# 考研数学重要公式及性质

## 目　录

### 第一篇　高等数学



### 第二篇　线性代数



### 第三篇　概率论与数理统计

# 第一篇　高等数学

## 第 1 章　函数、极限与连续

1. 极限的四则运算法则

若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$（$A$，$B$ 均为有限数），则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B，\lim f(x)\cdot g(x)=A\cdot B，$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}（当 B\neq 0）.$$

2. 极限存在的两个准则

(1) 单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则

若当 $x\in\{x \mid 0<|x-x_0|<h\}$（或 $|x|>M$）时，恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$.

3. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e}$.

4. 无穷小量的运算性质

(1) 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

(2) 有限个无穷小量的积仍是无穷小量.

(3) 无穷小量与有界函数的乘积仍是无穷小量.

(4) 等价无穷小代换. 设 $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 是自变量同一变化过程中的无穷小且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 存在，则$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$.

5. 闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则有：

(1) $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

(2) 最大、最小值定理：$f(x)$ 在$[a,b]$上有最大值和最小值，即至少存在点 $\xi$ 和 $\eta\in[a,b]$，使对一切 $x\in[a,b]$，有 $f(\eta)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi)$.

(3) 介值定理：设 $\mu$ 是介于 $f(a)$，$f(b)$（$f(a)\neq f(b)$）间的任何一个数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\mu$.

(4) 零点定理：若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

# 第 2 章　一元函数微分学

1. 基本初等函数的导数公式

(1) $C'=0$

(2) $(x^{a})'=ax^{a-1}$

(3) $(a^{x})'=a^{x}\ln a,(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$

(4) $(\log_{a}x)'=\dfrac{1}{x\ln a},(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(5) $(\sin x)'=\cos x$

(6) $(\cos x)'=-\sin x$

(7) $(\tan x)'=\sec^{2}x=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$

(8) $(\cot x)'=-\csc^{2}x=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}$

(9) $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$

(10) $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

(11) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(12) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(13) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$

(14) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$

2. 四则运算法则：设 $u=u(x),v=v(x)$ 均可导，则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v',\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v.$

(2) $(uv)'=u'v+uv',\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u.$

若 $u(x),v(x)$ 均 $n$ 阶可导，则有下面的莱布尼茨公式：

$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n}^{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$，其中 $u^{(0)}=u,v^{(0)}=v$，

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^{2}},\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^{2}}(v\neq 0).$

3. 对数求导法则：当函数 $f(x)$ 的表达式是幂指函数形式或是若干因式连乘积、商或乘方、开方的形式，可在函数式两边先取对数，然后在等式两端对 $x$ 求导.

4. 复合函数求导法则：设 $u=\psi(x)$ 在 $x$ 处可导，$y=f(u)$ 在 $u=\psi(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[\psi(x)]$ 在点 $x$ 处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\text{ 或 }y'_{x}=y'_{u}\cdot u'_{x}.$$

5. 反函数求导法则：设 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 内可导且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x=\psi(y)$ 也可导且反函数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\text{ 或 }x'_{y}=\frac{1}{y'_{x}}.$$

6. 参数方程求导法则：设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}(\alpha<t<\beta)$ 给出，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 都在 $(\alpha,\beta)$ 内可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

7. 隐函数求导法则：由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称为 $y$ 是自变量 $x$ 的隐函数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的方法有以下两种.

(1) 在方程两边分别对 $x$ 求导，特别要注意 $y$ 是 $x$ 的函数，于是 $y$ 的函数对 $x$ 来说就是复合函数.

(2) 利用一阶微分形式不变性，在方程两边求微分，然后解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

8. 罗尔定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得

$$f'(\xi)=0,\xi\in(a,b).$$

9. 拉格朗日中值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可导，则在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\xi\in(a,b).$$

10. 柯西定理：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

11. 泰勒中值定理

(1) 泰勒公式　设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则对该邻域内异于 $x_0$ 的任意点 $x$，在 $x_0$ 与 $x$ 之间至少存在一点 $\xi$，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，它称为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的拉格朗日型余项.

在不需要余项的精确表达式时，$n$ 阶泰勒公式也可以写成

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

其中 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$，它称为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的佩亚诺型余项.

若令 $x_0=0$，则 $n$ 阶泰勒公式成为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

称为 $n$ 阶带佩亚诺型余项的麦克劳林公式.

(2) 常用的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad (x \to 0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}), \quad (x \to 0)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}), \quad (x \to 0)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad (x \to 0)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad (x \to 0)$$

# 第 3 章 一元函数积分学

1. 不定积分的基本性质

(1) $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （$k$ 为非零常数）

(3) $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$（分部积分法）

(4) 设 $x = \varphi(t)$ 为单调可导且导函数连续的函数,则

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad \text{（换元积分法）}$$

2. 基本积分公式

(1) $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1$

(2) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

(3) $\int e^x dx = e^x + C$

(4) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C, a \neq 1$

(5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(7) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(8) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$　　(10) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

(11) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$　　(12) $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(13) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$　　(14) $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, a \neq 0$　　(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C(a>0)$

(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

3. 定积分性质

(1) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　($k$ 为常数)

(3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

(4) $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x$(分部积分法)

(5) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$,其中 $x=\varphi(t)$ 存在连续导数,其值域 $R_\varphi = [a,b]$,且 $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$　(换元积分法).

(6) 若在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x) \geqslant g(x)$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(7) 积分中值定理:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则存在 $\xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

(8) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则在 $[a,b]$ 上有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$.

4. 牛顿—莱布尼茨公式

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x)$ 为 $f(x)$ 的任一个原函数,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

# 第 4 章　向量代数与空间解析几何

1. 向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$.

(1) 向量的加减法

坐标表示式：$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$.

(2) 向量的数乘　设 $\lambda$、$\mu$ 是数，则

$$\lambda\boldsymbol{a}=\begin{cases}|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{\alpha}|\\ \text{方向}\begin{cases}\text{与 }\boldsymbol{a}\text{ 同向，当 }\lambda>0.\\ \text{与 }\boldsymbol{a}\text{ 反向，当 }\lambda<0.\end{cases}\end{cases}$$

坐标表示式：$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.

运算规律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

2. 向量的乘法

(1) 向量的数量积

定义式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

坐标表示式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

性质：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，

　　$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$.

运算规律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(2) 向量的向量积

定义式：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\begin{cases}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\ \text{方向：同时垂直于 }\boldsymbol{a}\text{、}\boldsymbol{b}\text{，指向：按右手法则从 }\boldsymbol{a}\text{ 到 }\boldsymbol{b}\text{ 确定.}\end{cases}$

坐标表示式：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$.

性质：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行 $\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，

运算规律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$　（无交换律）；

　　$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$；

　　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

几何意义：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

(3) 向量的混合积

定义式：$[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

坐标表示式：$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$.

性质：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$.

几何意义：$|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

3. 平面方程

点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

一般式：$Ax+By+Cz+D=0$.

截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

三点式：$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

4. 空间直线方程

一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

对称式（标准式、点向式）：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

两点式：$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

参数式：$x=x_0+mt, y=y_0+nt, z=z_0+pt$.

5. 两平面的夹角

设两平面方程为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，其夹角为 $\varphi$，则

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

点 $(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

6. 两直线的夹角

设两直线方程为 $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，其夹角为 $\varphi$，则

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

7. 直线与平面的夹角

设直线 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，平面 $Ax+By+Cz+D=0$，其夹角为 $\varphi$，则

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

8. 平行条件

平面与平面：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

直线与直线：$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

直线与平面：$mA+nB+pC=0$.

9.垂直条件

平面与平面：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

直线与直线：$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

直线与平面：$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

10.球面方程$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，其中球心坐标为$(a,b,c)$，半径为$R$.

11.柱面方程

准线为$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$母线平行于$z$轴的柱面方程为$f(x,y)=0$.

