《信息论与编码(B)》急救包

第 3 次修订版

使用急救包可考取考试分数为 60 分保底，仅用于大题解题急救，所示方法仅为解题记忆，名称和公式可能略有错误，请注意恰当使用，配合每次作业来使用风味更佳！

标记点 1 --第 2 章作业

$$\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix}}}_{\text{信源}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_n \\ P(x_1) & P(x_2) & P(x_3) \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{自信息} \\ \rightarrow \text{概率} \end{matrix}$$

解题类 1-1 对某一信源求自信息数目

Step 1：使用公式求出每个自信息的信息量

$$I_{(x_i)} = \log \frac{1}{P(x_i)}$$

Step 2：数出消息中每个符号存在的个数为n_i

Step 3：求出自信息为每个自信息的信息量与个数相乘再求和，即为自信息I

$$I = \sum n_i I_{(x_i)}$$

解题类 1-2 对某一信源求平均信息量

Step 1：输出消息中的符号总个数N

Step 2：求解出平均信息量

$$\bar{I} = \frac{I}{N}$$

解题类 1-3 对某一信源求信息熵

Step 1：公式求解

$$H(X) = \sum P(x_i) \log \frac{1}{P(x_i)}$$

解题类 1-4 计算$H^k(X)$，$H_k(X)$，$H(X_L|X_{L-1}X_{L-2}\ldots)$，$\lim_{N\to\infty} H_k(X)$

Step 1：求解$H(X)$

Step 2：公式求解

$$H^k(X) = k \cdot H(x)$$

$$H_k(X)=\frac{1}{k}H^k(X)$$

$$H(X_L|X_{L-1}X_{L-2}\dots)=H(X)$$

$$\lim_{N\to\infty}H_k(X)=H(X)$$

解题类 2-1 绘制马尔可夫信源状态转移图

Step 1：以题目中“当x_i为 A 时，为 B 的概率为 p”做箭头指向绘图 A→B，并标记为 b：p
Step 2：对于题目给出 P(B|A)=p，则做箭头指向绘图 A→B，并标记为 b：p

解题类 2-2 根据马尔可夫信源状态转移图求信息熵H_∞

Step 1：观察对于每个自信息x_i，有哪些箭头从另一个自信息$\overline{x_i}$（包括它自己本身，对应着标记的概率 p）指向它，列出方程组，每个方程组为

$$Q(x_i)=\sum p_iQ(\overline{x_i})=p_1Q(\overline{x_1})+p_2Q(\overline{x_2})+\cdots+p_iQ(\overline{x_i})$$

注意：x_i和$\overline{x_i}$在解题时要填具体的字母噢！
Step 2：补一条方程

$$Q(x_1)+Q(x_2)+\cdots+Q(x_i)=1$$

Step 3：求解出方程组的各个$Q(x_i)$
Step 4：将方程组中，同一字母前的概率（包括相同的也要写，有几个写几个）写入$H(X_i|\dots)$的…中，逗号隔开，并计算出结果

$$H(X_i|P_1,P_2,P_n)=\sum P_n\log\frac{1}{P_n}$$

Step 5：求解信息熵H_∞为各个$Q(x_i)$与$H(X_i|\dots)$的乘积求和

$$H_\infty=\sum Q(x_i)H(X_i|\dots)$$

解题类 2-3 根据马尔可夫信源状态转移图求概率分布

同 2-2 的 Step 1-3，求出的各个$Q(x_i)$即为概率分布。

解题类 2-4 根据马尔可夫信源状态转移图求信源熵（信源的信息熵）

根据 2-3 求出的分布概率，列出标记点 1 的信源形式，使用解题类 1-3 求解即可。

解题类 2-5 求解马尔可夫信源概率 p 取值时信息熵H_∞的最大值

Step 1：对$H_\infty(p)$求导
Step 2：H_∞最大值时，$H_\infty=H(X)$
另外，当 p=0 时，$H_\infty=0$，p=1 时，$H_\infty=1$

