第二章 导数与微分

第一节 导数概念

函数在一点的导数定义（p75）

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某领域内有定义，当自变量 x 在 x_0 取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该领域内)时，相应地，因变量取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，并称该极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $y'\big|_{x=x_0}, f'(x_0), \dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$。

注 1）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导也说成 $y=f(x)$ 在点 x_0 具有导数或 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数存在；

2） $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，其中 $\Delta x=x-x_0$ 表示自变量 x 在 x_0 处的增量，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 表示相应的函数增量。

导函数定义 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内每点都可导，则称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导。这时，$\forall x\in I$，都有一个确定的导数值 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 与之对应，这样 $f'(x)$ 就是定义在开区间 I 内的 x 的函数，称为**函数 $y=f(x)$ 的导函数**，且其定义式为

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 或 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，导函数 $f'(x)$ 简称导数。

注 由定义知，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$。

例 $(\sin x)'=\cos x$；$(\cos x)'=-\sin x$.

解 设 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$，则

$$(\sin x)'=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}=\cos x.$$

$$(\cos x)'=g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}=-\sin x.$$

例 常数 C 的导数等于零，即 $(C)'=0$.

解 设 $f(x)=C$, $(C)'=f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C-C}{h}=0$.

例 $(e^x)'=e^x$; $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}, x>0$.

解 设 $f(x)=e^x$，则 $(e^x)'=f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}$

$$=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x;$$

设 $g(x)=\ln x$，则 $(\ln x)'=g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{x}}{h}=\frac{1}{x}$$

单侧导数定义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左导数(记为 $f'_-(x_0)$)及右导数(记为 $f'_+(x_0)$)分别定义为

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$， $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 。

注 因为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导 $\Leftrightarrow$ 极限 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在 $\Leftrightarrow$ 左极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 与右极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 均存在且相等，所以函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 均存在且相等。

讨论分段函数在分段点处的可导性用单侧导数定义。

例 函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, x\ge 0\\ -x, x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 是否可导？

解 由于 $f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h-0}{h}=-1$，

$f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h-0}{h}=1$，故 $f'(0)$ 不存在，即该函数在 $x=0$ 不可导。

导数的几何意义

设点$M(x_0,y_0)$及$Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$为曲线$y=f(x)$上两点，割线$QM$的倾角为$\varphi$，过点$M(x_0,y_0)$的切线倾角为$\alpha$，则$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\varphi$。当$\Delta x\to 0$时，割线$QM$沿曲线$y=f(x)$趋于过点$M(x_0,y_0)$的切线，$\varphi\to\alpha$；$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi=\tan\alpha$表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线斜率。

进一步，切线方程为$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，过切点且垂直于切线的直线(称为法线)方程为$y-y_0=\dfrac{1}{-f'(x_0)}(x-x_0)$。

注 当导数$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi=\infty$时，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，此时过点$M(x_0,y_0)$的切线垂直于$x$轴, 方程为$x=x_0$。

例 1) 因为函数$y=|x|$在$x=0$不可导（$f'_-(0)=-1, f'_+(0)=1\Rightarrow f'(0)$不存在），故曲线$y=|x|$在原点$(0,0)$无切线;

2) 因为函数$y=\sqrt[3]{x}$在$x=0$的导数$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{\frac{2}{3}}}=+\infty$，所以$f'(0)$不存在，即函数$y=\sqrt[3]{x}$在$x=0$不可导。但根据导数几何意义，曲线$y=\sqrt[3]{x}$在原点$(0,0)$的切线倾角为$\dfrac{\pi}{2}$，即曲线$y=\sqrt[3]{x}$在原点$(0,0)$的切线为$y$轴。

例 求曲线$y=x^{\frac{3}{2}}$的通过点$(0,-4)$的切线方程和法线方程。

解 设切点为$(x_0, x_0^{\frac{3}{2}})$，则切线斜率为$f'(x_0)=\dfrac{3}{2}x_0^{\frac{1}{2}}$，切线方程为$y-x_0^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}x_0^{\frac{1}{2}}(x-x_0)$，又点$(0,-4)$在切线上，故$-4-x_0^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}x_0^{\frac{1}{2}}(0-x_0)$，解得$x_0=4$，于是切线方程为$y-8=3(x-4)$即$3x-y-4=0$；法线方程为$y-8=\dfrac{-1}{3}(x-4)$。

函数在一点可导和连续的关系

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导 $\Rightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续；反之，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 不一定可导。

证 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，从而

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0$，即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续；

显然，函数 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 为初等函数，在定义区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的点 $x=0$ 处连续，但由前例，函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 不可导。

第二节 函数的求导法则

一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理 1 如果函数 $u=u(x), v=v(x)$ 都在点 x 具有导数，那么它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点 x 具有导数，且

(1) $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$； (2) $(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(3) $(\dfrac{u(x)}{v(x)})'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

