

动态规划

讲授者 王爱娟

1录

动态规划的思

动态规划基本 实例

最长递增子序 ^M

编辑距离问题

背包问题

传递闭包问题

完全最短路径问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

动态规划

讲授者 王爱娟

aijuan 321 @ fox mail.com

重庆理工大学 计算机科学与工程学院

August 22, 2024

目录

讲授者 王爱娟

■ 动态规划的思想

② 动态规划基本实例

• 币值最大问题

• 找零问题

3 最长递增子序列

4 编辑距离问题

5 背包问题

6 传递闭包问题

7 完全最短路径问题

8 矩阵链乘计算问题

動力态规划算法步骤小结



回顾:分治法

动态规划

讲授者 王爱娟

分治法的基本思想

- 将规模较大的问题分解为规模较小的问题
- 解决这些小问题
- 3 然后将小问题的解合并成为原来大问题的解

回顾: 分治法

动态规划

讲授者 王愛娟

动态规划的思

长例 发长递增子序 月

F包问题 专递闭包问题 C全最短路径

矩阵链乘计算

分治法的基本思想

● 将规模较大的问题分解为规模较小的问题

② 解决这些小问题

③ 然后将小问题的解合并成为原来大问题的解

分治法的基础

● 小问题比大问题更容易解决

② 将小问题的解组装成大问题的解比直接求解大问题成本 更低

❸ 小问题又可以按照同样的方法分解为更小的问题,便于将问题的规模进一步缩小



讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思 想

奶心风灯盛平 实例

最长递增子序 列

编辑距离问题

传递闭包问题

完全最短路径

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

问题: 大量重复的小问题

- 在分解原问题为小问题的过程中,有时会产生大量重复的小问题
- ② 对这些重复问题的计算,产生了巨大的时间开销。

动态规划 讲授者 王爱娟

问题:大量重复的小问题

● 在分解原问题为小问题的过程中,有时会产生大量重复 的小问题

2 对这些重复问题的计算,产生了巨大的时间开销。

例子: Fibonacci序列问题

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, 2\\ f(n-1) + f(n-2) & n \ge 3 \end{cases}$$

可用分治法解决该问题



问题:大量重复的小问题

- 在分解原问题为小问题的过程中,有时会产生大量重复的小问题对这些重复问题的计算,产生了巨大的时间开销。
- 例子: Fibonacci序列问题

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, 2\\ f(n-1) + f(n-2) & n \ge 3 \end{cases}$$

可用分治法解决该问题

- ① 规模为n 的问题f(n) 被划分为规模更小的两个子问题f(n-1) 和f(n-2)
- ② 求解这两个子问题的解之后,通过简单组合(加法操作),即可求原问题解
- 3 子问题可以采用同样地方式进一步缩减规模(直至为1或2)

动态规划 讲授者 王爱娟

目录 动态规划的思 _规

实例 最长递增于 列 编辑距离序

背包问题 传递闭包问题 完全最短路径 问题 矩阵链乘计算

问题 动态规划 步骤小结

基于分治法的Fibonacci序列算法伪代码

```
动态规划
```

讲授者 王爱娟

目录

心 动态规划基本

最长递增子序 TI

列

编辑距离问题

传递闭包问题

问题

问题

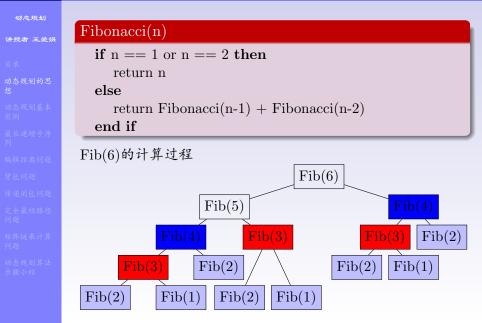
勿忘观划开。 步驟小结

```
Fibonacci(n)
```

if n == 1 or n == 2 then
 return n
else
 return Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2)
end if



基于分治法的Fibonacci序列算法伪代码





动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的E 想

动态规划基本 实例

最长递增子序 列

编辑距离问题

传递闭句 问题

完全最短路径

矩阵链乘计算

动态规划算法

步驟小结

Fib(6) 的问题

- Fib(4) 计算了两次, Fib(3) 计算了三次
- ② 采用分治法计算Fib(n), n 越大,分解出的相同子问题 就越多



动态规划

讲授者 王爱娟

动态规划的思

" 高辑距离问题 F句问题

传递闭包问题 完全最短路径

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

Fib(6) 的问题

- Fib(4) 计算了两次, Fib(3) 计算了三次
- ② 采用分治法计算Fib(n), n 越大,分解出的相同子问题 就越多

定义 (交叠子问题)

在划分的一组子问题中,存在若干或大量的雷同子问题,它 们称为交叠子问题



动态规划

讲授者 王爱娟

动态规划的思 想 Fib(6) 的问题

- Fib(4) 计算了两次, Fib(3) 计算了三次
- ② 采用分治法计算Fib(n), n 越大,分解出的相同子问题 就越多

定义 (交叠子问题)

在划分的一组子问题中,存在若干或大量的雷同子问题,它 们称为交叠子问题

解决办法:避免相同子问题的重复计算

- 对子问题只求解一次,并把它的解记录在表中。
- ② 当再次需要求解该子问题时,直接从记录表中查询获取 它的解

```
动态规划
讲授者 王爱娟
```

```
Fibonacci(n)

Fibonacci(1) = 1;

Fibonacci(2) = 2;

for i = 3 to n do

Fibonacci(i) = Fibonacci(i-1) + Fibonacci(i-2)

end for

return Fibonacci(n)
```



```
动皮块划
讲提者 王巫娟
目录
动态规划的思
动态规划基本
实例
最长通增于序
领
```

```
Fibonacci(n)

Fibonacci(1) = 1;

Fibonacci(2) = 2;

for i = 3 to n do

Fibonacci(i) = Fibonacci(i-1) + Fibonacci(i-2)

end for

return Fibonacci(n)
```



```
动态规划
讲授者 王爱娟
```

```
Fibonacci(n)

Fibonacci(1) = 1;

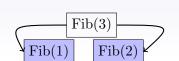
Fibonacci(2) = 2;

for i = 3 to n do

Fibonacci(i) = Fibonacci(i-1) + Fibonacci(i-2)

end for

return Fibonacci(n)
```





```
动态规划
讲授者 王爱娟
```

```
Fibonacci(n)

Fibonacci(1) = 1;

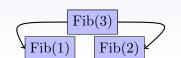
Fibonacci(2) = 2;

for i = 3 to n do

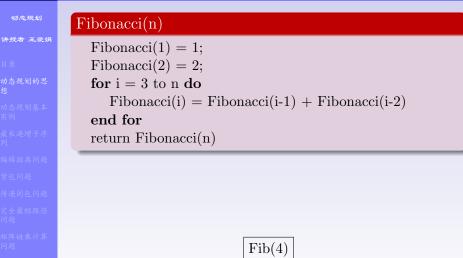
Fibonacci(i) = Fibonacci(i-1) + Fibonacci(i-2)

end for

return Fibonacci(n)
```







Fib(3)

Fib(2)



动态规划 讲授者 王爱娟

Fibonacci(n) Fibonacci(1) = 1;

Fibonacci(2) = 2;for i = 3 to n do

end for

return Fibonacci(n)

Fibonacci(i) = Fibonacci(i-1) + Fibonacci(i-2)

Fib(4)

Fib(3)Fib(2)



```
动态规划
讲授者 王爱娟
```

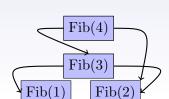
Fibonacci(1) = 1;Fibonacci(2) = 2;for i = 3 to n do

return Fibonacci(n)

Fibonacci(n)

end for

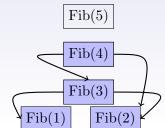
Fibonacci(i) = Fibonacci(i-1) + Fibonacci(i-2)







```
Fibonacci(n)
  Fibonacci(1) = 1;
  Fibonacci(2) = 2;
  for i = 3 to n do
    Fibonacci(i) = Fibonacci(i-1) + Fibonacci(i-2)
  end for
  return Fibonacci(n)
```





动态规划 讲授者 王爱娟

Fibonacci(1) = 1;

Fibonacci(2) = 2;

Fibonacci(n)

for i = 3 to n do Fibonacci(i) = Fibonacci(i-1) + Fibonacci(i-2)

return Fibonacci(n)

end for

Fib(5)

Fib(4)

Fib(3)

Fib(2)

