空间解析几何一章大家未完成好的一些题目，；应大家要求这里给出较详细的解析

15 页第一大题 3、4、5 小题，

3 × **因为** $\vec{a}\times\vec{b}$ 为向量，而 $|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$ 为实数，故 $\vec{a}\times\vec{b}\neq|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$，但由定义有 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$

4 ×

因为由 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0},$ 得 $\vec{a}//\vec{b}$，即 $\vec{a},\vec{b}$ 同向或反向，又 $\vec{a},\vec{b}$ 均为单位向量，从而 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm1.$

5 √

注意到 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角 $0\le\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\le180^\circ$。当 $\vec{a},\vec{b}$ 均为非零向量且 $|\vec{a}+\vec{b}|=|a|+|\vec{b}|$ 时，若 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角 $0^\circ<\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\le180^\circ$, 按向量加法的平行四边形法则和三角形法则 只能得到 $|\vec{a}+\vec{b}|<|a|+|\vec{b}|$，矛盾。故 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=0^\circ$, 即 $\vec{a},\vec{b}$ 同向。

第三大题 2、3、4 小题，

2. 由 $\vec{a}\perp\vec{b}$，故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即 $0=(2,-1,1)\cdot(4,-2，\lambda)=8+2+\lambda$，故 $\lambda=-10$；

由 $\vec{a}//\vec{b}$，故 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$，即

$$(0,0,0)=\vec{0}=(2,-1,1)\times(4,-2，\lambda)=\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & \lambda\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ \lambda & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}\right)=(2-\lambda,4-2\lambda,0),$$

故 $\lambda=2$；

3. $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

$=5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos\dfrac{\pi}{3}=49$，故 $|\vec{a}-\vec{b}|=7$。

4. 已知 $\vec{a}=(3,-4,5)$，$\vec{b}=(-1,-2,2)$，由教材上两向量夹角的计算公式有

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3\times(-1)+(-4)\times(-2)+5\times2}{\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{15}{5\sqrt{2}\times3}=\frac{\sqrt{2}}{2}，故 (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{4}$$

17 页第二大题 2、4、5 小题。

2 选 D

（A）表示母线平行于 z 轴，准线为 xoy 平面上的双曲线 $x^2-y^2=1$ 的双曲柱面

（B）表示母线平行于 y 轴，准线为 xoz 平面上的圆周 $x^2+z^2=1$ 的圆柱面

（C）表示母线平行于 y 轴，准线为 xoz 平面上的抛物线 $x^2+z=1$ 的抛物柱面

（D）表示母线平行于 y 轴，准线为 xoz 平面上的双曲线 $xz=1$ 的双曲柱面

4 选 C

双曲抛物面 $x^2-y^2=z$ 在坐标面 xoz（方程为 $y=0$）上的截痕即该抛物面 $x^2-y^2=z$ 与坐标面 $y=0$ 的交线 $\begin{cases} x^2-y^2=z \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=z \\ y=0 \end{cases}$

5 选 C　因曲面 $x^2+y^2+z^2=a$ 与 $x^2+y^2=2az,(a>0)$ 的交线方程为

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a \\ x^2+y^2=2az \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a(\text{球面}) \\ z=\sqrt{a^2+a}-a\text{（平面）} \end{cases}$，故该交线为圆周

20 页第三大题 3 小题。

3. 注意到空间曲线的参数方程即该曲线上任意点（x,y,z）的坐标 x,y,z 分别为某参数 t 的函数的联立方程组，即空间曲线的参数方程为 x=x(t), y=x(t), z=x(t)；而空间曲线的一般方程为相交得到该曲线的两个空间曲面方程的联立方程组，一般来说，由空间曲线的参数方程消掉参数后得到关于 x,y,z 的两个方程的联立方程组即它的一般方程。故在空间曲线的参数方程 $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t^2 \\ z=2t+1 \end{cases}$ 中消去参数 t 即得其一般式方程为 $\underline{\begin{cases} y=(x-1)^2 \\ z=2x-1 \end{cases}}$ 或 $\underline{\begin{cases} y=(x-1)^2 \\ x=\dfrac{z+1}{2} \end{cases}}$

21 页第三大题

解：教材上完全类似题目，三点 A(5,-7,4), B(4,0,-2), C(-3,1,-2)中任意两点构成的二向量的向量积均为这三点确定平面的法向量，如 $\vec{AB}=(-1,7,-6),\vec{AC}=(-8,8,-6)$ 的向量积

$\vec{AB}\times\vec{AC}=(-1,7,-6)\times(-8,8,-6)=\left(\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -6 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -6 & -8 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -8 & 8 \end{vmatrix}\right)=(6,42,48)$ 可作为所求平面的法向量，又平面过了点 A,(也可选过了点 B 或 C),故由平面的点法式方程立得所求平面方程为 6(x-5)+42(y+7)+48(z-4)=0 即 x-5+7(y+7)+8(z-4)=0 或 x+7y+8z+12=0.

