



重慶理工大學

CHONGQING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

明德篤行
自強日新



工程电磁场

Engineering Electromagnetics

沈启平

电气与电子工程学院



第四章 恒定磁场

4.1 安培力定律 磁感应强度

4.2 磁恒定磁场的特性

4.3 磁矢量位

4.4 媒质磁化 安培环路定律的一般性质

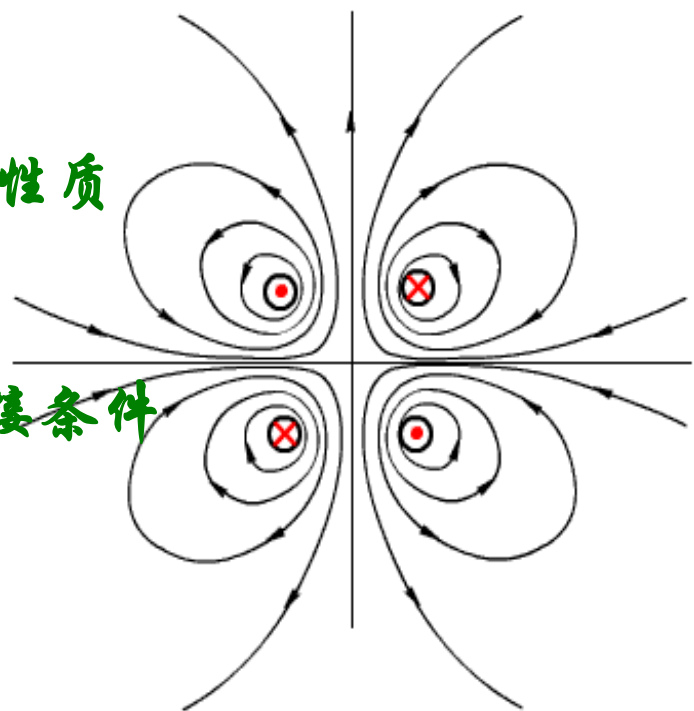
4.5 磁标量位

4.6 恒定磁场的基本方程 分界面衔接条件

4.7 恒定磁场的镜像法

4.8 电感

4.9 磁场能量与磁场力



第 4 章 恒定磁场

- 实验表明，导体中有恒定电流通过时，在导体内部和它周围的媒质中，不仅有**恒定电场**，同时还有不随时间变化的磁场，简称**恒定磁场** (Static Magnetic Field) 。
- **恒定磁场和静电场是性质完全不同的两种场，但在分析方法上却有许多共同之处。学习本章时，注意类比法的应用。**
- **恒定磁场的知识结构框图。**

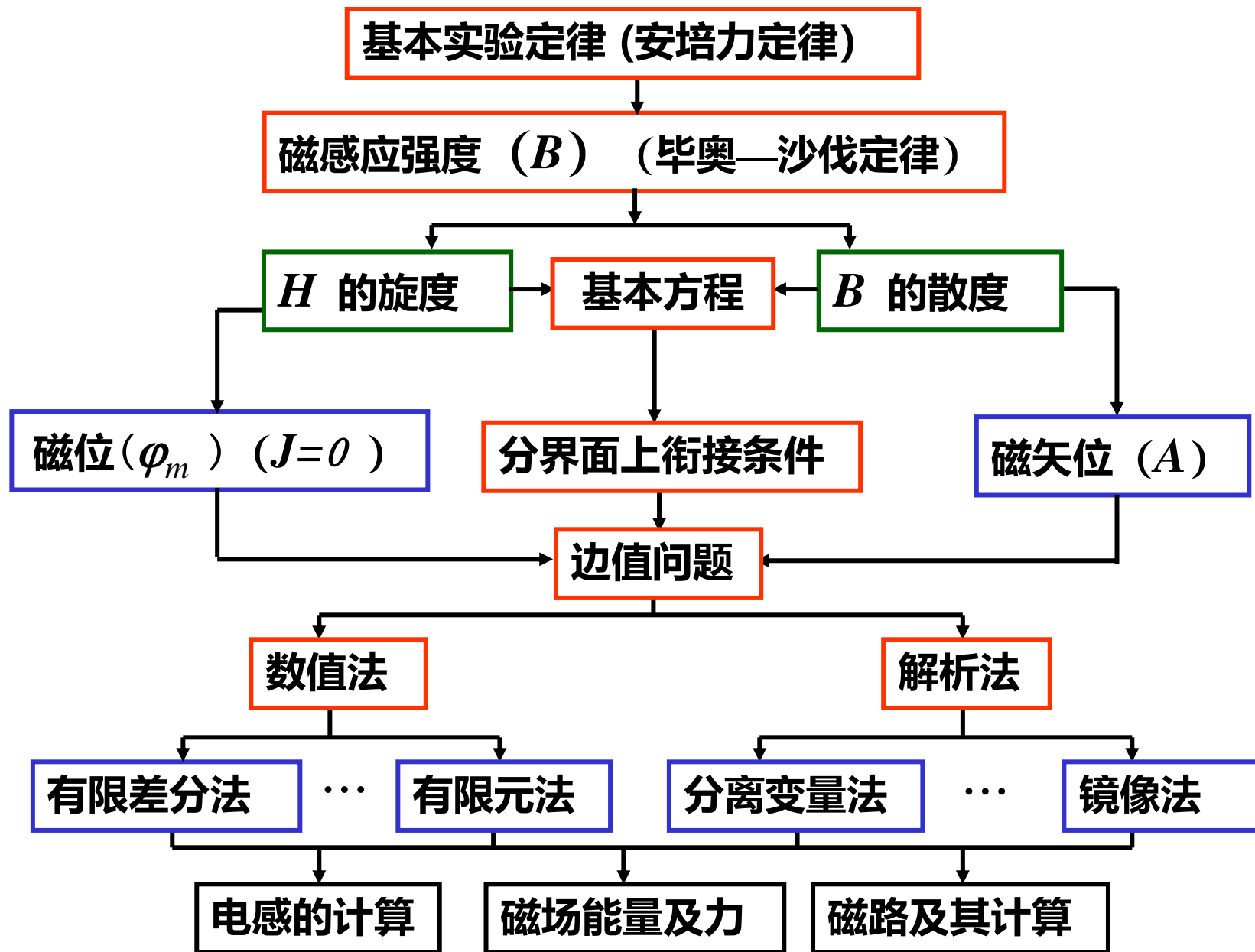


图4.0 恒定磁场知识结构框图

4.1 安培力定律 磁感应强度

4.1.1 安培力定律

1820年, 法国物理学家安培从实验中总结出电流回路之间的相互作用力的规律,称为安培力定律 (Ampere's force Law)。

电流 I' 的回路对电流 I 回路的作用力 F

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \oint_{l'} \frac{Idl \times (I'dl' \times e_R)}{R^2}$$

其中
$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times (I'dl' \times e_R)}{R^2}$$

为两个元电流段之间的相互作用力。

而电流回路 l' 对元电流段 Idl 的作用力则为:

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{Idl \times (I'dl' \times e_R)}{R^2}$$

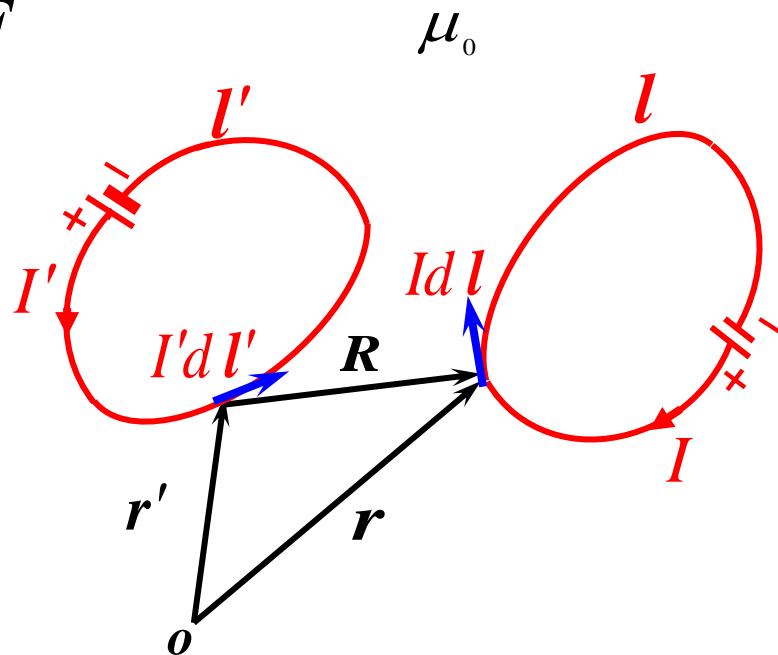


图4.1.1 两载流回路间的相互作用力

4.1.2 毕奥——沙伐定律 • 磁感应强度

电荷之间相互作用力通过电场传递。

$$\mathbf{F} = q_t \mathbf{E} = q_t \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho dV'}{R^2} \mathbf{e}_R$$

电流之间相互作用力通过磁场传递。元电流段 $I d\mathbf{l}$ 受元电流段 $I' d\mathbf{l}'$ 的作用力为：

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times (I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R)}{R^2} = I d\mathbf{l} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \right)$$

引入矢量：

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2}$$

$$\text{式中 } R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

称 \mathbf{B} 为磁感应强度，单位 T (Wb/m^2) 特斯拉。

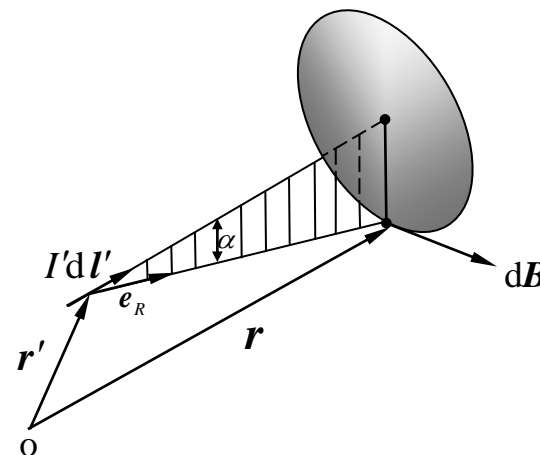
于是

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times d\mathbf{B}$$

$$\boxed{dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I' dl' \times e_R}{R^2}} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

上式给出了 dB 的大小和方向。

方向分析：



(1) 当 r 点位于 $I'dl'$ 的轴线上时, $\alpha=0$, $dB=0$ 。

(2) 当 r 点离开 $I'dl'$ 的轴线, 并在以 $I'dl'$ 为圆心半径一定的球面上移动 (即 R 固定), 随着 $\alpha \uparrow$, $dB \uparrow$ 。

(3) 当 $\alpha=90^\circ$ 时, dB 最大。

(4) 在 r 处, dB 的方向与 $I'dl' \times e_R$ 一致, 即绕 $I'dl'$ 轴线右旋。因此, B 线位于与 $I'dl'$ 轴线垂直的平面内, 形成与该轴线上的点为圆心的圆簇。

电流回路 l' 在场点 r 处的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I' d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

毕奥——沙伐定律 (Biot — Savart Law)

- 1) **适用条件：真空无限大区域 (μ_0)**
- 2) **由毕奥——沙伐定律可以导出恒定磁场的基本方程 (B 的散度与旋度)。**
- 3) **对于体分布或面分布的电流, Biot - Savart Law 可写成**

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{s'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

例4.1.1 试求长度为 L 的载流直导线产生的磁感应强度。

解:采用圆柱坐标系, 取元电流段 $I dz'$, 则

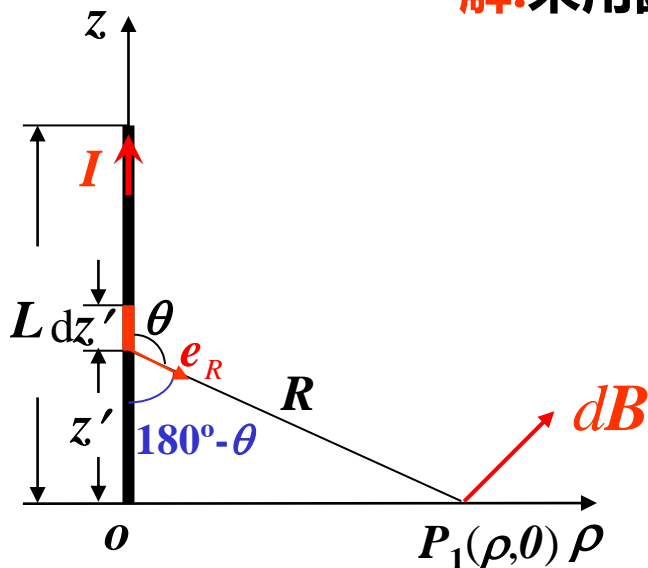


图4.1.2 长直导线的磁场

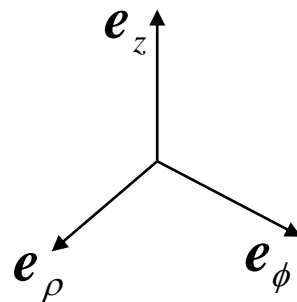
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz' \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz' \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R}{R^2}$$

式中, $R^2 = z'^2 + \rho^2$

$$\mathbf{e}_R = \cos(180^\circ - \theta)(-\mathbf{e}_z) + \sin(180^\circ - \theta)\mathbf{e}_\rho$$

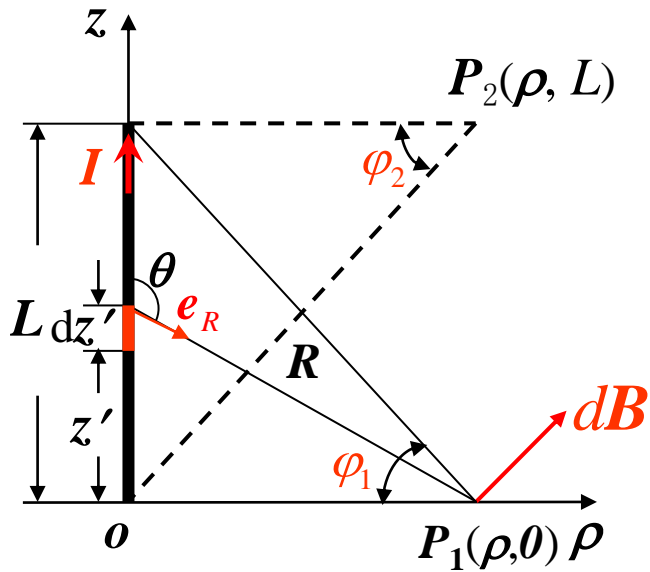
$$= \cos \theta \mathbf{e}_z + \sin \theta \mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R = \sin \theta \mathbf{e}_\phi = \frac{\rho}{\sqrt{z'^2 + \rho^2}} \mathbf{e}_\phi$$



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho dz'}{(z'^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\phi$$

$$B_\phi(\rho, 0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \frac{\rho dz'}{(z'^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z'}{\rho(z'^2 + \rho^2)^{1/2}} \Big|_0^L = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{L}{\rho(L^2 + \rho^2)^{1/2}}$$



$$B_{\phi}(\rho, 0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{L}{\rho(L^2 + \rho^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \sin \varphi_1$$

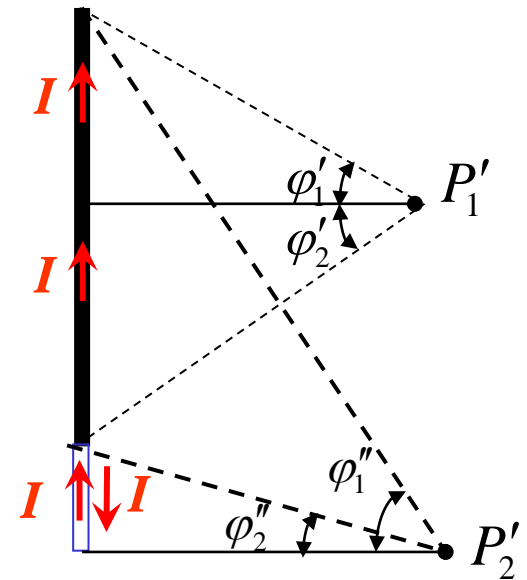
$$B_{P_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{\phi} \quad B_{P_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \sin \varphi_2 \mathbf{e}_{\phi}$$

图4.1.2 长直导线的磁场

对于一般点可看成两端电流的叠加

$$B_{P'_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\sin \varphi'_1 + \sin \varphi'_2) \mathbf{e}_{\phi}$$

$$B_{P'_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\sin \varphi''_1 - \sin \varphi''_2) \mathbf{e}_{\phi}$$



对于无限长直导线 $L \rightarrow \infty$

$$B_{P'_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\sin \pi/2 + \sin \pi/2) \mathbf{e}_{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_{\phi}$$

4.2 恒定磁场特性

4.2.1 磁通连续性原理

1. 磁通

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

定义：

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

单位 Wb (韦伯)

因此 \mathbf{B} 也被称为磁密，另一单位为 Wb/m^2

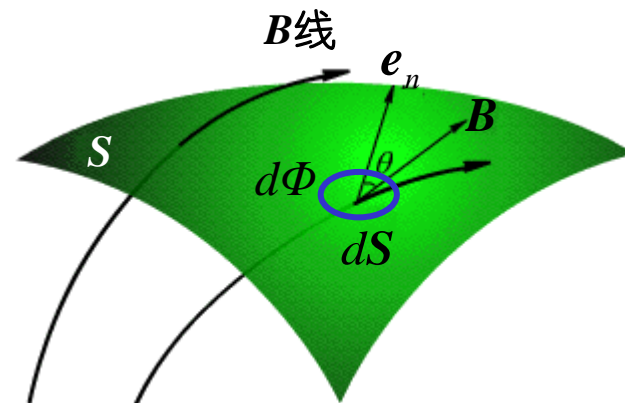


图4.2.1 \mathbf{B} 的通量 Φ

2. 磁通连续性原理

恒定磁场的散度

可从 *Biot-Savart Law* 直接导出恒定磁场 B 的散度。

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[-\mathbf{J}(x', y', z') \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV'$$

