

第三章 离散傅立叶变换

3.1 傅立叶变换的四种可能形式

3.2 周期序列的傅立叶级数 (D F S)

3.3 离散傅立叶变换

3.4 离散傅立叶变换的性质

3.6 离散傅立叶变换的应用

3.7 有限长序列的 $X(z)$ 、 $X(e^{j\omega})$
和 $X(k)$ 之间的关系



3.1 离散傅立叶变换的几种可能形式

傅立叶变换就是以时间为自变量的“信号”与以频率为自变量的“频谱”函数之间的一种变换关系，当自变量“时间”和“频率”取连续值或离散值时，就形成不同的形式的傅立叶变换对。



3. 1. 1 非周期的连续时间、连续频率——傅立叶变换

非周期连续时间信号 $x(t)$ 和它的频谱密度函数 $X(j\Omega)$ 构成的傅立叶变换对为

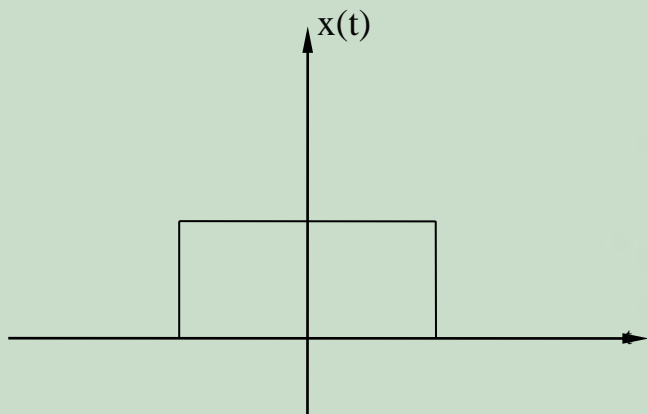
正变换

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

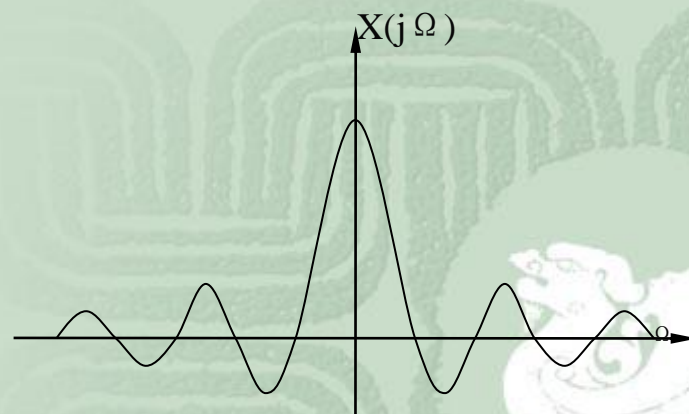
反变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

以连续时间矩形脉冲为例：



(a) 非周期连续时间函数 $x(t)$



(b) 非周期连续频谱 $X(j\Omega)$

3. 1. 2 周期的连续时间、离散频率——傅立叶级数

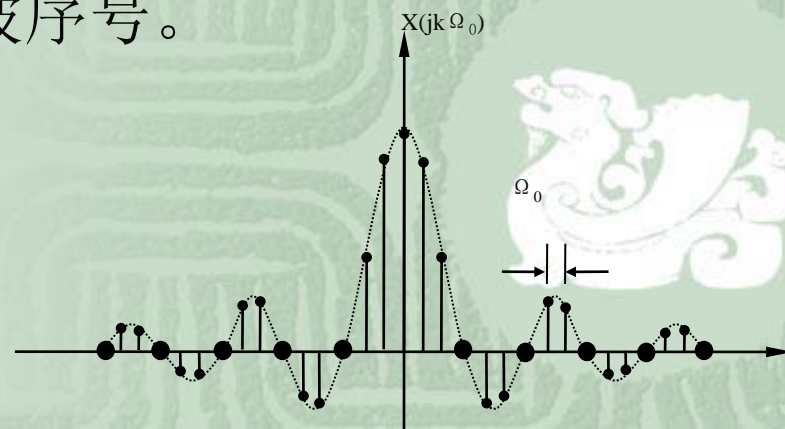
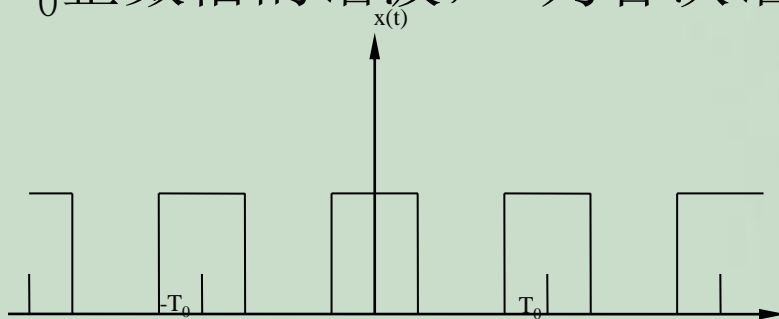
周期为 T_0 的连续时间信号 $x(t)$ 的傅立叶级数展开的系数为 $X(jk\Omega_0)$ ，构成的傅立叶变换对为：

正变换
$$X(jk\Omega_0) = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

反变换
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

$X(jk\Omega_0)$ 是以角频率 Ω_0 为间隔的离散函数，形成频域的离散频谱， Ω_0 与时间信号的周期之间的关系为 $\Omega_0 = 2\pi F = \frac{2\pi}{T_0}$ 。

傅立叶级数展开将连续时间周期函数分解为无穷多个角频率为 Ω_0 整数倍的谐波， k 为各次谐波序号。



3. 1. 3 非周期的离散时间、连续频率——序列的傅立叶变换

非周期离散时间信号的傅立叶变换就是序列的傅立叶变换，其变换对为

正变换
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

反变换
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

式中 ω 是数字频率。

如果序列 $x(n)$ 是模拟信号 $x(t)$ 经过抽样得到，抽样时间间隔为 T_s ，抽样频率为 f_s ，抽样角频率为 $\Omega_s = 2\pi / T_s$ ，由于数字频率 ω 与模拟角频率 Ω 之间的关系为 $\omega = \Omega T$ ，因此抽样数字频率 $\omega_s = \Omega_s T_s$ ，则上面的变换对也可写成：

正变换
$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jn\Omega T}$$

反变换
$$x(nT) = \frac{1}{\Omega_s} \int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} X(e^{j\Omega T}) e^{jn\Omega T} d\Omega$$



仍以连续时间矩形脉冲为例:结果表明, 时域的离散造成频域的周期延拓, 而时域的非周期性对应与频域的连续性。

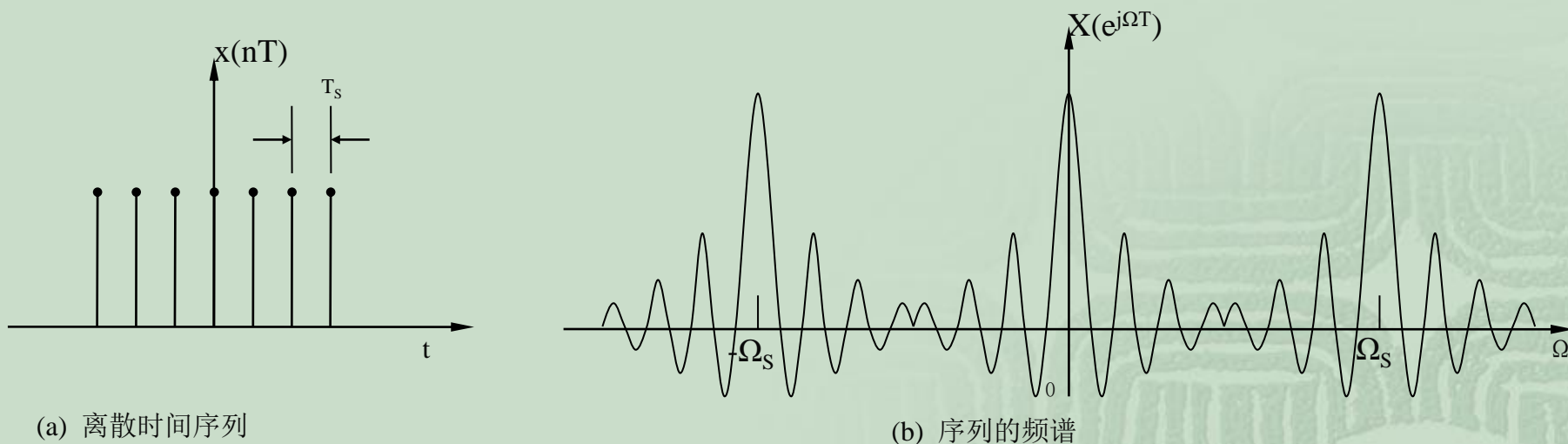


图 离散时间序列及其傅立叶变换



3. 1. 4 离散时间、离散频率——离散傅立叶变换

假如序列 $x(n)$ 是模拟信号 $x(t)$ 经过抽样得到，抽样时间间隔为 T_s ，则频率函数的周期为 $\Omega_s = 2\pi / T_s$ ；如果频率函数也是离散的，其抽样间隔为 Ω_0 ，则时间函数的周期为 $\Omega_0 = 2\pi / T_0$ 。当时间函数序列一个周期内的抽样点数为 N 时，有

$$N = \frac{T_0}{T_s} = \frac{\Omega_s}{\Omega_0}$$

上式表明在频域中频谱函数的一个周期内的抽样点数也为 N ，即离散傅立叶变换的时间序列和频率序列的周期都是 N ，可以得到表示于一个周期内的常用的离散傅立叶变换对为

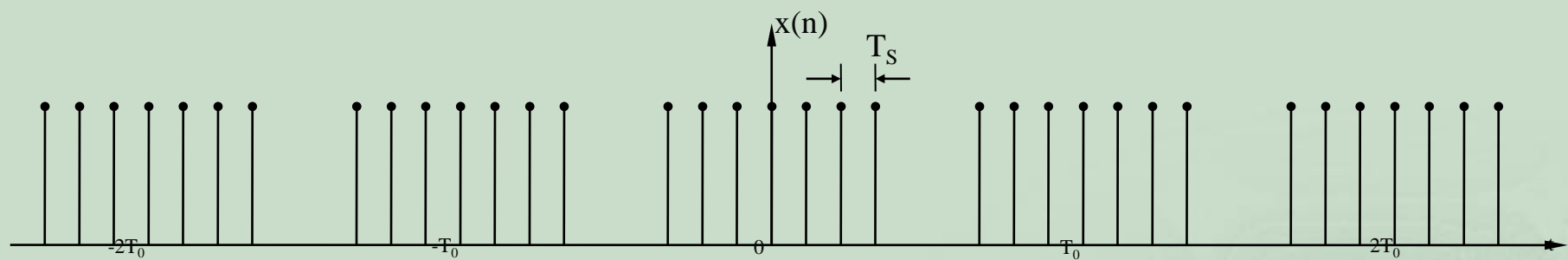
正变换

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

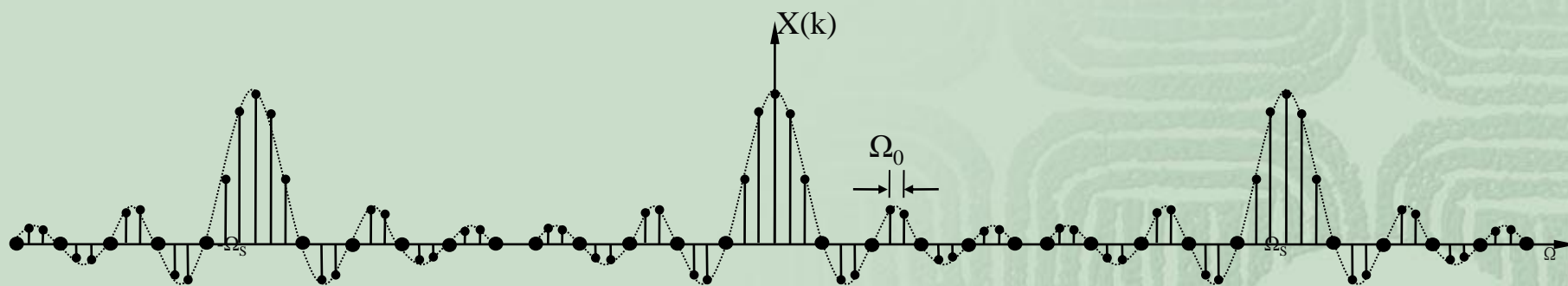
反变换

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$





(a) 周期离散时间序列



(b) 周期离散时间序列的频谱

图 周期离散时间序列及其傅立叶变换



3.2 周期序列的离散傅立叶级数 (DFS)