证 (1) 设 $f(x)=u(x)\pm v(x)$，则

$$(u(x)\pm v(x))'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}$$
$$=u'(x)\pm v'(x);$$

(2) 设 $f(x)=u(x)\cdot v(x)$，则

$$(u(x)\cdot v(x))'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)$$
$$+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=u'(x)v(x)+u(x)'v(x)$$

，这里用到 $v(x)$ 在点 x 可导从而连续，于是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)\underset{=\!=\!=\!=}{\;y=x+\Delta x\;}\lim\limits_{y\to x}v(y)=v(x)$;

(3) 设 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$，则

$$(\frac{u(x)}{v(x)}\cdot)'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x v(x+\Delta x)v(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x v(x+\Delta x)v(x)}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}v(x)-u(x)\dfrac{[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

注 1) 法则(1)可推广到有限个可导函数的情形, 如 $(u(x)\pm v(x)\pm w(x))'=u'(x)\pm v'(x)\pm w'(x)$;

2) 法则(2)可得 $(Cu(x))'=Cu'(x), C$ 为常数；$(\log_a x)'=(\dfrac{\ln x}{\ln a})'=\dfrac{1}{\ln a}(\ln x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；

$(u(x)\cdot v(x)\cdot w(x))'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$;

3） 法则(3)可得$(\frac{C}{v(x)})'=-\frac{Cv'(x)}{v^2(x)}$,$C$为常数，特别地，$(\frac{1}{v(x)})'=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$。

例 $y=e^x(\sin x+\cos x)$，求y'

解 $y'=[e^x(\sin x+\cos x)]'=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$。

例 $(\tan x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$，

$(\cot x)'=(\frac{\cos x}{\sin x})'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$，

$(\sec x)'=(\frac{1}{\cos x})'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$，

$(\csc x)'=(\frac{1}{\sin x})'=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cot x$。

二、反函数的求导法则

定理 2 设单调函数$x=\varphi(y)$在区间I_y内可导且$\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数$y=f(x)$在区间$I_x=\{x|x=\varphi(y),y\in I_y\}$内也可导，且$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$，即反函数的导数等于直接函数导数的倒数。

证 1）函数$x=\varphi(y)$在区间I_y内单调，则其反函数$y=f(x)$在区间I_x内单调性一样，故$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\neq 0$；

2）由反函数$y=f(x)$在区间I_x内连续，故$\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$；

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$。

例 1)反函数$y=\arcsin x,-1\le x\le 1$的直接函数为$x=\varphi(y)=\sin y,y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，根据定理2，

$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，同理，$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

2)反函数$y=\arctan x,-\infty<x<+\infty$的直接函数为$x=\varphi(y)=\tan y,y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，根据定理2，

$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$，同理，$(arc\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$；

3）反函数 $y=a^x,-\infty<x<+\infty$ 的直接函数为 $x=\varphi(y)=\log_a y, y\in(0,+\infty)$，根据定理 2，

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a$$ 。

三、复合函数的求导法则

定理 3 设函数 $u=g(x)$ 在点 x 可导，$y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f(g(x))$ 在点 x 可导，且 $\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$，即复合函数的导数等于内、外函数导数的积。

注 此法则可推广到多个函数复合得到的复合函数求导，如，$[f(g(h(x)))]'=f'(u)g'(v)h'(x)$；另外，外函数和内函数尽量写成基本初等函数，以便运用基本初等函数的求导公式。

证 1） $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，故 $f'(u)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}$ 存在，根据教材 p35 定理 1 知，

$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha$，其中 α 表示 $\Delta u\to 0$ 时的无穷小，即 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0$，从而得到

$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$ 。

2） 由函数 $u=g(x)$ 在点 x 连续，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$， $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha\Delta u=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha\Delta u=0$；于是

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u}{\Delta x}=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta u}{\Delta x}=f'(u)g'(x)$$，这里

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=0\cdot g'(x)=0$$ 。

例 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$ 可看成函数 $y=\sin u$ 和 $u=\frac{2x}{1+x^2}$ 复合而成，故

$$(\sin\frac{2x}{1+x^2})'=(\sin u)'\cdot(\frac{2x}{1+x^2})'=\cos u\cdot\frac{(2x)'(1+x^2)-2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$=\cos u\cdot\frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+x^2},$$

例 1）$y=\ln\sin x$ 可看成函数 $y=\ln u$ 和 $u=\sin x$ 复合而成，故

$$(\ln\sin x)'=(\ln u)'\cdot(\sin x)'=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\cot x,$$

2）$y=\ln\cos(e^x)$ 可看成函数 $y=\ln u$ 、 $u=\cos v$ 和 $v=e^x$ 复合而成，故

$$(\ln\sin x)'=(\ln u)'\cdot(\cos v)'\cdot(e^x)'=\frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot e^x=-\tan(e^x)\cdot e^x,$$

