第六章　几种特殊滤波器及简单一、二阶数字滤波器设计

- 6.1　数字滤波器的基本概念
- 6.2　全通滤波器
- 6.4　陷波器
- 6.6　梳状滤波器
- 6.7　波形发生器

•6.1 数字滤波器的基本概念

◈ ***滤波：***通过某种运算（变换）得到或者增强所需信号，而滤除不需要的信号、噪声或者干扰。

◈ ***表示方法：***

1、线性差分方程

2、系统函数

3、单位抽样响应

4、线性信号流图

◈ ***实现：***

计算机软件、专用数字滤波器的硬件、专用或通用的数字信号处理器来实现。

◇ *数字滤波器的分类*

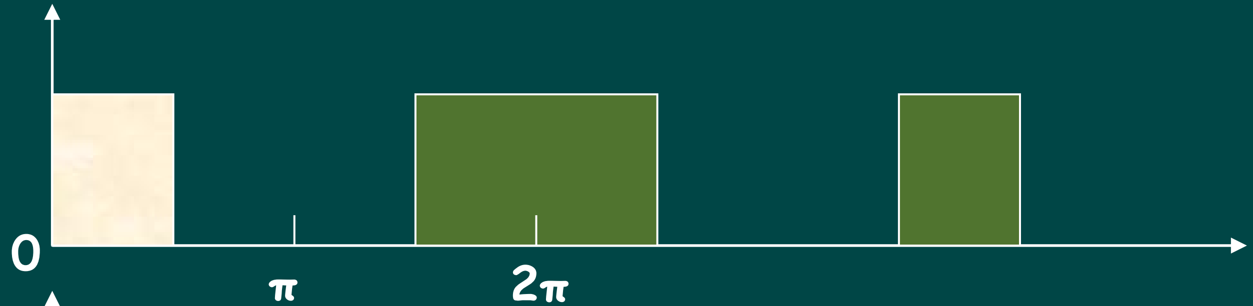
1、按照冲激响应分：IIR和FIR

2、按照滤波器的幅度响应分：低通、高通、带通、带阻、全通等

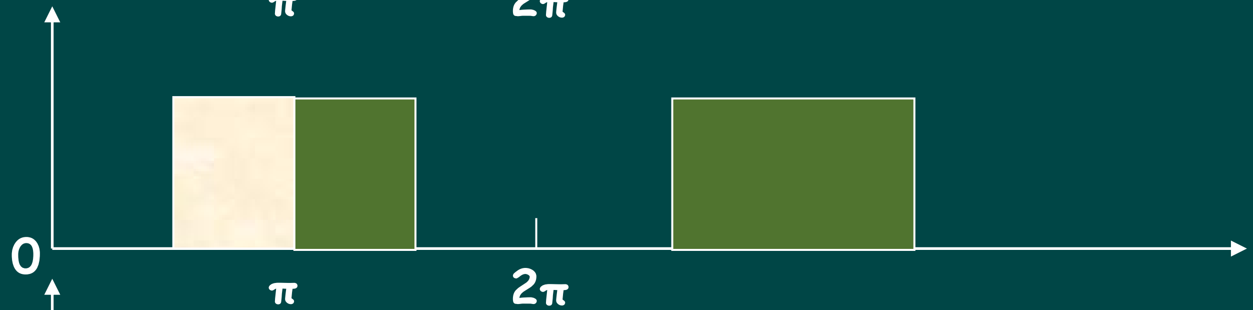
3、按照相位响应 分：线性相位和非线性相位

4、按照特殊要求分：梳状滤波器、陷波器、谐振器、最小相位滞后滤波器、波形发生器等。

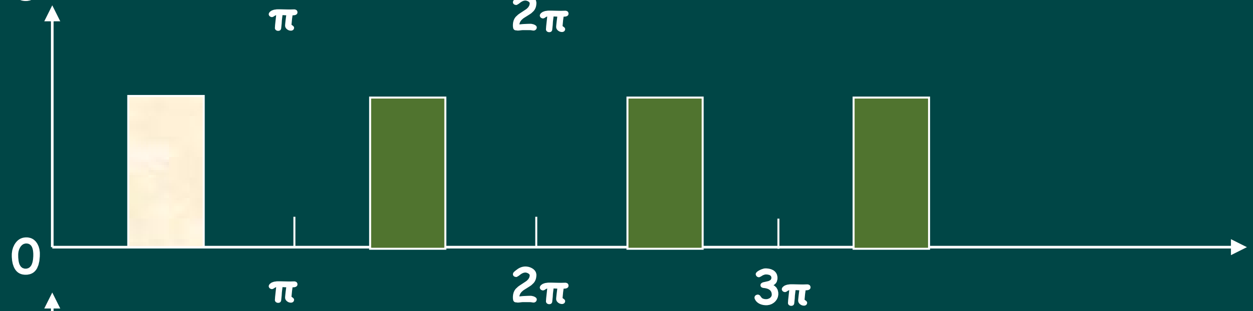
- 低通



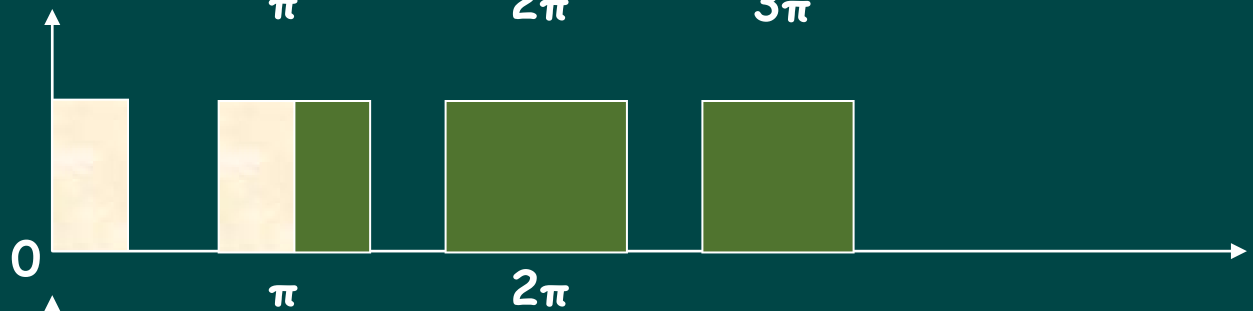
- 高通



- 带通



- 带阻



- 全通

频率变量是以数字频率 ω 来表示，

已知$\omega = \Omega T = \Omega / f_s$

$$\omega_s = \Omega_s T = 2\pi f_s / f_s = 2\pi$$

因此数字域的抽样频率为2π。

根据抽样定理，频率特性只能限于$|\omega| < \omega_s/2 = \pi$

◈ H(z)的零极点配置对系统幅度响应的影响：

1、零点影响幅度响应的谷值，若零点在单位圆上，此处幅度响应为零；

2、极点影响幅度响应的峰值，极点越靠近单位圆，则对峰值的影响越大；

3、为保证h(n)为实序列，则系统函数的零极点只能是实数或者以共轭复数出现。

4、如果是因果稳定系统，则极点必须在单位圆内。

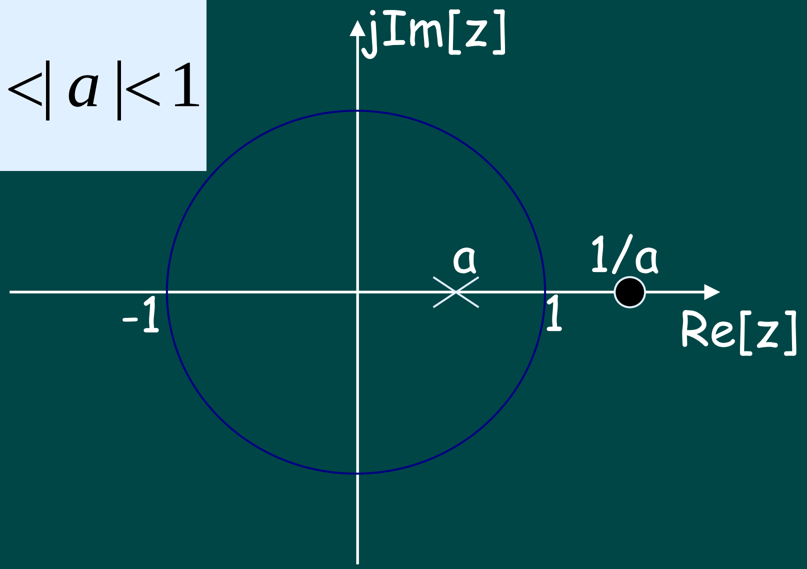
6.2 全通系统

定义：是指系统频率响应的幅度在所有频率 ω 下均为1或某一常数的系统。满足

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$$

简单一阶全通系统函数

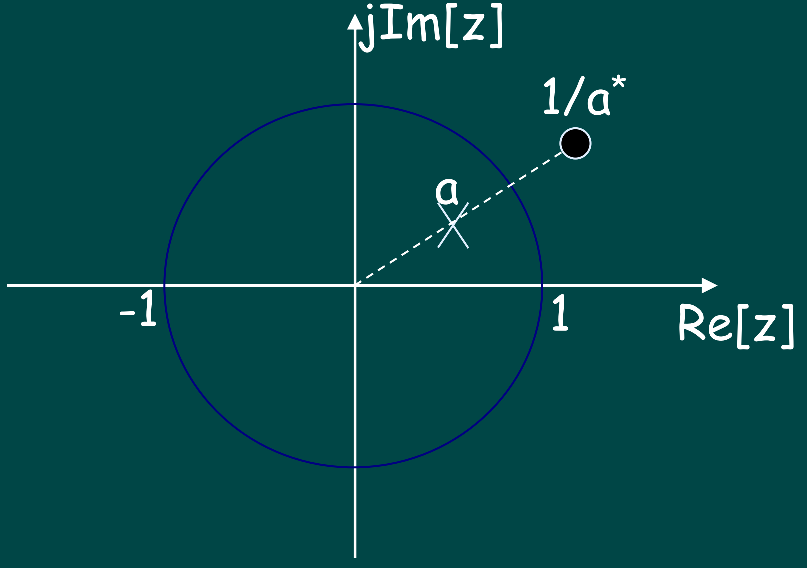
$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}, \qquad a\text{为实数}, 0 < |a| < 1$$



高阶有理全通系统由一串一阶系统组成，可以包含实零点一实极点系统；还可以包括复数零点一复数极点系统；多个这两类系统的级联就组成一个高阶全通网络系统。

复数零点一复数极点的全通节的系统函数

$$\frac{z^{-1}-a^{*}}{1-az^{-1}}, \qquad a\text{为复数}, 0<|a|<1$$



