知识点 6 （1）当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(b)-f(a)=f^{'}(\xi)(b-a)$，又若 $f(b)=f(a)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f^{'}(\xi)=0$。

（2）应用中值定理时，注意 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续；若 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，则 $f(x)$ 在 (a,b) 连续。

（3）拉格朗日中值定理常用来证明不等式，罗尔中值定理常用来证明带导数的等式或方程根的唯一性。注意“在 (a,b) 内至少存在一点 ξ”的表述和连续函数的零点定理一样，但零点定理常用来证代数方程在某区间有几个根或不带导数的等式。

由知识点 6 可知

P43 判断题的 1（√）2（√）3（√）

二单选题的 1 选（C），3 选（C），4 选（C），5 选（D）

其中，判断题的 2（√）是由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导则在 $f(x)$ 也在 $[a,b]$ 连续，从而 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a), \lim\limits_{x\to b-} f(x)=f(b),$ 由已知 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b-} f(x)$，从而 $f(a)=f(b)$，**于是罗尔中值定理成立。**

二单选题的 2 选（C）

因 $ab<0$ 时，对 $f(x)=\dfrac{1}{x},\ f(b)-f(a)=f^{'}(\xi)(b-a)$ 成立即 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{-\xi^2}(b-a)$，从而 $\xi^2=ab<0$ 矛盾。

P56 七 分析：注意到方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+...+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内至少有一个根，即至少存在一点 $\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得

$f'(\xi)=a_1\cos\xi+a_2\cos 3\xi+...+a_n\cos(2n-1)\xi=0$，由

$f'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+...+a_n\cos(2n-1)x=0$ 得

$f(x)=a_1\sin x+\dfrac{a_2}{3}\sin 3x+...+\dfrac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x=0$，联想到在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上对 $f(x)$ 应用罗尔中值定理。

证 因为 $f(x)=a_1\sin x+\dfrac{a_2}{3}\sin 3x+...+\dfrac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x=0$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 连续，在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内可导，$f(0)=0, f(\dfrac{\pi}{2})=a_1-\dfrac{a_2}{3}+...+(-1)^{n-1}\dfrac{a_n}{2n-1}=0$，由罗尔定理即得结论。

知识点 7 应用洛必达法则要注意和乘除运算时的等价无穷小替换、分子有理化、无理数 e 的重要极限等手段结合运用，才效果最好。求极限时一般先代数变形，再使用上述手段。

P45 三计算题 2

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{型，洛必达法则}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+e^x}\cdot e^x}{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}\cdot e^x}{(1+e^x)x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}{\dfrac{1}{e^x}+1}=1$。

P46 三计算题 6

解：$\lim\limits_{x\to0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{-\frac{1}{2}}$，这里

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cos x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}\text{型,洛必达法则}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}\overset{\text{等价无穷小替换}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}\text{。}$$

P46 三计算题 8

解析：法一 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}\overset{\text{重要极限}}{=}e^1=e$

法二 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}=e$，这里

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}\overset{x\to0,\ln(1+\sin x)\sim\sin x}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\text{或}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{(1+\sin x)}\cos x}{1}=1\text{。}$$

P46 三计算题 9

主要用到 $\varphi(x)\to0,e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$，运用乘除时等价无穷小替换求极限，得

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}\overset{\substack{\text{等价无穷小替换}\\ x\to0,e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}e^{\sin x}=1,$$

该题若只用洛必达法则需要连续使用三次才能得到结果，中间求导有点繁琐。运用上述方法可得 **P56 三计算题 3**

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^2\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x^2\cdot\ln(1+x)}\overset{\substack{\text{等价无穷小替换}\\ x\to0,e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x\\ \ln(1+x)\sim x}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x^2\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to0}e^{\sin x}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\text{等价无穷小替换}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}\text{。}$$

该题若只用洛必达法则需要连续使用几次才能得到结果，中间求导有点繁琐。

P55 二单选题 1 选(C)

