

[算法] 分支界限法

概括：对于遍历求解问题，分支界限法给出了一个剪枝的方案。

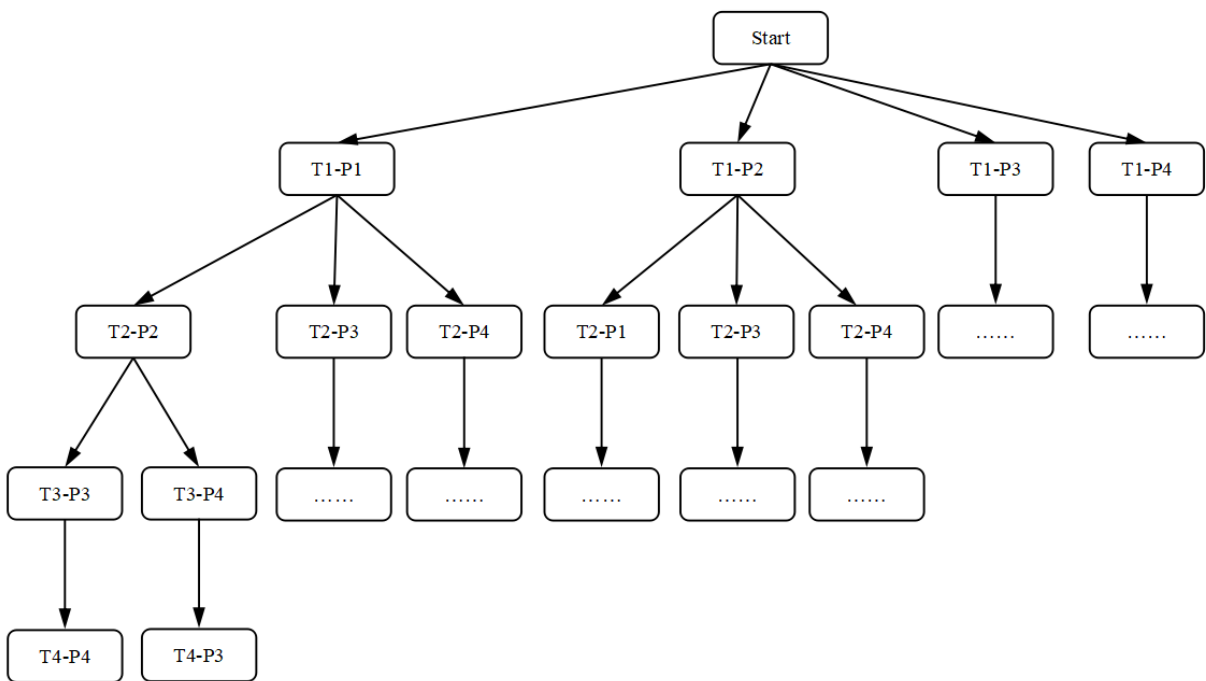
对于某些问题，我们需要遍历所有结果，然后得到其中的最佳，这时候，遍历的过程可以看做决策树，每一个结点都代表着一个决策。下面以任务分配问题作为例子。

任务分配问题：把n项任务分配给n个人，每个人对于每个任务所消耗的成本不一样，求得到总分配成本最小的方案。

下面是人员的分配表：

Person\Task	T1	T2	T3	T4
P1	9	2	7	8
P2	6	4	3	7
P3	5	8	1	8
P4	7	6	9	4

那么遍历分配的方案可以看做为下面的树：



分支界限法针对所有的方案结点，执行了一个评估“极限价值”操作，然后针对这个“极限价值”，进行剪枝。

先介绍一下分支界限法是如何操作的：

1. 评估当前决策的“极限价值”。
2. 选择当前“极限价值”最小的决策点继续进行遍历。
3. 当发现决策得到了方案的“已知价值”，所有“极限价值”大于“已知价值”的决策点会被剪去。