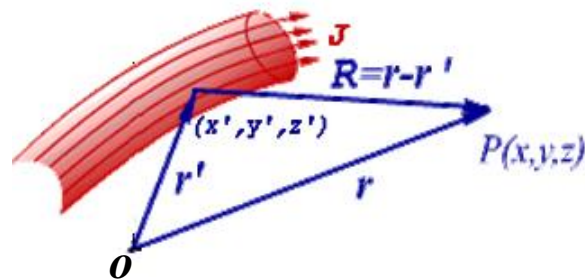


图4.2.2 计算体电流的磁场

由矢量恒等式

$$\nabla \times (h \mathbf{A}) = h \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla h$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] dV' = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right]$$

即:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right]$$

对上式两边取散度

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right]$$

所以

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

表明 \mathbf{B} 是无头无尾的闭合线，恒定磁场是无散场。（在任意媒质中均成立）

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 可以作为判断一个矢量场能否成为恒定磁场的必要条件。

磁通连续性原理

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{B} \equiv 0$$

$$\therefore \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV \xrightarrow{\text{散度定理}} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这说明磁场通过任意闭合面的磁通量为零，称之为磁通连续性原理，或称磁场中的高斯定律（Gauss's Law for the Magnetic field）。

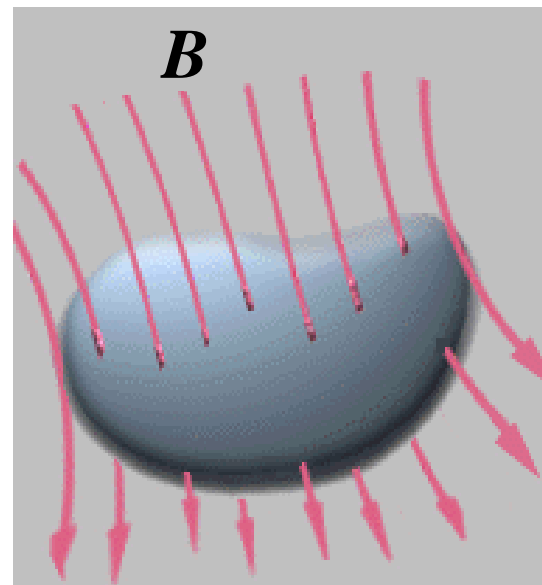


图4.2.3 磁通连续性原理

3. 磁力线

仿照静电场的 E 线，恒定磁场可以用 B 线描绘， B 线的微分方程

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = 0$$

在直角坐标系中

$$\frac{B_x}{dx} = \frac{B_y}{dy} = \frac{B_z}{dz}$$

B 线的性质:

- B 线是闭合的曲线 ；
- B 线不能相交 (除 $B = 0$ 外) ；
- 闭合的 B 线与交链的电流成右手螺旋关系；
- B 强处, B 线稠密, 反之, 稀疏。

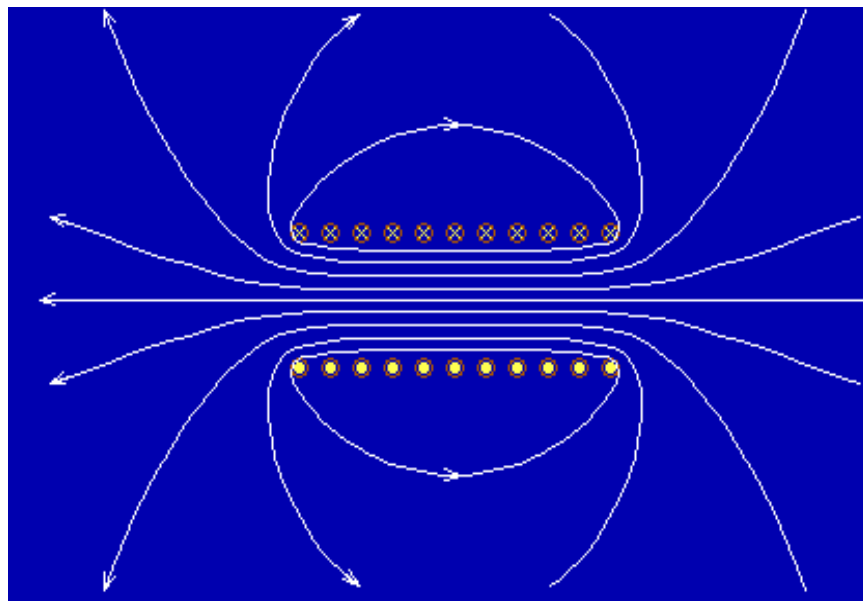


图4.2.4 长直螺线管磁场的分布 (B 线)

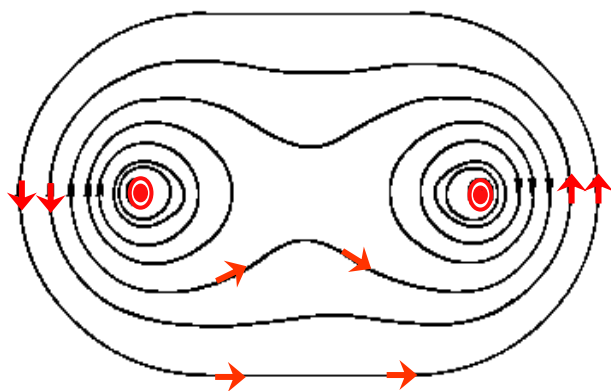


图4.2.5 两条同向载流线的磁场

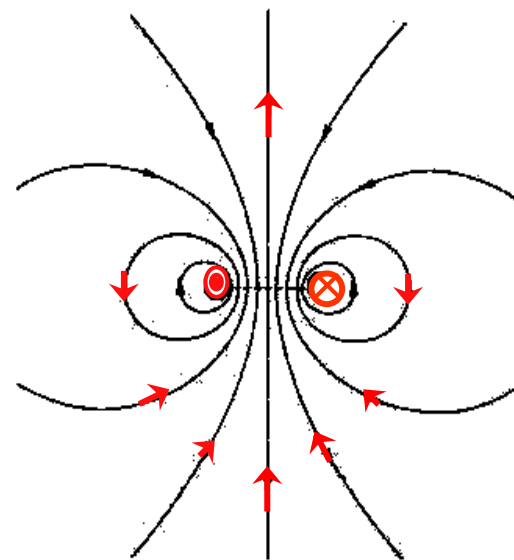


图4.2.6 两条反向载流线的磁场

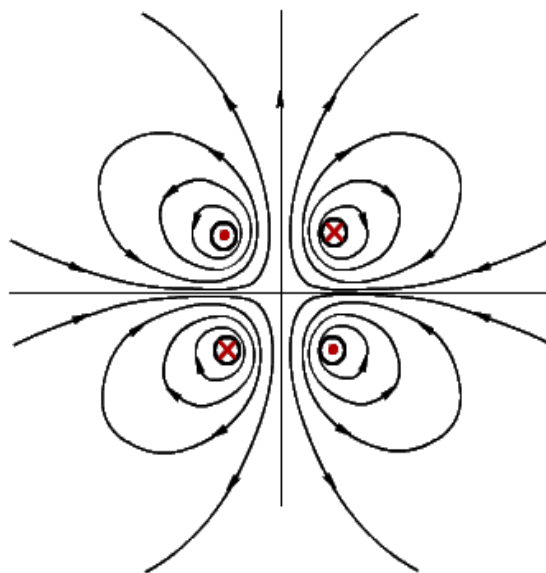


图4.2.7 两对上下放置传输线的磁场分布

4.2.2 真空中的安培环路定律

真空中的安培环路定律表明：在真空磁场中，沿任一回路取 B 的线积分，等于真空磁导率乘以该回路所限定的面积上穿过的电流。即

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

证明：

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right)$$

交换微分和积分的顺序

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

利用矢量恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left\{ \nabla \left[\nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] - \nabla^2 \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_{V'} \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla^2 \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_{V'} \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla^2 \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

由于有 $\nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

对第1项积分应用高斯散度定理

$$\int_{V'} \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\int_{V'} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \oint_{S'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S}' = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla^2 \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \int_{V'} \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' \\ &= \int_{V'} \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

真空中安培环路定律的微分形式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

对等式两边求任意开面的面积分

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

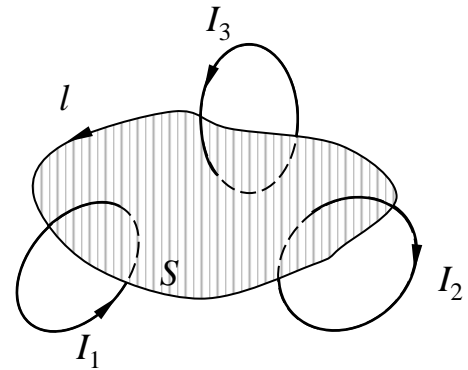
$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{真空中安培环路定律积分形式}$$

曲面S的电流是多个线电流时，则有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3)$$

$$= \mu_0 \sum_{k=1}^3 I_k$$



$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

结论:

1、真空中恒定磁场是由漩涡源（电流）产生的无散场或非保守场，其

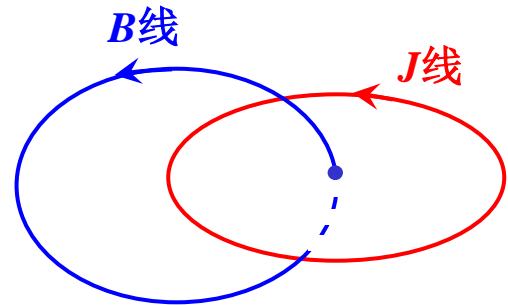
“漩涡源”密度为 $\mathbf{J} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0}$ ；

2、所有的 \mathbf{B} 线（闭合的）都必须与闭合的 \mathbf{J} 线相扣和，因为沿任一条闭合

的 \mathbf{B} 线都有 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ 这是判断所画 \mathbf{B} 线正误的判据；

3、安培环路定律已隐含了**恒定电流连续性原理**。

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{J}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$



例4.3.1 有厚为 d 的无限大导体板上，均匀分布着密度为 $J = J_0 e_z$ 的体电流。试求导体板内及两侧真空中的磁感应强度 B 。

解：坐标系安排如图所示，媒质结构和场源分布以 yoz 平面为对称，使得磁感应强度分布也以 yoz 平面为对称，且有 $x > 0$ $B = B e_y$, $x < 0$ $B = B(-e_y)$

所以，当 $x = 0$ 时， $B = 0$ 。设置矩形回路如图所示，求该回路 B 的环量：

$$|x| \leq \frac{d}{2}$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-a}^a B e_y \cdot dy e_y = 2aB = \mu_0 2ax J_0$$

$$\therefore \mathbf{B} = \mu_0 J_0 x \mathbf{e}_y$$

$$|x| \geq \frac{d}{2} \quad \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-a}^a B e_y \cdot dy e_y = 2aB = \mu_0 2a \frac{d}{2} J_0$$

$$x \geq \frac{d}{2}$$

$$x \leq -\frac{d}{2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 J_0 d \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 J_0 d (-\mathbf{e}_y)$$

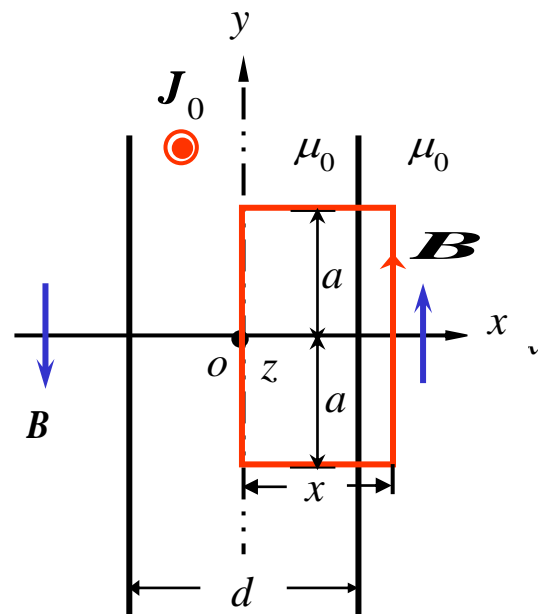


图4.3.2 体电流导板产生的磁场

$$x \geq \frac{d}{2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 J_0 d \mathbf{e}_y$$

$$x \leq -\frac{d}{2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 J_0 d (-\mathbf{e}_y)$$

面电流是体电流的特殊情况，应有

$$K = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ J \rightarrow \infty}} J d$$

所以，对于位于 $x = 0$ 处的面电流 K_0 ，有

$$x > 0 \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 K_0 \mathbf{e}_y$$

$$x < 0 \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 K_0 (-\mathbf{e}_y)$$

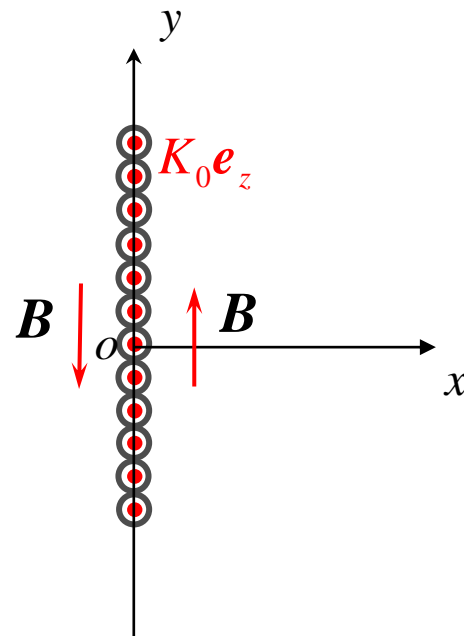


图4.3.3 无限大截流导板

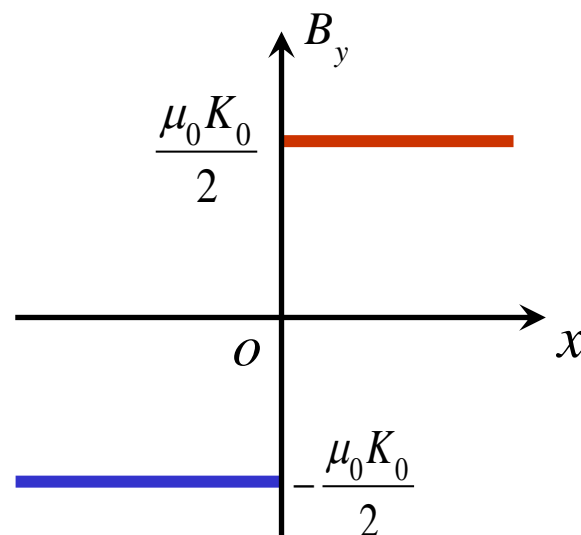


图4.3.4 无限大电流片及 B 的分布

例 4-3 试求载流无限长同轴电缆产生的磁感应强度。

解：这是轴对称平行平面磁场，选用圆柱坐标系， $B = B(\rho)e_\phi$

1) $0 \leq \rho < R_1$

取安培环路 ($\rho < R_1$) 交链的部分电流为

$$I_{enc} = \frac{I}{\pi R_1^2} \cdot \pi \rho^2 = I \frac{\rho^2}{R_1^2}$$

应用安培环路定律,得

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B \rho d\phi = 2\pi \rho B = \mu_0 \frac{I \rho^2}{R_1^2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R_1^2} \mathbf{e}_\phi \quad (1)$$

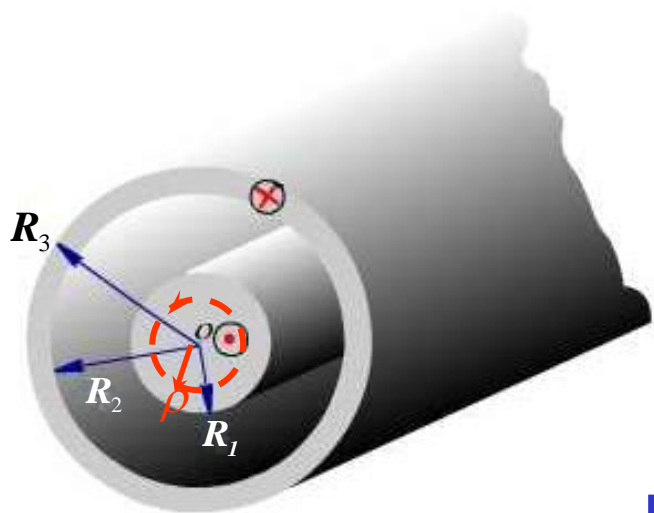


图4.3.5 同轴电缆截面

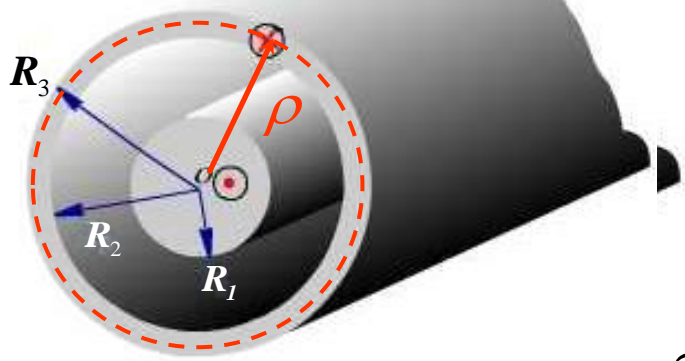


图4.3.5 同轴电缆截面

$$2) \quad R_1 \leq \rho < R_2$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B \rho d\phi = \mu_0 I$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi \quad (2)$$

$$3) \quad R_2 \leq \rho < R_3, \quad \text{外导体上的电流密度为:}$$

$$J = \frac{-I}{(R_3^2 - R_2^2)\pi}$$

这时穿过半径为 ρ 的圆面积的电流为

$$I_{enc} = I - I \frac{\rho^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = I \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