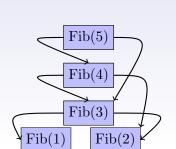




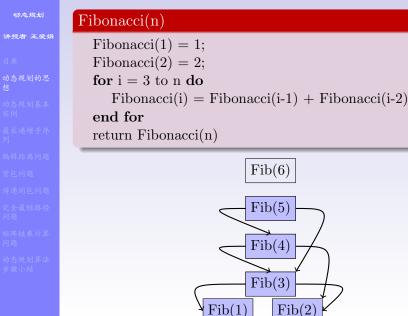
Fibonacci(1) = 1;Fibonacci(2) = 2;for i = 3 to n do Fibonacci(i) = Fibonacci(i-1) + Fibonacci(i-2)end for

return Fibonacci(n)

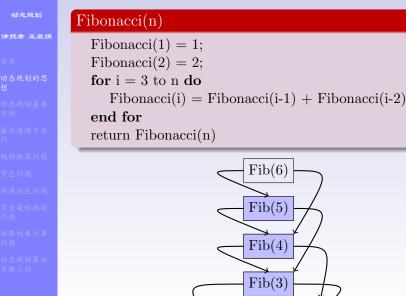
Fibonacci(n)





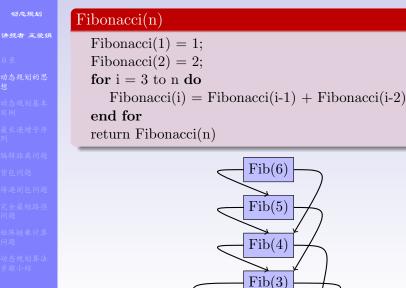






Fib(2)





Fib(2)



动态规划与分治思想的比较

动态规划

讲授者 王爱娟

动态规划的思 想

动态规划基本 实例

最长递增子序 列

背包问题 传递闭包问题

矩阵链乘计算

动态规划算法 步骤小结 动态规划与分治思想的比较

- ❶ 二者思想类似:将大问题划分为若干小问题
- ② 分治算法是采用自上而下的方式求值,导致了不止一次 的递归调用
- 动态规划法是采取自下向上的方式递推求值,并把中间 结果存储起来,避免重复运算,从而降低时间复杂度。

动态规划

讲授者 王受娟

动态规划与分治思想的比较

动态规划与分治思想的比较

- 二者思想类似:将大问题划分为若干小问题
- ② 分治算法是采用自上而下的方式求值,导致了不止一次 的递归调用
- 动态规划法是采取自下向上的方式递推求值,并把中间 结果存储起来,避免重复运算,从而降低时间复杂度。

动态规划的主要目的

动态规划提出来的主要目的是优化,即不只是解决一个问题,而是**以最优的方式解决这个问题**,或者说,针对特定问题寻求最优解。

动态规划的思 _铟

可观 巨阵链乘计算 可题 力态规划算法



动态规划

讲授者 王受娟

动态规划与分治思想的比较

- 动态规划与分治思想的比较
- 二者思想类似:将大问题划分为若干小问题
- ② 分治算法是采用自上而下的方式求值, 导致了不止一次 的递归调用
- ③ 动态规划法是采取自下向上的方式递推求值,并把中间 结果存储起来,避免重复运算,从而降低时间复杂度。

动态规划的主要目的

动态规划提出来的主要目的是优化. 即不只是解决一个问 题,而是以最优的方式解决这个问题,或者说,针对特定问 题寻求最优解。

发明者

动态规划由理查德.贝尔曼(Richard E. Bellman)于1957年在 其著作《动态规划(Dynamic Programming)》一书中提 出。



讲授者 王爱娟

问题

给定一排硬币 $(n \land)$, 其面值均为正整数 c_1, c_2, \cdots, c_n 。如 何选择硬币, 使得在其原位置互不相邻的条件下, 所选硬币 的总金额最大。

动态规划

讲授者 王爱娟

日本 动态规划的思想

のおれての本本 で例 予位最大问題 支本问題

取大边墙丁厅列 编辑距离问题

·)... 专递闭包问题 完全最短路径 问题

矩件链聚计算 问题 动态规划算法 问题

给定一排硬币 $(n \land)$,其面值均为正整数 c_1, c_2, \cdots, c_n 。如何选择硬币,使得在其原位置互不相邻的条件下,所选硬币的总金额最大。

实例

coin's $index(i)$	0	1	2	3	4	5	6
coin's value (c_i)	-	5	1	2	10	6	2
F	0	5					



动态规划

问题

给定一排硬币 $(n \land)$, 其面值均为正整数 c_1, c_2, \cdots, c_n 。如 何选择硬币, 使得在其原位置互不相邻的条件下, 所选硬币 的总金额最大。

实例

coin's $index(i)$	0	1	2	3	4	5	6
coin's value (c_i)	_	5	1	2	10	6	2
F	0	5					

选择方法的表示

假设F(n)表示在n个可选硬币下,所选硬币的最大金额、则

$$EF(n)$$
表示在 n 个可选硬币下,所选硬币的最大金额, $F(n) = egin{cases} \max\{c_n + F(n-2), F(n-1)\}, & n > 1 \\ c_1, & n = 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

讲授者 王爱娟

基于递归分治的币值最大化问题算法

```
动态规划
进损者 王爱娟
```

```
F(n)
```

```
数组C[1..n] 保存n个硬币的面值
if n=1 then
return C_1
else if n=0 then
return 0
end if
if n \geq 2 then
F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}
end if
return F(n)
```



基于递归分治的币值最大化问题算法

动态规划

讲授者 王愛娟

目录 胡知仏

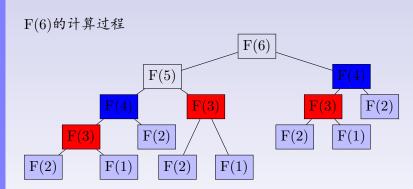
^想 动态规划基本 实例

编辑距离问题

传递闭包问题 完全最短路径

矩阵链乘计算 问题

动态规划算: 步骤小结





基于递归分治的币值最大化问题算法

动态规划

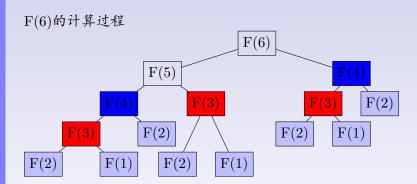
讲授者 王爱娟

目录 动态规划的思 想

力态规划基本 (例 P值最大问题

通闭包问题 ,全最短路径 题

动态规划算法 步骤小结



问题

存在大量的相同子问题, 导致大量的重复计算

动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的原

动态规划基本 实例

甲征取大門題 找寒问題

最长递增子序

24

扁秤距离问题

专递闭包问题

完全最短路径问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

coin's index(i)	0	1	2	3	4	5	6
$coin's value(c_i)$	-	5	1	2	10	6	2

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

自下而上求解:动态规划的币值最大问题求解方式

$$F(2) = \max\{C_2 + F(2-2), F(2-1)\}\$$

动态规划

讲授者 王爱娟

目录

想

实例
市值最大问题

・世界人内之 長寒问題 - - レ : 並 1治 ユ ド

编辑距离问题

F包问题 专递闭包问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

coin's $index(i)$	0	1	2	3	4	5	6
coin's value (c_i)	-	5	1	2	10	6	2

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

自下而上求解:动态规划的币值最大问题求解方式

$$F(2) = \max\{C_2 + F(2-2), F(2-1)\}\$$

= \text{max}\{1 + F(0), F(1)\}

动态规划

讲授者 王爱娟

coin's index(i)coin's value (c_i)

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

$$F(2) = \max\{C_2 + F(2-2), F(2-1)\}\$$

= \text{max}\{1 + F(0), F(1)\}\
= \text{max}\{1, 5\} = 5

动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思 想

动态规划基本 实例

表示问题 技术问题

长递增子序

*9*1)