3) $y = x^{\mu} = e^{\mu \ln x}$ 可看成函数 $y = e^{u}$ 和 $u = \mu \ln x$ 复合而成，故

$(x^{\mu})' = (e^{u})' \cdot (\mu \ln x)' = e^{u} \cdot (\mu \cdot \frac{1}{x}) = x^{\mu} \cdot \mu \cdot \frac{1}{x} = \mu x^{\mu-1}$，特别地，

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$； $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$； $(x^{n})' = nx^{n-1}$。

4) $y = e^{\sin\frac{1}{x}}$ 可看成函数 $y = e^{u}$、$u = \sin v$ 和 $v = \frac{1}{x}$ 复合而成，故

$(e^{\sin\frac{1}{x}})' = (e^{u})' \cdot (\sin v)' \cdot (\frac{1}{x})' = e^{u} \cdot (\cos v) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}e^{\sin\frac{1}{x}}$,

5) $y = x^{x} = e^{x\ln x}$ 可看成函数 $y = e^{u}$ 和 $u = x\ln x$ 复合而成，故

$(x^{x})' = (e^{u})' \cdot (x\ln x)' = e^{u} \cdot (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^{x}(1 + \ln x)$。

6)证明 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, x \neq 0$

证 当 $x > 0$ 时，由第一节结论知 $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$；

当 $x < 0$ 时，$\ln|x| = \ln(-x)$ 可看成函数 $y = \ln u$ 和 $u = -x$ 复合而成，故由复合函数求导法则得 $(\ln|x|)' = (\ln u)' \cdot (-x)' = \frac{1}{u} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$。得证。

例 1) $y = f(x^2)$ 可看成函数 $y = f(u)$ 和 $u = x^2$ 复合而成，故

$\frac{df(x^2)}{dx} = f'(u) \cdot (x^2)' = 2xf'(u) = 2xf'(x^2)$,

2) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$ 对 x 求导得 $\frac{dy}{dx} = \frac{df(\sin^2 x)}{dx} + \frac{df(\cos^2 x)}{dx}$；

$f(\sin^2 x)$ 可看成函数 $f(u)$、$u = v^2$ 和 $v = \sin x$ 复合而成，故

$\frac{df(\sin^2 x)}{dx} = f'(u) \cdot (v^2)' \cdot (\sin x)' = 2\sin x\cos xf'(\sin^2 x) = \sin 2xf'(\sin^2 x)$，同理，

$f(\cos^2 x)$ 可看成函数 $f(u)$、$u = v^2$ 和 $v = \cos x$ 复合而成，故

$\frac{df(\cos^2 x)}{dx} = f'(u) \cdot (v^2)' \cdot (\cos x)' = -2\sin x\cos xf'(\cos^2 x) = -\sin 2xf'(\cos^2 x)$，故

$\frac{dy}{dx} = \sin 2x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$。

四、基本求导法则与导数公式(p92)

第三节 高阶导数

一、高阶导数的定义

定义 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的一阶导数,

一阶导数 $f'(x)$ 的导数 $(f'(x))'$ 称为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数, 记为 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$,

二阶导数 $f''(x)$ 的导数 $(f''(x))'$ 称为函数 $y=f(x)$ 的三阶导数, 记为 $f'''(x)$ 或 $\frac{d^3y}{dx^3}$,

三阶导数 $f'''(x)$ 的导数 $(f'''(x))'$ 称为函数 $y=f(x)$ 的四阶导数, 记为 $f^{(4)}(x)$ 或 $\frac{d^4y}{dx^4}$,

…

$n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数 $(f^{(n-1)}(x))'$ 称为函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数, 记为 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^ny}{dx^n}$。

二阶及二阶以上的导数统称**高阶导数**。**规定** $f^{(0)}(x)=f(x)$。

注 由定义，n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 就是 $f(x)$ 连续求 n 次导数，也是 $f'(x)$ 连续求 $n-1$ 次导数，也是 $f''(x)$ 连续求 $n-2$ 次导数，…，也是 $f^{(n-1)}(x)$ 求 1 次导数，所以 $f^{(n)}(x)=(f'(x))^{(n-1)}$ $=(f''(x))^{(n-2)}=\cdots=(f^{(n-1)}(x))', n\geq 2$, 也即 $f^{(n)}(x)=(f^{(m)}(x))^{(n-m)}, m=1,2,\cdots,n-1$。

二、高阶导数求法举例

1. **直接法**，即按定义，从低阶导数求到高阶导数，每步求一阶导数（在求出 3 阶或 4 阶导数时，不要急于合并，观察规律性归纳写出 n 阶导数）

例 求 $y=(x+C)^\mu$（μ, C 为任意实数）的 n 阶导数

解 $y'=\mu(x+C)^{\mu-1}$,

$$y''=[\mu(x+C)^{\mu-1}])=\mu(\mu-1)(x+C)^{\mu-2},$$

$$y'''=[\mu(\mu-1)(x+C)^{\mu-2}]'=\mu(\mu-1)(\mu-2)(x+C)^{\mu-3},$$

$$y^{(4)}=[\mu(\mu-1)(\mu-2)(x+C)^{\mu-3}]'=\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(x+C)^{\mu-4},$$

