第一章 函数与极限

第一节 函数

1. 概念 设数集$D\subset$实数集R，若对D中任意一个数x，在某对应法则f作用下在R中都有唯一对应的实数y与之对应，则称**对应法则$f:D\to R$是定义在数集D上的函数**，记为$y=f(x),x\in D$，x称为**自变量**，y称为**因变量**，D称为**定义域**，记为D_f，$R_f=\{y\big|y=f(x),x\in D\}=f(D)$称为**值域**。

注 在定义中，由于实数集R是确定的，故函数只由定义域和对应法则确定，从而定义域和对应法则都一样的函数是同一函数。

例函数$y=\lg x^2$与$g(x)=2\lg x$不同，因为它们的定义域不同；

函数$f(x)=x$与$g(x)=\sqrt{x^2}$不同，因为它们的对应法则不同；

函数$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$与$g(x)=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$是相同的函数，因为它们的定义域和对应法则都一样。

几种特殊函数

（1）绝对值函数$y=|x|=\begin{cases}x,x\geq 0\\-x,x<0\end{cases}$；（2）符号函数$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$；

(3) 取整函数 $y=[x]=\begin{cases}\quad\vdots\\-2,\ -2\leq x<-1\\-1,\ -1\leq x<0\\0,\quad 0\leq x<1\\1,\ 1\leq x<2\\2,\ 2\leq x<3\\\quad\vdots\end{cases}$，$x\in R=\begin{cases}x, & \text{当}x\text{为整数}\\x\text{去小数}, & \text{当}x\text{为正小数}\\x\text{去小数减}1, & \text{当}x\text{为负小数}\end{cases}$，其图形是阶梯曲线，每个阶梯左端点是实心点、右端点是空心点。这里$[x]$表示小于等于x的最大整数，如

$[-3.6]=-4,\ [-1]=-1,\ [-0.8]=-1,\ [5.7]=5,\ [0.01]=0,\ [6.67]=6$等。

2. 函数的几种特性

（1）**有界性** 设K_1,K_2,M均为确定实常数,若$f(x)\leq K_1,x\in D$, 则称函数$f(x)$在D上有上界,K_1就称为$f(x)$在D上的一个上界；若$f(x)\geq K_2,x\in D$, 则称函数$f(x)$在D上有下界,K_2就称为$f(x)$在D上的一个下界；若$K_2\leq f(x)\leq K_1,x\in D$, 或$\big|f(x)\big|\leq M,x\in D$, 则称函数$f(x)$在$D$上有界.

注 1）由定义知，函数 $f(x)$ 在 D 上有界即函数 $f(x)$ 在 D 上既有上界也有下界；

2）若函数 $f(x)$ 在 D 上的函数值可趋于负无穷大，则 $f(x)$ 在 D 上无下界，因为若 $f(x)$ 在 D 上有下界，即 $f(x)\geq$ 某确定实常数 $K_2, x\in D$，矛盾。同理，若函数 $f(x)$ 在 D 上的函数值可趋于正无穷大，则 $f(x)$ 在 D 上无上界。显然，$f(x)$ 在 D 上无下界或无上界时，由 1），$f(x)$ 在 D 上无界。

例 1）函数 $y=\sin x$ 在 R 上有界, 因为 $|\sin x|\leq 1, x\in R$；

2）函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内可趋于正无穷大，故在 $(0,1)$ 无上界，从而在 $(0,1)$ 内也无界，但在 $(1,2)$ 内有界，因为 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{x}<1, x\in(1,2)$。

（2）**单调性** 对数集 D 上的任两个数 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称**函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加**；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称**函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少**。单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**。

注 本书中的单调函数指严格单调函数。

（3）**奇偶性** 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对 D 中任意一个 x，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

注 1) 奇函数、偶函数的定义域不一定是实数集 R；

2) 易证，两个奇函数的和是奇函数，两个偶函数的和是偶函数；两个偶函数的积是偶函数，两个奇函数的积是偶函数，奇函数和偶函数的积是奇函数；

3) 存在既不是奇函数也不是偶函数的函数，若 $y=\sin x+\cos x+1,\quad y=x^3+x^2$；

4) 定义在原点对称区间上的函数是该区间上奇函数和偶函数的和（证明见教材 p12）。

（4）**周期性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个正数 l，对 D 中任意一个 x，有 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，称 l 为 $f(x)$ 的周期。

注 周期函数的定义域不一定是实数集 R；周期是正常数，通常说的周期指最小正周期；狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ 0, x\in Q^C\end{cases}$ 无最小正周期，因为任何正有理数都是它的周期，但不存在最小的正有理数。

3. 反函数和复合函数

定义 设函数 $f:D\to f(D)$ 为单射，即任意 $x_1,x_2\in D, x_1\neq x_2$，有 $f(x_2)\neq f(x_2)$，则 $\forall y\in f(D)$，存在唯一 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，即存在 $f(D)$ 到 D 的一个函数，记为 $f^{-1}:f(D)\to D$，或 $f^{-1}(y)=x$，称为函数 $f:D\to f(D)$ 的**反函数**。

注 1) **若函数 $f:D\to f(D)$ 为单射，则 $\forall y\in f(D)$，存在 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，且这里的 x 是唯一的**，因为若存在 $x_1,x_2\in D, x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=y$，则与 f 为单射矛盾；

2）**设函数 $f:D\to f(D)$ 为单射，则其反函数 $f^{-1}:f(D)\to D$ 也是单射，它的反函数就是 $f:D\to f(D)$，即反函数是相互的**，亦即 $x\in D \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y\in f(D)$，从而一个的定义域即另一个的值域，一个的值域即另一个的定义域。还可得恒等关系: $f^{-1}(f(x))=x, x\in D; f(f^{-1}(y))=y, y\in f(D).$

证　由函数 $f:D\to f(D)$ 为单射，故有反函数 $f^{-1}:f(D)\to D$，于是 $\forall y_1,y_2\in f(D), y_1\neq y_2$，则存在唯一的 $x_1,x_2\in D$，使得 $x_1=f^{-1}(y_1), x_2=f^{-1}(y_2)$，$f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$（根据上面的 1））。如果 $x_1=x_2$，则由 $f:D\to f(D)$ 为函数，从而一个自变量值只对应一个函数值，故 $f(x_1)=y_1=f(x_2)=y_2$，矛盾，故反函数 $f^{-1}:f(D)\to D$ 也是单射，从而由 1）知 $\forall x_1\in D, \exists 1 y_1\in f(D), s.t. x_1=f^{-1}(y_1)$，即 D 到 $f(D)$ 存在函数，就是 $f:D\to f(D)$，即反函数是相互的。

3）由定义，**函数是单射才有反函数；反函数也是单射，反函数是相互的**；函数 $y=f(x), x\in D$ 的反函数为 $x=f^{-1}(y), y\in f(D)$，习惯上记为 $y=f^{-1}(x), x\in f(D)$；**单调函数是单射，从而有反函数**，因为当 $f(x), x\in D$ 单调，则 $\forall x_1,x_2\in D, x_1\neq x_2$，$f(x_1)>f(x_2)$ 或 $f(x_1)<f(x_2)$ 即 $f(x_1)\neq f(x_2)$；**但单射的函数不一定是单调函数**，比如，函数 $f(x)=\begin{cases} x, x\in Q \\ -x, x\in Q^C \end{cases}$ 是单射，但不是单调函数; **反函数的单调性和原来函数的单调性一样**。

例　1）函数 $y=x^3, x\in R$ 是单增函数从而是单射，故有反函数 $x=y^{\frac{1}{3}}, y\in R$，一般写为 $y=x^{\frac{1}{3}}, x\in R$，也是单增函数，也是单射；

2）函数 $y=\sin x, x\in[0,\pi]$ 不是单射，因为 $\sin\frac{\pi}{3}=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故没有反函数，但 $y=\sin x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 是单增函数从而是单射，故有反函数。

4）**奇函数的反函数是奇函数**。

证 设 $f:D\to f(D)$ 是奇函数，它的反函数是 $f^{-1}:f(D)\to D$。再设 $\forall x\in D, f(x)=y\in f(D)$，则由 D 关于原点对称，得 $-x\in D, f(-x)=-f(x)=-y\in f(D)$。假设 $f^{-1}:f(D)\to D$ 不是奇函数，则存在 $y\in f(D)$，使 $f^{-1}(-y)\neq -f^{-1}(y)$。因 $f:D\to f(D)$ 是奇函数，故 D 关于原点对称，由 $f^{-1}(y)\in D$ 得 $-f^{-1}(y), f^{-1}(-y)\in D$．因 $f:D\to f(D)$ 有反函数，故由定义它为单射，从而 $f(f^{-1}(-y))\neq f(-f^{-1}(y))$ 得 $-y\neq -f(f^{-1}(y))=-y$ 矛盾。

反三角函数（补充）

定义 函数 $y=\sin x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的反函数称为**反正弦函数**，记为 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$，它是有界、单增的奇函数。

熟悉 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\underset{\arcsin}{\overset{\sin}{\rightleftarrows}}\sin x\in[-1,1]$， $x\in[-1,1]\underset{\sin}{\overset{\arcsin}{\rightleftarrows}}\arcsin x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，

$\arcsin(\sin\ x)=x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$， $\sin(\arcsin x)=x, x\in[-1,1],$

$$\arcsin(\pm 1)=\pm\frac{\pi}{2}, \arcsin 0=0, \arcsin(\pm\frac{1}{2})=\pm\frac{\pi}{6}, \arcsin(\pm\frac{\sqrt{2}}{2})=\pm\frac{\pi}{4}, \arcsin(\pm\frac{\sqrt{3}}{2})=\pm\frac{\pi}{3}$$ 。