解题类 2-6 求冗余度

对于 q 元信息，自信息的冗余度：

$$\gamma = 1 - \frac{H(X)}{\log q}$$

对于 q 元信息，马尔可夫信源的冗余度：

$$\gamma = 1 - \frac{H_\infty}{\log q}$$

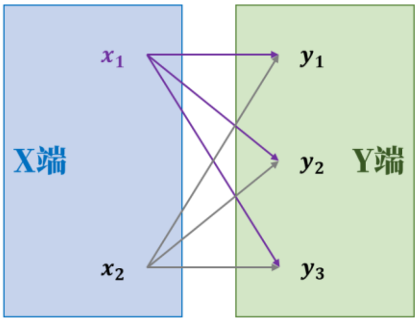
设问类 1 判断信源是否平稳

信源任意时间发出自信息的概率与时间无关，即为平稳信源。

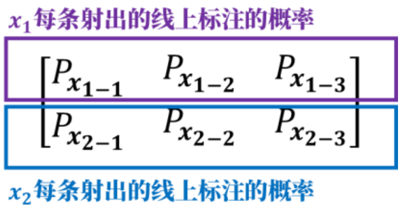
设问类 2 列出X^k信源所有可能信号

即每个信号由 k 个位置可以使用自信息进行填充排序，列出所有组合形式即可。

标记点 2 --第 3 章作业



每条线上会标注有概率



矩阵形式

解题类 3-1 求对称矩阵信道的信道容量 C

Step 1：观察矩阵形式（若只给了箭头形式没有矩阵形式，则先根据标记点 2 的规则写出矩阵形式）有几组对称，将每组对称的概率值写入$H(X_i|\ldots)$的···中（只用写每组对称中的对称概率，不用写完对称中所有概率），逗号隔开，根据解题类 2-2 的 Step4 计算出结果

$$\begin{bmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.02 & 0.98 \end{bmatrix} \Rightarrow H(X_i|0.98,\ 0.02)$$

一组对称

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow H(X_i|\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6})$$

一组对称

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow H(X_i|\frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6})$$

两组对称

Step 2：数出 X 端上，一个元素射出 R 个箭头

Step 3：信道容量为 $C = \log R - H(X_i|\dots)$

解题类 3-2 求对称矩阵信道的时间内最大传输信息量I_{max}

根据题目给出的速度 v 和时间 t

$$I_{max} = Cvt$$

注意：题目往往会问某时间内能不能传输完多少量的信息，与其比较即可。

设问类 3 求对称矩阵信道的最佳输入概率分布

输入的最佳概率分布即为等概率分布。

标记点 3 --第 8 章作业

解题类 4-1 二元霍夫曼编码

规则：先排序，每次抽取最小的两个（在两个当中最小的在上侧）做二叉树，标记二叉树路径为上 0 下 1，将二叉树合并后的概率放回原来的排序中，继续进入下一次循环运算，直到满概率，从右向左根据二叉树路径读取码字。

注意：此处方法参照《二进制原理(计算机工程学)》中的二叉树法霍夫曼编码，与老师的箭头排序上移方法可能有所不同，答案可能不唯一，但结果均是正确的，选择能理解的方法使用均可。

解题类 4-2 二元费诺编码

规则：先排序，每次进行分组，使得上下两组的概率相等或最接近，上 0 下 1，直到被分到最小个数停止，从左向右读取码字。

解题类 4-3 二元香农编码

规则：先排序，按序数规则列表，根据公式求解即可。

<table>
<tr><th>序数</th><th>自信息</th><th>概率
$P(x_i)$</th><th>从 0 累加概率
$P_i^0 = 0 + \sum P(x_i)$</th><th>码长（向上取整）
$k = -\log P(x_i)$</th><th>码字
将P_i^0的小数部分不断乘 2 取整依次读取直到码长</th></tr>
<tr><td>1</td><td>x_1</td><td>0.25</td><td>0</td><td>2</td><td rowspan="8">以第 4 行的x_4为例：
$P_i^0 = 0.625$
$k = 3$
0.625×2=1.25
0.25×2=0.5
0.5×2=1
读取结果：101</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x_8</td><td>0.25</td><td>0.25</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>x_3</td><td>0.125</td><td>0.5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>x_4</td><td>0.125</td><td>0.625</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>x_2</td><td>0.0625</td><td>0.75</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>x_5</td><td>0.0625</td><td>0.8125</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td>x_6</td><td>0.0625</td><td>0.875</td><td>4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>x_7</td><td>0.0625</td><td>0.9375</td><td>4</td></tr>
</table>

解题类 4-4 二元香-费-爱编码

规则：无需排序，按序数规则列表，根据公式求解即可。
表格塞不下，公式如下：
从 0 累加概率：$P_i^0 = 0 + \sum P(x_i)$
累加概率：$P_i = \sum P(x_i)$
码长（向上取整）：$k = -\log P(x_i) + 1$