23 页第一大题 1 小题，

1 选 B。 由所选直线平行于 xoy 平面，故它的方向向量 $\vec{S}$ 必垂直于 xoy 平面的法向量 $\vec{k}=(0,0,1)$，故所选答案中直线的方向向量 $\vec{S}\cdot\vec{k}=0$

（A）直线的方向向量为 $\vec{S}=(1,3,2)$ 不满足 $\vec{S}\cdot\vec{k}=0$

（B）直线的方向向量为

$$\vec{S}=(4,-1,0)\times(1,0,-1)=(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix})=(1,4,1)$$

满足 $\vec{S}\cdot\vec{k}=0$

（C）直线的方向向量为 $\vec{S}=(0,0,1)$ 不满足 $\vec{S}\cdot\vec{k}=0$

（D）直线的方向向量为 $\vec{S}=(2,3,0)$ 不满足 $\vec{S}\cdot\vec{k}=0$

第二大题 1 小题。

因所求直线平行于 y 轴，故 y 轴的单位向量 $\vec{j}=(0,1,0)$ 可作为所求直线的一个方向向量，又所求直线过了点(1,2,3)，故由直线的点向式方程得直线方程为 $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{0}$，这里分母为 0 表示分子也为 0.

24 页第四大题。

解：设平面方程为 Ax+By+Cz+D=0。因平面过了点（2，0，-1）故 2A-C+D=0　（1）
因平面过了直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$，故过了定点（-1，0，2）且平面的法向量垂直于直线的方向向量(2,-1,3)，故

-A+2C+D=0　（2）

2A-B+3C=0　(3)

联立（1）（2）（3）得到 A:B:C:D=1:5:1:-1，从而所求平面方程为 x+5y+z-1=0。

25 页第三大题 2 小题。

解：根据点到平面的距离公式可得

$d_1=\frac{|x+y-z-1|}{\sqrt{3}},d_2=\frac{|x+y+z+1|}{\sqrt{3}}$。代入 $d_1^2+d_2^2=1$ 得动点（x,y）的轨迹方程为

$(x+y-z-1)^2+(x+y+z+1)^2=3$ 或 $(x+y)^2+(z+1)^2=\dfrac{3}{2}$.

26 页第四大题 2 小题，

解 ：（1）求直线与平面的交点教材上有例题，方法是将直线方程化为参数方程代入平面方程，得到交点对应的参数值后再代入直线的参数方程即得交点的直角坐标。
本题中，直线的参数方程为 x=1+t,y=12+3t,z=9+3t，代入平面方程 x+3y-5z-2=0 得 t=-2，再代入直线参数方程得交点为(-1,6,3)；

(2) 直线与平面的夹角即直线方向向量 $\vec{S}$ 与平面法向量 $\vec{n}$ 的夹角 θ（取锐角），按教材上的计算公式 $\sin\theta=\left|\cos(\vec{S},\vec{n})\right|=\dfrac{\left|\vec{S}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{S}\right|\left|\vec{n}\right|}$，本题中 $\vec{S}=(1,3,3),\vec{n}=(1,3,-5)$，故

$\sin\theta=\dfrac{\left|1\times1+3\times3-3\times5\right|}{\sqrt{1^2+3^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+(-5)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{19\times35}}=\dfrac{5}{\sqrt{665}}$，故夹角

$\theta=\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{665}}$

第五大题

解：设 M(4,3,10)关于直线 L: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$ 的对称点为 $M'(x,y,z)$，则向量 $\vec{M}M'=(x-4,y-3,z-10)$ 垂直于直线 L 或垂直于直线 L 的方向向量 $\vec{S}=(2,4,5)$，得

$$2(x-4)+4(y-3)+5(z-10)=0 \qquad (1)$$

又点 M,M' 连线的中点 $(\dfrac{x-4}{2},\dfrac{y-3}{2},\dfrac{z-10}{2})$ 在直线 L 上，故

$$\frac{\frac{x-4}{2}-1}{2}=\frac{\frac{y-3}{2}-2}{4}=\frac{\frac{z-10}{2}-3}{5} \text{ 即 } \frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{8}=\frac{z+4}{10} \qquad (2)$$

令（2）式等于 k 解得 x=-2+4k,y=1+8k,z =-4+10k，代入（1）解得 k=1，于是得到对称点 $M'(2,9,6)$。