> ✍:Roy
> ❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️❤️
> 💊⭐

# 一、信号

欧拉公式：

$$e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$$

1. **信息**是消息中有意义的内容。
2. **信号**是反应信息的各种物理量，是系统直接进行加工、变换以实现通信的对象。
3. 信号是信息的表现形式，信息是信号的具体内容；信号是信息的载体，通过信号传递信息。
4. 系统（system）——是指若干相关联的事物组合而成具有特定功能的整体。

## 1.1、信号类型

### 1.1.1、连续信号和离散信号

- 连续时间信号————在连续的时间范围内$(-\infty < t < \infty)$有定义的信号称为连续信号，十几中也成为模拟信号。
- 离散时间信号————仅在一些离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号，简称离散信号，实际中也称为数字信号。

### 1.1.2、周期信号和非周期信号

- 周期信号（period signal）是定义在 $(-\infty, +\infty)$区间，每隔一定时间$T$(或整数$N$),按相同规律重复变化的信号。一定是无始无终的！
- 非周期信号————不具有周期性的信号称为非周期信号。
  连续周期信号$f(t)$满足：

$$f(t) = f(t + mT), m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

  离散周期信号$f(k)$满足：

$$f(k) = f(k + mN), m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

#### 1.1.2.1、周期求法

举两个例子，通过例子来说明具体求法。
（1）$f_1(t) = \sin 2t + \cos 3t$
$(2) f_2(t) = \cos 2t + \sin \pi t$

**解：** **两个周期信号$x(t), y(t)$的周期分别为$T_1, T_2$,若其周期之比$\frac{T_1}{T_2}$为有理数，则其和信号$x(t) + y(t)$仍然是周期信号，其周期为$T_1$和$T_2$的最小公倍数。**

（1）$\sin 2t, T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\cos 3t, T_2 = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{2}$**为有理数，**$f_1(t)$**为周期信号，周期**$2\pi$

（2）$\cos 2t, T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\sin \pi t, T_2 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2}$**为无理数，**$f_2(t)$**为非周期信号**

**总结：**

1. **连续的正弦信号一定是周期信号**
2. **正弦序列不一定是周期序列**
3. **两连续周期信号之和不一定是周期信号**
4. **两周期序列之和一定是周期序列**

### 1.1.3、实信号和复信号

### 1.1.4、能量信号和功率信号

信号平方的无穷积分总值加到$1\Omega$电阻上的能量，简称为信号能量E，即

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f^2(t)dt$$

平均功率定义为：

$$P=\frac{1}{2T}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f^2(t)dt$$

- 能量信号————信号总能量为有限值而平均功率为零。即$0<E<\infty,P=0$
- 功率信号————平均功率为有限值而总能量为无限大。即$0<P<\infty,E=\infty$

## 1.2、基本连续时间和离散时间信号

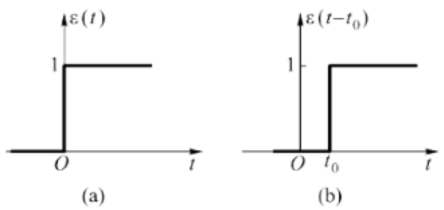
### 1.2.1、单位跃迁信号（unit step signal）

1. 连续时间单位跃迁信号

$$\epsilon（t） =\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$$

   时移$t_0$

$$\epsilon(t-t_0)=\begin{cases}1, & t>t_0\\0, & t<t_0\end{cases}$$



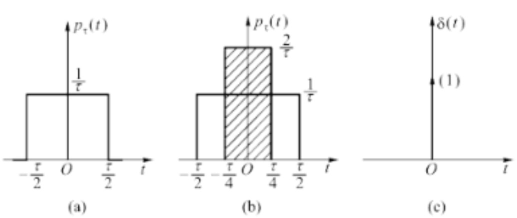

2. 离散时间单位冲激信号

$$\epsilon[t]=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$$

### 1.2.3、单位冲激信号(unit impulse function)

1. 连续时间单位冲激信号

$$\begin{cases}\delta（t） =\begin{cases}0 & t\neq 0\\\infty & t=0\end{cases}\\ \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\end{cases}$$




2. 离散时间单位冲激信号

$$\delta[n]=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$$

值得注意的是：单位序列$\delta[n]$与冲激函数$\delta(t)$有本质不同，$\delta[n]$在$n=0$处有确定幅度值为1，而$\delta(t)$在$t=0$时的幅度值为$\infty$。

## 1.2.4、冲激函数的性质

视作矩形脉冲的极限

1. 加权（筛选）特性
   若$f(t)$是一个在$t=t_0$时连续的普通函数，则有

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

   表明连续信号$f(t)$与冲激信号$\delta(t-t_0)$相乘，筛选出信号$f(t)$在$t=t_0$时的函数值$f(t_0)$
2. 取样特性
   如果信号$f(t)$是一个在$t=t_0$处连续的普通函数，则有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$$