N阶数字全通系统的系统函数频率响应的模都为1。

证明：N阶全通系统函数为

$$H(z)=\pm\prod_{k=1}^{N}\frac{z^{-1}-a_k^*}{1-a_k z^{-1}}=\pm\frac{d_N+d_{N-1}z^{-1}+\cdots+d_1 z^{-(N-1)}+z^{-N}}{1+d_1 z^{-1}+\cdots+d_{N-1}z^{-(N-1)}+d_N z^{-N}}$$

$$=\pm\frac{z^{-N}D(z^{-1})}{D(z)}$$

式中 $D(z)=1+d_1 z^{-1}+\cdots+d_{N-1}z^{-(N-1)}+d_N z^{N}$

当 $z=e^{j\omega}$ 时，满足 $D(e^{j\omega})=D^*(e^{-j\omega})$

所以有 $|H(e^{j\omega})|=1$

- 全通滤波器的极点要在单位圆内，零点在单位圆外极点的镜像位置上，零极点成对出现，如果是复数，应以共轭对形式 出现。

$$H_{ap}(z)=\prod_{i=1}^{N}\frac{z-\dfrac{1}{a_i^*}}{z-a_i}\cdot\frac{z-\dfrac{1}{a_i}}{z-a_i^*}$$

$$=\prod_{i=1}^{N}\frac{1-\dfrac{1}{a_i^*}z^{-1}}{1-a_iz^{-1}}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{a_i}z^{-1}}{1-a_i^*z^{-1}},\qquad 0<|a|<1$$

全通系统应用

（1）任何一个因果稳定的非最小相位延时系统的H(z)都可以表示为全通系统 $H_{ap}(z)$ 和最小相位延时系统 $H_{\min}(z)$ 的级联。

$$H(z) = H_{\min}(z) \bullet H_{ap}(z)$$

它们频率响应的幅度相同，相位不同。即

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})| \bullet |H_{ap}(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$

证明：设一个因果稳定的非最小相位延时系统H(z)为

$$H(z)=H_1(z)\bullet(z^{-1}-z_0)\bullet(z^{-1}-z_0^*)$$

$$H(z)=H_1(z)\bullet(z^{-1}-z_0)\bullet(z^{-1}-z_0^*)\frac{1-z_0^*z^{-1}}{1-z_0^*z}\bullet\frac{1-z_0z^{-1}}{1-z_0z^{-1}}$$

$$=H_1(z)\bullet(1-z_0^*z^{-1})\bullet(1-z_0z^{-1})\bullet\frac{z^{-1}-z_0}{1-z_0^*z^{-1}}\bullet\frac{z^{-1}-z_0^*}{1-z_0z^{-1}}$$