应用真空中的安培环路定律，得

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B \rho d\phi = \frac{\mu_0 I (R_3^2 - \rho^2)}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \cdot \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \mathbf{e}_\phi \quad (3)$$

$$4) \quad R_3 \leq \rho < \infty \quad \mathbf{B} = 0$$

$\mathbf{B}(\rho)$ 的分部图如图所示

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R_1^2} \mathbf{e}_\phi \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \cdot \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \mathbf{e}_\phi \quad (3)$$

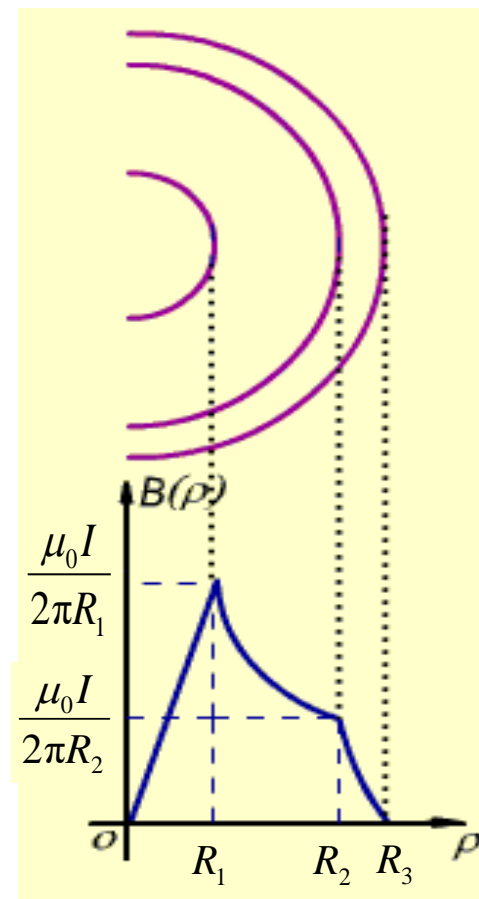


图4.3.6 同轴电缆的磁场分布

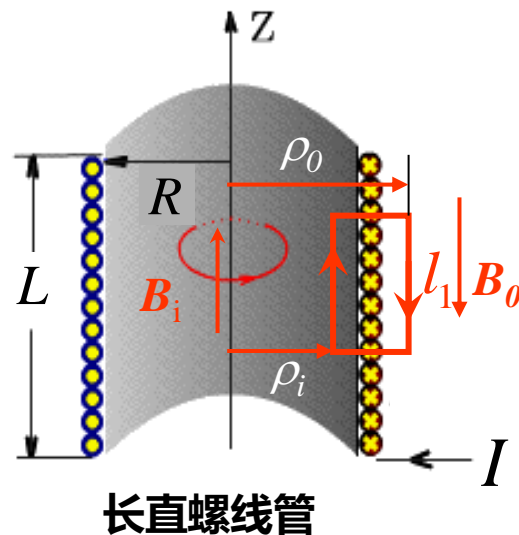
对于具有某些对称性的磁场，可以方便地应用安培环路定律得到 \mathbf{B} 的解析表达式。

例 4-5 如图所示空气中放置密绕有线圈单位长度匝数为 n 、电流为 I 的长直螺线管，求管内外的磁场。

解：作一矩形回路，应用安培环路定律，有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_i l_1 + B_0 l_1 = \mu_0 (nl_1) I$$

$$B_i(\rho_i) + B_0(\rho_0) = \mu_0 nI \quad (1)$$



由于管内磁通 $\Phi_i = B_i S_i$ 为有限值，根据磁通连续性原理，管外磁通应等于 Φ_i ，所以当 $\rho_0 \rightarrow \infty$ 时， $S_0 \rightarrow \infty$ $B_0(\infty) = 0$

由 (1) 可得 $B_i(\rho_i) = \mu_0 nI \quad (2) \quad 0 < \rho_i < R$

ρ_i 为任意值，再将 (2) 代入 (1)

得 $B_0(\rho_0) = 0 \quad (3)$

管外处处成立

管内磁场

$$\mathbf{B}_i = \mu_0 n I \mathbf{e}_z$$

结论：

长直螺线管内的磁场是与管径 R 无关的均匀磁场，这为均匀磁场的产生提供了一种方法。

推论：

对于长直螺线管表面有面电流 $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{e}_\phi$ ，因 K_0 相当于螺线管的 nI ，于是在管内

$$\mathbf{B}_i = \mu_0 K_0 \mathbf{e}_z$$

结束

4.3 矢量磁位

4.3.1 矢量磁位的定义式与库伦规范

由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\rightarrow \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

\mathbf{A} 称**矢量磁位** (Magnetic vector potential), 单位: Wb/m (韦伯/米)。

另有一矢量 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \mathbf{A}$

令 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 称为**库伦规范**

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{使得 } \mathbf{A} \text{ 唯一确定。}$$

4.3.2 真空中 \mathbf{A} 与场源电流的积分关系

将 $\mathbf{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right]$ 与 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 对照

容易得到
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \mathbf{C}$$

同理可得
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \mathbf{C}$$

和
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{l'} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{C}$$

可见，每个电流元产生的矢量磁位 \mathbf{A} 与此元电流 $I d\mathbf{l}$ ， $\mathbf{K} d\mathbf{S}$ ， $\mathbf{J} dV$ 具有相同的方向。

4.3.3 真空中 A 的微分方程

1. 微分方程及其特解

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \end{array} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}} \quad (\text{泊松方程})$$

当 $\mathbf{J} = 0$ 时 $\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = 0}$ (拉普拉斯方程)

在直角坐标系下, $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ 可以展开为

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x ; \quad \nabla^2 A_y = -\mu J_y ; \quad \nabla^2 A_z = -\mu J_z \circ$$

令无限远处 \mathbf{A} 的量值为零 (参考磁矢位) , 则以上各式的特解分别为

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_x dV'}{R} ; \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_y dV'}{R} ; \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_z dV'}{R}$$

以上三个方程中的任意两个加上 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 共三个方程才能解出 \mathbf{A} 的三个分量。

4.3.4 矢量磁位 A 的应用

1) 矢量积分求 A

例4.3.1 空气中有一长度为 l ，截面积为 S ，位于 z 轴上的短铜线，电流 I 沿 z 轴方向，试求离铜线较远处 ($R \gg l$) 的磁感应强度。

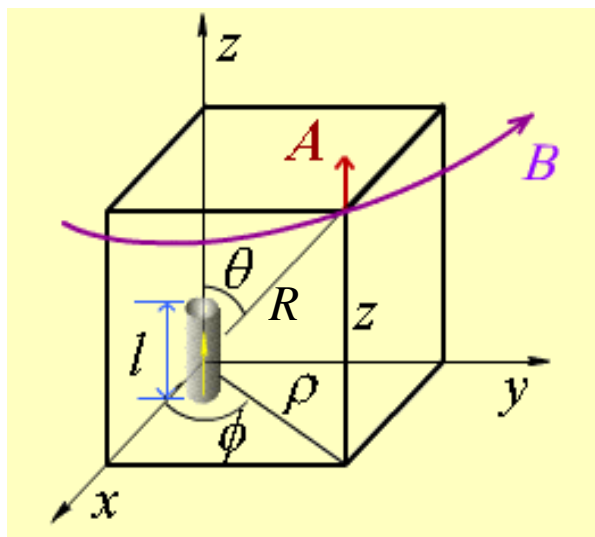


图4.3.1 位于坐标原点的短铜线

解：取圆柱坐标

$$A = A_z \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'} \frac{Idl'}{R} \mathbf{e}_z \quad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{l'}{2}}^{\frac{l'}{2}} \frac{Idz'}{R}$$

由于 $R \gg l$

$$A_z \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Il}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

根据

$$B = \nabla \times A = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\phi & \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi$$

$$B = \frac{\mu_0 Il}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 Il}{4\pi R^2} \sin \theta \mathbf{e}_\phi$$

例4.3.2 应用矢量磁位 A ，求空气中一长直载流细导线的磁场。

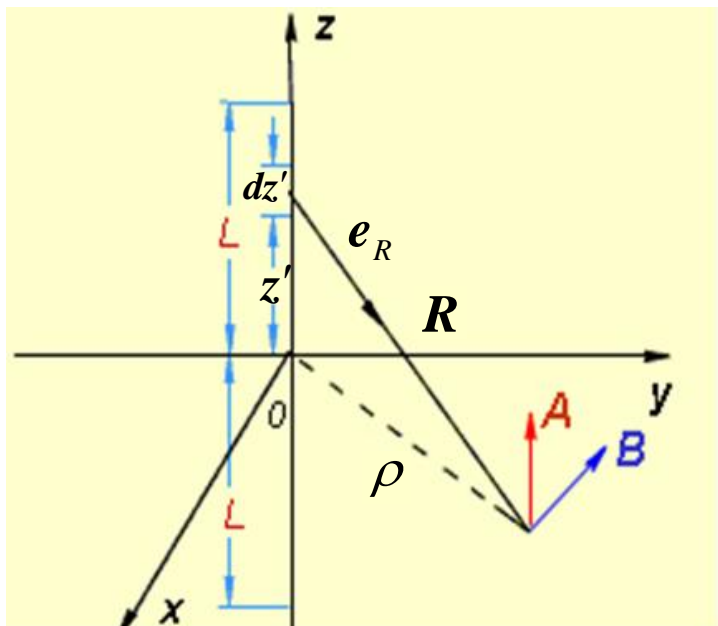


图4.3.2 长直载流细导线的磁场

解:
$$A = A_z e_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz'}{R} e_z + C$$

$$= \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{1/2}} \right] e_z + C$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln(L + \sqrt{\rho^2 + L^2}) - \ln \rho \right] e_z + C$$

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{\rho} e_z + C \quad (L \gg \rho)$$

$$B = \nabla \times A = \begin{vmatrix} \frac{e_\rho}{\rho} & e_\phi & \frac{e_z}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} e_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} e_\phi$$

例 4.3.3 应用矢量磁位分析两线输电线的磁场。

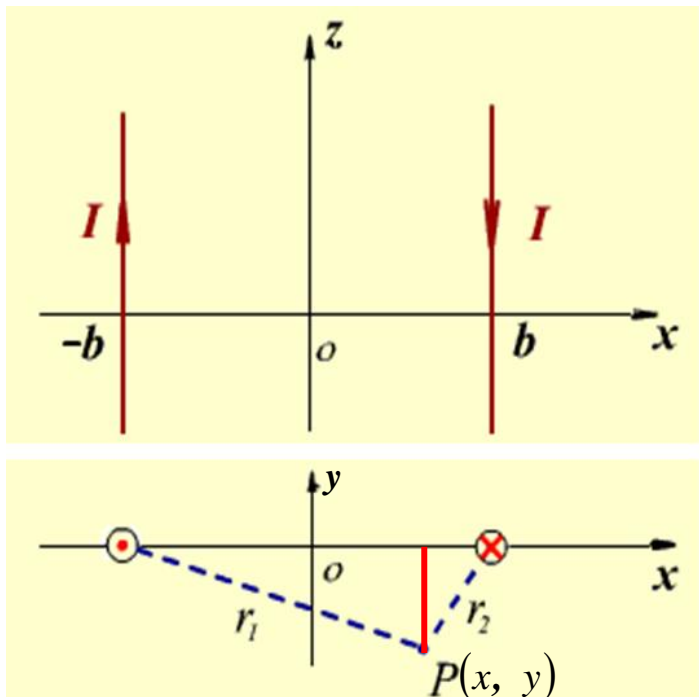


图4.3.3 圆截面双线输电线

解：这是一个平行平面磁场。

由上例计算结果, 两导线在P点的矢量磁位

$$A_1 = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r_1} \right] \mathbf{e}_z + \mathbf{C}_1$$

$$A_2 = \left[-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r_2} \right] \mathbf{e}_z + \mathbf{C}_2$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mathbf{e}_z + \mathbf{C}$$

令 $r_1 = r_2$ 处 $\mathbf{A} = 0$, 即以 $yo z$ 平面为参考面, 则 $\mathbf{C} = 0$

于是

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{y+b}{x^2 + (y+b)^2} - \frac{y-b}{x^2 + (y-b)^2} \right] \\ B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{x}{x^2 + (y+b)^2} - \frac{x}{x^2 + (y-b)^2} \right] \\ B_z = 0 \end{array} \right.$$

上式表明：在xoy平面上 B 线为平面闭合矢量线，故有

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} \quad -B_y dx + B_x dy = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 0$$

$$dA = 0 \quad \text{或} \quad A = \text{const}$$

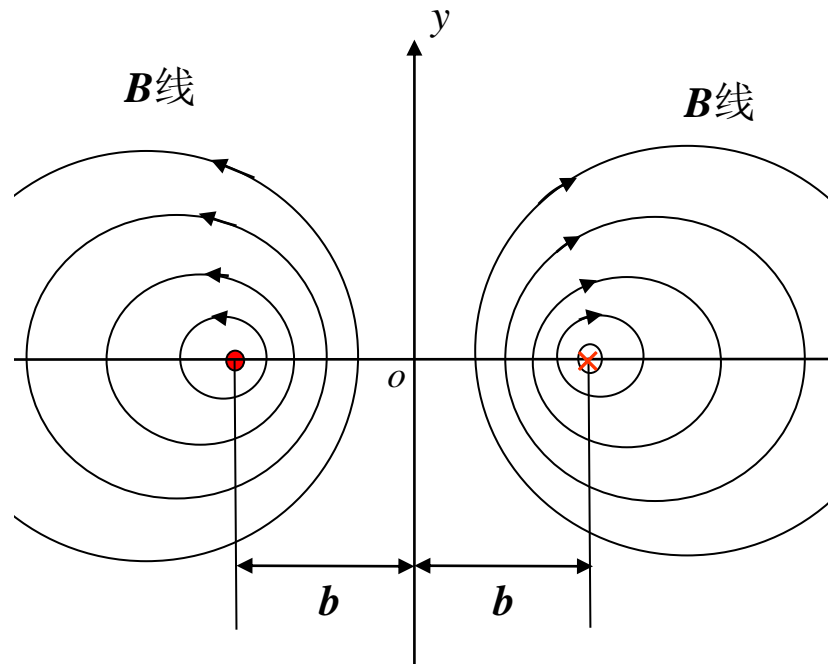
$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} \mathbf{e}_z \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 + (y+b)^2}{x^2 + (y-b)^2} = k^2$$

$$\left(x - \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2bk}{k^2 - 1}\right)^2$$

**等 A 线 (B 线) 是一束包围
载流导线的偏心圆族。**

其圆心坐标是: $\left[\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}b, 0 \right],$

圆的半径是: $a = \left| \frac{2bk}{k^2 - 1} \right|$



在平行平面磁场中 $\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z$ 等 A 线可表示磁感应强度 \mathbf{B} 线。

可以证明：在轴对称磁场中， $\rho A_\phi = \text{const}$ 代表 \mathbf{B} 线。

注意！

等 A 线不是 \mathbf{A} 线，只涉及 A 的大小，不涉及方向。因此，等 A 线仅反映 A 的大小分布。

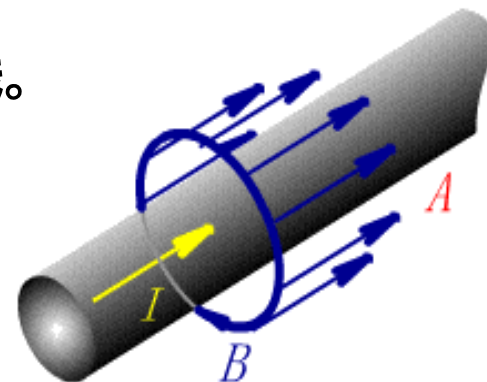
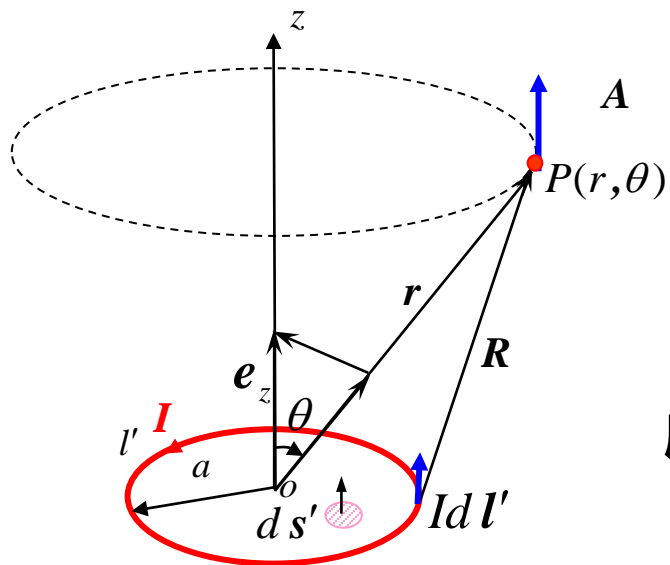


图4.3.4 \mathbf{A} 线,等 A 线与 \mathbf{B} 线关系

例 4.3.4 半径为 a 的平面小载流圆环称为磁偶极子，试求其在真空中远离自己区域内的 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 。

解：场分布为轴对称子午面场，对称轴是圆环的几何轴线，如选用球坐标，此时圆环线为 $r' = a, \theta' = \frac{\pi}{2}$ 的两个坐标面的交线。



$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\mathbf{l}'}{R}$$

应用矢量积分恒等式 $\oint_l f d\mathbf{l} = - \int_S \nabla f \times d\mathbf{s}$

则
$$\mathbf{A} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \nabla' \frac{1}{R} \times d\mathbf{s}'$$

$$= - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S'} (\nabla' \frac{1}{R}) \times d\mathbf{s}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S'} (\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{e}_R}{R^2}) ds'$$