十进制小数：$F = \frac{P_i^0 + P_i}{2}$

<table>
<tr><th>序数</th><th>自信息</th><th>概率
$P(x_i)$</th><th>P_i^0</th><th>P_i</th><th>k</th><th>F</th><th>码字
将F的小数部分不断乘 2 取整依次读取直到码长</th></tr>
<tr><td>1</td><td>x_1</td><td>0.25</td><td>0</td><td>0.25</td><td>3</td><td>0.125</td><td rowspan="8">以第 5 行的x_5为例：
$F = 0.59375$
$k = 5$
0.59375×2=1.1875
0.1875×2=0.375
0.375×2=0.75
0.75×2=1.5
0.5×2=1
读取结果：10011</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x_2</td><td>0.0625</td><td>0.25</td><td>0.3125</td><td>5</td><td>0.28125</td></tr>
<tr><td>3</td><td>x_3</td><td>0.125</td><td>0.3125</td><td>0.4375</td><td>4</td><td>0.375</td></tr>
<tr><td>4</td><td>x_4</td><td>0.125</td><td>0.4375</td><td>0.5625</td><td>4</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>x_5</td><td>0.0625</td><td>0.5625</td><td>0.625</td><td>5</td><td>0.59375</td></tr>
<tr><td>6</td><td>x_6</td><td>0.0625</td><td>0.625</td><td>0.6875</td><td>5</td><td>0.65625</td></tr>
<tr><td>7</td><td>x_7</td><td>0.0625</td><td>0.6875</td><td>0.75</td><td>5</td><td>0.71875</td></tr>
<tr><td>8</td><td>x_8</td><td>0.25</td><td>0.75</td><td>1</td><td>3</td><td>0.875</td></tr>
</table>

解题类 4-5 编码的平均码长和编码效率

平均码长为：每个自信息的概率与码长相乘求和

$$\bar{K} = \sum k_i P(x_i)$$

进制位 r 的编码的编码效率为：

$$\eta = \frac{H(X)}{\bar{K}\log r}$$

标记点 4 ---第 6 章作业

解题类 5-1 最大似然译码

Step 1：由题目给出的$P(x_i)$和信道传递矩阵，每个$P(x_i)$对应矩阵的每一列，设输出和输入符号集分别为$\{x_1, x_2 \dots x_i\}$和$\{y_1, y_2 \dots y_i\}$
Step 2：观察矩阵的每一列，将每一列最大的数字去除，剩余的数字相加为N
Step 3：计算平均错误概率，为每一列对应的$P(x_i)$与去除最大数字后剩余的数字相加为N相乘再求和

$$P_E = \sum NP(x_i)$$

解题类 5-2 最小错误概率译码

Step 1：由题目给出的$P(x_i)$和信道传递矩阵，每个$P(x_i)$对应矩阵的每一行，将$P(x_i)$与对应的每一行的数字相乘，得到联合概率矩阵
Step 2：观察矩阵的每一列，将每一列最大的数字去除
Step 3：计算平均错误概率，为矩阵中剩余的数字相加

解题类 5-3 求码率

Step 1：M 为信息的个数，n 为每个信息中码字的个数
Step 2：码率为，单位是比特/符号

$$R = \frac{\log M}{n}$$

设问类 4 求二元码信息的最小距离d_{min}

将二元码中的码组两两取出，数出有几个位差异，位差异最小的那一组的差异个数值，即为最小距离。例如 C={11100,01001,10010,00111}，在第 1 和第 2 个中位差异个数最小，只有 3 个不同，所以最小距离为 3。
注意：此处方法参照《二进制原理(计算机工程学)》中的方法，与老师的方法可能有所不同，但结果相同，选择能理解的方法使用均可。

设问类 5 求二元码信息某序列的最小距离译码准则结果

译码结果可能不唯一，最小距离即位差异最小，最小为 1，最大不超过d_{min}。可以从最小的 1 个差异开始设计，为接收序列从原有信息的信息中匹配结果，找出差异位最少的一个即为翻译结果写出的译码结果，只要保证不与任何一个已有的码和译出的码重复即可，当有重复时，可以增加差异个数，但不超过d_{min}。

设问类 6 求二元码信息某序列能检出/纠正几位码元错误

检出个数为:

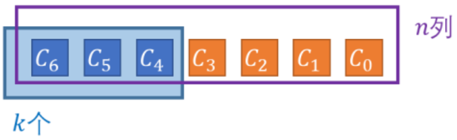
$$d_{min}-1$$

纠正个数t为:

$$t=\frac{d_{min}-1}{2}$$

标记点 5 ---第 9 章作业

(n,k) 线性分组码
例如(7,3)



一致校验方程
例如(6,3) 的某个方程为

$$\begin{cases} C_2=C_5+C_3 \\ C_1=C_4+C_3 \\ C_0=C_5+C_4+C_3 \end{cases}$$

一致校验矩阵H
观察方程组每一条方程，系数有的写1，没有的写0
例如左侧的方程

$$\begin{array}{cccccc} C_5 & C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