由于$|z_0|<1$ 所以 $H_1(z)\bullet(1-z_0^*z^{-1})\bullet(1-z_0z^{-1})$ 是最小相位延时，$\frac{z^{-1}-z_0}{1-z_0^*z^{-1}}\bullet\frac{z^{-1}-z_0^*}{1-z_0z^{-1}}$ 是全通级联。所以可表示为

$$H(z)=H_{\min}(z)\bullet H_{ap}(z)$$

（2）如果设计出的滤波器是非稳定的，则可用级联全通函数的办法将它变成一个稳定系统。

例：原滤波器有一对极点在单位圆外

$$z = \frac{1}{r} e^{\pm j\theta}$$

级联一个全通系统

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - re^{j\theta}}{1 - re^{-j\theta} z^{-1}} \bullet \frac{z^{-1} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta} z^{-1}}$$

则可将单位圆外极点抵消，但不改变系统幅度特性。

（3）可以作为相位均衡器（群时延均衡器）用，来得到线性相位，但不改变幅度特性。

IIR滤波器其相位特性为非线性的，因而群延时不为常数，而在视频信号的传输中希望系统具有线性相位。

设全通滤波器为 $H_{ap}(z)$，系统为 $H_d(z)$ 级联后H(z)

$$H(z)=H_{ap}(z)H_d(z)$$

即 $$H(e^{j\omega})=H_{ap}(e^{j\omega})H_d(e^{j\omega})=\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right|\left|H_d(e^{j\omega})\right|\bullet e^{j\left[\varphi_{ap}(\omega)+\varphi_d(\omega)\right]}$$

相位关系 $$y(\omega)=\varphi_{ap}(\omega)+\varphi_d(\omega)$$

按 $\tau(\omega)=\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$ 得

$$\tau(\omega)=\tau_{ap}(\omega)+\tau_d(\omega)$$

当通带中满足 $\tau(\omega)=\tau_0$ 是常数

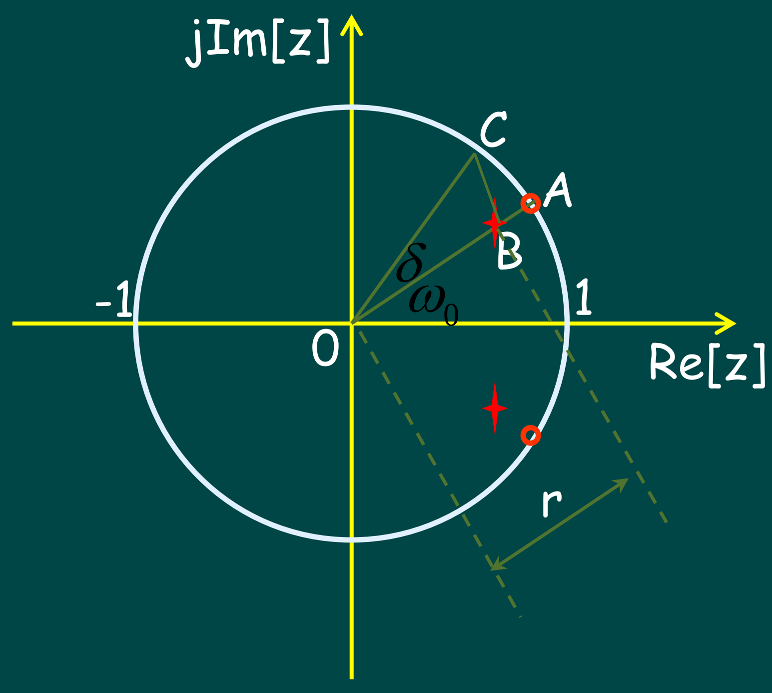
则逼近误差的平方值

$$e^2=\left[\tau(\omega)-\tau_0\right]^2=\left[\tau_{ap}(\omega)+\tau_d(\omega)-\tau_0\right]^2$$

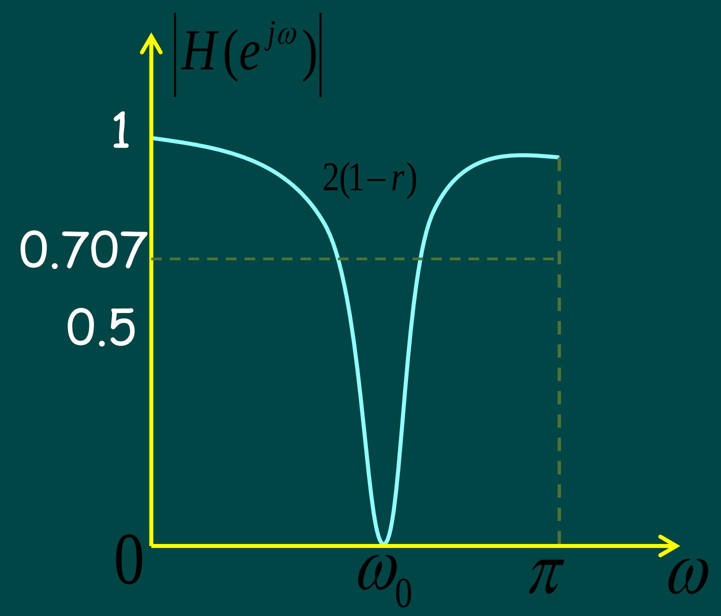
利用均方误差最小的准则就可以求得均衡器有关的参数。

6.4 陷波器

陷波器：将零极点配合构成数字滤波器，以滤除某些单频或宽带干扰，它的幅度特性在 $\omega = \omega_0$ 处为零。



•零极点配置图



•幅度响应

- 二阶系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{K(z-e^{j\omega_0})(z-e^{-j\omega_0})}{(z-re^{j\omega_0})(z-re^{-j\omega_0})},\qquad 0\le r<1$$

- K 为常数，由幅度响应的具体要求来确定
- 设 $\delta=1-r$,取圆上一点C，其幅角为 $\omega_0+\delta$

$$BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{2}\delta$$

C点的幅度响应为

$$\left|H(e^{j(\omega_0+\delta)})\right|=\frac{AC}{\mathrm{BC}}=\frac{\delta}{\sqrt{2}\delta}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- 陷波器幅度响应衰减3dB处的通带宽度为

$$\boxed{\Delta\omega_{\mathrm{B}} = 2\delta = 2(r-1)}$$

- 1、在 $\omega=\omega_0$ 处，$H(e^{j\omega_0})=0$，完全陷波；
- 2、当 ω 增加，由于零矢、极矢逐渐近似相等，使得幅度响应很快变成1，达到最大值；
- 3、当极点越靠近单位圆上的零点时，陷波器在3dB 处带宽越窄，陷波效果越好。

◈ 例：有一个低频信号占据频带宽度0~200Hz，混入了50Hz频率的市电干扰。试设计一个陷波器滤除掉此50Hz干扰，要求陷波器3dB 频带宽度为4Hz.

