习题三十二

一、判断题 (1) √；(2) ×

二、单项选择题　　C；　A

三、填空题

1 导数,常;　2 阶 ;　3 初始;　4、xy或$\ln(xy)$

四、计算题：

1、

$$\frac{2x}{1-x^2}dx=\frac{1}{y+y^2}dy$$

$$\int\frac{2x}{1-x^2}dx=\int\frac{1}{y+y^2}dy$$

$$-\ln\left|1-x^2\right|+c'=\ln\left|\frac{y}{1+y}\right|$$

$$\frac{y(1-x^2)}{1+y}=c$$

故通解为：$y(1-x^2)=c(1+y)$　（c为任意常数）

2、

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{y}dy;y\neq 0$$

$$\int-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{y}dy$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+c_1=\ln|y|,y=0$$

$$y=ce^{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$x=-1,y=2,c=2$$

故特解为：$y=2e^{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

3 、

$$\frac{1}{x}dx=\frac{1}{y\ln y}dy, y\neq 1$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{y\ln y}dy$$

$$\ln|x|+c_1=\ln|\ln y|, y=1$$

$$\ln y=cx,$$

故通解为：$y=e^{cx}$（c为任意常数）

习题三十三

一、判断题 (1) √；(2) √

二 、 C

三、

1、

$$u=\frac{y}{x}, y=ux, \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u$$

$$\cot u du=\frac{1}{x}dx, \int\cot u du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+c_1$$

$$\sin u=cx,$$

通解为：$\sin(\frac{y}{x})=cx$

2、

$$y=ux, \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln u$$

$$\frac{1}{u(\ln u-1)}du=\frac{1}{x}dx, \int\frac{1}{u(\ln u-1)}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+c_1$$

$$\ln u-1=cx,$$

通解为：$\ln\frac{y}{x}-1=cx$

3、

$$y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\frac{2}{u},udu=\frac{2}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}u^2=\ln x^2+c_1$$

$$y^2=2x^2\ln x^2+cx^2,x=1,y=6,c=36$$

特解为：$y^2=2x^2\ln x^2+36x^2$

4、

$$u=\frac{x}{y},x=uy,\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$$

$$u+y\frac{du}{dy}=u-\frac{1}{u},-udu=\frac{1}{y}dy$$

$\int -udu=\int\frac{1}{y}dy$，则 $-\frac{1}{2}u^2=\ln|y|+c_1$

于是通解为：$x^2+y^2\ln y^2+c=0$

习题三十四

一 C; C; B

二

1

$$P(x)=2x,Q(x)=e^{-x^2}$$

$$y=e^{-\int 2xdx}(\int e^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx+c)$$

$$=e^{-x^2}(x+c)$$

2

$$P(x)=\tan x, Q(x)=\sin 2x$$
$$y=e^{-\int \tan x dx}(\int \sin 2x e^{\int \tan x dx}dx+c)$$
$$=e^{\ln|\cos x|}(\int \frac{\sin 2x}{}|\cos x|dx+c)$$
$$=-2(\cos x)^2+c\cos x$$

3

$$y=e^{-\int 2x dx}(\int 8x e^{\int 2x dx}dx+c)$$
$$=e^{-x^2}(\int 8x e^{x^2}dx+c)$$
$$=e^{-x^2}(4e^{x^2}+c), x=0, y=2, c=-2$$

特解为：$y=e^{-x^2}(4e^{x^2}-2)$

4、

$$z=y^{-1}, \frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dx}=-y^2\frac{dz}{dx}$$
$$-y^2\frac{dz}{dx}+\frac{y}{x}=2y^2\ln x$$
$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-2\ln x$$
$$z=e^{\int \frac{1}{x}dx}(\int -2\ln x e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx+c)$$
$$=x[-(\ln x)^2+c]$$
$$=-x(\ln x)^2+cx$$

故通解为：（$-x(\ln x)^2+cx$）$y=1$

习题三十五

1、

$$y'=\int (x+\sin x)dx=\frac{1}{2}x^2-\cos x+c_1$$

通解为：$y=\int (\frac{1}{2}x^2-\cos x+c_1)dx=\frac{1}{6}x^3-\sin x+c_1 x+c_2$

2、

$$y' = p, y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x} p = -1$$

$$p = e^{-\int \frac{1}{x} dx} (\int -e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c_1)$$

$$= \frac{1}{x}(-\frac{1}{2} x^2 + c_1') = \frac{c_1}{x} - \frac{1}{2} x$$

通解为：$y = -\frac{1}{4} x^2 + c_1 \ln|x| + c_2$

3、

$$y' = p, y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x}{p}, pdp = xdx$$

$$p^2 = x^2 + c_1$$

$$y' = \pm\sqrt{x^2 + c_1}, y'(1) = 1, c_1 = 0$$

$$y' = x$$

$$y = \frac{1}{2} x^2 + c_2, y(1) = -1, c_2 = -\frac{3}{2}$$

特解为：$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2}$

4、

$$y' = p, y'' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0, p \neq 0 y \neq 0$$

$$\frac{1}{p} dp = \frac{1}{y} dy, \ln|p| = \ln|y| + \ln c_1', p = 0$$

$p = c_1 y$, 则 $y' = \frac{dy}{dx} = c_1 y$,

这样 $\ln|y| = c_1 x + c_2'$

故通解为：$y = c_2 e^{c_1 x}$

习题三十六

一

D; D;

