第十一章 曲线积分与曲面积分

第一节 对弧长的曲线积分

一、 对弧长曲线积分的概念和性质

密度不均匀的平面弧段质量

xoy 平面上的一段弧 L，它在点 (x,y) 处的线密度为 $\mu(x,y)$，这里 $\mu(x,y)\ge 0$ 且 $\mu(x,y)$ 在 L 上连续. 求其质量.

求法：(1). 分割，将弧 L 任意分成 n 个小弧段 $\Delta s_1,\Delta s_1,\cdots,\Delta s_n$, Δs_i 也表示第 i 个小弧段的长度，并在小弧段 Δs_i 内任取一点 (ξ_i,η_i)；

(2). 近似求和：当第 i 个小弧段 Δs_i 充分小时，由于 $\mu(x,y)$ 在 Δs_i 上连续，从而 $\mu(x,y)$ 在 Δs_i 上各点的函数值相差不大，故可以 $\mu(\xi_i,\eta_i)$ 近似代替小弧段 Δs_i 上各点线密度, 则第 i 个小弧段的质量 $\Delta m_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i, i=1,2,\cdots,n.$ 当小弧段 $\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n$ 都较小时，整个弧 L 的质量 $m=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$；

(3). 取极限：令 $\lambda=\max(\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n)$，弧 L 的质量 $m=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.

与上述例子一样，许多不同领域的实际问题在数学上都有相同的处理方法(即分割、近似求和及取极限), 且结果都是类似的和极限，将这些实际问题中的具体函数看成普通函数，写出三个求解步骤即得对弧长曲线积分的定义.

对弧长曲线积分的定义: $\int_L f(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，$ds$ 称为弧微元.

注：(1) 由对弧长曲线积分的定义，上例中密度不均匀的平面弧段 L 的质量 $m=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=\int_L \mu(x,y)ds$，即线密度 $\mu(x,y)$ 在弧段 L 上对弧长的曲线积分值.

(2) 在上例中，当密度函数 $\mu(x,y)$ 在弧段 L 上连续时，得到弧段 L 的质量为 $\int_L \mu(x,y)ds$.

一般，当被积函数 $f(x,y)$ 在弧段 L 上连续时，对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 都存在.

(3) 当平面弧段 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$，则弧微元 $ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$.

这可由定积分的微元法得到：取 t 为积分变量，$t\in[\alpha,\beta]$，在 $[\alpha,\beta]$ 上任取子区间 $[t,t+dt]$（相

应于自变量增量 dt，函数 x,y 产生增量 $\Delta x=\varphi(t+dt)-\varphi(t),\ \Delta y=\psi(t+dt)-\psi(t)$)，弧在此区间上的对应部分长度近似等于弦长, 即 $\Delta s\approx\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$（$dt$ 越小近似越好)；由函数增量的微分近似式 $\Delta x=\varphi(t+dt)-\varphi(t)\approx dx=\varphi'(t)dt$ 和 $\Delta y=\psi(t+dt)-\psi(t)\approx dy=\psi'(t)dt$（$dt$ 越小近似越好)，得 $\Delta s\approx\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt=ds$，由定积分的微元法，弧微元 $ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$；

(4) 当积分弧段 L 是封闭曲线时，对弧长的曲线积分记为 $\oint_L f(x,y)ds$.

二、对弧长曲线积分的性质

由于对弧长曲线积分的定义本质上和定积分、二重和三重积分定义一样，故它们有完全类似的性质, 即在相关的对弧长曲线积分都存在的情况下，有

性质 1 (函数可加性及齐性) 对常数 α,β，

$$\int_L[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]ds=\alpha\int_L f(x,y)ds+\beta\int_L f(x,y)ds;$$

性质 2（区域可加性） 如果弧 L 可分成 n 段弧 $L_1,L_2,\cdots,L_n$，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1}f(x,y)ds+\int_{L_2}f(x,y)ds+\cdots+\int_{L_n}f(x,y)ds;$$

性质 3（弧长性质） $\int_L 1ds$ 等于 L 的长度;

其他性质如不等式性质、估值定理和积分中值定理等（略）.

