第3章信道与信道容量

- 信道的基本概念
- 离散单个符号信道及其容量
- 离散序列信道及其容量
- 连续信道及其容量
- 多输入多输出信道及其容量
- 信源与信道的匹配

3.1.1 信道的分类

用户数量：单用户、多用户

输入端和输出端关系：无反馈、有反馈

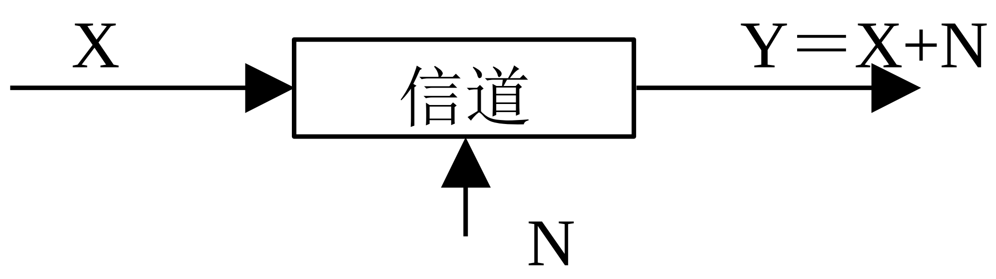
信道参数与时间的关系：固参、时变参

噪声种类： 随机差错、突发差错

输入输出特点：离散、连续、半离散半连续、波形信道

3.1.2 信道的数学模型

- 信道输入 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots X_i,\cdots),X_i\in\{a_1,\cdots,a_n\}$
- 信道输出 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots Y_j,\cdots),Y_j\in\{b_1,\cdots,b_m\}$
- 条件概率*p*(***Y***/***X***)来描述信道输入、输出信号之间统计的依赖关系。



- 转移概率矩阵

$$[p_{ij}]=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1i} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2i} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix}$$

- $P_{ij}=P(y_j/x_i)$, $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,m$

信道参数

无干扰（无噪声）信道

$$p(\mathbf{Y}/\mathbf{X})=\begin{cases}1, & \mathbf{y}=f(\mathbf{x})\\ 0, & \mathbf{y}\neq f(\mathbf{x})\end{cases}$$

√ 有干扰无记忆信道

– $p(\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{X})=p(y_1/x_1)\cdots p(y_L/x_L)$

– 每个输出信号只与当前输入信号之间有转移概率关系，只要分析单个符号的转移概率

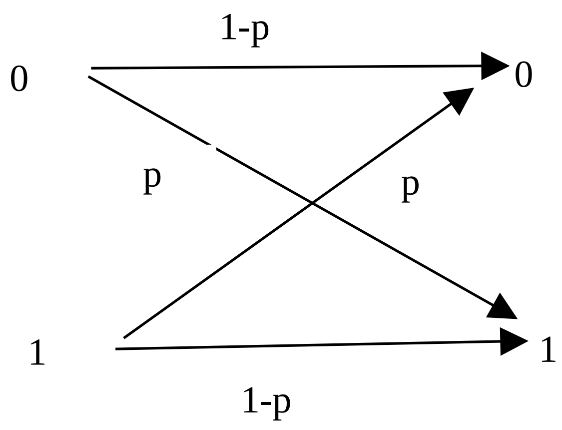
有干扰有记忆信道

– 将转移概率*p*(***Y***/***X***)看成马尔可夫链的形式，记忆有限

信道参数

有干扰无记忆信道

– 二进制对称信道（BSC）



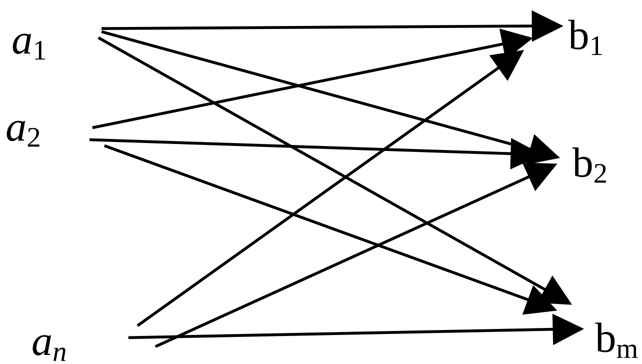
$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1-p & p \\ p & 1-p\end{bmatrix}$$

- $p(Y=0|X=1) = p(Y=1|X=0) = p$
- $p(Y=1|X=1) = p(Y=0|X=0) = 1- p$

信道参数

有干扰无记忆信道

– 离散无记忆信道（DMC)



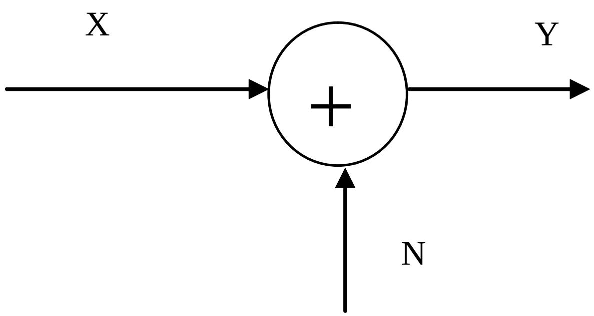
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{m} p(b_j \mid a_i) = 1, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

信道参数

有干扰无记忆信道

- 离散输入、连续输出信道



$$Y = X + N$$

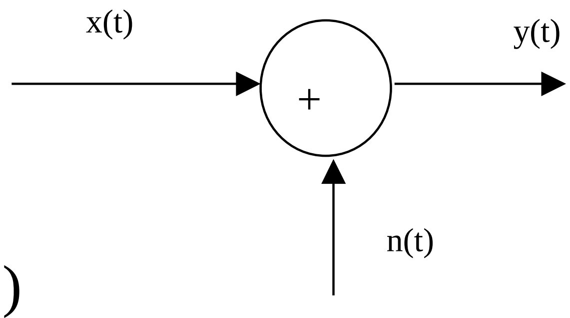
加性高斯白噪声 (AWGN) 信道：

$$p_Y(y/a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(y-a_i)^2/2\sigma^2}$$

信道参数

有干扰无记忆信道

– 波形信道



波形信道转化成多维连续信道，

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}/\mathbf{x}) = p_{\mathbf{Y}}(y_1,\cdots,y_L/x_1,\cdots,x_L)$$

噪声与信号通常相互独立，

$$p_Y(y/x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} = \frac{p_{X,n}(x,n)}{p_X(x)} = p_n(n)$$

$$H_c(Y/X) = H_c(n)$$

条件熵$H_C(Y/X)$是由于噪声引起的，它等于噪声信源的熵$H_C(n)$，所以称条件熵为**噪声熵**

3.1.3 信道容量的定义

信息传输率：信道中平均每个符号所能传送的信息量，R=$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)$ 比特/符号

信息传输速率：信道在单位时间内平均传输的信息量，$R_t=I(X;Y)/t$ 比特/秒

信道容量：信道所能传送的最大信息量。

比特/符号（bits/symbol或bits/channel use）

$$I(X;Y)=I\left[p(x_i),p(y_j/x_i)\right] \qquad C=\max_{p(x_i)} I(X;Y)$$

在$p(y/x)$给定时，$I(X;Y)$是关于$p(x)$的上凸函数。

信道容量要解决的问题：C=?　$p(x_i)$=?