編料距崗門翅

传递闭包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

$$F(2) = \max\{C_2 + F(2-2), F(2-1)\}$$

$$= \max\{1 + F(0), F(1)\}$$

$$= \max\{1, 5\} = 5$$

$$F(3) = \max\{C_3 + F(3-2), F(3-1)\}$$

动态规划

讲授者 王爱娟

目录

力态规划的思 ^艮

动态规划基本 实例

币值最大问题 技家问题

列纳特的市门特

宁包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

coin's index(i)	0	1	2	3	4	5	6
coin's value (c_i)	-	5	1	2	10	6	2

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

$$F(2) = \max\{C_2 + F(2-2), F(2-1)\}\$$

$$= \max\{1 + F(0), F(1)\}\$$

$$= \max\{1, 5\} = 5$$

$$F(3) = \max\{C_3 + F(3-2), F(3-1)\}\$$

$$= \max\{2 + F(1), F(2)\}\$$

动态规划 讲授者 王爱娟

日 求 动态规划的思

力态规划基本 只例 市值最大问题

F包问题 专递闭包问题

TQ 矩阵链乘计算 可题

动态规划算法 步骤小结

coin's $index(i)$	0	1	2	3	4	5	6
coin's value (c_i)	ı	5	1	2	10	6	2

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

$$F(2) = \max\{C_2 + F(2-2), F(2-1)\}\$$

$$= \max\{1 + F(0), F(1)\}\$$

$$= \max\{1, 5\} = 5$$

$$F(3) = \max\{C_3 + F(3-2), F(3-1)\}\$$

$$= \max\{2 + F(1), F(2)\}\$$

$$= \max\{7, 5\} = 7$$

动态规划 讲授者 王爱娟

目录 动态规划的思

动态规划基本 实例

美零问题 L K : : : Liú · Z · ric

取 不 迎 岩 丁 / F 列

局鲜距离问题 F白 问题

步递闭包问题完全最短路径

矩阵链乘计算 问题

か
た
処
列
算
法
・
豪
小
结

coin's index(i)	0	1	2	3	4	5	6
coin's value (c_i)	-	5	1	2	10	6	2

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

$$F(2) = \max\{C_2 + F(2-2), F(2-1)\}$$

$$= \max\{1 + F(0), F(1)\}$$

$$= \max\{1, 5\} = 5$$

$$F(3) = \max\{C_3 + F(3-2), F(3-1)\}$$

$$= \max\{2 + F(1), F(2)\}$$

$$= \max\{7, 5\} = 7$$

$$F(4) = \max\{C_4 + F(4-2), F(4-1)\}$$



动态规划 进损者 王爱娟

币值最大问题

coin's index(i)	0	1	2	3	4	5	6
coin's value (c_i)	ı	5	1	2	10	6	2

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

 $= \max\{10 + F(2), F(3)\} = \max\{15, 7\} = 15$

$$F(2) = \max\{C_2 + F(2-2), F(2-1)\}$$

$$= \max\{1 + F(0), F(1)\}$$

$$= \max\{1, 5\} = 5$$

$$F(3) = \max\{C_3 + F(3-2), F(3-1)\}$$

$$= \max\{2 + F(1), F(2)\}$$

$$= \max\{7, 5\} = 7$$

$$F(4) = \max\{C_4 + F(4-2), F(4-1)\}$$

动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的是 _租

动态规划基本 实例

找零问题

长递增子序 I

扁辑距离问题

问题 矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

coin's index(i)	0	1	2	3	4	5	6
coin's value (c_i)	-	5	1	2	10	6	2

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

$$F(5) = \max\{C_5 + F(5-2), F(5-1)\}\$$

讲授者 王爱娟

目录

想

叨念规划基本 实例

· 值載大问题 《李问题

扁辑距离问题

F包问题 专递闭包问题

^{円成} 矩阵链乘计算

动态规划算法 步骤小结

coin's index(i)	0	1	2	9	1		6
com s mdex(t)	U	1		0	4	9	U
coin's value (c_i)	_	5	1	2	10	6	2

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

$$F(5) = \max\{C_5 + F(5-2), F(5-1)\}\$$

= \text{max}\{6 + F(3), F(4)\}

动态规划

讲授者 王爱娟

 coin's index(i)
 0
 1
 2
 3
 4
 5
 6

 coin's value(c_i)
 5
 1
 2
 10
 6
 2

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

自下而上求解:动态规划的币值最大问题求解方式(续)

$$F(5) = \max\{C_5 + F(5-2), F(5-1)\}$$

$$= \max\{6 + F(3), F(4)\}$$

$$= \max\{13, 15\} = 15$$

开授者 土炭頻

动态规划的思 想

列 编辑距离问题 ...

专递闭包问题 完全最短路径

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的た 想

动态规划基本 实例

发长递增子序

ha de ar de ve es

背包问题

专递闭包问题 完全最短路径

矩阵链乘计算

动态规划算法 步骤小结

coin's index(i)	0	1	2	3	4	5	6
coin's value(c)		5	1	2	10	6	2

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

$$F(5) = \max\{C_5 + F(5-2), F(5-1)\}$$

$$= \max\{6 + F(3), F(4)\}$$

$$= \max\{13, 15\} = 15$$

$$F(6) = \max\{C_6 + F(6-2), F(6-1)\}$$

动态规划

讲授者 王爱娟

目录

力态规划的思 思

力态规划基本 实例

P值载大问题 炎家问题

列 编辑距离问题

卡包问题 去递闭句问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

coin's index(i)	0	1	2	3	4	5	6
coin's value (c_i)	-	5	1	2	10	6	2

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

$$F(5) = \max\{C_5 + F(5-2), F(5-1)\}$$

$$= \max\{6 + F(3), F(4)\}$$

$$= \max\{13, 15\} = 15$$

$$F(6) = \max\{C_6 + F(6-2), F(6-1)\}$$

$$= \max\{2 + F(4), F(5)\}$$

讲授者 王爱娟

币值最大问题

$$F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\}, n > 1$$
$$F(0) = 0, F(1) = 5$$

$$F(5) = \max\{C_5 + F(5-2), F(5-1)\}$$

$$= \max\{6 + F(3), F(4)\}$$

$$= \max\{13, 15\} = 15$$

$$F(6) = \max\{C_6 + F(6-2), F(6-1)\}$$

$$= \max\{2 + F(4), F(5)\}$$

$$= \max\{17, 15\} = 17$$

动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的是

动态规划基本

找零问题

最长递增子。 列

编辑距离问题

alt. La sea der

传递闭包问题

完全最短路径问题

矩阵链乘计算

动态规划算法 步骤小结 自下而上求解过程图示

F(2)

F(0) = 0

F(1)=5

动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的是

动态规划基本

找零问题

最长递增子。 列

编辑距离问题

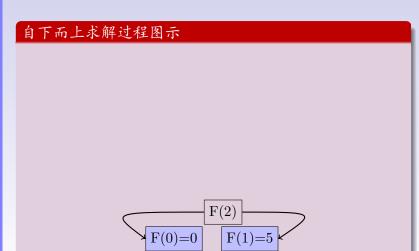
M44411111

传递闭包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算

动态规划算:



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

币值最大问》

、、、、 最长递增子/

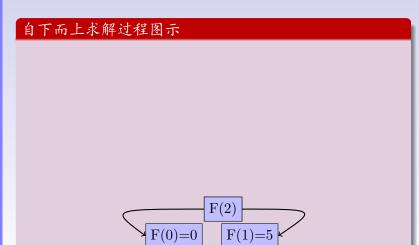
16 45 or 31 00 91

编辑距离问题

完全最短路径问题

矩阵链乘计算

动态规划算法



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

币值最大问题

找零问题

最长递增子。 列

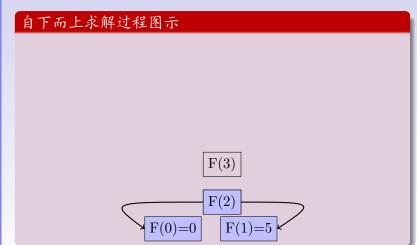
编辑距离问题

45 A M 95

传递闭包问题

完全最短路径问题

矩阵链乘计算



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

币值最大问题

找零问题

最长递增子 列

编辑距离问题

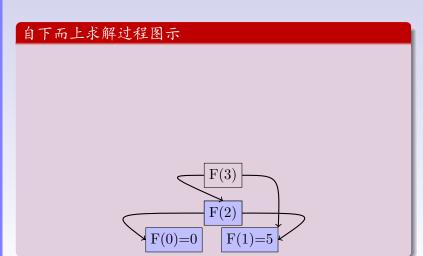
华石 問 版

传递闭包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算

动态规划算:



