第4章 快速傅里叶变换(FFT)知识要点.

1. DFT运算复杂度.

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k=0,1,\cdots N-1$$

$\begin{cases} \text{N点DFT运算乘法次数} & N^2 \\ \text{N点DFT运算加法次数} & N(N-1) \end{cases}$

$\begin{cases} \text{某个}k: & N\text{次乘法},\ N-1\text{次加法}. \\ N\text{个}k & N^2\text{次乘法},\ N(N-1)\text{次加法} \end{cases}$

当 $N\uparrow$. 运算量巨大,不适合实时运算　例 $N=1024 \Rightarrow N^2=1,048,576 \approx 10^6$

2. 减少DFT运算量的途径和方法.

① 将长序列的DFT不断分解为若干短序列的DFT;　$N\downarrow$ $N^2\downarrow$

② 利用 W_N^{kn} 的性质进一步简化运算

$\begin{cases} \text{周期性} & W_N^{kn+lN}=W_N^{kn}\cdot W_N^{lN}=W_N^{kn}e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot lN}=W_N^{kn}\cdot e^{-j2\pi l}=W_N^{kn} \\ ⊛\ \text{对称性} & W_N^{kn+\frac{N}{2}}=W_N^{kn}\cdot W_N^{\frac{N}{2}}=W_N^{kn}e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}}=W_N^{kn}\cdot e^{-j\pi}=-W_N^{kn} \end{cases}$

3. 基2FFT $N=2^M$

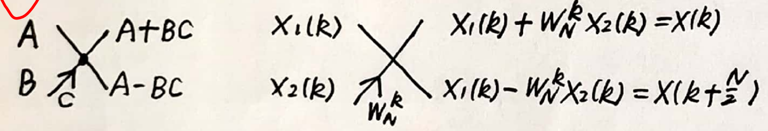
$\begin{cases} \text{DIT-FFT 时域抽取FFT: 对}x(n)\text{按奇偶性逐级分解,对应}X(k)\text{的前后两部分,即}X(k)\text{和}X(k+\frac{N}{2}) \\ \text{DIF-FFT 频域抽取FFT: 对}X(k)\text{按奇偶性逐级分解: 对应}x(n)\text{的前后两部分,即}x(n)\text{和}x(n+\frac{N}{2}) \end{cases}$

4. 蝶形运算.

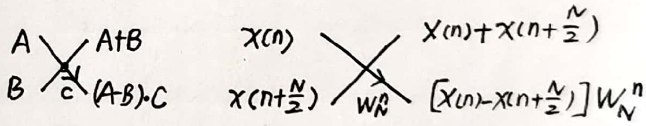
DIT $x(n)\rightarrow\begin{cases} \text{偶}\ x(2r) \xrightarrow{DFT} X_1(k) \\ \text{奇}\ x(2r+1) \xrightarrow{DFT} X_2(k)\ W_N^k \end{cases}$ → $X(k)$ 前$\frac{N}{2}$点；$X(k+\frac{N}{2})$ 后$\frac{N}{2}$点

DIF $x(n)\rightarrow\begin{cases} \text{前}\frac{N}{2}\text{点}\ x(n) \\ \text{后}\frac{N}{2}\text{点}\ x(n+\frac{N}{2})\ W_N^n \end{cases}$ → $x_1(n) \xrightarrow{DFT} X(k)$ 偶序列；$x_2(n) \xrightarrow{DFT} X(k)$ 奇序列

① DIT-FFT 蝶形运算



② DIF-FFT 蝶形运算



☆ ② 运算量

一次蝶形运算: 1次乘法. 2次加减法.

基2FFT: $N=2^M \Rightarrow$ 分解为M级蝶形运算,每一级有 $\frac{N}{2}$ 个蝶形

∴ 基2FFT的运算量: 乘法次数: $M\cdot\frac{N}{2}\cdot 1=\frac{MN}{2}=\frac{N}{2}\log_2 N$

加减法次数 $M\cdot\frac{N}{2}\cdot 2=MN=N\cdot\log_2 N$

5. DIT-FFT与DIF-FFT比较 $(N=2^M)$

(1) 相同点: $\begin{cases} \text{运算量相同},\ \frac{N}{2}\log_2 M\text{乘法},\ N\cdot\log_2 M\text{除法} \\ \text{原位运算}. \end{cases}$

(2) 不同点: ① 蝶形运算不同.