对于时变信道参数的信道，由于其信道参数随时间变化，不能用固定值表示，其信道容量也不再是一个固定的量，而是一个随机变量。

遍历容量(Ergodic Capacity)：对随机信道容量的所有可能的值进行平均的结果，即

$$C_{avg} = E_H(C)$$

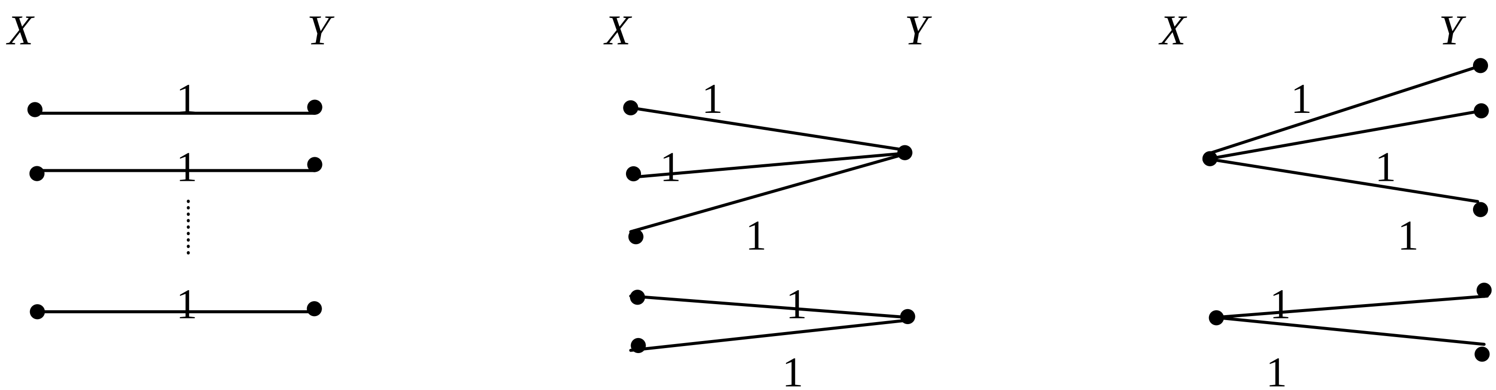
中断容量（Outage Capacity）：当信道瞬时容量C_{inst}小于用户要求的速率时，信道就会发生中断事件，这个事件的概率称为中断概率P_{outage}。这个用户要求的速率就定义为对应于该中断概率P_{outage}的中断容量C_{outage}，即

$$P(C_{inst} < C_{outage}) = P_{outage}$$

$$P_{outage} \downarrow \longrightarrow C_{outage} \downarrow$$

3.2离散单个符号信道及其容量

3.2.1 无干扰离散信道



(a) 无噪无损信道　　(b) 无噪有损信道　　(c) 有噪无损信道

X、Y一一对应

C＝log n

多个输入变成一个输出

C＝max$H(Y)$

一个输入对应多个输出

C＝max$H(X)$

3.2.2 对称DMC信道

- 输入对称

  如果转移概率矩阵**P**的每一行都是第一行的置换(包含同样元素)，称该矩阵是输入对称

- 输出对称

  如果转移概率矩阵**P**的每一列都是第一列的置换(包含同样元素)，称该矩阵是输出对称

- **对称的DMC信道**

  如果输入、输出都对称

对称DMC信道例子

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- 输入对称

$$\sum_j p(b_j/a_i)\log p(b_j/a_i) \text{与} i \text{无关}$$

$$H(Y/X) = -\sum_i p(a_i)\sum_j p(b_j/a_i)\log p(b_j/a_i)$$
$$= -\sum_j p(b_j/a_i)\log p(b_j/a_i) = H(Y/x_i)$$

对称DMC的信道容量

$$C=\max_{p(a_i)} I(X;Y)$$

$$=\max_{p(a_i)}[H(Y)-H(Y|X)]$$

$$=\max_{p(a_i)} H(Y)-H(Y/X)$$

$$C=\log m-H(Y|a_i)=\log m+\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\log p_{ij}$$

$$\max_{p(a_i)} H(Y) \underset{=}{?} \log m \qquad\qquad p(a_i)=?$$

- 如果信道输入符号等概分布$p(a_i)$＝1/n

$$p(b_j)=\sum_i p(a_i)p(b_j/a_i)=\frac{1}{n}\sum_i p(b_j/a_i)$$

- 当转移概率矩阵列对称时，信道输出符号$p(b_j)$等概分布——输出对称

例1. 求信道容量

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$C=\log_2 4-H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6})=0.082bit/\text{符号}$$

$$p(a_1)=p(a_2)=1/2$$

Eg. 求信道容量

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \dfrac{\varepsilon}{n-1} & \cdots & \dfrac{\varepsilon}{n-1} \\ \dfrac{\varepsilon}{n-1} & 1-\varepsilon & \cdots & \dfrac{\varepsilon}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\varepsilon}{n-1} & \dfrac{\varepsilon}{n-1} & \cdots & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

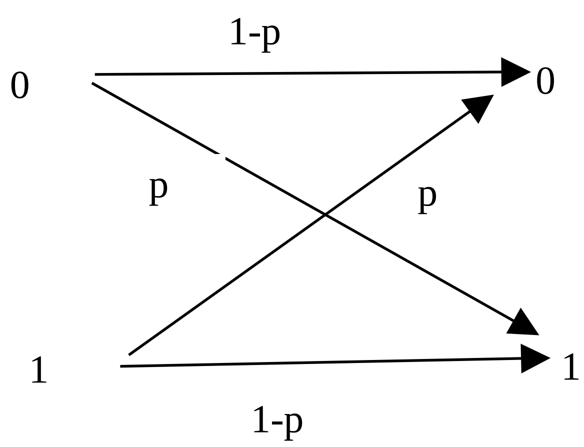
$$C=\log n-H(1-\varepsilon,\frac{\varepsilon}{n-1},\cdots,\frac{\varepsilon}{n-1})$$