3.2.1 周期序列

一个周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，对于所有 n 满足

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN), k \text{ 为整数}$$

式中 N 为正整数。

定义 $n=0$ 到 $N-1$ 的周期区间为 $\tilde{x}(n)$ 的主值区间，而主值区间内的 N 个样本值组成的有限长序列称为 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列，即这一过程称为取主值序列。



对于一个有限长序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ 为其它值} \end{cases}$$

如将其以N为周期进行周期性延拓，则可得

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) = x((n))_N = x(n[\text{mod } N])$$

由于周期序列不是绝对可和的，无论z取任何值，其z变换都是不收敛的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)| |z^{-n}| \rightarrow \infty$$

因此周期序列不能用z变换法或傅立叶变换来进行讨论。



3. 2. 2 离散傅立叶级数

令 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, 则DFS变换对可写成

$$\text{正变换 } \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$\text{反变换 } \tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

离散傅立叶级数表明 $\tilde{X}(k)$ 是以 N 为周期的周期序列, 其基波成分为 $e^{j\frac{2\pi}{N}n}$, k 次谐波成分为 $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$, $\tilde{X}(k)$ 为DFS的 k 次谐波分量的复系数。由于 $\tilde{X}(k)$ 的周期性, 当已知 $0 \rightarrow N-1$ 次谐波成分后, 根据周期性就可以确定其余的谐波分量, 因此, 无论时域或频域中都只有 N 个序列值是独立的。

3. 2. 3 离散傅立叶级数的性质

假定 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 是周期皆为 N 的两个离散周期序列，它们的DFS为

$$\tilde{X}_1(k) = DFS[\tilde{x}_1(n)] \quad \tilde{X}_2(k) = DFS[\tilde{x}_2(n)]$$

1、线性

$$DFS[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$$

式中 a, b 为任意常数，可见由两个离散周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 线性组合成一个新的周期序列 $a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)$ 的DFS也是周期为 N 的离散周期序列。



2、移位特性

时域移位 $DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$

频域移位 $IDFS[\tilde{X}(k+l)] = W_N^{ln} \tilde{x}(n)$

如果 $m, l \geq N$, 那么

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-m'k} \tilde{X}(k), \quad m' = m(\bmod N)$$

$$IDFS[\tilde{X}(k+l)] = W_N^{l'n} \tilde{x}(n), \quad l' = l(\bmod N)$$

证明: $DFS[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) W_N^{nk} = \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ik} W_N^{-mk}$

$$= W_N^{-mk} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$
$$DFS[W_N^{ln} \tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nl} \tilde{x}(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{-(l+k)n} = \tilde{X}(k+l)$$

3、时域卷积特性

两个周期都为N的周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ ，它们卷积的结果也是周期为N的周期序列，即

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n - m)$$

m的取值由0~(N-1)，因此称为周期卷积。

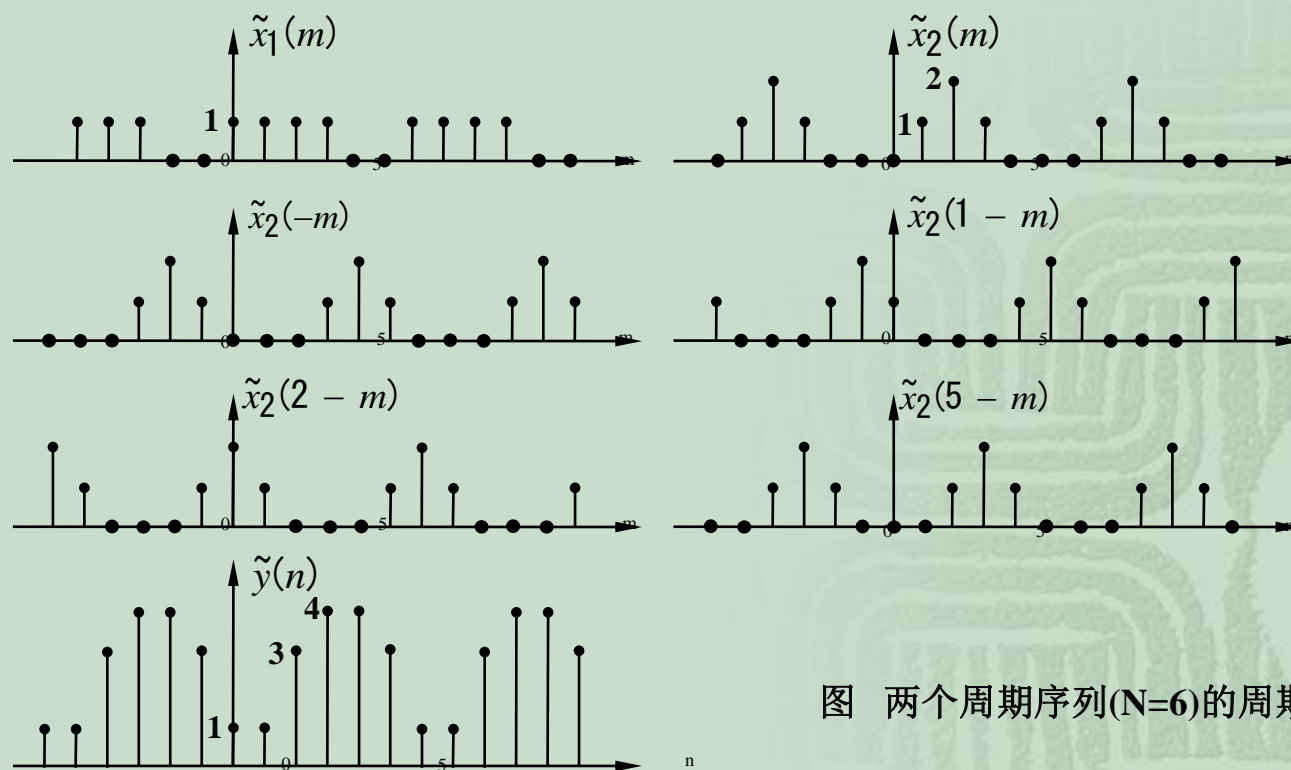


图 两个周期序列(N=6)的周期卷积过程

周期卷积与DFS的关系如下：

设 $\tilde{X}_1(k) = DFS[\tilde{x}_1(n)]$

$$\tilde{X}_2(k) = DFS[\tilde{x}_2(n)]$$

$$\tilde{Y}(k) = DFS[\tilde{y}(n)]$$

若
$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n - m)$$

则有
$$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

这就是时域卷积定理。



证明: $\tilde{Y}(k) = DFS[\tilde{y}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n) W_N^{nk}$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \right] W_N^{nk}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2(n-m) W_N^{(n-m)k} W_N^{mk}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) W_N^{mk} \sum_{m'=-m}^{N-1-m} \tilde{x}_2(m') W_N^{m'k}$$

$$= \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$



4、频域卷积特性

对于时域周期序列的乘积，同样对应于频域的周期卷积。

若
$$\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n)$$

则
$$\tilde{Y}(k) = DFS[\tilde{y}(n)] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \tilde{X}_2(k - l)$$



3.3 离散傅立叶变换 DFT

由于长度为N的有限长序列可以看作是周期是N的周期序列的一个周期，因此利用DFS计算周期序列的一个周期，就可以得到有限长序列的离散傅立叶变换。

设 $x(n)$ 是长度为N的有限长序列，可以把它看作是周期为N的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个主周期，而将 $\tilde{x}(n)$ 看作是 $x(n)$ 以N为周期进行周期延拓得到，即

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ 为其它值} \end{cases} = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

同理

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N$$

$$X(k) = \tilde{X}(k) \cdot R_N(k)$$



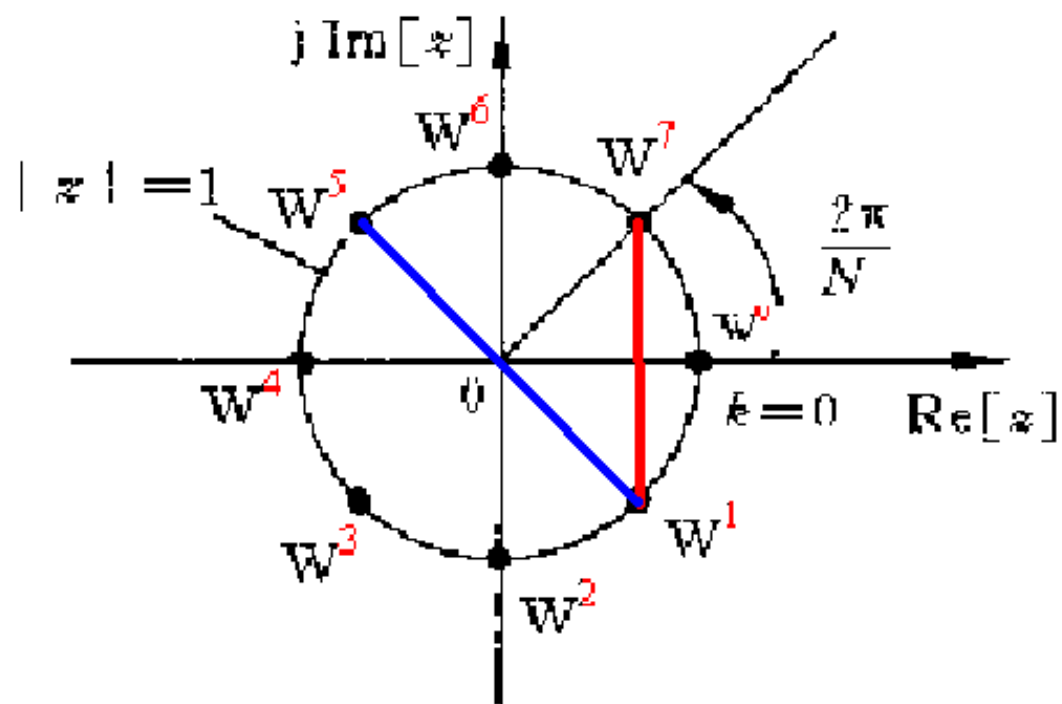
离散傅立叶变换的正变换

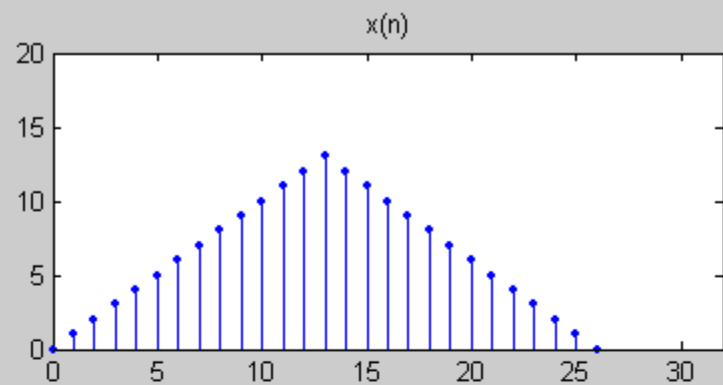
$$\begin{aligned} X(k) &= \tilde{X}(k) \cdot R_N(k) = \{DFS[\tilde{x}(n)]\}R_N(k) \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right] R_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

反变换

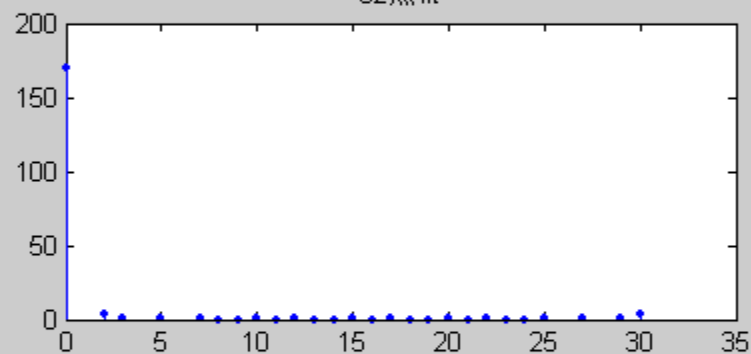
$$\begin{aligned} x(n) &= \tilde{x}(n) \cdot R_N(n) = \{IDFS[\tilde{X}(k)]\}R_N(n) \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right] R_N(n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$