…

$$y^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-(n-1))(x+C)^{\mu-n},$$

即 $[(x+C)^\mu]^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)(x+C)^{\mu-n}$。

注 1) $(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$,

由于 $(x^n)^{(n)}=n!$, $(x^n)^{(n+1)}=[(x^n)^{(n)}]'=(n!)'=0,\cdots,(x^n)^{(n+2)}=(0)'=0,\cdots$，所以

$$(a_0x^n)^{(m)}=\begin{cases} a_0n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)x^{n-m}, & m<n \\ a_0n!, & m=n \\ 0, & m>n \end{cases}$$ ，这里 m,n 均为正整数。

进一步，有

$$(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_{n-1}x+a_n)^{(m)}=(\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k})^{(m)}=\begin{cases}\sum_{k=0}^{n}a_k(n-k)(n-k-1)\cdots(n-k-m+1)x^{n-k-m}, & m<n\\ a_0n!, & m=n\\ 0, & m>n\end{cases}$$

2) 当 $\mu=-1$ 时，得到 $(\frac{1}{x+C})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+C)^{n+1}}$。

例 求 $y=e^{\lambda x}$（λ 为任意实数)的 n 阶导数

解 $y'=\lambda e^{\lambda x}$,

$y''=(\lambda e^{\lambda x})'=\lambda^2e^{\lambda x}$,

$y'''=(\lambda^2e^{\lambda x})'=\lambda^3e^{\lambda x}$,

…

$y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$，即 $(e^{\lambda x})^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$，特别地，$(e^x)^{(n)}=e^x$。

例 求 $y=\sin\omega x$ 的 n 阶导数

解 $y'=\omega\cos\omega x=\omega\sin(\omega x+\frac{\pi}{2})$,

$y''=\omega^2\cos(\omega x+\frac{\pi}{2})=\omega^2\sin(\omega x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\omega^2\sin(\omega x+\frac{2\pi}{2})$,

$y'''=\omega^3\cos(\omega x+\frac{2\pi}{2})=\omega^3\sin(\omega x+\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\omega^3\sin(\omega x+\frac{3\pi}{2})$,

$y^{(4)}=\omega^4\cos(\omega x+\frac{3\pi}{2})=\omega^4\sin(\omega x+\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\omega^4\sin(\omega x+\frac{4\pi}{2})$,

…

$y^{(n)}=\omega^n\sin(\omega x+\frac{n\pi}{2})$，即 $(\sin\omega x)^{(n)}=\omega^n\sin(\omega x+\frac{n\pi}{2})$，同理,

$(\cos\omega x)^{(n)}=\omega^n\cos(\omega x+\frac{n\pi}{2})$，特别地，$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$，$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$。

2.运用高阶导数的运算法则

设 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 具有 n 阶导数，则

(1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$；(2) $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$；

(3) $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}$（**莱布尼兹公式**，类比牛顿二项公式 $(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{n-k}v^k$ 记忆）

例 对 $y = x^2 e^{2x}$，求 $y^{(20)}$

解 令 $u = e^{2x}$, $v = x^2$，由莱布尼兹公式，有

$$y^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (e^{2x})^{(20-k)} (x^2)^{(k)} = C_{20}^0 (e^{2x})^{(20-0)} (x^2)^{(0)} + C_{20}^1 (e^{2x})^{(20-1)} (x^2)^{(1)} + C_{20}^2 (e^{2x})^{(20-2)} (x^2)^{(2)}$$

$$= 2^{20} \cdot e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} \cdot e^{2x} \cdot 2x + 190 \cdot 2^{18} \cdot e^{2x} \cdot 2!$$

$$= 2^{20} \cdot e^{2x} \cdot (x^2 + 20x + 95)$$

3.间接法，即通过适当的函数变形，运用高阶导数的运算法则和已知的高阶导数公式，求出 n 阶导数的方法

常用的高阶导数公式

(1) $(\frac{1}{x+C})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+C)^{n+1}}$； (2) $(e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$；(3) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$；

(4) $(\sin \omega x)^{(n)} = \omega^n \sin(\omega x + \frac{n\pi}{2})$，$(\cos \omega x)^{(n)} = \omega^n \cos(\omega x + \frac{n\pi}{2})$；

(5) $(a_0 x^n)^{(m)} = \begin{cases} a_0 n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)x^{n-m}, & m < n \\ a_0 n!, & m = n \\ 0, & m > n \end{cases}$，这里 m, n 均为正整数。

例 证明 $[\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $[\ln(1-x)]^{(n)} = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