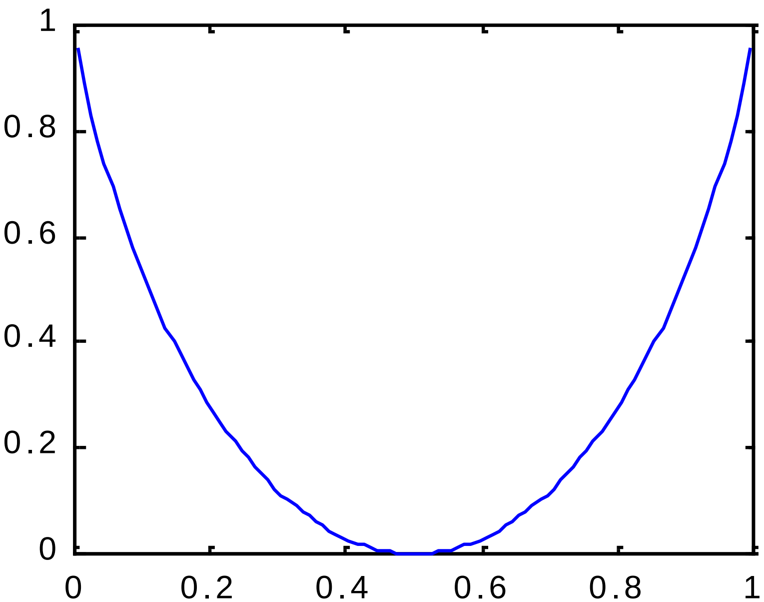
信道输入符号和输出符号的个数相同，都为n，且正确的传输概率为1－ε，错误概率ε被对称地均分给n-1个输出符号，此信道称为强对称信道或均匀信道，是对称离散信道的一个特例

例2. 二进制对称信道容量

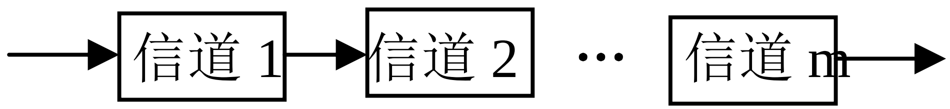
$$C = 1 - [-p\log p - (1-p)\log(1-p)] = 1 - H(p)$$

$$p(x=0) = p(x=1) = 1/2$$





串联信道



$$C(1,2)=\max I(X;Z)$$

$$C(1,2,3)=\max I(X;W)\ldots$$

串接的信道越多，其信道容量可能会越小，当串接信道数无限大时，信道容量就有可能趋于零。

Eg.设有两个离散BSC信道串接，两个BSC信道的转移矩阵如下，求信道容量

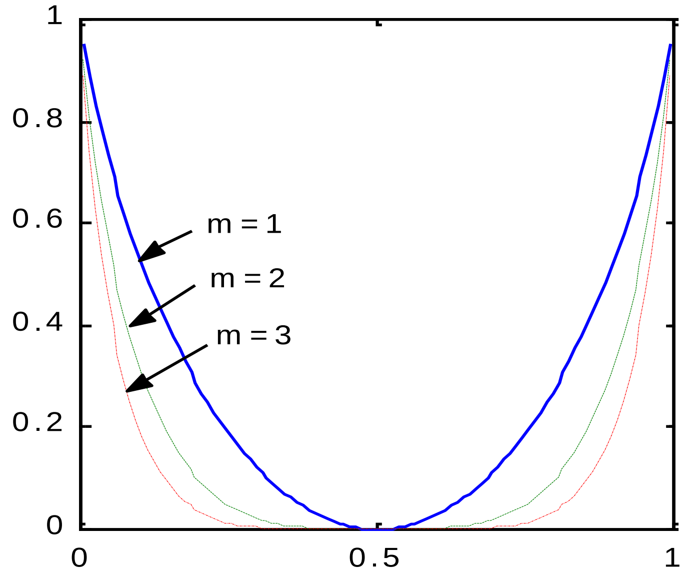
$$\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(1-\varepsilon)^2+\varepsilon^2 & 2\varepsilon(1-\varepsilon) \\ 2\varepsilon(1-\varepsilon) & (1-\varepsilon)^2+\varepsilon^2\end{bmatrix}$$

信道容量

$I(X;Y)=1-H(\varepsilon)$，$I(X;Z)=1-H[2\varepsilon(1-\varepsilon)]$



3.2离散单个符号信道及其容量

3.2.3 准对称DMC信道

如果转移概率矩阵**P**是输入对称而输出不对称，即转移概率矩阵**P**的每一行都包含同样的元素而各列的元素可以不同，则称该信道是**准对称**DMC信道

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

3.2.3 准对称DMC信道

输入对称

$$C = \max_{p(a_i)} I(X;Y) = \max_{p(a_i)} H(Y) - H(Y/x_i)$$

$$\max_{p(a_i)} H(Y) = \max_{p(a_i)} f[p(b_j)] = \max_{p(a_i)} f[p(a_i)]$$

$$p(b_j) = \sum_i p(a_i)p(b_j/a_i)$$

Eg. 求信道容量

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{bmatrix}$$

方法一：

信道的输入符号有两个，可设$p(a_1)=\alpha$，$p(a_2)=1-\alpha$，

信道的输出符号有三个，用b_1、b_2、b_3表示，$p(b_j)=\sum_i p(a_i)p(b_j/a_i)$

$$\begin{cases}p(b_1)=0.5\alpha+0.3(1-\alpha)=0.3+0.2\alpha\\ p(b_2)=0.3\alpha+0.5(1-\alpha)=0.5-0.2\alpha\\ p(b_3)=0.2\alpha+0.2(1-\alpha)=0.2\end{cases}$$

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$=-\sum_j p(b_j)\ln p(b_j)+\sum_i p(a_i)\sum_j p(b_j/a_i)\ln p(b_j/a_i)$$

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial\alpha}=0$$

$$C=\max I(X;Y)=0.036bit/\text{符号}$$

$p(a_1)=p(a_2)=1/2$

方法二

当$p(a_1)=p(a_2)=1/2$时，$p(b_1)=p(b_2)=(1-0.2)/2=0.4$

$C=H(Y)-H(Y/X)=0.036bit/$符号

方法三

将转移概率矩阵划分成若干个互不相交的对称的子集

$$C=\log n-H(p_1',p_2',\cdots p_s')-\sum_{k=1}^{r}N_k\log M_k$$

n为输入符号集个数；p_1'，p_2'，…p_s'是转移概率矩阵**P**中一行的元素，即$H(p_1', p_2', \ldots p_s')=H(Y/a_i)$；$N_k$是第k个子矩阵中行元素之和，$M_k$是第k个子矩阵中列元素之和，r是互不相交的子集个数。