注： 上述定义和性质均可推广到三元函数 $f(x,y,z)$ 在空间曲线弧 L 上对弧长的曲线积分, 如定义 $\int_L f(x,y,z)ds=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta s_i$，函数可加性和齐性为

$$\int_L[\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]ds=\alpha\int_L f(x,y,z)ds+\beta\int_L g(x,y,z)ds \text{ 等.}$$

三、对弧长曲线积分的计算

当平面弧段 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\ \alpha\le t\le\beta$，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \text{ (积分下限比上限小).}$$

注: 平面弧段 $L:y=f(x),a\le x\le b$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=x,\\ y=f(x),\end{cases}\ a\le x\le b$，此时 $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$；

平面弧段 L：$x=g(y),c\le y\le d$ 的参数方程为 $\begin{cases}y=y,\\ x=g(y),\end{cases}\ c\le y\le d$，此时 $ds=\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$；

2. 当空间弧段 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \quad \alpha \le t \le \beta \\ z=\omega(t) \end{cases}$，则

$\int_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}dt$ (积分下限比上限小).

例 1 计算 $\int_L \sqrt{y}ds$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 之间的一段弧.

解：该段弧的参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases}, 0 \le x \le 1$，故

$$\int_L \sqrt{y}ds = \int_0^1 \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+[(x^2)']^2}dx = \int_0^1 x\cdot\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}(5^{\frac{3}{2}}-1).$$

例 2 计算 $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$，其中 L 是螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$ 上相应 t 从 0 到 2π 的一段弧.

解：$\int_L (x^2+y^2+z^2)ds = \int_0^{2\pi}[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2]\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}dt$

$$= \int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt = \sqrt{a^2+k^2}(2\pi a^2+\frac{8}{3}\pi^3k^2).$$

例 3 计算 $\oint_L (x^2+y^2)^n ds$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t, 0\le t\le 2\pi$.

解：因被积函数在圆周上取函数值，故 $\oint_L (x^2+y^2)^n ds = a^{2n}\oint_L ds = 2\pi a^{2n+1}$.

例 4 计算 $\int_L (x+y)ds$，其中 L 为连接(1,0)和(0,1)两点的直线段.

解：因被积函数在该直线段上取函数值，故 $\int_L (x+y)ds = \int_L ds = \sqrt{2}$.

例 5 计算 $\int_L xds$，其中 L 为直线 $y=x$ 和抛物线 $y=x^2$ 围成区域的整个边界.

解：设点 $A(1,1)$，则 $L=$ 线段 OA + 弧 OA，线段 $OA: y=x, 0\le x\le 1$ 的参数方程为 $OA:\begin{cases} x=x \\ y=x \end{cases}, 0\le x\le 1$，弧段 $OA: y=x^2, 0\le x\le 1$ 的参数方程为 $OA:\begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases}, 0\le x\le 1$，故

$$\int_L xds = \int_0^1 x\sqrt{1+[(x)']^2}dx + \int_0^1 x\sqrt{1+[(x^2)']^2}dx = \sqrt{2}\int_0^1 xdx + \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{12}(5^{\frac{3}{2}}-1).$$

第二节 对坐标的曲线积分

一、对坐标的曲线积分的概念与性质

变力沿平面有向曲线所作的功

xoy 平面上的质点在变力 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 作用下从点 A 沿曲线弧 L 移动到点 B，求变力 $\vec{F}(x,y)$ 作的功 W，这里 $P(x,y),Q(x,y)$ 均在 L 上连续.

求法：(1). 分割，在弧 L 上任意插入分点 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),\cdots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ 将弧分成 n 个小弧段 $\widehat{AM_1},\widehat{M_1M_2},\cdots,\widehat{M_{n-1}B},$ 在每段弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)；

(2). 近似求和：当第 i 段弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 充分小时，由于 $P(x,y),Q(x,y)$ 在弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上连续，从而 $\vec{F}(x,y)$ 在弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上各点的函数值相差不大，故可以 $\vec{F}(\xi_i,\eta_i)$ 近似代替弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上各点处的力，则第 i 段弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上作的功 $\Delta W_i\approx\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i},i=1,2,\cdots,n.$ 这里位移 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=(\Delta x_i,\Delta y_i),\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$，当每段弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 都较小时，整段弧 L 上作的功 $W=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta W_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}[\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$；

(3). 取极限：令 λ 为 n 段弧长度的最大值，则弧 L 上变力作的功

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i].$$

上述例子中将具体函数看成普通函数并写出三个求解步骤即得对坐标的曲线积分定义.

对坐标曲线积分的定义:$\int_L P(x,y)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i,\int_L Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$.