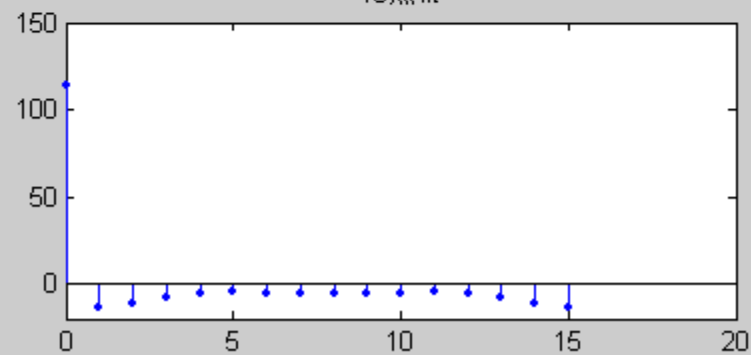




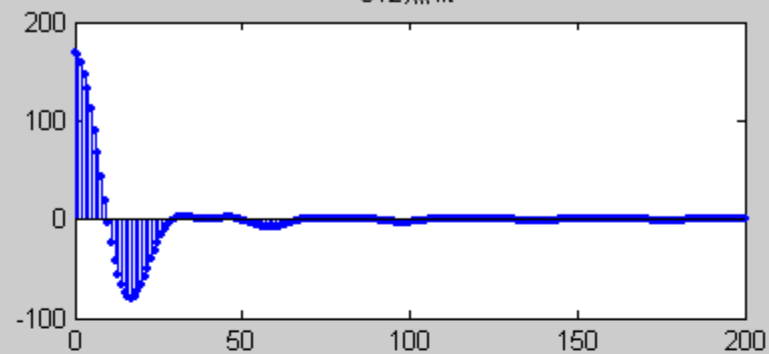
32点



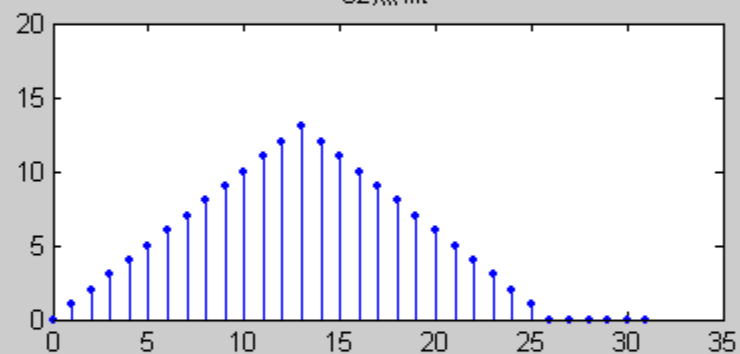
16点



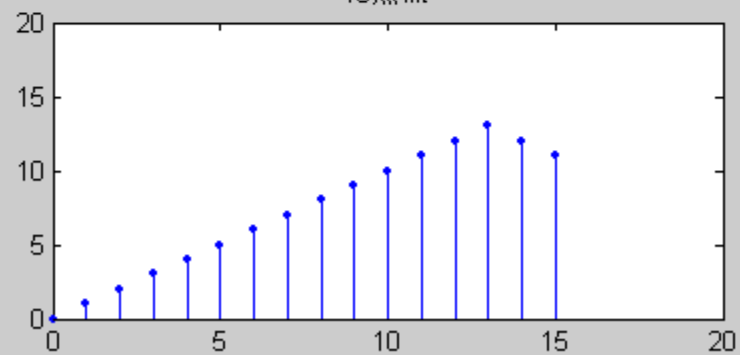
512点



32点



16点



3.4 离散傅立叶变换的性质

假定 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是 N 点的有限长序列，有

$$X_1(k) = DFT[x_1(n)] \quad X_2(k) = DFT[x_2(n)]$$

1、线性

若两个有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的线性组合为 $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ ，
则有

$$DFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

式中 a, b 为任意常数。

说明：（1）若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的长度均为 N ，则 $x_3(n)$ 的长度为 N ；

（2）若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的长度不等， $x_1(n)$ 的长度为 N_1 ， $x_2(n)$ 的长度为 N_2 ，则 $x_3(n)$ 的长度为 $N = \max[N_1, N_2]$ ，离散傅立叶变换的长度必须按 N 来计算。

2、序列的圆周移位

有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位是以它的长度 N 为周期，将其延拓成周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，并将周期序列进行移位，然后取主值区间（ $n=0$ 到 $N-1$ ）上的序列值。因而一个有限长序列的右圆周移位定义为

$$x((n-m))_N R_N(n) = \tilde{x}(n-m) R_N(n)$$



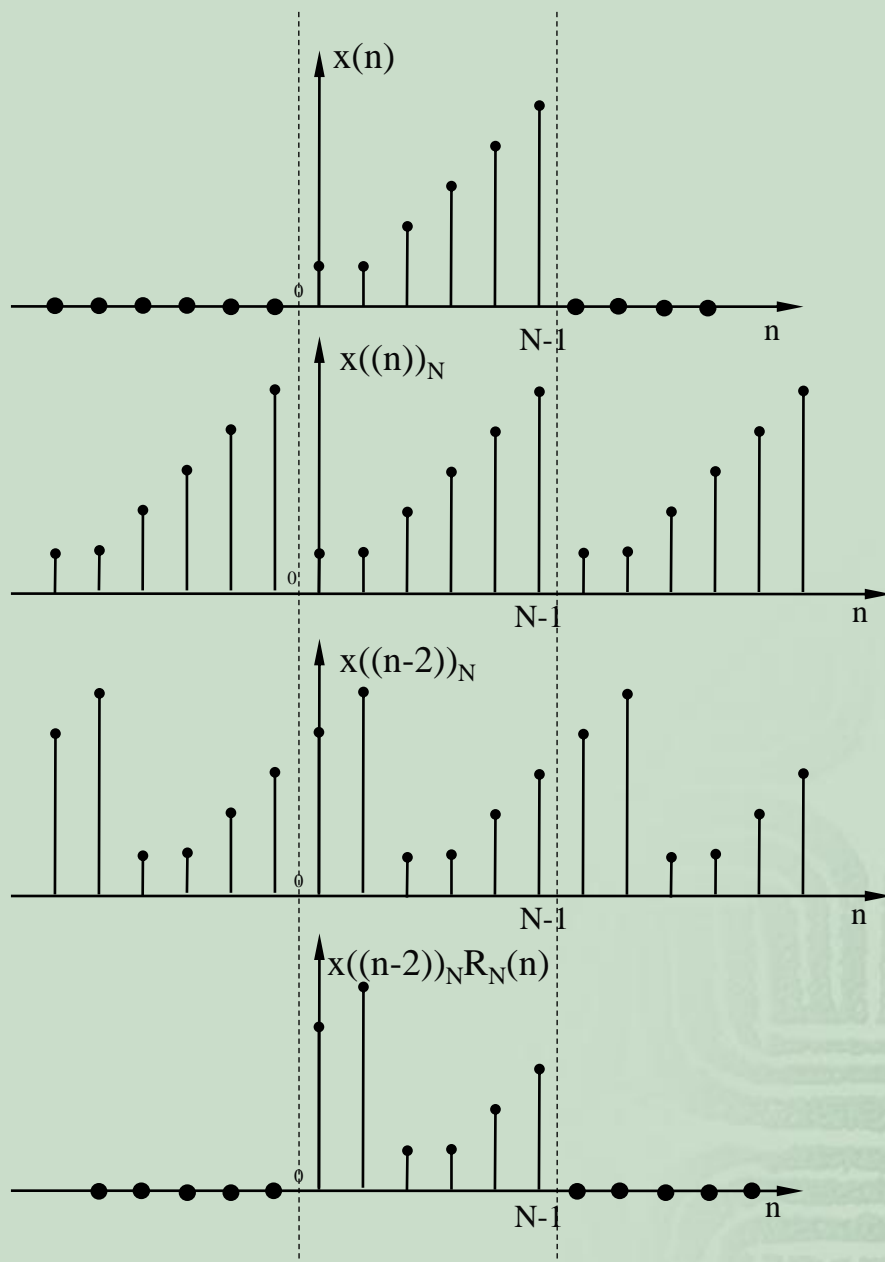


图3.6 序列的周期移位 ($N=6$)



(1) 时域移位定理

$$DFT[x(n-m)] = DFT[x((n-m))_N R_N(n)] = W_N^{mk} X(k)$$

证明：由周期序列的时域移位性质

$$DFS[\tilde{x}(n-m)] = W_N^{mk} \tilde{X}(k)$$

由于有限长序列的DFT就是周期序列DFS在频域中的主值序列，有

$$DFT[x(n-m)] = DFS[\tilde{x}(n-m)]R_N(k) = W_N^{mk} \tilde{X}(k)R_N(k)$$

(2) 频域移位定理

若
$$X(k) = DFT[x(n)]$$

则
$$IDFT[X((k-l))_N R_N(n)] = W_N^{-nl} x(n)$$

上式称为**频率移位定理**，也称为**调制定理**，此定理说明时域序列的调制等效于频域的圆周移位。

3、共轭对称性

任一序列都可以表示成共轭对称分量和共轭反对称分量之和。

周期序列的共轭对称分量 $\tilde{x}_e(n)$ 和共轭反对称分量 $\tilde{x}_o(n)$ 都是周期性的，周期仍为 N ，取出它们的主值序列就得到了有限长序列的相应的分量，分别称为圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ ，公式推导如下：

设有限长序列 $x(n)$ 的长度为 N ，以 N 为周期的周期延拓序列为

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$



则有

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)] = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((N-n))_N]$$

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)] = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((N-n))_N]$$

同样可以证明

$$\tilde{x}_e(n) = \tilde{x}_e^*(-n) \quad \tilde{x}_o(n) = -\tilde{x}_o^*(-n)$$

则有限长序列的圆周共轭对称分量和圆周共轭反对称分量定义为

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

由于满足 $\tilde{x}(n) = \tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n)$ ， 有

$$\begin{aligned} x(n) &= \tilde{x}(n)R_N(n) = [\tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n)]R_N(n) \\ &= x_{ep}(n) + x_{op}(n) \end{aligned}$$

DFT的一系列的对称性质:

(1) $DFT[x^*(n)] = X^*(-k) = X^*(N-k)$

式中 $x^*(n)$ 是 $x(n)$ 的共轭复序列。

(2) $DFT[x^*(-n)] = X^*(k)$

(3) 复序列实部的DFT等于序列DFT的圆周共轭对称部分, 即

$$DFT\{\text{Re}[x(n)]\} = X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$$

(4) 复序列虚部乘 j 的DFT等于序列DFT的圆周共轭反对称部分, 即

$$DFT\{j \text{Im}[x(n)]\} = X_{op}(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$$

(5) 若 $x(n)$ 是实序列, 则 $X(k)$ 只有圆周共轭对称部分, 即满足

$$X(k) = X^*(N-k)$$

(6) 若 $x(n)$ 是纯虚数序列, 则 $X(k)$ 只有圆周共轭反对称部分, 即满足

$$X(k) = -X^*(N-k)$$



$$(7) \quad DFT[x_{ep}(n)] = \text{Re}[X(k)]$$

$$DFT[x_{op}(n)] = j \text{Im}[X(k)]$$

例：设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是实数序列，试求 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 。

解：先利用这两个实数序列构成复序列，有

$$y(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

$$DFT[y(n)] = Y(k) = DFT[x_1(n)] + jDFT[x_2(n)] = X_1(k) + jX_2(k)$$

又 $x_1(n) = \text{Re}[y(n)]$

故 $X_1(k) = DFT\{\text{Re}[y(n)]\} = Y_{ep}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)]$

同样 $x_2(n) = \text{Im}[y(n)]$

故 $X_2(k) = \frac{1}{j}Y_{op}(k) = \frac{1}{2j}[Y(k) - Y^*(N-k)]$

因此可以用一次DFT计算出 $Y_1(k)$ ，然后用上面的公式计算出 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 。



例：试利用DFT的对称特性求 $\cos \omega_0 n$ 和 $\sin \omega_0 n$ 的DFT。

解：设 $x(n) = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n = e^{j\omega_0 n}$

$$DFT[x(n)] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} W_N^{nk} = \frac{1 - e^{j\omega_0 N} W_N^{Nk}}{1 - e^{j\omega_0} W_N^k} = \frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j\omega_0} W_N^k}$$