解：

$$H(z)=\frac{K(z-e^{j\omega_0})(z-e^{-j\omega_0})}{(z-re^{j\omega_0})(z-re^{-j\omega_0})},\qquad 0\le r<1$$

1、确定抽样频率f_s，$f_s>2f_h=800Hz,$ 取f_s=1000Hz；

2、将临界频率转换为数字频率

陷波器中心频率 $\omega_0=2\pi\times 50\times\frac{1}{1000}=0.1\pi$

陷波器3dB 频带宽度 $\Delta\omega_B=2\pi\times 4\times\frac{1}{1000}=0.008\pi$

3、求陷波器系统函数中的r

$$\Delta\omega_{\mathrm{B}} = 2\delta = 2(1-r)$$

$$r = 1 - \frac{\Delta\omega_B}{2} = 1 - 0.004\pi = 0.9874 \approx 0.988$$

4、利用在 $\omega=0$ 处频率响应的幅度为1来求常数K。

$$\left|H(e^{j0})\right| = K\left|\frac{(z-e^{j\omega_0})(z-e^{-j\omega_0})}{(z-re^{j\omega_0})(z-re^{-j\omega_0})}\right| = 1$$

$$K = 0.9895$$

5、将r 和K代入H(z)中

$$H(z) = \frac{0.9895(z-e^{j0.1\pi})(z-e^{-j0.1\pi})}{(z-0.988e^{j0.1\pi})(z-0.988e^{-j0.1\pi})}$$