注：(1) 记号：$\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L\vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r},$ 这里 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)),\ d\vec{r}=(dx,dy)$. 在上述记号下，按定义可得上例中的变力功

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L\vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}\ .$$

(2) 在上例中，当向量函数 $\vec{F}(x,y)$ 在弧段 L 上连续时，得变力功为 $\int_L\vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$. 一般，当被积函数 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 在有向弧 L 上连续时，对坐标的曲线积分 $\int_L\vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 都存在;

(3) 当有向弧 L 是封闭曲线时，对坐标的曲线积分记为 $\oint_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$.

二、对坐标的曲线积分的性质

由于对坐标的曲线积分定义本质上和其他积分定义一样，故它们有完全类似的性质，即在相关的对坐标的曲线积分都存在的情况下，有

性质 1 (函数可加性及齐性) 对常数 α,β ，

$$\int_L [\alpha\vec{F}_1(x,y)+\beta\vec{F}_2(x,y)]\cdot d\vec{r} = \alpha\int_L \vec{F}_1(x,y)\cdot d\vec{r}+\beta\int_L \vec{F}_2(x,y)\cdot d\vec{r}\,;$$

性质 2（区域可加性） 如果有向弧 L 可分成 n 段有向弧 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ ，则

$$\int_L F(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_{L_1} F(x,y)\cdot d\vec{r}+\int_{L_2} F(x,y)\cdot d\vec{r}+\cdots+\int_{L_n} F(x,y)\cdot d\vec{r}\,;$$

性质 3（反号性） 在有向弧 L 和它的反向弧 L^- 上对坐标的曲线积分反号，即

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = -\int_{L^-} \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}\,.$$

(注意到变力 $\vec{F}(x,y)$ 作用在质点上从有向弧 L 的起点 A 移动到终点 B 作的功 $W_1=\int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$ ， $\vec{F}(x,y)$ 从反向弧 L^- 的起点 B 移动到终点 A 作的功 $W_2=\int_{L^-} \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$，因为 $\vec{F}(x,y)$ 从有向弧 L 的起点 A 移动到终点 B，再从反向弧 L^- 的起点 B 移动到终点 A 作的功 $W_1+W_2=\vec{F}(x,y)\cdot\vec{A}A=0$，故结论成立.)

注：上述定义、记号和性质均可推广到三元函数在空间有向弧 L 上对坐标的曲线积分，如定义 $\int_L P(x,y,z)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta x_i$，记号 $\int_L P(x,y,z)dx+\int_L Q(x,y,z)dy+\int_L R(x,y,z)dz$

$=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_L \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r}$，这里

$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，$d\vec{r}=(dx,dy,dz)$. 也有类似的性质.

三、对坐标的曲线积分的计算

1. 利用有向弧的参数方程转化为定积分计算

当平面有向弧 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，则

$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$，这里 α,β 分别是平面有向弧 L 的起点和终点对应的参数.

注：平面曲线弧 $L: y=f(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=f(t) \end{cases}$；平面曲线弧 L：$x=g(y)$ 的参数方程为 $\begin{cases} y=y \\ x=g(y) \end{cases}$；

当空间有向弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$，则 $\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$

$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$，这里 α,β 分别是空间有向弧 L 的起点和终点对应的参数.

例 1 计算 $\int_L xydx$，其中 L 是由抛物线 $x=y^2$ 上从点 $A(1,-1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧.

解：该有向弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} y=y \\ x=y^2 \end{cases}$，参数 y 从-1 到 1，

$$\int_L xydx=\int_{-1}^1 y^2\cdot y\cdot(y^2)'dy=2\int_{-1}^1 y^4dy=\frac{4}{5}.$$

例 2 计算 $\int_L y^2dx$，其中 L 是

(1) 半径为 a 、圆心为原点、按逆时针方向的上半圆周；

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

解：(1) 有向弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$，参数 θ 从 0 到 π，

$$\int_L y^2dx=\int_0^\pi a^2\sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta=a^3\int_0^\pi(1-\cos^2\theta)d\cos\theta=a^3(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big|_0^\pi=-\frac{4}{3}a^3.$$

(2) 有向弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}$，参数 x 从 a 到 $-a$，$\int_L y^2dx=\int_a^{-a}0^2dx=0$.

例 3 计算 $\int_L 2xydx+x^2dy$，其中 L 是

(1)抛物线 $y=x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧；

(2)抛物线 $x=y^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧.