因为 $\cos \omega_0 n = \text{Re}[x(n)]$

所以

$$\begin{aligned} DFT[\cos \omega_0 n] &= DFT\{\text{Re}[x(n)]\} = X_{ep}(k) = \frac{X(k) + X^*(N-k)}{2} \\ &= \left[\frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j\omega_0} W_N^k} + \frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j\omega_0} W_N^k} \right] / 2 \\ &= \frac{1 - \cos \omega_0 N - W_N^k \cos \omega_0 + W_N^k \cos(N-1)\omega_0}{1 - 2W_N^k \cos \omega_0 + W_N^{2k}} \end{aligned}$$

而因为 $\sin \omega_0 n = \text{Im}[x(n)]$

所以

$$DFT[\sin \omega_0 n] = DFT\{\text{Im}[x(n)]\} = \frac{1}{j} X_{op}(k) = \frac{X(k) - X^*(N-k)}{2j}$$

$$= \left[\frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j\omega_0} W_N^k} - \frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j\omega_0} W_N^k} \right] / 2j$$

$$= \frac{W_N^k \sin \omega_0 - \sin \omega_0 N + W_N^k \sin(N-1)\omega_0}{1 - 2W_N^k \cos \omega_0 + W_N^{2k}}$$



4、帕斯瓦尔 (Parseval) 定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k)$$

证明:
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W_N^{-nk} \right]^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k) \end{aligned}$$

若 $y(n) = x(n)$, 则

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) X^*(k)$$

即

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$



5、圆周卷积

(1) 时域圆周卷积

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是 N 点的有限长序列，有

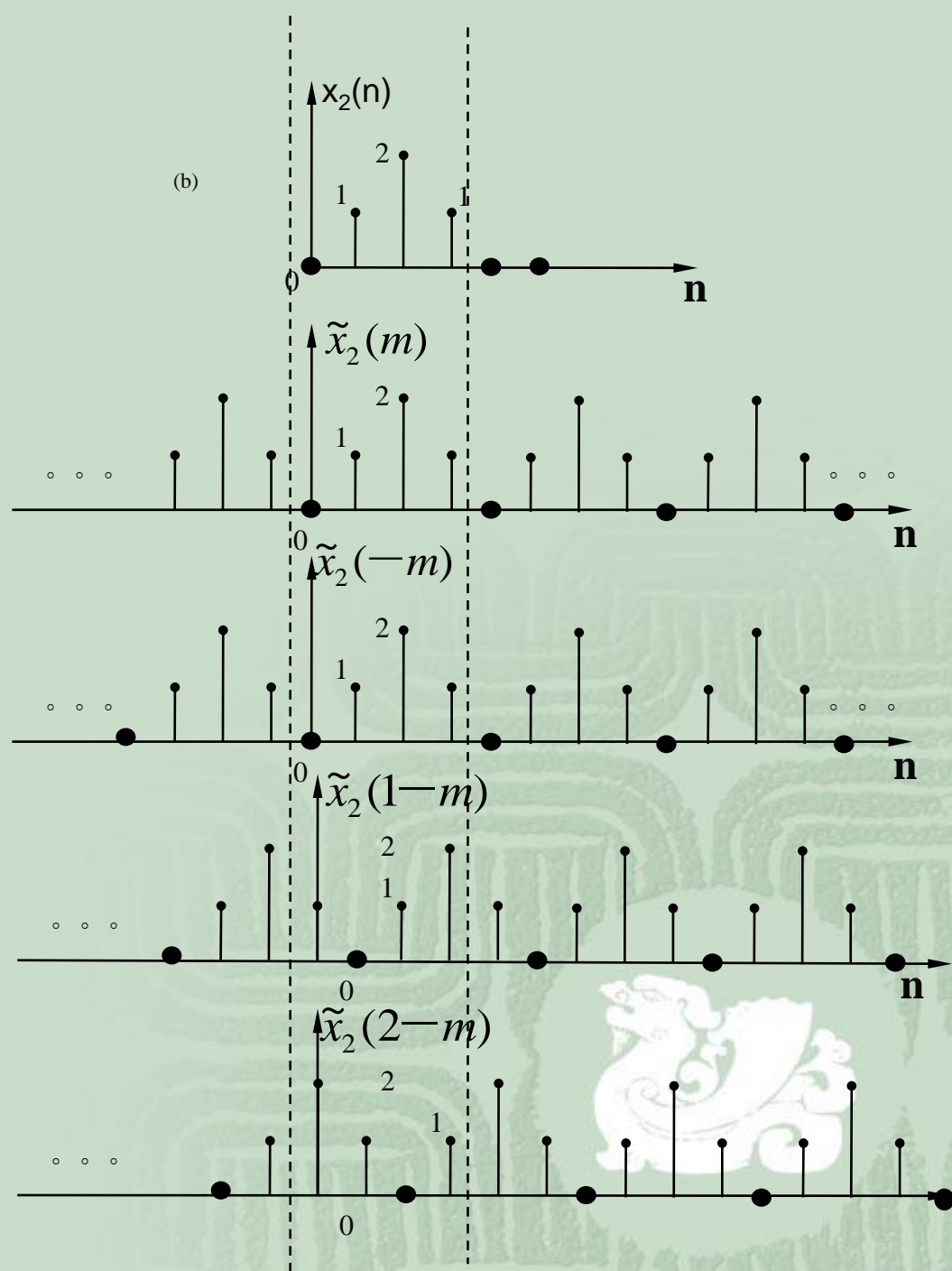
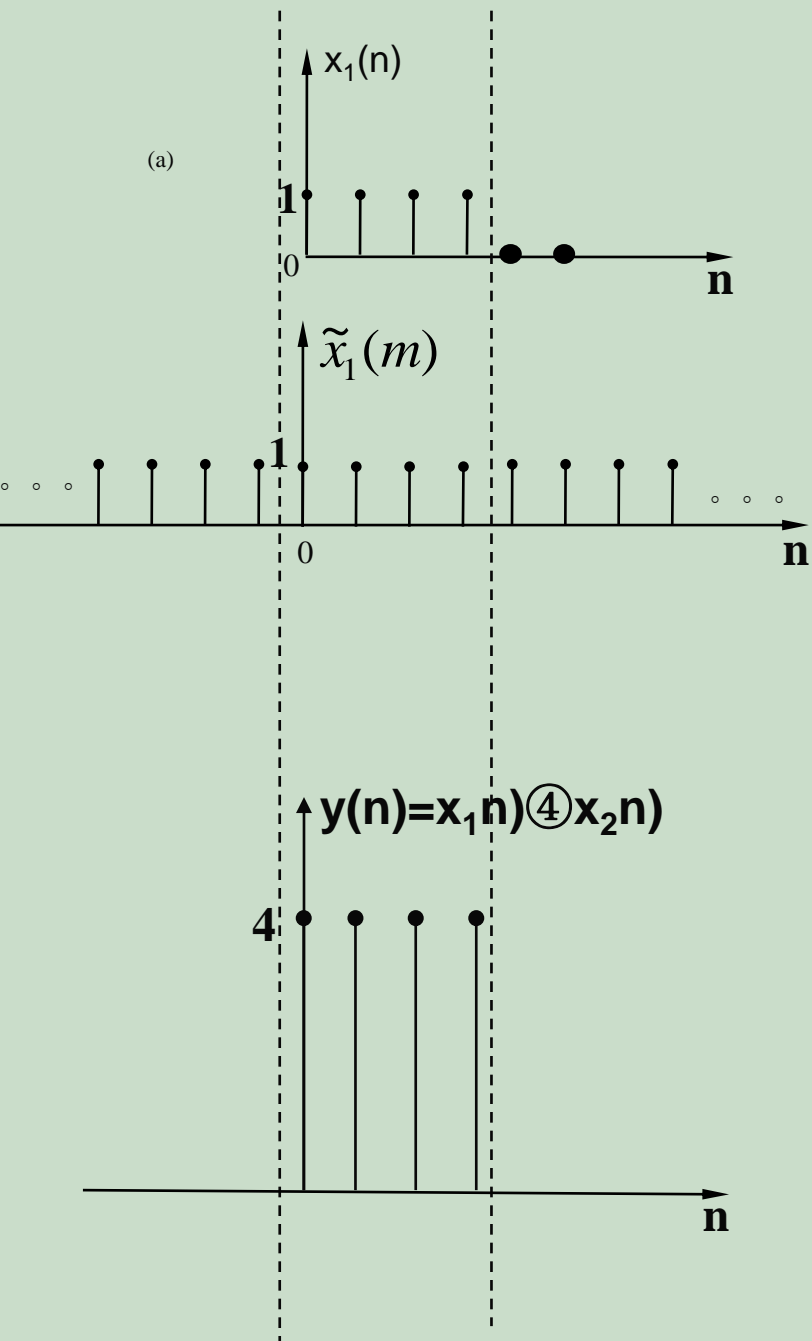
$$X_1(k) = DFT[x_1(n)] \quad X_2(k) = DFT[x_2(n)]$$

若 $Y(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$

则

$$\begin{aligned} y(n) = IDFT[Y(k)] &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n) \end{aligned}$$

此卷积过程与周期卷积和的过程是一致的，只不过这里要取结果的主值序列。公式中的 $x_2((n-m))_N$ 只在 $0 \leq m \leq N-1$ 范围内取值，因而是圆周移位，因此这个卷积和称为**圆周卷积和**。



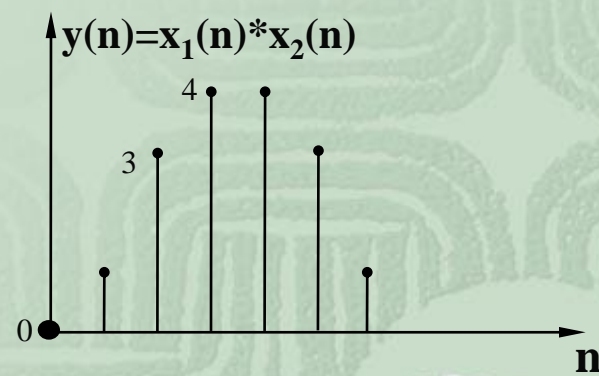
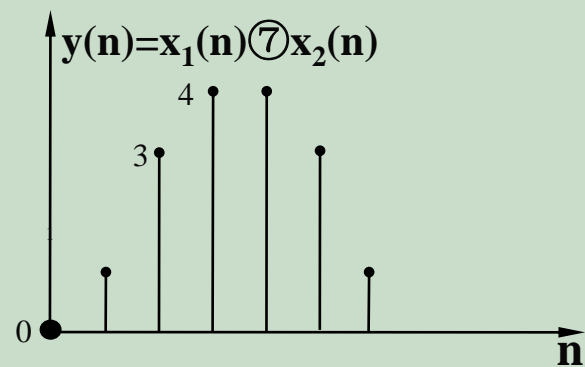
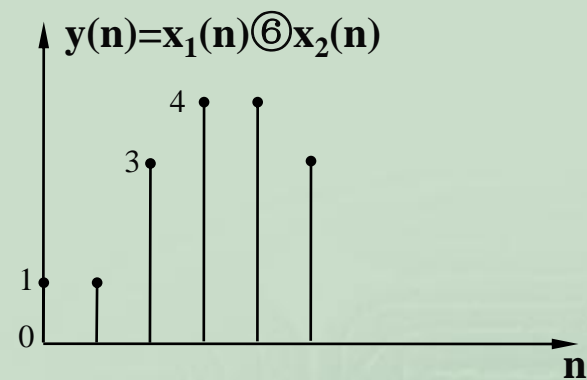
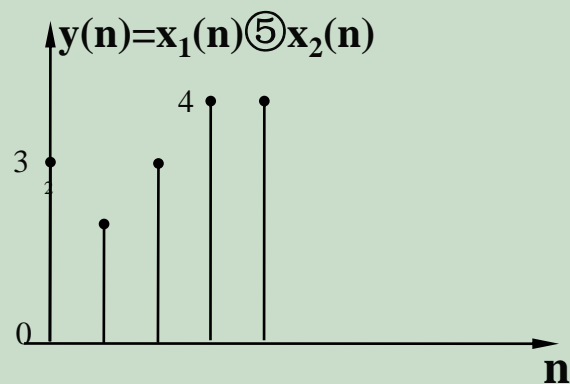


图 两个有限长序列的圆周卷积和线性卷积



(2) 频域圆周卷积

利用时域与频域的对称性，得到频域圆周卷积定理

若 $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$

$$\begin{aligned}\text{则 } Y(k) = DFT[y(n)] &= \frac{1}{N} \left[\sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l))_N \right] R_N(k) \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{l=0}^{N-1} X_2(l) X_1((k-l))_N \right] R_N(k)\end{aligned}$$