$$= 0.9895\frac{1-1.9021z^{-1}+z^{-2}}{1-1.8793z^{-1}+0.9761z^{-2}}$$

6.6 梳状滤波器

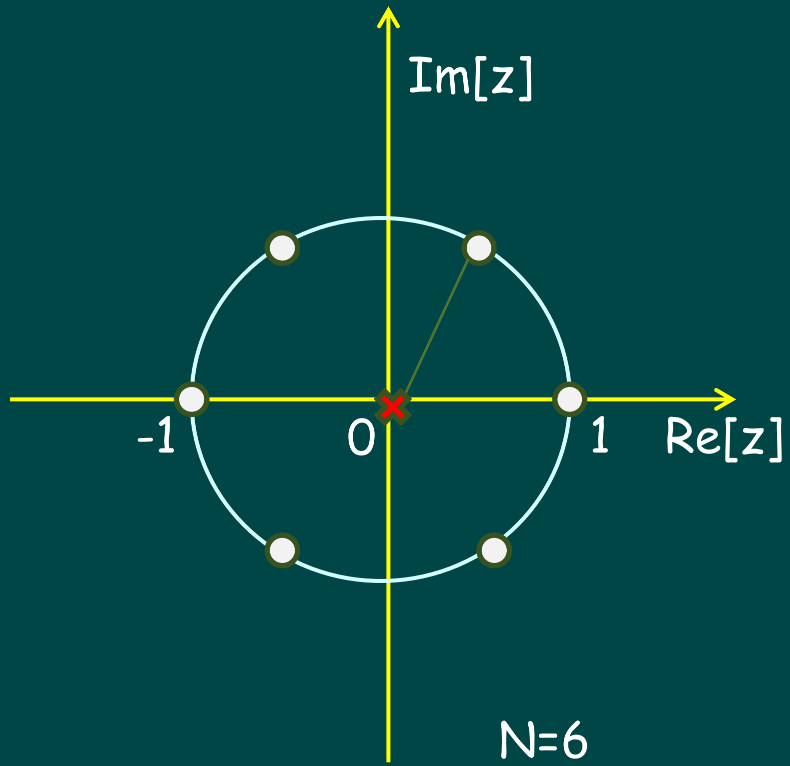
梳状滤波器用来抑制周期性的噪声或增强周期性信号分量。

系统函数 $H(z)=1-z^{-N}$

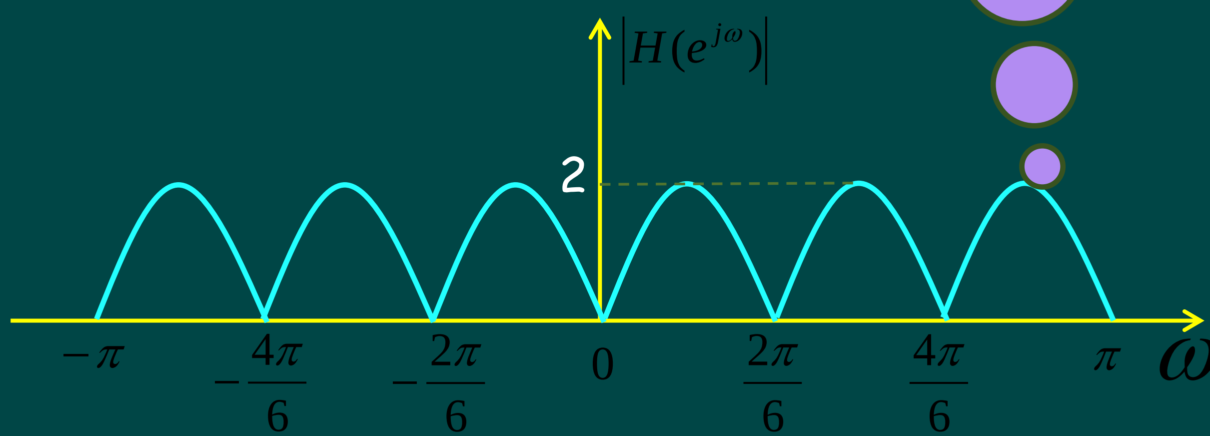
FIR滤波器

N个零点都在单位圆上，$z_i=e^{j\frac{2\pi}{N}i}\ (i=0,1,\cdots,N-1)$

极点则在Z=0处，为N阶极点。



缺点：幅度特性过渡带较为平缓，不够陡峭，对周期性信号陷波作用不明显，在其他频率处产生信号失真。



1、梳状陷波器

对周期性的干扰信号加以陷波（抑制）

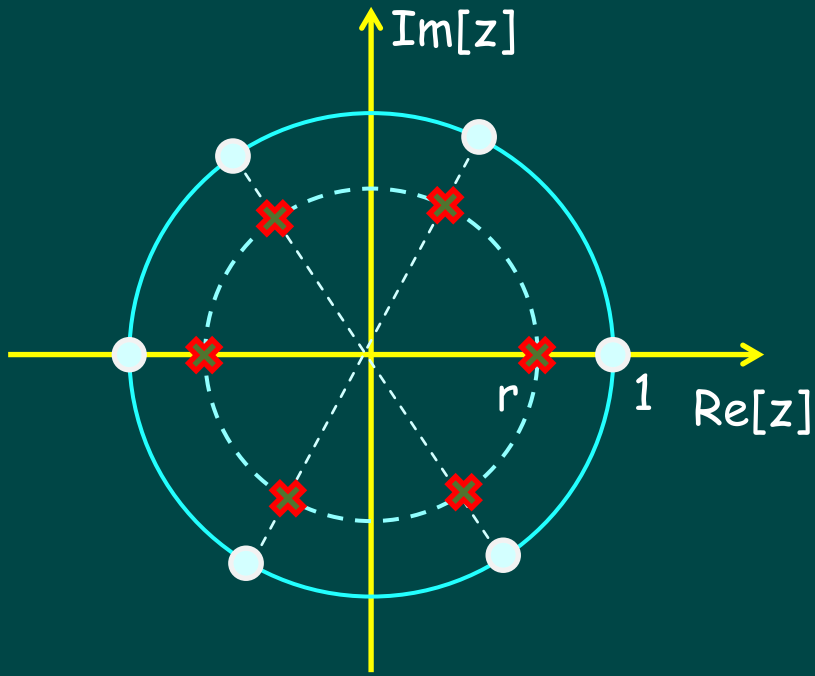
$$H(z)=b_1\frac{1-z^{-N}}{1-rz^{-N}}, \qquad 0\le r<1$$

N个零点均匀分布在单位圆上，

$$z_{oi}=e^{j\frac{2\pi}{N}i}\;(i=0,1,\cdots,N-1)$$

N个极点均匀分布在|z|=r(r<1)上，。

$$z_{pi}=re^{j\frac{2\pi}{N}i}\;(i=0,1,\cdots,N-1)$$



•幅频响应的最大值在两个相邻的零点间的居中点处，即在

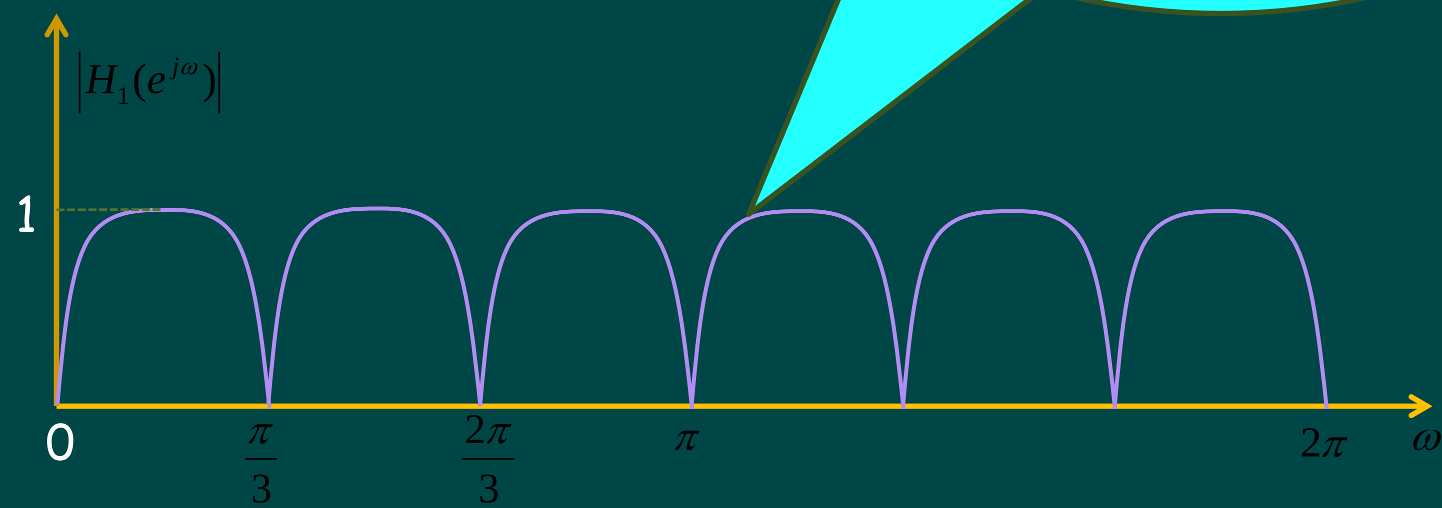
$$\omega=\frac{\pi+2\pi i}{N}$$

之处，令i =0,得到

$$\omega=\frac{\pi}{N}，即z^{-N}=e^{-j\pi N/N}=e^{-j\pi}=-1$$

r 越接近1，幅度响应在两个零点之间越平坦，从而陷波的效果越好。

r=0时，信号失真最大，就是梳状滤波器的系统函数。



6.7 波形发生器

若要产生正弦波、余弦波、周期性方波或一般周期序列的常用序列，通常将单位抽样函数输入到一个“滤波器”上来产生，此时滤波器器不是起到滤波的作用，而是产生“振荡”，此时系统函数的极点一定要在单位圆上。