12.旋转曲面

曲线$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$绕$Ox$轴旋转的旋转曲面方程为$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$；绕$Oy$轴旋转的旋转曲面方程为$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

13.几种常用二次曲面方程

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，其中$a$、$b$、$c$为椭球面的半轴.

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，其中$a$、$b$、$c$为它的半轴.

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$，其中$a$、$b$、$c$为它的半轴.

椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$，其中$p$、$q$同号.

双曲抛物面：$-\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$，其中$p$、$q$异号.

二次锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

14.曲线

空间曲线可以看成是空间两张曲面的交线.设两曲面方程为$F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$，则空间曲线方程为$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$或用参数写成$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$.

15.空间曲线在坐标面上的投影曲线方程

空间曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$在$xOy$面上的投影曲线方程是在上式中消去$z$得投影柱面方程$f(x,y)=0$，再与$z=0$联立，即$\begin{cases}f(x,y)=0,\\z=0.\end{cases}$

# 第 5 章 多元函数微分学

1. 偏导数

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

2. 全微分

(1) 全微分公式 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

(2) 可微的充分条件 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处两个偏导数连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微.

(3) 可微的必要条件 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微,则 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处两个偏导数存在.

3. 复合函数微分法

设 $z=f(u,v)$,并设 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$,则 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 是 $x,y$ 的复合函数. 如果 $z=f(u,v)$ 可微,$u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$ 对 $x,y$ 的偏导数存在,则 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 对 $x,y$ 的偏导数存在,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

4. 方向导数的计算公式

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x,y)$ 可微,$l$ 方向的方向余弦为 $\cos\alpha$,$\cos\beta$,则函数在 $M_0$ 处沿 $l$ 方向的方向导数存在,且

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta.$$

函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x,y,z)$ 沿 $l$ 方向的方向导数计算公式为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ 为 $l$ 方向的方向余弦.

5. 梯度的计算公式

设数量场 $u=u(x,y,z)$ 具有连续的偏导数,则 $\mathbf{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$

6. 隐函数微分法

(1) 公式法 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 确定的具有连续偏导数的函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的偏导数公式

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_y}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

(2) 利用复合函数微分法　设方程 $F(x,y)=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，将 $y=y(x)$ 代入方程后，方程变为恒等式

$$F(x,y(x))=0,$$

应用复合函数微分法，有

$$F_x(x,y)\cdot 1+F_y(x,y)\cdot y_x=0.$$

从中解出 $y_x$.

反复利用上述方法，可以求得隐函数的高阶偏导数.

7. 多元函数的极值

(1) 普通极值问题

定理1(极值的必要条件)　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 有极值，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的两个偏导数存在，则 $F_x(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)=0$.

定理2(极值的充分条件)　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有二阶连续偏导数，又 $F_x(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)=0$，令 $F_{xx}(x_0,y_0)=A$，$F_{xy}(x_0,y_0)=B$，$F_{yy}(x_0,y_0)=C$，则

① 当 $AC-B^2>0$，$f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处有极值，且 $A>0$ 时为极小值，$A<0$ 时为极大值.

② 当 $AC-B^2<0$，$f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处无极值.

③ 当 $AC-B^2=0$，不能判定 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 是否有极值.

(2) 条件极值问题

可微函数 $z=f(x,y)$ 满足条件 $\varphi(x,y)=0$ 的条件极值的必要条件为

$$\begin{cases} F_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ F_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

上述方程组可以认为是函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 的无条件极值点的必要条件，其中 $F$ 称为拉格朗日函数，$\lambda$ 为拉格朗日乘数.

8. 空间曲线的切线、法平面和曲面的切平面、法线

(1) 空间曲线的切线和法平面：设空间曲线的参数方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，则在曲线上对应于 $t=t_0$ 的点处的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$.

切线的方向矢量为 $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$.

法平面方程为 $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$.

(2) 空间曲面的切平面和法线：若曲面由 $F(x,y,z)=0$ 给出，则在曲面上点 $(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$.

若曲面由 $z=f(x,y)$ 给出，则在曲面上点 $(x_0,y_0)$ 处的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.

# 第 6 章　多元函数积分学

1. 多元函数积分的性质

(1) 被积函数中，常数因子可提到积分号外面. 即

$$\int_K Cf(P)\mathrm{d}W = C\int_K f(P)\mathrm{d}W.$$

(2) 函数代数和的积分等于各函数积分的代数和. 即

$$\int_K [f(P) \pm g(P)]\mathrm{d}W = \int_K f(P)\mathrm{d}W \pm \int_K g(P)\mathrm{d}W.$$

(3) 若积分可分成两个子域 $K_1$、$K_2$，则

$$\int_K f(P)\mathrm{d}W = \int_{K_1} f(P)\mathrm{d}W + \int_{K_2} f(P)\mathrm{d}W.$$

(4) 若在区域 $K$ 上，$f(P)=1$，则$\int_K \mathrm{d}W = K^*$.

在二重积分中 $K^*$ 为平面域$K$的面积；三重积分中 $K^*$ 为空间域$K$的体积；第一类曲线积分中 $K^*$ 为曲线长度；第一类曲面积分中 $K^*$ 为曲面面积.

(5) 若在域$K$上，$f(P)\leqslant g(P)$，则$\int_K f(P)\mathrm{d}W \leqslant \int_K g(P)\mathrm{d}W$，特别地，因为$-|f(P)| \leqslant f(P) \leqslant |f(P)|$，所以

$$\left|\int_K f(P)\mathrm{d}W\right| \leqslant \int_K |f(P)|\mathrm{d}W.$$

(6) 设$M$、$m$分别为$f(P)$在区域$K$上的最大值与最小值，则$mK^* \leqslant \int_K f(P)\mathrm{d}W \leqslant MK^*$.

(7)(中值定理) 如果 $f(P)$ 在 $K$ 上连续，则在 $K$ 上至少存在一点 $P'$，使$\int_K f(P)\mathrm{d}W = f(P')\cdot K^*$.

2. 二重积分的计算

(1) 在直角坐标系中计算二重积分　如图 6-1 所示 $D$ 为 $X$ 型域且

$$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x)\},$$

则
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

若 $D$ 为 $Y$ 型域(图 6-2)，且

$$D=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d, \psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y)\},$$

则
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

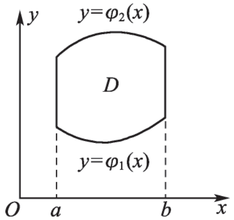

图 6-1

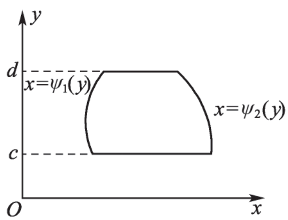

图 6-2

(2) 极坐标系中计算二重积分

① 极点在 $D$ 外(图 6-3),且

$D=\{(r,\theta)\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\varphi_1(\theta)\leqslant r\leqslant\varphi_2(\theta)\}$,

则$\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

② 极点在 $D$ 的边界上(图 6-4),且 $D=\{(r,\theta)\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta)\}$.

则$\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

③ 极点在 $D$ 内(图 6-5),且 $D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta)\}$,

则$\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

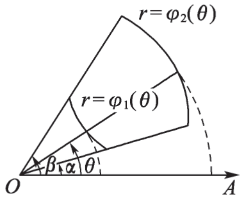

图 6-3

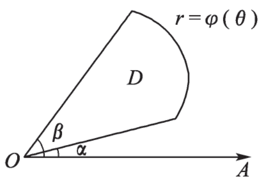

图 6-4

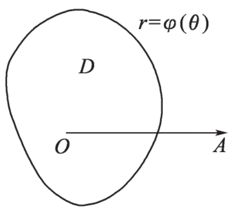

图 6-5

3. 三重积分的计算

(1) 在直角坐标系中计算三重积分

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

其中 $\Omega$ 之边界曲面与平行于 $z$ 轴且穿过 $\Omega$ 内部直线相交不多于两点. $D_{xy}$ 为 $\Omega$ 在 $xOy$ 平面上的投影, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ 分别为 $\Omega$ 下方和上方的曲面方程, $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为直角坐标系中的体积元素.