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

币值最大问题

找零问题

取长 型 增 丁

编辑距离问题

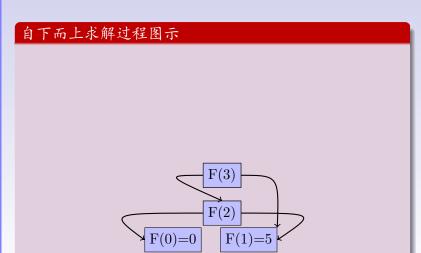
华石 問 版

传递闭包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算

动态规划算? 步骤小结



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

实例

书证最大的x 技家问题

最长递增子序

编辑距离问题

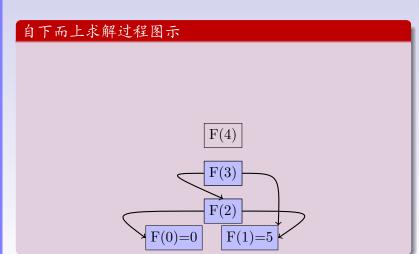
李台 問 臨

传递闭包问题

完全最短路径问题

矩阵链乘计算

动态规划算:



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

币值最大问题

我零回题

列

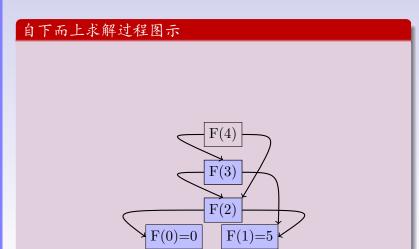
编辑距离问题

华石 問 版

传递闭包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

技恋问题

最长递增子序 31

编辑距离问题

all I am me

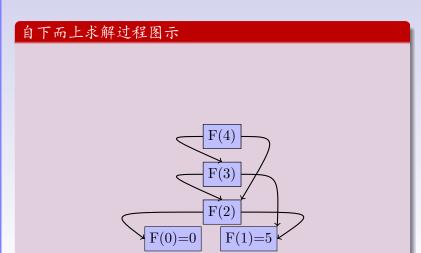
传递闭包问题

完全最短路径问题

矩阵链乘计算

问题

动态规划算? 步骤小结



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

实例

找零问题

最长通增子序 列

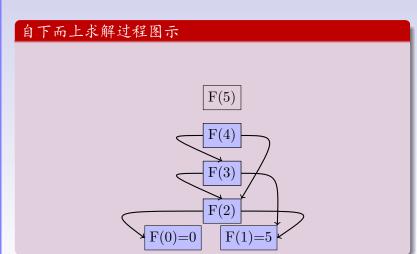
编辑距离问题

非石 間 點

传递闭包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

头 1列 币值最大问题

找零问题

列

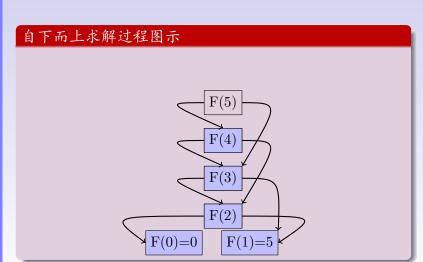
编辑距离问题

指句 问题

传递闭包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的是

动态规划基本

实例 布格曼士阿羅

找零问题

最长递增子序列

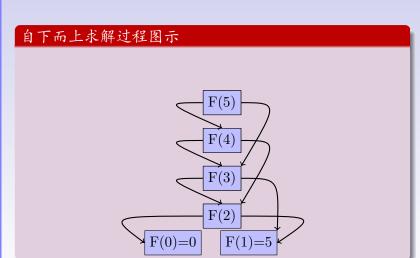
编辑距离问题

华台 问题

传递闭包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

币值最大问题

我零回题

列

编辑距离问题

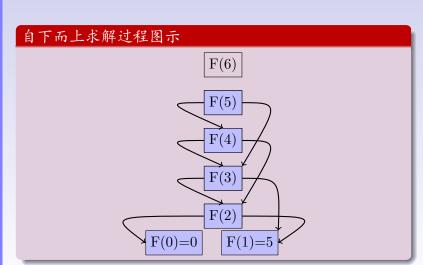
背句 问题

传递闭包问是

完全最短路径 问题

矩阵链乘计多

动态规划算? 步骤小结



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

币值最大问题

最长递增子序

编辑距离问题

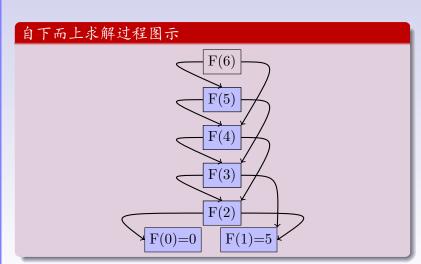
alt to an or

传递闭包问是

完全最短路径问题

矩阵链乘计

动态规划算? 步骤小结



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

プレン 币位最大问题

找零问题

取水迎增丁分列

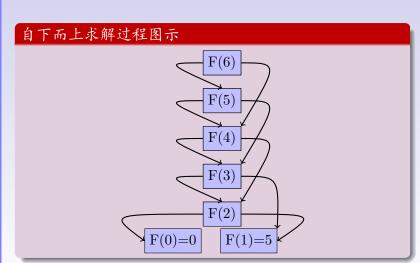
编辑距离问题

华台 问题

传递闭包问是

完全最短路径问题

矩阵链乘计



基于动态规划的币值最大问题算法

动态规划 讲授者 王爱娟

1录 力态规划的思 1.

(人) 市值最大问题 线零问题

自问题

1222 巨阵链乘计算 1220 $CoinRow(C[1 \cdots n])$

```
//算法基础: F(n) = \max\{C_n + F(n-2), F(n-1)\} n > 1 //输入: C[1\cdots n]表示n 个硬币及其对应的值 //输出: 能选取的最大币值 F[0] = 0; F[1] = 1 for i = 2 to n do F[i] = \max\{C[i] + F[i-2], F[i-1]\} end for return F[n]
```

找零问题

动态规划

讲授者 王爱娟

动态规划的思

动态规划基本 实例 ^{币值最大问题}

我零问题 最长递增子*月* 51

编辑距离问题

传递闭包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算; 步骤小结

找零问题

有m种规格的硬币, 其面值依次为: $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ 。现需要找零给客户, 其找零金额为n, 请问最少需要多少个硬币?

找零问题

找零问题 讲授者 王爱娟

有m种规格的硬币, 其面值依次为: $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ 。现 需要找零给客户, 其找零金额为n, 请问最少需要多少个硬 币?

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,6

找零金额n	0	1	2	3	4	5	6
所需硬币数F	_						

讲授者 王受娟

找零问题

找零问题

有 \mathbf{m} 种规格的硬币,其面值依次为: $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ 。现需要找零给客户,其找零金额为 \mathbf{n} ,请问最少需要多少个硬币?

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,6

找零金额n	0	1	2	3	4	5	6
所需硬币数F	_						

- 如果第一个硬币被用于找零,则 $F(n) = F(n-d_1) + 1$
- 如果第二个硬币被用于找零,则 $F(n) = F(n-d_2) + 1$
- 如果第三个硬币被用于找零,则 $F(n) = F(n-d_3) + 1$
- 比较这三种选择,最优选择应该如下: $F(n) = \min\{F(n-d_1)+1, F(n-d_2)+1, F(n-d_3)+1\}$

讲授者 王受娟

找零问题

找零问题

有m种规格的硬币, 其面值依次为: $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ 。现需要找零给客户, 其找零金额为n, 请问最少需要多少个硬币?

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,6

找零金额n	0	1	2	3	4	5	6
所需硬币数F	_						

- 如果第一个硬币被用于找零,则 $F(n) = F(n-d_1) + 1$
- 如果第二个硬币被用于找零,则 $F(n) = F(n-d_2) + 1$
- 如果第三个硬币被用于找零,则 $F(n) = F(n-d_3) + 1$
- 比较这三种选择,最优选择应该如下: $F(n) = \min\{F(n-d_1)+1, F(n-d_2)+1, F(n-d_3)+1\}$

讲授者 王受娟

找零问题

找零问题

有m种规格的硬币, 其面值依次为: $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ 。现需要找零给客户, 其找零金额为n, 请问最少需要多少个硬币?

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,6

ĺ	找零金额n	0	1	2	3	4	5	6
	所需硬币数F	_						

- 如果第一个硬币被用于找零,则 $F(n) = F(n-d_1) + 1$
- 如果第二个硬币被用于找零,则F(n) = F(n-d₂) + 1
- 如果第三个硬币被用于找零,则 $F(n) = F(n-d_3) + 1$
- 比较这三种选择,最优选择应该如下: $F(n) = \min\{F(n-d_1)+1, F(n-d_2)+1, F(n-d_3)+1\}$

讲授者 王受娟

找零问题

找零问题

有m种规格的硬币,其面值依次为: $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ 。现需要找零给客户,其找零金额为n,请问最少需要多少个硬币?