方法三

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0.5 & 0.3\\ 0.3 & 0.5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.2\\ 0.2\end{bmatrix}$$

$$C=\log_2 2-H(0.5,0.3,0.2)-0.8\log_2 0.8$$
$$-0.2\log_2 0.4=0.036bit/\text{符号}$$

$$p(a_1)=p(a_2)=1/2$$

Eg. 求信道容量 $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
C = \log_2 2 - H(1/3,1/3,1/6,1/6) \\
-(1/3+1/6)\log_2(1/3+1/6) \\
-1/3\log_2(1/3+1/3)-1/6\log_2(1/6+1/6) \\
=0.041 bit/\text{符号}
\end{aligned}
$$

3.2.4 一般DMC信道

一般地说，为使$I(X;Y)$ 最大化以便求取DMC容量，输入符号概率集$\{p(a_i)\}$必须满足的充分和必要条件是：

$$I(a_i;Y) = C \quad \text{对于所有满足}p(a_i) > 0\text{条件的}I$$
$$I(a_i;Y) \le C \quad \text{对于所有满足}p(a_i) = 0\text{条件的}I$$

当信道平均互信息达到信道容量时，输入符号概率集$\{p(a_i)\}$中每一个符号a_i对输出端Y提供相同的互信息，只是概率为零的符号除外。

$$C = \max_{p(a_i)} I(X;Y)$$

$$I(X;Y) = \sum_i p(a_i) I(a_i;Y)$$

$$I(a_i;Y) = \sum_j p(b_j / a_i) \log \frac{p(a_i / b_j)}{p(a_i)}$$

上述结论只给出了达到信道容量C时输入符号概率$p(a_i)$分布的充要条件，并未给出具体值，所以C没有具体可求的公式。一般情况下，最佳分布不一定是唯一的，只须满足该结论，并使互信息最大即可。

3.3离散序列信道及其容量

离散序列信道

$$\boldsymbol{p}(Y/X)$$

$$X \longrightarrow \boxed{\text{信道}} \longrightarrow Y$$

$\boldsymbol{X}=(X_1X_2\ldots X_L)$ $\boldsymbol{Y}=(Y_1Y_2\ldots Y_L)$

$X_l\in\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ $\mathrm{Y}_l\in\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$

3.3离散序列信道及其容量

离散无记忆序列信道

$$p(\mathbf{Y}/\mathbf{X}) = p(Y_1 \cdots Y_L / X_1 \cdots X_L) = \prod_{l=1}^{L} p(Y_l / X_l)$$

1

进一步信道是平稳的 $p(\mathbf{Y}/\mathbf{X}) = p^L(y/x)$

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = H(X^L) - H(X^L/Y^L) = \sum p(\mathbf{XY}) \log \frac{p(\mathbf{X}/\mathbf{Y})}{p(\mathbf{X})}$$

$$= H(Y^L) - H(Y^L/X^L) = \sum p(\mathbf{XY}) \log \frac{p(\mathbf{Y}/\mathbf{X})}{p(\mathbf{Y})}$$

- 如果信道无记忆 $I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \le \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$
- 如果输入矢量***X***中的各个分量相互独立

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \ge \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$$

- 当信源、信道均无记忆时

$$C_L = \max_{P_{\mathbf{X}}} I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = \max_{P_{\mathbf{X}}} \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$$

$$= \sum_{l=1}^{L} \max_{P_X} I(X_l;Y_l) = \sum_{l=1}^{L} C(l)$$

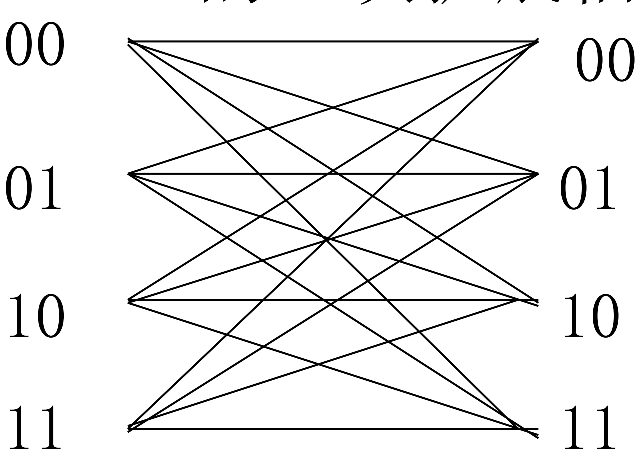
- 当信道平稳时$C_L=LC_1$，一般情况下，$I(X;Y) \le LC_1$

扩展信道

如果对离散单符号信道进行L次扩展，就形成了L次离散无记忆序列信道

1

BSC的二次扩展信道



$X\in\{00, 01, 10, 11\}$， $Y\in\{00, 01, 10, 11\}$，

二次扩展无记忆信道的序列转移概率

$p(00/00)=p(0/0)\,p(0/0)=(1-p)^2$，

$p(01/00)=p(0/0)\,p(1/0)=p(1-p)$，

$p(10/00)=p(1/0)\,p(0/0)=p(1-p)$，

$p(11/00)=p(1/0)\,p(1/0)=p^2$

扩展信道

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}(1-p)^2 & p(1-p) & p(1-p) & p^2\\ p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 & p(1-p)\\ p(1-p) & p^2 & (1-p)^2 & p(1-p)\\ p^2 & p(1-p) & p(1-p) & (1-p)^2\end{bmatrix}$$

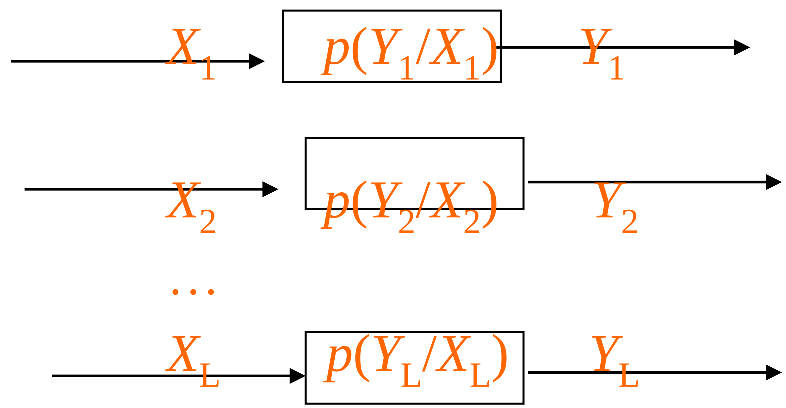
$$C_2=\log_2 4-H[(1-p)^2,p(1-p),p(1-p),p^2]$$

若p＝0.1，则C_2＝2－0.938＝1.062比特/序列

独立并联信道

序列的转移概率

$$p(Y_1Y_2\ldots Y_L/X_1X_2\ldots X_L)=p(Y_1/X_1)\,p(Y_2/X_2)\ldots p(Y_L/X_L)$$



- 相当于无记忆扩展信道

$$I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})\le\sum_{l=1}^{L}I(X_l;Y_l)\qquad C_{12\cdots L}=\max I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})\le\sum_{l=1}^{L}C_l$$