解：由 $f(x)$ 有连续的二阶导数，故 $f(x)$ $f'(x), f''(x)$ 均在 $x=0$ 连续，从而

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0), \lim\limits_{x\to 0} f''(x)=f''(0)$，又 $f(0)=0, f'(0)=1$，于是

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}$ 均为 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限。连续应用洛必达法则两次可得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}=-1$。

P55 三计算题 2 解：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}}=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$$，这里

（$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}\overset{\frac{0}{0}\text{型，洛必达法则}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{a^x+b^x}\cdot(a^x\ln a+b^x\ln b)}{1}=\ln\sqrt{ab}$$

知识点 8 泰勒公式一节主要掌握特殊的泰勒公式——**n 阶麦克劳林公式**，即

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{'}(0)}{1!}x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)\begin{cases}=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\\ =o(x^n)\end{cases}$$

其中 $0<\theta<1$。

注 因拉格朗日余项只适宜放大放小，故带拉格朗日余项的麦克劳林公式一般用来证明不等式（有一定难度，期末考试一般不会涉及）；因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^n)}{x^n}=0$，故带皮亚诺余项的麦克劳林公式一般用来求极限（期末考试一般不会涉及）。

熟记：$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)\begin{cases}=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} & \text{（拉格朗日余项）}\\ =o(x^n) & \text{（皮亚诺余项）}\end{cases}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}+R_{2m}(x)\begin{cases}=\dfrac{(-1)^m\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}\\ =o(x^{2m})\end{cases}\text{(这里}n\text{取的是}2m)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+R_{2m+1}(x)\begin{cases}=\dfrac{(-1)^{m+1}\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}\\ =o(x^{2m+1})\end{cases}\text{(这里}n\text{取的是}2m+1)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_n(x)\begin{cases}=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1} & \text{（拉格朗日余项）}\\ =o(x^n) & \text{（皮亚诺余项）}\end{cases}$$

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$，这里 $R_n(x)=o(x^n)$ 或 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\alpha$ 为实常数。

主要记住上述 $e^x,\sin x,\cos x$ 的带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式。

根据带皮亚诺余项的 $e^x,\sin x$ 的麦克劳林公式立刻可得

P47 一的 2 只能选（C）；**3** 只能选（C）（将 x^2 看成 $\sin x$ 公式中的 x）。

二 解析：令 $t=x-2$，则 $f(x)=\ln x=\ln(t+2)=\ln(1+\frac{t}{2})+\ln 2$，根据带皮亚诺余项的 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林公式立刻可得

$$\ln(1+\frac{t}{2})=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^n+o(\left(\frac{t}{2}\right)^n)$$

$$=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{t^n}{2^n}+o(t^n)$$

$$=\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-2)^3}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(x-2)^n}{2^n}+o((x-2)^n)\quad\text{（变量还原）}$$

于是 $f(x)=\ln x$ 按 $x-2$ 的幂展开的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式为

$$f(x)=\ln x=\ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-2)^3}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(x-2)^n}{2^n}+o((x-2)^n)$$

这种将所求函数代数处理，然后借助知识点 8 已知函数的麦克劳林公式得所求函数的泰勒公式力争掌握。

从期末考试的角度，泰勒公式部分大题不要求掌握。

P48 三 解析：注意到 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{2}{1+x}-1$，又 $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 可求出 n 阶导数表达式，即可求出其 n 阶麦克劳林公式，从而可得到 $f(x)$ 的 n 阶麦克劳林公式。

因 $g^{(n)}(x)=(\dfrac{1}{x+1})^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$，从而 $g^{(n)}(0)=(-1)^n n!,\ g^{(n)}(\theta x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$，于是 $g(x)$ 的带拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式

$$g(x)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{g^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$=1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}(1+\theta x)^{-(n+2)}x^{n+1}$$

最后得到 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式

$$f(x)=\frac{2}{1+x}-1=2g(x)-1=1-2x+2x^2+\ldots+(-1)^n 2x^n+(-1)^{n+1}2(1+\theta x)^{-(n+2)}x^{n+1},0<\theta<1。$$