(3) 圆周相关定理

若 $R_{xy}(k) = X(k) \cdot Y^*(k)$

$$\begin{aligned}\text{则 } r_{xy}(m) = IDFT[R_{xy}(k)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*((n-m))_N R_N(m) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} y^*(n) x((n+m)) R_N(m)\end{aligned}$$



(4) 用圆周卷积求线性卷积

如果信号 $x(n)$ 和单位抽样响应 $h(n)$ 都是有限长序列，那么是否能用圆周卷积的运算来代替线性卷积运算呢？下面就这个问题加以讨论：设 $x_1(n)$ 是 N_1 点的有限长序列， $x_2(n)$ 是 N_2 点的有限长序列。

① $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的线性卷积：

$$y_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m)$$

$x_1(m)$ 的非零区间为 $0 \leq m \leq N_1-1$ ， $x_2(n-m)$ 的非零区间为 $0 \leq n-m \leq N_2-1$ ，将两个不等式相加，得到

$$0 \leq n \leq N_1+N_2-2$$



② $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的圆周卷积:

假设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 进行 L 圆周卷积,
 $L > \max(N_1, N_2)$, 再讨论 L 等于何值时, 圆周卷积才能
代表线性卷积。将两个序列都补零为长度为 L 点的序
列, 即

$$x_1(n) = \begin{cases} x_1(n) & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0 & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} x_2(n) & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0 & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

则

$$y(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n)$$



将任一序列（这里采用 $x_2(n)$ ）变成 L 点周期延拓序列，即

$$\tilde{x}_2(n) = x_2((n))_N = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rL)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rL - m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2(n + rL - m) \right] R_L(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n + rL) \right] R_L(n) \end{aligned}$$

因此 L 点的圆周卷积 $y(n)$ 是线性卷积 $y_1(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列

结论：若 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ ，则 L 点圆周卷积能代表线性卷积。

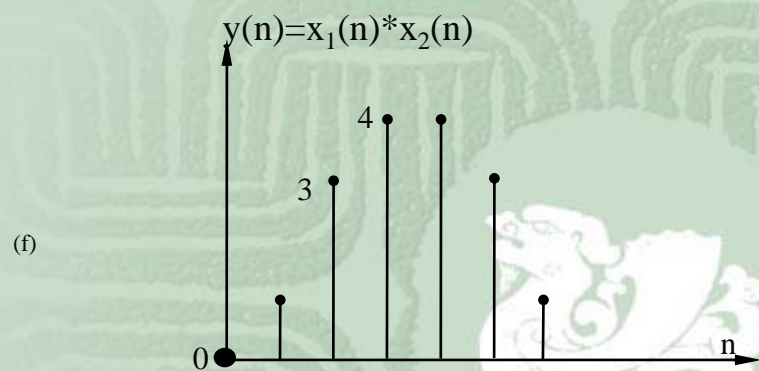
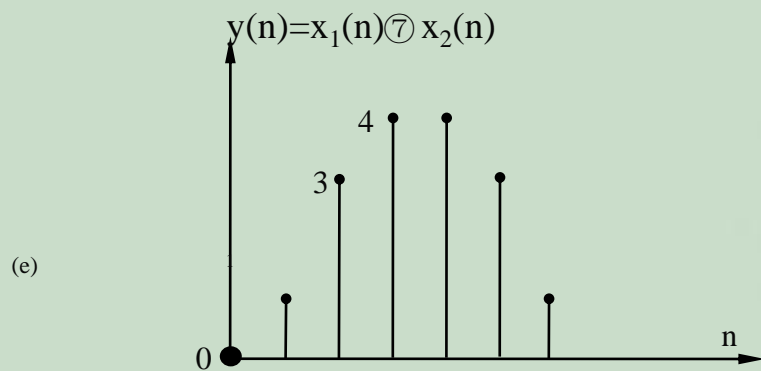
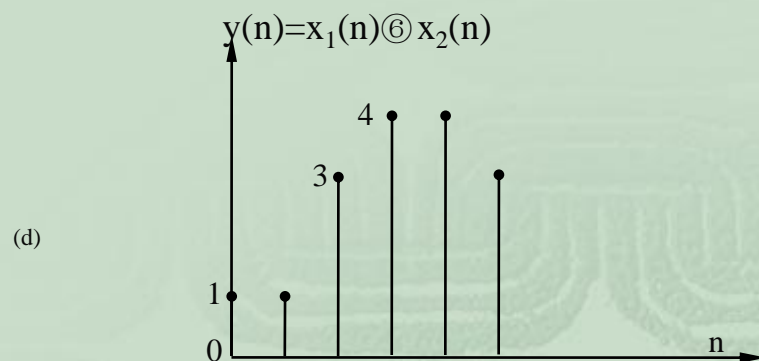
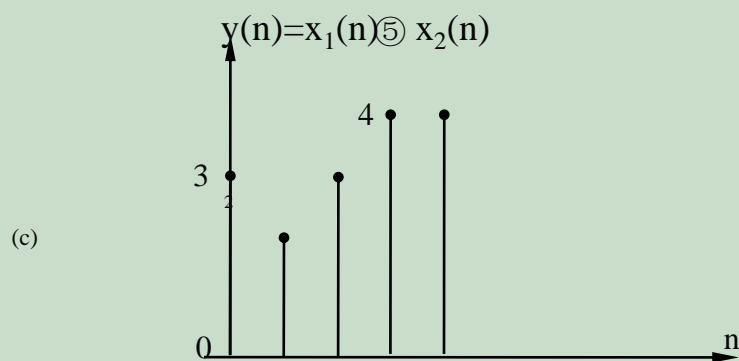
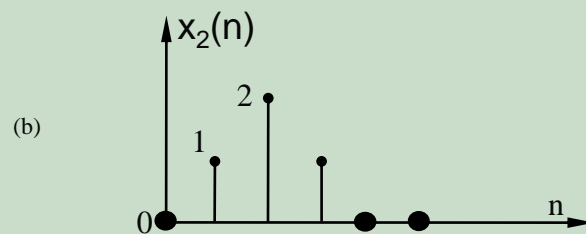
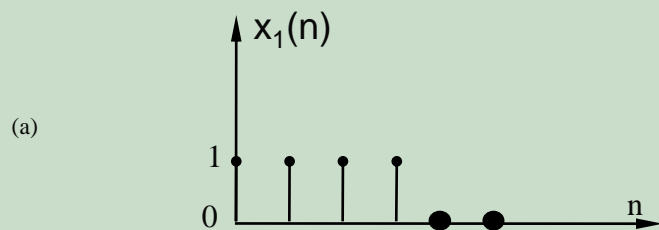


图 两个有限长序列的圆周卷积和线性卷积

$$\mathbf{x(n)} \textcircled{4} \mathbf{h(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x(n)} \textcircled{5} \mathbf{h(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x(n)} \textcircled{6} \mathbf{h(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{x(n)} \otimes \mathbf{h(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



■ 例：序列 $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$

(1) 求 $x(n)$ 的4点DFT。

(2) 若 $y(n) = x(n) \textcircled{4} x(n)$ ，求 $y(n)$ 和4点的 $Y(k)$ 。

(3) 若 $h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-3)$ ，

求 $y(n) = x(n) \textcircled{4} h(n)$ ，

解 (1)
$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n)W_N^{nk} = 1 + 2W_4^{2k} + W_4^{3k}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad Y(k) &= \left(1 + 2W_4^{2k} + W_4^{3k}\right) \left(1 + 2W_4^{2k} + W_4^{3k}\right) \\ &= 1 + 4W_4^{2k} + 2W_4^{3k} + 4W_4^{4k} + 4W_4^{5k} + W_4^{6k} \end{aligned}$$

$$\text{(因为 } W_4^{4k} = 1, \quad W_4^{5k} = W_4^k, \quad W_4^{6k} = W_4^{2k} \text{)}$$

$$= 5 + 4W_4^k + 5W_4^{2k} + 2W_4^{3k}$$

$$y(n) = 5\delta(n) + 4\delta(n-1) + 5\delta(n-2) + 2\delta(n-3)$$

(3) 已知 $h(n)=\{1, 1, 0, 2\}$, $x(n)=\{1, 0, 2, 1\}$

因此利用矩阵运算, 得到:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$y(n) = 2 \delta(n) + 5 \delta(n-1) + 4 \delta(n-2) + 5 \delta(n-3)$$

$$\text{或 } y(n) = \{2, 5, 4, 5\}$$



3.6 利用DFT计算模拟信号的傅立叶变换(级数)对

3.6.1 对连续时间非周期信号的傅立叶变换的DFT逼近

连续时间非周期信号 $x(t)$ 的傅立叶变换对为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

用DFT方法计算这一变换对:



1、采样：对 $x(t)$ 以 T 为间隔进行采样，即 $x(t)|_{t=nT} = x(nT) = x(n)$

$$\text{由于 } t \rightarrow nT, \quad dt \rightarrow T, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} T$$

因此得到

$$X(j\Omega) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT} \cdot T$$

$$x(nT) \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Omega_s} X(j\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega$$

2、截断：将序列 $x(nT) = x(n)$ 截断成包含有 N 个抽样点的有限长序列，因此有

$$X(j\Omega) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\Omega nT}$$

由于时域抽样，抽样频率为 $f_s = 1/T$ ，频域产生以 f_s 为周期的周期延拓，若频域为带限信号，则有可能不产生频域混迭，而成为连续周期频谱。

3、频域抽样：在频域的一个周期中取 N 个样点，每个样点间隔为 F_0 ， $f_s = NF_0$ 。频域抽样使频域积分式变成求和式，而在时域就得到原来已经截断的离散时间序列的周期延拓，时域周期为 $T_0 = 1 / F_0$ 。因此有

$$\Omega \rightarrow k\Omega_0, \quad d\Omega \rightarrow \Omega_0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \Omega_0$$

得到一些参量关系：

$$\Omega_0 = 2\pi F_0$$

$$T_0 = 1/F_0 = N/f_s = NT$$

$$\Omega_0 T = \Omega_0 / f_s = \Omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\Omega_s} = 2\pi \frac{F_0}{f_s} = 2\pi \frac{T}{T_0} = \frac{2\pi}{N}$$

因此得到：

$$X(jk\Omega_0) = X(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_0} \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\Omega_0 nT}$$

$$= T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = T \cdot DFT[x(n)]$$

$$x(nT) \approx \frac{\Omega_0}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 nT} = F_0 \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$$

$$= F_0 \cdot N \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} = f_s \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$$

$$= \frac{1}{T} \cdot IDFT[X(jk\Omega_0)]$$

小结：线性卷积求解方法

■ 时域直接求解

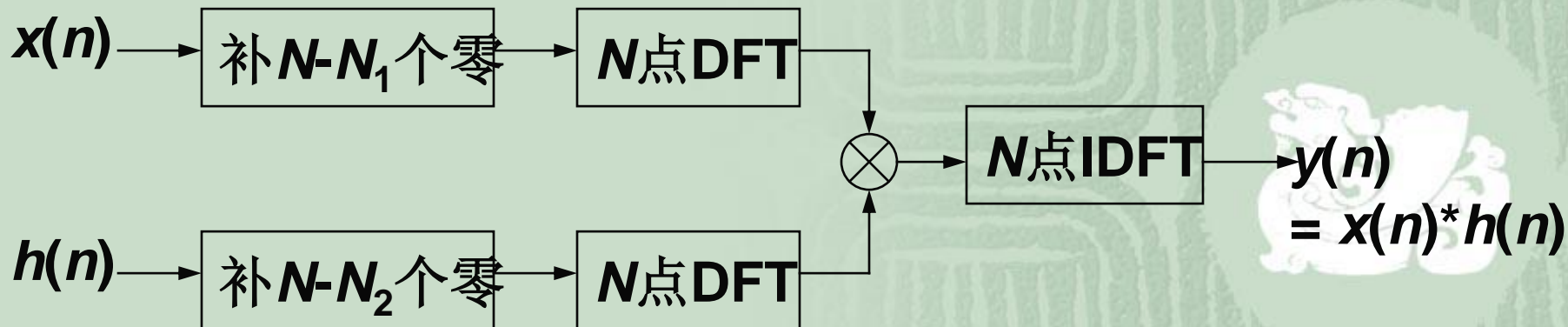
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