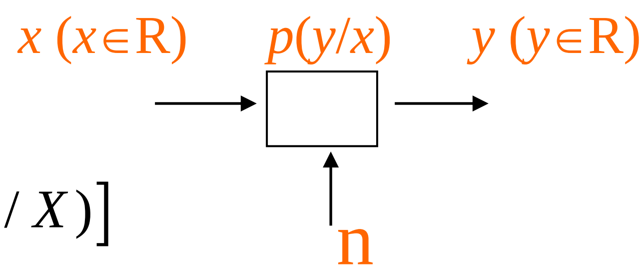
- 只有当输入相互独立时取等号。

3.4 连续信道及其容量

3. 4. 1 连续单符号加性信道

- 平均互信息为$I(X;Y)=H_C(Y)-H_C(Y/X)$

- 信道容量



$$C=\max_{p_X(x)} I(X;Y)=\max_{p_X(x)}\left[H_C(Y)-H_C(Y/X)\right]$$

$$C=\max_{p_X(x)} H_C(Y)-H_C(n)$$

$$=\max_{p_X(x)} H_C(Y)-\frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2$$

$y=x+n$

$p_n(n)=N(0,\sigma^2)$

- 噪声是均值为零、方差为σ^2的加性高斯噪声

$p_n(n)＝N(0, \sigma^2)$，当 $p_Y(y)＝N(0,P_o)$时取得$\max H_C(Y)$，

$\therefore\ p_X(x)＝N(0,P_s)$，$P_o=P_s+\sigma^2$

$$C=\frac{1}{2}\log 2\pi e P_o-\frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2=\frac{1}{2}\log\frac{P_o}{\sigma^2}=\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_s}{\sigma^2})$$

$C＝1/2\ \log(1+SNR)$

信道输入*X*是均值为零、方差为P_S的高斯分布随机变量时，信息传输率达到最大值。

- 若是加性的，可以求出信道容量的上下界

$$\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_s}{\sigma^2})\le C\le\frac{1}{2}\log 2\pi e P_o-H_C(n)$$

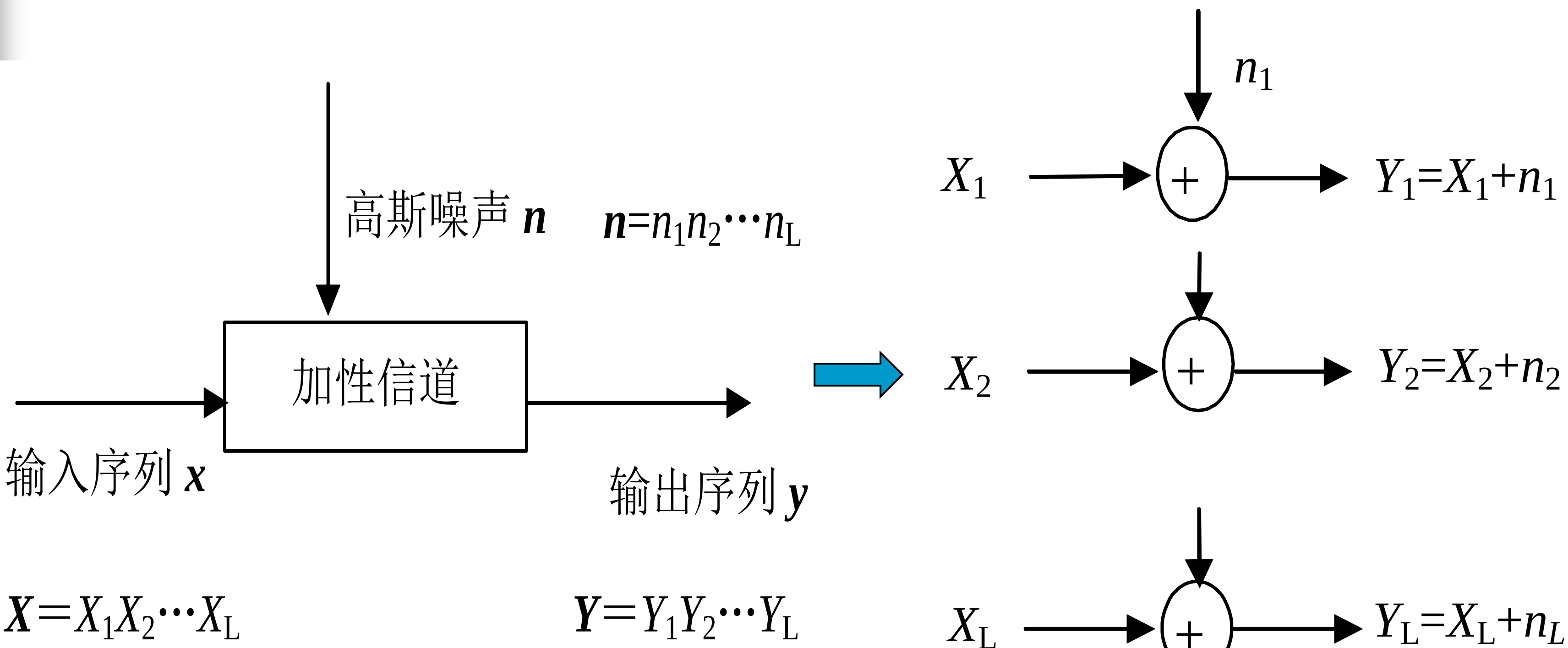
考虑信道衰减时： $y=Hx+n$

输出端的功率 $|H|^2P_S+\sigma^2$

$C=1/2\log(1+|H|^2\,SNR)$

3.4.2 多维无记忆加性连续信道

- 信道输入随机序列$\boldsymbol{X}=X_1X_2\ldots X_L$，输出随机序列$\boldsymbol{Y}=Y_1Y_2\ldots Y_L$，加性信道有$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$，其中$\boldsymbol{n}=n_1n_2\ldots n_L$是均值为零的高斯噪声



3.4.2 多维无记忆加性连续信道

连续单符多维无记忆高斯加性信道就可等价成L个独立的并联高斯加性信道。

$$I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \le \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l) = \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_{s_l}}{\sigma_l^{\,2}})$$

$$C = \max_{p(\boldsymbol{x})} I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) = \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_{s_l}}{\sigma_l^{\,2}})$$ 比特/L维自由度

因此当且仅当输入随机矢量$\boldsymbol{X}$中各分量统计独立，且是均值为零、方差为$\mathbf{P}_{sl}$的高斯变量时，才能达到此信道容量。

3.4.2 多维无记忆加性连续信道

讨论

- 噪声均值为零、方差相同

$$C=\frac{L}{2}\log(1+\frac{P_s}{\sigma^2})$$

- 均值为零、方差不同，总平均功率受限P，功率合理分配。

?

