin^2 t}$$

$$=\arctan(\sin t)+C=\arctan(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})+C$$

8. (不要求掌握！)

$$\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}dx=\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx-\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{\sin x}}dx=2\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{d\sin x}{2\sqrt{\sin x}}dx-\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{\sin x}}dx$$

$$=2\int e^{-\frac{x}{2}}d\sqrt{\sin x}+2\int\sqrt{\sin x}de^{-\frac{x}{2}}=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\text{-}2\int\sqrt{\sin x}de^{-\frac{x}{2}}+2\int\sqrt{\sin x}de^{-\frac{x}{2}}=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}+C$$