定义 函数 $y=\cos x, x\in[0,\pi]$ 的反函数称为**反余弦函数**，记为 $y=\arccos x, x\in[-1,1]$，它是有界、单减的非奇非偶函数。

熟悉 $x\in[0,\pi]\underset{\arccos}{\overset{\cos}{\rightleftarrows}}\cos x\in[-1,1]$， $x\in[-1,1]\underset{\cos}{\overset{\arccos}{\rightleftarrows}}\arccos x\in[0,\pi]$，

$\arccos(\cos x)=x, x\in[0,\pi]$， $\cos(\arccos x)=x, x\in[-1,1],$

$$\arccos 1=0,\ \arccos 0=\frac{\pi}{2},\ \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3},\ \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\ \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6};$$

$$\arccos(-1)=\pi,\ \arccos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3},\ \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\pi}{4},\ \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{5\pi}{6},$$

一般，我们有恒等式 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x, x\in[-1,1]$，

证 $\because x\in[-1,1],\ \therefore 0\le\arccos x\le\pi,\ 0\le\pi-\arccos x\le\pi$，

$\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x,\ x\in[-1,1]$，由反余弦函数的定义，

$\pi-\arccos x=\arccos(-x), x\in[-1,1]$。由 $\arccos(-x)\ne\pm\arccos x$，故反余弦函数是非奇非偶函数。

另外，我们也有恒等式 $\arcsin\ x+\arccos\ x=\frac{\pi}{2}, x\in[-1,1]$（学了拉格朗日中值定理后再证）

定义 函数 $y=\tan x, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的反函数称为**反正切函数**，记为 $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$，它是有界、单增的奇函数。

熟悉 $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\underset{\arctan}{\overset{\tan}{\rightleftarrows}}\tan x\in(-\infty,+\infty)$， $x\in(-\infty,+\infty)\underset{\tan}{\overset{\arctan}{\rightleftarrows}}\arctan x\in(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，

$\arctan(\tan x)=x, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$， $\tan(\arctan x)=x, x\in(-\infty,+\infty),$

$$\arctan(\pm 1)=\pm\frac{\pi}{4},\ \arctan 0=0,\ \arctan(\pm\frac{\sqrt{3}}{3})=\pm\frac{\pi}{6},\ \arctan(\pm\sqrt{3})=\pm\frac{\pi}{3}$$ 。

定义 函数 $y=\cot x, x\in(0,\pi)$ 的反函数称为**反余切函数**，记为 $y=arc\cot x, x\in(-\infty,+\infty)$，它是有界、单减的非奇非偶函数。

熟悉 $x\in(0,\pi)\underset{arc\cot}{\overset{\cot}{\rightleftarrows}}\cot x\in(-\infty,\infty)$， $x\in(-\infty,\infty)\underset{\cot}{\overset{arc\cot}{\rightleftarrows}}arc\cot x\in(0,\pi)$，

$arc\cot(\cot x)=x, x\in(0,\pi)$， $\cot(arc\cot x)=x, x\in(-\infty,+\infty)$,

$arc\cot 1=\dfrac{\pi}{4},\ arc\cot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{3},\ arc\cot\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{6}$；

$arc\cot(-1)=\dfrac{3\pi}{4}, arc\cot(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{2\pi}{3}, arc\cot(-\sqrt{3})=\dfrac{5\pi}{6}$，

一般，我们有恒等式 $arc\cot(-x)=\pi-arc\cot x, x\in(-\infty,+\infty)$，

证 $\because x\in(-\infty,+\infty),\ \therefore 0<arc\cot x<\pi,\ 0<\pi-arc\cot x<\pi$，

$\cot(\pi-arc\cot x)=-\cot(arc\cot x)=-x,\ \ x\in(-\infty,+\infty)$，由反余切函数的定义，

$\pi-arc\cot x=arc\cot(-x), x\in(-\infty,+\infty)$。由 $arc\cot(-x)\neq\pm arc\cot x$，故反余弦函数是非奇非偶函数。

另外，我们也有恒等式 $\arctan x+arc\cot x=\dfrac{\pi}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$（学了拉格朗日中值定理后再证）

复合函数 若函数 $u=g(x), x\in D$ 的值域 R_g 是函数 $y=f(u), u\in D_f$ 定义域 D_f 的子集，则有 $x\in D\xrightarrow{g}u\in R_g\subset D_f\xrightarrow{f}y\in R_f$，从而 y 是 x 的函数，记为 $y=f(g(x)), x\in D$，称为函数 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的复合函数。

一般，若 $u=h(x), x\in D_h$ 的值域是函数 $v=g(u)$ 定义域的子集；$v=g(u)$ 值域是函数 $y=f(v)$ 定义域的子集，则称 $y=f(g(h(x))), x\in D_h$ 是函数 $u=h(x)$、$v=g(u)$ 和 $y=f(v)$ 构成的复合函数。

例 $u=\sin x, y=u^2$ 构成复合函数 $y=\sin^2 x$；$v=x, u=e^v, y=\ln u$ 构成复合函数 $y=\ln e^x$。

注 若 $R_g\not\subset D_f$，则复合函数 $y=f(g(x)), x\in D$ 不存在，如由 $u=\sin x, x\in R, y=\ln u$ 得不到复合函数 $y=\ln\sin x, x\in R$. 需要掌握一个复杂函数的复合结构。

第二节 数列极限

一、数列极限的定义

定义 按一定顺序排列的一列数称为**数列**，一般，数列写为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 或 $\{x_n, n \geq 1\}$，其中，每个 x_i 都是确定的常数，称为**数列的项**，x_n 称为数列的**通项**或**一般项**。如果当脚标 n 无限增大，项 x_n 的值与某确定常数 a 无限接近，则称 $\{x_n, n \geq 1\}$ 的极限为 a，记为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$。

例如，(1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$；(2) $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$；(3) $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n-1}\cdots$，都是数列。

对数列 $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{3}, \cdots, x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \cdots$，

① 在数轴上观察易知，脚标 n 无限增大，项 x_n 的值与 0 无限接近，即 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$。

② 对任意小正数 ε，当 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 时，有 $|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$。

取 $\varepsilon = 0.03$，当 $n > 33$ 时，有 $|x_n - 0| < \varepsilon$；

取 $\varepsilon = 0.003$，当 $n > 333$ 时，有 $|x_n - 0| < \varepsilon$；

；取 $\varepsilon = 0.0003$，当 $n > 3333$ 时，有 $|x_n - 0| < \varepsilon$；

$\vdots$

上面的表述意味着 n 的取值越来越大，x_n 的值与 0 越来越接近，亦即 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$。因此，我们有 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,$ 存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - 0| < \varepsilon$。一般，我们有 $\lim_{n\to\infty} x_n =$ 确定常数 $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$，此即**数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义**。

注 1）在上例中，对 $\forall \varepsilon > 0$, $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - 0| < \varepsilon$；

取 $N = [\frac{1}{\varepsilon} + 1]$，当 $n > N$ 时，有 $n > [\frac{1}{\varepsilon}]$，从而也有 $|x_n - 0| < \varepsilon$；

取 $N = [\frac{1}{\varepsilon} + 2]$，当 $n > N$ 时，有 $n > [\frac{1}{\varepsilon}]$，从而也有 $|x_n - 0| < \varepsilon$；

但取 $N = [\frac{1}{\varepsilon} - 1]$，当 $n > N$ 时，不一定有 $n > [\frac{1}{\varepsilon}]$，从而也不一定有 $|x_n - 0| < \varepsilon$；

这说明在上例中，对任意小正数 ε，可唯一确定 N 的最小值 $[\frac{1}{\varepsilon}]$，比这个最小值大的任意正整数 $\widetilde{N}$ 都可作为 N 的取值，当 $n > \widetilde{N}$ 时，都有 $|x_n - 0| < \varepsilon$。在数列极限定义中，ε, N 的关系一样理解，即对任意小正数 ε，可唯一确定 N 的最小值(为 ε 的某表达式)，比这个最小值大的任意正整数 $\widetilde{N}$ 都可作为 N 的取值，当 $n > \widetilde{N}$ 时，都有 $|x_n - a| < \varepsilon$。

2）用$\varepsilon - N$定义证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，如何寻找$N$？

由$|x_n - a| \le \cdots \le$一个n的某表达式$M(n)$，若令$M(n) < \varepsilon$可得到$n >$一个ε的表达式$g(\varepsilon)$，则取$N = [g(\varepsilon)]$。

注意到在具体问题中，$n > [g(\varepsilon)] \Leftrightarrow n > g(\varepsilon)$，且上述过程可逆，故当$n > N$时，有$|x_n - a| \le \cdots \le M(n) < \varepsilon$。

例 证明$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$。

分析：对$\forall \varepsilon > 0$，由$|x_n - 0| = \left|\dfrac{\sin n}{n} - 0\right| = \dfrac{|\sin n|}{n} \le \dfrac{1}{n} < \varepsilon$得$n > \dfrac{1}{\varepsilon}$，取$N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$即可。

证 对$\forall \varepsilon > 0$，取$N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$，当$n > N$时，有$|x_n - 0| = \left|\dfrac{\sin n}{n} - 0\right| \le \dfrac{1}{n} < \varepsilon$，即证。

（事实上，由于$n > [\dfrac{1}{\varepsilon}] \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$，故当$n > N$时，有$|x_n - 0| = \left|\dfrac{\sin n}{n} - 0\right| \le \dfrac{1}{n} < \varepsilon$）

注 直接由$\dfrac{|\sin n|}{n} < \varepsilon$得不到$n > \varepsilon$的某个表达式形式。

例 证明数列$2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \cdots$极限是 1.