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,6

找零金額	额n	0	1	2	3	4	5	6
所需硬币	数F	_						

- 如果第一个硬币被用于找零,则F(n) = F(n-d₁) + 1
- 如果第二个硬币被用于找零,则 $F(n) = F(n-d_2) + 1$
- 如果第三个硬币被用于找零,则 $F(n) = F(n-d_3) + 1$
- 比较这三种选择,最优选择应该如下: $F(n) = \min\{F(n-d_1)+1, F(n-d_2)+1, F(n-d_3)+1\}$



讲授者 王受娟

找零问题

找零问题

有m种规格的硬币, 其面值依次为: $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ 。现需要找零给客户, 其找零金额为n, 请问最少需要多少个硬币?

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,6

	找零金额n	0	1	2	3	4	5	6		
	所需硬币数F	_								

- 如果第一个硬币被用于找零,则F(n) = F(n-d₁) + 1
- 如果第二个硬币被用于找零,则F(n) = F(n-d₂) + 1
- 如果第三个硬币被用于找零,则 $F(n) = F(n-d_3) + 1$
- 比较这三种选择,最优选择应该如下: $F(n) = \min\{F(n-d_1)+1, F(n-d_2)+1, F(n-d_3)+1\}$

找零问题

动态规划

讲授者 王爱娟

目录

` 动态规划基本 实例

大 [7] 币值最大问题 我**宏问题**

最长递增子序 ^列

编辑距离问题

背包问题 专递闭包问题

完全最短路径 问题

问题动态规划算法

等式扩展

上述等式的前提是只有3个硬币可用于找零。若有m个硬币可用于找零,则上述等式可表示如下,

$$F(n) = \begin{cases} \min_{n \ge d_i} \{ F(n - d_i) + 1 \}, & n > 1, 1 \le i \le m \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

讲授者 王爱娟

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,4,现需要找零6,最少需要多少硬币?

$$F(n) = \begin{cases} \min_{n \ge d_i} \{ F(n - d_i) + 1 \}, & n > 1, 1 \le i \le m \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

动态规划 讲授者 王<u>愛娟</u>

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,4,现需要找零6,最少需要多少硬币?

$$F(n) = \begin{cases} \min_{n \ge d_i} \{ F(n - d_i) + 1 \}, & n > 1, 1 \le i \le m \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

自下向上:基于动态规划的计算过程

- $F(1) = \min\{F(1 d_1) + 1\} = \min\{F(0) + 1\} = 1$
- $F(2) = \min\{F(2-d_1)+1\} = \min\{F(1)+1\} = 2$
- $F(3) = \min\{F(3-d_1)+1, F(3-d_2)+1\} = \min\{F(2)+1, F(0)+1\} = 1$
- $F(4) = \min\{F(4-d_1)+1, F(4-d_2)+1, F(4-d_3)+1\} = \min\{F(3)+1, F(1)+1, F(0)+1\} = 1$

|录 |添规划的思

方态规划基本 日例 市位最大问题 民华问题 员长递增子序

编辑距离问题 背包问题 传递闭包问题 完全最短路径

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,4,现需要找零6,最少需要多少硬币?

$$F(n) = \begin{cases} \min_{n \ge d_i} \{ F(n - d_i) + 1 \}, & n > 1, 1 \le i \le m \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

自下向上:基于动态规划的计算过程

- $F(1) = \min\{F(1 d_1) + 1\} = \min\{F(0) + 1\} = 1$
- $F(2) = \min\{F(2-d_1)+1\} = \min\{F(1)+1\} = 2$
- $F(3) = \min\{F(3-d_1)+1, F(3-d_2)+1\} = \min\{F(2)+1, F(0)+1\} = 1$
- $F(4) = \min\{F(4-d_1)+1, F(4-d_2)+1, F(4-d_3)+1\} = \min\{F(3)+1, F(1)+1, F(0)+1\} = 1$

讲授者 王爱娟

录 态规划的思

力态规划基本 民例 市值最大问题 找零问题 居长 滿 遊 子 序

列 编辑距离问题 背包问题 传递闭包问题

, 力态规划算法 步骤小结

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,4,现需要找零6,最少需要多少硬币?

$$F(n) = \begin{cases} \min_{n \ge d_i} \{ F(n - d_i) + 1 \}, & n > 1, 1 \le i \le m \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

自下向上:基于动态规划的计算过程

- $F(1) = \min\{F(1 d_1) + 1\} = \min\{F(0) + 1\} = 1$
- $F(2) = \min\{F(2-d_1)+1\} = \min\{F(1)+1\} = 2$
- $F(3) = \min\{F(3-d_1)+1, F(3-d_2)+1\} = \min\{F(2)+1, F(3-d_2)+1\}$
 - F(0)+1} = 1 • $F(4) = \min\{F(4-d_1)+1, F(4-d_2)+1, F(4-d_3)+1\} = \min\{F(2)+1, F(1)+1, F(0)+1\} = 1$

讲授者 王爱娟

1态规划的思 1态规划基本 1例

及长递增子序 引 高辑距离问题 背包问题

递闭包问题 全最短路径 题 阵链乘计算

7. 力态规划算法 5.骤小结 动态规划 讲授者 王<u>愛娟</u>

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,4,现需要找零6,最少需要多少硬币?

$$F(n) = \begin{cases} \min_{n \ge d_i} \{ F(n - d_i) + 1 \}, & n > 1, 1 \le i \le m \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

自下向上: 基于动态规划的计算过程

- $F(1) = \min\{F(1 d_1) + 1\} = \min\{F(0) + 1\} = 1$
- $\mathbf{F}(2) = \min_{\mathbf{F}} \{\mathbf{F}(2, d_1) + 1\} = \min_{\mathbf{F}} \{\mathbf{F}(1, d_1) + 1\}$
- $F(2) = \min\{F(2-d_1)+1\} = \min\{F(1)+1\} = 2$ • $F(3) = \min\{F(3-d_1)+1, F(3-d_2)+1\} = \min\{F(2)+1,$
- F(0)+1} = 1 • $F(4) = \min{F(4-d_1)+1, F(4-d_2)+1, F(4-d_3)+1} =$
 - $\mathbf{F}(4) = \min\{\mathbf{F}(4-\mathbf{d}_1)+1, \mathbf{F}(4-\mathbf{d}_2) \\ \min\{\mathbf{F}(3)+1, \mathbf{F}(1)+1, \mathbf{F}(0)+1\} = 1$

找零问题

W PC PCC

讲授者 王爱娟

动态规划的思

动态规划基本 实例 ^{币值最大问题}

tt本问题 员长递增子序

列

背包问题

传递闭包问题 它众品铂改经

矩阵链乘计算

动态规划算法 步骤小结

实例

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,4,现需要找零6,最少需要多少硬币

$$F(n) = \begin{cases} \min_{n \ge d_i} \{ F(n - d_i) + 1 \}, & n > 1, 1 \le i \le m \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

找零金额n	0	1	2	3	4	5	6
所需硬币数F	_	1	2	1	1		

动态规划 讲授者 王爱娟

实例

零6. 最少需要多少硬币

找零金额n

所需硬币数F

 $F(n) = \begin{cases} \min_{n \ge d_i} \{ F(n - d_i) + 1 \}, & n > 1, 1 \le i \le m \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

• $F(5) = min\{F(5-d_1)+1, F(5-d_2)+1, F(5-d_3)+1\} =$

• $F(6) = \min\{F(6-d_1)+1,F(6-d_2)+1,F(6-d_3)+1\}$

3 4

1

6

0

自下向上:基于动态规划的计算过程(续)

 $\min\{F(4)+1, F(2)+1, F(1)+1\} = 2$

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,4,现需要找



动态规划 讲授者 王爱娟

实例

零6. 最少需要多少硬币

找零金额n

所需硬币数F

假设有3个硬币,它们的面值依次为1,3,4,现需要找

 $F(n) = \begin{cases} \min_{n \ge d_i} \{ F(n - d_i) + 1 \}, & n > 1, 1 \le i \le m \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

3 4 6

0

自下向上:基于动态规划的计算过程(续)

• $F(5) = min\{F(5-d_1)+1, F(5-d_2)+1, F(5-d_3)+1\} =$

 $\min\{F(4)+1, F(2)+1, F(1)+1\} = 2$

 \bullet F(6) = min{F(6-d₁)+1,F(6-d₂)+1,F(6-d₃)+1} $\min\{F(5)+1,F(3)+1,F(2)+1\}=2$

讲授者 王爱娟

自下而上求解过程图示

F(0) = 0

动态规划

讲授者 王愛娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

我零问题

最长递增子/ 列

编辑距离问题

45 45 27 85

传递闭包问题

元全取短路位 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结 自下而上求解过程图示

F(1)

F(0) = 0

动态规划

讲授者 王爱娟

日录

动态规划的是

动态规划基本

中值 數大问题 **找零问题**

最长递增子/ 列

编辑距离问题

....