6.7.1 正弦波及余弦波发生器

- 当输入为$\delta(n)$,网络输出为单频ω_0的正弦、余弦序列。

$$h_i(n) = \sin(\omega_0 n)u(n)$$

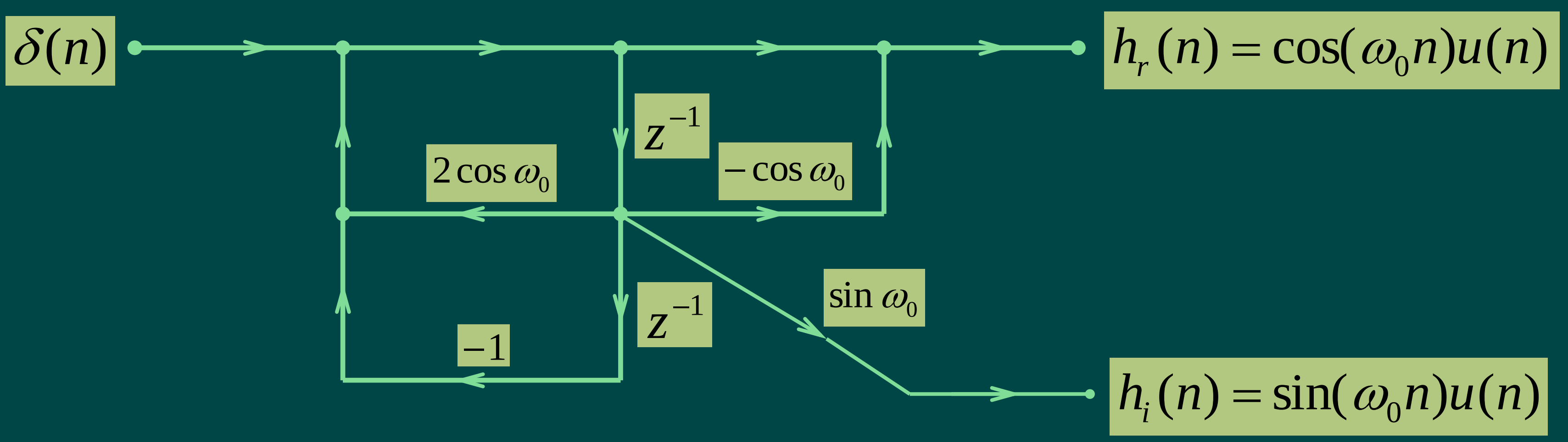
$$h_r(n) = \cos(\omega_0 n)u(n)$$

$$\begin{aligned} h(n) &= e^{j\omega_0 n}u(n) = h_r(n) + jh_i(n) \\ &= \cos(\omega_0 n)u(n) + j\sin(\omega_0 n)u(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathrm{Z}[h(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_0 n} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}}, \qquad |z| > 1 \end{aligned}$$

$$H(z)=\mathrm{Re}[H(z)]+j\,\mathrm{Im}[H(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}\cos(\omega_0 n)z^{-n}+j\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\omega_0 n)z^{-n}$$

$$=\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}+j\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$$

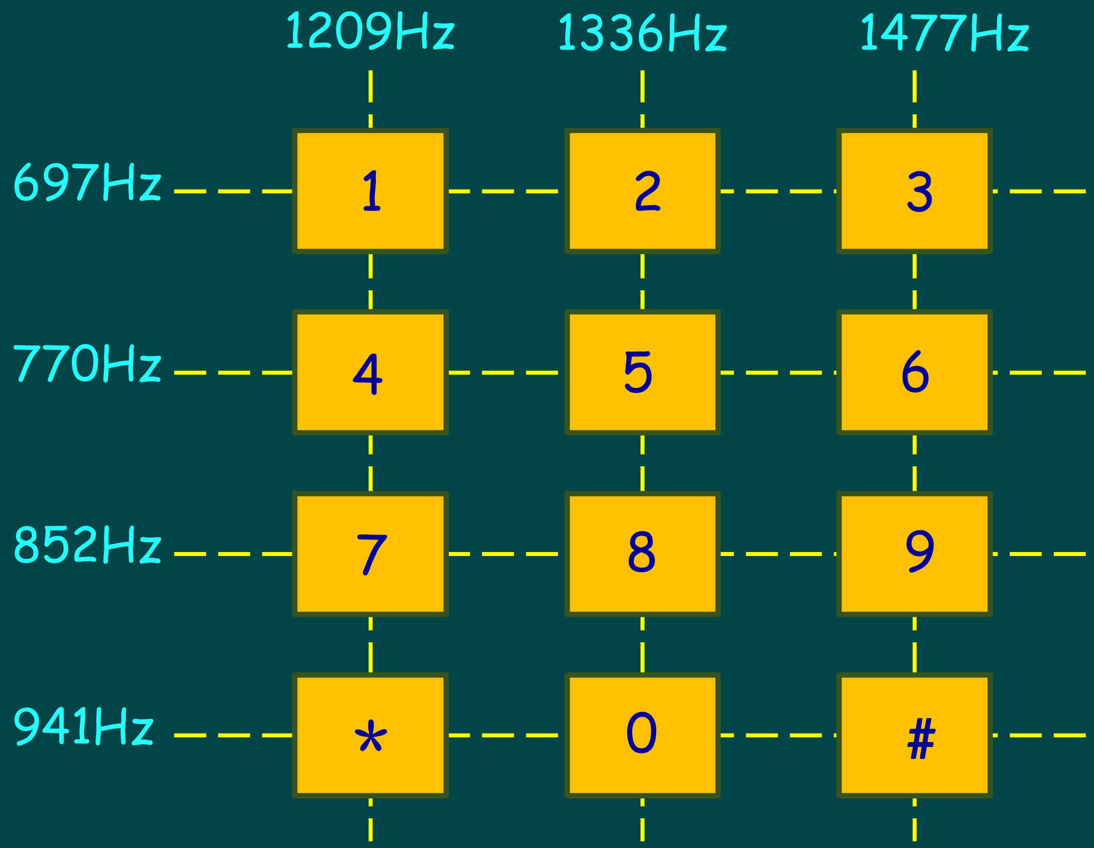


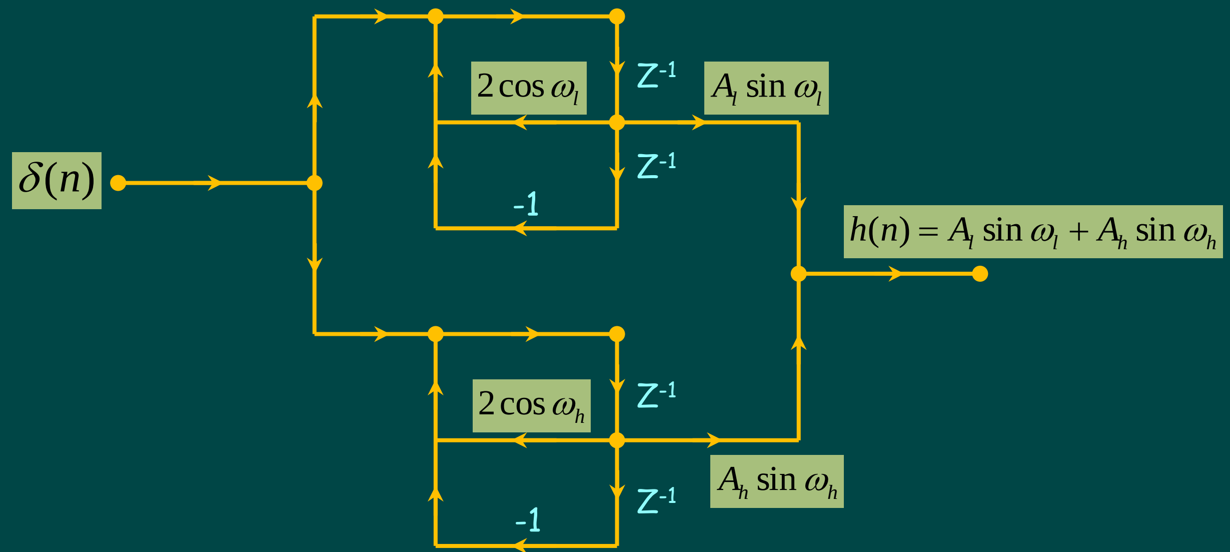
- 例 双音多频(DTMF)的数字电话系统的发生器与接收器中，DTMF信号是用于电话与程控交换机之间的 一种用户指令，用它来完成自动长途呼叫。