分析：对$\forall \varepsilon > 0$，由$|x_n - 1| = \left|\dfrac{n + (-1)^n}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$得$n > \dfrac{1}{\varepsilon}$，取$N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$即可。

证 对$\forall \varepsilon > 0$，取$N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$，当$n > N$时，有$|x_n - 1| = \left|\dfrac{n + (-1)^n}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$，即证。

例 设$|q| < 1$，证明等比数列$1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$的极限是 0.

分析：对$\forall \varepsilon > 0$，由$|x_n - 0| = |q^{n-1}| = |q|^{n-1} < \varepsilon$得$(n-1)\ln|q| < \ln \varepsilon$，得$n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} + 1$，取$N = [\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} + 1]$即可。

证 对$\forall \varepsilon > 0$，取$N = [\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} + 1]$，当$n > N$时，有$|x_n - 0| = |q^{n-1}| < \varepsilon$，即证。

（事实上，由于$n > [\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} + 1] \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} + 1$，故当$n > N$时，有$|x_n - 0| = |q^{n-1}| < \varepsilon$）

例 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1, a$ 为常数。

分析：对 $\forall\varepsilon>0$，由

$\left|x_n-1\right|=\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|=\left|\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}\right|\le\dfrac{a^2}{n\cdot 1}<\varepsilon$ 得 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$，取

$N=[\dfrac{a^2}{\varepsilon}]$ 即可。 证 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\dfrac{a^2}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|x_n-1\right|<\varepsilon$，即证。

注 直接由 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|<\varepsilon$ 或 $\left|\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}\right|<\varepsilon$ 不易得到 $n>\varepsilon$ 的某个表达式形式。

例 证明 对常数列 $x_n=a,\ \ n\ge 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

分析：对 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\left|x_n-a\right|=\left|a-a\right|=0<\varepsilon$，故可取 N 为任意正整数。

证 对 $\forall\varepsilon>0$，取 N 为任意正整数，当 $n>N$ 时，有 $\left|x_n-a\right|<\varepsilon$，即证。

注 由此题可知，常数的极限等于本身，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a=a$。

二、收敛数列的性质

定理 1（极限的唯一性） 若数列 $x_n, n\ge 1$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 为某个确定常数（也**称** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ **存在**），则极限唯一。

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，则 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N_1,N_2，当 $n>N_1$ 时，有 $\left|x_n-a\right|<\varepsilon$，当 $n>N_2$ 时，有 $\left|x_n-b\right|<\varepsilon$。取 $N=\max(N_1,N_2)$，当 $n>N$ 时，有

$\left|a-b\right|=\left|-x_n+a+x_n-b\right|\le\left|x_n-a\right|+\left|x_n-b\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$，由 ε 的任意性，故 $a=b$。

注 该定理说明收敛数列的极限是一个确定常数。

例 证明数列 $x_n=(-1)^n, n=1,2,\cdots$ 发散，即不收敛，亦即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在。

证明 因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$ 或 1，不唯一，故该数列发散。

定义 若数列 $\{x_n,n\ge 1\}$ 的所有项都满足：$\left|x_n\right|\le$ 某正常数 M，或某实常数 $K_1\le x_n\le$ 某实常数 K_2，则称**数列** $\{x_n\}$ **有界**，否则**称为无界**。

例如，数列 $\{x_n=\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n+1}, n\ge 1\}$、$\{\dfrac{\sin n}{n}, n\ge 1\}$、$x_n=(-1)^{n+1}, n=1,2,\cdots$ 都有界，因为，对数列所有的项 x_n，$\left|x_n=\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n+1}\right|=\dfrac{n}{n+1}\le M=1$、$\left|\dfrac{\sin n}{n}\right|\le M=2$、$\left|x_n=(-1)^{n+1}\right|\le M=1.5$；

而数列 $x_n=n, n\ge 1$ 无界，因为对数列所有的项 x_n，$\left|x_n=n\right|\le$ 某正常数 M 不成立。

定理 2（收敛数列的有界性）若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界。

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则对 $\varepsilon = 1$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon = 1$，所以，当 $n > N$ 时，

$|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$，取正常数 $M = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1+|a|)$，则数列所有的项满足：$|x_n| \le M, n = 1,2,\cdots$ 即数列 $\{x_n\}$ 有界。（事实上，当 $n > N$ 时，有 $|x_n| < 1 + |a| \le M$；当 $n = 1,2,\cdots,N$ 中的某一个时，$|x_n| = |x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|$ 中的某一个 $\le \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|) \le M$）

定理 3（收敛数列的保号性） 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$，则 $x_n > 0,\ \ n >$ 某正整数 N.

证 对 $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0,$ 存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon = \dfrac{a}{2}$，所以当 $n > N$ 时，有

$0 < a - \dfrac{a}{2} < x_n < a + \dfrac{a}{2}$。

注 定理中 > 0 都改成 < 0 结论同样成立。

推论 若数列 $\{x_n\}$ 从某项开始后面无穷项的值均大于 0，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge 0$。

证 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < 0$，则由定理 3，数列 $\{x_n\}$ 从某项开始后面无穷项的值均小于 0，矛盾！

子列

定义 从一个数列中选出无穷多项，并保留它们在原数列中的先后顺序，这样得到的一个数列称为原数列的子列。比如，对数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 来说，数列（1）$x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{2k-1}, \cdots$；（2）$x_2, x_4, x_6, \cdots, x_{2k}, \cdots$；（3）$x_4, x_8, x_{12}, \cdots, x_{4k}, \cdots$；（4）$x_3, x_6, x_9, \cdots, x_{3k}, \cdots$；等都是子列。

注 数列 $\{x_n\}$ 的任一子列可设为 $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$（这里 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$），它的第 k 项是 x_{n_k}（即原数列的第 n_k 项），有 $n_k \ge k, k = 1,2,\cdots$， 比如，数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 的子列 $x_3, x_6, x_9, \cdots, x_{3k}, \cdots$ 中，$n_1 = 3, n_2 = 6, n_3 = 9, \cdots, n_k = 3k$，故 $n_k = 3k > k$；再比如，数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 的子列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k, \cdots$ 中，$n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, \cdots, n_k = k$，故 $n_k = k$。

定理 4 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛，且极限也是 a。

分析 即证 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$，亦即证对 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 K，当 $k > K$ 时，有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$。

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$，有 $|x_n - a| < \varepsilon$。取 $K = N$，当 $k > K$ 时，有 $n_k > n_K = n_N \ge N$，从而 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$。

推论（1）若数列有发散子列，则该数列发散；如两数列 $x_n=\cos\dfrac{n\pi}{2}, x_n=(-1)^n n,$ 均发散，因为它们有发散子列 $x_{2n}=\cos n\pi=(-1)^n$，$x_{2n}=2n$（极限都不是一个确定常数）。

（2） 若数列有两个收敛子列，但极限值不等，则此数列发散。例如数列 $x_n=(-1)^n$ 的子列 $x_{2n}=1\to 1, x_{2n+1}=-1\to -1$，$n\to\infty$，故数列 $x_n=(-1)^n$ 发散。

注 1) 若数列有两个收敛子列且极限值相等，则此数列不一定收敛，如数列 $x_n=(-1)^n$ 的子列 $x_{2n}=1\to 1,\ \ x_{4n}=1\to 1$，$n\to\infty$，但数列 $x_n=(-1)^n$ 发散。但可以证明：对数列 $\{x_n, n\ge 1\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ \ a\in R$；

2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$

3) 当 $a\neq 0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$（由 $\big||x_n|-|a|\big|\le|x_n-a|$ 可证），但反之不成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$ 推不出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$（反例为 $x_n=(-1)^n, a=1$）

第三节　函数极限

一、函数极限的定义

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

例 对函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$ 即 $f(x)=2x+1, x\neq 1$，

①由函数图形易知，自变量 x 无限接近 1，函数值 $f(x)$ 与 3 无限接近，即 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$。

②对任意小正数 ε，当 $0<|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 时，有 $0<|2x+1-3|<\varepsilon$，有 $|f(x)-3|<\varepsilon$。

取 $\varepsilon=0.01$，当 $0<|x-1|<0.005$，有 $|f(x)-3|<\varepsilon$；

取 $\varepsilon=0.001$，当 $0<|x-1|<0.0005$，有 $|f(x)-3|<\varepsilon$；

取 $\varepsilon=0.0001$，当 $0<|x-1|<0.00005$，有 $|f(x)-3|<\varepsilon$；

⋮

上面的表述意味着自变量 x 与 1 无限接近，$f(x)$ 的值与 3 无限接近，亦即 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$。因此，我们有 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,$ 存在正数 δ，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $|f(x)-3|<\varepsilon$。一般，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$ 确定常数 $A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，此即**自变量趋于有限值时函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义。**

注 1）在上例中，对 $\forall\varepsilon>0, \delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $|f(x)-3|<\varepsilon$；

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $0<|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而也有 $|f(x)-3|<\varepsilon$；

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $0<|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而也有 $|f(x)-3|<\varepsilon$；

但取 $\delta=0.51\varepsilon$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，不一定有 $0<|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而也不一定有 $|f(x)-3|<\varepsilon$。

这说明在上例中，对任意小正数 ε，可唯一确定 δ 的最大值 $\dfrac{\varepsilon}{2}$，比这个最大值小的任意正数 $\widetilde{\delta}$ 都可作为 δ 的取值，当 $0<|x-1|<\widetilde{\delta}$ 时，都有 $|f(x)-3|<\varepsilon$。在自变量趋于有限值 x_0 时函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 定义中，ε,δ 的关系一样理解，即对任意小正数 ε，可唯一确定 δ 的最大值(为 ε 的某表达式)，比这个最大值小的任意正数 $\widetilde{\delta}$ 都可作为 δ 的取值，当 $0<|x-x_0|<\widetilde{\delta}$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

3）用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，如何寻找 δ？

由 $|f(x)-A|\le\cdots\le$ 一个 $|x-x_0|$ 的某表达式 $M(|x-x_0|)$，若令 $M(|x-x_0|)<\varepsilon$ 可得到 $|x-x_0|<$ 一个 ε 的表达式 $g(\varepsilon)$，则取 $\delta=g(\varepsilon)$。

例 证明 $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$.

