> ✍️:Roy
> ❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️
> 💊⭐️

一、傅里叶变换的性质

1、线性性质

若$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega), f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$

则：$af_1(t)+bf_2(t) \longleftrightarrow aF_1(j\omega)+bF_2(j\omega)$

2、奇偶性

若$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$，则：$f(-t) \longleftrightarrow F(-j\omega)$

若：为 $f(t)$ 实偶函数，则 $F(j\omega)=R(\omega)$ 为实偶函数

若：为 $f(t)$ 实奇函数，则 $F(j\omega)=jX(\omega)$ 为虚奇函数

3、对称性

若$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$，则：$F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

例：

$$f(t)=\frac{1}{1+t^2} \longleftrightarrow F(j\omega)=?$$

解：$\because e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

当$\alpha=1$时，$e^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$

$\frac{2}{1+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|}$

$\frac{1}{1+t^2} \longleftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$

4、尺度变换特性

若$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$，则：$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{j\omega}{a}), a$为非零实数

$f(at-t_0) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{j\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$

$f(t_0-at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F(-\frac{j\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$

当$0<a<1$时，时域扩展，频带压缩

当$a>1$时，时域压缩，频带扩展

5、时移特性

若$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$，则：$f(t \pm t_0) \longleftrightarrow e^{\pm j\omega t_0}F(j\omega), t_0$为实常数，信号延时了$t_0$秒并不会改变频谱，而是使相谱改变。

若 $F(j\omega)=|F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$，则$f(t \pm t_0) \longleftrightarrow |F(j\omega)|e^{j[\varphi(\omega) \pm \omega t_0]}$

例 $f(t)=\dfrac{t^2-2t+3}{t^2-2t+2}$， $F(j\omega)=?$

解： $e^{-\alpha|t|}\longleftrightarrow\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$ $\xrightarrow{\alpha=1}$ $e^{-|t|}\longleftrightarrow\dfrac{2}{1+\omega^2}$

根据对称性，

$$\frac{2}{1+t^2}\longleftrightarrow 2\pi e^{-|-\omega|} \xrightarrow{\text{整理}} \frac{1}{1+t^2}\longleftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$$

所以，

$$f(t)=\frac{t^2-2t+3}{t^2-2t+2}=1+\frac{1}{(t-1)^2+1}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)+\pi e^{-|\omega|}e^{-j\omega}$$

6、频移特性

若 $f(t)\longleftrightarrow F(j\omega)$， 则：$e^{-j\omega t0}f(t)\longleftrightarrow F[j(\omega+\omega_0)]$

若 $f(t)\longleftrightarrow F(j\omega)$， 则：$e^{+j\omega t0}f(t)\longleftrightarrow F[j(\omega-\omega_0)]$

注意变换对两边的正负号

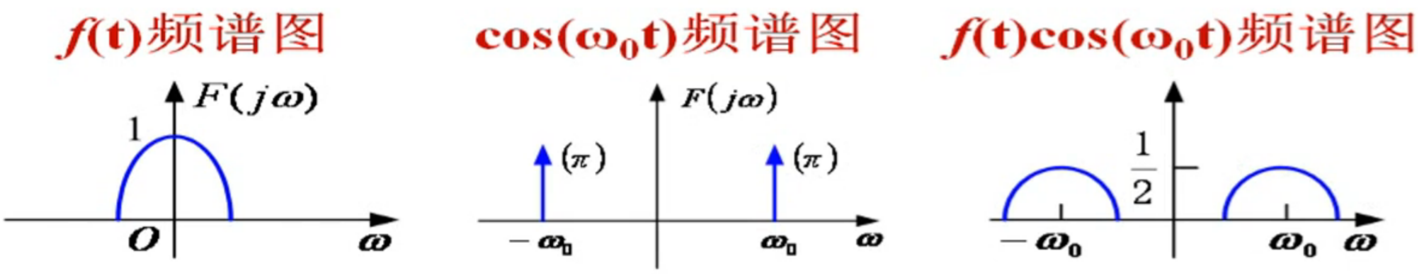
$$cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})$$

$$sin(\omega_0 t)=\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 n}-e^{-j\omega_0 n})$$

例 $f(t)\cos\omega_0 t\longleftrightarrow ?$

解： $f(t)\cos(\omega_0 t)=f(t)\left[\dfrac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\dfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right]$

$$\leftrightarrow\frac{1}{2}F[j(\omega-\omega_0)]+\frac{1}{2}F[j(\omega+\omega_0)]$$