类似的可将三重积分化为其他次序的累次积分.

(2) 在柱面坐标系中计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$
$$= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} r\mathrm{d}r \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\mathrm{d}z.$$

此时 $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ 为体积元素.

$\Omega = \{(r,\theta,z) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \varphi_1(\theta) \leqslant r \leqslant \varphi_2(\theta), z_1(r,\theta) \leqslant z \leqslant z_2(r,\theta)\}$.

(3) 在球面坐标系中计算三重积分

若积分域 $\Omega$ 可表示为: $\Omega = \{(r,\theta,\varphi) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \psi_1(\theta) \leqslant \varphi \leqslant \psi_2(\theta), z_1(\theta,\varphi) \leqslant r \leqslant z_2(\theta,\varphi)\}$, 它与直角坐标系的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

体积元素为 $\mathrm{d}V = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. 则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\psi_1(\theta)}^{\psi_2(\theta)} \sin\varphi\mathrm{d}\varphi \int_{z_1(\theta,\varphi)}^{z_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2\mathrm{d}r.$$

4. 求面积

(1) 平面闭域 $D$ 的面积 $A = \iint_D \mathrm{d}\sigma$.

(2) 若曲面 $\Sigma$ 方程为 $z = z(z,y)$, $\Sigma$ 在 $xOy$ 上投影域为 $D$, $f(x,y)$ 在 $D$ 上有连续偏导数, 则 $\Sigma$ 的面积为

$$A = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另外两种形式的曲面方程同理有相应的曲面面积公式.

5. 求体积

(1) 曲顶柱体体积　设柱体上顶是连续曲面, 方程为 $z = f(x,y)((x,y) \in D, f(x,y) \geqslant 0)$, 下底为平面 $z=0$ 上的区域 $D$, 侧面是以 $D$ 的边界曲线为准线, 母线平行于 $z$ 轴的柱面, 则该柱体体积为

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 已知边界曲面的空间区域 $\Omega$ 的体积 $V = \iiint_\Omega \mathrm{d}V$.

6. 质心坐标

(1) 占有平面区域 $D$ 且质量密度 $\rho(x,y)$ 的平面薄片的质量 $M=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$，对 $x$、$y$ 轴静力矩为 $M_x=\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$，$M_y=\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$，则 $D$ 的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma},\ \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}.$$

(2) 占有空间域 $\Omega$ 且密度为 $\rho(x,y,z)$ 的空间立体其质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,\ \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega y\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,\ \bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega z\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

7. 转动惯量

(1) 平面薄片对 $Ox$、$Oy$ 轴及坐标原点的转动惯量分别为

$$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\ I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\ I_0=\iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

其中 $D$ 为平面薄片占有的平面域，$\rho(x,y)$ 为薄片质量密度.

(2) 空间物体对于坐标面的转动惯量分别为

$$I_{xy}=\iiint\limits_\Omega z^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,\ I_{yz}=\iiint\limits_\Omega x^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,\ I_{zx}=\iiint\limits_\Omega y^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

对坐标轴 $Ox$、$Oy$、$Oz$ 的转动惯量为

$$I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,\ I_y=\iiint\limits_\Omega (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$I_z=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

对坐标原点转动惯量为

$$I_0=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

8. 对弧长的曲线积分(第一型曲线积分)

① 曲线 $L$ 由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 表示，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

② 曲线 $L$ 由方程 $y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 表示，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

③ 曲线 $L$ 由方程 $x=x(y)(c\leqslant y\leqslant d)$ 表示，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+x'^2(y)}\,\mathrm{d}y.$$

④ 空间曲线 $\Gamma$ 由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 表示，则

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

9. 对坐标的曲线积分(第二型曲线积分)

① 曲线 $L$ 由参数方程 $x=x(t),y=y(t)$ 表示,$L$ 的起点 $A$ 对应于 $t=\alpha$,终点 $B$ 对应于 $t=\beta$,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t.$$

② 曲线 $L$ 由方程 $y=y(x)$ 表示,$L$ 的起点 $A$ 与终点 $B$ 对应的横坐标分别为 $a$、$b$,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}\mathrm{d}x.$$

③ 曲线 $L$ 由方程 $x=x(y)(c\leqslant y\leqslant d)$ 表示,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\{P[x(y),y]x'(y)+Q[x(y),y]\}\mathrm{d}y.$$

④ 空间曲线 $\Gamma$ 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 表示,则有

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}\mathrm{d}t.$$

10. 两种曲线积分之间的关系

设 $\Gamma$ 为空间有向曲线,$\Gamma$ 上点 $M(x,y,z)$ 处切线的方向余弦为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$,则

$$\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{\Gamma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s.$$

11. 格林公式

设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在区域 $D$ 及其边界 $L$ 上具有一阶连续偏导数,则

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

其中 $L$ 取正向.

12. 四个等价命题

设函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在平面单连通区域 $D$ 内具有一阶连续偏导数,则以下四个条件等价:

(1) 在 $D$ 内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关,而只与路径起点、终点有关.

(2) 沿 $D$ 内任一闭曲线 $L$,$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

(3) 微分式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 $D$ 内是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分,即 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

(4) 在 $D$ 内恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

13. 曲线积分的应用

(1) 求质量　设空间曲线 $\Gamma$ 上任一点 $(x,y,z)$ 处的密度为 $\rho=\rho(x,y,z)$,则此曲线的质量为

$$M=\int_\Gamma \rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

(2) 求质心坐标　设空间物质曲线 $\Gamma$ 上质量分布是均匀的，则曲线 $\Gamma$ 的质心坐标是

$$\bar{x}=\frac{\int_\Gamma x\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \mathrm{d}s};\quad \bar{y}=\frac{\int_\Gamma y\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \mathrm{d}s};\quad \bar{z}=\frac{\int_\Gamma z\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \mathrm{d}s}.$$

(3) 求功　在力场 $\boldsymbol{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 作用下，质点沿曲线 $\Gamma$ 由 $A$ 移动到 $B$，则力 $\boldsymbol{F}$ 所作功为

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$.

14. 对面积的曲面积分(第一型曲面积分)

① 设曲面 $\Sigma$ 的方程为 $z=z(x,y)$，$\Sigma$ 在 $xOy$ 面上投影区域为 $D_{xy}$，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

② 设曲面 $\Sigma$ 的方程为 $y=y(x,z)$，$\Sigma$ 在 $zOx$ 面上投影区域为 $D_{zx}$，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{zx}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

③ 设曲面 $\Sigma$ 的方程为 $x=x(y,z)$，$\Sigma$ 在 $yOz$ 面上投影区域为 $D_{yz}$，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

15. 对坐标的曲面积分(第二型曲面积分)

① 设有向曲面 $\Sigma$ 的方程为 $z=z(x,y)$，$\Sigma$ 在 $xOy$ 面上投影区域为 $D_{xy}$，则

$$\iint_\Sigma R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

上式中若 $\Sigma$ 的正向与 $z$ 轴正向夹角小于 $\frac{\pi}{2}$ 取“+”号，大于 $\frac{\pi}{2}$ 时取“−”号.

② 类似地有下面两式：

$$\iint_\Sigma Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(x,z),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\quad\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

16. 两类曲面积分之间的关系

设 $\Sigma$ 为有向曲面，$\Sigma$ 上点 $M(x,y,z)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}^0$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，则有

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

17. 高斯公式

设函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在空间闭区域 $\Omega$ 上具有一阶连续偏导数，

则$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V=\oiint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中$\Sigma$是$\Omega$的边界曲面外侧.

18. 斯托克斯公式

设函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在包含曲面$\Sigma$的空间域$\Omega$内具有一阶连续偏导数,记$\Gamma$为曲面$\Sigma$的边界曲线,则

$$\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

其中曲线$\Gamma$的正向与曲面$\Sigma$的法矢量方向遵循右手法则.

