第三次 3.27

填空题

1. 平行于 xoz 坐标面且经过点 $(2,-5,3)$ 的平面方程为______________。（$y+5=0$）

2. 点 $(2,1,1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离等于______________。（$\sqrt{3}$）

$\dfrac{|2+1-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

3. 将 xoy 坐标平面上的双曲线 $2x^2-y^2=19$ 绕 x 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为__________________。（$2x^2-y^2-z^2=19$）

4. 圆锥曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的半顶角等于______________。（$\dfrac{\pi}{4}$ 或 45°）

5. 曲线 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\\ z=0\end{cases}$ 的参数方程为___________________________。

$\Leftarrow \begin{cases}(x-1)^2+y^2=3\\ z=0\end{cases}$　　$\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\\ z=0\end{cases}$, $0\le\theta\le2\pi$

（将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$ 得 $(x-1)^2+y^2=3$，于是所求曲线方程为

$$\begin{cases}x-1=\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\\ z=0\end{cases},0\le\theta\le2\pi$$）

6. 螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\\ z=b\theta\end{cases}$ 在 xoy 坐标面上的投影曲线的直角坐标方程为__________________。

$H(x,y)=0$

（$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}$）　　$x^2+y^2=a^2$ ✓

选择题

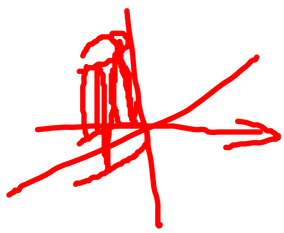
1. 直线 $\begin{cases}x-y+z=1\\ 2x+y+z=4\end{cases}$ 的参数方程为(　A　)

A. $\begin{cases}x=1-2t\\ y=1+t\\ z=1+3t\end{cases}$，　B. $\begin{cases}x=1-2t\\ y=-1+t\\ z=1+3t\end{cases}$，　C. $\begin{cases}x=1-2t\\ y=1-t\\ z=1+3t\end{cases}$，　D. $\begin{cases}x=1-2t\\ y=-1-t\\ z=1+3t\end{cases}$.

2. 下列结论错误的是（　B　）

$z=-2x^2-y^2$

A. $z+2x^2+y^2=0$ 表示椭圆抛物面；　B. $x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示双叶双曲面；



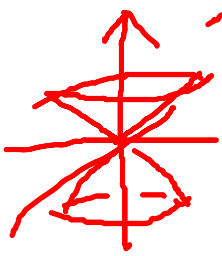
C. $x^2+y^2=(z-1)^2$ 表示圆锥面；　D. $y^2=5x$ 表示抛物柱面

$z=-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ ✓

$\tan\alpha$: $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

$z=1\pm\sqrt{x^2+y^2}$



解答题（写出求解过程）

1. 一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\vec{a}=(2,1,1)$ 和 $\vec{b}=(1,-1,0)$，求这个平面的方程。

解：取平面的法向量为 $\vec{a}\times\vec{b}=(2,1,1)\times(1,-1,0)=(\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix})=(1,1,-3)$，则平面方程为 $x-1+y-3(z+1)=0$ 或 $x+y-3z-4=0$。

2. 求母线平行于 y 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 的柱面方程。

解：将方程 $2x^2+y^2+z^2=16$ 和 $x^2+z^2-y^2=0$ 消去 y 得 $3x^2+2z^2=16$ 即得所求柱面方程。

法2:

交线方向向量

$\vec{s}=(1,0,2)\times(0,1,-3)=\left(\begin{vmatrix}0&2\\1&-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\-3&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\right)=(-2,3,1)$

取为L的方向向量

$L: \frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$

第四次 4.1 作业

1. 求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程

解：设直线方程为 $\frac{x}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z-4}{p}$。因所求直线与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 均平行，

故 $(m,n,p)\perp(1,0,2),(m,n,p)\perp(0,1,-3)$，从而得 $m+2p=0,n-3p=0$，得

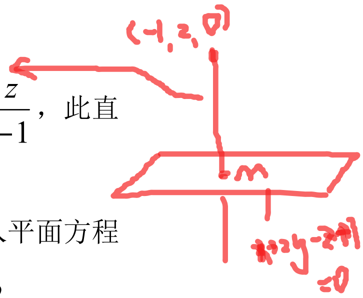
$m:n:p=-2p:3p:p=-2:3:1$，故所求直线方程为 $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$。

2. 求直线 $\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角。

解　平面的法向量 $\vec{n}=(1,-1,-1)$，直线 $\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$ 的方向向量

$\vec{S}=(1,1,3)\times(1,-1,-1)=\left(\begin{vmatrix}1&3\\-1&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(2,4,-2)$，故直线与平面的夹角 θ（取锐角或直角）的正弦 $\sin\theta=\left|\cos<\vec{S},\vec{n}>\right|=\frac{|\vec{S}\cdot\vec{n}|}{|\vec{S}||\vec{n}|}=\frac{|1\times2-1\times4+1\times2|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{24}}=0$，故 $\theta=0$。

3. **求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影。**



解：过点 $(-1,2,0)$ 且垂直于平面 $x+2y-z+1=0$ 的直线方程为 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$，此直线与平面的交点 M 即所求的投影。

将直线方程化为参数方程得 $x=-1+t,y=2+2t,z=-t,t\in(-\infty,+\infty)$，代入平面方程 $x+2y-z+1=0$ 得 $-1+t+2(2+2t)-(-t)+1=0$，**得点 M 对应的参数** $t=\frac{-2}{3}$，于是得点 M 的坐标为 $(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$。

4. 求过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的平面方程。

解　直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 化为一般方程为 $\begin{cases}\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}\\\frac{x-4}{5}=\frac{z}{1}\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}=0\\\frac{x-4}{5}-\frac{z}{1}=0\end{cases}$，于是设通过直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的平面束方程为 $\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\lambda(\frac{x-4}{5}-z)=0$。将点

$(3,1,-2)$代入平面束方程得$\frac{3-4}{5}-\frac{1+3}{2}+\lambda(\frac{3-4}{5}-(-2))=0$得$\lambda=\frac{11}{9}$，代入平面束方程得所求平面为$8(x-4)-9(y+3)-22z=0$，即$8x-9y-22z-59=0$。

5. 证明：直线$\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$与直线$\begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$平行。

证 直线$\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$的方向向量为

$$\vec{S}_1=(1,2,-1)\times(-2,1,1)=(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix})=(3,1,5);$$

直线$\begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$的方向向量为

$\to (3,1,5)$

$$\vec{S}_2=(3,6,-3)\times(2,-1,-1)=(\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix})=(-9,-3,-15),$$

因$\vec{S}_1$和$\vec{S}_2$的坐标对应成比例，故$\vec{S}_1 // \vec{S}_2$，即证两直线平行。