在 $r \gg a$ 的远区 $R \approx r, \mathbf{e}_R \approx \mathbf{e}_r$

又因 $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$

所以
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_{S'} [(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \times \mathbf{e}_r] ds' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_{S'} \sin \theta (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta) ds' = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} S'$$

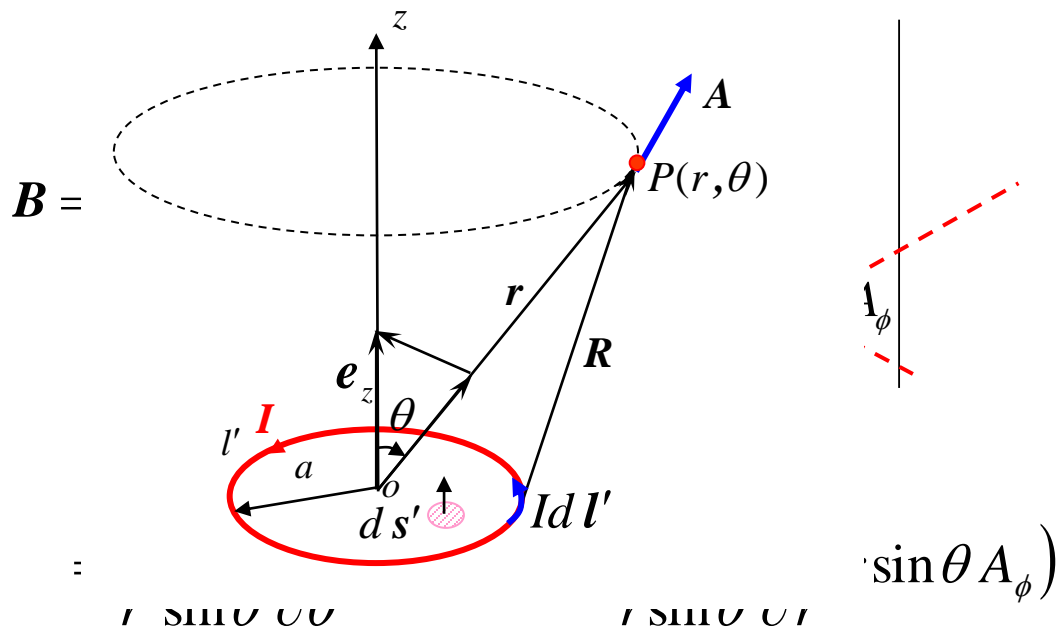
令 $\mathbf{m} = I S' = I S' \mathbf{e}_z$ ($\text{A} \cdot \text{m}^2$) 称为磁偶极矩或磁矩

$$A = e_\phi \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} S'$$

$$\mathbf{m} = I S' = I S' \mathbf{e}_z$$

于是上述 A 的表达式改写成

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (m \sin \theta \mathbf{e}_\phi) = \frac{\mu_0 (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi r^2}$$



$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$$

与真空中的电偶极子比较

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$$

从矢量磁位 A 计算磁通

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Wb} \quad (\text{韦伯})$$

在工程数值中经常用此公式计算磁通，并由此得到其它等效参数。

4.4 磁介质磁化 安培环路定律的一般形式

4.4.1. 磁介质的磁化 (Magnetization)

磁介质磁化产生的物理现象和分析方法与静电场介质的极化类同。

1) 磁偶极子

磁偶极矩 $m = IdS$ $\text{A} \cdot \text{m}^2$

I —分子电流，电流方向与 dS 方向成右手螺旋关系

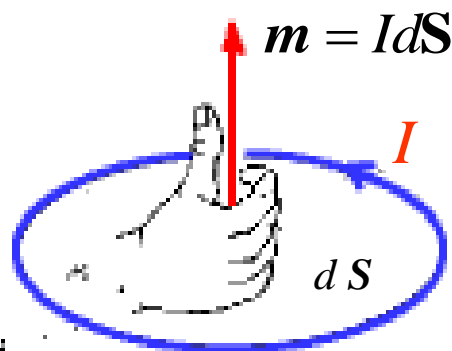


图4. 4. 1 磁偶极子

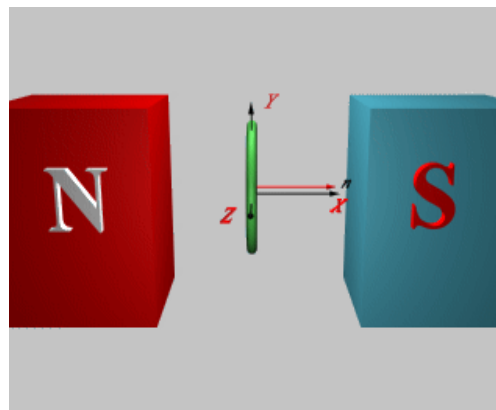


图4. 4. 2 磁偶极子受磁场力而转动

2) 磁介质的磁化与磁化强度

无外磁场作用时，媒质对外不显磁性， $\sum_{i=1}^n m_i = 0$ 。

在外磁场作用下，磁偶极子发生旋转，使 $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$ ，转矩为

$T_i = m_i \times B$ ，旋转方向使磁偶极矩方向与外磁场方向一致，对外呈现磁性，称为磁化现象。

用**磁化强度** (Magnetization Intensity)

M 表示磁化的程度，即

$$M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\Delta V}$$

A/m

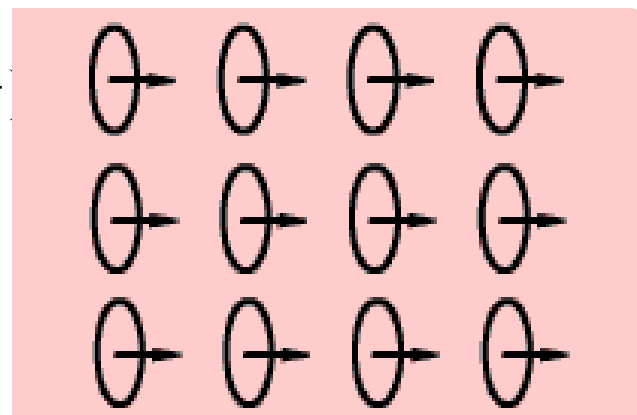


图4.4.3 介质的磁化

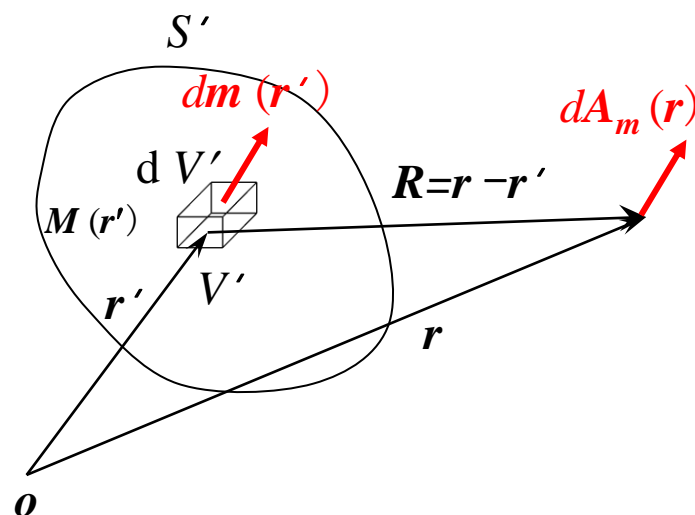
4.4.2. 磁介质磁化后的磁效应 (磁化介质的附加磁场与磁化电流)

单个磁偶极子产生的 $A = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} (m \sin \theta e_\phi) = \frac{\mu_0 (m \times e_r)}{4\pi r^2}$

dV 中的元磁矩为: $dm(r') = M(r') dV'$

它在真空中 r 点处产生的元矢量磁位 dA_m 为

$$\begin{aligned} dA_m &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dm \times e_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M(r') \times e_R}{R^2} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} M(r') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dV' \end{aligned}$$



V' 中所有的元磁矩在真空中 r 点处产生的磁矢位 A_m 为

图4.4.4 磁介质的附加磁场

$$A_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} M(r') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\frac{\nabla' \times M(r')}{R} - \nabla' \times \frac{M(r')}{R} \right] dV'$$

矢量恒等式

$$\frac{\nabla' \times M(r')}{R} = \frac{\nabla' \times (M(r') \frac{1}{R})}{R} - \frac{M(r') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right)}{R} = \frac{\nabla' \times (M(r') \frac{1}{R})}{R} - \frac{M(r') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right)}{R}$$

旋度定律 $\int_V (\nabla \times F) \cdot dV = - \oint_S F \times ds$

定义: 体磁化电流密度

$$J_m = \nabla \times M \quad \text{A/m}^2$$

面磁化电流密度

$$K_m = M \times e_n \quad \text{A/m}$$

于是磁化介质的附加磁场为：

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{K}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

$$\mathbf{B}_m = \nabla \times \mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{K}_m(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

结 论：

- 1、磁化电流媒质磁化后产生的宏观电流，仍满足恒定电流连续性原理，即 $\nabla \cdot \mathbf{J}_m = 0$ $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ ；
- 2、磁化介质的附加磁场效应，可归结为体磁化电流和面磁化电流在真空中作用的结果；
- 3、磁化电流和自由电流在真空中产生的磁场，都遵从毕—沙定律；
- 4、在有磁介质存在的情况下，任一点的磁感应强度都是自由电流和磁化电流在真空中产生的磁场的叠加，即

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_f + \mathbf{B}_m$$

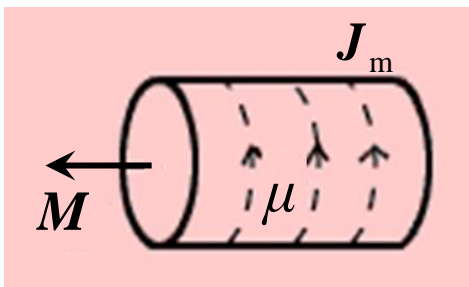
且有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

和

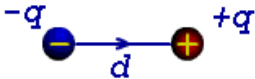
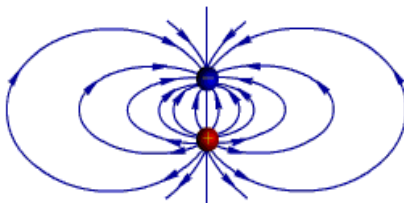
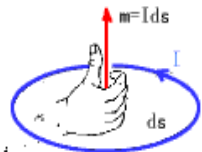
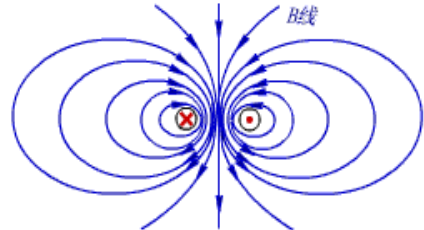
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m)$$

例 4.4.1 判断磁化电流的方向。



$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

磁偶极子与电偶极子对比

	模型	电磁量	产生的电场与磁场
电偶极子	 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$	$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$	
磁偶极子	 $\mathbf{m} = I\mathbf{dS}$	$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$	

4. 4. 3. 安培环路定律的一般形式

1、安培环路定律一般形式的积分形式

有磁介质时
$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_m) = \mu_0 I + \mu_0 \int_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{s}$$

将 $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ 代入上式, 得

$$\oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} d\mathbf{l} = I + \int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{s} = I + \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

移项后
$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = I$$

定义**磁场强度**
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{A/m}$$

则有
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

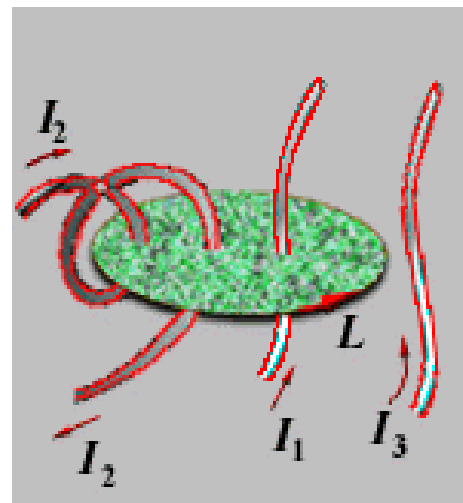


图4. 4. 5 \mathbf{H} 与 \mathbf{I} 成右螺旋关系

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

说明：• \mathbf{H} 的环量仅与环路交链的自由电流有关。

- 电流的正、负仅取决于环路与电流的交链是否满足右手螺旋关系，是为正，否为负。
- 环路上任一点的 \mathbf{H} 是由系统全部载流体产生的。

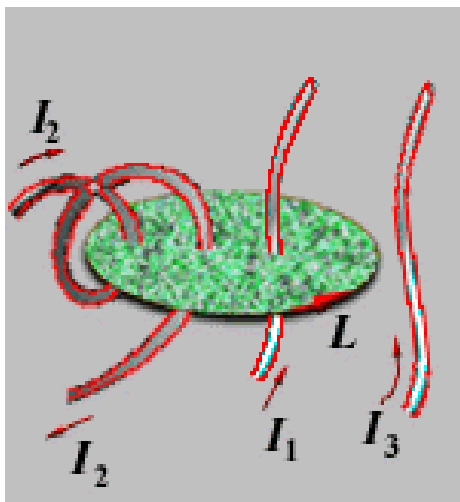


图4.4.6 \mathbf{H} 与 \mathbf{I} 成右螺旋关系

$$\sum I = I_1 - 2I_2$$

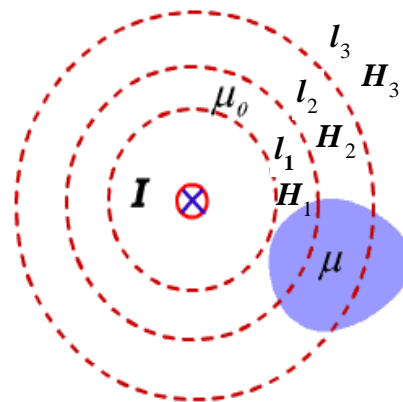


图4.4.7 \mathbf{H} 的分布与磁介质有关



思考

图示中 $H_1 = H_2 = H_3$ 吗？

它们的环量相等吗？

2、安培环路定律一般形式的微分形式

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \rightarrow \int_s (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

积分式对任意曲面 S 都成立，则

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

恒定磁场是有旋的

上式表明， $\nabla \times \mathbf{H}$ 就是该处的自由电流密度，与磁化电流无关。

4.4.4. 各向同性线性媒质的构成方程

磁场强度的定义式也是磁介质的构成方程

$$\boxed{H = \frac{B}{\mu_0} - M} \quad \text{或} \quad \boxed{B = \mu_0 (H + M)}$$

实验证明，在各向同性的线性磁介质中 $M = \chi_m H$

式中 χ_m ——磁化率，无量纲量，代入 $B = \mu_0 (H + M)$ 中

$$B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 H (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r H = \mu H$$

式中 μ_r ——相对磁导率，无量纲，

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad \text{磁导率，单位 H/m。}$$

$$\boxed{B = \mu H}$$

各向同性的线性磁介质的构成方程(性能方程、本构关系)

$$B = \mu H$$

同一自由电流在磁介质中产生的磁场是真空中磁场的 μ 倍

可推得在无限大磁介质中有

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \sum I$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

$\left. \begin{array}{l} \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \sum I \\ \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \end{array} \right\} \begin{array}{l} l \text{ 在同一局部均匀的磁介质中也成立} \\ \text{对局部均匀的区域也成立} \end{array}$

介质的极化

极化强度 $\vec{P} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{P}_i}{\Delta V}$

电偶极矩 $\vec{P}_i = q_i \vec{l}$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{e}_m \quad \rho_p = \nabla \cdot \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_a} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

介质的磁化

磁化强度 $\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V}$

磁矩 $\vec{m}_i = I \vec{S}$

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{e}_m \quad \vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_c + \vec{J}_m) \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

例 4.4.2 试求载流无限长同轴电缆在周围产生的 B ，以及磁介质与内外导体接触处的 $K_m(R_1)$ 和 $K_m(R_2)$ 。设导体的 $\mu = \mu_0$ ，磁介质的 $\mu > \mu_0$ ，电流在导体上均匀分布。

解：选用圆柱坐标系， $B = B(\rho)e_\phi$

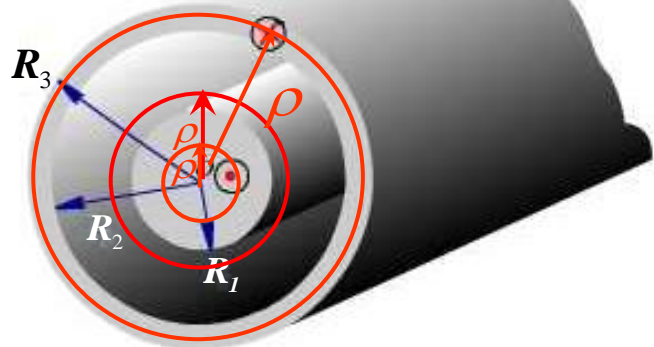
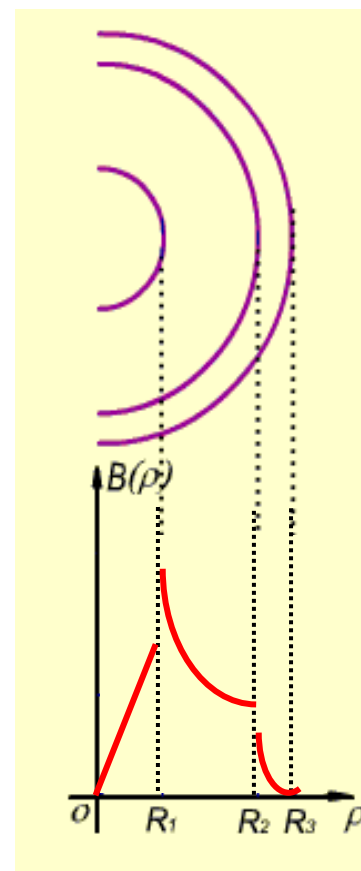