② $\begin{cases} \text{DIT: 乱序(奇偶)输入,顺序输出.} \\ \text{DIF: 顺序输入,乱序输出.} \end{cases}$

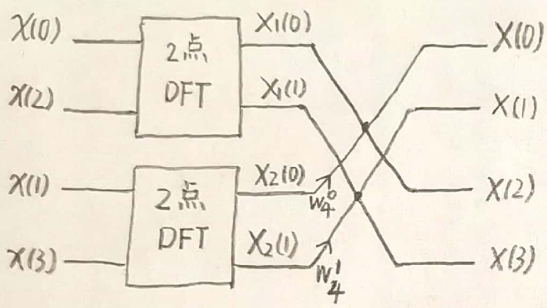
③ $\begin{cases} \text{DIT: 先DFT后蝶形} \\ \text{DIF: 先蝶形后DFT.} \end{cases}$

例：画出$N=4=2^2$点 DIT-FFT和DIF-FFT运算流图，并计算乘法和加减法运算量，和直接计算4点DFT的乘法和加法次数

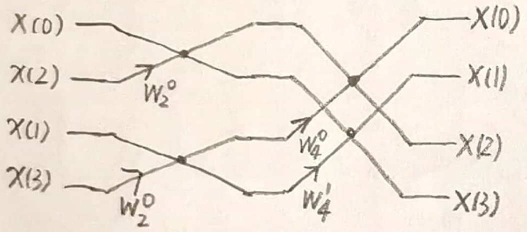
① 直接计算$N=4$点DFT，乘法次数 $N^2=16$，加法次数 $N(N-1)=4\times3=12$

② 基2 FFT 乘法次数 $\frac{N}{2}\log_2 N=\frac{4}{2}\log_2 4=2\times2=4$ 加法次数 $N\log_2 N=4\times\log_2 4=8$

③ DIT-FFT运算流图.

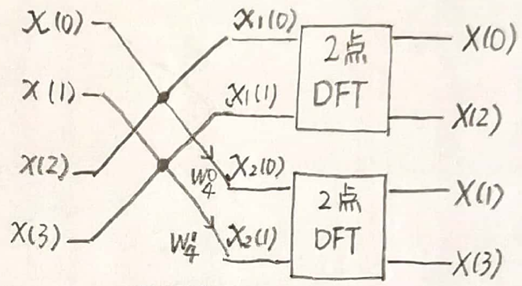


第一次时域抽取

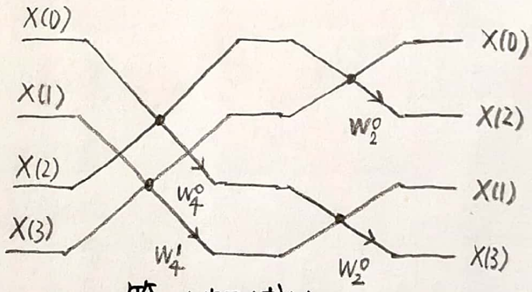


第二次时域抽取

④ DIF-FFT运算流图.



第一次频域抽取



第二次频域抽取

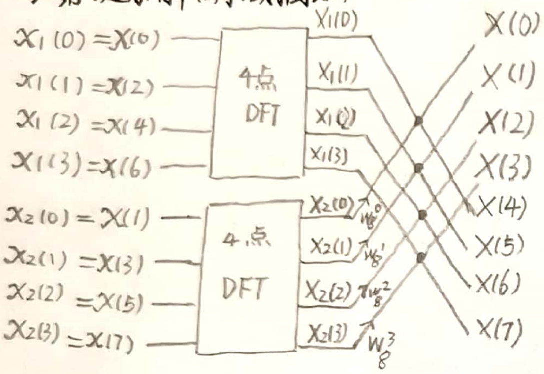
△例：画出$N=8=2^3$点 DIT-FFT和DIF-FFT运算流图，并计算复乘法和加减法运算量 和直接计算8点DFT的乘法和加法次数.