解：(1) 有向弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases}$，参数 x 从 0 到 1，

$$\int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot (x^2)')dx = 4\int_0^1 x^3dx = 1.$$

(2)有向弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} y = y \\ x = y^2 \end{cases}$，参数 y 从 0 到 1，

$$\int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 [2y^2 \cdot y \cdot (y^2)' + y^4]dy = 5\int_0^1 y^4dx = 1.$$

例 4 计算 $\int_L x^3dx + 3zy^2dy + x^2ydz$，其中 L 是从点(3,2,1)到(0,0,0)的直线段.

解：有向弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$，参数 t 从 1 到 0，

$$\int_L x^3dx + 3zy^2dy + x^2ydz = \int_1^0 (27t^3 \cdot 3 + 3t \cdot 4t^2 \cdot 2 - 9t^2 \cdot 2t)dt = 87\int_1^0 t^3dt = -\frac{87}{4}.$$

例 5 一个质点在点 $M(x, y)$ 处受力 $\vec{F}$ 的作用，$\vec{F}$ 的大小与点 M 到原点 O 的距离成正比，方向恒指向原点. 此质点由点 $A(a,0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 按逆时针方向移动到点 $B(0,b)$，求力 $\vec{F}$ 所作的功 W.

解：(1) 向量 $\bar{O}M$ 的单位向量为 $(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$，其负向量即力 $\vec{F}$ 的单位向量，又 $\left|\vec{F}\right| = k\sqrt{x^2 + y^2}$，$k > 0$ 为比例常数，从而 $\vec{F} = \left|\vec{F}\right|(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) = (-kx, -ky)$；

(2) 设 L 是由点 $A(a,0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 按逆时针方向移动到点 $B(0,b)$ 的有向弧，其参数方程为 $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$，$\theta$ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，于是力 $\vec{F}$ 所作的功

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L -kxdx - kydy = (-k)\int_L xdx + ydy$$

$$= (-k)\int_0^{\frac{\pi}{2}} [a\cos\theta(-a\sin\theta) + b\sin\theta(b\cos\theta)]d\theta = (-k)(b^2 - a^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$= (-k)(b^2 - a^2)\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (-\frac{k}{2})(b^2 - a^2).$$

例 6 一个方向为横轴正向的恒力 $\vec{F}$ 作用在质点上，沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移动第一象限的四分之一圆弧所作的功 W.

解：(1)恒力 $\vec{F}$ 的方向是横轴正向,故 $\vec{i}=(1,0)$ 是 $\vec{F}$ 的单位向量，因此 $\vec{F}=\left|\vec{F}\right|\vec{i}=(\left|\vec{F}\right|,0)$；

(2) 设 L 是由点 $A(R,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移动到点 $B(0,R)$ 的有向弧，其参数方程为 $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta$，$\theta$ 从 0 变到 $\dfrac{\pi}{2}$，于是力 $\vec{F}$ 所作的功

则 $W=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_L \left|\vec{F}\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\vec{F}\right|dR\cos\theta=\left|\vec{F}\right|\cdot R\cdot(0-1)=-\left|\vec{F}\right|R$.

2. 利用格林公式转化为二重积分计算

平面区域 D 的边界曲线 L 的正向:<u>规定为人沿该方向行走时区域 D 总在人的左边的曲线方向</u>.

例如，对平面上的环区域 D，它的内边界曲线的正向即顺时针方向，外边界曲线的正向即逆时针方向；对平面上的“无洞”区域 D，它的边界曲线的正向即逆时针方向.

定理 设 $P=P(x,y),Q=Q(x.y)$ 在平面有向闭曲线 L 围成的闭区域 D 上具有一阶连续偏导数，则 $\oint_L Pdx+Qdy=\begin{cases}\iint_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy，当L取正向\\ -\iint_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy，当L取负向\end{cases}$.

定理中的公式称为**格林公式**.

例 1 证明 $\oint_L 2xydx+x^2dy=0$，其中 L 是任意一条分段光滑的闭曲线.

解：令 $P=2xy,Q=x^2$，因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x,\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$ 在整个 xoy 平面上都连续，从而在任意分段光滑闭曲线 L 围成的闭区域 D 上连续，由格林公式，

$\oint_L 2xydx+x^2dy=\pm\iint_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$.

例 2 (1) $\oint_L(x^2-y)dx+(x+\sin^2 y-1)dy$，其中 L 为正向圆周 $x^2-4x+y^2=0$；

(2) $\oint_L(x^2-y+4)dx+(3x+5y-6)dy$，其中 L 为顶点分别是 $(0,0),(3,0),(3,2)$ 的三角形的正向边界.