图4.3.5 同轴电缆截面

$$R_1 \leq \rho < R_2$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B\rho d\phi = \mu I \quad \mathbf{B} = \frac{\mu I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$

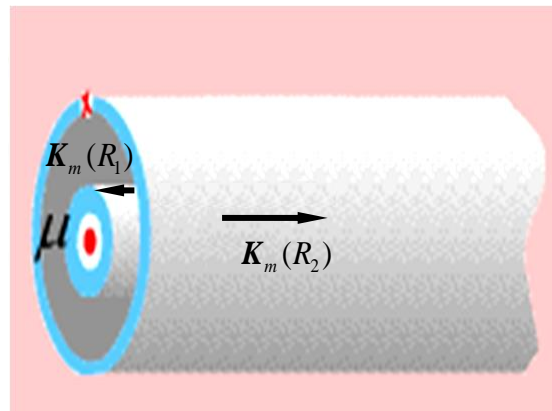
$$R_2 \leq \rho < R_3 \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \mathbf{e}_\phi \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \cdot \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \mathbf{e}_\phi$$



$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{A/m}$$

$$2) \because \mathbf{M}(\rho) = \frac{\mathbf{B}(\rho)}{\mu_0} - \mathbf{H}(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{e}_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} (\mu_r - 1) \mathbf{e}_\phi$$

$$(\quad R_1 \leq \rho \leq R_2)$$



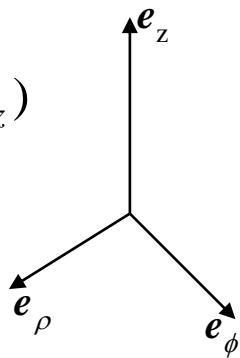
面磁化电流密度 $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n \quad \text{A/m}$

$$\therefore \mathbf{K}_m(R_1) = \mathbf{M}(\rho) \times \mathbf{e}_n \big|_{\rho=R_1} = \frac{I}{2\pi R_1} (\mu_r - 1) [\mathbf{e}_\phi \times (-\mathbf{e}_\rho)] = \frac{I}{2\pi R_1} (\mu_r - 1) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{K}_m(R_2) = \mathbf{M}(\rho) \times \mathbf{e}_n \big|_{\rho=R_2} = \frac{I}{2\pi R_2} (\mu_r - 1) [\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\rho] = \frac{I}{2\pi R_2} (\mu_r - 1) (-\mathbf{e}_z)$$

结论:

- 1、在两种不同磁介质交界处， \mathbf{B} 要发生跳变；
- 2、两种磁介质分界面处是磁介质不均匀（不连续）性的集中表现，因此，要出现磁化面电流，这是使得场量产生跳变的根源。



例4.4.3 计算铁制环形螺线管内的 B 、 H 、 Φ 。

(1) 通有电流 I ，匝数位 N ， $R \gg a$ ；

(2) 如果螺线管上开个小口再求 B 、 H 、 Φ 。

解:(1) 可认为螺线管内磁场是均匀的，且等于半径为 R 处的磁场，应用安培环路定律：

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu NI \quad \Rightarrow \quad B = \mu \frac{NI}{2\pi R} e_\phi,$$

$$\because H = \frac{B}{\mu} \quad H = \frac{NI}{2\pi R} e_\phi$$

$$\Phi = B \cdot S = \frac{\mu NI}{2\pi R} \pi a^2 = \frac{\mu NI a^2}{2R}$$

(2) 介质不均匀，用安培环路定律一般形式

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_i} \mathbf{H}_i \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_g} \mathbf{H}_g \cdot d\mathbf{l} = NI \quad \Rightarrow \quad H_i(2\pi R - t) + H_g t = NI$$

$$\frac{B}{\mu} (2\pi R - t) + \frac{B}{\mu_0} t = NI$$

因为 B 线是连续的

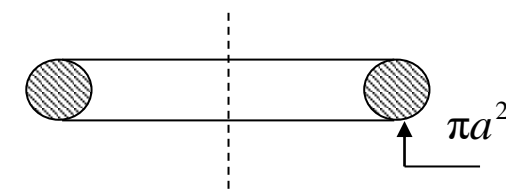
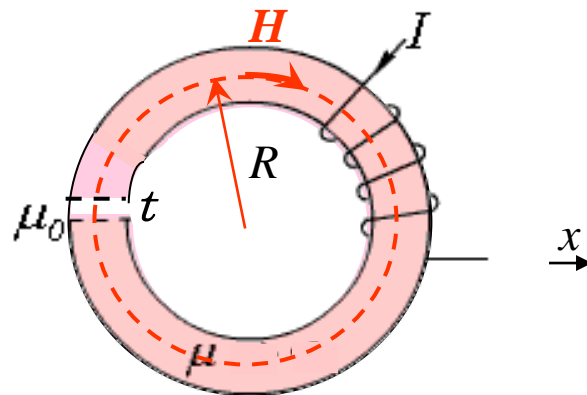


图4.4.9 环形螺线管磁场分布

$$B \left[\frac{1}{\mu} (2\pi R - t) + \frac{1}{\mu_0} t \right] = NI$$

$$B = \frac{NI}{(2\pi R - t)/\mu + t/\mu_0} = \frac{\mu NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)t}$$

$\because \mu_r \gg 1 \quad \therefore$ 开口后 B 大大降低了

$$H_i = \frac{B}{\mu} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R \mu_0 + (\mu - \mu_0)t} \quad H_g = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\mu NI}{2\pi R \mu_0 + (\mu - \mu_0)t}$$

可见 $H_g \gg H_i$ 气隙中磁场强度占了绝对比例，电机就是利用这个原理进行有效的能量转换。

$$\Phi = B \cdot S = \frac{\mu NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)t} \pi a^2$$

B 小了，故磁通小了

材 料	μ_r
铁 粉	100
机 器 钢	300
铁 氧 体	1 000
坡莫合金 45	2 500
变压器钢	3 000
矽 铁	3 500
纯 铁	4 000
μ 磁性合金	20 000
铝硅铁粉	30 000
镍铁钼导磁合金	100 000

4.5 磁标量位

4.5.1 磁标量位 φ_m 的概念

恒定磁场无电流区域

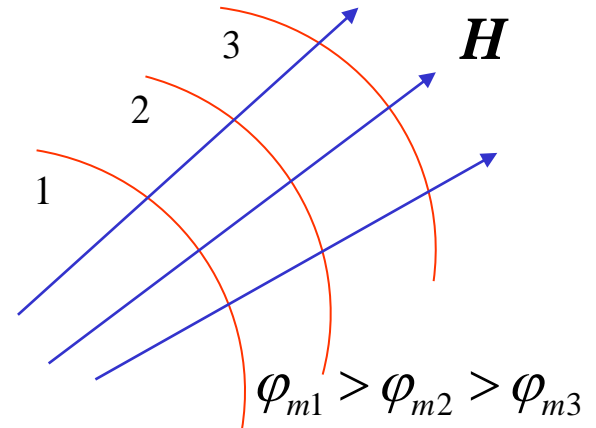
$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi_m(p) = \int_p^{ref} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}$$

φ_m ——磁标量位，**简称磁位** (Magnetic Potential)，单位：A（安培）。

磁位 φ_m 的特点：

- **磁位 φ_m 仅适合于无自由电流区域，且无物理意义。**
- **等磁位面（线）方程为 φ_m 常数，等磁位面（线）与磁场强度 H 线垂直。**
- **A、B 两点间的线积分为磁压：**

$$U_{mAB} = \varphi_{mA} - \varphi_{mB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$



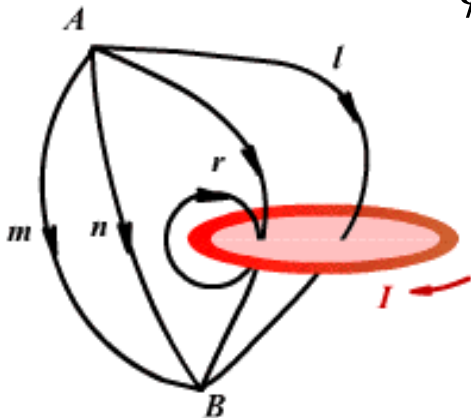
4.5.2 磁位 φ_m 的多值性

在恒定磁场中，设 B 点为参考磁位，

则
$$\varphi'_{mA} = \int_{A|B} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}, \quad \varphi''_{mA} = \int_{AmB} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

由安培环路定律，得

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_{AlBmA} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A|B} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{BmA} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \\ &= \varphi'_{mA} - \varphi''_{mA} = I \end{aligned}$$



推论 $\varphi'_{mA} = \varphi''_{mA} + kI$ 多值性

为了克服 φ_m 多值性，规定积分路径不得穿过从电流回路为周界的 S 面（磁屏障面）。这样， φ_m 就成为单值函数，两点之间的磁压与积分路径无关。

图4.5.1 磁位 φ_m 与积分路径的关系

4.5.3 磁位 φ_m 的微分方程

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} = -\nabla \varphi_m && \mu = \text{常数} \\ &\downarrow && \downarrow \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0 \quad \rightarrow \quad -\nabla \cdot (\mu \nabla \varphi_m) \\ &\uparrow \quad \underline{B = \mu H} && \\ &&& = -\nabla \varphi_m \cdot \nabla \mu - \mu \nabla \cdot \nabla \varphi_m = 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla^2 \varphi_m = 0}$$

(适用于无自由电流区域)

在直角坐标系中

$$\nabla^2 \varphi_m = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} = 0$$



思考 磁位 φ_m 是否满足泊松方程?

4.5.4 磁位 φ_m 、磁矢位 A 与电位 φ 的比较

位函数 比较内容	电位 (φ) (有源或无源)	磁位 (φ_m) (无源)	磁矢位 (A) (有源或无源)
引入位函数的依据	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{H} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
位与场的关系	$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ $\varphi = \int_p^{ref} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$	$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$ $\varphi_m = \int_p^{ref} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
微分方程	$\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon$ $\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi_m = 0$	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$
位与源的关系	$\varphi = \int_v \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon R}$	$\varphi_m = -\frac{I}{4\pi} \Omega$	$\mathbf{A} = \int_v \frac{\mu_0 \mathbf{J} dV}{4\pi R}$

4.6 恒定磁场的基本方程 · 分界面上的衔接条件

4.6.1 恒定磁场的基本方程

	积分形式	微分形式	物理意义
磁通连续原理	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	1、恒定磁场没有通量源； 2、 \mathbf{B} 线是无头无尾的矢量线。
安培环路定律	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	1、恒定磁场有漩涡源，漩涡源为电流； 2、磁场为非保守场，线积分与路经有关。
构成方程： $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (适用于各向同性线性媒质)			

例 4.6.1 试判断 (a) $F_1 = ax\mathbf{e}_y + by\mathbf{e}_x$ (b) $F_2 = a\rho\mathbf{e}_\rho$

能否表示为一个恒定磁场?

解:

$$\begin{aligned} (a) \quad \nabla \cdot \mathbf{F}_1 &= \frac{\partial F_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{1y}}{\partial y} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

F_1 可以表示为恒定磁场。

$$\begin{aligned} (b) \quad \nabla \cdot \mathbf{F}_2 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_{2\rho}) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a \rho) = 2a \neq 0 \end{aligned}$$

F_2 不可能表示恒定磁场。

4.6.2 分界面上的衔接条件

1. H 的衔接条件

在磁介质分界面上，包围 P 点作一矩形回路 l 。

令 $\Delta l_2 \rightarrow 0$ ，根据 $\oint_l H \cdot dl = I$ ，可得

$$\oint_l H \cdot dl = H_2 \cdot \Delta l_1 + H_1 \cdot \Delta l_1 = K \cdot e'_n \Delta l_1$$

$$(H_2 - H_1) \cdot (e'_n \times e_n) \Delta l_1 = K \cdot e'_n \Delta l_1$$

左边应用矢量恒等式 $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A)$

$$e'_n \cdot [e_n \times (H_2 - H_1)] = K \cdot e'_n$$

$$e_n \times (H_2 - H_1) = K$$

H 的切向分量不连续

当 $K = 0$ 时 $e_n \times (H_2 - H_1) = 0$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

H 的切向分量连续

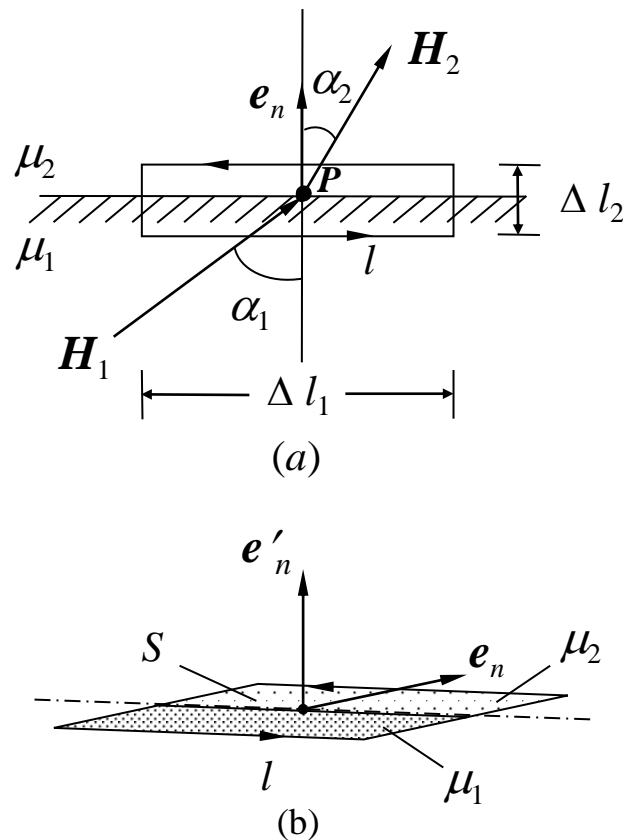


图4.6.1 分界面上 H 的衔接条件

2. B 的衔接条件

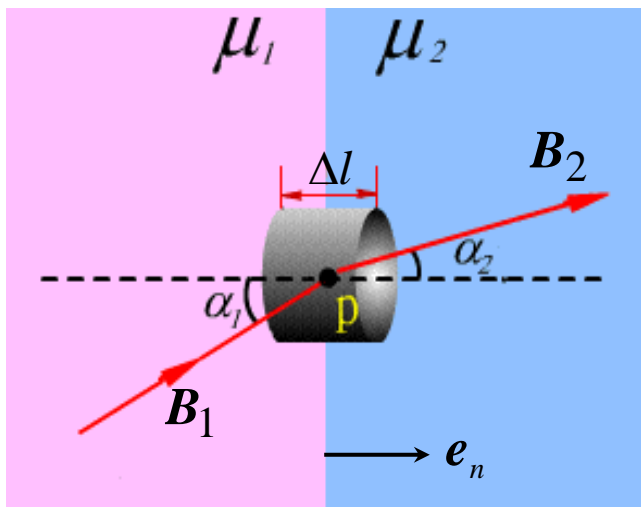


图4.6.1 分界面上 B 的衔接条件

在磁介质分界面上，包围 P 点作一小扁圆柱，

令 $\Delta l \rightarrow 0$ ，则根据 $\oint_s B \cdot dS = 0$ ，可得

$$B_{1n} = B_{2n}$$

或

$$e_n \cdot (B_2 - B_1) = 0$$

B 的法向分量连续

3. 分界面上的折射定律

当两种磁介质均匀、各向同性，则有

$$\alpha_1 = \beta_1 \qquad \alpha_2 = \beta_2$$

在分界面无自由电流线密度 K ，即

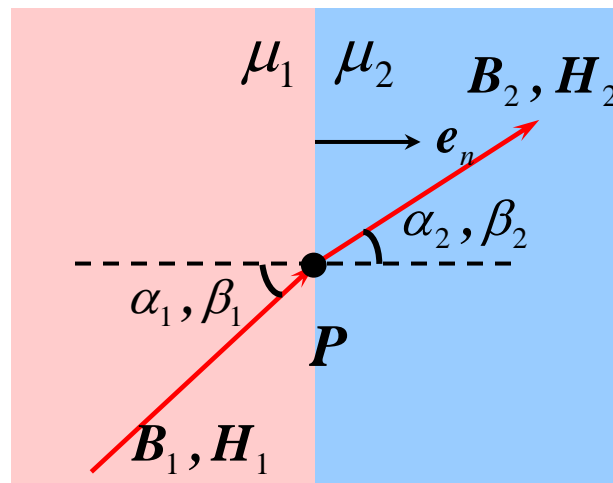
$$K = 0$$

由 $B_{1n} = B_{2n} \qquad H_{1t} = H_{2t}$

可得

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

折射定律



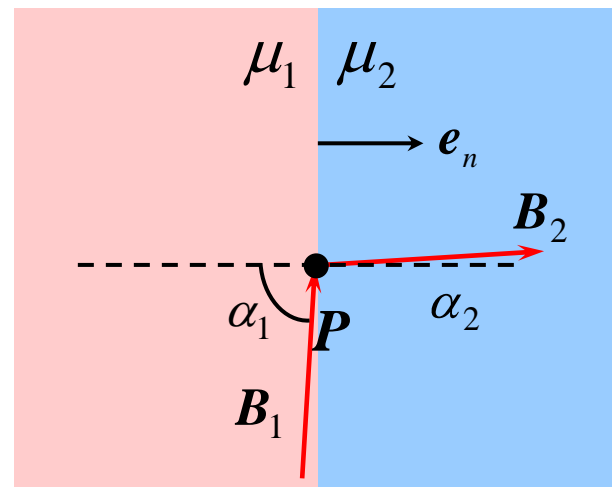
例4.6.2 第一种磁介质是铁磁物质, $\mu_1 \gg \mu_0$, 第二种磁介质是空气, $\mu_2 = \mu_0$ 。