• z变换法

$$X(z) = ZT[x(n)] \quad H(z) = ZT[h(n)]$$

$$y(n) = IZT[Y(z)] = IZT[X(z) \cdot H(z)]$$

◆ DFT法



3.6.3 对连续时间周期信号的傅立叶级数的DFS逼近

连续时间周期信号 $x(t)$ 的傅立叶级数对为：

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$

T_0 为连续时间周期信号的周期。

1、时域抽样 $x(n) = x(nT) = x(t)|_{t=nT}$

$$dt = (n+1)T - nT = T$$

$$\int_0^{T_0} dt \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} T$$

设一个周期内的样
点数为 N

$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{T}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\Omega_0 nT} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

2、将频域离散序列截断，截断长度等于一个周期（时域抽样造成的频域周期延拓的一个周期），有

$$x(nT) \approx \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 nT} = N \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

因此得到用DFS (DFT) 来逼近连续时间周期信号傅立叶级数对的公式：

$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{1}{N} \cdot DFS[x(n)]$$

$$x(nT) = x(t) |_{t=nT} \approx N \cdot IDFS[X(jk\Omega_0)]$$



3 . 6 . 4 利用DFT对模拟信号 进行谱分析时参数的选择

1 . 采样频率 f_s

根据采样定理，只有当采样频率大于信号的最高频率 f_h 两倍时，才能避免频域混迭。

$$f_s > 2 f_h$$

也就是抽样间隔为 T 满足 $T = 1/f_s < 1/2f_h$ 。

实际信号的持续时间都是有限的，从理论上来说，其频谱宽度是无限的，在工程上总是对信号先进行低通滤波——预滤波或抗混迭滤波，限制高于的频率分量出现。



2. 频率分辨率 F_0

指长度为 N 的信号序列所对应的连续谱 $X(e^{j\omega})$ 中能分辨的两个频率分量峰值的最小频率间距 F_0

此最小频率间距 F_0 与数据长度 T_0 成反比。

$$F_0 = \frac{1}{T_0}$$

为了对全部信号进行采样，必须使抽样点数 N 满足条件

$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{f_s}{F_0}$$

可以看出，若想提高分辨率 F_0 ，而采样频率不变，则抽样点数 N 一定要增加。

T – 时域采样间隔

f_s – 时域采样频率

T_0 – 信号记录长度

F_0 – (频率分辨率) 频域采样间隔

N – 采样点数

f_h – 信号最高频率

$$f_s \geq 2f_h \quad f_s = 1/T \quad T_0 = 1/F_0$$

$$f_s = NF_0 \quad T_0 = NT$$

$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{f_s}{F_0}$$

信号最高频率与频率分辨率之间的矛盾

$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{f_s}{F_0}$$

要增加信号最高频率 $f_h \uparrow$ 则 $f_s \uparrow$

当 N 给定 F_0 必 \uparrow ，即分辨率 \downarrow

要提高频率分辨率，即 $F_0 \downarrow$ 则 $T_0 = \frac{1}{F_0} \uparrow$

当 N 给定 则 $T \uparrow$ $f_s \downarrow$ 要不产生混叠， f_h 必 \downarrow

例：有一频谱分析用的FFT处理器，其抽样点数必须是2的整数幂，假定没有采用任何特殊的数据处理措施，已知给定的条件为：

频率分辨率 $\leq 10\text{Hz}$ ，信号最高频率 $\leq 4\text{kHz}$ 。

试确定以下参量：

①最小记录长度 T_0 ；②抽样点间的最大时间间隔 T （最小抽样频率）；③在一个记录中最少点数 N 。

解：①最小记录长度 T_0

$$T_0 \geq \frac{1}{F_0} = \frac{1}{10} = 0.1\text{s}$$

②抽样点间的最大时间间隔 T

$$T < \frac{1}{2f_h} = \frac{1}{2 \times 4 \times 10^3} = 0.125 \times 10^{-3}\text{s}$$

③

$$N > \frac{2f_h}{F_0} = \frac{2 \times 4 \times 10^3}{10} = 800$$

$$\text{取 } N = 2^m = 2^{10} = 1024 > 800$$



3 . 6 . 5 利用DFT对模拟信号 做谱分析时的几个问题

- 1、频域的混迭失真
- 2、截断效应
- 3、栅栏效应



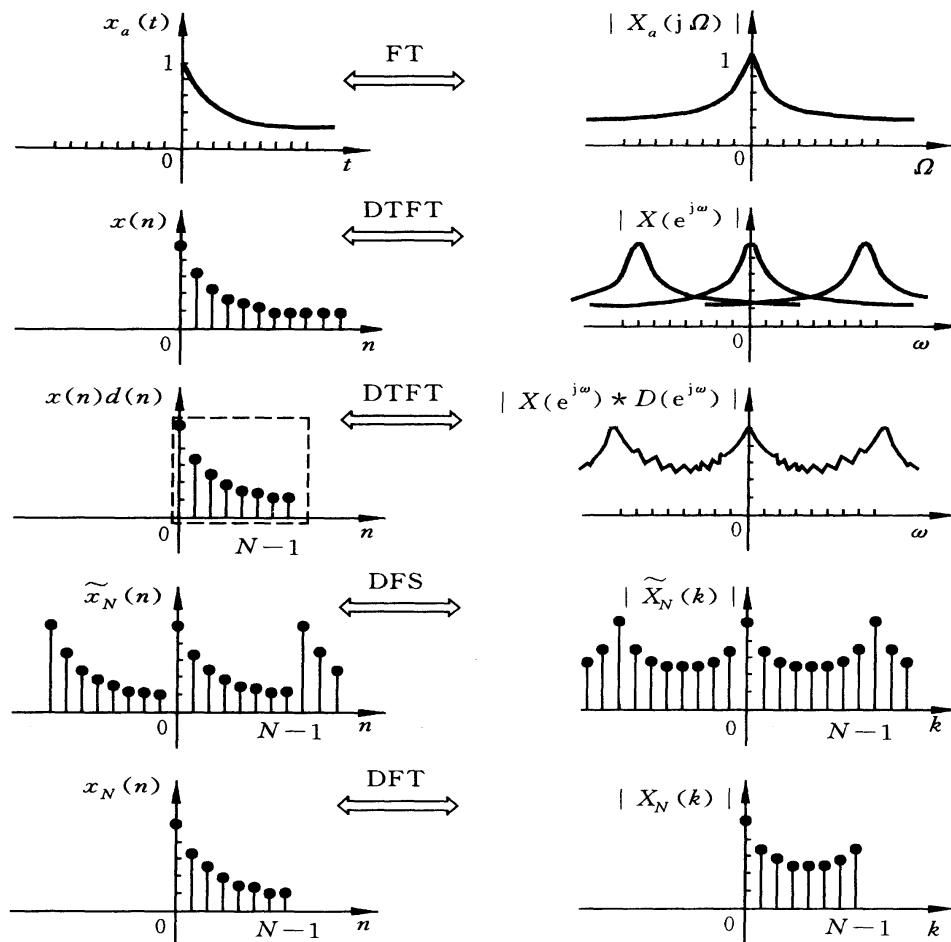
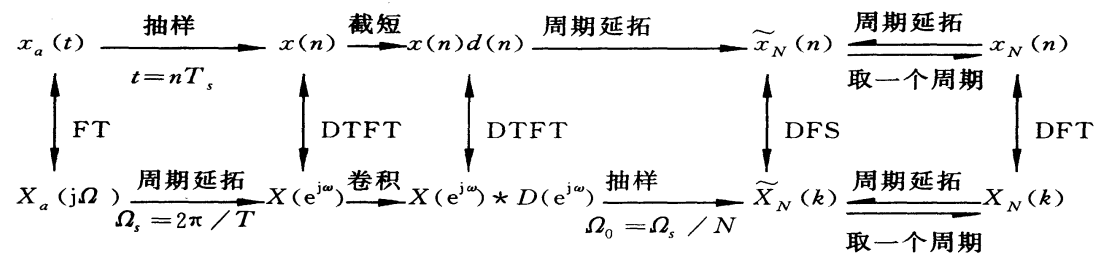


图 3-15 利用 DFT 对 CTFT(连续时间傅里叶变换)逼近的全过程

1、频谱的混叠失真

若采样频率不满足采样定理，即采样频率需大于信号最高频率的两倍；或者时域的突变造成频域的拖尾现象；又或者时域信号中的高频噪声干扰，均会产生混叠失真。

因此采样频率一般选取（**3-6**）倍的信号最高频率；或者在抽样之前采用截止频率为 $f_s/2$ 的限带低通滤波器，也就是常说的防混叠滤波器。



2、截断效应

在实际中遇到的序列 $x(n)$ ，其长度往往是很长，甚至是无限长的，用DFT对其进行谱分析时，必须将它截断为长度为 N 的有限长序列，即

$$x_N(n) = x(n)R_N(n)$$

根据频率卷积定理，有

$$X_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * R_N(e^{j\omega})$$

式中

$$\begin{aligned} R_N(e^{j\omega n}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_N(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{-j\frac{\omega N}{2}}(e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}})}{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})} = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \end{aligned}$$



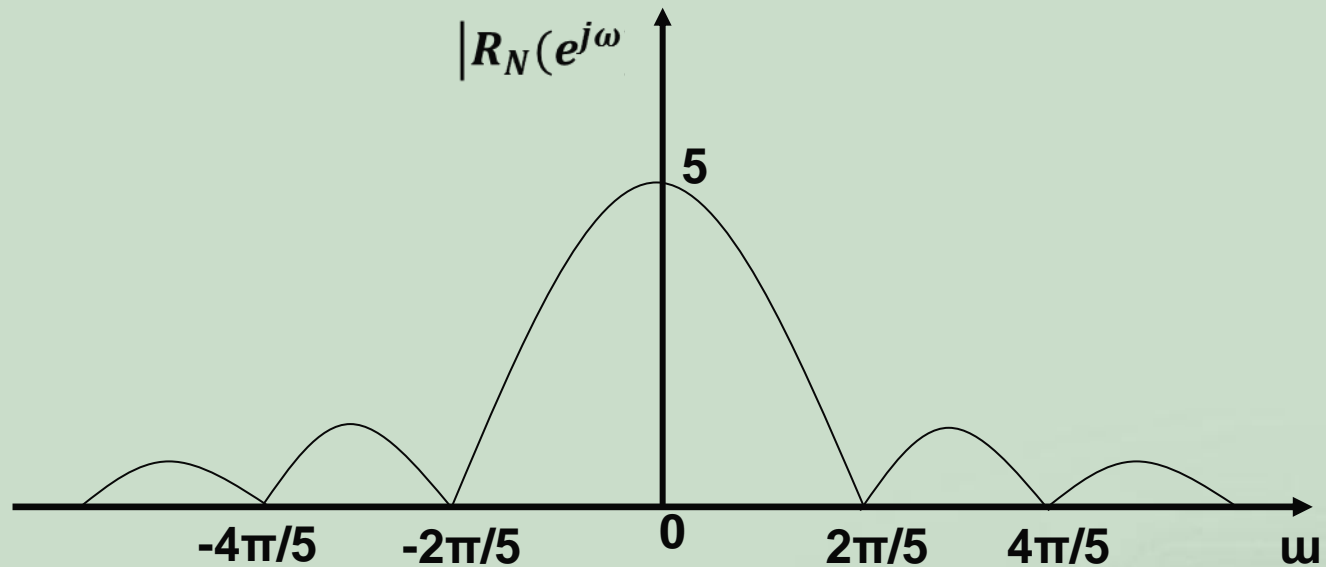
所以矩形窗的幅度谱为

$$|R_N(e^{j\omega n})| = \left| \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right|$$

相位谱为

$$\arg[R_N(e^{j\omega})] = -\frac{N-1}{2}\omega + \arg\left[\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right]$$