19. 曲面积分的应用

(1) 曲面的面积　空间曲面$\Sigma$的面积为$A=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$.

(2) 曲面的质量　若曲面$\Sigma$上点$(x,y,z)$处的密度为$\rho=\rho(x,y,z)$,则曲面$\Sigma$的质量为

$$M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

类似于曲线积分的应用,也可用对面积的曲面积分表示物质曲面的质心坐标及转动惯量.

(3) 流量　设有不可压缩的流体(密度$\rho=1$)在恒稳地流动,如果在点$(x,y,z)$处的流速是$\boldsymbol{v}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$,$\Sigma$是流速场中一有向曲面,则在单位时间内从曲面$\Sigma$正侧流出的流量

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

此处$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$.

# 第 7 章　无穷级数

1. 级数的性质

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和为 $S$，$k$ 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为 $kS$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n = kS.$$

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 $S_1$ 和 $S_2$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_1 \pm S_2.$$

(3) 在级数的前面部分去掉或加上有限项，不影响级数的敛散性，在原级数收敛时，仅可能改变级数的和.

(4) 收敛级数的各项按原次序分组加括号后，所成的新级数仍收敛，且其和不变；反之，不一定成立.

(5) 级数收敛的必要条件：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

2. 正项级数的敛散性

(1) 基本定理　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $S_n$ 有界.

(2) 比较审敛法　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数：

(ⅰ) 若 $u_n \leqslant v_n (n = 1,2,\cdots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(ⅱ) 若 $u_n \geqslant v_n (n = 1,2,\cdots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

(3) 比较审敛法的极限形式　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l (0 \leqslant l \leqslant +\infty)$：

① 若 $0 \leqslant l < +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

② 若 $0 < l \leqslant +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

(4) 比值审敛法　设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则

(ⅰ) 当 $0 \leqslant \rho < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(ⅱ) 当 $1 < \rho \leqslant +\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(5) 根值审敛法　设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则

(ⅰ) 当 $0 \leqslant \rho < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(ⅱ) 当 $1 < \rho \leqslant +\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

3. 交错级数审敛法

若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足 (ⅰ) $u_n \geqslant u_{n+1}$；(ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
则该交错级数收敛，且其和 $S \leqslant u_1$，余项的绝对值 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

4. 绝对收敛与条件收敛

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为绝对收敛级数；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为条件收敛.

5. 幂级数收敛的阿贝尔定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0\,(x_0 \neq 0)$ 收敛，则对一切 $|x| < |x_0|$ 的 $x$ 值，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ 处发散，则对一切 $|x| > |x_0|$ 的 $x$ 值，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

6. 幂级数的收敛半径

设 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，其中 $a_n$、$a_{n+1}$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项的系数，有

(ⅰ) $\rho \neq 0$，则 $R = \dfrac{1}{\rho}$；

(ⅱ) $\rho = 0$，则 $R = +\infty$；

(ⅲ) $\rho = +\infty$，则 $R = 0$.

7. 幂级数的和函数的性质

(1) 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是连续的.

(2) 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是可导的，并且有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

且逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

(3) 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内是可积的，并且有逐项积分公式

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

且逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

8. 泰勒定理

设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个邻域内具有任意阶导数，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的泰勒级数在该邻域内收敛于 $f(x)$ 的充要条件是：当 $n\to\infty$ 时，$f(x)$ 在点 $x_0$ 的泰勒余项 $R_n(x)$ 的极限为零.

9. 狄里克雷充分条件

设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数. 如果它满足条件：在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，并且至多只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

(1) 当 $x$ 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$.

(2) 当 $x$ 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

(3) 当 $x$ 是端点 $x=-\pi$ 或 $x=\pi$ 时，级数收敛于 $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

10. 以 $2\pi$ 为周期的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中 $\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots). \end{cases}$

11. 正弦级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，其中 $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$.

12. 余弦级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，其中 $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$.

13. 以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中 $\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots). \end{cases}$

17. 常用函数的幂级数展开式

(1) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots(-1<x<1)$.

(2) $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$.

(3) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$.

(4) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$.

(5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots (-1 < x \leqslant 1)$.

(6) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

# 第 8 章　常微分方程

1. 变量可分离方程

形如$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的方程. 分离变量后积分可得通解

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

2. 齐次方程

形如$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$的方程. 经换元 $u = \frac{y}{x}$,可化齐次方程为变量可分离方程求解.

3. 一阶线性方程

形如$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的方程. 其通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx}[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx]$$

4. 伯努利方程

经过整理,可化为形如$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n (n \neq 0,1)$ 形式的方程,令 $z = y^{1-n}$ 可化成 $z$ 的一阶线性方程$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$

5. 全微分方程

如果方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 的左边恰好是某一函数 $u = u(x,y)$ 的全微分,即 $du = Pdx + Qdy$,则称这样的微分方程为全微分方程.

通解是

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$$

或

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C.$$

6. 可降阶的高阶微分方程

形如 $y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x,y')$ 及 $y''=f(y,y')$ 的微分方程均称为可降阶的高阶微分方程. 分别用逐次积分法和变量代换 $p=y'$ 降阶计算.

7. 二阶线性微分方程的性质

性质1　如果 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

的两个解，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是方程(1)的解，其中 $C_1$ 与 $C_2$ 为两个任意的常数. 当 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关，且 $C_1$ 与 $C_2$ 是相互独立的两个任意常数时，$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程(1)的通解.

性质2　若复值函数 $y=y_1(x)+\mathrm{i}y_2(x)$ 是方程(1)的解，则 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 也是方程(1)的解.

性质3　如果 $y^*$ 是二阶线性非齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \tag{2}$$

的一个特解，$Y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程(2)对应的齐次方程的通解，则 $y=Y+y^*$ 是方程(2)的通解.

8. 二阶常系数线性齐次方程

$$y''+py'+qy=0$$

的通解可按下表求出：

| 特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根 | 微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 |
|---|---|
| 实根 $r_1\neq r_2$ | $y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$ |
| 实根 $r_1=r_2=r$ | $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}$ |
| 复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ | $y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ |

9. 二阶常系数非齐次方程

$$y''+py'+qy=P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

的特解形式为

$$y^*=x^kQ_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x},$$

其中 $P_n(x)$ 是已知 $n$ 次多项式函数，$Q_n(x)$ 是待定的 $n$ 次多项式函数，$k$ 的取值按 $\alpha$ 不是特征根、是特征单根或特征重根，依次取0、1或2.

10. 二阶常系数非齐次方程

$$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x+P_m(x)\sin\beta x)$$

的特解形式为

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}[Q_n^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_n^{(2)}(x)\sin\beta x]$$

其中 $P_l(x)$、$P_m(x)$ 分别是 $l$ 次、$m$ 次多项式函数，$Q_n^{(1)}(x)$、$Q_n^{(2)}(x)$ 的待定的 $n$ 次多项式函数，$n=\max\{l,m\}$，$k$ 按 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 不是特征根或是特征根分别取0或1.

# 第二篇　线性代数

## 第 1 章　行 列 式

1. 排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的逆序数 $N(i_1\ i_2\ \cdots\ i_n) = i_1$ 后面比 $i_1$ 小的数的个数 $+ i_2$ 的后面比 $i_2$ 小的数的个数 $+ \cdots + i_{n-1}$ 后面比 $i_{n-1}$ 小的数的个数.

2. $n$ 个元素所有排列的种数为 $P_n = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

3. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{N(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

4. $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n.$$

5. $n$ 次排列中($n \geqslant 2$),奇排列与偶排列的个数相等,各为$\frac{1}{2}n!$个.

6. $N(x_1 x_2 \cdots x_n) = \frac{1}{2}n(n-1) - N(x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1)$.

7. 关于代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$,$D$ 为原行列式的值.

