复习掌握的知识点，如 1. 高阶导数要记住

$(e^{\lambda x})^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x},(\sin wx)^{(n)}=w^n\sin(wx+\frac{n\pi}{2}),(\cos wx)^{(n)}=w^n\cos(wx+\frac{n\pi}{2})$，

$(\frac{1}{x+C})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+C)^{n+1}}$；

2. 会判断函数的间断点及其分类；
3. 掌握左、右极限求分段函数在分段点的连续性，掌握左、右导数求分段函数在分段点的可导性；
4. 记住 $\varphi(x)\to 0,\sin\varphi(x)\sim\varphi(x);e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x);\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$ 这些等价无穷小结论，并会在乘除运算求极限时进行替换求极限。会用洛必达法则求极限。
5. 会运用单调性判定方法证明不等式（例子见教案！）；熟悉罗尔定理和拉格朗日中值定理的条件和结论，掌握运用罗尔定理证明带导数的等式的方法（例子见教案！）
6. 掌握求最大值和最小值的方法，会求实际问题中的最值问题。

将做过的作业、特别是未完成好的作业题目认真看懂。

下面一些例子，很好地将前三章的知识点具体体现在题目中，熟悉题目涉及的知识点并掌握具体的求解解法。

1. 函数 $f(x+3)=\frac{x+1}{x+2}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=\frac{x-2}{x-1},x\neq 1$。
2. 函数 $f(x-1)=x^2+2x+1$，则 $f(x)=(x+2)^2$；
3. 设 $f(x)=x^2,f[\varphi(x)]=2^{2x}$，则 $\varphi(x)=2^x$
4. 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[1,2]$，则 $f(\frac{1}{1+x})$ 的定义域是 $[-\frac{1}{2},0]$。
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sin x}}{x}=0$（记住无穷小乘有界函数仍是无穷小！）
6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{2\cdot 3x}{\sin x}}=e^6$；

法二 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)}\overset{x\to 0,\ln(1+3x)\sim 3x}{=\!=\!=\!=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sin x}\cdot 3x}=e^6$

（掌握幂指函数求极限！）

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$。

（掌握洛必达法则求极限！）

8. $x \to 1$ 时，$\sin(x-1)$ 是 x^2-1 的（）无穷小。

A. 等价 B. 高阶 C. 低阶 D. 同阶

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}\ \underline{\underline{x\to 1,\sin(x-1)\sim(x-1)}}\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$。
（记住高阶、同阶、等价无穷小的定义！）

9.设 $f(x)=\begin{cases} e^x+1, x>0 \\ x+b, x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $b=$

解 由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，故 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，即

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x+b)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+1)=b$，得 $b=2$。

10.设 $f(x)$ 可导，则 $y=f(\tan x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}=f'(\tan x)\cdot(\tan x)'=f'(\tan x)\sec^2 x$

11.函数 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}=$

解 取对数 $\ln y=x(\ln x-\ln(1+x))$，两边对 x 求导得 $\dfrac{1}{y}y'=\ln x-\ln(1+x)+x(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x})$，

$\dfrac{dy}{dx}=y[\ln\dfrac{x}{1+x}+1-\dfrac{x}{1+x}]=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x(\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x})$。
（掌握幂指函数求导数！）

12.函数 $y=\ln(1-x^2)$ 的微分 $dy=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(1-x^2)'dx=\dfrac{-2x}{1-x^2}dx$；（掌握函数求微分！）

13.设 $y=x+\ln x$，则 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{x}{x+1}$；

14.函数 $y=x^3e^x$ 的麦克劳林展开式中，x^5 的系数等于 $\underline{\dfrac{1}{2}\qquad\qquad}$；函数 $y=x^2\sin x$ 的麦克劳林展开式中，x^5 的系数等于 $\underline{\quad -\dfrac{1}{6}\qquad\qquad}$；函数 $y=x^3\cos x$ 的麦克劳林展开式中，第 3 项等于 $\underline{\qquad\dfrac{x^7}{24}\qquad\qquad\qquad}$

解 因为$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$； $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$；

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$，故借助这三个函数的麦克劳林公式，得

$$y=x^3e^x=x^3(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)=x^3+\frac{x^4}{1!}+\frac{x^5}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots;$$

$$y=x^2\sin x=x^2(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots)=x^3-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{5!}-\frac{x^9}{7!}+\cdots$$

$$y=x^3\cos x=x^3(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots)=x^3-\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{4!}-\frac{x^9}{6!}+\cdots$$

即得答案。（记住三个函数$e^x,\sin x,\cos x$的麦克劳林公式的前四项!）

15.曲线$y=x^2-4x+3$在它顶点处的曲率等于 2

（记住抛物线$y=ax^2+bx+c$在顶点$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$处的曲率$K=|2a|$）

16.参数方程$\begin{cases}x=\ln t\\ y=t^3\end{cases}$确定的函数$y=y(x)$的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{\frac{1}{t}}=3t^3$， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}(3t^3)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{9t^2}{\frac{1}{t}}=9t^3$

（记住参数方程$\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$确定的函数$y=y(x)$的一阶导数$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$，二阶导数

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}$）

17.求函数$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$的单调区间，极值、凹凸区间、拐点及渐进线

解： $y'=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}},y''=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$。 令$y'=0$得$x=0$，用$x=0$分函数

$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 为两个开区间：$x<0$ 和 $x>0$。

当 $x<0$ 时，$y'>0$，所以函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ 在 $(-\infty,0]$ 上单增；当 $x>0$ 时，$y'<0$，所以函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单减；极大值为 $y(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$；

令 $y''=0$ 得 $x=-1,1$，用 $x=-1,1$ 分函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 为三个开区间：$x<-1,-1<x<1$ 和 $x>1$。

当 $x<-1$ 时，$y''>0$，所以函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的图形是凹的；

当 $-1<x<1$ 时，$y''<0$，所以函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ 在 $[-1,1]$ 上的图形是凸的；

当 $x>1$ 时，$y''>0$，所以函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ 在 $[1,+\infty]$ 上的图形是凹的;，

拐点分别为 $(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}})$ 和 $(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}})$。

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}=0$，所以有水平渐近线 $y=0$。

（掌握求函数的单调区间、极值、凹凸区间、拐点及渐进线的方法，见教案！）

18.设 $\underline{e^{x+y}-xy=1}$，求 $y''(0)$。

解 方程两边对 x 求导，得 $e^{x+y}(x+y)'-y-xy'=0$ 即 $\underline{e^{x+y}(1+y')-y-xy'=0}$，两边再对 x 求导，得 $(e^{x+y})'(1+y')+e^{x+y}(1+y')'-y'-(y'+xy'')=0$ 即

$\underline{e^{x+y}(1+y')^2+y''e^{x+y}-2y'-xy''=0}$，

将 $x=0$ 代入 $e^{x+y}-xy=1$ 得 $y=0$，

再将 $x=0,y=0$ 代入 $e^{x+y}(1+y')-y-xy'=0$ 得 $y'(0)=-1$，

最后将 $x=0,y=0,y'(0)=-1$ 代入 $e^{x+y}(1+y')^2+y''e^{x+y}-2y'-xy''=0$ 得 $y''(0)=-2$.