3. 单位冲激函数为偶函数

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

4. 尺度变换

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$$

5. 冲激复合函数
   若$f(t)=0$有n个根$t=t_i$均为单根，则：$\delta[f(t)]=\sum\frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)$
   若$f(t)=0$有重根，则$\delta[f(t)]$没有意义。
   - 一般结论：对于$f(t)=at^2+bt+c$
     $\int_{-\infty}^{\infty}\delta[f(t)]=\begin{cases}0 & \Delta=b^2-4ac\leqslant 0\\ \frac{2}{\sqrt{\Delta}} & \Delta=b^2-4ac>0\end{cases}$
6. 单位冲激函数$\delta(t)$的导数及其性质（冲激偶）
   即：$\delta'(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}$，它具有以下性质：

$$\delta'(t)=-\delta'(-t)$$

$$\delta^{(n)}(t)=(-1)^n\delta^{(n)}(-t)$$

$$\delta'(t-t_0)=-\delta'[-(t-t_0)]$$

$$!!f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t)-f'(t_0)\delta(t)$$

$$!!\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t-t_0)dt=-f'(t_0)$$

## 1.2.5、单位冲激和单位阶跃之间的关系

单位冲激信号的积分为单位阶跃信号：

$$\epsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$

单位阶跃信号的导数为单位冲激信号：

$$\delta(t)=\frac{d\epsilon(t)}{dt}$$

### 1.2.6、其他函数

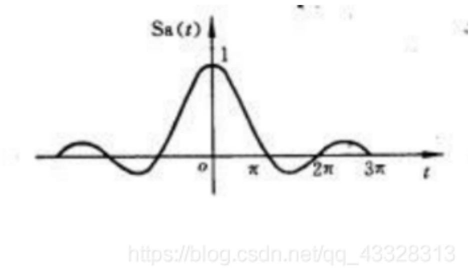
1. 符号函数

$$sgn(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

   $sgn(t)$是奇函数，可以表示为$sgn(t)=-1+2\epsilon(t)=\epsilon(t)-\epsilon(-t)$

2. 抽样函数

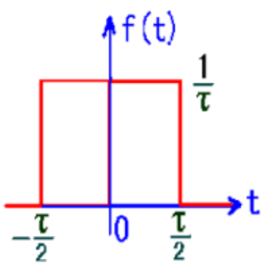
$$Sa(t)=\frac{sint}{t}$$
$$t\in R$$




> 1. 偶函数
> 2. 当$t=0$时，$S_a(t)=1$为最大值
> 3. 曲线呈衰减振荡
> 4. $$\int_{0}^{\infty}S_a(t)\,\mathrm{dt}=\frac{\pi}{2},\int_{-\infty}^{\infty}S_a(t)\,\mathrm{dt}=\pi$$

取样函数常用形式 $\sin c(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}=S_a(\pi t)$
3. 矩形脉冲信号（门函数）

$$g_\tau(t)=\begin{cases}1, & (|t|<\frac{\tau}{2})\\ 0, & (|t|>\frac{\tau}{2})\end{cases}$$




## 1.3、信号的变换

1. 信号的平移、反转、尺度变换参考高中函数变换。
2. 信号$f(t)$的微分运算指$f(t)$对$t$取导数，即：

$$f'(t)=\frac{df(t)}{dt}$$

   信号经过微分运算后，显示了他变化的部分，起到了锐化的作用

3. 信号的积分运算指$f(t)$在$(-\infty,t)$区间内的定积分，表达式为：

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

信号经过积分运算后，变化部分变得平滑，起到了模糊的作用。

## 1.4、信号的时域分解

### 1.4.1、任意信号的阶跃函数（冲激函数）表示

任意时间信号可分解为在不同时刻出现的具有不同幅度的无穷多个阶跃（冲激）函数的连续和。

### 1.4.2、信号分解为偶分量和奇分量

$$f(t) \xlongequal{分解为} f_e(t) + f_o(t)$$

其中偶函数：$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$，奇函数：$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$

### 1.4.3、信号分解为直流分量与交流分量

### 1.4.4、信号分解为实部和虚部

略

# 二、系统

## 2.1、系统的分类

### 2.1.1、连续时间系统和离散时间系统

输入和输出均为连续时间信号的系统称为连续时间系统。输入和输出均为离散时间信号的系统称为离散时间系统。**连续时间系统**的数学模型是用微分方程来描述，而**离散时间系统**的数学模型是用差分方程来描述。

### 2.1.2、线性系统与非线性系统

能同时满足齐次性与叠加性的系统称为**线性系统**。满足叠加性是线性系统的必要条件。不能同时满足齐次性与叠加性的系统称为**非线性系统**。

### 2.1.3、时变系统与非时变系统

只要初始状态不变，系统的输出仅取决于输入而与输入的起始作用时刻无关，这种特性称为非时变性。能满足非时变性质的系统称为非时变系统，否则为时变系统。

### 2.1.4、因果系统和非因果系统

能满足因果性质的系统称为因果系统，也称为可实现系统。因果系统的特点是，当 t >0 时作用于系统的激励，t<0 时不会在系统中产生响应。

## 2.2、系统的性质

### 2.2.1、线性系统的性质

1. 齐次性：若$e(t) \to r(t)$，则$ke(t) \to kr(t)$
2. 叠加性：若$e_1(t) \to r_1(t), e_2(t) \to r_2(t)$,则$e_1(t) + e_2(t) \to r_1(t) + r_2(t)$
3. 齐次性和叠加性可同时满足。

### 2.2.2、时变/非时变系统的性质

#### 1.概念

时不变系统：一个系统，在零初始条件下，其输出响应与输入信号施加于系统的时间起点无关，这样的系统称为时不变系统。

时不变性：系统具有上述的性质称为时不变性。

### 2.判断方法

先时移，再经系统 = 先经系统，再时移

$$f(t) \to 时移\tau \to f(t-\tau) \to H \to H\{f(t-\tau)\}$$

$$\xrightarrow{f(t)} H \to H\{f_1(t)\} \xrightarrow{令y(t)=H\{f_1(t)\}} \to 时移\tau \to y(t-\tau)$$

若：$H\{f(t-\tau)\}=y(t-\tau)$，则系统$H$是时不变系统。

## 2.3 系统模拟

略