证 设 $y = \ln(1+x)$, $z = \ln(1-x)$ 则 $y' = \frac{1}{1+x}$， $z' = -\frac{1}{1-x}$，

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = (\frac{1}{1+x})^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},;$$

$$z^{(n)} = (z')^{(n-1)} = (-\frac{1}{1-x})^{(n-1)} = (\frac{1}{x-1})^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n} = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

例 分别求 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 和 $z = \frac{x}{x^2-4}$ 的 n 阶导数

解 $y = -(1 - \frac{2}{1+x}) = \frac{2}{1+x} - 1$, $y^{(n)} = 2 \cdot (\frac{1}{1+x})^{(n)} = 2 \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$；

$$z = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}),\quad z^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot [(\frac{1}{x-2})^{(n)} + (\frac{1}{x+2})^{(n)}] = \frac{1}{2} \cdot [\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}]$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^n n! \cdot [\frac{1}{(x-2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}}].$$

例 求 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ 的10阶导数

解 $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1-\cos 4x}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$

$y^{(10)}=\frac{1}{4}\cdot(\cos 4x)^{(10)}=\frac{1}{4}\cdot 4^{10}\cdot\cos(4x+\frac{10\pi}{2})=-4^9\cos 4x$.

第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率

一、隐函数的导数

定义 如果变量x和y满足方程$F(x,y)=0$，在一定条件下，当x在区间I_x内任取一值时，总有满足这方程$F(x,y)=0$的唯一y值与之对应，则称方程$F(x,y)=0$在区间I_x内确定了一个**隐函数**。形如$y=f(x)$的函数称为**显函数**。

如方程$x+y^3-1=0$在$I_x=(-\infty,+\infty)$内确定了一个取实函数值的隐函数，因为$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，总有满足这方程$x+y^3-1=0$的唯一$y\in(-\infty,+\infty)$的取值与之对应，如，$x=0,y=1,x=1,y=0$等；又如方程$x^2+y^2-1=0$在$I_x=(-1,\ 1)$内确定了一个取正函数值的隐函数，因为$\forall x\in I_x=(-1,\ 1)$，总有满足这方程$x^2+y^2-1=0$的唯一$y\in(0,+\infty)$的取值与之对应，如，$x=0,y=1,x=\frac{1}{2},y=\frac{\sqrt{3}}{2}$等。

注 1)谈隐函数时必须指明确定隐函数的方程、自变量和因变量的范围，才有意义，比如，方程$x^2+y^2-1=0$在$I_x=(-2,\ 2)$内不能确定一个隐函数；方程$x^2+y^2-1=0$在$I_x=(-1,+1)$内确定了一个取正函数值的隐函数(即$y=\sqrt{1-x^2}$)，也可以确定一个取负函数值的隐函数(即$y=-\sqrt{1-x^2}$)；

2)方程$F(x,y)=0$在区间I_x内确定一个隐函数的条件(即隐函数存在唯一性定理)，将在下册介绍。

已知方程$F(x,y)=0$在区间I_x内确定了一个隐函数，由$F(x,y)=0$解出$y=f(x)$称为**隐函数的显化**，如方程$x+y^3-1=0$在$I_x=(-\infty,+\infty)$内确定了一个取实函数值的隐函数，解得$y=\sqrt[3]{1-x}$，即将隐函数化为了显函数。

隐函数的显化有时是困难的或不能进行的，如方程$y^5+2y-x-3x^7=0$确定的隐函数不容易显化，方程$y=\sin(x+y)$确定的隐函数不能显化。此时如何求导数$\frac{dy}{dx}$？

方法：方程$F(x,y)=0$两边同时对x求导，注意y是x的函数，运用复合函数求导法，最后解出导数$\frac{dy}{dx}$。

例 求由$e^y+xy-e=0$确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$，并求$\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}$。

解 在方程$e^y+xy-e=0$两边同时对x求导, 注意y是x的函数，运用复合函数求导法, 得$e^y\cdot y'+y+x\cdot y'=0$, 解得$y'=\frac{-y}{e^y+x}$,（这里等号右端的$y=y(x)$是方程$e^y+xy-e=0$确定的隐函数，它不能显化，它和$x$满足方程$e^y+xy-e=0$）。

当$x=0$时，从方程$e^y+xy-e=0$得$y=1$，故$y'\big|_{x=0}=\frac{-y}{e^y+x}\big|_{x=0,y=1}=\frac{-1}{e}$。

注 $y'\big|_{x=0}\neq\frac{-y}{e^y}$。

例 求椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=0$在点$(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$处的切线方程。

解 在方程$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=0$两边同时对$x$求导, 注意$y$是$x$的函数，运用复合函数求导法, 得$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot y'=0$, 解得$y'=\frac{-9x}{16y}$, 故切线斜率为$y'\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=\frac{-9x}{16y}\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以，切线方程为$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$。

