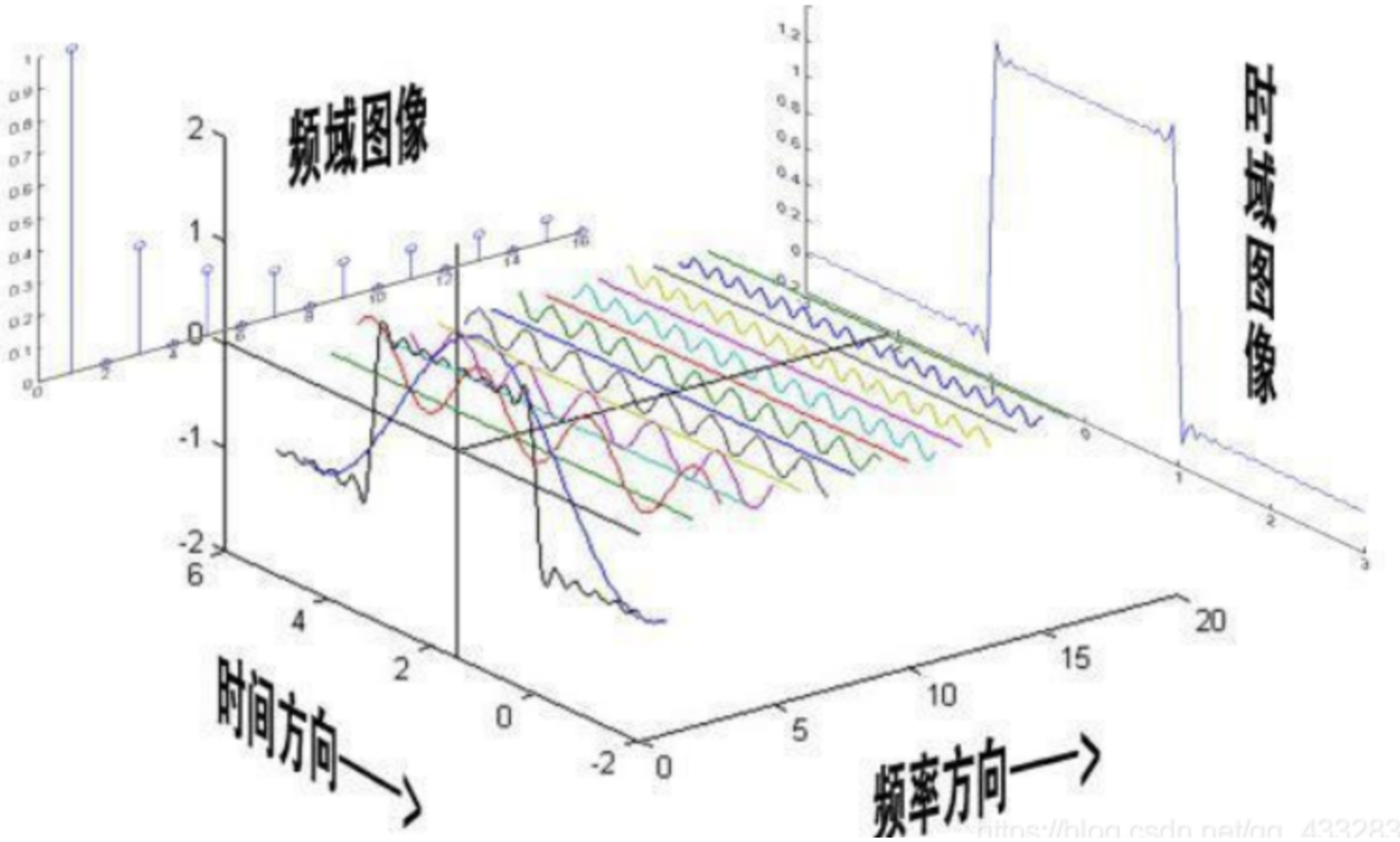
> ✍:Roy
> ❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️
> 💊⭐

