# 拉普拉斯变换

$\mathcal{L}$表示拉普拉斯变换。

且此处仅介绍单边拉普拉斯变换，其中$s$为复参数：$s=\beta+i\omega$。

## 1. 概念

拉氏正变换：

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\,dt \tag{1}$$

拉式逆变换：

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega}F(s)e^{st}\,ds,(t>0) \tag{2}$$

我们称$F(s)$为**像函数**，$f(t)$为**像原函数。**

$f(t)$的拉普拉斯变换为$f(t)\cdot u(t)\cdot e^{-\beta t}$的傅里叶变换。（这里$u(t)$指单位阶跃函数）

---

拉普拉斯变换的**存在定理**：

> 存在条件　　语音　编辑
>
> 表达式$F(s)=\int_{0_-}^{\infty}f(t)\,e^{-st}dt$中，右边的积分为有限值。

## 2. 性质

$s_0$为复常数，$\alpha,\beta$为常数

- 线性性质：

$$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\leftrightarrow\alpha F_1(s)+\beta F_2(s) \tag{3}$$

- 位移性质：

$$f(t)\cdot e^{\pm s_0t}\leftrightarrow F(s\mp s_0) \tag{4}$$

- 延迟性质：（注意一般只考虑向右）

$$f(t-t_0)\cdot u(t-t_0)\leftrightarrow F(s)\cdot e^{-st_0},\ t_0>0 \tag{5}$$

- 时间尺度变换：（先平移，再缩放）

$$f(at-t_0)\varepsilon(at-t_0)\leftrightarrow\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})\cdot e^{-s\frac{t_0}{a}},\ (a>0,t_0\geq 0) \tag{6}$$

- 卷积定理：

  1)时域卷积：

$$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(s)\cdot F_2(s) \tag{7}$$

  2)频域卷积：（貌似很少用到）

$$f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{\ldots}\int^{\sigma+j\infty}\ldots \tag{8}$$

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\infty} F_1(\tau)F_2(s-\tau)d\tau \tag{8}$$

- 时域微分与积分性质：

  1)微分性质：

$$\begin{gathered} f'(t) \leftrightarrow sF(s)-f(0) \\ f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0) \end{gathered} \tag{9}$$

  这里要注意：$f'(t)=\frac{d\,f(t)}{dt} \neq \frac{d}{dt}[f(t)u(t)]$

  2)积分性质：

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} \tag{10}$$

- $s$域微分和积分性质：

  1)微分性质：

$$tf(t) \leftrightarrow -\frac{d\,F(s)}{ds}，\ t^nf(t) \leftrightarrow (-1)^n\frac{d^n\,F(s)}{ds^n} \tag{11}$$

  2)积分性质：

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty F(\eta)\,d\eta \tag{12}$$

## 3. 常用变换对

- $\delta(t) \leftrightarrow 1$
- $e^{kt} \leftrightarrow \frac{1}{s-k}$
- $t^n \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$，$(n>-1)$
- $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$
- $\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
- $\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

一定要记住，一定要记对！

要不然求逆变换的时候会很头大，而且在求得时候要注意与性质得结合使用

## 4. 解常微分方程

将方程中的$y,y',y''$依据拉普拉斯变换变形，右侧也是，这样可以求出$Y(s)$，再利用逆变换求$y=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$即可。

这里举个简单例子：

$$y''+2y'-3y=e^{-t},y(0)=0,y'(0)=1 \tag{13}$$

我们记录$Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$，则对两边取拉普拉斯变换有：

$$s^2\cdot Y(s)-1+2s\cdot Y(s)-3Y(s)=\frac{1}{s+1} \tag{14}$$

容易得到：

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s^2+2s-3)} \tag{15}$$

将分式展开，利用常用变换对即可求得答案。（分式展开过程较为简单，这里略过）

答案为:

$$y = \frac{-1}{4}e^{-t} + \frac{3}{8}e^{t} - \frac{1}{8}e^{-3t} \tag{16}$$