例 求方程$x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$确定的隐函数的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解 在方程$x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$两边同时对x求导, 注意y是x的函数，运用复合函数求导法, 得$1-y'+\frac{1}{2}\cos y\cdot y'=0$, 解得$y'=\frac{2}{2-\cos y}$, 两端再对$x$求导, 注意$y$是$x$的函数，运用商式求导公式和复合函数求导法, 得

$$y''=\frac{-2(2-\cos y)'}{(2-\cos y)^2}=\frac{-2[0-(-\sin y\cdot y')]}{(2-\cos y)^2}=\frac{-2\sin y\cdot y'}{(2-\cos y)^2}=\frac{-2\sin y}{(2-\cos y)^2}\cdot\frac{2}{2-\cos y}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

注 方程$F(x,y)=0$确定的隐函数$y=y(x)$的一阶导数$\frac{dy}{dx}$和二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$的表达式中，一般都含有因变量y，它是方程$F(x,y)=0$确定的隐函数，一般不能写成自变量x的函数；而显函数$y=f(x)$的一阶导数$\frac{dy}{dx}$和二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$的表达式中只含有自变量x。

例 求方程 $y=1+xe^y$ 确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解 在方程 $y=1+xe^y$ 两边同时对 x 求导, 注意 y 是 x 的函数，运用复合函数求导法, 得 $y'=e^y+x\cdot e^y\cdot y'$, 解得 $y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}=\dfrac{e^y}{2-y}$, 两端再对 x 求导, 注意 y 是 x 的函数，运用商式求导公式和复合函数求导法, 得

$$y''=\frac{(e^y)'\cdot(2-y)-e^y\cdot(2-y)'}{(2-y)^2}=\frac{e^y\cdot y'\cdot(2-y)-e^y\cdot(0-y')}{(2-y)^2}=\frac{e^y(3-y)y'}{(2-y)^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}.$$

注 求隐函数的二阶导数时, 一阶导数的表达式尽量借助方程 $F(x,y)=0$ 化简为 y 的函数，从而简化计算。如求方程 $y=\tan(x+y)$ 确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 时，可得

$$y'=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}=\frac{1+y^2}{1-(1+y^2)}=-1-\frac{1}{y^2},$$

$$y''=-(\frac{1}{y^2})'=-\frac{-(y^2)'}{y^4}=\frac{2y\cdot y'}{y^4}=-\frac{2}{y^3}(1+\frac{1}{y^2})=-\frac{2}{y^5}(1+y^2)。$$

二、幂指函数 $y=u(x)^{v(x)},(u(x)>0,u(x)\neq 1)$ 以及多个函数相乘除、乘方、开方情形的求导方法---对数求导法

步骤：函数两边取对数，注意 y 是 x 的函数，运用复合函数求导法两边求导，可解出 y'。

例 求幂指函数 $y=x^{\sin x},x>0$ 的导数 y'。

解 函数两边取对数得 $\ln y=\sin x\ln x$，注意 y 是 x 的函数， 运用复合函数求导法两边对 x 求导，得 $\dfrac{1}{y}\cdot y'=\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}$，得 $y'=y(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x})=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x})$。

注 $y'=(x^{\sin x})'\neq\sin x\cdot x^{\sin x-1}$。

方法二：$y=x^{\sin x}=e^{\sin x\ln x}$，因为复合函数的导数等于内外函数导数的乘积，所以我们得到

$$y'=(e^{\sin x\ln x})'=e^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)'=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})。$$

例 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数 y'。

解 法一 函数的定义域为$x>4,\ 2\le x<3,\ x\le 1$，

当$x>4$时，函数两边取对数得$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$， 注意

y是x的函数，运用复合函数求导法两边求导，得$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$，

得$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$；

当$2\le x<3$时，函数两边取对数得$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(3-x)-\ln(4-x)]$，两边求导，得$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{-1}{3-x}-\frac{-1}{4-x})$，结果同上；

当$x\le 1$时，函数两边取对数得$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(1-x)+\ln(2-x)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$，两边求导，得$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}(\frac{-1}{1-x}+\frac{-1}{2-x}-\frac{-1}{3-x}-\frac{-1}{4-x})$，结果同上。

法二 先取绝对值再取对数得$\ln|y|=\frac{1}{2}(\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|)$。因$\ln|y|$是$y$的函数，$y$又是$x$的函数，两边对$x$求导，得$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$，

得$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$。

注意$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$。

例 求函数$y=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$的导数$y'$。

解 函数两边取绝对值再取对数得$\ln|y|=\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-1|-2\ln|x+4|-x$，两边对$x$求导，

得$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+4}-1$，得$y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+4}-1).$

三、由参数方程确定的函数的求导

定义 若参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$可确定一个$y$与$x$之间的函数关系$y=y(x)$，则称此函数$y=y(x)$为**参数方程确定的函数**。

