知识点

1. **定积分定义**　　$f(x)$在$[a,b]$上可积$\Leftrightarrow\int_a^b f(x)dx$等于确定常数$A$

$\Leftrightarrow$对$[a,b]$上任意分点$x_0=a<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$,对$[x_{i-1},x_i]$上任意介点$\xi_i$,

当$\lambda=\max(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)\to 0$时,积分和极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$均存在,且都等于确定常数$A$

这里$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$。

注（1）当$f(x)$在$[a,b]$上可积时,为计算$\int_a^b f(x)dx$的值，可取$[a,b]$上特殊分点

$x_0=a<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$，$[x_{i-1},x_i]$上特殊介点$\xi_i$，　比如取$[a,b]$上

n等分点$x_0=a<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i=a+\dfrac{i(b-a)}{n}<\cdots<x_n=b$,　$[x_{i-1},x_i]$上右端点

$x_i=a+\dfrac{i(b-a)}{n}$为介点ξ_i，$i=0,1,\cdots,n$，此时，$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}f(a+\dfrac{i(b-a)}{n})\dfrac{1}{n}$。

（2）由此定义,$\int_a^b f(x)dx$只由$[a,b]$及f确定，而与积分变量用啥字母表示无关，故

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

2. **可积条件**

当$f(x)$为$[a,b]$上的连续函数或间断点为有限个的有界函数时，$f(x)$在$[a,b]$上可积

或$\int_a^b f(x)dx$等于确定常数，此时$\int_a^b f(x)dx$为正常积分

3. $\int_a^b f(x)dx$的**几何意义**，在[a, b]上

当$f(x)\ge 0$时,$\int_a^b f(x)dx$表示x轴上方曲边梯形的面积；当$f(x)\le 0$时,$\int_a^b f(x)dx$表示x轴下方曲边梯形的面积的负值；当$f(x)$有正有负时,$\int_a^b f(x)dx$表示x轴上方曲边梯形的面积和与下方曲边梯形面积和的差。

4. **估值定理**　设在[a, b]上$f(x)$有最大、最小值M,m，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

5. **积分中值定理**

设在$[a,b]$上$f(x)$连续，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$,使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

称$\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$为$f(x)$在$[a,b]$上的平均值。

6. 积分不等式性质

设在$[a,b]$上$f(x),g(x)$连续且$f(x)\geq g(x)$，但$f(x)$不恒等于$g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$

特别地

（1）在$[a,b]$上$f(x),g(x)$连续且$f(x)>g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$

（2）在$[a,b]$上$f(x)$连续且$f(x)>0$，则$\int_a^b f(x)dx > 0$

7. 积分上限函数

对$[a,b]$上的连续函数$f(x)$可定义积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt, x\in[a,b]$

性质

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上可导，且$\Phi'(x)=f(x)$

更一般地，$\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$

8. 牛-莱公式

对$[a,b]$上的连续函数$f(x)$有$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$,这里$F$为$f$的原函数

9. 定积分的换元法

就是不定积分的第一第二换元法，注意换元的同时积分上下限跟着变动，

10. 定积分的分部积分法

就是不定积分的分部积分法，注意换元的同时积分上下限跟着变动

11. 运用定积分的换元法和积分值与积分变量用啥字母表示无关证明积分等式

即要证$\int_a^b f(x)dx=\int_c^d h(x)dx$，只需

$$\int_a^b f(x)dx \overset{x=g(t)}{=} \int_c^d f(g(t))g'(t)dt=\int_c^d h(t)dt=\int_c^d h(x)dx,$$

如要证$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$，只需

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \overset{x=g(t)=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx,$$

要证$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$，只需

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx \overset{x=g(t)=\pi-t}{=} \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))(-dt)=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt-\int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx-\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

12.记住

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3}I_1,n\text{为奇数}\\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}I_0,n\text{为偶数}\end{cases},$$

其中$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1$，$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 xdx=\frac{\pi}{2}$

13.记住$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}0, & f(x)\text{为奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数}\end{cases}$

14. 非正常积分（或反常积分）

称$\int_a^{+\infty} f(x)dx,\int_{-\infty}^{b} f(x)dx,\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$为无穷限非正常积分，