设 $\mu_1 = 7000\mu_0$, 当 $\alpha_1 = 90^\circ$

根据折射定理, $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

可得
$$\alpha_2 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\mu_0}{7000\mu_0} \operatorname{tg} \alpha_1 \right) = \operatorname{tg}^{-1} (8.184 \times 10^{-3}) = 28'$$

可见当磁场由铁磁物质进入非铁磁物质时, 不管入射角大小如何, 只要 $\alpha_1 \neq 90^\circ$, 则分界面上紧靠非铁磁物质一侧均可视为磁感应强度垂直于分界面, 分界面可看作是等标量磁位面。



4.6.3 用磁位表示的媒质分界面边界条件

$$A_1 = A_2$$

表明在媒质分界面上磁矢位 A 是连续的。

$$\mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 \right) = \mathbf{K}$$

φ_m 推导方法与静电场类似,

$$\text{由 } \begin{cases} H_{1t} = H_{2t} \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases} \quad (H = -\nabla \varphi_m) \quad \begin{cases} \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \\ \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \end{cases}$$

推导得

例4.6.3 一半径为 a 的带电长直圆柱体，其电流为 I ，试通过矢量磁位 A 边值问题，求磁感应强度 B 。（导体内外媒质的磁导率均为 μ_0 ）

解：采用圆柱坐标系， $A = A_z \mathbf{e}_z$ ，且 $A_z = f(\rho)$

设 $J = J_z \mathbf{e}_z$

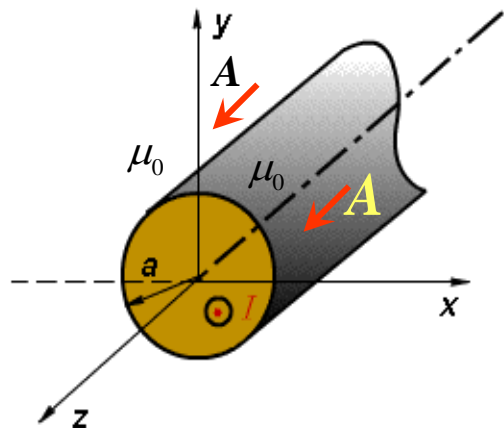


图4.6.4 长直带电圆柱导体

$$\nabla^2 A_{z1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \right) = -\mu_0 J_z \quad 0 < \rho \leq a \quad (1)$$

$$\nabla^2 A_{z2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \right) = 0 \quad a < \rho \leq \infty \quad (2)$$

通解为 $A_{z1}(\rho) = -\frac{\mu_0 J_z}{4} \rho^2 + C_1 \ln \rho + C_2$ (3)

$$A_{z2}(\rho) = C_3 \ln \rho + C_4 \quad (4)$$

根据 $B = \nabla \times A = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\phi & \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & A_\phi & A_z \end{vmatrix}$

$$= -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi \quad \xrightarrow{J_z = \frac{I}{\pi a^2}} \quad B_{1\phi} = -\frac{\partial A_1}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho$$

$$B_{2\phi} = -\frac{\partial A_2}{\partial \rho} = -\frac{C_3}{\rho}$$

$$B_{1\phi} = -\frac{\partial A_1}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho$$

$$B_{2\phi} = -\frac{\partial A_2}{\partial \rho} = -\frac{C_3}{\rho}$$

$$H_{1\phi} = \frac{B_{1\phi}}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi a^2} \rho$$

$$H_{2\phi} = \frac{B_{2\phi}}{\mu_0} = -\frac{C_3}{\mu_0 \rho}$$

根据导体表面

$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow H_{1\phi}\big|_{\rho=a} = H_{2\phi}\big|_{\rho=a}$$

应有

$$\frac{I}{2\pi a} = -\frac{C_3}{\mu_0 a} \rightarrow C_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

$$\mathbf{B}_1 = B_{1\phi} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{B}_2 = B_{2\phi} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi$$

例4.6.3 一环形磁芯由 μ_1 两种磁性材料构成，
在磁芯轴心线上只有一无限长直载流导线，

求：1) 磁芯内的 B , H , Φ ;

2) 分界面上的 B , H 是否突变?

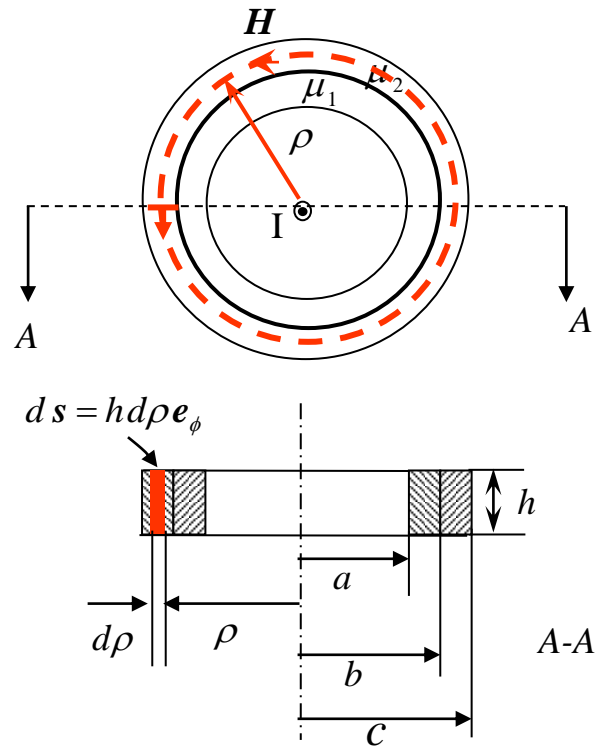
解：1) 选用圆柱坐标，并应用安培环路定律

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad \rightarrow \quad H = \frac{I}{2\pi\rho} e_\phi \quad a \leq \rho \leq c$$

$$a < \rho < b \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi\rho} e_\phi \quad ; \quad b < \rho < c \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi\rho} e_\phi$$

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{s_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_{s_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{\mu_1 I}{2\pi\rho} h d\rho + \int_b^c \frac{\mu_2 I}{2\pi\rho} h d\rho$$

$$= \frac{\mu_1 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_2 I h}{2\pi} \ln \frac{c}{b} = \frac{I h}{2\pi} \left(\mu_1 \ln \frac{b}{a} + \mu_2 \ln \frac{c}{b} \right)$$

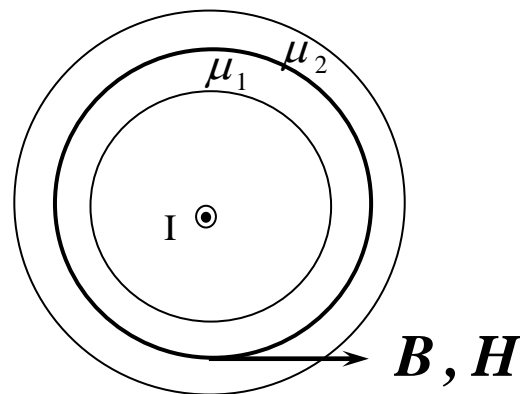


2) 分界面上 B , H 均只有切向分量, 分界面上无自由面电流,

故 $H_{1t} = H_{2t}$, H 连续; $B_{1t} = \mu_1 H_{1t}$ $B_{2t} = \mu_2 H_{2t}$

$$\because \mu_1 \neq \mu_2 \quad \therefore B_{1t} \neq B_{2t}$$

故 $B_1 \neq B_2$ B 不连续。



4.7 电 感

4.7.1 电感的概念

1、磁通与磁链

磁通： 磁感应强度 B 通过某一曲面 S 的通量称为磁通或磁通量。

公式：
$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

磁链： 定义为与某电流或线圈交链的磁通量称为磁链或磁通链。

公式：
$$\Psi = \sum_{k=1}^N \Phi_k$$

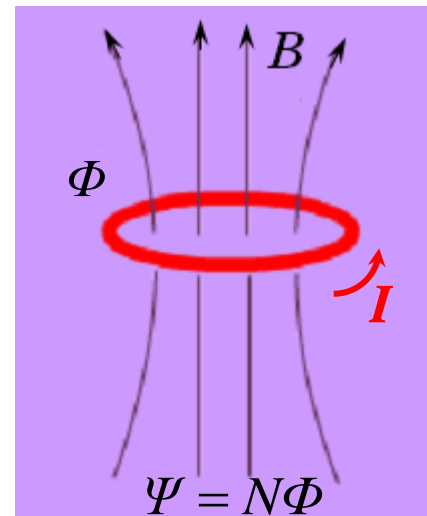
其中， N 为线圈匝数或电流根数。

由毕奥——沙伐定律

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

可知 $B \propto I \rightarrow \Phi \propto I, \Psi \propto I$

定义电感为： Ψ/I **单位：** **H** (亨利)



4.7.2 自感

回路交链的磁链与产生该磁链的回路电流的比值称为自感。

即

$$L = \frac{\psi}{I} \quad \text{H}$$

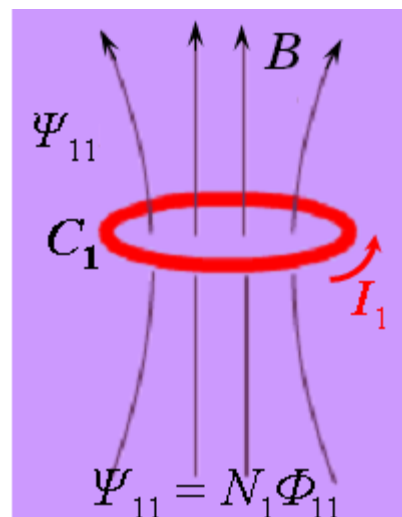
在线性各向同性媒质中， L 仅与回路的几何尺寸、媒质参数有关，与回路的电流无关。

回路 C_1 的自感磁链：

$$\Psi_{11} = N_1 \Phi_{11}$$

回路 C_1 的自感为：

$$L = \frac{\Psi_{11}}{I_1}$$



Ψ_{11} 是 I_1 产生的磁通与 C_1 交链的磁通链

$$L = L_i + L_0$$
$$L_i = \frac{\Psi_i}{I}$$

——内自感是导体内部仅与部分电流交链的磁链与回路电流比值。

$$L_0 = \frac{\Psi_0}{I}$$

—— 外自感是导体外部闭合的磁链与回路电流的比值。

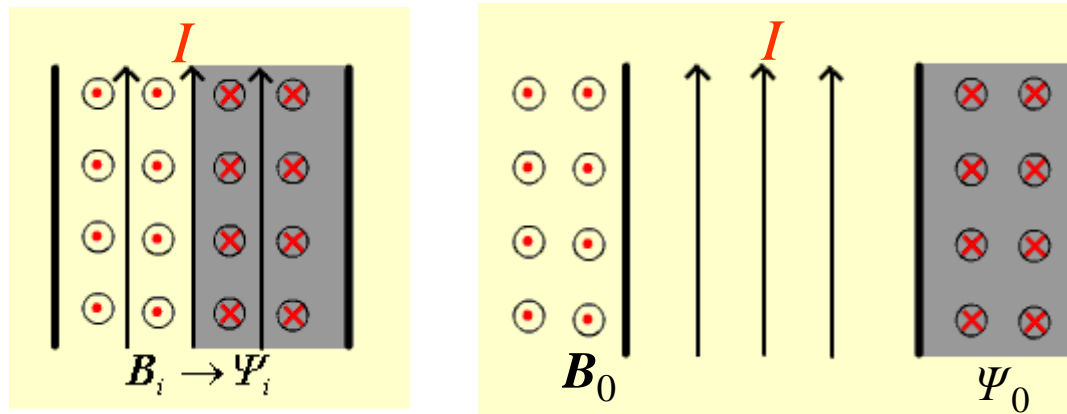
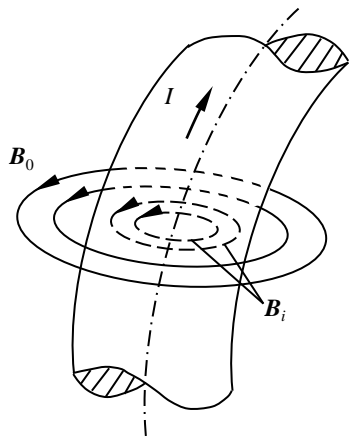


图4.7.1 内磁链与外磁链

自感计算的一般步骤:

$$\text{设} \quad \begin{array}{ccccccc} I \rightarrow H & \xrightarrow{\mu H} & B & \xrightarrow{\int_S B \cdot dS} & \Phi & \xrightarrow{N\Phi} & \psi \rightarrow L(L_i, L_0) \\ & & & \oint_l A \cdot dl & \uparrow & & \\ & \searrow & A & & & & \end{array}$$

例 4.7.1 试求图示长为 l 的同轴电缆的自感 L 。

解：总自感 $L = L_{i1} + L_{i2} + L_0$

1) 内导体的内自感 $L_{i1} = (0 \leq \rho \leq R_1)$

设安培环路包围部分电流 I' 则有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I' = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi \rho^2 = \frac{I}{R_1^2} \rho^2$$

$$H = \frac{I}{2\pi R_1^2} \rho, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} \rho$$

穿过宽度为 $d\rho$ 长度为 l 的矩形面积的磁通为

磁链中的匝数，可根据

$$I : 1 = I' : N \rightarrow N = \frac{I'}{I} = \frac{\rho^2}{R_1^2} \quad d\Psi = Nd\Phi$$

因此，有 $\Psi_{i1} = \int_s Nd\Phi = \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I l \rho}{2\pi R_1^2} \cdot \frac{\rho^2}{R_1^2} d\rho = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$

内自感

$$L_{i1} = \frac{\Psi_{i1}}{I} = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

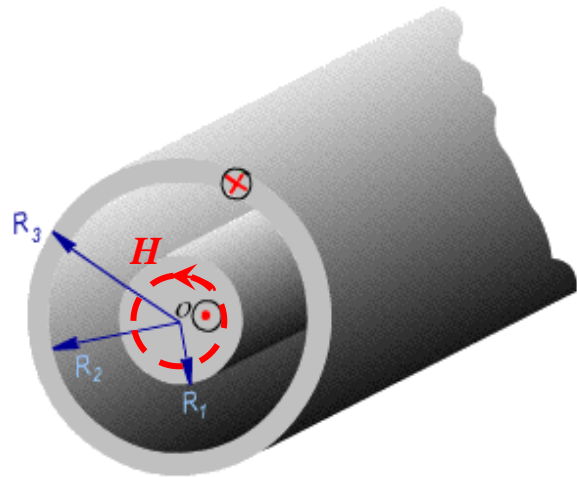


图4.7.2 同轴电缆截面

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} \rho l d\rho$$

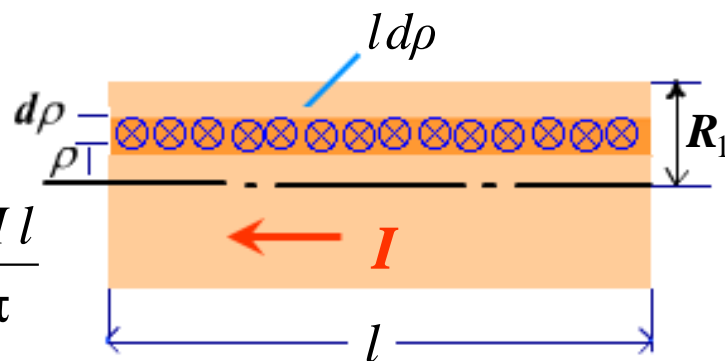


图4.7.3 同轴电缆内导体纵截面

2) 外导体内自感 $R_2 \leq \rho \leq R_3$

$$I' = I - I \left(\frac{\pi \rho^2 - \pi R_2^2}{\pi R_3^2 - \pi R_2^2} \right) = \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} I$$

$$H = \frac{I'}{2\pi\rho} = \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} I \cdot \frac{1}{2\pi\rho}, \quad B = \mu_0 H$$

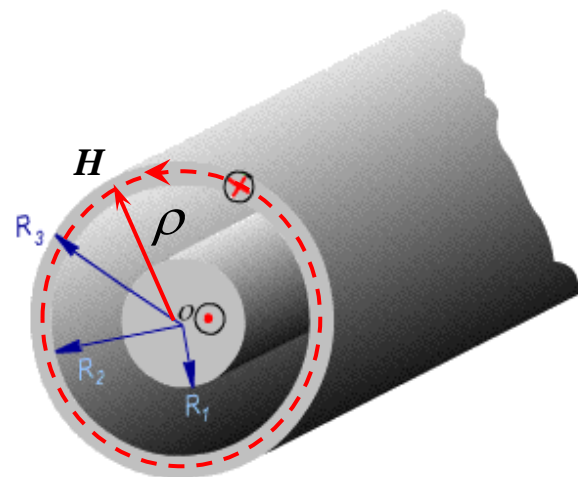


图4.7.2 同轴电缆截面

$$d\Phi_{i2} = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \cdot l d\rho \quad N = \frac{I'}{I} = \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \quad d\Psi_{i2} = N d\Phi_{i2}$$

故

$$L_{i2} = \frac{1}{I} \int N d\Phi_{i2} = \frac{1}{I} \int_{R_2}^{R_3} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \left(\frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 l d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{\mu_0 l R_3^2}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)} + \frac{\mu_0 l (R_3^2 + R_2^2)}{8\pi(R_3^2 - R_2^2)}$$

工程上视同轴电缆外导体为面分布的电流，故忽略此部分的内自感 ($L_{i2} = 0$)。

3) 内、外导体间的外自感 L_0 ($R_1 < \rho < R_2$)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad d\Psi_0 = d\Phi_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho$$

$$L_0 = \frac{\Psi_0}{I} = \frac{1}{I} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