例如参数方程$\begin{cases}x=2t\\y=t^2\end{cases}$可确定函数$y=\dfrac{x^2}{4}$（消去参数$t$即得），此时$y'=\dfrac{x}{2}$。如果参数方程可确定一个函数，但消参困难或无法消参，如参数方程$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}, t\in[0,2\pi]$可确定一个函数$y=y(x)$，其图形称为一拱摆线(p107 例 9。事实上，给定一个t值，得xoy平面上唯一一个点(x,y)，当t在$[0,2\pi]$上取值时，点(x,y))的轨迹就是一拱摆线；由摆线图形可知，任给x的一个值，通过摆线，亦即通过参数方程$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}, t\in[0,2\pi]$），得唯一$y$值与之对应），此时如何求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$？

在参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$中，设$x=\varphi(t)$具有单调且连续的反函数$t=\varphi^{-1}(x)$，则$y=\psi(\varphi^{-1}(x))$的复合结构为$y---t=\varphi^{-1}(x)---x$。再设$x=\varphi(t), y=\psi(t)$都二阶可导且$\varphi'(t)\neq 0$，则由复合函数和反函数的求导法则得，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\xlongequal{\text{记为}}h(t)$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(h(t))=\frac{dh(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dh(t)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dh(t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}。$$

结论： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$。

例 求摆线的参数方程$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$确定的函数$y=y(x)$的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(\cot\frac{t}{2})'}{a(1-\cos t)}=\frac{-\csc^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}}{a(1-\cos t)}=\frac{-1}{2\sin^2\frac{t}{2}a(1-\cos t)}=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}。$$

例 求参数方程$\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$确定的函数$y = y(x)$的二阶导数$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$（设$f''(t) \neq 0$）。

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t$，$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{1}{f''(t)}$。

例 已知椭圆的参数方程$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$，求椭圆在$t = \dfrac{\pi}{4}$相应的点处的切线方程。

解 椭圆上$t = \dfrac{\pi}{4}$相应的点$(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a, \dfrac{\sqrt{2}}{2}b)$即切点。因为$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t}$，切线斜率为

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{-b}{a}$，故切线方程为$y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = \dfrac{-b}{a}(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a)$。

注 参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定的函数$y = y(x)$的一阶和二阶导数都是参数$t$的函数，而方程$F(x, y) = 0$确定的隐函数$y = y(x)$的一阶和二阶导数都含有因变量$y$，且自变量$x$和因变量$y$满足方程$F(x, y) = 0$。

第五节 函数的微分

一、微分的定义

例 一块正方形金属片受热后其边长 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，考查此薄片的面积 A 的改变情况。

解 面积 $A=x^2$，面积改变量 $\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$，当 $\Delta x\to 0,(\Delta x)^2=o(\Delta x)$，可忽略，$\Delta A$ 的主要部分是 Δx 的线性函数 $2x_0\Delta x$，$2x_0\Delta x$ 是 ΔA 的近似值。 这种线性函数(即函数值改变量的主要部分)，在所有函数的改变量中是否都有，它是什么，怎么求？

定义 设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函数值增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，则称**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微**，线性函数 $A\Delta x$ 称为**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分**，记为 dy，即 $dy=A\Delta x$。

注 1）**函数微分** dy 也称为函数增量 Δy 的**线性主部**，这是因为，$dy=A\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，另外，当 $|\Delta x|$ 充分小时，$\Delta y\approx dy$，即 dy 是 Δy 的主要部分；

2）$\Delta y-dy=o(\Delta x)$，即函数增量与函数微分相差一个 Δx 的高阶无穷小；

3）当 $A\neq 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{dy}=1+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{A\Delta x}=1$，即函数增量与函数微分是 $\Delta x\to 0$ 时的等价无穷小，即 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\sim dy$，进一步由等价无穷小的充要条件有，$\Delta y=dy+o(dy)$；

可微与可导的关系：函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导。

证 必要性 由函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，故 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，于是 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A$，即 $f'(x_0)=A$，于是得到函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导。

充分性 由函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ 为一常数，根据极限和无穷小的关系，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$，其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，则 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$，其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，即 $\Delta x\to 0$ 时，$\alpha\cdot\Delta x=o(\Delta x)$，于是得到函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微。

注 由必要性的证明知，当函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微时，$A=f'(x_0)$，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$。

定义 函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分称为**函数的微分**，记为 dy 或 $df(x)$，即 $dy=f'(x)\Delta x$。

例 函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分为 $dy=(x^2)'\big|_{x=1}\cdot\Delta x=2\Delta x$，在 $x=3$ 处的微分为 $dy=(x^2)'\big|_{x=3}\cdot\Delta x=6\Delta x$。

例 函数 $y=x^3$ 在 $x=2,\Delta x=0.02$ 处的微分为

$$dy=(x^3)'\cdot\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=3x^2\cdot\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=3\cdot 2^2\cdot 0.02=0.24。$$