解：(1)令 $P=x^2-y,\ Q=x+\sin^2 y-1$，因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1,\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$ 在正向圆周

$L:x^2-4x+y^2=0$ 围成的闭区域上 D 连续，由格林公式，

$\oint_L(x^2-y)dx+(x+\sin^2 y-1)dy=\iint_D 2dxdy=2\cdot\pi 2^2=8\pi$；

(2) 令 $P = x^2 - y + 4,\ \ Q = 3x + 5y - 6$，因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3,\ \ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$ 在正向三角形边界 L 围成的闭区域上 D 连续，由格林公式,

$$\oint_L (x^2 - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy = \iint_D 4dxdy = 4 \times 3 = 12.$$

例 3 $\oint_L \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，其中 L 为 (1)正向圆周 $(x-1)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$； (2) 正向圆周 $x^2 + y^2 = R^2$.

解：令 $P = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}, Q = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$，

(1) 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$， $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ 在正向圆周 $L: (x-1)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$ 围成的闭区域上 D 连续，由格林公式,

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = 0;$$

(2) 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$， $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ 在正向圆周 $L: x^2 + y^2 = R^2$ 围成的闭区域 D 上不连续，不能用格林公式.

注意到 $\oint_L \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{R^2}\oint_L xdy - ydx$，令 $P = -y, Q = x$，则由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$ 在正向圆周 $L: x^2 + y^2 = R^2$ 围成的闭区域 D 上连续，由格林公式

$$\oint_L xdy - ydx = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x})dxdy = \iint_D 2dxdy = 2 \cdot \pi R^2，\text{于是得到}$$

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{R^2}\oint_L xdy - ydx = 2\pi.$$

例 4 $\int_L xdy - ydx$，其中 L 为点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,0)$ 的顺时针半圆弧 $(x-1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$.

解：法一：有向半圆弧 L 的参数方程为 $x - 1 = \cos t, y = \sin t$, t 从 π 到 0(与点 $B(-1,0)$ 到点 $C(1,0)$ 的顺时针半圆弧 $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ 的参数对应值一样)，则

$$\int_L xdy - ydx = \int_\pi^0 [(1 + \cos t)\cos t - \sin t(-\sin t)]dt = \int_\pi^0 (\cos t + 1)dt = (\sin t + t)\Big|_\pi^0 = -\pi$$

法二：$\int_L xdy - ydx = \int_{L + \bar{A}O} xdy - ydx - \int_{\bar{A}O} xdy - ydx$.

有向线段 $\vec{A}O$ 的参数方程为 $x=x, y=0$，x 从 0 到 2，$\int_{\vec{A}O} xdy-ydx=\int_0^2 (x\cdot(0)'-0)dx=0$；

令 $P=-y,\ Q=x$，因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1,\ \ \dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$ 在负向封闭曲线 $L+\vec{A}O$ 围成的闭区域 D 上连续，由格林公式，$\int_{L+\vec{A}O} xdy-ydx=-\iint_D 2dxdy=-\pi$，从而 $\int_L xdy-ydx=-\pi$.

例 5 $\oint_L \dfrac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为逆时针方向圆周 $(x-1)^2+y^2=2$.

解：令 $P=\dfrac{y}{2(x^2+y^2)},\ \ Q=\dfrac{-x}{2(x^2+y^2)}$，因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2},\ \ \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}$ 在正向圆周 $(x-1)^2+y^2=2$ 围成的闭区域上不连续，不能用格林公式；

在 L 内作一顺时针方向圆周 $l: x^2+y^2=r^2, r$ 为充分小正数，则

$$\oint_L \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\oint_{L+l} \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}-\int_l \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)};$$

因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2},\ \ \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}$ 在正向封闭曲线 $L+l$ 围成的闭区域 D_r 上连续，

故由格林公式得 $\oint_{L+l} \dfrac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\iint_{D_r} 0dxdy=0$；

由于负向圆周 l 的参数方程为 $x=r\cos t, y=r\sin t,\ t$ 从 2π 到 0，故得

$$\int_l \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\int_{2\pi}^0 \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\frac{1}{2r^2}\int_{2\pi}^0 [r\sin t(-r\sin t)-r\cos t\cdot r\cos t]dt=\pi;$$

从而 $\oint_L \dfrac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=-\pi$.