传递材包问题

元全取短路位 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法



讲授者 王愛娟

目录

动态规划的是

动态规划基本

找零问题

最长递增子月 51

编辑距离问是

- MINTELLINITY

传递闭包问题

九坐取短路位 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法

自下而上求解过程图示

F(1)=1 \downarrow F(0)=0

动态规划

讲授者 王愛娟

目录

动态规划的

动态规划基本

找季问题

最长递增子序

40 AS VG 20 CO S

納料此商門內

传递闭包问题

完全最短路径

矩阵链乘计算

动态规划算法

自下而上求解过程图示

F(2)

F(1)=1 \downarrow F(0)=0

动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的原

动态规划基本

币值最大问题 **找零问题**

最长递增子户

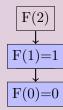
AL AT AN AN AN

编辑距禺问题

完全最短路径

矩阵链乘计算

动态规划算法



动态规划

讲授者 王愛娟

目录

动态规划的

动态规划基本

找零问题

最长递增子月

编辑 跖 東 尚 县

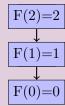
納料此商門內

传递闭句 问题

完全最短路径

矩阵链乘计算

动态规划算法



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思

动态规划基本

币值最大问题 **找零问题**

最长递增子序 列

编辑距离问题

- MINTELLINITY

传递闭包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结 自下而上求解过程图示



动态规划

讲授者 王爱娟

目录

动态规划的原

动态规划基本

币值最大问题 **找零问题**

最长递增子/ 列

编辑距离问题

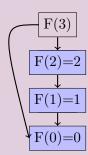
おといった

传递闭包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结



讲授者 王爱娟

目录

动态规划的是

动态规划基本

币值最大问题 **找零问题**

最长递增子序 列

编辑距离问题

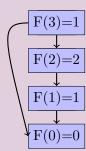
200 101 ME 101 1 1/2

传递闭包问题

完全最短路径 问题

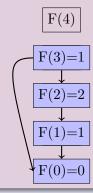
矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结



讲授者 王爱娟





讲授者 王爱娟

目录

动态规划的是

动态规划基本 _{定例}

币值最大问 **找零问题**

最长递增子序

编辑距离问题

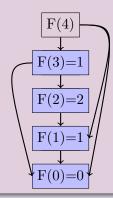
MATELIA 1 1 1 1

传递闭包问是

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算

动态规划算法 步骤小结



讲授者 王爱娟

目录

动态规划的是

~ 动态规划基本

币值最大问题 **找零问题**

最长递增子序

An As on in the 9

编辑距离问题

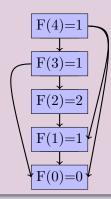
背包问题

传递闭包问题

完全最短路径 问题

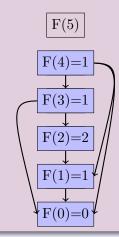
矩阵链乘计算

动态规划算法 步骤小结



讲授者 王爱娟





讲授者 王爱娟

目录

动态规划的。

动态规划基本 实例

中但東大 P 技家问题

最长递增子序

编辑距离问题

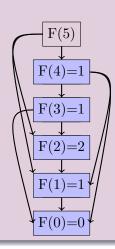
MATELIA 1 1 1 1

传递闭包问是

完全最短路径 问题

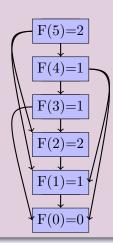
矩阵链乘计算

动态规划算法步骤小结



讲授者 王爱娟





示か 恋 柳 歩

讲授者 王愛娟

目录

动态规划的原

动态规划基本

币值最大(我**宏**问题

最长递增子序

编辑距离问题

納秤距商門及

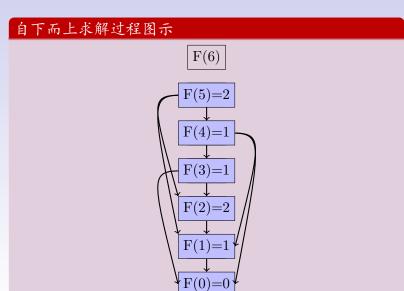
传递闭句问题

完全最短路径

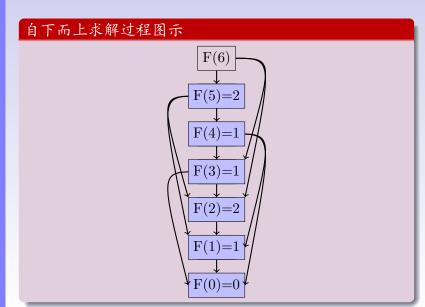
矩阵链乘计算

问题

动态规划算法 步骤小结



讲授者 王爱娟



讲授者 王爱娟

目录

动态规划的点

动态规划基本

币值最大 我**宏**问题

最长递增子序

编辑距离问题

传递闭包问题

完全最短路径问题

矩阵链乘计算

动态规划算法 步骤小结 自下而上求解过程图示 F(6) = 2F(5) = 2F(4) = 1F(3) = 1F(2)=2F(1)=1F(0)=0

讲授者 王受娟

基于动态规划的找零算法

```
\overline{\text{ChangeMaking}(\text{C}[1\cdots\text{m}],\,\text{n})}
```

```
//算法基础: F(n) = \min_{n>d_i} \{F(n-d_i)+1\} = \min_{n>d_i} \{F(n-d_i)\}+1
//输入: C[1···m]表示用于找零的m个硬币及其对应的值
//输入: n表示找零金额
//输出: 最少的用币数
  F[0] = 0
  for i = 1 to n do
    temp = \infty; j = 1
     while i \le m and i \ge C[i] do
       temp = min(F(i - C[j]), temp)
       j = j + 1
     end while
    F[i] = temp + 1
  end for
  return F[n]
```

动态规划 讲授者 王爱娟

最长递增子序列--问题描述

在一个给定的数值序列中,找到一个子序列,使得这个子序列元素的数值依次递增,并且这个子序列的长度尽可能地大。最长递增子序列中的元素在原序列中不一定是连续的。

示例

- 原始序列: {0,8,4,12,2,10,6,14,1,9,5,13,3,11,7,15}
- ❷ 最长递增子序列: {0,2,6,9,11,15}

✓ 注意:

 $\{0,2,6,9,13,15\},\{0,4,6,9,11,15\},\{0,4,6,9,13,15\}$ 也是问题的解。

动态规划

讲授者 王爱娟

想 动态规划基本 实例

最长递增子序 列

背包问题 专递闭包问题

问题 动态规划算? 步骤小结 求解思路

- 假设A[0,1,...,n-1]表示输入序列, 其中n表示问题序列 的长度;
- L_i 表示以A[i]结尾的最长递增子序列的长度;
- 求最长递增子序列问题: $max\{L_i\}, 0 \le i \le n-1$;
- 对于 $\forall k, k < i, L_i = max\{L_k|A[k] < A[i]\} + 1;$
- 对于 $\forall k, k < i,$ 若 $A[k] \ge A[i], 则 L_i = 1;$
- 初始条件: L₀ = 1;

实例

- $\bullet \ A = \{0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15\}$
- $L_0 = 1, L_{15} = ?$

动态规划

讲授者 王愛娟

日求 动态规划的思 ^细

动态规划基本 实例

最长递增子序 列

高辑距离问题 背包问题

传递闭包问题

矩阵链乘计算

动态规划算法 步骤小结 求解过程

- $A = \{0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15\}$
- $i = 0; \Rightarrow L_0 = 1$
- $i = 1; k = 0; \Rightarrow L_1 = max\{L_k\} + 1 = 2$
- $i = 2; k = 0; \Rightarrow L_2 = max\{L_k\} + 1 = 2$
- $i = 3; k = 0, 1, 2; \Rightarrow L_3 = max\{L_k\} + 1 = 3$
- $i = 4; k = 0; \Rightarrow L_4 = max\{L_k\} + 1 = 2$
- $i = 5; k = 0, 1, 2, 4; \Rightarrow L_5 = max\{L_k\} + 1 = 3$
- $i = 6; k = 0, 2, 4; \Rightarrow L_6 = max\{L_k\} + 1 = 3$
- $i = 7; k = 0, 2, 4, 6; \Rightarrow L_7 = max\{L_k\} + 1 = 4$