8. 行列式的计算方法

(1) 行列式定义法.

(2) 行列式按一行、列展开.

(3) 加边法(升阶法).

(4) 递推公式法.

(5) 数学归纳法.

(6) 范德蒙德行列式法.

(7) 媒介法(借用“第三者”).

9. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

10. 克莱姆法则

$n$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

若方程组系数矩阵 $D \neq 0$,则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 $D$ 中第 $j$ 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 $n$ 阶行列式.

# 第 2 章 矩阵及其运算

1. 关于矩阵的加法运算的公式

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$; (2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$; (4) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

2. 关于数乘矩阵运算的公式

(1) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$;

(2) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(3) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

3. 关于矩阵的乘法运算的公式

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$; (2) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$;

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$; (4) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;

(5) $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$; (6) $(\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{E})$;

(7) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$; (8) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$;

(9) 一般情况下,$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

4. 关于矩阵的转置运算的公式

(1) $(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$; (2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$;　　(4) $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

5. 关于方阵的行列式的公式

若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 阶方阵,

(1) $|\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}|$;

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$;

(3) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$;

(4) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}|$.

6. 关于伴随矩阵的公式

(1) $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$;若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,则 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

(2) $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$;

(3) $(\boldsymbol{A}^*)^T = (\boldsymbol{A}^T)^*$;

(4) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$;

(5) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆方阵;

(6) $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

7. 关于逆矩阵的公式

(1) $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$;

(2) 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$;

(3) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$;

(4) $(k\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$,其中 $k \neq 0$;

(5) $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$;

(6) $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(7) $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$;

(8) 一般情况下,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$.

8. 关于分块矩阵的公式

(1) 若 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{bmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A}_i\,(i = 1,2,\cdots,s)$ 是方阵,则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|$.若 $|\boldsymbol{A}_i| \neq 0\,(i = 1,2,\cdots,s)$,则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,

且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_s & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$;

(3) 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为可逆方阵，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix};$$

(4) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$;

(5) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$;

(6) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

# 第 3 章　矩阵的初等变换与线性方程组

1. 初等变换求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，三种方法

(1) $[\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E}] \xrightarrow{\text{行初等变换}} [\boldsymbol{E} \vdots \boldsymbol{A}^{-1}]$;

(2) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \cdots \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \cdots \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行、列一块变换}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$.

2. 初等矩阵的逆和转置

$\boldsymbol{E}^T(i,j) = \boldsymbol{E}(i,j)$,

$\boldsymbol{E}^T(i(k)) = \boldsymbol{E}(i(k))$,

$\boldsymbol{E}^T(i,j(k)) = \boldsymbol{E}(j,i(k))$

$\boldsymbol{E}^{-1}(i,j) = \boldsymbol{E}(i,j)$,

$\boldsymbol{E}^{-1}(i(k)) = \boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$,

$\boldsymbol{E}^{-1}(i,j(k)) = \boldsymbol{E}(i,j(-k))$.

3. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_t$ 使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 等价.

4. $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow$ 存在 $m$ 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 以及 $n$ 阶可逆阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

5. 初等矩阵的推广

(1) 令 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})$，

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&&&&&&\\&0&&&&&\\&&\ddots&&&&\\&&&1&&&\\&&&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\i\text{ 行}.\\\\\\\\\end{array}\\ j\text{列}\end{array}$$

$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$ 相当于把 $\boldsymbol{A}$ 中第 $i$ 行换成第 $j$ 行元素，其余元素为 0，

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$ 相当于把 $\boldsymbol{A}$ 中第 $j$ 列换成第 $i$ 列元素，其余元素为 0.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 中行向量

$$\begin{bmatrix}&&&&1\\&&&1&\\&&1&&\\&\iddots&&&\\1&&&&\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_1\end{bmatrix}$$

相当于把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中行向量顺序颠倒了一下.

同理，设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]$，其中 $\boldsymbol{\beta}_j$ 为 $\boldsymbol{A}$ 中列向量，$j=1,2,\cdots,n$，

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\\iddots&&\\1&&\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_1],$$

相当于把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量顺序颠倒了一下.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量，$i=1,2,\cdots,n$.

$$\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

相当于把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行向上递推了一次.

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1} \end{bmatrix},$$

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的各行向下递推一次.

同理,设 $\boldsymbol{A}=[\beta_1,\cdots,\beta_n]$,其中 $\boldsymbol{\beta}_j$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量,$j=1,2,\cdots,n$,

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}=[\boldsymbol{0},\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-1}],$$

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的列向量向右递推一次.

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{0}]$$

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的列向量向左递推一次.

6. $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

7. 矩阵秩的性质

(1) $0\leqslant r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant \min\{m,n\}$.

(2) $r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{A})$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

(4) 若 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 可逆,则 $r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{A})$.

(5) $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n$.

(6) $r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

(7) $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

(8) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{0}$,则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

(9) $m\times n$ 阵 $\boldsymbol{A}$ 行满秩 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=m\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的等价标准形为 $[\boldsymbol{E}_m\ \vdots\ \boldsymbol{O}]$.

(10) $m\times n$ 阵 $\boldsymbol{A}$ 列满秩 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的等价标准形为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

(11) $r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

(12) $r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}$ 的行数.

(13) $r(\boldsymbol{ABC})\geqslant r(\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{BC})-r(\boldsymbol{B})$.

(14) 若 $\boldsymbol{G}$ 为列向量无关的矩阵,$\boldsymbol{H}$ 为行向量无关的矩阵,则 $r(\boldsymbol{GA})=r(\boldsymbol{AH})=r(\boldsymbol{A})$.

(15) $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n, \\ 1\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n-1, \end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

8. 求矩阵秩的方法

(1) 利用定义法.

(2) 初等变换法.

(3) 计算子式法.

9. $n$ 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解的判定

(1) 方程组无解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$.

(2) 方程组有唯一解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=n$.

(3) 方程组有无穷多的解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})<n$.

10. $n$ 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$.

11. 矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$.

12. 矩阵方程 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times l}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n$.

# 第 4 章 向量组的线性相关性

1. 关于向量组线性相关性的性质

(1) 在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中,若有一个部分组线性相关,则整个向量组线性相关;若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,则向量组的任一部分组也线性无关.

(2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]$ 的秩小于向量个数 $m$;向量组线性无关的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]$ 的秩等于 $m$.

(3) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可以由其余的向量线性表示;向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任一向量都不能由其余的向量线性表示.

(4) $m$ 个 $n$ 维向量组成的向量组,当维数 $n$ 小于向量个数 $m$ 时一定线性相关,特别地,$n+1$ 个 $n$ 维向量一定线性相关.

(5) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,并且表示式是唯一的.

2. 关于线性方程组的解的公式

(1)(ⅰ)若齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_r$,则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\zeta}_1+k_2\boldsymbol{\zeta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\zeta}_r$,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 为任意实数;

(ⅱ)若 $\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $\boldsymbol{\zeta}_1+\boldsymbol{\zeta}_2$ 也是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解;

(ⅲ)若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵 且 $r(\boldsymbol{A})=r$,则 $n$ 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集 $S$ 的秩 $R_S=n-r$.

（2）（ⅰ）若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$，$\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解总可表示为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\zeta}_1+k_2\boldsymbol{\zeta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\zeta}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}^*$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意实数；

（ⅱ）若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 都是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；

（ⅲ）若 $\boldsymbol{\eta}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\zeta}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\eta}$ 仍是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

# 第5章 相似矩阵及二次型

1. 内积的性质

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 为 $n$ 维向量，$\lambda$ 为实数.

（1）$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$.

（2）$(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

（3）$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$.

（4）$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqslant 0$，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

（5）$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\leqslant(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$.

2. 向量长度的性质

（1）$\|\boldsymbol{x}\|\geqslant 0$，等号成立 $\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

（2）$\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|$.