P49 一判断题的 5（√）解析：这个说法有些教材上直接作为曲线凹的定义。

P49 二的 3 选（B）解析：设 $f(x)=e^x-x-1$，则由 $f'(x)=e^x-1$ 知

$f'(x)=e^x-1<0, x\in(-\infty,0), f'(x)=e^x-1>0, x\in(0,+\infty)$，另外 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，从而

$f(x)=e^x-x-1$ 在$x\in(-\infty,0]$单减,故当$x<0$时，$f(x)>f(0)=0$，

在$x\in[0,+\infty)$单增,故当$x>0$时，$f(x)>f(0)=0$

又注意到 $f(0)=0$，故曲线 $f(x)=e^x-x-1$ 与 x 轴只有一个交点，即函数 $f(x)=e^x-x-1$ 只有一个零点，也即方程 $e^x-x-1=0$ 只有一个根。

P49 二的 4 选（D）解析：对特殊函数 $f(x)=x-2$，在 $[0,+\infty)$ 内可导，且 $f'(x)=1>0, f(0)=-2<0$，即满足题目条件，但 $f(x)=x-2$ 在 $[0,+\infty)$ 内有唯一零点 x=2, 对特殊函数 $f(x)=\dfrac{-1}{1+x}$，在 $[0,+\infty)$ 内可导，且 $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0, f(0)=-1<0$，即满足题目条件，但 $f(x)=\dfrac{-1}{1+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 内无零点, 故对一般函数 $f(x)$ 而言，只能选 D.

三 2 即证 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\tan x_2}{x_2}>\dfrac{\tan x_1}{x_1}$，只需证明函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 单增，利用函数单调性即证。

设 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则

$f'(x)=\dfrac{\sec^2 x\cdot x-\tan x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}=\dfrac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x}>0,\ \ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$，（考试时这种题的这步导数一定要求正确！）（这里用到 $0<x<\pi, \sin x<x$，事实上，对 $y=x-\sin x,\ y'=1-\cos x>0, x\in(0,\pi)$，又 $y=x-\sin x$ 在点 $x=0,\pi$ 均连续，从而 $y=x-\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 单增，于是 $0<x<\pi$时，$y=x-\sin x>y(0)=0$, 即 $0<x<\pi, \sin x<x$）。

于是 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ 在$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时单增，结论即证。

注：用单调性证明不等式需要掌握，期末考试易考！

知识点 9：用 $f'(x)=0$(驻点)和$f'(x)$不存在 的点将 $f(x)$ 定义域分成几个开区间，且 $f'(x)$ 在这些开区间内连续，则 $f'(x)$ 在每个开区间内定号，考察 $f'(x)$ 在每个开区间内的正负即得 $f(x)$ 的单调区间及极值；用 $f''(x)=0$和$f''(x)$不存在 的点将 $f(x)$ 定义域分成几个开区间，且 $f''(x)$ 在这些开区间内连续，则 $f''(x)$ 在每个开区间内定号，考察 $f''(x)$ 在每个开区间内的正负即得 $f(x)$ 的凹凸区间，凹凸区间公共端点 x_0 对应的点（$x_0, f(x_0)$）即拐点。

注：(1)当 $f(x)$ 在上述开区间的端点处连续时,开区间并上这些端点才是单调区间和凹凸区间。（2）由该知识点知，单调区间的端点处，$f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在；凹凸区间的端点处，

$f''(x)=0$ 或 $f''(x)$ 不存在，从而拐点（$x_0, f(x_0)$）横坐标 x_0 处，$f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在

P50 四 2 解析： $y'=\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}})]$，$y'=0$(驻点)和$f'(x)$不存在的点分别为 x=2,x=1,
在$x\in(-\infty,1)$时，$y'>0$,故y在$(-\infty,1]$单增；在$x\in(1,2)$时，$y'<0$,故y在$[1,2]$单减；
在$x\in(2,+\infty)$时，$y'>0$,故y在$[2,+\infty]$单增；

P50 六 解析：对方程$x^3-ax^2y^2+by^3=0$两边同时对 x 求导，y 视为 x 的函数，利用复合函数求导得$3x^2-2axy^2-2ax^2yy'+3by^2y'=0$,解得$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{2axy^2-3x^2}{3by^2-2ax^2y}$，

因 y=y(x)是方程$x^3-ax^2y^2+by^3=0$确定的隐函数，故 y(1)=1 满足此方程，即$x=1,y=1$，

又 x=1 是驻点即$y'(1)=0$；于是得到$\begin{cases}\frac{2a-3}{3b-2a}=0\\ 1-a+b=0\end{cases}$，解得 a=3/2,b=1/2.