自变量的微分

因为 $y=x$ 时，$dx=dy=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x$，所以**通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记为 dx，即定义 $dx=\Delta x$**。

于是, 函数 $y=f(x)$ 的微分 $dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$, 得 $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, 因此, 导数即微商。

例 求 $y=\ln(1+e^{x^2})$ 的微分

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(\ln(1+e^{x^2}))=\dfrac{1}{1+e^{x^2}}(1+e^{x^2})'=\dfrac{1}{1+e^{x^2}}(e^{x^2})'=\dfrac{1}{1+e^{x^2}}e^{x^2}(x^2)'=\dfrac{2x}{1+e^{x^2}}e^{x^2}$，

故 $dy=\dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx$。

例 求 $y=e^{1-3x}\cos x$ 的微分

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(e^{1-3x}\cos x)=\cos x\dfrac{d}{dx}(e^{1-3x})+e^{1-3x}\dfrac{d}{dx}(\cos x)=\cos xe^{1-3x}\dfrac{d}{dx}(1-3x)+e^{1-3x}(-\sin x)$

$=-3\cos xe^{1-3x}-e^{1-3x}\sin x$，**得** $dy=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx$

例 设 $y=y(x)$ 是方程 $x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$ 确定的函数，求 $dy\big|_{x=0}$。

解 在方程两边同时对 x 求导得 $3x^2+3y^2\dfrac{dy}{dx}-3\cos 3x+6\dfrac{dy}{dx}=0$，得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\cos 3x-3x^2}{3y^2+6}$，

$dy=\dfrac{3\cos 3x-3x^2}{3y^2+6}dx$。当 $x=0$ 时，$y=0$，故 $dy\big|_{x=0}=\dfrac{3\cos 3x-3x^2}{3y^2+6}\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}}dx=\dfrac{1}{2}dx$。

例 已知 $xy=e^{x+y}$，求 dy。

解 在方程两边同时对 x 求导得 $y+x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(e^{x+y})=e^{x+y}\dfrac{d}{dx}(x+y)=e^{x+y}(1+\dfrac{dy}{dx})$，得

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$，故 $dy=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}dx$。

二、微分在近似计算中的应用

1．函数的近似计算

当函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 充分小时，有近似计算的基本公式 $\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$ 或 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$ 或 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$。

令 $x=x_0+\Delta x$，则当 $|x-x_0|$ 充分小时，有 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，特别地，当 $x_0=0$，得到当 $|x|$ 充分小时，有 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$。

例 运用微分计算 $\sin 30^\circ 30'$ 的近似值

解 $30^\circ 30'=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{360}$， $x_0=\dfrac{\pi}{6},\Delta x=\dfrac{\pi}{360}$，

$\sin 30^\circ 30'=\sin(x_0+\Delta x)\approx \sin x_0+(\sin x)'\big|_{x=x_0}\Delta x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{360}\approx 0.5076$。

例 当 $|x|$ 充分小时，有 $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$； $\sin x\approx x$（x 为弧度）； $\tan x\approx x$（x 为弧度）；

$e^x-1\approx x$； $\ln(1+x)\approx x$。

解 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$，则 $f(0)=1, f'(0)=f'(x)\big|_{x=0}=\dfrac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\big|_{x=0}=\dfrac{1}{n}$，代入公式即得，其他类似得到。

例 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值，

解 法一 当 $|x|$ 充分小时，有 $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$，故 $\sqrt{1.05}=\sqrt{1+0.05}\approx 1+\dfrac{1}{2}\cdot 0.05=1.025$，

这里，$n=2, x=0.05$；

法二 当 $|\Delta x|$ 充分小时，$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$，

$\sqrt{1.05}=\sqrt{1+0.05}\approx\sqrt{1}+(\sqrt{x})'\big|_{x_0=1}\cdot 0.05=1+\dfrac{1}{2}\cdot 0.05=1.025$，

这里，$f(x)=\sqrt{x}, x_0=1, \Delta x=0.05$。

2．误差估计（略）

三、微分的几何意义

当 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，Δy 是曲线 $y=f(x)$ 上点的纵坐标增量，dy 是过点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线上点的纵坐标相应增量。

小结：

微分学要解决的两类问题：函数的变化率问题（提出导数概念）；函数的增量问题（提出微分概念）；求导数与微分的方法称为微分法，研究微分法与导数理论及应用的科学叫微分学。

导数与微分的**区别**：

1. $f'(x_0)$ 是个常数，$dy = f'(x_0)\Delta x$ 是 $\Delta x = x - x_0$ 的线性函数，它是 $x \to x_0$ 时的无穷小，因为 $\lim\limits_{x\to x_0} dy = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0$；

2. 几何上，$f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率，dy 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线上点的纵坐标增量；

联系：可微等价于可导。