2015～ 2016 学年第一学期高等数学[(1)材料]

A 卷参考答案及评分标准

一、单项选择题（共 20 分 ，每小题 2 分）

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
C	B	A	B	D	C	B	C	C	C

二、填空题（共 10 分，每小题 2 分,）

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$y=x+1$	$(2,\infty)$ 或 $[2,\infty)$	4	$y=2\sqrt{x}-2$	2

三、求解下列各题（共 50 分，每小题 5 分,）

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos x}{-\sin x}=-2$ （5 分）

2. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{x})^x\right]^{-2}=e^{-2}$ （5 分）

3. $y'=e^x+x^x(\ln x+1)$ （4 分）

$dy=\left(e^x+x^x(\ln x+1)\right)dx$ （5 分）

4. $y'=e^y+xe^y y'$ （4 分）

$y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$ （5 分）

5. $y'=\dfrac{-2\sin 2t}{\cos t}=-4\sin t$ （3 分）

$y''=\dfrac{-4\cos t}{\cos t}=-4$ （5 分）

6. 原式$=\int \frac{1}{\ln x}\cdot d\ln x=\ln\ln x+c$ （5 分）

7. 令$t=\sqrt[4]{x},dx=4t^3dt$ （2 分）

原式$=\int \frac{1}{t^2+t}\cdot 4t^3\,\mathrm{d}t=2t^2-4t+4\ln(1+\mathrm{t})+c$ （4 分）

$=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+c$ （5 分）

8. 原式$=\int_{-1}^{0}x^2dx+\int_0^1 xdx$ （3 分）

$=\frac{1}{3}x^3\,|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}x^2\,|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ （5 分）

9. 令$t=\sqrt{e^x-1},dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$，当$x=0,t=0;x=\ln 2,t=1$ （2 分）

原式$=\int_0^1 t\frac{2t}{1+t^2}dt$ （4 分）

$=2\left(t-\arctan t\right)|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$ （5 分）

10. 原式$=\int_0^{\infty}-xde^{-x}=-xe^{-x}\,|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-x}d(-x)$ （3 分）

$=\text{-}e^{-x}\,|_0^{\infty}=1$ （5 分）

四、应用题（共 12 分，每小题 6 分）

1. 设截面周长为s，矩形的底为s，于是$s=(1+\frac{\pi}{4})x+\frac{2A}{x}$ （**2** 分）

求导$s'=(1+\frac{\pi}{4})-\frac{2A}{x^2}=0$，驻点$x=2\sqrt{\frac{2A}{4+\pi}}$ （**4** 分）

再$s''=\frac{4A}{x^3}>0$，故当$x=2\sqrt{\frac{2A}{4+\pi}}$（惟一驻点）周长最小为$\sqrt{2A(4+\pi)}$ （**6** 分）

2. 所求体积

$\mathrm{V}=\int_0^1[\pi(e)^2-\pi(e^y)^2]dy$ （**4** 分）

$=\pi e^2-\pi\frac{1}{2}e^{2y}\,|_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2+1)$ （**6** 分）

五、证明题（共 8 分，每小题 4 分）

1. 设 $F(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}$

则 $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\frac{2(1+x^2)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{-1}{\frac{x^2-1}{1+x^2}}\frac{2(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)^2}=0$ （**2 分**）

于是 $F(x)=F(1)=\frac{\pi}{4}$ 故 $\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$ （**4 分**）

2. 证：设 $F(x)=(x-1)^2\int_0^x f(t)dt$ （**2 分**）

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $F(0)=F(1)=0$

于是由罗尔定理知，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $F'(\xi)=0$

即 $f(\xi)=\frac{2}{1-\xi}\int_0^{\xi}f(x)dx$ 。 **(4 分)**