若$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$,则称$\int_a^b f(x)dx$为无界函数非正常积分或瑕积分，点$a$称为瑕点

若$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$,则称$\int_a^b f(x)dx$为无界函数非正常积分或瑕积分，点$b$称为瑕点

若对 a<c<b,

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$,则称$\int_a^b f(x)dx$为无界函数非正常积分或瑕积分，点$c$称为瑕点

瑕点一般在函数无意义的点去找！

牛-莱公式

设 F(x)为 f(x)的原函数，则

（1）$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)-F(a)$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=F(b)-\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$,

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)-\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

（2）当 a 为瑕点时，$\int_a^b f(x)dx=F(b)-\lim\limits_{x\to a^+} F(a)$,

当 b 为瑕点时，$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{x\to b^-} F(x)-F(a)$,

当 c 为瑕点时（a<c<b），

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim\limits_{x\to c^-} F(x)-F(a)+F(b)-\lim\limits_{x\to c^+} F(x)$, 在上述诸式中，当极限存在，即为确定常数时，称相应非正常积分**收敛**，否则**发散**

在理解收敛发散定义时，注意到

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$，$a$为实数，故

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$和$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$均收敛

（2）当 c 为瑕点时（a<c<b），$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx,$

故$\int_{a}^{b} f(x)dx$收敛$\Leftrightarrow \int_{a}^{c} f(x)dx$与$\int_{c}^{b} f(x)dx$都收敛,

15.记住$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}dx = \begin{cases} 收敛,当p>1, \\ 发散,当p \le 1 \end{cases}$这里$a$为常数

16.记住

（一）直线$x=a, x=b, (a<b)$,上边界曲线$y=f_1(x)$,下边界曲线$y=f_2(x)$围成的平面图形

(1) 其面积$A=\int_{a}^{b}[f_1(x)-f_2(x)]dx$

(2) 绕x轴旋转一周得到的旋转体体积$V_x=\int_{a}^{b}\pi[f_1{}^2(x)-f_2{}^2(x)]dx$

（二）直线$y=c, y=d, (c<d)$,右边界曲线$x=\varphi_1(y)$,左边界曲线$x=\varphi_2(y)$围成的平面图形

(1)其面积$A=\int_{c}^{d}[\varphi_1(y)-\varphi_2(y)]dy$

(2) 绕y轴旋转一周得到的旋转体体积$V_y=\int_{c}^{d}\pi[\varphi_1{}^2(y)-\varphi_2{}^2(y)]dy$

（三）射线$\theta=\alpha, \theta=\beta, (\alpha<\beta)$,边界曲线$\rho=\rho(\theta)$围成的平面图形面积$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}(\rho(\theta))^2 d\theta$

17.一立体的平行截面$\perp x$轴，且过x轴上一点x的平行截面面积为$A(x), x\in[a,b]$,

则该立体体积$V=\int_{a}^{b}A(x)dx$

18.弧：$x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[\alpha,\beta]$的长度$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(\mathrm{t}))^2+(\psi'(\mathrm{t}))^2}dt$

弧：$y=f(x), x\in[a,b]$的长度$S=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(y')^2}dx$

弧：$\rho=\rho(\theta), \theta\in[\alpha,\beta]$的长度$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho'(\theta))^2+(\rho(\theta))^2}d\theta$

P71 二

3.选 C. 解析：$I=\int_{1}^{\frac{s}{t}} f(tx)dx \overset{凑微}{=} \frac{1}{t}\int_{1}^{\frac{s}{t}} f(tx)d(tx) \overset{换元：u=tx}{=} \frac{1}{t}\int_{t}^{s} f(u)du$，结合知识点1可知.