P51 二 1 选 A 解析：举特殊例子排除法。对特殊函数$f(x)=|x|,x\in[-1,1]$，显然满足题目条件，但在$(-1,1)$内的极小值和最小值都是 0，无极大值和最大值，也无平行切线（即无点$\xi\in(-1,1),f'(\xi)=0$，也即无平行切线）。故选 A.

2 选 B，解析：题目条件即教材上的极值第一充分条件，注意到 f(x)在 x_0 取得极值时 $f'(x_0)$可能不存在，故只能选 B.

3 选 B。解析：由已知$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0$，根据函数极限的局部保号性质，存在$a$的某个空心邻域$U^0(a)$，在$U^0(a)$内，有$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$，故在$U^0(a)$内，有$f(x)<f(a)$，由极值定义知选 B.

4 选 B。解析：由已知$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{\cos x}=-1<0$，根据函数极限的局部保号性质，存在$a$的某个空心邻域$U^0(\frac{\pi}{2},\delta)=(\frac{\pi}{2}-\delta,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\delta),\delta$为充分小正值，在该邻域内，有$\frac{f'(x)}{\cos x}<0$，故在$(\frac{\pi}{2}-\delta,\frac{\pi}{2})$内，有$f'(x)<0$，在$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\delta)$内，有$f'(x)>0$，由极值第一充分条件知选 B.

P56 四 1 分析：即证$b\ln a>a\ln b$，也即证$\frac{\ln b}{b}<\frac{\ln a}{a}$，故只需证函数$\frac{\ln x}{x},x>e$单减，由单调性证明。

证　设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, x>e$，由 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ 知，$x>e, f(x)$ 单减，从而 $b>a>e$ 时，$\dfrac{\ln b}{b}<\dfrac{\ln a}{a}$，证毕。

P56 五解析：要求用泰勒公式求 $y^{(6)}(0)$，注意到 $y=x^3\sin x$，故只需用到 $\sin x$ 的 **3** 阶带拉格朗日余项的麦克劳林公式（即在 sinx 的麦克劳林公式中取 m=2）。因

$$y=x^3\sin x=x^3(x-\frac{x^3}{3!}+R_4(x))=x^4-\frac{x^6}{6}+\frac{\cos\theta x}{5!}x^8, 0<\theta<1, \text{这里} R_4(x)=\frac{\cos\theta x}{5!}x^5,$$

注意到 $(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n)^{(m)}=\begin{cases} a_0 n!, & m=n \\ 0, & m>n \end{cases}$，从而 $y^{(6)}(0)=-\dfrac{6!}{6}=-120$。

用泰勒公式求极限方法从考试角度不要求掌握。

P56 六解析：由已知得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^3)+x^3}{ax^n}=1$（※）。因该极限左端是 0/0 极限，运用洛必达法则得 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-3x^2}{1-x^3}+3x^2}{anx^{n-1}}=\dfrac{3}{an}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{6-n}}{x^3-1}$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{6-n}}{x^3-1}=\dfrac{an}{3}$，（※※）

若 $6-n>0$，即 $1\le n<6$ 时，由（※※）式知 $an=0\Rightarrow a=0$，而已知（※）式中 a 是做了分母的，矛盾！若 $6-n<0$，即 $n>6$ 时，由（※※）式知 $an=\infty\Rightarrow a$ 不是常数，与已知矛盾。故 $n=6$，于是由（※※）式知 $a=-\dfrac{1}{2}$。