N=5

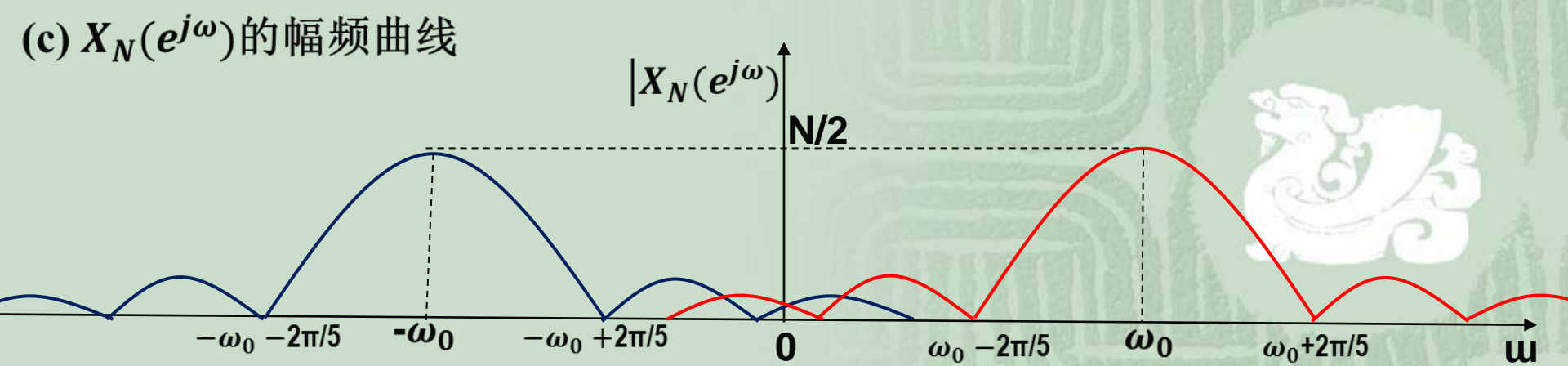
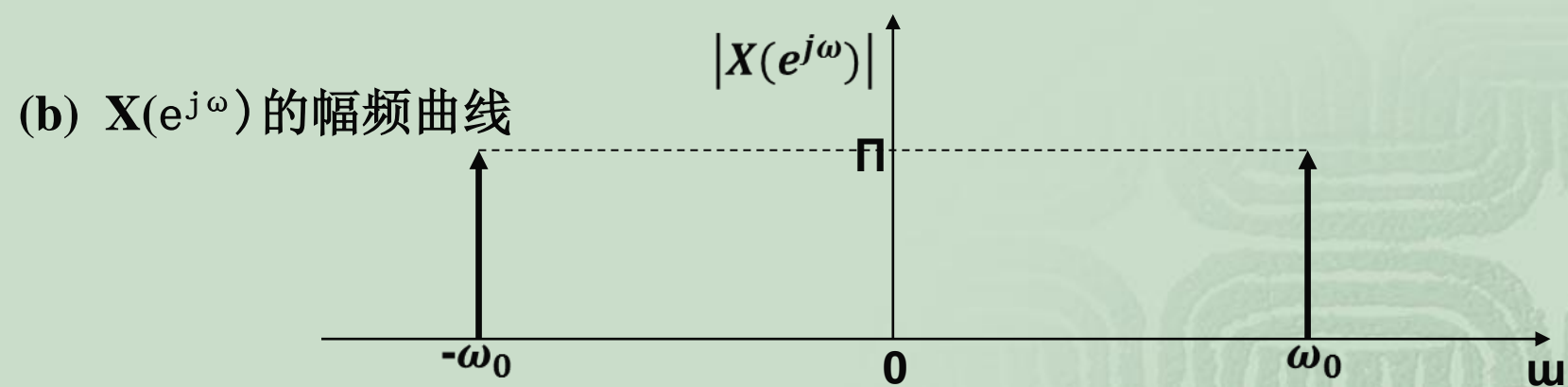
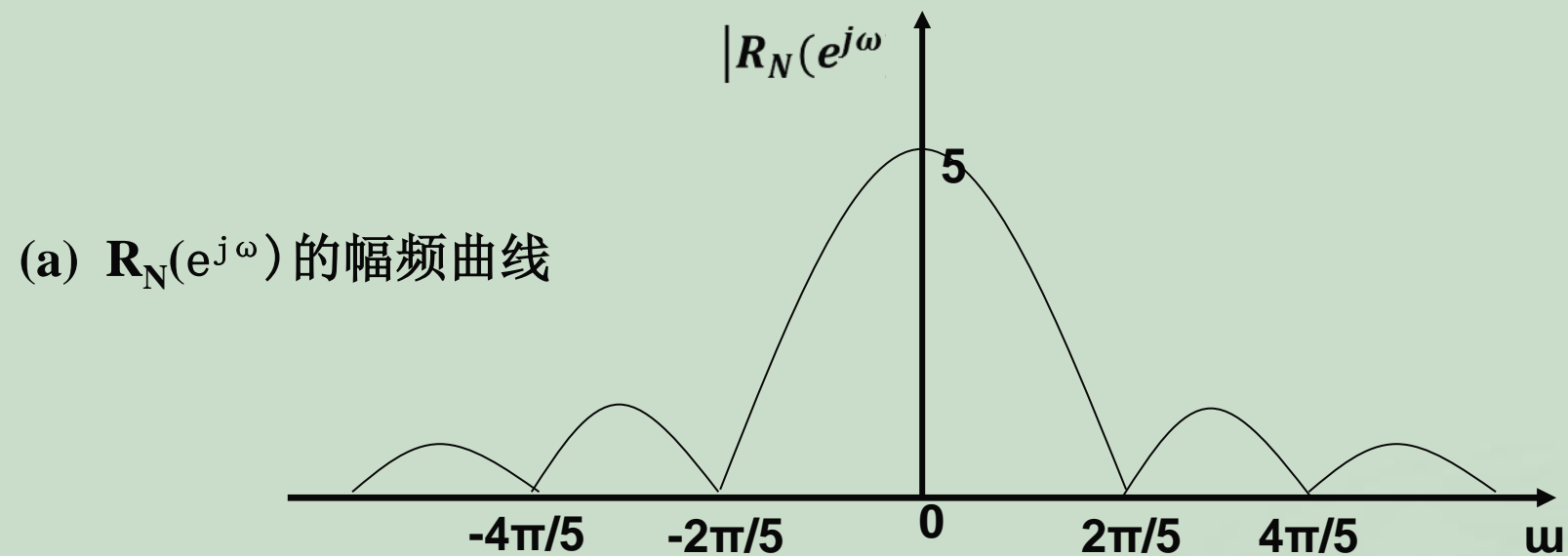


若信号是余弦信号 $x(n) = \cos(\omega_0 n)$,

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi i) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi i)]$$

所以余弦序列的频谱是幅度为 π ，以 ω_0 为中心，以 2π 的整数倍为间隔的一系列的冲激函数。





序列截断后的频谱 $X_N(e^{j\omega})$ 与原序列频谱 $X(e^{j\omega})$ 有着明显的差别，这种差别对谱分析带来两方面的影响：

1) 频谱泄露

原来的谱线展宽为 $4\pi/N$ ，这种展宽称为频谱泄露。显然 N 越大，展宽的越窄，泄露越小。若两个信号的频率离的很近时，由于频谱的泄露，会使得无法分辨出信号的频率。

2) 谱间干扰

因截断使在主谱线两边形成许多旁瓣，引起不同分量间的干扰，称之为谱间干扰，这不仅影响频谱分辨率，严重时强信号的旁瓣可能湮灭弱信号的主谱线，或者将强信号谱的旁瓣误认为是另一信号的谱线，从而形成假信号，使谱分析产生较大的偏差。

减小截断效应的方法：

(1) 可以取更长的数据，也就是使截断窗加宽，当然数据太长也必然会导致存储量和运算量增加，

(2) 数据不要突然截断，也就是不要加矩形窗，而是缓慢截断，即加各种缓变的窗（如三角窗、升余弦窗等），使得窗谱的旁瓣能量更小，卷积后造成的泄露减小。

3、栅栏效应

N点DFT是在频率区间 $[0, 2\pi]$ 上对信号的频谱进行N点等间隔采样，得到的是若干个离散点 $X(k)$ ，且它们只限制为基频 F_0 的整数倍，这就好象在栅栏的一边通过缝隙看另一边的景象，只能在离散点的地方看到真实的景象，其余部分频谱成分被遮挡，所以称为栅栏效应。

减小栅栏效应的方法：

- (1) 如果数据长度 T_0 不变，增加采样频率 f_s ，从而增加时域的抽样点数N；
- (2) 如果数据长度 T_0 和采样频率 f_s 都不变，则数据的有效长度N不变，在数据后补零，使整个的数据长度增加为M ($M > N$)，则DFT 的变换点数为M，此时频域的抽样点数为M，也就是频域的谱线会变密，而时域的有效数据没有变化。

3.7 有限长序列的 $X(z)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 和 $X(k)$ 之间的关系

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$k=0,1,\dots,N-1$$



1、 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 的关系

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

因此，序列的离散时间傅立叶变换 $X(e^{j\omega})$ 是其 z 变换 $X(z)$ 在单位圆（ $z = e^{j\omega}$ ）上的数值。



2、 $X(z)$ 和 $X(k)$ 的关系

$$X(k) = X(z)|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

因此，有限长序列的离散傅立叶变换 $X(k)$ 是其 z 变换 $X(z)$ 在单位圆上的均匀抽样值（共有 N 点抽样）。



例3.17 计算下列序列的N点DFT。

$$(2) \quad x(n) = \delta(n)$$

$$(4) \quad x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}mn}R_N(n)$$

$$(7) \quad x(n) = R_m(n), 0 < m < N$$

解：

(2)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{nk} = 1, \quad 0 \leq k \leq N-1$$



(4)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}mn} W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)n} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)}} = N\delta(k - m)$$

$$= \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

$$0 \leq k \leq N - 1, \quad 0 \leq m \leq \frac{N}{2}$$

由于 $\omega = \frac{\Omega}{f_s} = \frac{2\pi}{N}m$, 即 $\frac{f}{f_s} = \frac{m}{N}$, $f_s > 2f_h$,

所以 $0 \leq m \leq \frac{N}{2}$



(7)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} R_m(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{m-1} W_N^{nk}$$

$$= \frac{1 - W_N^{mk}}{1 - W_N^k} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}mk} \left(e^{j\frac{\pi}{N}mk} - e^{-j\frac{\pi}{N}mk} \right)}{e^{-j\frac{\pi}{N}k} \left(e^{j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k} \right)}$$

$$\pi \sin \left(\frac{\pi}{N} mk \right)$$



例3-18 已知有限长序列为

$$x(n) = \delta(n - 2) + 4\delta(n - 4)$$

(1) 求序列的8点DFT, $X(k)$;

(2) 若 $h(n)$ 的8点DFT为 $H(k) = W_8^{-3k}X(k)$, 求 $h(n)$;

(3) 若序列 $Y(k)=X(k)H(k)$, 求 $y(n)$;

解: (1) $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$

$$= \sum_{n=0}^7 [\delta(n - 2) + 4\delta(n - 4)]W_8^{nk} = W_8^{2k} + 4W_8^{4k}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{8}2k} + 4e^{-j\frac{2\pi}{8}4k} = (-j)^k + 4 \times (-1)^k$$

$$X(k) = \{5, -4 - j, 3, -4 + j, 5, -4 - j, 3, -4 + j\}$$



(2) 利用圆周移位的性质

$$X_m(n) = DFT \left[x((n+m))_N R_N(n) \right] = W_N^{-mk} X(k)$$

因此已知 $H(k) = W_8^{-3k} X(k)$,

所以 $h(n)$ 是将 $x(n)$ 补零成为8点序列后, $x(n) = \{0,0,1,0,4,0,0,0\}$,

向左做3位的圆周移位, 得到 $h(n) = \{0,4,0,0,0,0,0,1\}$

(3) 利用圆周卷积和的性质,

$$\begin{aligned} H(k) &= W_8^{-3k} X(k) = W_8^{-3k} (W_8^{2k} + 4W_8^{4k}) = W_8^{-k} + 4W_8^k \\ Y(k) &= X(k)H(k) = (W_8^{2k} + 4W_8^{4k})(W_8^{-k} + 4W_8^k) \\ &= W_8^k + 8W_8^{3k} + 16W_8^{5k} \end{aligned}$$

因此 $y(n) = \{0,1,0,8,0,16,0,0\}$

或 $y(n) = \delta(n-1) + 8\delta(n-3) + 16\delta(n-5)$



例3-21 已知 $x(n)$ 为 N 点的有限长序列，而 $X(k)$ 为 $x(n)$ 的 N 点DFT，
若 $y(n) = x((n))_N R_{rN}(n)$

$$Y(k) = DFT[y(n)], \quad 0 \leq k \leq rN - 1$$

求用 $X(k)$ 表示 $Y(k)$ 。

解：

$$Y(k) = DFT[y(n)] = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n) W_{rN}^{nk} = \sum_{n=0}^{rN-1} x((n))_N e^{-j\frac{2\pi}{rN}nk}$$