前言

连续系统频域分析中的 信号的频谱与傅里叶变换



信号的频谱：信号的某种特征量与信号频率变化的关系。

频谱图：将幅度和相位分量用**一定高度的直线**表示。

一、周期信号的频谱

1、周期信号频谱的相关概念

周期信号频谱：周期信号中各次谐波幅值、相位随频率变化关系。

$A_u \sim \omega$：振幅频谱图

$\varphi_u \sim \omega$：相位频谱图

三角函数形式分解：$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$

虚指数函数形式分解：$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\Omega t}$
$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{jn\Omega t}$
频谱为：

$$F_n=\frac{\tau}{T}Sa(\frac{n\Omega\tau}{2}),n=0,\pm1,\cdots$$

其中谱线间隔：$\Omega=\frac{2\pi}{T}$为基波频率，在$\omega=n\Omega$有值，称为谱线；

$Sa(\frac{\omega\tau}{2})$为包络线，$\omega=\frac{2m\pi}{\tau}$时为零。
结论：

- τ由大变小，F_n的第一个过零点频率增大，即$\omega=\frac{2\pi}{\tau}$,τ确定了带宽。
- τ由大变小，频谱的幅度变小。
- 由于T不变，谱线间隔不变，即$\Omega=\frac{2\pi}{T}$不变。
- T由小变大，谐波频率丰富，且频率幅度变小。
- $T\to\infty$,谱线间隔$\to 0$，这时周期信号$\to$非周期信号；离散频谱$\to$连续频谱。

频谱分类	直流分量	幅度	相位	n
单边谱	$\frac{A_0}{2}$	A_n	φ_n	$n=0,1,2,...$
双边谱	F_0	$\lvert F_n\rvert$	φ_n	$n=0,\pm1,\pm2,...$

单边谱和双边谱的关系:

$$\cos(n\Omega t)=\frac{1}{2}(e^{jn\Omega t}+e^{-jn\Omega t})$$
$$F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}=\frac{1}{2}A_ne^{j\varphi_n}$$
$$|F_n|=\frac{1}{2}A_n,\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$$

例：周期信号$f(t)=1-\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{4}\sin(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6})$

求该周期信号的基波周期 T，基波角频率 Ω，平均功率 P，并画出它的频谱图。

解：

$$\text{改写}f(t)\text{表达式：}f(t)=1+\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{3}t-\frac{2\pi}{3})$$

$\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3})$周期$T_1=8$

$\frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{3}t-\frac{2\pi}{3})$周期$T_2=6$

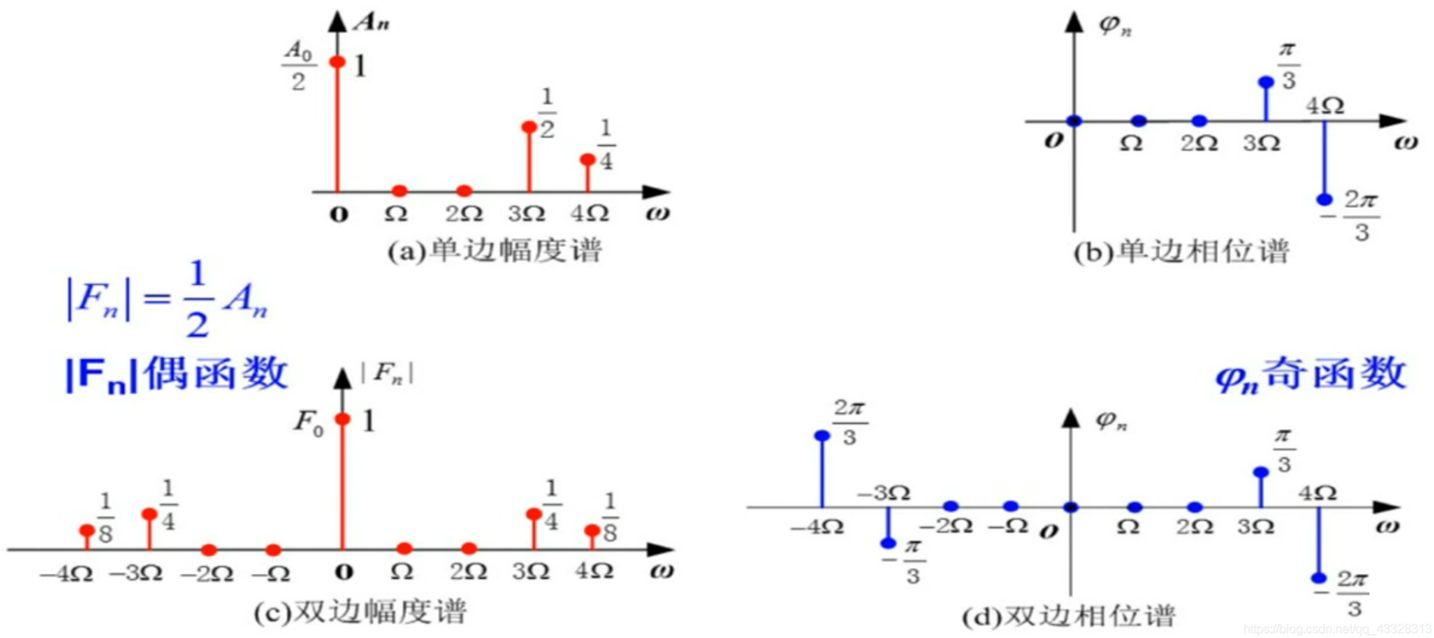
$\therefore f(t)$周期$T=24,$基波角频率$\Omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{12}$