分析 对 $\forall\varepsilon>0$，由 $|f(x)-A|=|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon$，可取 $\delta=\varepsilon$。

证 对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $|x+1-2|=|x-1|<\delta=\varepsilon$，即证。

例 证明 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

分析 对 $\forall\varepsilon>0$，由 $|f(x)-A|=\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|=2\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，得 $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$。

证 对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，当 $0<\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|=2\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，即证。

注 由例(1)、(2)知，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在时，$f(x)$ 在点 x_0 可能有定义，也可能无定义，又由极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1-x}$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{sgn}x$（见下页例题）均不存在知，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在时，$f(x)$ 在点 x_0 可能有定义，也可能无定义，综上，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在与否与 $f(x)$ 在点 x_0 有无定义没有关系。

例 证明 对常数函数 $f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。（这里 x_0 为某实数）

分析：对 $\forall\varepsilon>0$，由于 $|f(x)-A|=|A-A|=0<\varepsilon$，故可取 δ 为任意正数。

证 对 $\forall\varepsilon>0$，取 δ 为任意正数，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|=0<\varepsilon$，即证。

注 由此题可知，常数的极限等于本身，即 $\lim\limits_{x\to x_0}A=A$。

例 证明 当 $x_0>0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

分析 因 $x_0>0, x\to x_0$，故可考虑自变量 x 的范围为 $|x-x_0|<x_0$（或 $|x-x_0|<\dfrac{x_0}{2},\dfrac{x_0}{3},\dfrac{x_0}{4},\cdots$ 均可）

对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\le\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon$，得 $|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$，可取 $\delta=\min(x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon)$。

证 对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta=\min(x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon)$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon$，即证。

函数的单侧极限

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$确定常数$A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，存在正数$\delta$，当$0<|x-x_0|<\delta$即$x_0-\delta<x<x_0$且$x_0<x<x_0+\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，这里，$x\to x_0$表示$x<x_0, x\to x_0$（记为$x\to x_0^-$）且$x>x_0, x\to x_0$（记为$x\to x_0^+$）。

定义 称$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$为函数$f(x)$当$x<x_0, x\to x_0$时的**左极限**，称$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$为函数$f(x)$当$x>x_0, x\to x_0$时的**右极限**，两者统称为**单侧极限**，称$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**双侧极限**。

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=$确定常数$A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，存在正数$\delta$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=$确定常数$A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，存在正数$\delta$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

注 由定义可见，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$**确定常数**$A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=$**确定常数**$A$且$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=$**确定常数**$A$。

例 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$，则$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -1=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1$, 从而$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在。

2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 $x\to\infty$表示x可取充分大的正值或充分小的负值，亦即$|x|$可取充分大的正值；$x\to-\infty$表示x可取充分小的负值；$x\to+\infty$表示x可取充分大的正值。易见，$x\to\infty \Leftrightarrow x\to-\infty$或$x\to+\infty$。

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$表示$|x|$充分大，$f(x)$的值与$A$无限接近，故其对应的$\varepsilon$定义为

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，存在某正数$X$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$（$\varepsilon-X$定义）；

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$表示$x$充分小，$f(x)$的值与$A$无限接近，故其对应的$\varepsilon$定义为

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，存在某正数$X$，当$x<-X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$（$\varepsilon-X$定义）；

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$表示$x$充分大，$f(x)$的值与$A$无限接近，故其对应的$\varepsilon$定义为

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，存在某正数$X$，当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$（$\varepsilon-X$定义）；

注 1）因$|x|>X$即$x>X, x<-X$，故$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$；

例 对函数$y=\arctan x$，因为$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, 故$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在。

2）用$\varepsilon - X$定义证明$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，如何找$X$（为$\varepsilon$表达式）？

由$\left|f(x)-A\right|\le\cdots\le$一个$|x|$的某表达式$M(|x|)$，若令$M(|x|)<\varepsilon$可得到$|x|>$一个$\varepsilon$的表达式$g(\varepsilon)$，则取$X=g(\varepsilon)$。

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$。

分析：即证$\forall\varepsilon>0$，存在$X>0$，当$|x|>X$时，有$\left|\dfrac{1+x^3}{2x^2}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$。

对$\forall\varepsilon>0$，由$\left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$，得$|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，可取$X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$。

证 对$\forall\varepsilon>0$，存在$X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，当$|x|>X$时，有$\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，即证。

二、函数极限的性质

定理 1（唯一性） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则该极限值唯一。

定义 若$|f(x)|\le$某正数$M, x\in$数集D，或某实数$K_1\le f(x)\le$某实数$K_2, x\in$数集D，则称函数$f(x)$在数集D有界。

定理 2（局部有界性） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则在$x_0$的某局部范围$0<|x-x_0|<\delta$内（$\delta$为某正数），$|f(x)|\le$某正数$M$。

定理 3（局部保号性） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则在$x_0$的某局部范围$0<|x-x_0|<\delta$内（$\delta$为某正数），$f(x)>0$。这里$>0$都改成$<0$结论同样成立。

推论 若函数$f(x)$在x_0的某局部范围$0<|x-x_0|<\delta$内大于 0，δ为某正数，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge 0$。

证 假设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$，则由定理 3，函数$f(x)$在$x_0$的某局部范围$0<|x-x_0|<\delta$内均小于 0，矛盾！

注 将$x\to x_0$同时换成x的其他趋向，定理 1-3 仍成立，只需修改结论成立的自变量范围，例如，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A>0$，则在局部范围$x>X$（$X$为某正数）内，$f(x)>0$。

第四节 无穷小与无穷大

定义 以 0 为极限的函数或数列称为无穷小；规定常数 0 为无穷小。

例 1 $x\to 0$ 时，$\sin x, x^3+2x, \cos x-1$ 均为无穷小； $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x},\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 均为无穷小；$x\to 1$ 时，$x-1$ 为无穷小；$n\to\infty$ 时，$\frac{1}{\sqrt{n}}$ 为无穷小。

注 无穷小必须指明自变量的趋向。

无穷小与函数极限的关系

定理 1 在自变量的同种趋向下，函数 $f(x)$ 的极限为 $A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,\alpha$ 是无穷小。

证 考虑自变量趋向为 $x\to x_0$，其他自变量的趋向类似证明。

$\Rightarrow$ 由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，故 $\forall\varepsilon>0$，存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$|f(x)-A|=|(f(x)-A)-0|<\varepsilon$，即得 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-A)=0$，令 $f(x)-A=\alpha$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$；

$\Leftarrow$ 由 $f(x)=A+\alpha$，$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，得 $\forall\varepsilon>0$，存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\alpha-0|=|f(x)-A|<\varepsilon$，即得 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

定义 以 $-\infty,+\infty,\infty$ 为极限的函数或数列称为**无穷大**。

例 2 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{\sin x},\frac{1}{x^3+2x},\frac{1}{\cos x-1}$ 均为无穷大； $x\to\infty$ 时，$x,\sqrt[3]{x}$ 均为无穷大；$x\to 1$ 时，$\frac{1}{x-1}$ 为无穷大；$n\to\infty$ 时，$\sqrt{n}$ 为无穷大。

由例 1、2 知, 在自变量的同种趋向下, 无穷小的倒数为无穷大, 无穷大的倒数为无穷小. 理论上可以证明

定理 2 在自变量 x 的同种趋向下，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；若 $f(x)$ 为无穷小，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大。如 $x\to+\infty$ 时，e^x 为无穷大, e^{-x} 为无穷小；$x\to-\infty$ 时，e^x 为无穷小, e^{-x} 为无穷大。

例 证明函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，不是 $x\to+\infty$ 时的无穷大。

证 1）因为函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的函数值可趋于 $+\infty$，比如，$x=2n\pi$ 时，$y=2n\pi\cos 2n\pi=2n\pi\to+\infty, n\to\infty$，所以 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无上界，从而无界；

2）因为当 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$x\to+\infty$ 即 $n\to\infty$，$y=(2n\pi+\frac{\pi}{2})\cos(2n\pi+\frac{\pi}{2})=0\to 0$, 所以 $y=x\cos x$ 不是 $x\to+\infty$ 时的无穷大。

第五节 极限运算法则

定理 1 在自变量的同种趋向下，有限个无穷小的和是无穷小。

证 考虑自变量趋向为 $x \to x_0$，其他趋向类似证明。并考虑两个无穷小和的情形。

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha = 0, \lim\limits_{x\to x_0}\beta = 0$，则 $\forall\varepsilon > 0$，存在正数 δ_1, δ_2，当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，有 $|\alpha - 0| < \varepsilon$；当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，有 $|\beta - 0| < \varepsilon$。取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|\alpha + \beta - 0| \le |\alpha| + |\beta| < 2\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha + \beta) = 0$。再由数学归纳法证明有限个情形。