讨论

$$E\left[\sum_{l=1}^{L} X_l^{\,2}\right] = \sum_{l=1}^{L} E\left[X_l^{\,2}\right] = \sum_{l=1}^{L} P_{S_l} = P$$

$$f(P_{S_1}, P_{S_2}, \cdots P_{S_L}) = \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_{S_l}}{\sigma_l^{\,2}}\right) + \lambda\left(\sum_{l=1}^{L} P_{S_l} - P\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f(P_{S_1}, P_{S_2}, \cdots P_{S_L})}{\partial P_{S_l}} = 0, l = 1, 2, \cdots, L$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{P_{S_l} + \sigma_l^{\,2}} + \lambda = 0, l = 1, 2, \cdots, L \Rightarrow P_{S_l} + \sigma_l^{\,2} = -\frac{1}{2\lambda}, l = 1, 2, \cdots, L$$

- 各个时刻的信道输出功率相等设为常数v

$$v = \frac{P + \sum_{l} \sigma_l^{\,2}}{L} \Rightarrow P_{S_l} = v - \sigma_l^{\,2} = \frac{P + \sum_{i=1}^{L} \sigma_i^{\,2}}{L} - \sigma_l^{\,2}$$

讨论

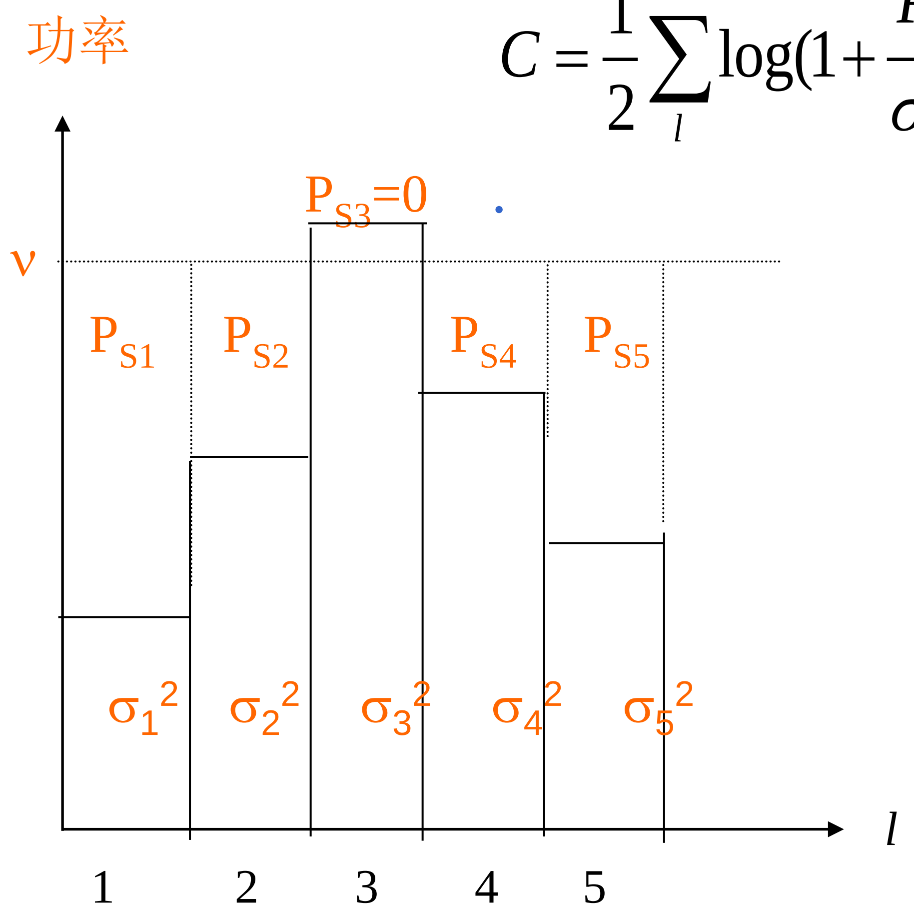
- 均值为零、方差不同，总平均功率受限P，功率合理分配。

$$P_{S_l} = \nu - \sigma_l^2 = \frac{P + \sum_{i=1}^{L} \sigma_i^2}{L} - \sigma_l^2$$

$$C = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{L} \log \frac{P + \sum_{i=1}^{L} \sigma_i^2}{L \sigma_l^2}$$

注水法(water-filling)功率分配

$$C = \frac{1}{2}\sum_{l}\log(1+\frac{P_{S_l}}{\sigma_l^{2}}), \quad \sum_{l} P_{S_l} = P, \quad P_{S_l} \geq 0$$



例 有一并联高斯加性信道，各子信道噪声方差为

$\sigma_1^{\ 2}=0.1$，$\sigma_2^{\ 2}=0.2$，$\sigma_3^{\ 2}=0.3$，$\sigma_4^{\ 2}=0.4$，$\sigma_5^{\ 2}=0.5$，$\sigma_6^{\ 2}=0.6$，$\sigma_7^{\ 2}=0.7$，$\sigma_8^{\ 2}=0.8$，$\sigma_9^{\ 2}=0.9$，$\sigma_{10}^{\ 2}=1.0$

(1)P=5 各子信道分配的功率分别是：0.95，0.85，0.75，0.65，0.55，0.45，0.35，0.25，0.15，0.05。总的信道容量C＝6.1比特/10维自由度。

$$\nu=\frac{P+\sum_l \sigma_l^{\ 2}}{L}=1.05$$

(2)P=3？

3.4.3 限时限频限功率加性高斯白噪声信道

波形信道的平均互信息为

$$I[x(t);y(t)] = \lim_{L\to\infty} I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})$$

信道容量为

$$C_t = \max_{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}\left[\lim_{t_B\to\infty}\frac{1}{t_B}I(\mathbf{X};\mathbf{Y})\right] bit/s$$

3.4.3 限时限频限功率加性高斯白噪声信道

- 限时限频(W)高斯白噪声过程可分解$L=2Wt_B$维统计独立的随机序列

$$C=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\log(1+\frac{P_{S_l}}{\sigma_l^{\ 2}})$$

其中：

$$\sigma_l^{\ 2}=P_n=N_0\cdot W\cdot t_B/2Wt_B=\frac{N_0}{2}$$

$$P_{S_l}=P_S t_B/2Wt_B=\frac{P_S}{2W}$$

3.4.3 限时限频限功率加性高斯白噪声信道

信道的容量

$$C=\frac{L}{2}\log(1+\frac{P_S}{2W}/\frac{N_0}{2})=\frac{L}{2}\log(1+\frac{P_S}{N_0W})=Wt_B\log(1+\frac{P_S}{N_0W})$$