4.因为在$[0,\frac{\pi}{4}]$, $\sin x \le x \le \tan x$,但不恒等,由知识点6知，

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin xdx < \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}xdx < \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx$$

5.选 D　解析：

设 $f(x)=\dfrac{x^4}{\sqrt{1+x}},0\le x\le 1,f^{/}(x)=\dfrac{4x^3\sqrt{1+x}-x^4\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}=\dfrac{2x^3(1+x)-x^4}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$

$=\dfrac{2x^3+x^4}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$，在$[0,1]$上$f(x)$的驻点为$x=0$，无不可导点，$f(0)=0,f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

故$m=f_{\min}=0,M=f_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,由知识点4知，$m(1-0)\le I=\int_0^1 f(x)dx\le M(1-0)$,

从而$0\le I=\int_0^1 f(x)dx\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

P72.三

1.$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\overset{\substack{x=\sin t\\dx=\cos tdt\\t\in[0,\frac{\pi}{2}]}}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}I_0=\dfrac{\pi}{4}$

2. 因为在$[3,4]$, $\ln x<\ln^2 x$, 由知识点6知，$\int_3^4\ln xdx<\int_3^4\ln^2 xdx$

四 设$f(x)=e^{x^2-x},0\le x\le 2,f^{/}(x)=e^{x^2-x}(2x-1)$

在$[0,2]$上$f(x)$的驻点为$x=0.5$，无不可导点，$f(0)=e^0,f(0.5)=e^{-0.25},f(2)=e^2$

故$m=f_{\min}=e^{-0.25},M=f_{\max}=e^2$,由知识点4知，$m(1-0)\le\int_0^2 f(x)dx\le M(1-0)$,

从而$-2e^{-0.25}\le\int_2^0 e^{x^2-x}dx\le -2e^2$

五．因$f(x)$在$[n,n+p]$连续，由积分中值定理 至少存在一点$\xi\in[n,n+p]$,使得

$\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\sin\xi}{\xi}(n+p-n)=p\dfrac{\sin\xi}{\xi}$，注意到$n\to+\infty$时，$\xi\to+\infty$，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\xi\to\infty}p\frac{\sin\xi}{\xi}=p\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}=0$$

P73.一

3. ╳。因$\int_{-1}^1\dfrac{dx}{x^2}$为瑕积分，瑕点为$x=0$，故按瑕积分计算：$\int_{-1}^1\dfrac{dx}{x^2}=\int_{-1}^0\dfrac{dx}{x^2}+\int_0^1\dfrac{dx}{x^2}$

因$\int_{-1}^0\dfrac{dx}{x^2}=-\dfrac{1}{x}\Big|_{-1}^0=-(\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{-1})=+\infty$，故$\int_{-1}^0\dfrac{dx}{x^2}$发散，由知识点14知$\int_{-1}^1\dfrac{dx}{x^2}$发散

4. ✓。因$\int_a^x f(t)dt$为$f(x)$的一个原函数，故$\int_a^x f(t)dt+C$为$f(x)$的全体原函数，

即$f(x)$的不定积分

二 1.

1.选D，在$\int_1^{x^3} f(t)dt=\int_1^x \phi(t)dt$两边同时对$x$求导，由知识点7得，$f(x^3)3x^2=\phi(x)$

2.选D，在$f(x)=\int_0^x (x+t)\sin tdt$中，$t$是积分变量，$x$相对于$t$不变，故

$f(x)=x\int_0^x \sin tdt+\int_0^x t\sin tdt$，在等式两边同时对$x$求导，由知识点7得，

$f'(x)=\int_0^x \sin tdt+x\sin x+x\sin x$,于是$f'(\pi)=\int_0^\pi \sin tdt=-\cos t\Big|_0^\pi=2$

三

2. 由罗比达法则及知识点7和无穷小替换得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1-t)dt}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x^2}=-0.5$$

3.$\int_0^2\sqrt{(x-1)^2}\,dx=\int_0^2|x-1|dx=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx=1-\frac{1}{2}+\frac{4}{2}-2-(\frac{1}{2}-1)=1$

4.由知识点7得，$\phi'(x)=1-2x$，在$[0,1]\phi(x)$的驻点为$x=0.5$,因为ϕ（0）$=0$,

ϕ（0.5）$=\int_0^{0.5}(1-2t)dt=t-t^2\Big|_0^{0.5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4},\phi(1)=\int_0^1(1-2t)dt=t-t^2\Big|_0^1=0$

故$\phi_{\max}(x)=\frac{1}{4}$.

