> ✍:Roy
> ❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤❤
> 💊⭐

前言

连续系统的S域分析

一、从傅里叶变换到拉普拉斯变换

傅里叶变换要满足Dirichlet（狄利克雷）条件中的绝对可积，对于某些增长信号，如 $e^{at}(a>0)$,它就不存在傅里叶变换。

引入一个衰减因子 $e^{-\sigma t}$（σ为任意实数），使它与 $f(t)$ 相乘，于是 $e^{-\sigma t}f(t)$ 得以收敛。

$$F_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

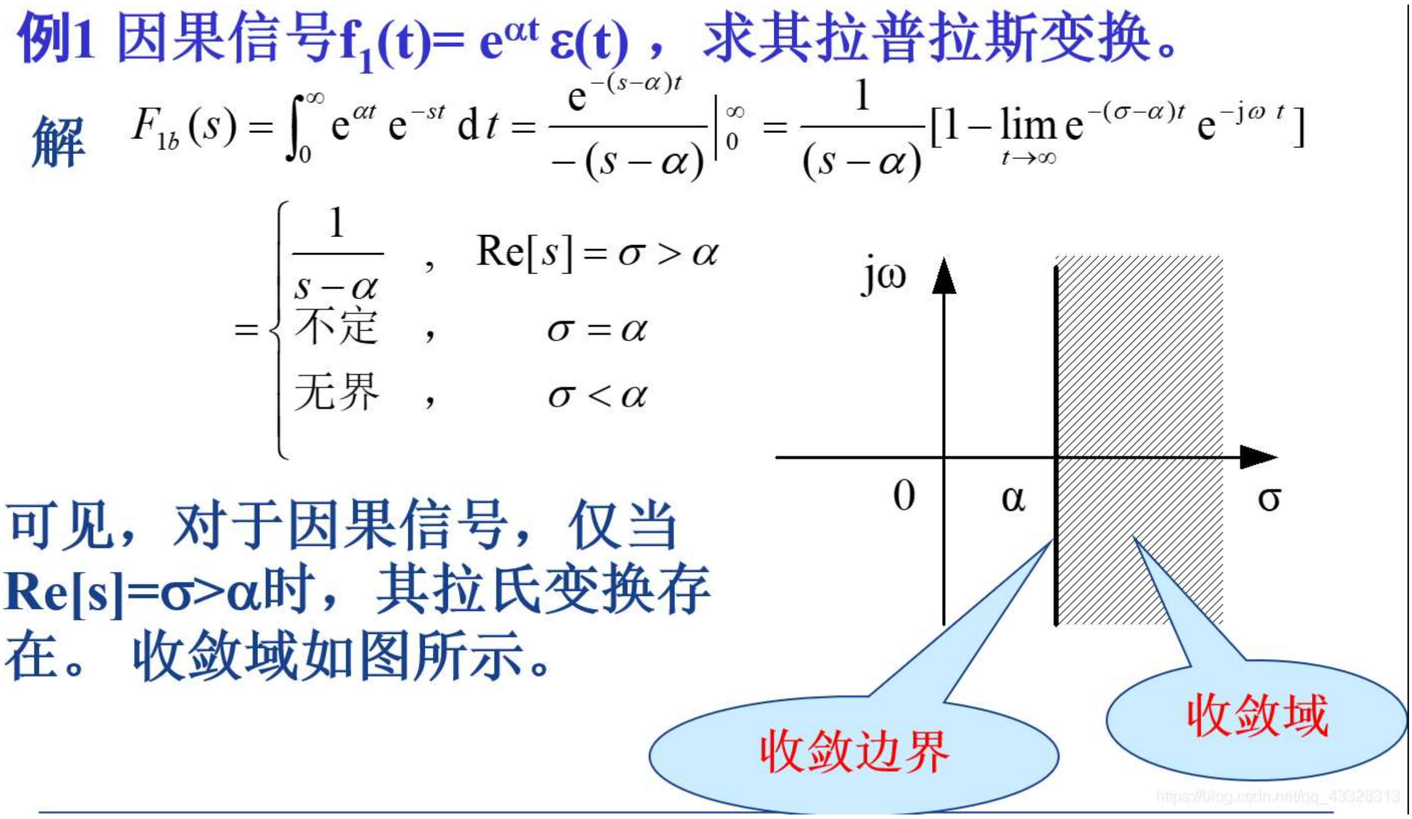
$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}F(s)e^{st}ds \tag{2}$$