单位时间的信道容量

$$C_t=\lim_{t_B\to\infty}\frac{C}{t_B}=W\log(1+\frac{P_S}{N_0W})bit/s$$

$$=W\log(1+SNR)$$

香农公式

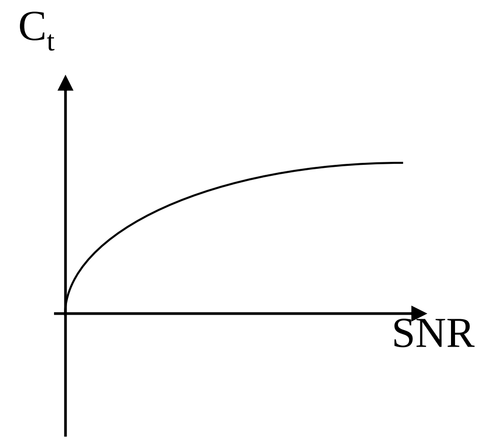
输入信号{x(t)}满足均值为零、平均功率P_s的高斯白噪声的特性

讨论 $C_t = W\log(1+SNR)$ 比特/秒

带宽W一定时，信噪比SNR与信道容量C_t 成对数关系，SNR增大，C_t 就增大，但增大到一定程度后就趋于缓慢。

增加输入信号功率有助于容量的增大，但该方法是有限的；

降低噪声功率也是有用的，当 $N_0 \to 0$时，$C_t \to \infty$，即无噪声信道的容量为无穷大。



信道容量与信噪比的关系

讨论

- 当输入信号功率P_S一定，增加信道带宽，可以增加容量

$$C_\infty = \lim_{W\to\infty} C_t = \lim_{W\to\infty} \frac{P_S}{N_0}\frac{WN_0}{P_S}\log(1+\frac{P_S}{N_0 W})$$

$$C_\infty = 1bit/s$$

$$= \lim_{W\to\infty} \frac{P_S}{N_0}\log(1+x)^{1/x}$$

$\ln(1+x) \approx x$

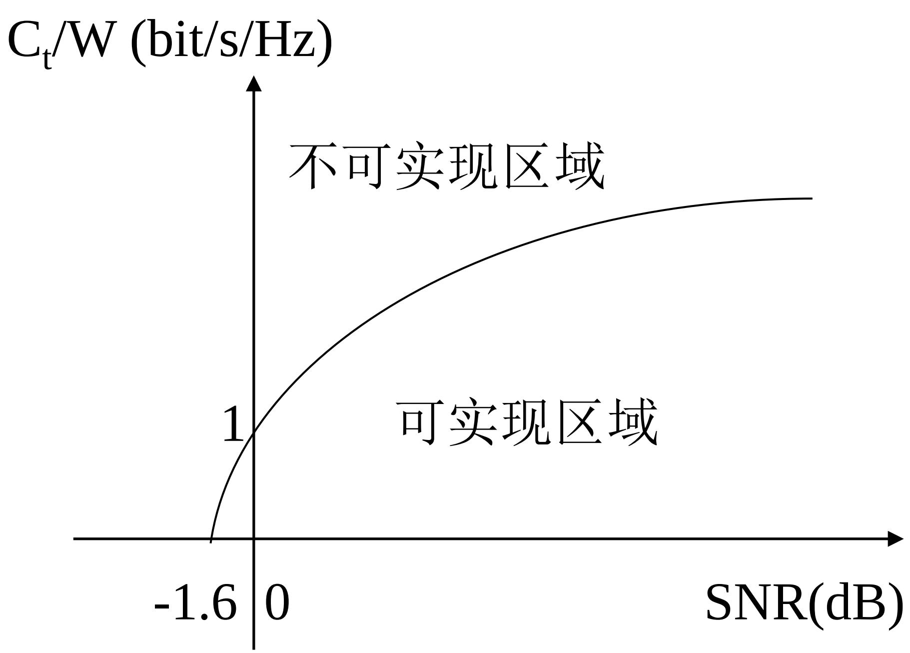
$$= \lim_{W\to\infty} \frac{P_S}{N_0 \ln 2}\ln(1+x)^{1/x} = \frac{P_S}{N_0 \ln 2} bit/秒$$

P_S/N_0＝ln 2＝-1.6dB，即当带宽不受限制时，传送1比特信息，信噪比最低只需-1.6dB

（香农限）

讨论

$C_t/W = \log(1+SNR)$比特/秒/Hz，单位频带的信息传输速率——频带利用率，该值越大，信道就利用得越充分。



$C_t = W \log(1+SNR)$ 比特/秒

- C_t一定时，带宽W增大，信噪比SNR可降低，即两者是可以互换的。
- 若有较大的传输带宽，则在保持信号功率不变的情况下，可容许较大的噪声，即系统的抗噪声能力提高。
- 无线通信中的扩频系统就是利用了这个原理，将所需传送的信号扩频，使之远远大于原始信号带宽，以增强抗干扰的能力。