总电感为 $L = L_{i1} + L_{i2} + L_0$

单位长度上的电感

$$L' = \frac{L}{l}$$

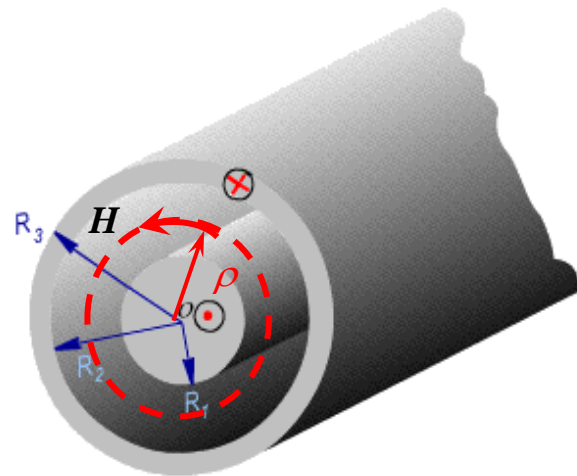


图4.7.2 同轴电缆截面

例 4.7.2 设传输线的长度为 l ，试求图示两线传输线的自感。

解：总自感

$$L = 2L_i + L_0$$

内自感

$$L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi}, \quad 2L_i = \frac{\mu_0 l}{4\pi}$$

解法一

(由 $B \rightarrow L_0$)

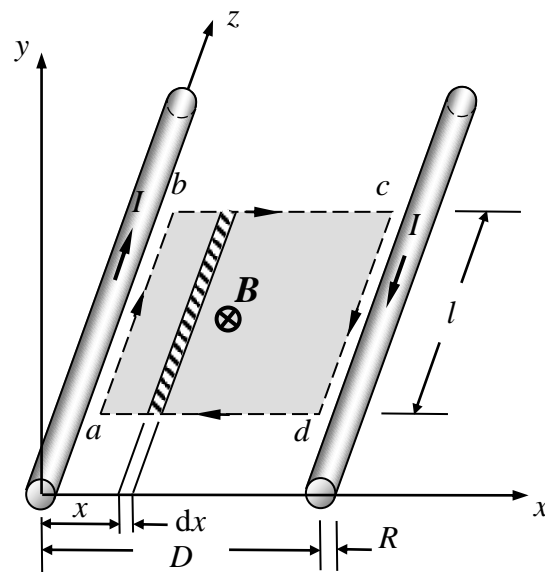
设
$$I \rightarrow H = \left(\frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(D-x)} \right) (-e_y) \rightarrow B = \mu_0 H$$

$$\Psi_0 = \Phi_0 = \int B \cdot dS \quad dS = l dx (-e_y)$$

$$= \mu_0 I \int_R^{D-R} \left(\frac{1}{2\pi x} + \frac{1}{2\pi(D-x)} \right) l dx = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

$$L_0 = \frac{\Psi_0}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

总自感为
$$L = 2L_i + L_0 = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$



二线传输线的自感

解法二

(由 $A \rightarrow L_0$)
$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mathbf{e}_z$$

在 ab 线段上 $r_1 = R, r_2 = D - R$

$$A(ab) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{D-R}{R} \right) \mathbf{e}_z$$

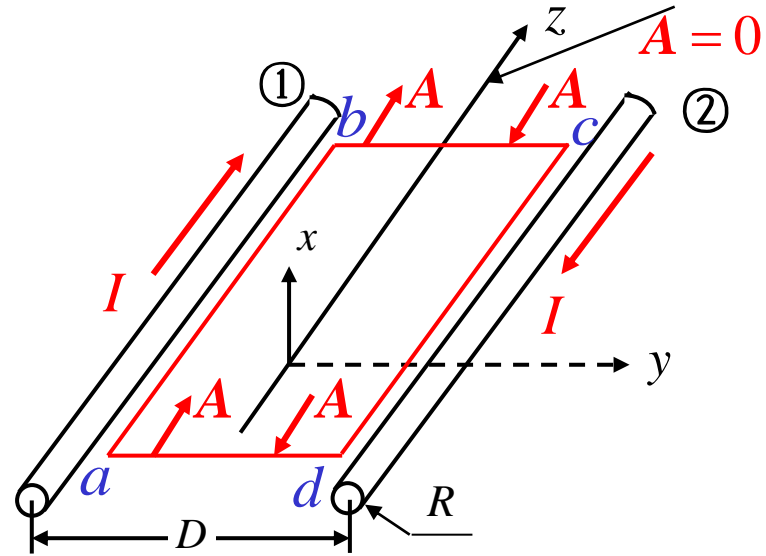
在 cd 线段上 $r_1 = D - R, r_2 = R$

$$A(cd) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{R}{D-R} \right) \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{D-R}{R} \right) (-\mathbf{e}_z)$$

$$\psi_0 = \Phi_0 = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A(ab) \cdot (l \mathbf{e}_z) + A(cd) \cdot l(-\mathbf{e}_z)$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R} \quad L_0 = \frac{\psi_0}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

总自感为
$$L = 2L_i + L_0 = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$



二线传输线的自感

4.7.3 互感

在线性媒质中，回路1的电流 I_1 产生与回路2相交链的磁链 ψ_{21} 与 I_1 成正比。

互感磁链：

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \propto I_1$$

$$\psi_{21} = M_{21} I_1 \quad \rightarrow \quad M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1}$$

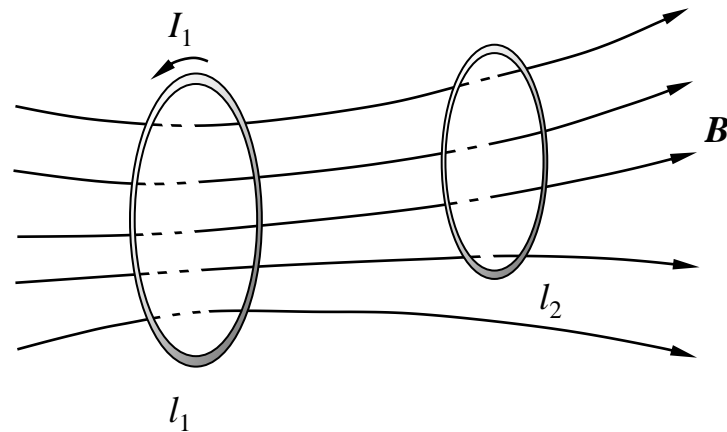
式中， M_{21} 为互感，单位：H（亨利）

同理，回路2对回路1的互感可表示为

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2}$$

可以证明

$$M_{12} = M_{21}$$



互感是研究一个回路电流在另一个回路所产生的磁效应，它不仅与两个回路的形状、尺寸、周围媒质和导线材料的磁导率有关，还和两个回路之间的相对位置有关。

计算互感的一般步骤:

$$\text{设 } I_1 \rightarrow H_I \rightarrow B_1 \rightarrow \Phi_{21} = \int_S \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} \xrightarrow{N_2 \Phi_{21}} \Psi_{21} \rightarrow M = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$
$$\quad \quad \quad \left[\begin{array}{c} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \end{array} \right]$$

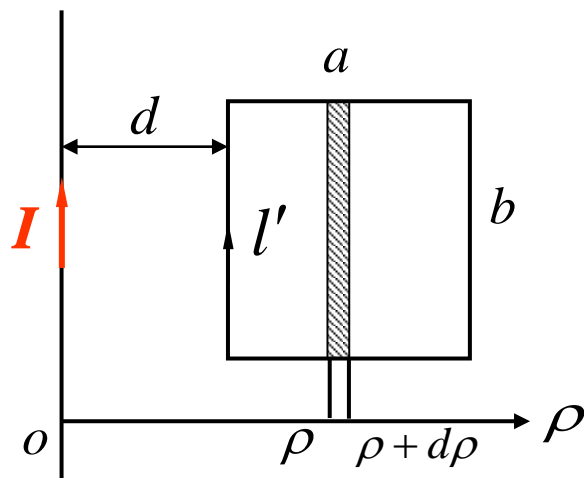
例 4.7.3 如右图，一根长直导线与一边长为 $a \times b$ 的矩形线圈共面，线圈与直导线平行，接近直导线的 b 边到直导线的距离为 d ，求两导线间的互感。

解： 设长直导线中有电流 I 通过，直导线产生的磁场穿过矩形线圈的磁链为

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} b d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

互感

$$M = \Psi / I = \frac{\mu_0}{2\pi} b \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$



例 4.7.4 图示尺寸的环形磁心，由导磁率分别为 μ_1 和 μ_2 的两个半环形磁芯构成，在磁芯上均匀密绕有 N 匝线圈，在环形磁芯轴线处置有一无限长直导线，试求长直导线与线圈之间的互感 M 。

解：选柱坐标，设长直导线上通有电流 I_1 ，应用安培环路定律

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_2} \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_2} \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} \cdot d\mathbf{l} = I_1$$

$$\pi \rho \left(\frac{B_1}{\mu_1} + \frac{B_2}{\mu_2} \right) = I_1$$

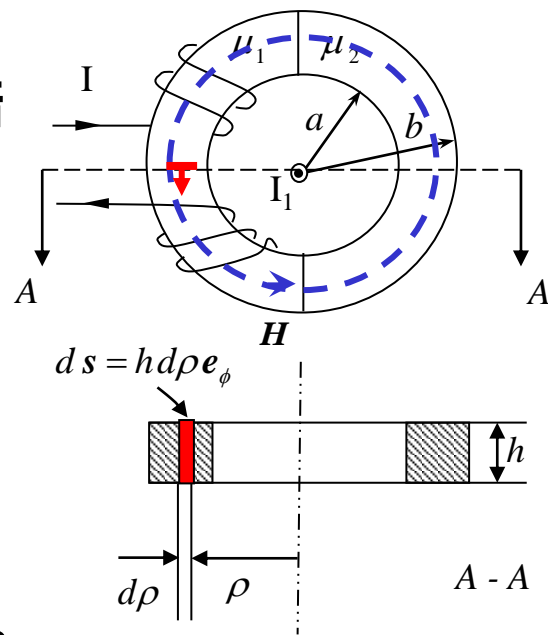
在分界面上有 $B_{1n} = B_{2n}$ ，且磁场没有切向分量 $\therefore B_1 = B_2$

因此
$$\pi \rho B_1 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) = I_1 \quad \rightarrow \quad B_1 = B_2 = \frac{I_1 \mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2) \pi \rho} \mathbf{e}_\phi ;$$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{I_1 \mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2) \pi \rho} h d\rho = \frac{I_1 \mu_1 \mu_2 h}{(\mu_1 + \mu_2) \pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\Psi = N\Phi = \frac{NI_1 \mu_1 \mu_2 h}{(\mu_1 + \mu_2) \pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$M = \frac{\Psi}{I_1} = \frac{N \mu_1 \mu_2 h}{(\mu_1 + \mu_2) \pi} \ln \frac{b}{a}$$



例4.7.5 真空中有一长直导线，通有电流 I_1 ，它的右上方是平行放置的两根通信线，通过的电流为 I_2 ，两个系统相对的位置关系及相关参数如图所示。求载流导体与通信线之间单位长度的互感，假设通信线横截面尺寸可以忽略。

解： 建立圆柱坐标系，正方向与电流 I_1 一致，磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} e_\phi$$

引进变量 y ，在通信线取回路长为 $l=1$ ，宽度为 b ，穿过 dS 的互感磁链为

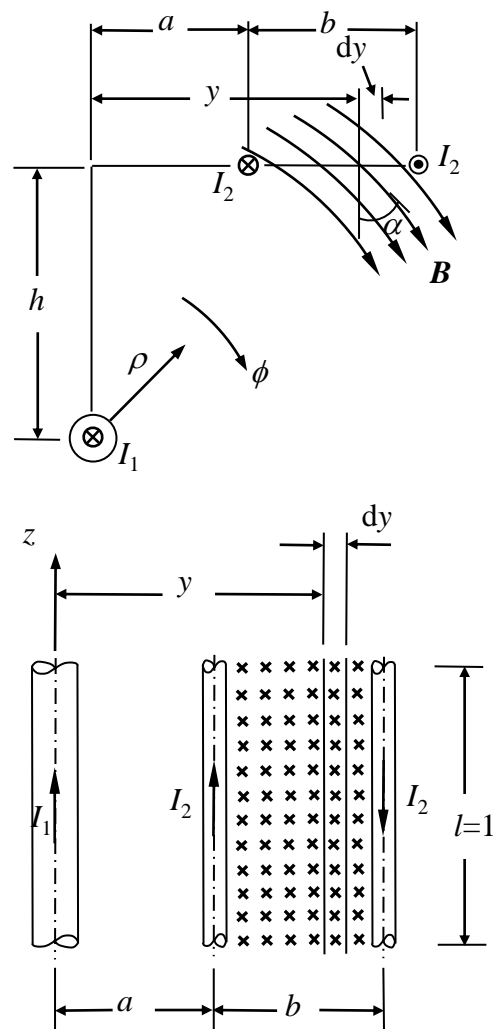
$$d\Psi_{21} = B \cdot dS = B dy \cos\alpha = \frac{\mu_0 I_1 y}{2\pi(h^2 + y^2)} dy$$

$$\Psi_{21} = \int_a^{b+a} d\Psi_{21} = \int_a^{b+a} \frac{\mu_0 I_1 y}{2\pi(h^2 + y^2)} dy$$

$$\Psi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \ln \frac{h^2 + (a+b)^2}{h^2 + a^2}$$

单位长度的互感为

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{h^2 + (a+b)^2}{h^2 + a^2}$$



1) 铁板放在两线圈的下方,互感是增加了,还是减少了? 为什么? 如何计算?

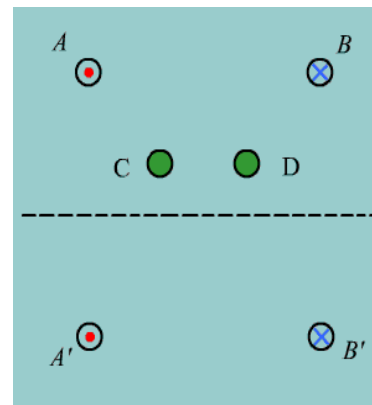
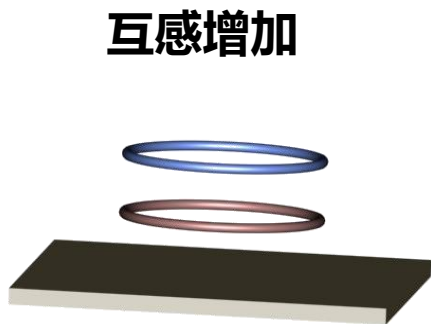


图4.7.7 一块无限大铁板($\mu \rightarrow \infty$) 置于两对线圈的下方

2) 铁板插入两线圈之间后, 互感是增加还是减少? 为什么? 自感是否增加?

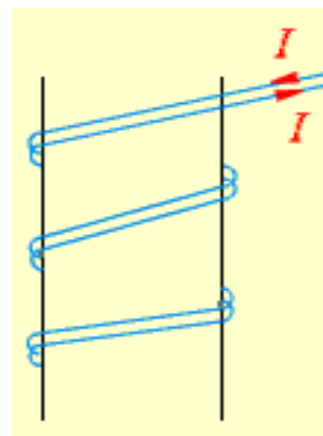
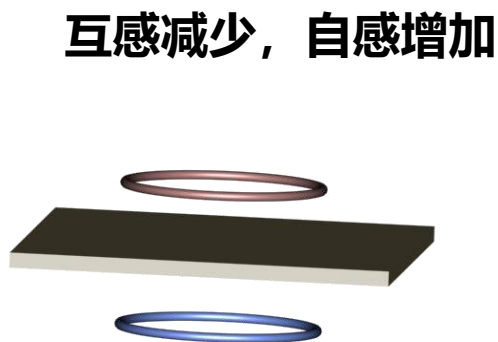


图3.7.8 一块无限大铁板 ($\mu \rightarrow \infty$) 置于两线圈之间

图 3.7.9 无感线圈

4.9 磁场能量与磁场力

磁场作为一种特殊的物质，和电场一样具有能量。有专家预测，21世纪将是以磁力（磁能）作为能源代表的时代。

高温超导体磁场特性的发现与利用，使梦想中之能源——受控热聚变，磁流体发电，太阳能卫星电站，逐步成为现实，利用磁能作为驱动力的超导体磁悬浮列车和超导磁动力船已向我们驰来。



1、创建一个磁场

2、毁灭一个磁场

3、浮在超导体上的磁体

4.9.1 恒定磁场中的能量

- 假设：
- 载流回路是刚性的、位置固定（无机械损失），场中媒质为线性（无磁滞损失）；
 - 磁场建立无限缓慢（不考虑涡流及辐射）；
 - 系统能量仅与系统的最终状态有关，与能量的建立过程无关。

磁场能量的推导过程

第一步： i_1 从 $0 \rightarrow I_1$, $i_2 = 0$

则 t 时刻，回路1、2中的感应电动势为

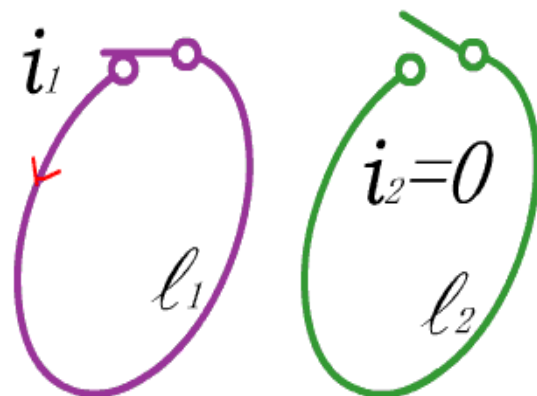
$$\varepsilon_{11} = -\frac{d\psi_{11}}{dt}, \quad \varepsilon_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt}$$