①直接计算N=8点DFT 乘法次数 $N^2=64$ 加法次数 $N(N-1)=56$

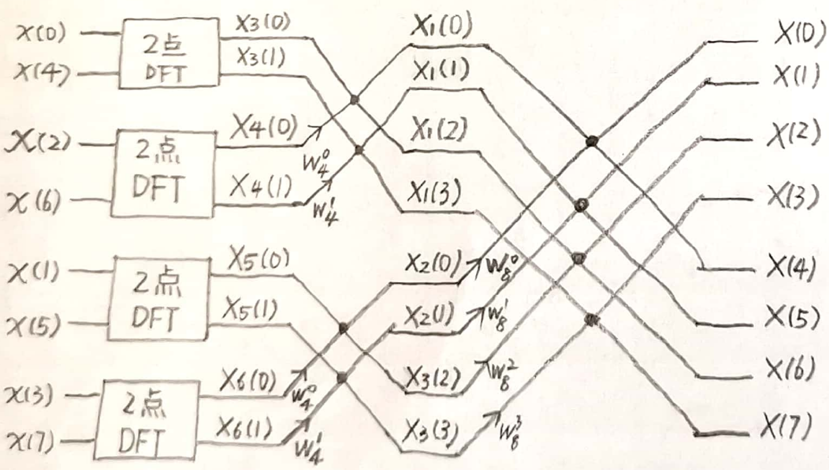
②基2 FFT 乘法次数 $\frac{N}{2}\cdot\log_2 N=12$ 加法次数 $N\log_2 N=24$

③ DIT-FFT运算流图.

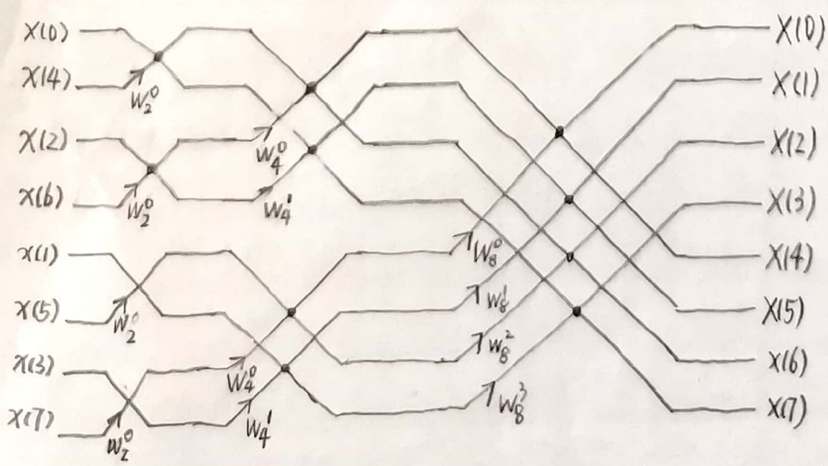
(a) 第一次分解(时域抽取)



(b) 第二次分解(时域抽取)

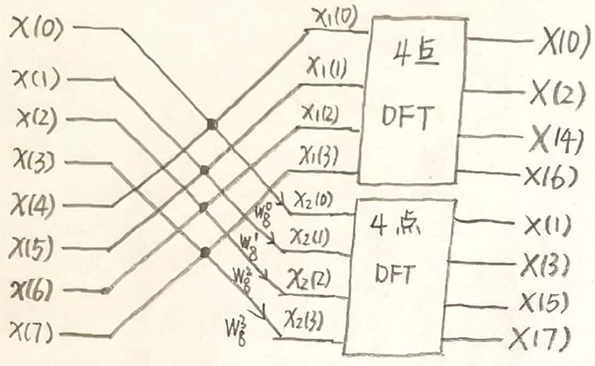


(c) 第三次分解(时域抽取)

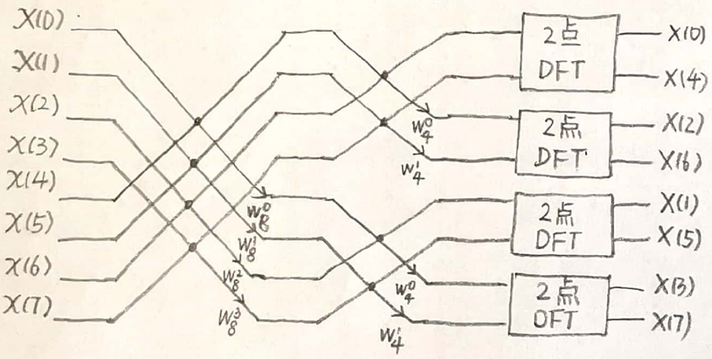


④ DIF-FFT运算流图

(a) 第一次频域抽取



(b) 第二次频域抽取



(c) 第三次频域抽取