（3）$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

3. 施密特正交化

设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 为向量空间 $V$ 的一组基，令

$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$，

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1,$$

……

$$\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_r-\frac{(\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1-\cdots-\frac{(\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_{r-1})}{(\boldsymbol{b}_{r-1},\boldsymbol{b}_{r-1})}\boldsymbol{b}_{r-1},$$

则得 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 彼此正交.

4. 正交矩阵的性质

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$ 也为正交阵，且 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $-1$.

（2）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

5. 方阵特征值的性质

(1)

| 矩　阵 | $\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{A}^m$ | $\boldsymbol{A}^{-1}$ | $k\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{A}^*$ | $f(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=0}^{m}a_i\boldsymbol{A}^i$ | $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 特征值 | $\lambda$ | $\lambda^m$ | $\dfrac{1}{\lambda}$ $\lambda\neq0$ | $k\lambda$ | $\dfrac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda}$ $\lambda\neq0$ | $f(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_i\lambda^i$ | $\lambda$ |
| 对应特征向量 | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ |

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的 $n$ 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn},\ \lambda_1\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=\lvert\boldsymbol{A}\rvert.$$

(3) 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数,属于不同特征值的特征向量正交.

(4) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 特征值相同.

(5) $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

(6) 幂零矩阵有 $n$ 重特征值 0.

(7) 幂等矩阵($\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$)的特征值只可能是 0 或 1.

(8) 对合矩阵($\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$)的特征值只可能是 $-1$ 或 1.

(9) 幺幂矩阵($\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$)的特征值是 1 的 $k$ 次方根.

6. 特征向量的性质

(1) $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda$ 的特征向量,则 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,且对任意 $k\neq0$,$k\boldsymbol{x}$ 也是属于特征值 $\lambda$ 的特征向量.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量线性无关.

(3) 若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 是属于 $\boldsymbol{A}$ 的同一特征值 $\lambda_0$ 的特征向量,且 $k_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m\neq\boldsymbol{0}$,则 $k_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_0$ 的特征向量.

(4) 设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同特征值,$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于 $\lambda_1,\lambda_2$ 的特征向量,则 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

7. 相似矩阵的性质.

(1) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=\lvert\boldsymbol{B}\rvert$,且 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值.

(3) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$.

(4) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

(5) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T,\boldsymbol{A}^k\sim\boldsymbol{B}^k,\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1},f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$.

8. 化二次型为标准形的方法

(1) 正交变换法.

(2) 初等变换法.

(3) 配方法.

9. 二次型正定性的判定充要条件

(1) $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

（2）$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式大于 0.
（3）$\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于 0.
（4）$\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.
（5）$\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数 $p=n$.
（6）存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$.
（7）存在可逆上（下）三角阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$.

# 第 6 章 线性空间与线性变换

1. 关于基变换和坐标变换的公式

（1）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 中的两个基,且有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2=p_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases} \quad ①$$

即：$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1}\\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^T\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}$

或 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{P}$. ②

① 或 ② 式称为基变换公式. 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

（2）设 $\boldsymbol{V}_n$ 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标为 $(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)^T$，若由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$,则坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}x'_1\\ x'_2\\ \vdots\\ x'_n\end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix}x'_1\\ x'_2\\ \vdots\\ x'_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.$$

2. 线性变换在不同基下矩阵之间的关系式：

设线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 中取定两个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{V}_n$ 中的线性变换 $T$ 在这个基下的矩阵依次为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

# 第三篇　概率论与数理统计

## 第 1 章　概率论的基本概念

1. 事件的运算律

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A, AB = BA$.

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3) 分配律　$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$,

$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$.

(4) 摩根律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(5) 减法运算　$A - B = A\overline{B}$.

2. 条件概率

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (若\ P(A) > 0),$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (若\ P(B) > 0).$$

3. 乘法法则

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A)(若\ P(A) > 0),$$

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B)(若\ P(B) > 0),$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1}).$$

4. 全概率公式

若事件 $A_1, A_2, \cdots$ 构成一个完备事件组,且都具有正概率,则对任何一个事件 $B$,有

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B \mid A_i).$$

5. 贝叶斯公式

若 $A_1, A_2, \cdots$ 构成一个完备事件组,且均具有正概率,则对任何一个概率不为零的事件 $B$,有

$$P(A_m \mid B) = \frac{P(A_m)P(B \mid A_m)}{\sum_i P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

6. 事件独立性结论

(1) 事件 $A$ 与 $B$ 独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

(2) 若事件 $A$ 与 $B$ 独立,则 $A$ 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 $B$,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中的每一对事件都相互独立.

(3) 若事件 $A_1, \cdots, A_n$ 相互独立,则 $P(A_1 \cdots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$.

(4) 若事件 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立,则 $P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i)$.

7. 伯努利定理

设一次试验中事件 $A$ 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则 $n$ 重伯努利试验中,事件 $A$ 恰好发生 $k$ 次的概率 $P_n(k)$ 为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\qquad(k=0,1,\cdots,n),$$

其中 $q=1-p$.

# 第 2 章 随机变量及其分布

1. 一元离散型随机变量概率函数的性质

(1) $p_k\geqslant 0,\quad k=1,2,\cdots$;　(2) $\sum_k p_k=1$.

2. 一元连续型随机变量概率密度的性质

(1) 对一切实数 $x$,$f(x)\geqslant 0$;　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

3. 随机变量分布函数的性质

(1) $0\leqslant F(x)\leqslant 1,x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $F(x)$ 是 $x$ 的不减函数;

(3) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$;

(4) $F(x)$ 至多有可列个间断点,而在其间断点上也是右连续的.

4. 二元离散型随机变量$(\xi,\eta)$的联合概率分布(联合分布律)性质

(1) $p_{ij}\geqslant 0$;　(2) $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$.

5. 边缘分布与联合分布的关系

$$P\{\xi=x_i\}=\sum_j P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}=\sum_j p_{ij}\triangleq p_i^{(1)};\qquad(i=1,2,\cdots)$$

$$P\{\eta=y_j\}=\sum_i P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}=\sum_i p_{ij}\triangleq p_j^{(2)}.\qquad(j=1,2,\cdots)$$

6. 条件分布

(1) 在 $\eta=y_j$ 条件下,关于 $\xi$ 的条件分布:

$$P\{\xi=x_i\mid\eta=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_j^{(2)}}(i=1,2,\cdots);$$

(2) 在 $\xi=x_i$ 条件下关于 $\eta$ 的条件分布:

$$P\{\eta=y_j\mid\xi=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_i^{(1)}}(j=1,2,\cdots).$$

7. 二元连续型随机变量$(\xi,\eta)$的联合概率密度的性质

(1) 对一切实数 $x,y$,$\varphi(x,y)\geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$.

8. 边缘分布函数

$F_{\xi}(x)=P\{\xi\leqslant x,-\infty<\eta<+\infty\}=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}s\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s,t)\mathrm{d}t$；

$F_{\eta}(y)=P\{-\infty<\xi<+\infty,\eta\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{y}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s,t)\mathrm{d}s$.

9. 条件概率密度

(1) 在 $\eta=y$ 条件下，关于 $\xi$ 的条件概率密度

若 $\varphi_{\eta}(y)>0$，则

$$\varphi(x\mid y)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_{\eta}(y)};$$

(2) 在 $\xi=x$ 条件下，关于 $\eta$ 的条件概率密度

若 $\varphi_{\xi}(x)>0$，则

$$\varphi(y\mid x)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_{\xi}(x)}.$$

10. 随机变量的独立性：$F(x,y)=F_{\xi}(x)\cdot F_{\eta}(y)$

(1) 离散型　$\xi$ 与 $\eta$ 独立 $\Leftrightarrow$ 对一切 $i,j=1,2,\cdots$

$$p_{ij}=p_i^{(1)}p_j^{(2)};$$

(2) 连续型　$\xi$ 与 $\eta$ 独立 $\Leftrightarrow$ 对任何实数 $x,y$，

$$\varphi(x,y)=\varphi_{\xi}(x)\cdot\varphi_{\eta}(y).$$

# 第 3 章　随机变量的数字特征

1. 离散型随机变量的数学期望

$$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k,$$

其中 $p_k$ 为事件“$\xi=x_k$”发生的概率.