定理 2 在自变量的同种趋向下，有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

证 考虑自变量趋向为 $x \to x_0$，其他趋向类似证明。

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha = 0$, $u(x)$ 在 x_0 的局部范围 $0 < |x - x_0| < \delta_1$(δ_1 为某正数) 内有界，则 $|u(x)| \le$ 某正数 $M, 0 < |x - x_0| < \delta_1$；又 $\forall\varepsilon > 0$，存在正数 δ_2，当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，有 $|\alpha - 0| < \varepsilon$；取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|\alpha u(x) - 0| \le |\alpha||u(x)| < M\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha u(x) = 0$。

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小。（因为常数可看成有界函数）

推论 2 有限个无穷小的乘积是无穷小。（因为无穷小是有界函数，故两个无穷小乘积是无穷小，由数学归纳法即得）

例 $\lim\limits_{x\to 0}(x + \sin x) = 0$； $\lim\limits_{x\to 1}2(x^3 - 1) = 0$；$\lim\limits_{x\to 0}5x^2\tan x = 0$；

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x = 0$，这是因为 $\sin x$ 是有界函数（$|\sin x| \le M = 1$），$x \to \infty$时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小。

定理 3 如果 $\lim f(x) =$ 确定常数 A，$\lim g(x) =$ 确定常数 B，则

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)；\ \lim f(x)\cdot g(x) = \lim f(x)\cdot\lim g(x)；$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}，$$（分母不为 0）。

推论 1 如果 $\lim f(x)$ 存在，则 $\lim cf(x) = c\lim f(x)$，这里 c 为确定常数。（定理 3 中两个函数相乘成立情形下的特殊情形）

推论 2 如果 $\lim f(x)$ 存在，则 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$，$n$ 是正整数。（定理 3 中两个函数相乘成立情形下用数学归纳法易得）

推论 3 如果 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim g(x)=0$，则 $\lim f(x)=0$。

证 $0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。

例 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)-1)=0$，得 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$。

例 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to 1}2x-\lim\limits_{x\to 1}1=2\lim\limits_{x\to 1}x-1=2\cdot 1-1=1$。

一般， $\lim\limits_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_{n-1}x+a_n)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+a_{n-1}x_0+a_n$。

例 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+3}=\frac{8-1}{4-5\cdot 2+3}=\frac{7}{-3}$。

例 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$。

一般，设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 均为 x 的多项式，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, & \text{当}Q(x_0)\neq 0\text{时，}\\ \text{分子分母约去 } x-x_0\text{后再求极限}, & \text{当}P(x_0)=Q(x_0)=0\text{时}\end{cases}。$$

注意到 $x\to\infty$ 时，x^n（n 是正整数）是无穷大，$\frac{1}{x^n},\frac{1}{x^{n-1}},\frac{1}{x^{n-2}},\cdots,\frac{1}{x}$ 均是无穷小。得到

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+4\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+5\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}$。

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$。

例 对 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty$。

一般，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}$，即分子分母中 x 的最高次系数比。

其他一些常用的函数求极限处理方式:

1.通分，如$\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to1}(\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{1-x^3}=-\lim\limits_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1$；

2.无穷大的倒数是无穷小，无穷小的倒数是无穷大。如

例 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}.$

注 （1）因为$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，故$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$不存在。

$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，故$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$不存在。

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，故$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在。

（3）$\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-}\tan x=+\infty,\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty$，故$\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})}\tan x=\infty$；同理

$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\tan x=+\infty,\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty$，故$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})}\tan x=\infty$；

第六节 极限存在准则　两个重要极限

夹逼准则

准则 1 若数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$满足：

(1) $z_n \le x_n \le y_n, n >$某正整数n_0；(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，

则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

证 由$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，故$\forall \varepsilon > 0$，存在正整数$N_1, N_2$，当$n > N_1$时，有$a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon$；当 $n > N_2$ 时，有 $a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon$。取 $N = \max(N_1, N_2, n_0)$，当 $n > N$ 时，有 $a-\varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a+\varepsilon$，即得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

例 求$\lim\limits_{n\to\infty} n(\dfrac{1}{n^2+\pi} + \dfrac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n\pi})$.

解 因为$\dfrac{n^2}{n^2+n\pi} = n(\dfrac{1}{n^2+n\pi} + \dfrac{1}{n^2+n\pi} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n\pi}) \le n(\dfrac{1}{n^2+\pi} + \dfrac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n\pi})$

$\le n(\dfrac{1}{n^2+\pi} + \dfrac{1}{n^2+\pi} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+\pi}) = \dfrac{n^2}{n^2+\pi}$，$n \ge 1$，所以，所求极限等于 1.

类似准则 1 的证明方法证明可得

准则 1' 若函数$f(x)$、$g(x)$、$h(x)$满足：

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x),\ \ 0 < |x - x_0| <$某正整数$\delta$；(2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，

则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$。

例 证明重要极限$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$。

证 在第一象限的四分之一单位圆中，设$\angle AOD = x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$，则$\overset{\frown}{AB} = x$（弧度），$AD = \tan x$。因为$S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2}\sin x < S_{扇形AOB} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\cdot 1 = \dfrac{x}{2} < S_{\Delta AOD} = \dfrac{1}{2}\tan x$，故$\sin x < x < \tan x, x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$或$1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}, x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$。用$-x$代替$x$该不等式不变，说明该不等式对$x \in (-\dfrac{\pi}{2}, 0)$也成立，故有$1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}, x \in (-\dfrac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \dfrac{\pi}{2})$，由准则 1'得证。

例 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$。

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\overset{t=\arcsin x}{=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$。

注 在应用中，更多是运用 $\lim\limits_{x\to}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$（其中 $x\to,\varphi(x)\to 0$，这里 $x\to$ 代表某种趋向）或

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\varphi(n)}{\varphi(n)}=1$，其中当 $n\to\infty$ 时，$\varphi(n)\to 0$。

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2(\dfrac{x}{2})^2}=\dfrac{1}{2}(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}})^2=\dfrac{1}{2}$，这里 $x\to 0,\varphi(x)=\dfrac{x}{2}\to 0$。

例 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}=x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}=x$，这里 $n\to\infty,\varphi(n)=\dfrac{x}{2^n}\to 0$。

例 用准则 1’ 求证 $\lim\limits_{x\to 0^+}x[\dfrac{1}{x}]=1$。

因为 $\dfrac{1}{x}-1\le[\dfrac{1}{x}]\le\dfrac{1}{x}$，故当 $x>0$ 时，$1-x\le x[\dfrac{1}{x}]\le 1$。

注 对任意实数 x，有 $x-1\le[x]\le x$。

准则 2（单调有界原理） 单调有界数列必有极限，即单增或单减的有界数列必有极限。

定义 若数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le x_{n+1}\le\cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 为**单增数列**；若数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n\ge x_{n+1}\ge\cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 为**单减数列**；单增和单减数列统称**单调数列**。

若数列 $\{x_n\}$ 满足：$|x_n|\le$ 某正数 $M,n=1,2,\cdots$ 或某个实数 $K_1\le x_n\le$ 某个实数 $K_2,n=1,2,\cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 为**有界数列**。

准则 2 的解释如下： 设数列 $\{x_n\}$ 单增，则点 x_n 沿数轴向右移向无穷远，如数列 $x_1=1,x_2=2,\cdots,x_n=n,\cdots$，或点 x_n 沿数轴向右移动无限接近定点 a，如数列 $x_1=\dfrac{1}{2},x_2=\dfrac{2}{3},\cdots,x_n=\dfrac{n}{n+1},\cdots(y=\dfrac{x}{1+x}\uparrow,x>0)$

当数列 $\{x_n\}$ 有界时，即数列所有项的值 x_n 都落在某个确定范围 $[K_1,K_2]$（这里 K_1,K_2 为确定常数），则数列只能出现第二种情况，亦即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

例 用准则 2 证明数列 $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}, x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots,x_n=\sqrt{2+x_{n-1}},\cdots$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$。

解 因为 $x_1<2, x_2<2,$ 假设 $x_n<2, n=1,2,\cdots;$ 则 $0<x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2,$ 故 $\{x_n\}$ 有界；

因为 $x_1<x_2,$ 假设 $x_n<x_{n+1}, n=1,2,\cdots;$ 则 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+x_{n+1}}=x_{n+2},$ 故 $\{x_n\}$ 单增，

所以由准则 2 知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，在 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ 两边让 $n\to\infty$ 得，$A=\sqrt{2+A}$，

解得 $A=2$ 或-1(舍)，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$。

第七节 无穷小的比较

定义 在自变量的同种趋向下，设α,β均为无穷小，

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是$\alpha$的**高阶无穷小**，记为$\beta=o(\alpha)$；

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是$\alpha$的**低阶无穷小**；

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=$非零常数 c，则称β是α的**同阶无穷小**，特别地，若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$是$\alpha$的**等阶无穷小**，记为$\beta\sim\alpha$。

例 因为$x\to 0$时，$\frac{2x^2}{x}\to 0$，故当$x\to 0$时，$2x^2=o(x)$。

例 因为$n\to\infty$时，$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\to 0$，故当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n^2}=o(\frac{1}{n})$。

