一、选择题

1. 下列无穷限积分收敛的是（ B ）

A. $\int_0^{+\infty} \sin x dx$　B. $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$　C. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$　D. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

解 A. $\int_0^{+\infty} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{+\infty} = -(\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x - \cos 0)$ 不存在，故该无穷限积分发散；

B. $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}(\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} - e^{-2\times 0}) = \frac{1}{2}$，故该无穷限积分收敛；

C. 因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$，所以 $x = 0$ 是反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 的瑕点，$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_0^{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln|x| - \lim\limits_{x \to 0^+} \ln|x| = +\infty - (-\infty) = +\infty$，得到整个反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 发散。

D. 因为对任意实数 a，$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 当 $p > 1$ 时收敛，$p \le 1$ 时发散（书上例题结论），所以 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ 发散。

2、下列积分不属于反常积分的是（ B ）

A、$\int_0^1 \ln x dx$　B、$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$　C、$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$　D、$\int_1^3 \frac{dx}{x-2} dx$

解 A. 因为被积函数 $\ln x$ 在 $x = 0$ 无定义且 $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$，故 $\int_0^1 \ln x dx$ 是无界函数反常积分（瑕积分），且 $x = 0$ 是瑕点；

B. 因为被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 无定义且 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$，故由极限的局部有界性知，在 $(0, \delta)$ 内(δ 是某个较小的正数)，$\frac{\sin x}{x}$ 有界；又 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $[\delta, 1]$ 上是初等函数从而连续且有界，于是 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $[0,1]$ 上只有有限个间断点(这里只有一个间断点 $x = 0$)且为有界函数，由可积条件知，$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 是正常积分；

C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 是无穷限反常积分；

D. 因为被积函数 $\frac{1}{x-2}$ 在 $x = 2$ 无定义且 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$，故 $\int_1^3 \frac{dx}{x-2} dx$ 是无界函数反常积分（瑕积分），且 $x = 2$ 是瑕点；

3、$\int_0^1 \frac{1}{(3x-1)^2} dx =$（ D ）

A、-1　B、1　C、$-\frac{3}{2}$　D、发散

解 $\int_0^1 \frac{1}{(3x-1)^2}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{(3x-1)^2}d(3x-1) \overset{u=3x-1}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{3}\int_{-1}^2 \frac{1}{u^2}du$

因为被积函数$\frac{1}{u^2}$在$u=0$无定义且$\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u^2}=+\infty$，故$\int_{-1}^2 \frac{1}{u^2}du$是无界函数反常积分（瑕积分），且$u=0$是瑕点；因此将积分在瑕点分开，得$\frac{1}{3}\int_{-1}^2 \frac{1}{u^2}du = \frac{1}{3}\int_{-1}^0 \frac{1}{u^2}du + \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{1}{u^2}du$，

因为$\frac{1}{3}\int_{-1}^0 \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{3}\times\frac{1}{u}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{3}(\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{u}-\frac{1}{-1})=+\infty$，所以不必再讨论$\frac{1}{3}\int_0^2 \frac{1}{u^2}du$的收敛还是发散，可得$\int_0^1 \frac{1}{(3x-1)^2}dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^2 \frac{1}{u^2}du$发散.

二、计算（写出计算过程）

1. 设$f(x)=\int_0^{1-x} e^{t(2-t)}dt$，求$\int_0^1 f(x)dx$

解 $f'(x)=e^{(1-x)(2-(1-x))}(1-x)' = -e^{1-x^2}$（注意出现积分上限函数，一般都要考虑求导数），

注意到$f(1)=\int_0^{1-1} e^{t(2-t)}dt = 0$，对$\int_0^1 f(x)dx$，直接用分部积分公式得，

$$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = -\int_0^1 xf'(x)dx = \int_0^1 xe^{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{1-x^2}d(1-x^2)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{1-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(1-e) = \frac{1}{2}(e-1)。$$