四、平面曲线积分与路径无关

一些例子表明，从平面上一点沿不同的曲线到另一点对坐标的曲线积分值有时一样(称为积分与路径无关)，有时不一样(称为积分与路径有关). 我们来研究积分值与路径无关的条件.

定义 若对平面区域 G 内任两点 A,B 及从 A 到 B 的任两条曲线 $L_1(A,B)$ 和 $L_2(A,B)$，都有 $\int_{L_1(A,B)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{L_2(A,B)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，则称曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 G 内与路径无关，否则称为与路径有关.

定义 若平面区域G内任一封闭曲线所围成的区域仍属于G，则称G为单连通区域，否则称G为复连通区域.

一般，“无洞”的平面区域为单连通区域，“有洞”的平面区域为复连通区域. 例如，$\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 和 $\{(x,y)|x>0\}$ 均为单连通区域； $\{(x,y)|0<x^2+y^2\le 1\}$ 和 $\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$ 均为复连通区域.

定理 若$P=P(x,y),Q=Q(x,y)$在单连通区域G内具有一阶连续偏导数，则

(1) 在G内，曲线积分$\int_{L(A,B)} Pdx+Qdy$ 与路径$L(A,B)$无关，只与起点A和终点B有关$\Leftrightarrow$

(2) 在G内，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}\Leftrightarrow$

(3) 沿G内任一有向闭曲线C，曲线积分$\oint_C Pdx+Qdy=0\Leftrightarrow$

(4) 在G内，$Pdx+Qdy$为某函数$u=u(x,y)$的全微分，即$du=Pdx+Qdy$.

注： 在单连通区域G内，当$Pdx+Qdy$为某函数$u=u(x,y)$的全微分时，取G内一定点$A(x_0,y_0)$到一动点$B(x,y)$的路径$L(A,B)$，则$u(x,y)=\int_{L(A,B)} Pdx+Qdy \overset{\text{记为}}{=} \int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} Pdx+Qdy$，当$G$内包含原点时，$A(x_0,y_0)$一般取为原点(计算较简单)，$A(x_0,y_0)$点取得不同，$u(x,y)$相差一个常数.

例 1 设$F(x,y)$可微，若曲线积分$\int_L F(x,y)(xdx+ydy)$与路径L无关，则函数$F(x,y)$应满足______________.

解：设$P=xF(x,y),\ Q=yF(x,y)$. 由积分与路径无关，故$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即$yF_x(x,y)=xF_y(x,y)$，此即函数满足的关系.

例 2 设函数$f(x),x>0$连续，对$x>0$的任一闭曲线L有$\oint_L 4x^3ydx+xf(x)dy=0$且$f(1)=2$，则$f(x)=$__________________.

解：由题意知在单连通区域$G=\{(x,y)|x>0\}$内，曲线积分与路径无关，故在G内，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即$(xf(x))'=4x^3,x>0$，得$xf(x)=\int 4x^3dx=x^4+C$，又由$f(1)=2$得$C=1$，$f(x)=\dfrac{x^4+1}{x},x>0$.

例 3 证明曲线积分$\int_{(0,0)}^{(2,3)}(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$与路径无关，并求其值.

(1) **证明**：因为$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin\ y-2y\sin\ x$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin\ x-2x\sin\ y$ 在 xoy 平面上都连续并且相等，故曲线积分在 xoy 平面上与路径无关，只与起点 $O(0,0)$ 和终点 $B(2,3)$ 有关;

(2) **解**：为计算曲线积分值，选 $O(0,0)$ 到 $B(2,3)$ 的特殊路径，如从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 再到 $B(2,3)$ 的折线段. 于是 $\int_{O(0,0)}^{B(2,3)}=\int_{\vec{O}A}+\int_{\vec{A}B}$. 有向线段 $\vec{O}A$ 和 $\vec{A}B$ 的参数方程分别为

$\vec{O}A: x=x, y=0, x从0到2$；$\vec{A}B: x=2, y=y, y从0到3$，于是得

$$\int_{\vec{O}A}(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy=\int_0^2 2xdx=4;$$

$$\int_{\vec{A}B}(2x\cos\ y-y^2\sin\ x)dx+(2y\cos\ x-x^2\sin\ y)dy=\int_0^3(2y\cos 2-4\sin\ y)dy$$

$$=9\cos 2+4\cos 3-4;$$

$$\int_{(0,0)}^{(2,3)}(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy=9\cos 2+4\cos 3.$$

例 4 证明在整个 xoy 平面内，xy^2dx+x^2ydy 是某个函数 $u=u(x,y)$ 的全微分，并求这个函数 $u(x,y)$.