- 电话的拨号键盘是4 ×3矩阵，矩阵的每一行有一个低频正弦信号，分别为697Hz， 770Hz， 852Hz， 941Hz；

  每一列有一个高频正弦信号，分别为1209Hz， 1336Hz， 1477Hz。故称之为“多频”

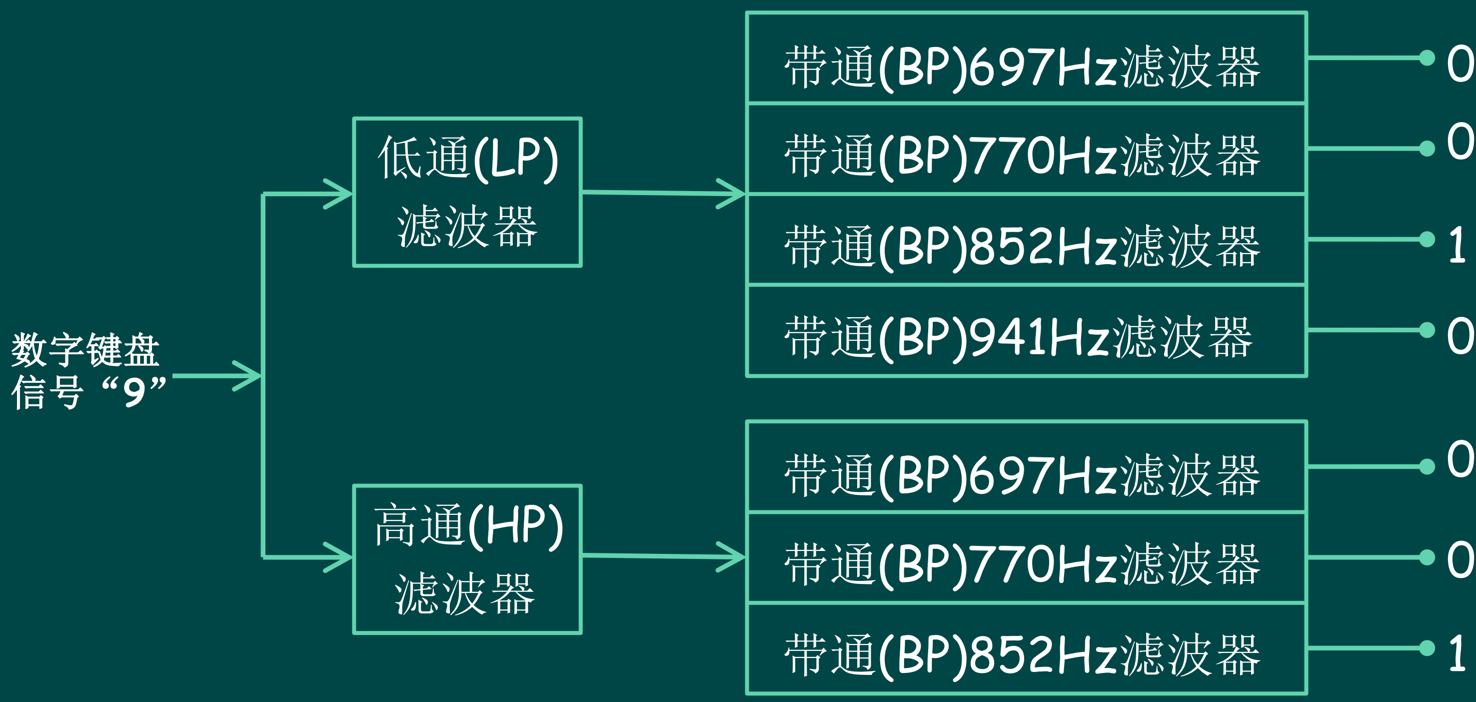
  每按动一个键就发送一个高频信号和一个低频信号的组合，故称为“双音”。


1209Hz
1336Hz
1477Hz
697Hz
770Hz
852Hz
941Hz
1
2
3
4
5
6
7
8
9
*
0
#



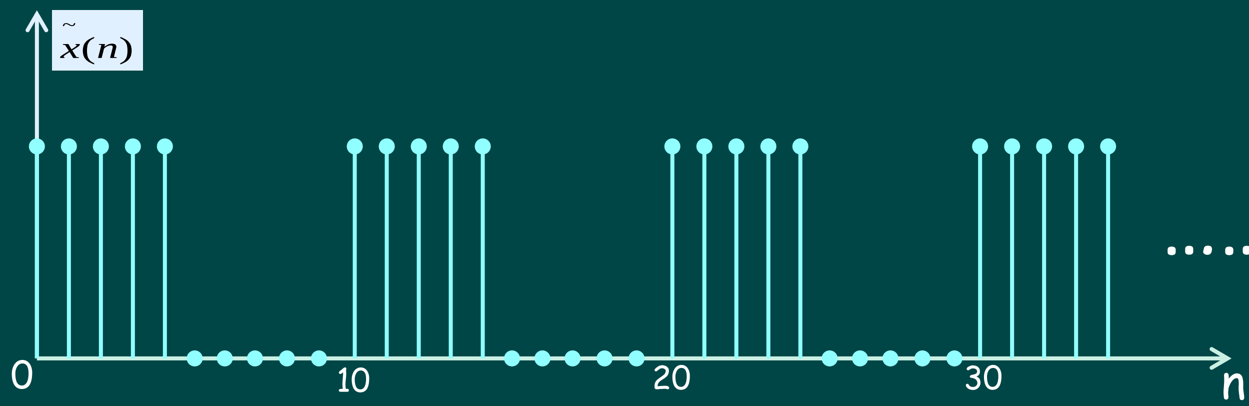
$$H(z) = \frac{A_l z^{-1} \sin\omega_l}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_l + z^{-2}} + j\frac{A_h z^{-1} \sin\omega_h}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_h + z^{-2}}$$