动态规划

讲授者 王爱娟

日京 动态规划的思想

动态规划基本 实例 器长滋恤子序

取 入 迎 省 了 厅 列

完全最短路径问题

たけば来い并 问題 动态規划算法 お暖小结 求解过程

- $A = \{0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15\}$
- $i = 8; k = 0; \Rightarrow L_8 = max\{L_k\} + 1 = 2$
- $i = 9; k = 0, 1, 2, 4, 6, 8; \Rightarrow L_9 = max\{L_k\} + 1 = 4$
- $i = 10; k = 0, 2, 4, 8; \Rightarrow L_{10} = max\{L_k\} + 1 = 3$
- $i = 11; k = 0, ..., 6, 8, 9, 10; \Rightarrow L_{11} = max\{L_k\} + 1 = 5$
- $i = 12; k = 0, 4, 8; \Rightarrow L_{12} = max\{L_k\} + 1 = 3$
- $i = 13; k = 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12; \Rightarrow L_{13} = max\{L_k\} + 1 = 5$
- $i = 14; k = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12; \Rightarrow L_{14} = max\{L_k\} + 1 = 4$
- $i = 15; k = 0, ..., 14; \Rightarrow L_{15} = max\{L_k\} + 1 = 6$

动态规划

讲授者 王愛娟

目录 动态规划的思 ^姐

动态规划基本 实例

最长递增子序 列

病辑距离问题 背包问题

传递闭包问题 完全最短路径

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

求解过程——回溯求解

- $A = \{0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15\}$
- $L_{15} = 6; \Rightarrow \{15\}$
- $L_{11}, L_{13}; \Rightarrow \{13, 15\}, \{11, 15\}$
- $L_{11}: L_9; \Rightarrow 9, 13, 15$
- $L_{11}: L_9: L_6; \Rightarrow \{6, 9, 13, 15\}$
- $L_{11}: L_9: L_6: L_2, L_4; \Rightarrow \{4, 6, 9, 13, 15\}, \{2, 6, 9, 13, 15\}$
- $L_{11}: L_9: L_6: L_2, L_4: L_0; \Rightarrow \{0, 4, 6, 9, 13, 15\}, \{0, 2, 6, 9, 13, 15\}$
- $L_{13}: L_9; \Rightarrow \{9, 11, 15\}$
- $L_{13}: L_9: L_6: L_2, L_4: L_0; \Rightarrow \{0, 4, 6, 9, 11, 15\}, \{0, 2, 6, 9, 11, 15\}$

编辑距离问题

动态规划

讲授者 王爱娟

动态规划的思 想 动态规划基本 企例

最长递增子序 列

编辑 距离问题

专递闭包问题 完全最短路径

矩阵链乘计算 可题 动态规划算法 步骤小结

编辑距离问题——问题描述

对于序列S和T,求从S变为T最少需要几步,其中每一步只能进行以下三个操作:

- 1、删除一个字符;
- 2、插入一个字符;
- 3、改变一个字符。
- 将S变为T的最小操作计数就是两者的编辑距离。

示例

- ② S 需要执行的操作: 替换A为C,末尾插入D,距离为2;
- \bullet S = ABC; T = DCB
- ① S 需要执行的操作: 替换A为D,删除B,末尾插入B,距离为3:

编辑距离问题

动态规划

讲授者 王受娟

求解思路

- ① D[i,j] 表示 $S[0,..,i] \to T[0,...,j]$ 的编辑距离。
- ② S[i] = T[j] 时,不需要操作,即D[i,j] = D[i-1,j-1];
- ③ $S[i] \neq T[j]$ 时,可以执行如下的操作:
 - $S[0,...,i] \rightarrow T[0,...,j-1]$, T[j]插入到S 末尾, D[i][j-1]+1
 - ② 删除S[i], $S[0,..,i-1] \rightarrow T[0,...,j]$, D[i-1][j]+1
 - § $S[0,...,i-1] \rightarrow T[0,...,j-1]$,替换S[i] 为T[j],D[i-1][j-1]+1

实例

计算S(algorithm)和T(altruistic)的编辑距离。

编辑距离问题

全最短路径 题

问题 动态规划:

步骤小结



编辑距离问题

讲授者 王爱娟

求解过程

D[i,j] 矩阵

	·]										
	Τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S		a	l	t	r	u	i	s	t	i	c
1	a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	g	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
4	О	3	2	2	2	3	4	5	6	7	8
5	r	4	3	3	2	3	4	5	6	7	8
6	i	5	4	4	3	3	3	4	5	6	7
7	t	6	5	4	4	4	4	4	4	5	6
8	h	7	6	5	5	5	5	5	5	5	6
9	m	8	7	6	6	6	6	6	6	6	6

时间复杂度

假如S的长度为n, T的长度为m, 计算D[i,j]的复杂度为m*n。

背包问题

动态规划

讲授者 王爱娟

ド包问题 专递闭包问题

已全成为 习题 巨阵链芽 习题

巨阵链乘计。 引题 力态规划算: 步骤小结

问题回顾

- 求能够放入给定承重量的背包的最大价值的物品集合;
- 穷举查找法可以得到最优解,但是计算复杂度较高(2^n);
- 贪心算法计算较快, 但是只能得到近似解;

动态规划求解

- F(i,j)为前i 个物品放进承重量为j的背包问题的最优解;
- 前*i*个物品构成的子集分为两类: 含第*i*个物品和不含第*i*个物品;
- $F(i,j) = \begin{cases} \max\{F(i-1,j), v_i + F(i-1,j-w_i)\}, j-w_i \ge 0 \\ F(i-1,j), j-w_i \le 0 \end{cases}$
- $F(0,j) = 0, j \ge 0; F(i,0) = 0, i \ge 0;$
- 一共需要计算nW 个F 值, 复杂度为 $\Theta(n)$;

动冷规划

讲授者 王爱娟

1录

动态规划基本 实例 最长递增子序

可 有辑距离问题 F白 问题

连闭包问题 全最短路径]题

5阵链索计算]題 か态规划算法 が骤小结

实例——递推关系

$$F\left(i,j\right) = \left\{ \begin{array}{l} \max \left\{ F\left(i-1,j\right), v_i + F\left(i-1,j-w_i\right) \right\}, j-w_i \geq 0 \\ F\left(i-1,j\right), \ j-w_i \leq 0 \end{array} \right.$$

$$F(0,j) = 0, j \ge 0; F(i,0) = 0, i \ge 0$$

实例

物品	重量 (w)	价值(v)
1	2	12
2	1	10
3	3	20
4	2	15
	背包承重量W=5	

背包问题

动态规划

讲授者 王爱娟

目录 办态规划的思 思 办态规划基本 字例

背包问题

市 運 用 包 回 趣 名 全 最 短 路 径 可 题

可题 动态规划算法 步骤小结 实例

27 1/1						
F(i,j)	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12	22	30	32
4	0	10	15	25	30	37

回溯求装入背包的物品

- F(4,5) > F(3,5): 物品4装入背包;
- F(3,5-2) = F(2,5-2): 物品3 不是最优子集一部分;
- F(2,3) > F(1,3): 物品2 装入背包;
- F(1,3-1) > F(0,3-1): 物品1 装入背包;



背包问题

动态规划 讲授者 王爱娟

目录

动态规划的思 想

实例 最长递增子序 ^別

高辑距离问题

背包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

动态规划优化

记忆化

- 自顶向下的递归调用求解会多次求解子问题;
- 自下向上的动态规划过程会求解一些不必要的子问题;
- 结合两种方法, 只求解一次必要的子问题(记忆化);

传递闭包问题

动态规划

讲授者 王爱娟

目录 动态规划的思

力态规划基本 民例 最长递增子序

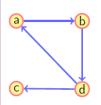
编辑距离问题 背包问题

传递闭包问题 完全最短路径

ルーゼイバイ 问题 动态规划算法 中華小社 传递闭包问题—定义

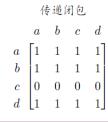
一个n个顶点的有向图的传递闭包可以定义为一个n阶矩阵 $T=t_{ij}$,如果从第i个顶点到第j个顶点之间存在一条有效的有向路径,则 $t_{ij}=1$,否则为0。

示例



	4144001十			
	a	b	c	d
\boldsymbol{a}	[0	1	0 0 0 1	0
b	0	0	0	1
\boldsymbol{c}	0	0	0	0
d	_1	0	1	0_