(1) **证明**：因为$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy$ 在 xoy 平面上都连续并且相等，故 xy^2dx+x^2ydy 是某个函数 $u=u(x,y)$ 的全微分；

(2) **解**：为计算 $u(x,y)$，选 $O(0,0)$ 到 $B(x,y)$ 的特殊路径，如从 $O(0,0)$ 到 $A(x,0)$ 再到 $B(x,y)$ 的折线段. 于是 $u(x,y)=\int_{O(0,0)}^{B(x,y)}=\int_{\vec{O}A}+\int_{\vec{A}B}$. 有向线段 $\vec{O}A$ 和 $\vec{A}B$ 的参数方程分别为

$\vec{O}A: x=t, y=0, t从0到x$； $AB: x=x(看成常数), y=t, t从0到y$，于是得

$$\int_{\vec{O}A}xy^2dx+x^2ydy=\int_0^x t\cdot 0^2dt=0;\ \int_{\vec{A}B}xy^2dx+x^2ydy=\int_0^y x^2\cdot tdt=\frac{x^2y^2}{2};\ u(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}.$$

第四节 对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分的概念和性质

密度不均匀的空间曲面块质量

空间曲面块 Σ，它在点 (x,y,z) 处的面密度为 $\mu(x,y,z)$，这里假设 $\mu(x,y,z)\geq 0$ 且 $\mu(x,y,z)$ 在 Σ 上连续. 求其质量.

求法：(1). 分割，将曲面块Σ任意分成n个小曲面块$\Delta S_1,\Delta S_1,\cdots,\Delta S_n$，$\Delta S_i$也表示第$i$个小曲面块的面积，并在小曲面块$\Delta S_i$内任取一点$(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$；

(2). 近似求和：当第i个小曲面块ΔS_i充分小时，由于$\mu(x,y,z)$在ΔS_i上连续，从而$\mu(x,y,z)$在ΔS_i上各点的函数值相差不大，故可以$\mu(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$近似代替小曲面块$\Delta S_i$上各点面密度，则第$i$个小曲面块的质量$\Delta m_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta S_i, i=1,2,\cdots,n.$ 当小曲面块$\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$都较小时，整个曲面块$\Sigma$的质量$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta S_i$；

(3). 取极限：令d_i表示小曲面块ΔS_i上任两点长度的最大值(小曲面块ΔS_i的直径)，$\lambda=\max(\Delta d_1,\Delta d_2,\cdots,\Delta d_n)$，曲面块$\Sigma$的质量$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta s_i$.

将上述例子中的具体函数看成普通函数再写出三个步骤即得对面积的曲面积分的定义.

对面积的曲面积分定义: $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta S_i$，$dS$称为曲面面积微元.

注：(1) 由定义，上例中密度不均匀的曲面块Σ的质量$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta S_i$

$=\iint_\Sigma \mu(x,y,z)dS$，即面密度$\mu(x,y,z)$在曲面块$\Sigma$上对面积的曲面积分值.

(2)在上例中，当密度函数$\mu(x,y,z)$在曲面块Σ上连续时，得到曲面块Σ的质量为$\iint_\Sigma \mu(x,y,z)dS$.

一般，当被积函数$f(x,y,z)$在曲面块Σ上连续时，对面积的曲面积分$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 都存在.

(3) 当曲面块Σ的方程为$z=z(x,y)$，则曲面面积微元$dS=\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$；

(4) 当曲面块Σ是封闭曲面时，对面积的曲面积分记为$\oiint_\Sigma f(x,y,z)dS$.

二、对面积的曲面积分的性质(与其他积分类似).

性质 1 (函数可加性及齐性) 对常数α,β，

$$\iint_\Sigma[\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]dS=\alpha\iint_\Sigma f(x,y,z)dS+\beta\iint_\Sigma g(x,y,z)dS;$$

性质 2（区域可加性）如果曲面块Σ可分成n部分$\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_n$，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS+\cdots+\iint_{\Sigma_n} f(x,y,z)dS;$$

性质 3（面积性质） $\iint_\Sigma 1dS$等于曲面块Σ的面积;

其他性质如不等式性质、估值定理和积分中值定理等（略）.