调制： $\cos(\omega_0 t)$——载波 ω_0——载频

7、卷积定理

若 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega), f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$，则

时域：$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$

频域：$f_1(t) \cdot f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$

8、时域微积分特性

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

微分：$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^{(n)} F(j\omega)$

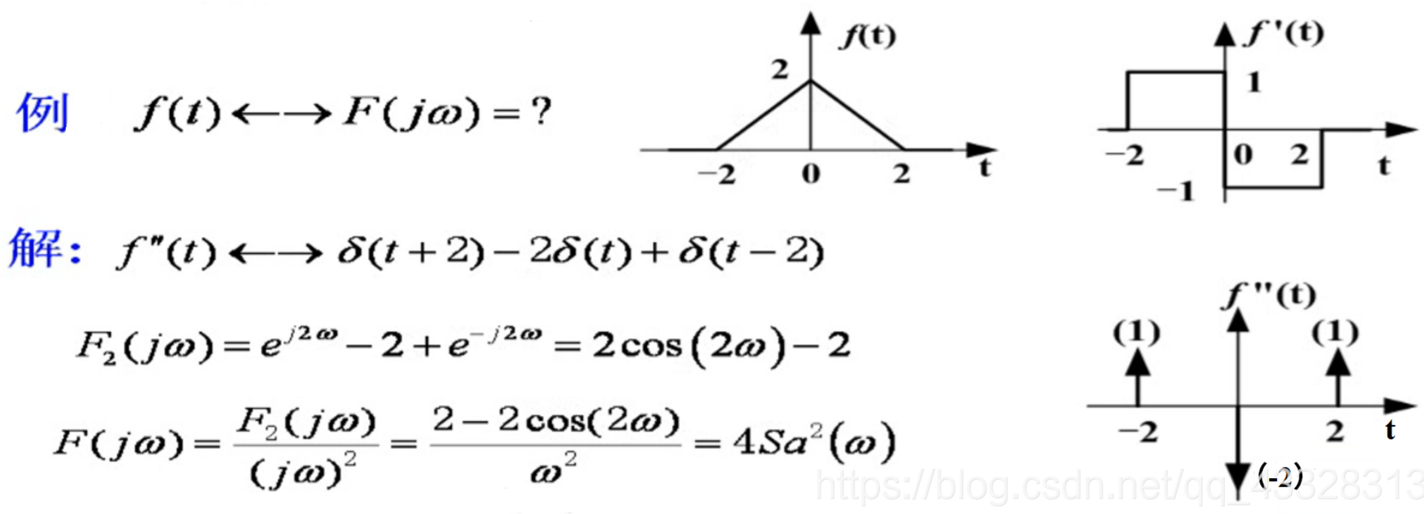
积分：$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx \longleftrightarrow \pi F(0) \cdot \delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}, 其中F(0) = F(j\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$

9、频域微积分特性

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

微分：$(-jt)^n f(t) \longleftrightarrow F^{(n)}(j\omega)$

积分：$\pi f(0) \cdot \delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(jx)dx, 其中f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)d\omega$



二、能量谱/功率谱

帕斯瓦尔方程：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

能量谱为连续谱。

例 ：计算信号 $f(t)=2\cos(997t)\dfrac{\sin 5t}{\pi t}$ 的能量。

解： $\dfrac{\sin 5t}{\pi t} \leftrightarrow g_{10}(\omega)$

$$2\cos(997t)\frac{\sin 5t}{\pi t} \leftrightarrow g_{10}(\omega-997)+g_{10}(\omega+997)$$

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}(10+10)$$

$$=\frac{10}{\pi}$$

$$P=P_0+\sum_{n=1}^{\infty}P_n=(\frac{A_0}{2})^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2$$

功率谱为离散谱。

三、周期信号的傅立叶变换

1、正余弦信号的傅里叶变换

$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

利用频移特性

$\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}) \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

$\sin(\omega_0 t)=\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}) \longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

2、一般周期信号的傅里叶变换

将一般周期信号表示为 三角形式 或者 指数形式， 当然 指数形式 比较方便，下边的变换对就是先将 一般周期信号 分解成 指数形式， 再利用频移特性

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t} \longleftrightarrow F(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

频谱函数：$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$

周期函数的傅里叶变换的一般公式：

$$F(j\omega) = F_1(j\omega)\Omega\delta_\Omega(\omega)$$

总结

傅里叶变换的性质比较多，通过这些性质可以简便的求出某个信号的傅里叶变换，降低了用定义来求的复杂程度。