注 当$x\to 0$时，$o(x^n)-o(x^n)=o(x^n),\ \ o(ax^n)=o(x^n),a\neq 0$。 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)-o(x^n)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}-\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0-0=0；$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(ax^n)}{x^n}=a\lim_{x\to 0}\frac{o(ax^n)}{ax^n}=a\cdot 0=0。$$

例 当$x\to 0$时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$，$n$为正整数。

这是因为$x\to 0$时，$\sqrt[n]{1+x}-1\to 0,\frac{1}{n}x\to 0$；

此外，由于$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$，得

$x=(\sqrt[n]{1+x})^n-1=(\sqrt[n]{1+x}-1)[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1]$，于是

当$x\to 0$时，得到$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\frac{x}{\frac{1}{n}x[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1]}$

$$=\frac{n}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1}\to 1。$$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$（第一个等号运用了高中学的洛必达法则，这里 $(\ln(1+x))'=\dfrac{1}{1+x}\cdot 1$）

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{t=e^x-1}{=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$。

小结：由前一节例知，

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，另外，由本节例知，当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$n$ 为正整数；$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$。

更一般地，当 $\varphi(x)\to 0$ 时，有 $\sin\varphi(x)\sim\varphi(x),\tan\varphi(x)\sim\varphi(x),\arcsin\varphi(x)\sim\varphi(x),$ $\arctan\varphi(x)\sim\varphi(x),1-\cos\varphi(x)\sim\dfrac{1}{2}\varphi(x)^2,\sqrt[n]{1+\varphi(x)}-1\sim\dfrac{1}{n}\varphi(x)$，$\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$，$e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$。

关于等价无穷小的两个定理

定理 1 在自变量的同种趋向下，$\beta\sim\alpha\Leftrightarrow\beta=\alpha+o(\alpha)$。

证 $\Rightarrow$ 由 $\beta\sim\alpha$，得 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，于是 $\lim\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha}-1=0$，故 $\beta=\alpha+o(\alpha)$；

$\Leftarrow$ 由 $\beta=\alpha+o(\alpha)$，得 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=1+\lim\dfrac{o(\alpha)}{\alpha}=1$，故 $\beta\sim\alpha$。

注 由此定理知，两个无穷小等价的充要条件是其中一个等于另一个与其高阶无穷小的和。当 $x\to 0$ 时，$\sin x=x+o(x),\tan x=x+o(x),\arcsin x=x+o(x),1-\cos x=\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$。

定理 2 在自变量的同种趋向下，设 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 均为无穷小，且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，则

（1）$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha'}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$；

（2）$\lim\alpha\beta f(x)=\lim\alpha'\beta f(x)=\lim\alpha\beta' f(x)=\lim\alpha'\beta' f(x)$。即，商求极限等于分子或分母用等价无穷小替换求极限；乘积求极限等于一个或几个因子用等价无穷小替换求极限。

证 由 $\lim\dfrac{\beta}{\beta'}=1,\lim\dfrac{\alpha}{\alpha'}=1,$ 于是 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha}$；

$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha'}$； $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha'}\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$；

$\lim \alpha\beta f(x)=\lim \frac{\alpha}{\alpha'}\alpha'\beta f(x)=\lim \alpha'\beta f(x)$；$\lim \alpha\beta f(x)=\lim \alpha\frac{\beta}{\beta'}\beta' f(x)=\lim \alpha\beta' f(x)$；

$\lim \alpha\beta f(x)=\lim \alpha'\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{\beta}{\beta'}\beta' f(x)=\lim \alpha'\beta' f(x)$。

例 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$。这里用到 $x\to 0, 3x\to 0, \tan 3x\sim 3x$。

例 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}$。这里用到 $x\to 0, \sin x\sim x$。

例 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$。这里用到 $x\to 0, 2x\to 0, \tan 2x\sim 2x$ 以及 $x\to 0, 5x\to 0, \sin 5x\sim 5x$。

例 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}$。这里用到 $x\to 0, x^2\to 0, \sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\frac{1}{3}x^2$ 以及 $x\to 0, \cos x-1\sim -\frac{1}{2}x^2$。

注 在自变量的同种趋向下，1）$\beta\sim\alpha \Leftrightarrow \lim\frac{\beta}{\alpha}=1 \Leftrightarrow \lim\frac{-\beta}{-\alpha}=1 \Leftrightarrow -\beta\sim-\alpha$；

2）$\beta\sim\alpha \Leftrightarrow \lim\frac{\beta}{\alpha}=1 \Rightarrow \lim\frac{\beta^m}{\alpha^m}=1 \Leftrightarrow \beta^m\sim\alpha^m$（$m$ 为正整数）；

3）$\beta\sim\alpha \Rightarrow \frac{1}{\ln\beta}\sim\frac{1}{\ln\alpha}$。

证 由 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$ 及 $0=\lim\frac{\ln\alpha-\frac{\beta}{\alpha}\ln\beta}{\ln\beta}=\lim(\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}-\frac{\beta}{\alpha})$ 知，

$\lim\frac{1/\ln\beta}{1/\ln\alpha}=\lim\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}=\lim(\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}-\frac{\beta}{\alpha})+\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，得证。

例 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{\cos x}=\frac{1}{2}$。

这里用到 $x\to 0, \sin x\sim x, \sin^2 x\sim x^2$ 以及 $x\to 0, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$。

例 设m,n为正整数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0, n>m\\ 1, n=m\\ \infty, n<m\end{cases}$。这里用到

$x\to 0, x^n\to 0, \sin x^n \sim x^n$ 以及 $x\to 0, \sin x\sim x, \sin^m x\sim x^m$。

第八节 函数的连续性与间断点

一、函数的连续性

定义 设函数$f(x)$在点x_0的某领域内有定义，称$\Delta x = x - x_0$为自变量增量，称$\Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0)$为函数值增量，如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称**函数$f(x)$在点$x_0$连续**。

注 函数$f(x)$在点x_0连续$\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,$ 存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

定义 设函数$f(x)$在点x_0的某左领域内有定义，如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称**函数$f(x)$在点$x_0$左连续**。设函数$f(x)$在点$x_0$的某右领域内有定义，如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称**函数$f(x)$在点$x_0$右连续**。一般，讨论分段函数在分段点的连续性时运用单侧连续定义（见下例）。

注 由单、双侧极限的关系知$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0), \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，故根据定义知函数$f(x)$在点$x_0$连续$\Leftrightarrow$函数$f(x)$在点$x_0$既左连续又右连续。

定义 若函数$f(x)$在开区间(a,b)内每点x_0都连续，则称函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续；若函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$（即$f(x)$在左端点$a$右连续），$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$（即$f(x)$在右端点$b$左连续），则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

注 函数$f(x)$在点x_0连续即自变量在x_0发生微小变化，函数值在$f(x_0)$发生微小变化，所以函数图形在点$(x_0, f(x_0))$不能断开，因此区间上的连续函数其图形是不间断的曲线。

例 讨论 $f(x)=|x|=\begin{cases} x, x\ge 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否连续？

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$，即该函数在 $x=0$ 处是连续的。

例 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+3, x\ge 0 \\ a-x, x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处是连续，求常数 a 的值？

解 当函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+3, x\ge 0 \\ a-x, x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续时，有

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=3$，又 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a-x)=a$，故 $a=3$。

例 证明 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续函数。

证 即证 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$。

$\forall\varepsilon>0, |\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|$，让 $|x-x_0|<\varepsilon$，知可取 $\delta=\varepsilon$。于是 $\forall\varepsilon>0,$ 存在 $\delta=\varepsilon>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$，结论得证。

注 同理可证 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续函数

（$\forall\varepsilon>0, |\cos x-\cos x_0|=\left|-2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|<\varepsilon$，取 $\delta=\varepsilon$）

二、函数的间断点

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义，如果 $f(x)$ 满足下列三种情形之一：

（1）在点 x_0 无定义；（2）在点 x_0 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；（3）在点 x_0 有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ne f(x_0)$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的<u>不连续点</u>或<u>间断点</u>。

例 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处无定义，故点 $x=\frac{\pi}{2}$ 为函数 $\tan x$ 的间断点，又 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，称点 $x=\frac{\pi}{2}$ 为函数 $\tan x$ 的无穷间断点。

定义 若函数 $f(x)$ 在间断点 x_0 的极限为无穷，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的<u>无穷间断点</u>。

例 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，故点 $x=0$ 为函数 $\sin\frac{1}{x}$ 的间断点，又 $x\to 0$ 时，函数值 $\sin\frac{1}{x}$ 在-1 和 1 之间变动无限多次，哪个值都可能取到，称点 $x=0$ 为函数 $\sin\frac{1}{x}$ 的**振荡间断点**。

定义 若函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时呈振荡无极限状态，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的**振荡间断点**。

例 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义，故点 $x=1$ 为该函数的间断点，又 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，若补充函数值 $f(1)=2$，则函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, x\neq 1\\ 2, \quad x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 连续。称点 $x=1$ 为该函数的可去间断点。

例 $y=\begin{cases}x, x\neq 1\\ \frac{1}{2}, x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处有定义，函数值 $f(1)=\frac{1}{2}$，极限值 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}x=1\neq f(1)$，故点 $x=1$ 为该函数的间断点，若改变函数值 $f(1)=1$，则函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\neq 1\\ 1, x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 连续。称点 $x=1$ 为该函数的可去间断点。

定义 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $f(x)$ 在点 x_0 无定义或虽然有定义但 $f(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的**可去间断点**。若补充或改变函数 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值，则可得到一个在点 x_0 连续的函数，这就是称这类间断点为可去间断点的原因。