令 $n = m + lN, m = 0, 1, \dots, N-1, l = 0, 1, \dots, r-1$

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{N-1} x((m + lN))_N e^{-j\frac{2\pi}{rN}(m+lN)k} \\ &= \sum_{l=0}^{r-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{rN}mk} \right] e^{-j\frac{2\pi}{r}lk} \\ &= X\left(\frac{k}{r}\right) \sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi}{r}lk} \end{aligned}$$



$$\sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi}{r}lk} = \begin{cases} r, & \frac{k}{r} = \text{整数} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因此

$$Y(k) = \begin{cases} rX\left(\frac{k}{r}\right), & \frac{k}{r} = \text{整数} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq rN - 1$$



例3-23 将数字信号处理器作谱分析只用，抽样点数必须为2的整数幂，假定不采取任何特殊的 数字处理措施，设抽样频率 $f_s = 5\text{kHz}$ ，要求频率分辨率 $F_0 \leq 5\text{Hz}$ 。试确定

- (1) 最小记录长度
- (2) 允许处理的信号最高频率
- (3) 在一个记录中的最少抽样点数
- (4) 在抽样频率不变的情况下，如何将频率分辨率提高一倍，使 $F_0 \leq 2.5\text{Hz}$

解： (1) 最小记录长度 $T_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{1}{5} = 0.2\text{s}$

(2) 因为抽样频率是信号最高频率的2倍以上，所以

$$f_h \leq \frac{f_s}{2} = 2.5\text{kHz}$$

(3) 最小记录点数 $N_{min} \geq \frac{f_s}{F_0} = \frac{5000}{5} = 1000$

取 $N = 2^{10} = 1024$



(4) 若想将频率分辨率提高一倍至 $F'_0 = 2.5\text{Hz}$ ，但是抽样频率不变，根据公式 $N \geq \frac{f_s}{F_0}$ ，

$$\begin{aligned} N'_{\text{mim}} &\geq \frac{f_s}{F'_0} = \frac{5000}{2.5} \\ &= 2000 \end{aligned}$$

取 $N = 2^{11} = 2048$



1-14 有一调幅信号

$$x_a(t) = [1 + \cos(2\pi \times 100t)] \cos(2\pi \times 600t)$$

用DFT做频谱分析，要求能分辨 $x_a(t)$ 的所有频率分量，问

- (1) 抽样频率应为多少赫兹 (Hz) ?
- (2) 抽样时间间隔应为多少秒 (Sec) ?
- (3) 抽样点数应为多少点?
- (4) 若用 $f_s = 3\text{kHz}$ 频率抽样，
抽样数据为512点，做频谱分析，
求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ ，并粗略画出 $X(k)$ 的幅频特性 $|X(k)|$ ，标出主要点的坐标值。

解:

$$\begin{aligned}x_a(t) &= [1 + \cos(2\pi \times 100t)] \cos(2\pi \times 600t) \\&= \cos(2\pi \times 600t) \\&\quad + \frac{1}{2} \cos(2\pi \times 700t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi \times 500t)\end{aligned}$$

(1) 抽样频率应为 $f_s \geq 2 \times 700 = 1400 \text{ Hz}$

(2) 抽样时间间隔应为

$$T \leq \frac{1}{f_s} = \frac{1}{1400} = 0.00072 \text{ Sec} = 0.72 \text{ ms}$$

$$(3) \quad x(n) = x_a(t) \Big|_{t=nT}$$

$$= \cos\left(2\pi \times \frac{6}{14}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi \times \frac{7}{14}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi \times \frac{5}{14}n\right)$$

$x(n)$ 为周期序列，周期 $N = 14$

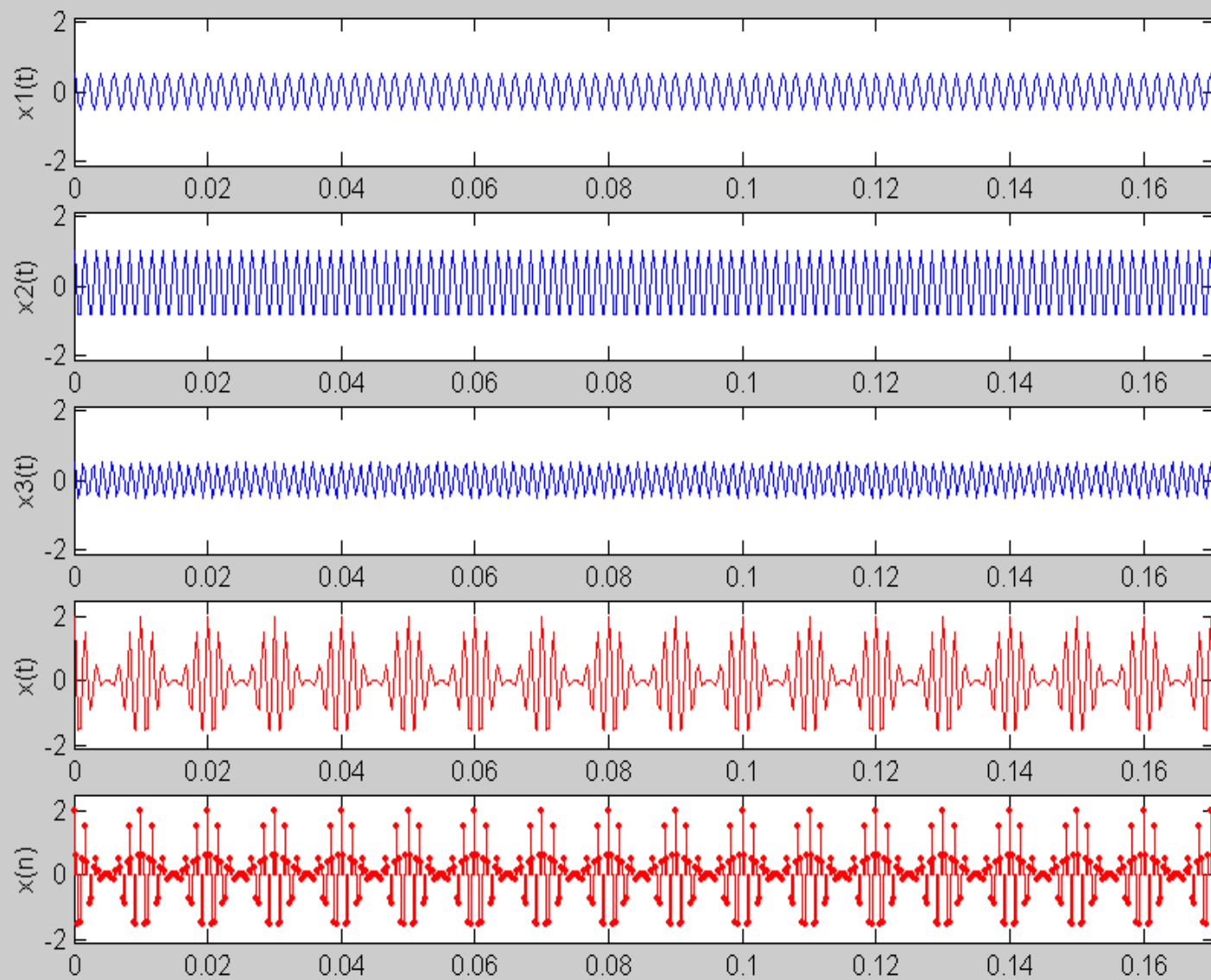
\therefore 抽样点数至少为14点

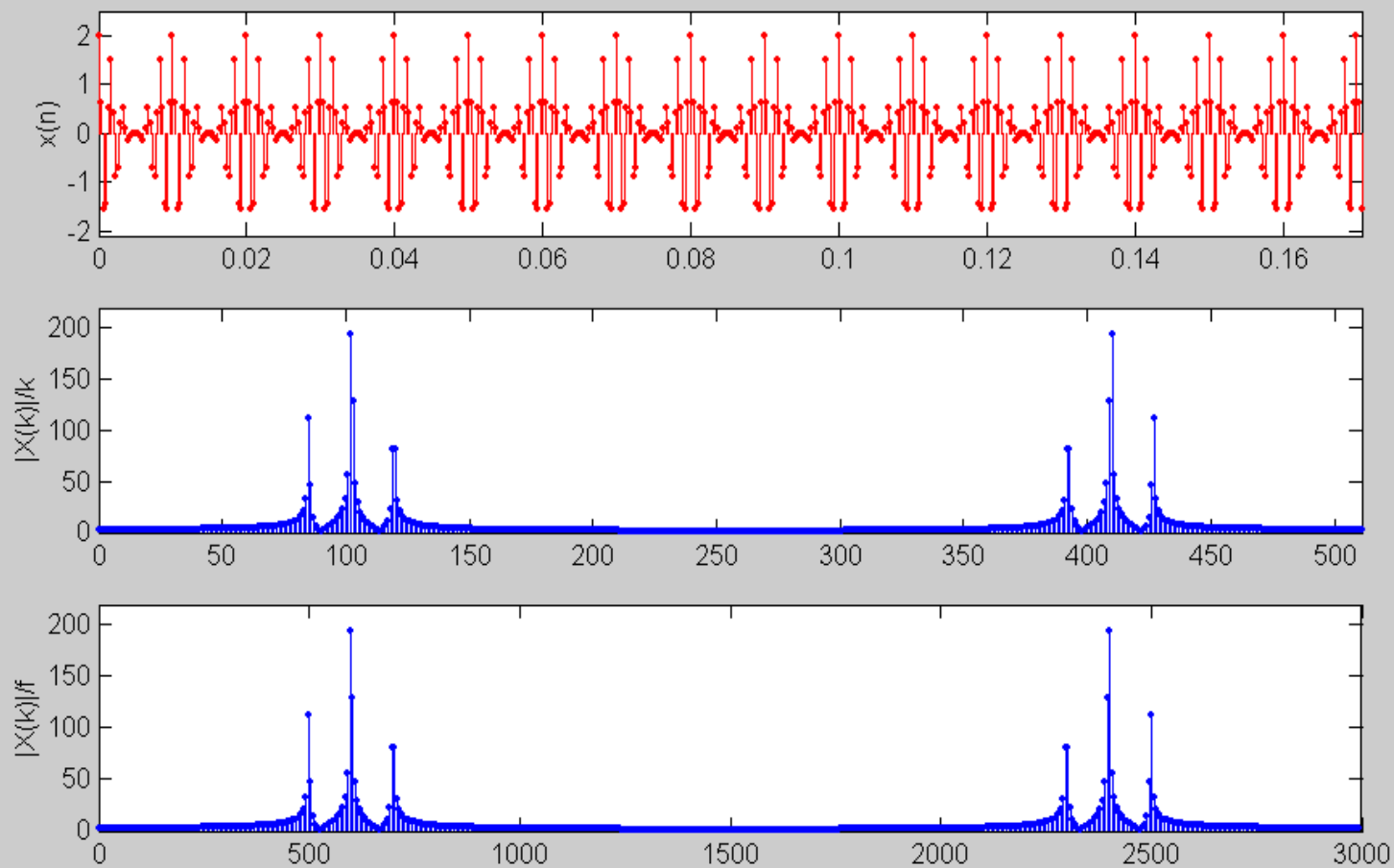
或者因为频率分量分别为500、600、700Hz

得 $F_0 = 100\text{Hz}$

$$N = f_s / F_0 = 1400 / 100 = 14$$

\therefore 最小记录点数 $N = 14$





$$\omega = \Omega T = 2\pi f / f_s$$

$$\omega = 2\pi k / N$$

$$f = f_s * k / N$$

例：已知 $x(n)$ 是 N 点长的有限长序列， $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ ，
现在将 $x(n)$ 每两点间补进 $r-1$ 个零值，使序列成为长度为 rN 的有限长序列。

$$y(n) = \begin{cases} x(n/r), & n = ir, i = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

试求 rN 点的 $\text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系

解：

$$W_{rN}^{kmr} = e^{-j\frac{2\pi}{rN}kmr} = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = W_N^{km}$$

令 $m=n/r$

$n=mr$

$$\text{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n) W_{rN}^{nk} = \sum_{m=0}^{N-1} y(mr) W_{rN}^{mrk} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{mk} = X(k) R_N(m)$$

因此 $\text{DFT}[y(n)]$ 的系数相当于系数 $X(k)$ 的 r 个周期。

课堂练习

1、试求以下有限长序列的N点DFT

(1) $x(n) = \delta(n - n_0)$

(2) $x(n) = a^n R_N(n)$

2、若对一个连续信号进行采样，该信号的幅度频谱如图所示，请分别画出以下三种不同采样频率进行采样后得到的采样信号的频谱。

(1) 30Hz

(2) 40Hz

(3) 50Hz