(1) 双边拉氏变换，$F_b(s)$：象函数

(2) 双边拉氏逆变换，$f(t)$：原函数

二、拉氏变换收敛域

使 $f(t)$ 拉氏变换存在的 σ 取值范围称为 $F(s)$ 的收敛域

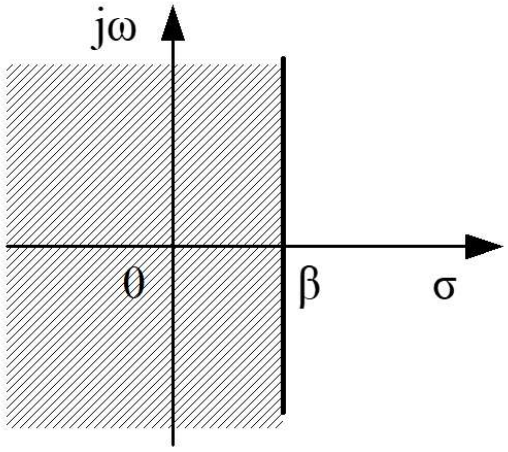


例2 反因果信号$f_2(t)= e^{\beta t}\varepsilon(-t)$，求其拉普拉斯变换。

解

$$F_{2b}(s)=\int_{-\infty}^{0} e^{\beta t}e^{-st}\,dt=\frac{e^{-(s-\beta)t}}{-(s-\beta)}\bigg|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{-(s-\beta)}[1-\lim_{t\to-\infty}e^{-(\sigma-\beta)t}e^{-j\omega t}]$$

$$=\begin{cases}\text{无界}, & \mathrm{Re}[s]=\sigma.>\beta\\ \text{不定}, & \sigma=\beta\\ \dfrac{1}{-(s-\beta)}, & \sigma<\beta\end{cases}$$



可见，对于反因果信号，仅当$\mathrm{Re}[s]=\sigma<\beta$时，其拉氏变换存在。收敛域如图所示。

三、单边拉氏变换

带有初始时刻的信号，双边拉氏变换就转化成单边拉氏变换。

$$F_b(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)=[\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} F(s)e^{st}ds]\cdot\epsilon(t)$$

四、常见函数的拉氏变换

1、

$$\delta(t)\longleftrightarrow 1,\sigma>-\infty$$

2、

$$\epsilon(t)\text{或}1\longleftrightarrow\frac{1}{s},\sigma>0$$

3、指数函数

$$e^{-s0t}\longleftrightarrow\frac{1}{s+s_0},\sigma>-Re[s_0]$$

4、三角函数

$$\cos\omega_0 t\longleftrightarrow\frac{s}{s^2+w_0^2}$$

$$\sin\omega_0 t\longleftrightarrow\frac{\omega_0}{s^2+w_0^2}$$

一些常用函数的拉氏变换

序号	$f(t)\quad(t>0)$	$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$
1	冲激 $\delta(t)$	1
2	阶跃 $u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4	t^n （n 是正整数）	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
7	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
8	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
9	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
10	$t^n e^{-at}$（n 是正整数）	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
11	$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
12	$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
13	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
14	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

总结

拉普拉斯变换与傅里叶变换的基本差别在于:

傅氏变换将时域函数 $f(t)$ 变换为频域函数$F(\omega)$，或作相反变换，时域中的变量 t 和频域中的变量 ω 都是实数；而拉氏变换是将时间函数 $f(t)$ 变换为复变函数 $F(s)$，或作相反变换，这时，时域变量 t 虽是实数, $F(s)$的变量 s 却是复数，与 ω 相比较，变量 s 可称为“复频率”。

傅里叶变换建立了时域和频域间的联系，而拉氏变换则建立了时域与复频域(s 域)间的联系。