例 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处有定义，由于求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 时，无法 $f(x)$ 确定的表达式，故考虑 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-1=-1\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，从而点 $x=0$ 为该函数的间断点。称点 $x=0$ 为该函数的跳跃间断点。

定义 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，但不相等，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**。此时，不论如何改变函数在点 x_0 的函数值，均不能得到一个在点 x_0 连续的函数。

注 分段函数的分段点有可能是跳跃间断点，如上例。

通常把左、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在的间断点 x_0 称为 $f(x)$ 的**第一类间断点**，其中左右极限相等的间断点 x_0 称为可去间断点，左右极限不相等的间断点 x_0 称为跳跃间断点；**不是第一类间断点的任何间断点称为第二类间断点**，无穷间断点和振荡间断点是第二类间断点。

例 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的间断点及其类型。

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ +\infty, & |x|>1\end{cases}$，所以，当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\dfrac{1-0}{1+0}x=x$；

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^{2n}}-1}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1}x=\dfrac{0-1}{0+1}x=-x$；

当 $|x|=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-1}{1+1}x=0$， 于是 $f(x)=\begin{cases}x, & -1<x<1\\ 0, & x=-1,\ 1\\ -x, & x>1, x<-1\end{cases}$。

因为 $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}-x=1,\ \ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1,$ 故 $x=-1$ 为该函数的跳跃间断点；

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1,\ \ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}-x=-1,$ 故 $x=1$ 为该函数的跳跃间断点.

小结：1. 函数无意义的点 x_0 是间断点；分段函数函数的分段点 x_0 可能是间断点，求出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $f(x_0)$，看是否相等判断。

2. 对间断点 x_0，

1）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 为确定常数，则 x_0 为可去间断点，属于第一类间断点；

2）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 等于无穷，则 x_0 为无穷间断点，属于第二类间断点；

3）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 在某个范围内振荡无极限，则 x_0 为振荡间断点，属于第二类间断点；

4）若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 不相等，则 x_0 为跳跃间断点，属于第一类间断点

第一类间断点 x_0 是指 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都是确定常数的间断点 x_0；

第二类间断点 x_0 是指 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 有一个不是确定常数的间断点 x_0

例 $x_0=0$ 是 $f(x)=\begin{cases}2x, x\neq 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}$ 和 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点，属于第一类间断点；$x_0=0$ 是 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$ 的无穷间断点，属于第二类间断点；$x_0=0$ 是 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$ 的振荡间断点，属于第二类间断点；$x_0=0$ 是 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$ 的跳跃间断点，属于第一类间断点；

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

一、连续函数的和、差、积、商的连续性

定理 1 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则它们的和 $f(x)+g(x)$、差 $f(x)-g(x)$、积 $f(x)\cdot g(x)$ 及商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（当 $g(x_0)\neq 0$ 时）都在点 x_0 连续。

证 由函数在一点连续的定义和极限的四则运算即得。

例 因 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 内连续，故根据定理 1 得到

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 在 $x_0\in\cdots\cup(-\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2})\cup(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})\cup\cdots$ 连续，

$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 在 $x_0\in\cdots\cup(-\pi,0)\cup(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)\cup\cdots$ 连续，亦即在各自的的定义域内连续。

二、反函数与复合函数的连续性

定理 2 如函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续、单调，则其反函数 $y=f^{-1}(x), x\in f(I)$ 也连续且单调性一样。证略

例 因为 $y=\sin x$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续、单增，故根据定理 2，其反函数 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$ 连续单增；同理，反余弦函数 $y=\arccos x, x\in[-1,1]$ 连续单减、反正切函数 $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$ 连续单增；反余切函数 $y=arc\cot x, x\in(-\infty,+\infty)$ 连续单减，即反三角函数在它们各自的定义域内是连续单调函数。

定理 3 设函数 $y=f(g(x))$ 是由 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$ 且 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))$。

注 此定理说明内函数极限存在，外函数在内函数的极限值处连续，则极限符号可以穿到内函数里面去。可证明，定理 3 对于 $x\to+\infty, x\to-\infty, x\to\infty$ 或 $x\to x_0^-, x\to x_0^+$ 也成立。

例 求极限 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$ 因 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$ 可看成是由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ 复合而成，内函数极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$，外函数 $y=\sqrt{u}$ 在内函数的极限值 $u_0=\dfrac{1}{6}$ 处连续（$\lim\limits_{u\to\frac{1}{6}}\sqrt{u}=\sqrt{\dfrac{1}{6}}$），故根据定理 3，$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\dfrac{1}{6}}$。

作为定理 3 的特例，有

定理 4 设函数 $y=f(g(x))$ 是由 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)=u_0$ 且 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))=f(g(x_0))$。

注 此定理说明内函数 $u=g(x)$ 在点 x_0 连续，外函数 $y=f(u)$ 在内函数的极限值 $u_0=g(x_0)$ 处连续，则复合函数 $y=f(g(x))$ 在点 x_0 连续。

例 讨论函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的连续性。

解 因 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 可看成是由函数 $y=\sin u$ 和 $u=\dfrac{1}{x}$ 复合而成，内函数 $u=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x_0\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 连续，而外函数 $y=\sin u$ 在内函数的极限值 $u_0=\dfrac{1}{x_0}\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 处连续，故由定理 4，函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x_0\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 连续，即在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 连续。

三、初等函数的连续性

定义 将五类函数：幂函数 $y=x^\mu,(\mu$ 是实常数$)$、指数函数 $y=a^x,a>0,a\neq 1$、对数函数 $y=\log_a x,a>0,a\neq 1$、三角函数 $y=\sin x,\cos x,\tan x,\cot x$ 等，以及反三角函数 $y=\arcsin x,\arccos x,\arctan x,arc\cot x$ 等 统称为**基本初等函数**。

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算(加、减、乘、除)和有限次函数复合得到的、可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**。例如，$y=2\sin 3x, y=1+\ln(x+2), y=\sqrt[3]{3x+1}$ 均为初等函数。

前面已得到了三角函数和反三角函数在定义域内连续。可证指数函数 $y=a^x,a>0,a\neq 1$ 在

$(-\infty,+\infty)$ 内连续（证明较繁，可参考专业书籍）。特别地可得到 $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。根据反函数连续性得到对数函数 $y=\log_a x, a>0, a\neq 1$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，特别地可得到 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续。

幂函数 $y=x^\mu=e^{\mu\ln x}$ 可看成函数 $y=e^u$ 和 $u=\mu\ln x$ 复合而成，$u=\mu\ln x$ 在点 $x_0\in(0,+\infty)$ 连续，$y=e^u$ 在点 $u_0=\mu\ln x_0\in(-\infty,+\infty)$ 连续，根据定理 4，幂函数 $y=x^\mu=e^{\mu\ln x}$ 点 $x_0\in(0,+\infty)$ 连续，即在 $(0,+\infty)$ 连续。

于是**基本初等函数在它们各自的定义域（区间或区间的并）上连续**。再根据连续函数和差积商的连续性、复合函数的连续性、基本初等函数的连续性和初等函数的定义，于是得到**初等函数在其定义区间（即定义域内的区间）内是连续的**。

注 这里初等函数在定义区间内连续而不是定义域连续，是因为某些初等函数的定义域可能是孤立点集合或定义区间和孤立点集合的并，而初等函数在其孤立点是不连续的，如 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 可看成函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\cos x-1$ 复合而成，为初等函数，定义域为 $\{0,\pm2\pi,\pm4\pi,\pm6\pi,\cdots\}$，但 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 在这些孤立点均不连续；又如 $y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$ 可看成函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2(x-1)^3$ 复合而成，为初等函数，定义域为 $\{0\}\cup[1,+\infty)$，但 $y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$ 在 $x=0$ 不连续，但由于内函数 $u=x^2(x-1)^3$ 在点 $x_0\in[1,+\infty)$ 连续，外函数 $y=\sqrt{u}$ 在内函数的极限值 $u_0=x_0^2(x_0-1)^3\in[0,+\infty)$ 处连续，故 $y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$ 在点 $x_0\in[1,+\infty)$ 连续，即在定义区间 $[1,+\infty)$ 上连续。

注 符号函数和狄利克雷函数都不是初等函数，因为如果是初等函数，则它们在其定义区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但符号函数在 $x=0$ 间断，狄利克雷函数在每个实数点都间断，矛盾。另外，分段函数可能是初等函数，如 $y=|x|=\sqrt{x^2}$，也可能不是初等函数，如符号函数。

由于初等函数在其定义区间内连续，所以当 x_0 为初等函数 $f(x)$ 定义区间内一点时，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 这为求极限带来极大便利。

例 1) 因 $x=\frac{\pi}{2}$ 是初等函数 $y=\ln\sin(\pi-x)$ 定义区间内的点(比如是一个定义区间 $(0,\pi)$ 内的点)，故 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin(\pi-x)=\ln\sin(\pi-x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\ln 1=0$；

2) 因 $x=3$ 是初等函数 $\sqrt{\frac{x-2}{x^2-4}}$ 定义区间内的点（比如是一个定义区间 $(2,4)$ 内的点），故

$$\lim_{x\to3}\sqrt{\frac{x-2}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{x-2}{x^2-4}}\Big|_{x=3}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x}}=e$。

注 在极限意义下，$1^\infty\neq1$，如 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\frac{\ln e}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}$。

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$

解 令 $t=a^x-1$，则 $x=\log_a(1+t)$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a$。