若要继续充电，外源必须克服回路的感应电动势做功，即

$$dA'_1 = (-\varepsilon_{11}) \overbrace{i_1 dt}^{q_1} = \frac{d\psi_{11}}{dt} i_1 dt = i_1 d\psi_{11} \quad dA'_2 = (-\varepsilon_{21}) \overbrace{i_2 dt}^{q_2} = \frac{d\psi_{21}}{dt} i_2 dt = i_2 d\psi_{21}$$

i_1 从 $0 \rightarrow I_1$ 过程中，外源所做的功

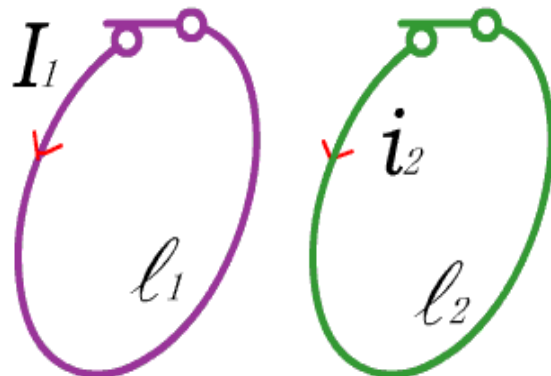
$$A' = A'_1 + A'_2 = \int dA'_1 + 0 = \int_0^{I_1} i_1 d\psi_{11} = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 = L_1 I_1^2 / 2$$



第二步： I_1 不变, i_2 从 $0 \rightarrow I_2$

则 t 时刻, 回路1、2中的感应电动势为

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\psi_{12}}{dt}, \quad \varepsilon_{22} = -\frac{d\psi_{22}}{dt}$$



若要继续充电, 外源必须克服回路的感应电动势做功, 即

$$dA_1'' = (-\varepsilon_{12})I_1 dt = \frac{d\psi_{12}}{dt} I_1 dt = M_{12}I_1 di_2;$$

$$dA_2'' = (-\varepsilon_{22})i_2 dt = \frac{d\psi_{22}}{dt} i_2 dt = L_2 i_2 di_2$$

I_1 不变, i_2 从 $0 \rightarrow I_2$, **外源所做的功**

$$A'' = A_1'' + A_2'' = I_1 \int_0^{I_2} M_{12} di_2 + \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2 = MI_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$W_m = A = A' + A'' = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2$$

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 = \frac{1}{2} (L_1 I_1 + M I_2) I_1 + \frac{1}{2} (M I_1 + L_2 I_2) I_2 \\
 &= \frac{1}{2} \psi_1 I_1 + \frac{1}{2} \psi_2 I_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 I_k \psi_k
 \end{aligned}$$

推广

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k I_k^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k$$

自有能
(n 项)

互有能
($\frac{n^2-n}{2}$) 项

• $M_{ij} I_i I_j$ 与两回路的电流及互感系数有关，称为互有能。当两个载流线圈产生的磁通是相互增加的，互有能为正；反之为负。

• $\frac{1}{2} L_k I_k^2$ 是回路 k 单独存在时的能量，称为自有能量。

自有能量始终大于零。

• 对于单一回路 $W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2W_m}{I^2}$

4.9.2 磁场能量的分布

磁场能量是在建立回路电流的过程中形成的，分布于磁场所在的整个空间中。

考虑到磁通可以用磁矢量位 A 表示，则磁能 W_m 可表示为

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{l_k} I_k A \cdot dl$$

由于 $I dl$ 与 $J dV$ 等价，用 $J dV$ 代替 $I dl$ ，所以当 $n \rightarrow \infty$ ，有

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V'} A \cdot J dV'$$

利用 $\nabla \times H$ 的关系，

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V A \cdot \nabla \times H dV$$

积分区域由 V' 扩展到整个空间 V 。

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} dV$$

由矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$$

得

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$$

散度定理 $\frac{1}{2} \oint_s (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$

$\because H \propto \frac{1}{r^2}, \quad A \propto \frac{1}{r}, \quad dS \propto r^2 \quad \therefore \quad r \rightarrow \infty \text{ 时, 第一项为 } 0$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \int_v w_m dV \quad \text{单位: } \mathbf{J} \text{ (焦耳)}$$

磁能密度定义:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} ;$$

单位: J / m^3

各向同性 线性媒质 : $w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$

上式表明磁能是以磁能密度的形式储存在整个场域中。

4.9.3 空气中磁场能量密度与电场能量密度的对比

空气中，最大电场强度

$$E_{max} = 3.3 \times 10^6 \text{ V/m}$$

电场能量密度最大值

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{max}^2 \approx 48 \text{ (J/m}^3\text{)}$$

在空气中设磁场 $B = 1\text{T}$,

磁场能量密度

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \approx 4 \times 10^5 \text{ (J/m}^3\text{)}$$

空气储存磁能的能力超过电能的8000倍。

例 4.8.1 长度为 l ，内外导体半径分别为 R_1 与 R_2 的同轴电缆，通有电流 I ，磁导率均为 μ_0 ，试求电缆储存的磁场能量与自感。

解：由安培环路定律，得

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{I'}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi = \frac{\rho I}{2\pi R_1^2} \mathbf{e}_\phi & 0 < \rho < R_1 \\ \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi & R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & \rho > R_2 \end{cases}$$

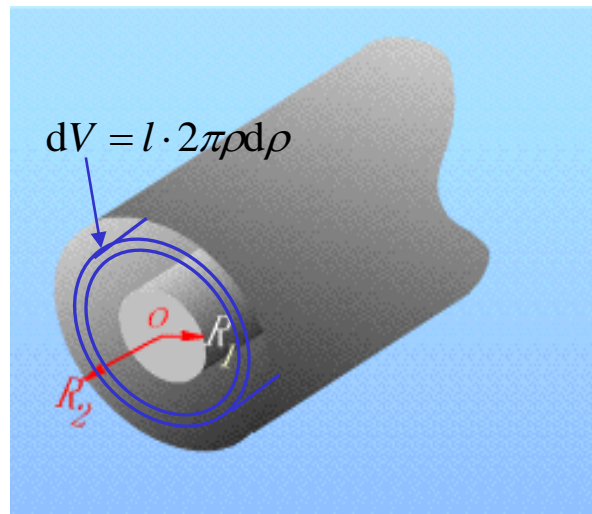


图4.8.1 同轴电缆截面

磁能为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu_0 H^2 dV \\ &= \frac{\mu_0}{2} \left[\int_0^{R_1} \left(\frac{\rho I}{2\pi R_1^2} \right)^2 l 2\pi\rho d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{I}{2\pi\rho} \right)^2 l 2\pi\rho d\rho \right] = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right] \end{aligned}$$

自感

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right] = \frac{\mu_0 l}{8\pi} + \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = L_i + L_0$$

4.8.3 磁场力

磁场能量的宏观效应就是载流导体或运动的电荷在磁场中要受到力的作用。仿照静电场，磁场力的计算也有三种方法。

1. 安培力
$$F = \oint_l I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

2. 虚位移法 (虚功原理)

3. 法拉第看法

虚位移法

假设系统中 n 个载流回路分别通有电流 I_1, I_2, \dots, I_n , 仿照静电场, 当回路仅有一个广义坐标发生位移 dg , 该系统中发生的能量过程是

$$dW_{ext} = dW_m + f dg$$

电源提供的能量 = 磁场能量的增量 + 磁场力所做的功

• 常电流系统,

广义坐标 g 发生改变, 但各回路维持电流不变 $I_k = \text{const.}$ 系统磁能增量为:

$$dW_m \Big|_{I_k = \text{常量}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k d\psi_k$$

$d\psi_k$ 将在各回路中激发出感应电动势 e_k , 为使电流 I_k 不改变, 各电源提供的电动势为

$$e'_k = -e_k = \frac{d\psi_k}{dt}$$

dt 时刻 e'_k 移动 dq_k 从负极到正极，各电源所作的元功为：

$$dW_{ext} = \sum_{k=1}^n e'_k dq_k = \sum_{k=1}^n \frac{d\psi_k}{dt} I_k dt = \sum_{k=1}^n I_k d\psi_k = 2dW_m$$

表明外源提供的能量，一半用于增加磁场能量，另一半提供磁场力做功，因此

$$f dg = dW_{ext} - dW_m = dW_m$$

$$fdg = dW_m \Big|_{I_k = \text{常量}}$$

得广义力

$$f = \frac{\partial W_m}{\partial g} \Big|_{I_k = \text{常量}}$$

- 常磁链系统

由于各回路磁链保持不变，故各回路没有感应电动势，电源不提供（增加的）能量，即 $(dW_{ext} = 0)$ ，所以，只有减少磁能来提供磁场力作功，故有

$$dW_m + fdg = 0$$

$$fdg = -dW_m \Big|_{\psi_k = \text{常量}}$$

由此得广义力

$$f = - \frac{\partial W_m}{\partial g} \Big|_{\psi_k = \text{常量}}$$

两点说明:

- 两种假设结果相同, 即

$$f = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{I_k = \text{常量}} = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{\psi_k = \text{常量}}$$

- 在实际问题中, 若求相互作用力, 只需求出互有磁能, 并以相对位置为广义坐标, 利用上式即可得到相应的广义力。

因为

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k I_k^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n M_{ij} I_i I_j = W_{m\text{自}} + W_{m\text{互}}$$

所以

$$f = \left. \frac{\partial W_{m\text{互}}}{\partial g} \right|_{I_k = \text{常量}}$$

求磁场力步骤:

1、求 $W_m(g)$ 或 $W_{m\text{互}}(g)$, 并表示成对应广义坐标的函数;

1、求 $\frac{\partial W_m(g)}{\partial g}$ 或 $\frac{\partial W_{m\text{互}}(g)}{\partial g}$

例 4.8.2 试求图示载流平面线圈在均匀磁场中受到的转距。设线圈中的电流 I_1 ，线圈的面积为 S ，其法线方向与外磁场 B 的夹角为 α 。

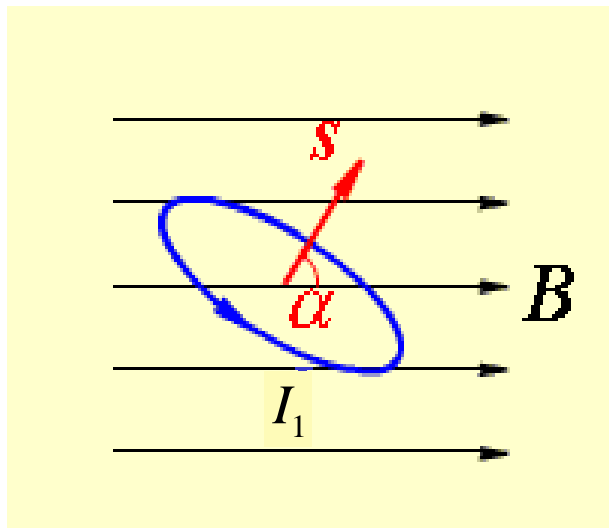


图4. 8. 2 外磁场中的电流回路

解：系统的磁能及相互作用能为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

$$W_{m\perp} = M I_1 I_2 = I_1 \psi_{12} = I_1 B S \cos \alpha$$

选 α 为广义坐标，对应的广义力是转距，即

$$T = \left. \frac{\partial W_{m\perp}}{\partial \alpha} \right|_{I_k=\text{常量}} = -I_1 B S \sin \alpha = -B m \sin \alpha$$

式中 $m = I_1 S$ 为载流回路的磁偶极矩；

$T < 0$ 表示广义力（转距）企图使广义坐标 α 减小，使该回路包围尽可能多的磁通。

用矢量表示为

$$\boxed{T = m \times B}$$

本例的结果完全适用于磁偶极子，也是电磁式仪表的工作原理。

例4.8.3 求图示正方形载流回路所受的磁场力。

解：首先计算系统的磁场能量。长直载流细导线视为一个载流回路 l_1 ，两电流回路构成的系统磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

载流回路为刚性， L_1 、 L_2 、 I_1 、 I_2 视为不变量，因此，上式中可能变化的是：

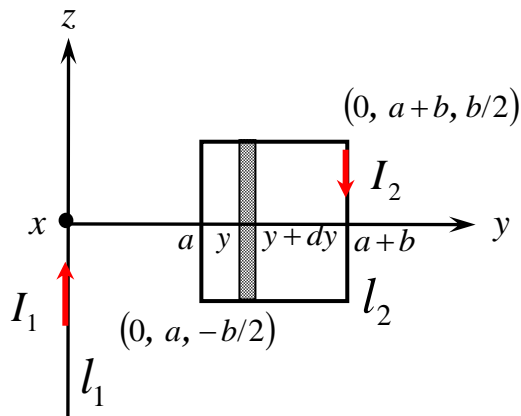
$$W_{m\text{互}} = M I_1 I_2 = I_2 (M I_1) = I_2 \psi_{21}$$

$$\psi_{21} = \phi_{21} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

将 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} (-\mathbf{e}_x)$ $d\mathbf{S} = b dy (-\mathbf{e}_x)$ 代入上式得

$$\psi_{21} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \cdot b dy = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$W_{m\text{互}} = I_2 \psi_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$



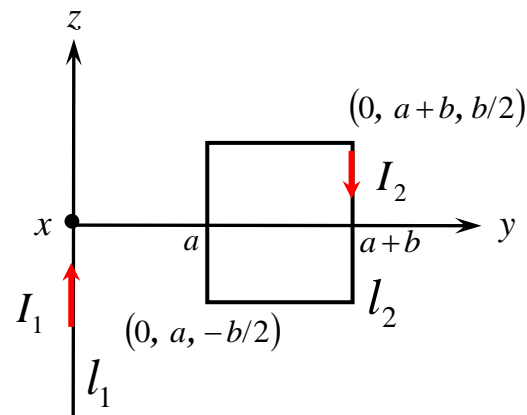
$$W_{m\text{互}} = I_2 \psi_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$f = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{I_k=\text{常量}} = \left. \frac{\partial W_{m\text{互}}}{\partial g} \right|_{I_k=\text{常量}} = \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial g} \left[\ln \frac{a+b}{a} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} b \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a} \right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b^2}{2\pi a(a+b)}$$

因为 $f < 0$ 所以磁场力的方向沿 a 减小的方向。



例 4.8.4 一对宽为 a 相距 h 的平行带状传输线，其中流有相反方向的电流 I 。如果带线宽 $a \gg h$ ，忽略边沿效应，求带线间单位长度上的作用力。

解：在 $a \gg h$ 条件下，忽略边沿效应，可以认为带线间的磁场是均匀的。利用虚位移法求解磁场力。

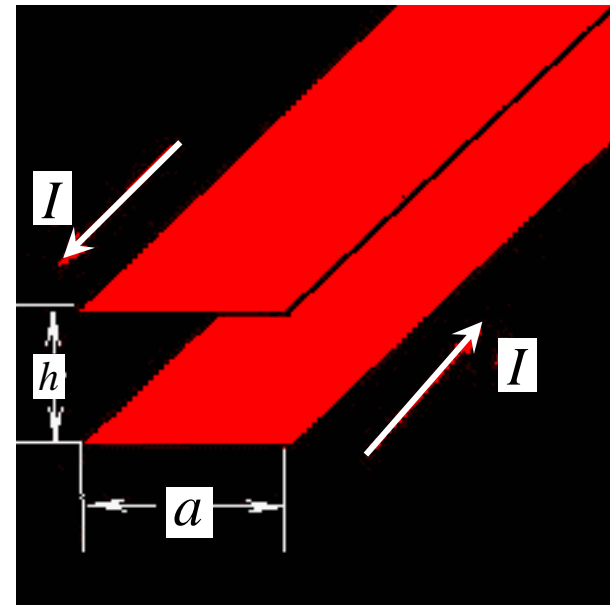
应用安培环路定律得带线间的磁场 $H = I / a$

带线间磁能密度 $w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2}{a^2} = \mu_0 \frac{I^2}{2a^2}$

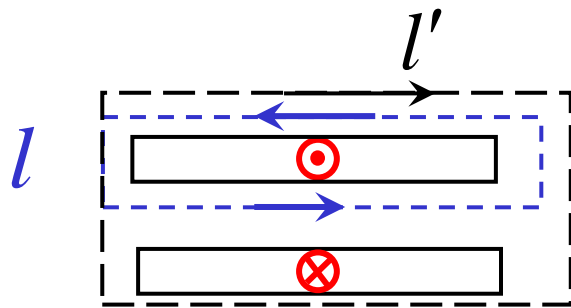
单位长度总的磁场能量：
$$W_m = w_m h a = \frac{\mu_0 I^2 h}{2a}$$

$$f = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{I=\text{const}} = \frac{dW_m}{dh} = \frac{\mu_0 I^2}{2a}$$

结果 $f > 0$ 表示两板间的作用力是排斥力。



结束

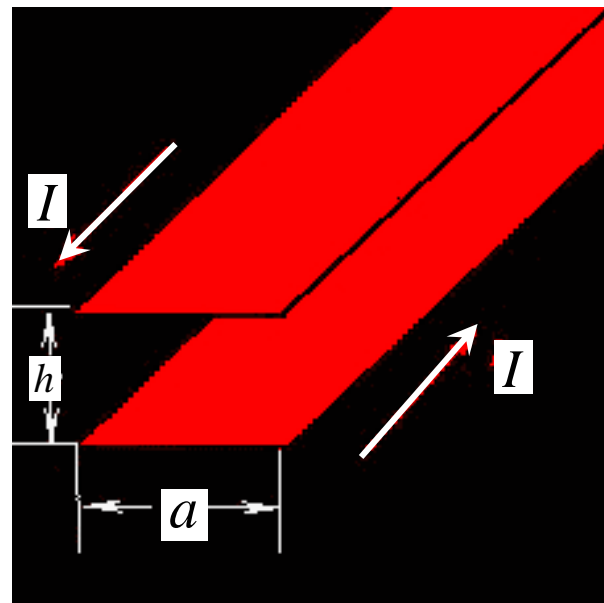


$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$



$$H \cdot a = I$$

$$\therefore H = I/a$$



[返回](#)