由帕斯瓦尔等式，$P=1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{4})^2=\frac{37}{32}$

频谱图：

$\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3})$ 是 $f(t)$ 的 $[\pi/4]/[\pi/12]=3$ 次谐波分量；

$\frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{3}t-\frac{2\pi}{3})$ 是 $f(t)$ 的 $[\pi/3]/[\pi/12]=4$ 次谐波分量；



2、周期信号频谱的特点

1、离散型：以基频 Ω 为间隔的若干离散谱线组成

2、谐波性：谱线仅含有基频 Ω 的整数倍分量

3、收敛性：整体趋势减小

周期信号频谱的特点简要的概括了一下

3、谱线的结构与波形参数的关系

1、T一定，τ变小，此时 Ω（谱线间隔）不变。两零点之间的谱线数：

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{2\pi}{\tau}/\frac{2\pi}{T}, \text{增多}$$

2、τ 一定，T 增大，间隔 Ω 减小，频谱变密，幅度减小。

如果周期 T 无限增长（$T \to \infty$），周期信号就变成了非周期信号，那么，谱线间隔将趋于零，周期信号的离散频谱就过渡到非周期信号的连续频谱。各频率分量的幅度也趋近于无穷小。

二、非周期信号的频谱

1、周期信号 $\rightarrow$ 非周期信号

频谱函数：

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$T \to \infty$时：

$$f(t)\text{周期信号} \to \text{非周期信号}$$

$$F_n \to 0$$
$$\text{谱线间隔}\Omega \to 0$$
$$\text{离散频谱} \to \text{连续频谱，频谱幅度} \to 0$$

2、频谱密度函数

频谱函数：

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$T \to \infty$ 时：

$$\Omega \to d\omega(\text{无穷小量})$$
$$n\Omega \to \omega(\text{离散} \to \text{连续})$$

$$\begin{aligned} F(j\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{F_n}{1/T} &= \lim_{T\to\infty} F_n T \\ &= \lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \end{aligned}$$

3、傅里叶变换与反变换

3.1傅里叶变换

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$F(j\omega)$ 称为$f(t)$的傅里叶变换

$F(j\omega)$ 一般为复数，写成$F(j\omega)$ = $|F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