其中 $\omega_l = 2\pi f_l / f_s$, $\omega_\mathrm{h} = 2\pi f_h / f_s$


数字键盘
信号“9”
低通(LP)
滤波器
高通(HP)
滤波器
带通(BP)697Hz滤波器
带通(BP)770Hz滤波器
带通(BP)852Hz滤波器
带通(BP)941Hz滤波器
0
0
1
0
带通(BP)697Hz滤波器
带通(BP)770Hz滤波器
带通(BP)852Hz滤波器
0
0
1

6.7.2 周期性方波发生器

- 周期性方波如图所示

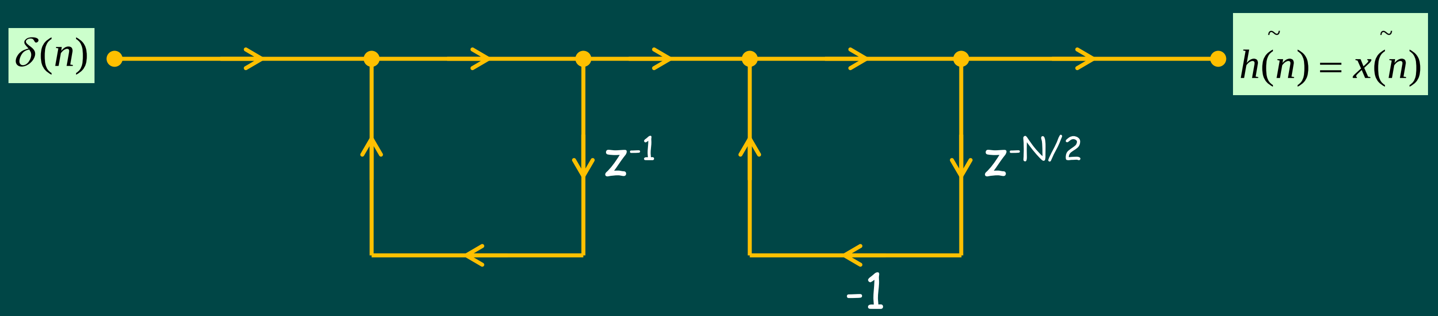


$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{h}(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}z^{-n}+\sum_{n=N}^{\frac{3N}{2}-1}z^{-n}+\sum_{n=2N}^{\frac{5N}{2}-1}z^{-n}+\ldots\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}z^{-n}+z^{-N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}z^{-n}+z^{-2N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}z^{-n}+\ldots\ldots=\left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}z^{-n}\right]\left[1+z^{-N}+z^{-2N}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{1-z^{-\frac{N}{2}}}{1-z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-z^{-N}}=\frac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-\frac{N}{2}})},\qquad N\text{为偶数}$$

若此系统的输入为单位抽样序列，则输入一定是占空比为1：1，周期为N的的周期序列。周期性方波的幅度大小可以任意设定。



6.7.3 任意周期序列的发生器

- 设任意一个周期为N的周期性序列，其主值序列为x(n)

$$x(n)=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\ldots,a_{N-1}\}$$

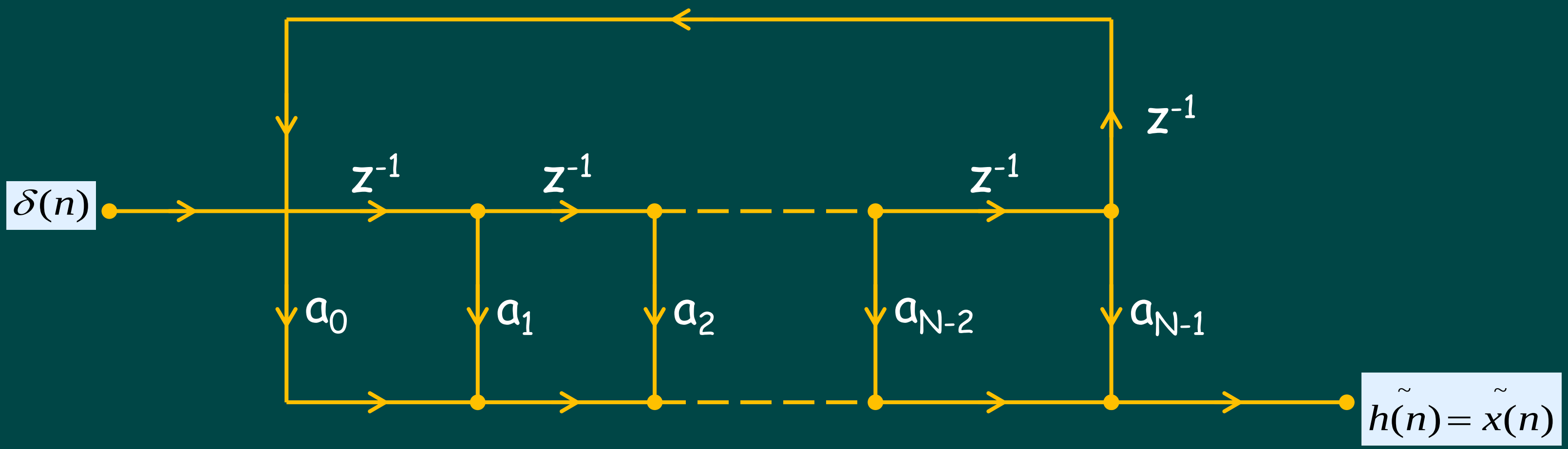
- 用单位抽样序列作为输入信号，可以在某一系统的输出端得到周期序列 $\tilde{h}(n)=\tilde{x}(n)$
- 系统函数为

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{h}(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{h}(n)z^{-n}+\sum_{n=N}^{2N-1}\tilde{h}(n)z^{-n}+\sum_{n=2N}^{3N-1}\tilde{h}(n)z^{-n}+\ldots\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}+z^{-N}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}+z^{-2N}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}+\ldots\ldots$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}\right]\left[1+z^{-N}+z^{-2N}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{a_0+a_1z^{-1}+\ldots\ldots+a_{N-1}z^{-(N-1)}}{1-z^{-N}}$$



$\delta(n)$
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
a_0
a_1
a_2
a_{N-2}
a_{N-1}
$\tilde{h}(n) = \tilde{x}(n)$