矩阵初等变换为标准形式

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(n,k) 线性分组码
例如(7,3) 的一致校验矩阵

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

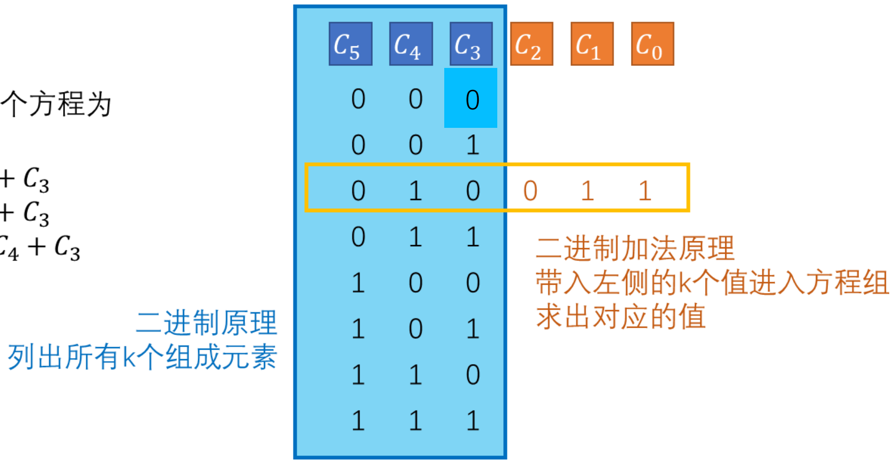
将非单位矩阵的部分转置，
再重新加上单位矩阵，即为生成矩阵G

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

列出所有码组

例如(6,3) 的某个方程为

$$\begin{cases} C_2 = C_5 + C_3 \\ C_1 = C_4 + C_3 \\ C_0 = C_5 + C_4 + C_3 \end{cases}$$



提示：若已知循环码组如何知道其 G 矩阵和 H 矩阵？

根据上面的图示，可知将所有码组中能组成单位矩阵的几个行拼在一起，即为 G 矩阵，通过对非单位矩阵部分转置，再添加新的单位矩阵，即为 H 矩阵

解题类 6-1 根据收到码字 R，求伴随式 S，错误图样 E，发送原码字 C

Step 1：计算伴随式 S：

$$S^T = R^T \times H \quad 或 \quad S=R\times H^T$$

Step 2：根据S^T的结果，假定为 1 的位为错误位（从右向左看），假设错误图样 E 为S^T的结果在前面补 0 到 k 个位

Step 3：计算

$$S^{T\prime} = E^T \times H \quad 或 \quad S'=E \times H^T$$

Step 4：若求得$S^T = S^{T\prime}$ 或 $S = S'$，可确定 E 的表达即为 Step2 中的表达，即确定为哪一位出错

Step 5：由 E 和 R 可求出原码字 C，R 与 E 比较，将 E 中为 0 的位置在 R 中保持不变，为 1 的位置对应 R 的位置的数字进行修改，即 0 改成 1，1 改成 0，最后的修改结果即为原发送码字 C（注意满足二进制加法）

解题类 6-2 求循环码的所有码字，标准生成矩阵$\tilde{G}$，校验多项式$h(x)$，标准校验矩阵$\tilde{H}$

所有码字：根据生成多项式写出一个码字，不断左移直到循环即为所有码字，再补上全 0 码和全 1 码即为循环码所有码字

标准生成矩阵$\tilde{G}$：根据生成多项式写出一个码字，不断左移并向上记录直到顶到最左边，得到生成矩阵G，通过行初等变换转换为包含单位矩阵的形式，即为标准生成矩阵$\tilde{G}$

校验多项式$h(x)$:
记住循环码表（位置规律）

$(7,k)$	d_{min}	$g(x)$	$g(x)$位置	$h(x)$	$h(x)$位置
(7,1)	7	$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$	6543210	$x+1$	10
(7,3)	4	x^4+x^2+x+1	4210	x^3+x+1	310
		$x^4+x^3+x^2+1$	4320	x^3+x^2+1	320
(7,4)	3	x^3+x^2+1	320	$x^4+x^3+x^2+1$	4320
		x^3+x+1	310	x^4+x^2+x+1	4210
(7,6)	2	$x+1$	10	$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$	6543210

标准校验矩阵$\tilde{H}$:
根据所求的$h(x)$ 多项式写出一个码字，不断左移并向上记录直到顶到最左边，得到校验矩阵H，通过行初等变换转换为包含单位矩阵的形式，即为标准校验矩阵$\tilde{H}$

解题类 6-3 设计校验位为 n 位的汉明码，求 H 矩阵和 G 矩阵

Step 1：码长为 n，纵向写出从 1 开始的二进制矩阵，写 7 个，即为 H 矩阵
例如：设计 3 位汉明码，H 矩阵为

0 0 0 1 1 1 1
0 1 1 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0 1

Step 2：根据标记 5 将 H 矩阵转换为$\tilde{H}$后求$\tilde{G}$即可