二

1 $y = c_1 e^{x^2} + c_2 x e^{x^2}$;

2 $y = c_1 e^x + c_2 e^{x^2} + x + 2 + x e^x \ln|x|$

三

1

$$r^2 - r - 6 = 0, r_1 = -2, r_2 = 3$$
通解为：$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$

2

$$r^2 + 12r + 36 = 0$$
$$r_1 = r_2 = -6$$
通解为：$y = (c_1 + c_2 x) e^{-6x}$

3

$$r^2 + r + 5 = 0$$
$$r_1 = -2 - i, r_2 = -2 + i$$
通解为：$y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

四、

$$r^2 + 4r + 4 = 0, r_1 = -2, r_2 = -2$$
通解为：$y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$,
$x = 0$时, $y = -1, y' = 4$,
于是$c_1 = -1, c_2 = 2$
故特解为：$y = (2x - 1) e^{-2x}$

习题三十七

一、 1 $x(ax^3 + bx^2 + cx + d)$;

2 $e^{3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$;

3 $x(ax + b) + cxe^{-x}$

二

1

$$r^2-2r-3=0, r_1=-1, r_2=3$$

$$令 y^*=x(ax+b)e^{3x},$$

$$可解得 a=\frac{1}{8}, b=\frac{3}{16}$$

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}+(\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{16}x)e^{3x}$$

2

$$r^2-6r+9=0, r_1=3, r_2=3$$

$$令 y^*=ax^2e^{3x}, 得 a=3$$

$$y=(c_1+c_2x)e^{3x}+3x^2e^{3x}$$

3 、

$$r^2+4=0,$$

$$r_1=2i, r_2=-2i$$

$$令 y^*=x(a\cos 2x+b\sin 2x),$$

$$可解得 a=-\frac{1}{8}, b=0$$

$$y=(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)-\frac{1}{8}x\cos 2x$$

4

$$\varphi'(x)=e^x+x\varphi(x)-\int_0^x\varphi(t)dt-x\varphi(x)$$

$$\varphi''(x)=e^x-\varphi(x), \varphi(0)=1, \varphi'(0)=1$$

$$r^2+1=0, r_1=i, r_2=-i$$

$$令 y^*=c_1e^x, 可解得 c_1=\frac{1}{2}$$

$$故 \varphi(x)=c_2\cos x+c_3\sin x+\frac{1}{2}e^x$$

$$又由于 \varphi(0)=1，\varphi'(0)=1，可得$$

$$c_2=\frac{1}{2}，c_2=\frac{1}{2},$$

$$故 \varphi(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}e^x$$

第七章复习题

一、判断题 (1) ×；（2） √

二

C; A; C

三

1 $y=\frac{1}{2}c_1x^2+c_2x-e^{-x}+c_3$;

2 $y^*=x(ax+b)+cxe^{-4x}$

四

1

$$\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{2x}{1+x^2}dx,\arctan y=\ln(1+x^2)+c$$
$$y=0,x=1,c=-\ln 2$$
$$\text{特解:}\arctan y=\ln\frac{1+x^2}{2}$$

2

$$y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$
$$u+x\frac{du}{dx}=u+3\tan u,\cot u du=\frac{3}{x}dx$$
$$\ln\left|\sin u\right|=\ln\left|x^3\right|+\ln c$$
$$\sin u=cx^3,$$
$$\text{通解为:}\sin\frac{y}{x}=cx^3$$

3

$$z=y^{-1},\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=-y^2\frac{dz}{dx}$$
$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x$$
$$z=e^{\int 2xdx}(\int-2xe^{-\int 2xdx}dx+c)=e^{x^2}(\int-2xe^{-x^2}dx+c)=1+ce^{x^2}$$
$$\text{通解为：}\ y=\frac{1}{1+ce^{x^2}}$$

4

$$r^2-3r+2=0, r_1=1, r_2=2$$

$$y^*=e^x(a_1\sin x+a_2\cos x), a_1=-1, a_2=-1$$

通解为：$y=c_1e^x+c_2e^{2x}-e^x(\sin x+\cos x)$