

# 前言

离散系统 z 域分析相关内容

## 一、线性性质

若

$$f_1(k) \longleftrightarrow F_1(z), \alpha_1 < |z| < \beta_1$$

$$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(z), \alpha_2 < |z| < \beta_2$$

对于任意常数  $a_1, a_2$  , 则:

$$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) \longleftrightarrow a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) , \text{ 收敛域至少是 } F_1(z) \text{ 和 } F_2(z) \text{ 收敛域的相交部分。}$$

例:

$$2\delta(k) + 3\epsilon(k) \longleftrightarrow 2 + \frac{3z}{z-1}, |z| > 1$$

## 二、移位特性

移位特性分单边和双边

**双边:**

若

$$f(k) \longleftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta , \text{ 且对整数 } m > 0 , \text{ 则:}$$

$$f(k \pm m) \longleftrightarrow z^{\pm m} F(z),, \alpha < |z| < \beta$$

**单边:**

若

$$f(k) \longleftrightarrow F(z), |z| < \alpha , \text{ 且对整数 } m > 0 , \text{ 则:}$$

$$f(k-m) \longleftrightarrow z^{-m} F(z) + \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m) z^{-k}$$

$$f(k-1) \longleftrightarrow z^{-1} F(z) + f(-1)$$

$$f(k-2) \longleftrightarrow z^{-2} F(z) + f(-2) + z^{-1} f(-1)$$

$$f(k+1) \longleftrightarrow z F(z) - z f(0)$$

$$f(k+2) \longleftrightarrow z^2 F(z) - z^2 f(0) - z f(1)$$

# 三、尺度变换

若  $f(k) \longleftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$  ,且有常数  $a \neq 0$  ,则:

$$a^k F(k) \longleftrightarrow F(\frac{z}{a}), \alpha|a| < |z| < \beta|a|$$

例:  $\cos(\beta k)\epsilon(k)$

$$\cos(\beta k) = \frac{1}{2}(e^{j\beta k} + e^{-j\beta k})$$
$$\cos(\beta k)\epsilon(k) \longleftrightarrow \frac{0.5}{z - e^{j\beta}} + \frac{0.5}{z - e^{-j\beta}}$$

# 四、卷积定理

若  $f_1(k) \longleftrightarrow F_1(z), \alpha_1 < |z| < \beta_1$

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(z), \alpha_2 < |z| < \beta_2$

则:  $f_1(k) * f_2(k) \longleftrightarrow F_1(z)F_2(z)$

# 五、z 域微分

若  $f(k) \longleftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$

则:  $kf(k) \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} F(z), \alpha < |z| < \beta$

例:  $k\epsilon(k) \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} (\frac{z}{z-1}) = \frac{z}{(z-1)^2}$

# 六、z 域积分

若  $f(k) \longleftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$  ,且对整数  $m, k+m > 0$  ,则:

$$\frac{f(k)}{k+m} \longleftrightarrow z^m \int_z^{+\infty} \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta, \alpha < |z| < \beta$$

例：求序列  $\frac{1}{k+1}\epsilon(k)$  的  $z$  变换

$$\frac{1}{k+1}\epsilon(k) \longleftrightarrow z \int_z^{+\infty} \frac{\eta/\eta-1}{\eta^2} d\eta = z \int_z^{+\infty} \frac{1}{\eta(\eta-1)} d\eta = z \ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

## 七、z 域反转

若

$$f(k) \longleftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$$

则：

$$f(-k) \longleftrightarrow F(z^{-1}), \frac{1}{\beta} < |z| < \frac{1}{\alpha}$$

## 八、部分和

若

$$f(k) \longleftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$$

则：

$$\sum_{i=-\infty}^k f(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} F(z), \max(\alpha, 1) < |z| < \beta$$

# 总结

	序列	Z变换	收敛域	备注
1	$x[n]$	$X(Z)$	$R_{X-} <  Z  < R_{X+}$	
2	$y[n]$	$Y(Z)$	$R_{Y-} <  Z  < R_{Y+}$	
3	$ax[n] + by[n]$	$aX(Z) + bY(Z)$	$\max[R_{X-}, R_{Y-}] <  Z  < \min[R_{X+}, R_{Y+}]$	线性性
4	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{Z}\right)$	$\frac{1}{R_{X-}} <  Z  < \frac{1}{R_{X+}}$	时域反转
5	$x[n] * y[n]$	$X(Z)Y(Z)$	$\max[R_{X-}, R_{Y-}] <  Z  < \min[R_{X+}, R_{Y+}]$	序列卷积
6	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \int_C X(v) * Y\left(\frac{Z}{v}\right) v^{-1} dv$	$R_{X-}R_{Y-} <  Z  < R_{X+}R_{Y+}$	序列相乘
7	$x^*[n]$	$X^*(Z^*)$	$R_{X-} <  Z  < R_{X+}$	序列共轭
8	$nx[n]$	$-Z \frac{dX(Z)}{dZ}$	$R_{X-} <  Z  < R_{X+}$	频域微分
9	$x[n + n_o]$	$Z^{n_o} X(Z)$	$R_{X-} <  Z  < R_{X+}$	序列移位
10	$x[0] = X(\infty)$		因果序列 $ Z  > R_{X-}$	初值定理
11	$x[\infty] = \text{Res}(X(Z), 1)$		$(Z - 1)X(Z)$ 收敛于 $ Z  \geq 1$	终值定理