前言

连续系统s域分析相关内容

一、线性性质

若：
$\mathcal{L}[f_1(t)]=F_1(s), Re[s]>\sigma_1$

$\mathcal{L}[f_2(t)]=F_2(s), Re[s]>\sigma_2$

则：$\mathcal{L}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1F_1(t)+a_2F_2(t), Re[s]>max(\sigma_1,\sigma_2)$

> 例：$\mathcal{L}[\delta(t)+\epsilon(t)]=1+1/s, \sigma>0$

二、尺度变换

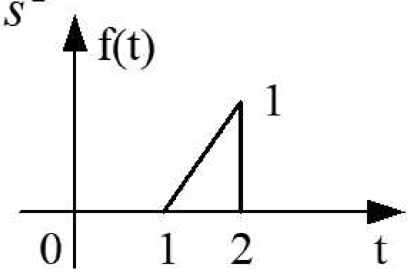
若：
$\mathcal{L}[f(t)]=F(s), Re[s]>\sigma_0,$ 且有实数$a>0$

则：

$$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}), Re[s]>a\sigma_0$$

例：如图信号f(t)的拉氏变换$F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^2}(1-e^{-s}-s\,e^{-s})$

求图中信号y(t)的拉氏变换Y(s)。



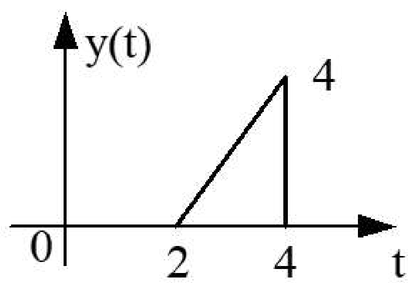
解：

y(t)= 4f(0.5t)

$$Y(s)=4\times 2\,F(2s)$$

$$=\frac{8e^{-2s}}{(2s)^2}(1-e^{-2s}-2s\,e^{-2s})$$

$$=\frac{2e^{-2s}}{s^2}(1-e^{-2s}-2s\,e^{-2s})$$



三、时移特性

若：
$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), Re[s] > \sigma_0,$ 且有实常数 $t_0 > 0$

则：

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)\epsilon(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s), Re[s] > \sigma_0$$

例： $\mathcal{L}[f(at-t_0)\epsilon(at-t_0)] = ?$

> 先时移，再尺度变换，可得：
>
> $$\mathcal{L}[f(at-t_0)\epsilon(at-t_0)] = \frac{1}{a}e^{-\frac{s}{a}t_0}F(\frac{s}{a})$$

四、频移特性

若：$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), Re[s] > \sigma_0,$ 且有复常数 $s_a = \sigma_a + j\omega_a$

则：

$$\mathcal{L}[f(t)e^{s_a t}] = F(s-s_a), Re[s] > \sigma_0 + \sigma_a$$

例：因果信号 $f(t)$ 的象函数

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

问： $\mathcal{L}[e^{-t}f(3t-2)] = ?$

> 先时移，再尺度变换，最后复频移
>
> $$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2+1} \implies \mathcal{L}[f(t-2)] = \frac{s}{s^2+1} \cdot e^{-2s}$$
>
> $$\mathcal{L}[f(3t-2)] = \frac{1}{3} \cdot \frac{s/3}{(s/3)^2+1} \cdot e^{-2(s/3)} = \frac{s}{s^2+9} \cdot e^{-\frac{2s}{3}}$$
>
> $$\mathcal{L}[e^{-t}f(3t-2)] == \frac{s+1}{(s+1)^2+9} \cdot e^{-\frac{2(s+1)}{3}}$$

五、时域的微分特性

若：$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), Re[s] > \sigma_0$
则：

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0_-)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - \Sigma_{m=0}^{n-1}s^{n-1-m}f^{(m)}(0_-)$$

若：$f(t)$ 为因果信号，则 $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s)$

> 因果信号时间轴从零开始，$f(0_-) = 0$

例：（1）$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = ?$ （2）$\mathcal{L}[\frac{d}{dt}[\epsilon(t)\cos 2t]] = ?$ （3）$\mathcal{L}[\frac{d}{dt}[\cos 2t]] = ?$

> （1）$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n$
> （2）$\epsilon(t)\cos 2t$ 含有 $\epsilon(t)$，为因果信号，利用公式，可得：
>
> $$\mathcal{L}[\frac{d}{dt}[\epsilon(t)\cos 2t]] = s \cdot \frac{s}{s^2+4}，(\mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{s}{s^2+4})$$
>
> （3）$\cos 2t$ 非因果信号，利用公式，可得：
>
> $$\mathcal{L}[\frac{d}{dt}[\cos 2t]] = sF(s) - f(0-) = s \cdot \frac{s}{s^2+4} - 1，\{F(s) = \mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{s}{s^2+4}\}$$

六、时域的积分特性

若 :$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), Re[s] > \sigma_0$

则：

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$$

例：$\mathcal{L}[t^2\epsilon(t)] = ?$

> （1）
>
> $$\mathcal{L}[t\epsilon(t)] = \mathcal{L}[\int_0^t \epsilon(\tau)d\tau] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}，(\mathcal{L}[\epsilon(t)] = \frac{1}{s})$$
>
> （2）
>
> $$\mathcal{L}[t^2\epsilon(t)] = 2\mathcal{L}[\int_0^t \tau\epsilon(\tau)d\tau] = 2 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$$

七、卷积定理

时域：若因果函数

$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s), Re[s] > \sigma_1$

$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s), Re[s] > \sigma_2$

则：$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$

s域卷积定理：

$$\mathcal{L}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(\eta)F_2(s-\eta)d\eta$$

八、s域的微分与积分

若 :$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), Re[s] > \sigma_0$

则：

$$\mathcal{L}[(-t)f(t)] = \frac{dF(s)}{ds}，\ \mathcal{L}[(-t)^n f(t)] = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^{\infty} F(\eta)d\eta$$

例：$\mathcal{L}[t^2 e^{-2t}\epsilon(t)] = ?$

> $$\mathcal{L}[e^{-2t}\epsilon(t)] = \frac{1}{s+2} \implies \mathcal{L}[t^2 e^{-2t}\epsilon(t)] = \frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s+2}) = \frac{2}{(s+2)^3}$$

九、初值定理和中值定理

初值：

$$f(0_+) = \lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

终值：若 $f(t)$ 当 $t \to \infty$ 时存在，且 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s), Re[s] > \sigma_0, \sigma_0 < 0$
则：

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

总结

拉普拉斯变换的性质 和 傅里叶变换的性质 注意区别

性质很重要！！！ 性质很重要！！！ 性质很重要！！！