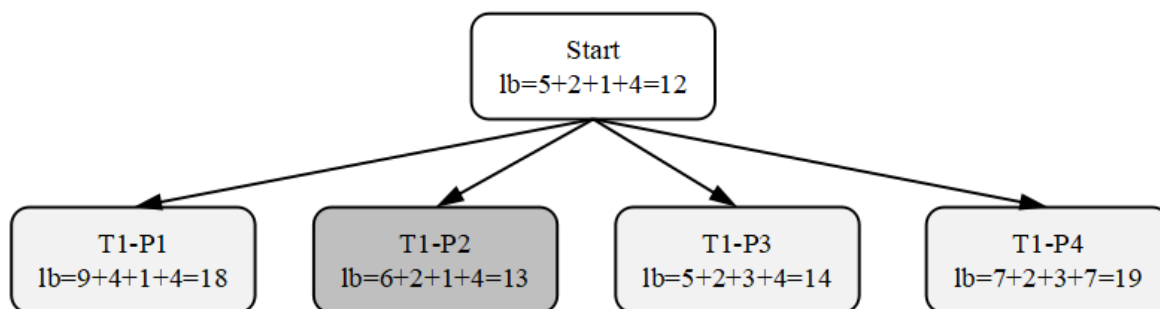
这里说明一下“极限价值”（为了方便理解，我自己瞎编的）：例如，针对T1-P1这个决策点，评估的“极限价值”为17（T1-P1, T2-P3, T3-P3, T4-P4，可以看到，其实这个选择不符合题意，所以称之为“极限价值”）。简单来说，“极限价值”其实就是根据这个决策后的情况进行评估，在剩余的决策中，每次都选择消耗最小的，不管是否满足条件，直到选择结束，将给所有选择的价值加在一起。

然后，选择“极限价值”最小的决策点，进行衍生并评估子决策点，然后再从所有决策点中选择“极限价值”最小的。

当发现某一个决策已经得到一个可行的方案时，那么这个方案的价值就为“已知价值”，然后对于其他的决策点，只要“极限价值”大于这个方案，那么就没必要衍生这个决策点了，则将这个决策抛弃。