注 由上述两例题知，$x\to0$ 时，$a^x-1\sim x\ln a$,；更一般地，$\varphi(x)\to0$ 时，$a^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)\ln a$。

定义 称函数 $y=u(x)^{v(x)},u(x)>0,u(x)\neq1$ 为幂指函数。

幂指函数极限求法

1. 设 $\lim u(x)=a>0,\lim v(x)=b$，则幂指函数的极限等于底数和指数分别取极限，亦即

$\lim u(x)^{v(x)}=\lim e^{\ln u(x)^{v(x)}}=e^{\lim^{v(x)}\ln u(x)}=e^{\lim^{v(x)}\ln\lim u(x)}=e^{b\ln a}=a^b$。这里，注意恒等式 $u(x)^{v(x)}=e^{\ln u(x)^{v(x)}}=e^{v(x)\ln u(x)}$。

2. 若在自变量的同种趋向下，$u(x)\sim\alpha(x),v(x)\sim\beta(x)$，则

1） $\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)\ln u(x)}=e^{\lim\beta(x)\ln u(x)}=\lim u(x)^{\beta(x)}$；

2） $\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)\ln u(x)}=e^{\lim v(x)\ln\frac{u(x)}{\alpha(x)}\alpha(x)}=e^{\lim v(x)\ln\alpha(x)}=\lim\alpha(x)^{v(x)}$；

3） $\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)\ln u(x)}=e^{\lim\beta(x)\ln\frac{u(x)}{\alpha(x)}\alpha(x)}=e^{\lim\beta(x)\ln\alpha(x)}=\lim\alpha(x)^{\beta(x)}$；

即幂指函数求极限等于底数或指数用等价无穷小替换求极限。

例 1 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{1}{\tan x})^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\frac{-1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to0^+}(x)^{\frac{-1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\ln x}\ln^x}=e^{-1}$

例 2 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\ln(1+x)})^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1+x))^{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}(x)^{-x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-x)\ln x}$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{-x^2}}}=e^0=1$$

例 3 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}2x\ln^x}=e^0=1$

3. 对1^∞型极限$\lim u(x)^{v(x)},(\lim u(x)=1,\lim v(x)=\infty)$，有

$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)\ln u(x)}=e^{\lim v(x)\ln[1+(u(x)-1)]}=e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$；

例 1 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解 法一 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{\frac{2x\cdot 3}{\sin x}}=e^6$；

法二 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sin x}2x}=e^6$。

法三 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{3}{\sin x}2x}=e^6$

注 在极限意义下，$1^\infty\neq 1$，如$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。

例 2 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}$

解 法一 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x-1}{2}\ln\frac{3+x}{6+x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x-1}{2}\ln(1+\frac{-3}{6+x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{2}\cdot\frac{-3}{6+x}}=e^{\frac{-3}{2}}$。

法二 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{-3}{6+x})^{\frac{6+x}{-3}}\right]^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{-3}{6+x}}=e^{-\frac{3}{2}}$。

法三 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x-1}{2}(\frac{3+x}{6+x}-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{(x-1)(-3)}{2(6+x)}}=e^{\frac{-3}{2}}$

例 3 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})}=e$

例 4 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(e^x+x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+1}=e^2$

例 5 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}(\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3})}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x})}=e^{\frac{1}{3}(\ln abc)}=\sqrt[3]{abc}$

例 6 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)} \underset{=\!=\!=\!=\!=}{u=\frac{1}{x}} e^{\lim\limits_{u\to 0}(\frac{\sin u}{u}+\frac{\cos u-1}{u})} = e^{1+0} = e$

例 7 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^2}(\cos 2x-1)} = e^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}} = e^{-6}$

第十节 闭区间上连续函数的性质

一、有界性与最大值最小值定理

定义 对定义在区间 I 上的函数 $f(x)$，如果有 $x_0 \in I$，使得对任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ **是函数** $f(x)$ **在区间** I **上的最大值(最小值)**.

注 该定义是说函数 $f(x)$ 在区间 I 上的所有函数值比该区间上的某个函数值 $f(x_0)$ 都小(都大)，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值(最小值)**.

例 $y=1+\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上 $y_{\min}=0, y_{\max}=2$；$y=\operatorname{sgn} x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $y_{\min}=-1, y_{\max}=1$；在 $(0,+\infty)$ 内 $y_{\min}=y_{\max}=1$；

定理 1 在闭区间上连续的函数在该区间上有界，且在该区间上一定能取到它的最大值和最小值。

注 1). 该定理说明，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $|f(x)| \le$ 某正数 K, 或某实数 $K_1 \le f(x) \le$ 某实数 K_2 , $x \in [a,b]$，并且有两点 $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$，使得对任一 $x \in [a,b]$，有 $f(\xi_1) \ge f(x), f(\xi_2) \le f(x)$；

2). 在开区内连续的函数可能无界，如 $y=\frac{1}{x}, x\in(0,2)$；在开区间内连续或闭区间上有间断点的函数，不一定在该区间上有最大值最小值，如 $y=x, x\in(0,1)$；如函数 $y=\begin{cases}-x+1, 0\le x<1\\ 0, x=1\\ -x+3, 1<x\le 2\end{cases}$。

二、零点定理与介值定理

定义 如果点 x_0 使 $f(x_0)=0$，则称 x_0 为**函数** $f(x)$ **的零点**。

注 函数 $f(x)$ 的零点 x_0 即方程 $f(x)=0$ 的根 x_0。

定理 2（零点定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且端点函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)f(b)<0$），则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$，亦即函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内至少存在一个零点 ξ，或方程 $f(x)=0$ 在开区间 (a,b) 内至少存在一个根 ξ。

几何解释：连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的上下侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点。

注 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内连续且端点函数值异号的函数，在开区间 (a,b) 内不一定有零点，如 $y=\begin{cases}1, 0<x\le 1\\ -1, x=0\end{cases}$ 在 $(0,1)$ 无零点。

运用：1. 证明代数方程在某范围内至少有一个根；

2. 证明在某区间内存在一个点满足一个函数等式（一般不含导数）。

方法：将结果转化为零点定理的结论表述，构造辅助函数，验证零点定理条件即可。

例 证明方程 $x=2\sin x+1$ 至少有一个不超过 3 的正根。

证 即证函数 $f(x)=x-2\sin x-1$ 在 $(0,3]$ 上至少有一零点，亦即证在区间 $(0,3]$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$。

因为 $f(x)=x-2\sin x-1$ 在 $[0,3]$ 上连续, 且 $f(0)=-1<0, f(3)=2(1-\sin 3)>0$，

由零点定理，在开区间 $(0,3)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$；综上，结论成立。

例 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0\le f(x)\le 1, x\in[0,1]$，证明存在点 $c\in[0,1]$，使 $f(c)=c$。

证 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $F(0)=f(0)-0\ge 0, F(1)=f(1)-1\le 0$，

若 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则取 $c=0$ 或 1，有 $F(c)=0$，结论成立；

若 $F(0)\ne 0$ 且 $F(1)\ne 0$，则 $F(0)>0$， $F(1)<0$, 由零点定理，在开区间 $(0,1)$ 内至少有一点 c，使得 $F(c)=0\quad(0<c<1)$；综上，结论成立。

例 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续（a 为正常数），且 $f(0)=f(2a)$，证明方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 内至少有一根。

证 即证函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一零点，亦即证在区间 $[0,a]$ 内至少有一点 ξ，使得 $F(\xi)=0$。

因为 $F(x)=f(x)-f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 且

$F(0)=f(0)-f(a), F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$，

若 $f(0)=f(a)$，则 $F(0)=F(a)=0$，取 $\xi=0$ 或 a，有 $F(\xi)=0$，结论成立；

若 $f(0)\neq f(a)$，则 $F(0)F(a)<0$，由零点定理，在开区间 $(0,a)$ 内至少有一点 ξ，使得 $F(\xi)=0$；

综上，结论成立。

定理 3（介值定理） 设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C \quad (a<\xi<b)$。

几何解释：连续曲线弧 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少有一个交点。

推论 闭区间上的连续函数在该区间上必取得介于最大值与最小值之间的任何值。

介值定理证明 设 $F(x)=f(x)-C$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(a)=f(a)-C$，$F(b)=f(b)-C$. 因 $F(a)\cdot F(b)<0$，由零点定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=0$，亦即存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=C$。

推论证明 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在该区间上的最大值 $f(\xi_1)$ 不等于最小值 $f(\xi_2)$，$\xi_1,\xi_2\in[a,b]$，则由介值定理，对 $f(\xi_1)$ 与 $f(\xi_2)$ 之间的任一实数 C，在开区间 (ξ_1,ξ_2) 或 (ξ_2,ξ_1) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$，从而在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C \quad (a<\xi<b)$。

例 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b, n\geq 3$，证明存在一点 $\xi\in(x_1,x_n)$，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$。

证 设 $Max(f(x_1),\cdots f(x_n))=f(x_i),\quad Min(f(x_1),\cdots f(x_n))=f(x_j)$，则函数 $f(x)$ 在 $[x_i,x_j]$ 或 $[x_j,x_i]$ 上连续，且 $f(x_j)\leq\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leq f(x_i)$。

若 $f(x_i)=f(x_j)$，则 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)$，取 $\xi=x_2,x_3,\cdots x_{n-1}$ 中任一个，结论成立；

若 $f(x_i)\neq f(x_j)$，则由介值定理，在 $(x_i,x_j)\subset(x_1,x_n)$ 或 $(x_j,x_i)\subset(x_1,x_n)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$；综上，结论成立。