邻拉纸阵



传递闭包问题

动态规划

讲授者 王爱娟

目录 动态规划的思

力态规划基本 只例 是长递增子序

编辑距离问题

传递闭包问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

Warshall算法——算法要点

- 顶点 v_i 到 v_j 路径上顶点的编号都不大于k,则 $R^{(k)}(i,j) = 1$;
- 路径 $a(1) b(2) d(3) : R^{(2)}(1,3) = 1, R^{(3)}(1,3) = 1;$
- $R^{(k)}(i,j) = 1$ 时, v_i 到 v_j 路径有两种情况: v_i -{编号<k的顶点}- v_j 。 v_i -{编号<k的顶点}- v_k {编号<k的顶点}- v_j (假定 v_k 只出现1次)
- $\mathbb{P}R^{(k-1)}(i,j) = 1 \not \leq R^{(k-1)}(i,k) = 1, R^{(k-1)}(k,j) = 1$

传递闭包问题

动态规划

讲授者 王爱娟

动态规划的思

高辑距离问题 背包问题

传递闭包问题

问题

矩件链聚计异 问题 动太翅韧質注

步骤小结

Warshall算法——算法要点

- 顶点 v_i 到 v_j 路径上顶点的编号都不大于k,则 $R^{(k)}(i,j)=1$;
- 路径 $a(1) b(2) d(3) : R^{(2)}(1,3) = 1, R^{(3)}(1,3) = 1;$
- $R^{(k)}(i,j)=1$ 时, v_i 到 v_j 路径有两种情况: v_i -{编号<k的顶点}- v_j v_i -{编号<k的顶点}- v_k {编号|k的顶点}- v_j (假定 v_k 只出现1次)
 - $\mathbb{P}R^{(k-1)}(i,j) = 1 \stackrel{!}{\not \propto} R^{(k-1)}(i,k) = 1, R^{(k-1)}(k,j) = 1$

递推关系

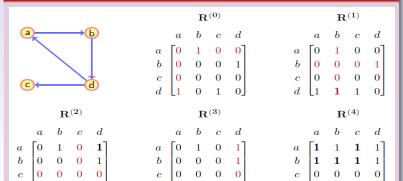
 $R^{(k-1)}(i,j) = 1$ 或 $\{R^{(k-1)}(i,k) = 1, R^{(k-1)}(k,j) = 1\} \Rightarrow R^{(k)}(i,j) = 1$

传递闭包问题问题

动态规划

讲授者 王爱娟

实例



动态规划

讲授者 王爱娟

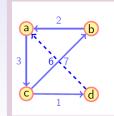
单源最短路径问题—回顾

给定一个起点, 计算起点到所有其他顶点之间的最短路径。

完全最短路径问题

找到从每个顶点到其他所有顶点之间的最短路径。

示例



	a	b	c	d
a	0	_	3	-]
$a \\ b$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	0	_	-
d	_	7	0	1
d	6	_	_	0

邻接矩阵W



动态规划

讲授者 王爱娟

目录 力态规划的思 思

长例 及长递增子序 则

6辑距离问题 F包问题 5递闭包问题

问题 矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

Floyd算法

- D(k)(i, j) 表示第i个顶点到第j个顶点的最短路径长度, 并且路径的中间顶点编号不大于k;
- 第i个顶点到第j个顶点的最短路径有两种情况: v_i -{编号< k的顶点}- v_j v_i -{编号< k的顶点}- v_k {编号<k的顶点}- v_i
- 第i个顶点到第j个顶点的最短路径为两种情况下的最小值;

动态规划 讲授者 王舜娟

Floyd算法

- D(k)(i,j) 表示第i个顶点到第j个顶点的最短路径长度,并且路径的中间顶点编号不大于k;
- 第i个顶点到第j个顶点的最短路径有两种情况: v_i -{编号< k的顶点}- v_j -{编号< k的顶点}- v_k {编号<k的顶点}- v_i
- 第i个顶点到第j个顶点的最短路径为两种情况下的最小值:

递推关系

$$D^{(k)}(i,j) = \min\{D^{(k-1)}(i,k) + D^{(k-1)}(k,j), D^{(k-1)}(i,j)\}$$

完全最短路径 问题

矩阵链乘 问题 动杰规划



递推关系

实例

讲授者 王爱娟

 $\mathbf{D}^{(2)}$

a

 $D^{(k)}(i,j) = \min\{D^{(k-1)}(i,k) + D^{(k-1)}(k,j), D^{(k-1)}(i,j)\}\$

dc**10**

16

 $\mathbf{D}^{(3)}$

 $\mathbf{D}^{(0)}$

a

 $D^{(4)}$

 $\mathbf{D}^{(1)}$

0

矩阵链乘计算问题

动态规划

讲授者 王爱娟

动态规划的思 想 动态规划基本

实例 最长递增子序 列

高辑距离问题 背包问题

完全最短路径 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划算法 步骤小结

矩阵链乘计算问题——问题描述

- 设 $A_1, A_2, ..., A_n$ 为n 个矩阵的序列,其中 A_i 为 $P_{i-1} * P_i$ 阶矩阵,可用向量 $P = \langle P_0, P_1, P_2, ..., P_n \rangle$ 表示矩阵链的输入规模;
- 计算 $A_1, A_2, ..., A_n$ 的乘积, 不同的计算顺序, 计算量有所不同, 选择计算量最少的次序计算矩阵乘积;

示例

- 如有P = < 10,100,5,50 >, 计算 $A_1A_2A_3$ 的乘法次数分别为:
 - $(A_1A_2)A_3$: 10*100*5+10*5*50=7500;
 - $A_1(A_2A_3)$: 10*100*50+100*5*50=75000;

矩阵链乘计算问题

动态规划

讲授者 王爱娟

动态

动态规划的思想

高辑距离问题 **宁**包问题

专逐闭包问题 完全最短路径 问题

矩阵链乘计算 问题

动态规划求解-递推关系

- $A_i A_{i+1} ... A_j = (A_i A_{i+1} ... A_k) (A_{k+1} A_{k+2} ... A_j);$
- 假设m[i,j]为计算乘积 $A_iA_{i+1}...A_j$ 所用的最少运算次数,有:
 - i = j, m[i, j] = 0, i = j
 - $i < j, m[i, j] = min_{i \le k < j} \{ m[i, k] + m[k+1, j] + P_{i-1} P_k P_j \}$

实例: P = <30,35,15,5,10,20>

- $A_1:30*35, A_2:35*15, A_3:15*5, A_4:5*10, A_5:10*20$
- m[1,2] = 30 * 35 * 15 = 15750, m[2,3] = 35 * 15 * 5 = 2625
- m[3,4] = 15 * 5 * 10 = 750, m[4,5] = 5 * 10 * 20 = 1000
- $m[2,4] = min\{m[2,3] + 35*5*10, m[3,4] + 35*15*10\} = 4375$

矩阵链乘计算问题

动态规划

讲授者 王爱娟

动态规划求解

实例: P = <30,35,15,5,10,20>

- $m[3,5] = min\{m[3,4] + 15*10*20, m[4,5] + 15*5*20\} = 2500;$
- $m[1,4] = min\{m[2,4] + 30*35*10, m[1,2] + m[3,4] + 30*15*10, m[1,3] + 30*5*10\} = 9375$
- $m[2,5] = min\{m[3,5] + 35 * 15 * 20, m[2,3] + m[4,5] + 35 * 5 * 20, m[2,4] + 35 * 10 * 20\} = 7125$
- $m[1,5] = min\{m[2,5] + 30 * 35 * 20, m[1,2] + m[3,5] + 30 * 15 * 20, m[1,3] + m[4,5] + 30 * 5 * 20, m[1,4] + 30 * 10 * 20\} = 11875$

回溯求解

最佳计算次序: $A_1A_2A_3A_4A_5 = (A_1(A_2A_3))(A_4A_5)$



动态规划算法步骤小结

动态规划

讲授者 王爱娟

动态规划算法步骤小结

- 动态规划方法是对一种具有交叠子问题进行求解的技术,与递归调用不同,动态规划对较小的子问题只求解一次;
- ② 动态规划方法要求最优问题满足的法则:该问题的任何 实例的最优解是由该实例的子实例的最优解组成。

作业

- **9** 8.1:1 Page224
- **2** 8.1:5 Page224
- **8** 8.1:6 Page225
- **a** 8.1:11 Page225

动态规划算; 步骤小结