“极限价值”其实就是所谓的“界限”。根据不同的题目，可能会求最小或者最大界限（缩写为lb或者ub）。

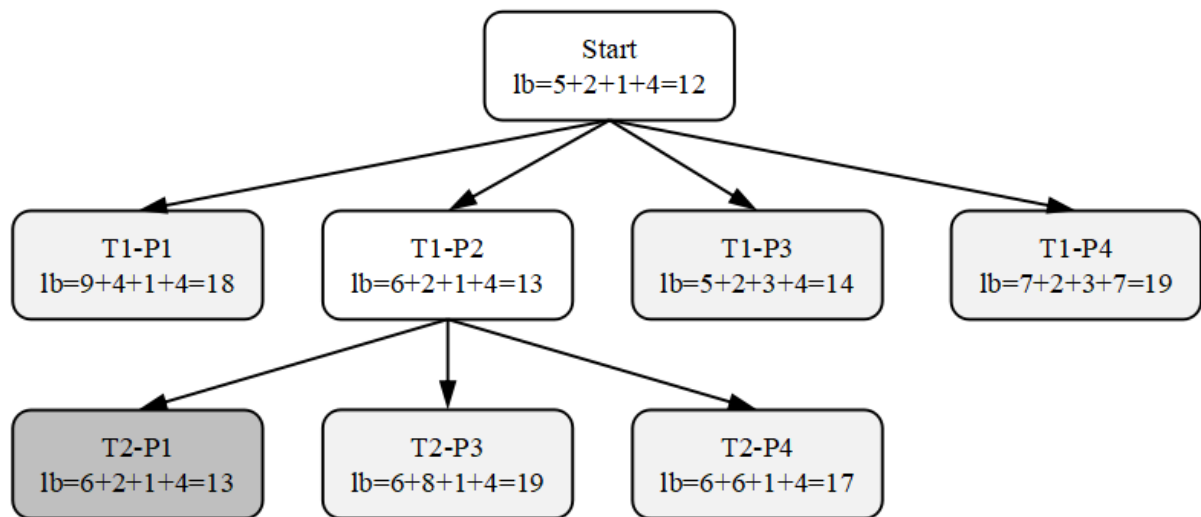
那么我们根据之前的例子可以作图：



可以看出T1-P2是“极限价值”最小的决策点，那么就根据它进行衍生并评估子决策点：

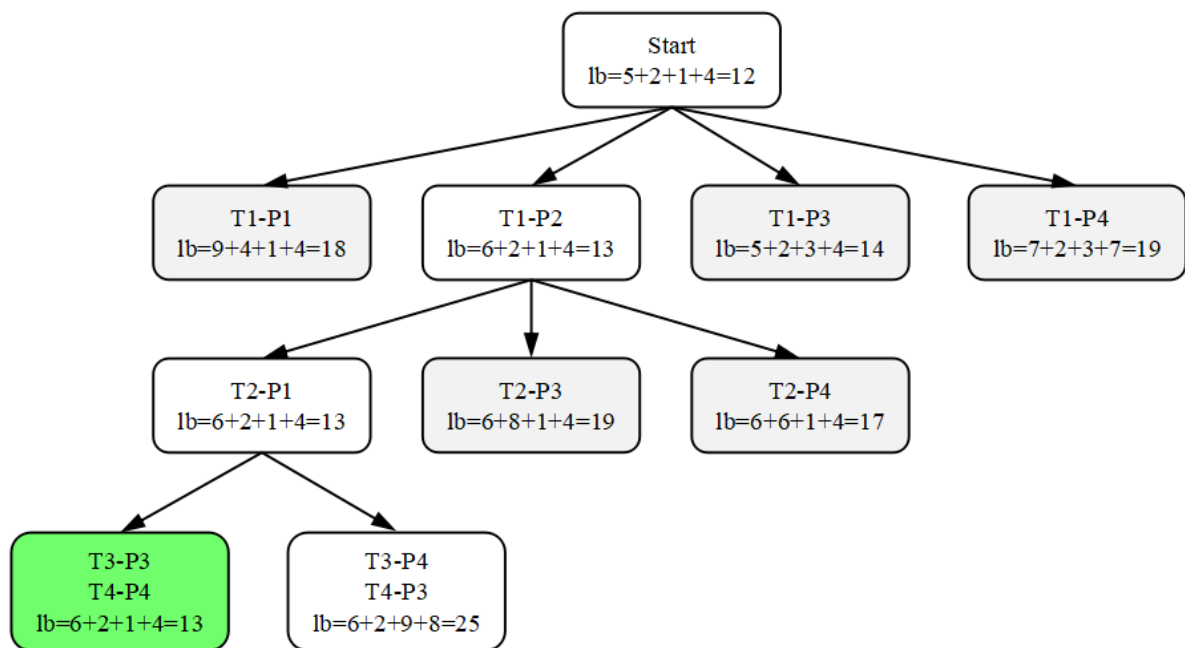
Person\Task	T1	T2	T3	T4
P1		2	7	8

Person\Task	T1	T2	T3	T4
P2	6			
P3		8	1	8
P4		6	9	4



可以看出T2-P1是“极限价值”最小的决策点，那么再根据它进行衍生并评估子决策点：

Person\Task	T1	T2	T3	T4
P1		2		
P2	6			
P3			1	8
P4			9	4



得到最佳结果T1-P2, T2-P1, T3-P3, T4-P4。

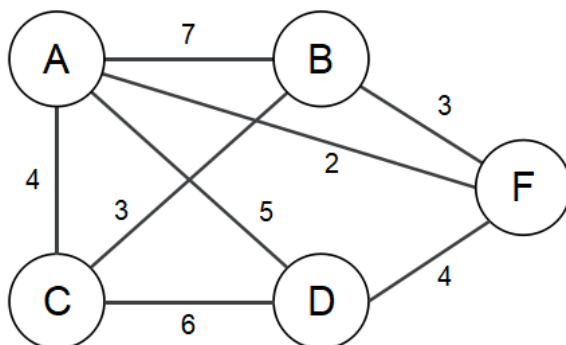
除了算法思路之外，提几个重要的点：

1. 相同的题目，遍历思路不同，会导致“极限价值”不同。例如上面的任务分配问题，从人员角度进行遍历和从任务角度进行遍历的lb是不一样的。
2. 不同的题目，评估的“极限价值”的方向和方法不同。例如背包问题，求解的是最大价值，则对应评估方向为最大值ub；其评估的方式和任务分配的评估方式完全不同。
3. 不同的题目，可能存在额外的剪枝策略。例如旅行商问题，整个决策树中，可能会遍历“...A...B...”和“...B...A...”，在无向图中，这是毫无意义的，可以规定A一定在B前面，达到遍历上的剪枝，但这并不是“分支界限法”带来的剪枝效果。

下面给出一个题目，给出提示，读者可以尝试求解：

应用分支界限法求解旅行商问题，要求：

1. 画出以状态空间树（作图以A位根节点），并给出每个状态的下界估计。
2. 给出销售商的环游路径以及最优解。



补充：评估方法是：(所有点到任意其他点的两个最小路径和)/2，其中已经决策的边需要常驻。