Eg电话信道的带宽为3.3kHz，若信噪功率比为20dB，即SNR＝100，求信道的容量。

$$C_t = W\log(1+SNR) = 3.3\log(1+100) = 22kb/s$$

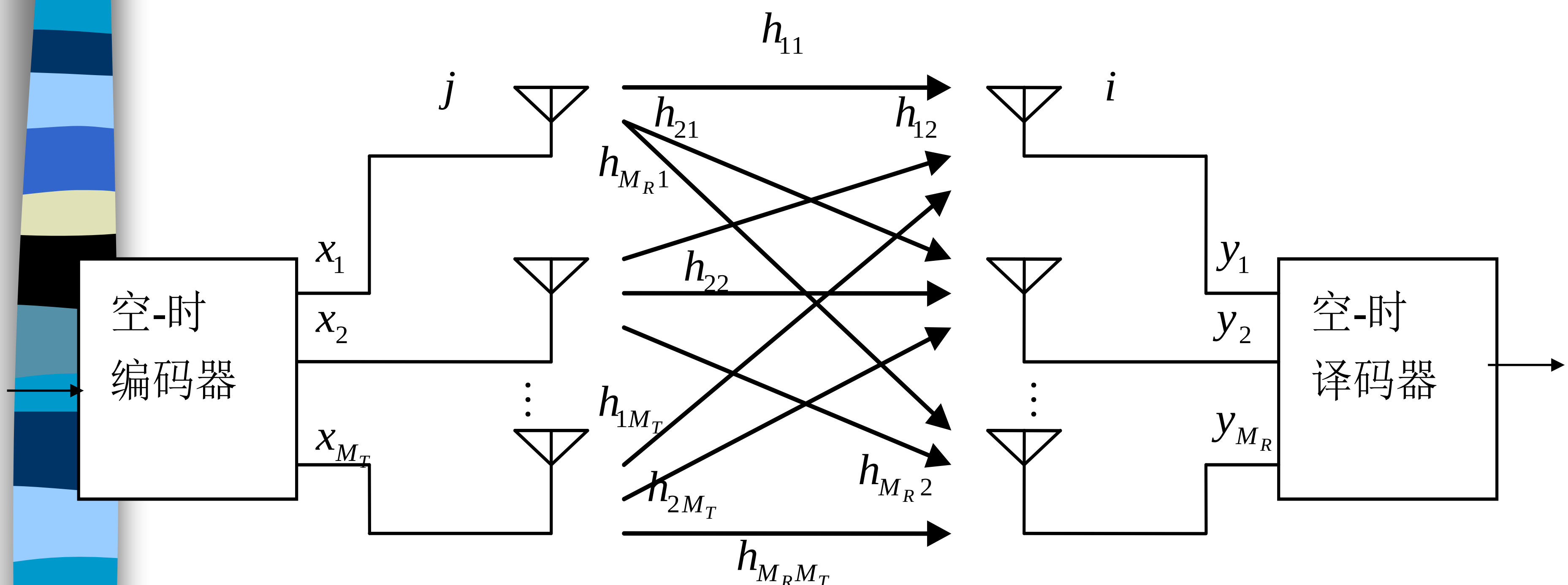
3.5 MIMO信道及其容量

3.5.1 MIMO信道模型

3.5.2 MIMO信道容量

3.5.1 MIMO信道模型

点到点**MIMO系统由M_T根发送天线和M_R根接收天线以及相应的空-时编码器和空-时译码器组成。**



$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n} \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{M_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1M_T} \\ \vdots & h_{ij} & \vdots \\ h_{M_R 1} & \cdots & h_{M_R M_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{M_T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{M_R} \end{bmatrix}$$

3.5.1 MIMO信道模型

信道矩阵： H为复矩阵，h_{ij}表示第j根发送天线至第i根接收天线的信道衰落系数。

归一化约束：每一根天线的接收功率均等于总的发送功率

$$\sum_{j=1}^{M_T} \left| h_{ij} \right|^2 = M_T \ , \ i = 1, 2, \cdots M_R$$

3.5.1 MIMO信道模型

发送信号：第j根天线发送x_j为零均值i.i.d高斯变量，发送信号的协方差矩阵为：

$$R_{xx} = E\{xx^H\}$$

总的发送功率约束为 $P_T = tr(R_{xx})$

若每根天线发送相等的信号功率P_T/M_T，

$$R_{xx} = \frac{P_T}{M_T} I_{M_T}$$

3.5.1 MIMO信道模型

接收端的**噪声**：各分量为独立的零均值高斯变量，具有独立的和相等方差的实部和虚部。

噪声协方差矩阵 $R_{nn} = E\{nn^H\}$

若n的分量间不相关，$R_{nn} = \sigma^2 I_{M_R}$

每根接收天线具有相等的噪声功率σ^2。

每根接收天线输出端的信号功率为P_T，故接收功率信噪比为

$$\rho = \frac{P_T}{\sigma^2}$$

3.5.2 MIMO信道容量

接收端已知信道转移矩阵***H***，其值固定。

- 如果发送端未知信道状态信息（CSI），最优方案是等功率发送：

$$C = \log\det\left[\boldsymbol{I}_N + \frac{\rho}{M}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\dagger}\right]$$

- 如果发送端已知信道状态信息，则可以运用注水法将总发送功率分配到各个发送天线，然后利用容量公式计算。

接收端已知信道状态信息，但信道转移矩阵***H***是复随机变量，

$$C = E_H\{\log[\det(I_{M_R} + \frac{P_T}{\sigma^2 M_T} HH^H)]\}$$

$$= E_H\{\log[\det(I_{M_R} + \frac{\rho}{M_T} HH^H)]\}$$

当M很大时，可利用大数定理

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\dagger} \xrightarrow{M\to\infty} M\boldsymbol{I}_N$$

$$C \to N\log\left(1+\rho\right)$$

$$\boldsymbol{H}^{\dagger}\boldsymbol{H} \xrightarrow{N\to\infty} N\boldsymbol{I}_M$$

$$C \to M\log\left(1+\frac{N}{M}\rho\right)$$

3.6 信源与信道的匹配

信源发出的消息（符号）要通过信道来传输，因此要求信源的输出与信道的输入匹配。

– 符号匹配：信源输出的符号必须是信道能够传送的符号；

– 信息匹配：当信源与信道连接时，信息传输率达到信道容量，则称信源与信道达到匹配。

信道剩余度

信道绝对剩余度 = C－I(X;Y)

$$\text{信道相对剩余度} = 1 - \frac{I(X;Y)}{C}$$

信道剩余度

剩余度大：信源与信道匹配程度低，信道的信息传递能力未得到充分利用；

剩余度小：信源与信道匹配程度高，信道的信息传递能力得到较充分利用；

剩余度为零，说明信源与信道（信息）完全匹配，即信源概率分布符合最佳输入分布。

一般来说，实际信源的概率分布未必就是信道的最佳输入分布，所以$I(X;Y)\leq C$，剩余度不为零。

第3章复习

信道参数：用转移概率表示信道

信道模型

- 二进制离散信道BSC
- 离散无记忆信道DMC
- 波形信道

信道容量

$$C = \max_{P(x_i)} I(X;Y)$$

信道上每传送一个符号(每使用一次信道)所能携带的比特数，即比特/信道符号(bits/symbol或bits/channel use)。

如果已知信道符号传送周期是T秒，此时C_t=C /T，比特/秒(bits/s)

DMC信道的容量

对称DMC信道的容量：当信道输入符号等概分布时，可达到其信道容量

$$C=\log m-H(Y\mid x_i)=\log m+\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\log p_{ij}$$

BSC信道的容量：m＝2

准对称信道的容量

连续信道及其容量

连续单符号加性信道

C＝1/2 log(1+SNR) bit/sym

多维无记忆加性连续信道

$$C=\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_{s_l}}{\sigma_l^2})$$

- 噪声均值为零、方差不同，
- 总平均功率受限P，
- 用注水法分配功率。

限时限频限功率加性高斯白噪声信道

$$C_t=W\log(1+SNR)bit/s$$

带限波形信道的容量

条件：

- 信道带宽W受限
- 噪声为加性高斯白噪声（均值为零，功率谱密度为N_0）
- 输入信号平均功率受限P_S
- 若输入信号是平均功率受限的高斯白噪声信号，可达信道容量

香农公式：$C = W\log(1+\frac{P}{WN_0}) = W\log(1+SNR)$

香农限：－1.6dB