5.因$\int_0^1 f(x)dx$为常数，故在$f(x)=x^2-\int_0^1 f(x)dx$两边对x从0到1定积分并由定积分性质 得

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dx=\frac{1}{3}-\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 1dx$,解得$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$

四

2 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1d(\tan x)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$

3.$\int_1^4\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\int_1^4\frac{x+1-2\sqrt{x}}{x}dx=\int_1^4(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}})dx=3+2\ln 2-4(2-1)=2\ln 2-1$

P75 二

1.选 C. 解析：$\int_0^1 xf(x^2)dx\overset{凑微}{=}\frac{1}{2}\int_0^1 f(x^2)dx^2\overset{换元：u=x^2}{=}\frac{1}{2}\int_0^1 f(u)du=\frac{1}{2}(\cos 1-1)$.

3.选 B. 解析：$F(-x)=\int_0^{-x}tf(t^2)dt\overset{换元：u=-t}{=}\int_0^x(-u)f(u^2)d(-u)=\int_0^x uf(u^2)du=F(x)$.

4. 选 D. 解析：注意到$\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x,\sin^3 x,\cos^4 x$，$x^2\sin^3 x$分别为奇、奇、偶、奇函数

及奇函数关于原点对称区间上的定积分为 0，偶函数关于原点对称区间上的定积分等于右半区间上定积分的 2 倍，故得

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx=0, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^4 x\right)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx>0，$$

$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2\sin^3 x-\cos^4 x\right)dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx<0。$$

三 1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+2\right)\sin^2 xdx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=4\frac{1}{2}I_0=\pi$

2. $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+t)dt \overset{凑微}{=} \frac{d}{dx}\int_a^b f(x+t)d(x+t) \overset{换元：u=x+t}{=} \frac{d}{dx}\int_{a+x}^{b+x}f(u)du$

$=\frac{d}{dx}\left[-\int_c^{a+x}f(u)du+\int_c^{b+x}f(u)du\right]=-f(a+x)(a+x)'+f(b+x)(b+x)'$

$=f(b+x)-f(a+x)$。这里 c 为任意实数。

四

3 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \overset{\substack{x=\tan t\\ dx=\sec^2 tdt\\ t\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]}}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 tdt}{\tan^2 t\sec t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec tdt}{\tan^2 t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin t}{\sin^2 t}$

$=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}$

4. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}\left|\cos x\right|dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\cos xdx=\frac{4}{3}$

P77 二

$1.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^7 2xdx \overset{u=2x}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 udu=\frac{1}{2}\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}I_1=\frac{1}{2}\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}=\frac{8}{35}$

$2.\int_0^{\pi}\cos^8\frac{x}{2}dx \overset{u=\frac{x}{2}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 udu=2\frac{7}{8}\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}I_0=2\frac{7}{8}\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{35\pi}{128}$

二 1.

$1.\int_0^1 x\arctan xdx=\int_0^1\arctan xd\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(1-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx)$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

$3.\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\ln xd\sqrt{x}=2\ln x\sqrt{x}\Big|_1^4-2\int_1^4\sqrt{x}x^{-1}dx=8\ln 2-2\cdot 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4=8\ln 2-4$

$$5.\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)dx+\int_{1}^{e}\ln xdx=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}1dx+x\ln x\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}1dx$$

$$=-\frac{1}{e}+(1-\frac{1}{e})+e-(e-1)=2-\frac{2}{e}$$

P797 一

1．╳ 解析：因$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{a}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_{a}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$

且$\int_{-\infty}^{a}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)=\frac{1}{2}[\ln(1+a^2)-\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+x^2)]=-\infty,$

即$\int_{-\infty}^{a}\frac{x}{1+x^2}dx$发散，从而由知识点14得$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$发散

2．╳ 解析：因

$\int_{0}^{4}\frac{dx}{(x-3)^2}$为瑕积分，瑕点为$x=3,$按瑕积分计算：$\int_{0}^{4}\frac{dx}{(x-3)^2}=\int_{0}^{3}\frac{dx}{(x-3)^2}+\int_{3}^{4}\frac{dx}{(x-3)^2}$

且$\int_{0}^{3}\frac{dx}{(x-3)^2}=\int_{0}^{3}\frac{d(x-3)}{(x-3)^2}=-\frac{1}{x-3}\Big|_{0}^{3}=-[\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1}{x-3}-\frac{1}{-3}]=+\infty,$即$\int_{0}^{3}\frac{dx}{(x-3)^2}$发散