2. 连续型随机变量的数学期望

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $\varphi(x)$ 是随机变量 $\xi$ 的概率密度.

3. 期望的性质

(1) $E(c)=c$ ($c$ 为常数)；

(2) $E(\xi+c)=E\xi+c$；

(3) $E(c\xi)=cE\xi$；

(4) $E(k\xi+b)=kE\xi+b$($k,b$ 为常数);

(5) $E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta$;

(6) 相互独立两随机变量 $E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta$.

4. 随机变量函数的期望

(1) $\xi$ 是离散型随机变量,且 $P\{\xi=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots)$.

若 $\eta=f(\xi)$,则

$$E\eta=E[f(\xi)]=\sum_k f(x_k)p_k;$$

(2) $\xi$ 是连续型随机变量,且其概率密度为 $\varphi(x)$.

若 $\eta=f(\xi)$ ,则

$$E\eta=E[f(\xi)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

5. 条件期望

(1) 给定 $\xi=x_i$ 时,$\eta$ 的条件期望

① 二元离散型时 $E\{\eta\mid\xi=x_i\}=\sum_j y_jP\{\eta=y_j\mid\xi=x_i\}$;

② 二元连续型时 $E\{\eta\mid x\}=\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi(y\mid x)\mathrm{d}y$.

(2) 给定 $\eta=y_j$ 时,$\xi$ 的条件期望

① 二元离散型时 $E\{\xi\mid\eta=y_j\}=\sum_i x_iP\{\xi=x_i\mid\eta=y_j\}$;

② 二元连续型时 $E(\xi\mid y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x\mid y)\mathrm{d}x$.

6. 方差:$D\xi=E(\xi-E\xi)^2$

(1) $\xi$ 为离散型时,若 $P\{\xi=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots)$,$D\xi=\sum_k(x_k-E\xi)^2p_k$;

(2) $\xi$ 为连续型时,若其概率密度为 $\varphi(x)$,$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^2\varphi(x)\mathrm{d}x$.

7. 方差性质

(1) $D(c)=0$($c$ 为常数);

(2) $D(\xi+c)=D\xi$;

(3) $D(c\xi)=c^2D\xi$;

(4) $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta+2E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)]$,特别地,若 $\xi,\eta$ 相互独立,则 $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$;

(5) $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$.

8. 协方差

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)].$$

9. 相关系数

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}.$$

# 第4章　几种重要的分布

1. 二项分布

随机变量 $\xi$ 的分布律

① 0－1分布：$P\{\xi=k\}=p^kq^{1-k}(k=0,1)$.

② 二项分布：$P\{\xi=k\}=C_n^kp^kq^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)$.

③ 二项分布函数：$F(x)=\sum\limits_{k\leqslant x}C_n^kp^kq^{n-k}$；

事件最多出现 $m$ 次的概率：$P\{0\leqslant\xi\leqslant m\}=\sum\limits_{k=0}^{m}C_n^kp^nq^{n-k}$；

事件出现次函数不小于 $l$ 不大于 $m$ 的概率：

$$P\{l\leqslant\xi\leqslant m\}=\sum_{k=l}^{m}C_n^kp^kq^{n-k}.$$

2. 二项分布的期望和方差

$$E\xi=np,E\xi^2=npq+n^2p^2,$$

$$D\xi=npq.$$

3. 二项分布的最可能值 $k_0$

$$k_0=\begin{cases}np+p\text{ 和 }np+p-1, & np+p\text{ 是整数；}\\ [np+p], & \text{其他.}\end{cases}$$

4. 超几何分布的概率函数

$$P\{\xi=m\}=\frac{C_{N_1}^{m}C_{N_2}^{n-m}}{C_N^n}(m=0,\cdots,n).$$

5. 超几何分布的期望和方差

$$E\xi=n\cdot\frac{N_1}{N},\quad D\xi=n\cdot\frac{N_1}{N}\cdot\frac{N_2}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}.$$

6. 泊松分布的概率函数

$$P_\lambda(m)=P\{\xi=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}(m=0,1,\cdots).$$

7. 泊松分布的期望和方差

$$E\xi=\lambda,$$

$$D\xi=\lambda.$$

8. 指数分布的概率密度

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{当 }x>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

9. 指数分布的期望和方差

$$E\xi=\frac{1}{\lambda},D\xi=\frac{1}{\lambda^2}.$$

10. $\Gamma$分布的概率密度

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

11. $\Gamma$分布的期望和方差

$$E\xi=\frac{r}{\lambda},D\xi=\frac{r}{\lambda^2}.$$

12. 正态分布的概率密度

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

13. 标准正态分布概率密度 $\varphi_0(x)$ 的性质

(1) $\varphi_0(x)$ 有各阶导数;

(2) $\varphi_0(-x)=\varphi_0(x)$;

(3) $\varphi_0(x)$ 在$(-\infty,0)$内严格上升,在$(0,+\infty)$内严格下降,在$x=0$处达到最大值

$$\varphi_0(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0.3989;$$

(4) $\varphi_0(x)$ 在 $x=\pm 1$ 处有两个拐点;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi_0(x)=0$.

14. 一般正态分布与标准分布的关系

(1) $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$;

(2) $\Phi(x)=\Phi_0\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

15. 二元正态分布的二元连续型随机变量的联合概率密度

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.$$

16. 具有 $n$ 个自由度的 $t$ 分布的概率密度

$$\varphi(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

17. $F(n_1,n_2)$ 分布的概率密度

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

# 第5章　大数定律及中心极限定理

1．切比雪夫不等式

$$P\{|\xi-E\xi|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

$$P\{|\xi-E\xi|<\varepsilon\}\geqslant1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

2．切比雪夫定理

设$\xi_1,\xi_2,\cdots$是相互独立的随机变量序列，各有数学期望$E\xi_1,E\xi_2$及方差$D\xi_1,D\xi_2,\cdots$且对于所有$i=1,2,\cdots$都有$D\xi_i<l$，其中$l$是与$i$无关的常数，则$\forall\varepsilon>0$有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

3．李雅普诺夫定理

设$\xi_1,\xi_2,\cdots$是相互独立的随机变量，有期望值$E\xi_i=a_i$及方差$D\xi_i=\sigma_i^2<+\infty(i=1,2,\cdots)$，若每个$\xi_i$对总和$\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$影响不大，令$S_n=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，则

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{S_n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a_i)\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\Phi_0(x).$$

4．拉普拉斯定理

（1）局部极限定理

当$n\to\infty$时，

$$P\{\xi=k\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\mathrm{e}^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right);$$

（2）积分极限定理

当$n\to\infty$时，

$$P\{a<\xi<b\}\approx\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi_0\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

# 第 6 章 样本分布

1. 样本平均数

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

2. 样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

3. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，$X_i$ 服从正态分布 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$，则其线性函数 $\eta=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i$（$a_i$ 不全为零），也服从正态分布，且

$$E\eta=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,D\eta=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2.$$

4. 设$(X_1,\cdots,X_n)$是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则

(1) $\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$；

(2) $(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}/\sigma\sim N(0,1)$.

5. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，均服从标准正态分布，则其平均数 $\overline{X}=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i/n$ 与它们对平均数 $\overline{X}$ 的离差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 相互独立，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$.

6. 设$(X_1,\cdots,X_n)$是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则

(1) $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$；

(2) $\overline{X}$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 相互独立.

7. 设两个随机变量 $\xi$ 与 $\eta$ 相互独立，且 $\xi\sim N(0,1)$，$\eta\sim\chi^2(n)$，则 $T=\dfrac{\xi}{\sqrt{\eta/n}}$ 服从具有 $n$ 个自由度的 $t$ 分布.

8. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$，$S$ 分别为样本的平均数和标准差，则

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

9. 设 $X_1,\cdots,X_{n_1},Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自两个相互独立的正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$，则

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2).$$

10. 设两个随机变量 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 相互独立，且 $\xi_i\sim\chi^2(n_i)(i=1,2)$，则

$$F=\frac{\xi_1/n_1}{\xi_2/n_2}\sim F(n_1,n_2).$$

11. 设 $X_1,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是取自两个相互独立的正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则

$$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

# 第 7 章　参数估计

1. 从总体 $\xi$ 中取一样本$(X_1,\cdots,X_n)$，$E\xi=\mu$，$D\xi=\sigma^2$，则

$$E\overline{X}=\mu,$$
$$ES^2=\sigma^2.$$

2. 从总体中随机取出两个相互独立的样本$(X_{11},\cdots,X_{1n_1})$和$(X_{21},\cdots,X_{2n_2})$，则

$$\overline{X}=\frac{1}{n_1+n_2}(n_1\overline{X_1}+n_2\overline{X_2}),$$

$$S^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

3. 设样本$(X_1,\cdots,X_n)$来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$($\sigma$已知)，则$\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha,\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right)$$

4. 对方差未知的正态总体，小样本下 $E\xi$ 的区间估计：

$\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间由

$$P\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha<\mu<\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha\right)=1-\alpha\text{ 来确定.}$$

5. 小样本下正态总体方差 $\sigma^2$ 的区间估计：

$\sigma^2$ 的置信区间由

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{b}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{a}\right)=1-\alpha\text{ 来确定.}$$

# 第 8 章 假设检验

1．一个正态总体期望的假设检验方法

表 8-1

| 总体方差 | 假设 $H_0$ | 假设 $H_1$ | 检验统计量 | $\mu=\mu_0$ 时检验统计量的分布 | 拒绝域 $R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma^2$ 已知 | $\mu=\mu_0$ | $\mu\neq\mu_0$ | $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ | $N(0,1)$ | $\lvert U\rvert\geqslant\lambda,P\{\lvert U\rvert\geqslant\lambda\}=\alpha$ |
| | $\mu\leqslant\mu_0$ | $\mu>\mu_0$ | | | $U\geqslant\lambda,P\{U\geqslant\lambda\}=\alpha$ |
| | $\mu\geqslant\mu_0$ | $\mu<\mu_0$ | | | $U\leqslant-\lambda,P\{U\leqslant-\lambda\}=\alpha$ |
| $\sigma^2$ 未知 | $\mu=\mu_0$ | $\mu\neq\mu_0$ | $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$ | $t(n-1)$ | $\lvert T\rvert\geqslant\lambda,P\{\lvert T\rvert\geqslant\lambda\}=\alpha$ |
| | $\mu\leqslant\mu_0$ | $\mu>\mu_0$ | | | $T\geqslant\lambda,P\{T\geqslant\lambda\}=\alpha$ |
| | $\mu\geqslant\mu_0$ | $\mu<\mu_0$ | | | $T\leqslant-\lambda,P\{T\leqslant-\lambda\}=\alpha$ |

2．一个正态总体方差的假设检验方法

表 8-2

| 总体期望 | 假设 $H_0$ | 假设 $H_1$ | 检验统计量 | $\sigma=\sigma_0^2$ 时检验统计量的分布 | 拒绝域 $R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ 已知 | $\sigma^2=\sigma_0^2$ | $\sigma^2\neq\sigma_0^2$ | $K=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ | $\chi^2(n)$ | $\lvert K\rvert\geqslant\lambda_2$ 或 $K\leqslant\lambda_1$，$P\{K\leqslant\lambda_1\}=P\{K\geqslant\lambda_2\}=\dfrac{\alpha}{2}$ |
| | $\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ | $\sigma^2>\sigma_0^2$ | | | $K\geqslant\lambda_2,P\{K\geqslant\lambda_2\}=\alpha$ |
| | $\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$ | $\sigma^2<\sigma_0^2$ | | | $K\leqslant\lambda_1,P\{K\leqslant\lambda_1\}=\alpha$ |
| $\mu$ 未知 | $\sigma^2=\sigma_0^2$ | $\sigma^2\neq\sigma_0^2$ | $K=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 或 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_0^2}$ | $\chi^2(n-1)$ | $K\geqslant\lambda_2$ 或 $K\leqslant\lambda_1$，$P\{K\geqslant\lambda_2\}=P\{K\leqslant\lambda_1\}=\dfrac{\alpha}{2}$ |
| | $\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ | $\sigma^2>\sigma_0^2$ | | | $K\geqslant\lambda_2,P\{K\geqslant\lambda_2\}=\alpha$ |
| | $\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$ | $\sigma^2<\sigma_0^2$ | | | $K\leqslant\lambda_1,P\{K\leqslant\lambda_1\}=\alpha$ |

3．两个正态总体期望的假设检验方法

表 8-3

| 总体方差 | 假设 $H_0$ | 假设 $H_1$ | 检验统计量 | $\mu_1=\mu_2$ 时检验统计量的分布 | 拒绝域 $R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 已知 | $\mu_1=\mu_2$ | $\mu_1\neq\mu_2$ | $U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$ | $N(0,1)$ | $\|U\|\geqslant\lambda$，$P\{\|U\|\geqslant\lambda\}=\alpha$ |
| | $\mu_1\leqslant\mu_2$ | $\mu_1>\mu_2$ | | | $U\geqslant\lambda$，$P\{U\geqslant\lambda\}=\alpha$ |
| | $\mu_1\geqslant\mu_2$ | $\mu_1<\mu_2$ | | | $U\leqslant-\lambda$，$P\{U\leqslant-\lambda\}=\alpha$ |
| $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，$\sigma^2$ 未知 | $\mu_1=\mu_2$ | $\mu_1\neq\mu_2$ | $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)S^2}}$，$S^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$ | $t(m+n-2)$ | $\|T\|\geqslant\lambda$，$P\{\|T\|\geqslant\lambda\}=\alpha$ |
| | $\mu_1\leqslant\mu_2$ | $\mu_1>\mu_2$ | | | $T\geqslant\lambda$，$P\{T\geqslant\lambda\}=\alpha$ |
| | $\mu_1\geqslant\mu_2$ | $\mu_1<\mu_2$ | | | $T\leqslant-\lambda$，$P\{T\leqslant-\lambda\}=\alpha$ |

4. 两个正态总体方差和假设检验方法

表 8-4

| 总体均值 | 假设 $H_0$ | 假设 $H_1$ | 检验统计量 | $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时检验统计量的分布 | 拒绝域 $R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_1,\mu_2$ 已知 | $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ | $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ | $F=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}$ | $F(m,n)$ | $F\geqslant\lambda_2$ 或 $F\leqslant\lambda_1$，$P\{F\geqslant\lambda_2\}=P\{F\leqslant\lambda_1\}=\dfrac{\alpha}{2}$ |
| | $\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$ | $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ | | | $F\geqslant\lambda_2$，$P\{F\geqslant\lambda_2\}=\alpha$ |
| | $\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$ | $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ | | | $F\leqslant\lambda_1$，$P\{F\leqslant\lambda_1\}=\alpha$ |
| $\mu_1,\mu_2$ 未知 | $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ | $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ | $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ | $F(m-1,n-1)$ | $F\geqslant\lambda_2$ 或 $F\leqslant\lambda_1$，$P\{F\geqslant\lambda_2\}=P\{F\leqslant\lambda_1\}=\dfrac{\alpha}{2}$ |
| | $\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$ | $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ | | | $F\geqslant\lambda_2$，$P\{F\geqslant\lambda_2\}=\alpha$ |
| | $\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$ | $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ | | | $F\leqslant\lambda_1$，$P\{F\leqslant\lambda_1\}=\alpha$ |