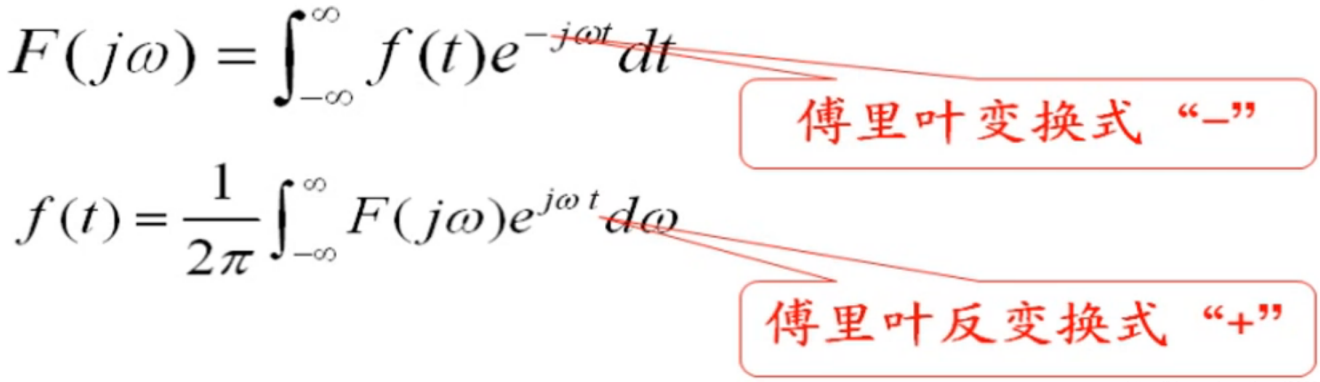
$F(j\omega) \sim \omega$：幅频度谱图，频率ω的偶函数

$\varphi_u \sim \omega$：相位频谱图，频率ω的奇函数

3.2傅里叶反变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

符号差别：



4、常用函数的傅里叶变换

$$单边指数函数：e^{-\alpha t}\epsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$门函数：g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$冲激函数：\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$冲激函数导数：\delta'(t) \longleftrightarrow j\omega$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$符号函数：sgn(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

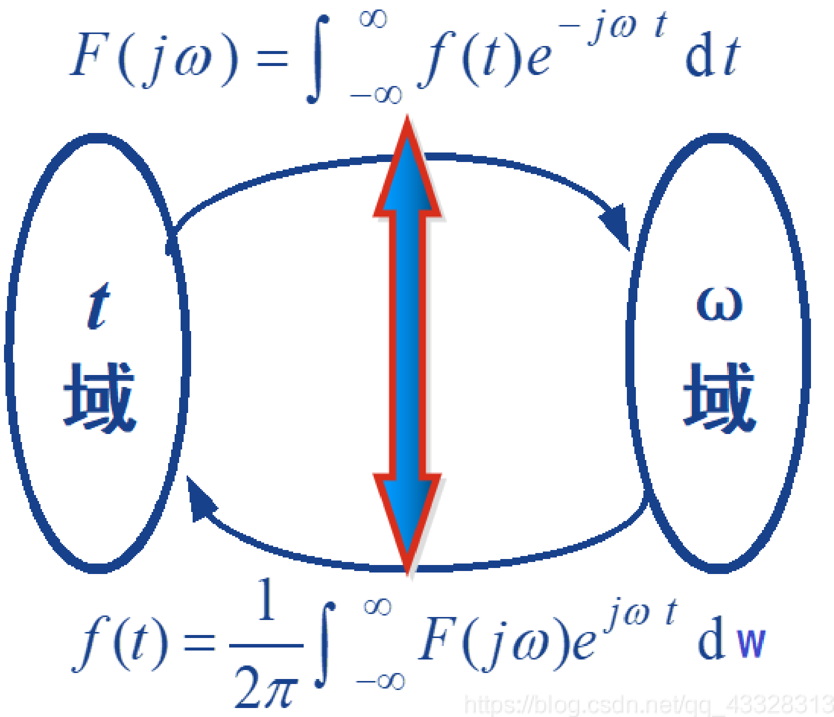
$$\epsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$三角波函数：Q_\tau(t) \longleftrightarrow \tau Sa^2(\frac{w\tau}{2})$$

$$cos(\omega_c t) \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]$$

$$sin(\omega_c t) \longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_c) - \delta(\omega - \omega_c)]$$

总结



时域里面原函数 $\longrightarrow$ 频域里面相函数
频域里面相函数 $\longrightarrow$ 时域里面原函数

周期信号 $\rightarrow$ 傅里叶级数 $\rightarrow$ 频谱

非周期信号 $\rightarrow$ 傅里叶变换 $\rightarrow$ 频谱