从而由知识点14得$\int_{0}^{4}\frac{dx}{(x-3)^2}$发散

二

1.选 B，

解析：A.因$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty,$故$\int_{0}^{1}\ln xdx$为瑕积分，瑕点为 $x=0$

B.因$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$而在（0,1]上$\frac{\sin x}{x}$连续故有界，从而在[0,1]上$\frac{\sin x}{x}$是

只有一个间断点$x=0$的有界函数，由可积条件知$\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{x}dx$为正常积分

D.因$\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x-2}=\infty,$故$\int_{1}^{3}\frac{dx}{x-2}$为瑕积分，瑕点为$x=2$

2.解析：A.因$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx=-2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_{1}^{+\infty}=-2(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}-1)=2,$故$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$收敛

B.因$\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_{1}^{+\infty}=-(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e})=\frac{1}{e},$故$\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx$收敛

D.因$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{0}^{1}=-(1-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x})=+\infty,$故$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx$发散

C.

因$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=-2\int_{0}^{1}\frac{1}{2\sqrt{1-x}}d(1-x)=-2\sqrt{1-x}\Big|_{0}^{1}=-2(\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x}-1)=2,$故$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$收敛

3.选 A　解析：因

$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\int_{2}^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^p}\overset{u=\ln x}{=}\int_{\ln2}^{+\infty}\frac{du}{u^p},$由知识点15得,当$p>1$时,$\int_{\ln2}^{+\infty}\frac{du}{u^p}dx$收敛，故

$p>1$时，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x（\ln x)^p}dx$ 收敛。

5．因$\int_0^1\frac{1}{(3x-1)^2}dx$为瑕积分，瑕点为$x=\frac{1}{3}$,按瑕积分计算：

$$\int_0^1\frac{1}{(3x-1)^2}dx=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{dx}}{(3x-1)^2}+\int_{\frac{1}{3}}^1\frac{\mathrm{dx}}{(3x-1)^2}$$

因$\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{dx}}{(3x-1)^2}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d(3x-1)}}{(3x-1)^2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x-1}\Big|_0^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}[\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-}\frac{1}{3x-1}-(-1)]=+\infty$,

故$\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{(3x-1)^2}dx$发散，由知识点14得$\int_0^1\frac{1}{(3x-1)^2}dx$发散

P81.2.选 B 解析：设

$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$，则$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\ge 2\sqrt{f(x)\frac{1}{f(x)}}=2>0$,

故$F(x)$在$[a,b]$单增。

又$F(x)$在$[a,b]$连续，且$F(a)=-\int_a^b\frac{dt}{f(t)}<0,F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$,

故由零点定理得$F(x)=0$在（a,b）内至少有一根，综上得

得$F(x)=0$在（a,b）内只有一根

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{f(x)}}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin x}\mathrm{sint}^2\mathrm{dt}}{x^3+x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\mathrm{sinx})^2\cos x}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{(\mathrm{sinx})^2}{3x^2+4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3+4x}=\frac{1}{3}$, 故$x\to0$时，$f(x),g(x)$为同阶无穷小不是等价无穷小

4. 选A，解析：$\frac{\mathrm{dy}}{dx}=\frac{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos(t^2)^2\cdot2t}{1+\tan^2t}$,故$\frac{\mathrm{dy}}{dx}\Big|_{t=0}=\frac{\cos(t^2)^2\cdot2t}{1+\tan^2t}\Big|_{t=0}=0$

三 1. $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}d(x-1)\overset{u=x-1}{=}\int_{-1}^0\sqrt{1-u^2}du\overset{u=\sin t}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos t\cos tdt$

$$\overset{y=-t}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^2y(-dy)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2ydy=\frac{1}{2}I_0=\frac{\pi}{4}$$

2. 由知识点 13得$\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx=\int_{-1}^{1}[x^2+(1-x^2)+2x\sqrt{1-x^2}]dx$

$$=\int_{-1}^{1}[x^2+(1-x^2)]dx=\int_{-1}^{1}1dx=2$$