三、对面积的曲面积分的计算

当曲面块Σ：$z=z(x,y)$在xoy平面上的投影区域为D_{xy}，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy \text{；}$$

当曲面块Σ：$x=x(y,z)$在yoz平面上的投影区域为D_{yz}，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2(y,z)+x_z^2(y,z)}dydz .$$

当曲面块$\Sigma: y=y(x,z)$在xoz平面上的投影区域为D_{xz}，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{Dxz} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+(y_x^/)^2+(y_z^/)^2}dxdz$$

例 1 计算$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$是锥面$z^2=3(x^2+y^2)$被平面$z=0$和$z=3$截得的部分.

解：曲面$\Sigma: z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2},0\le z\le 3$，$D_{xy}:\begin{matrix}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le\sqrt{3}\end{matrix}$；又

$$z_x=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{，}\ dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=2dxdy\text{，于是}$$

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=2\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3d\rho=9\pi\cdot$$

例 2 计算$\iint_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS$，其中$\Sigma$是平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一卦限中的部分.

解：曲面$\Sigma: z=4(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3})$，$D_{xy}:0\le x\le 2,0\le y\le 3-\frac{3}{2}x$，其面积为 3; 又

$$z_x=-2,z_y=\frac{-4}{3}\text{，}\ dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy\text{，于是}$$

$$\iint_{\Sigma}(z+2x+\frac{4y}{3})dS=\iint_{D_{xy}}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}\cdot 3=4\sqrt{61}\cdot$$

例 3 计算$\oiint_{\Sigma} xyz\,dS$，其中Σ是平面$x=0,y=0,z=0$及$x+y+z=1$所围成的四面体的整个边界曲面.

解：曲面Σ在平面$x=0,y=0,z=0$及$x+y+z=1$上的部分依次记为$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$及$\Sigma_4$；则

$$\oiint_{\Sigma} xyzdS=\iint_{\Sigma_1} xyzdS+\iint_{\Sigma_2} xyzdS+\iint_{\Sigma_3} xyzdS+\iint_{\Sigma_4} xyzdS\text{，}$$

由于被积函数中的x,y,z要满足曲面的方程，故$\iint_{\Sigma_1} xyzdS=\iint_{\Sigma_2} xyzdS=\iint_{\Sigma_3} xyzdS=0$；

曲面$\Sigma_4: z=1-x-y$，

$D_{xy}:0\le x\le 1,0\le y\le 1-x$，$z_x=-1,z_y=-1$，$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy$，于是

$$\iint_{\Sigma_4} xyzdS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy=\int_0^1dx\int_0^{1-x}xy(1-x-y)dy=\frac{\sqrt{3}}{120}\cdot\quad \oiint_{\Sigma} xyz\,dS=\frac{\sqrt{3}}{120}.$$

例 4 计算 $\iint_{\Sigma} z^2 dS$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=4, 0\le z\le 6$.

解：因该题中曲面 Σ 的方程 $x^2+y^2=4$ 不能写成 $z=z(x,y)$，但可写为 $x=\pm\sqrt{4-y^2}$，

设 $\Sigma_1 : x=\sqrt{4-y^2}$，它在 yoz 平面上的投影区域为矩形区域 D_{yz}：$-2\le y\le 2, 0\le z\le 6$，

$x_y=\dfrac{-y}{\sqrt{4-y^2}}, x_z=0, dS=\dfrac{2}{\sqrt{4-y^2}}dydz$；

设 $\Sigma_2 : x=-\sqrt{4-y^2}$，它在 yoz 平面上的投影区域为矩形区域 D_{yz}：$-2\le y\le 2, 0\le z\le 6$，

$x_y=\dfrac{y}{\sqrt{4-y^2}}, x_z=0,\quad dS=\dfrac{2}{\sqrt{4-y^2}}dydz$，于是

$$\iint_{\Sigma} z^2 dS=\iint_{\Sigma 1} z^2 dS+\iint_{\Sigma 2} z^2 dS=\iint_{D_{yz}} z^2\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dydz+\iint_{D_{yz}} z^2\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dydz$$

$$=4\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-y^2}}dy\int_0^6 z^2dz=\frac{4}{3}6^3\cdot\arcsin\left.\frac{y}{2}\right|_{y=-2}^{y=2}=288\pi$$

第五节 对坐标的曲面积分

一、对坐标的曲面积分的概念和性质

<u>1. 曲面的侧</u>：即曲面法向量指向的侧，如对曲面 $z=z(x,y)$，若它的法向量指向上面，则曲面取上侧，指向下面，则取下侧；对曲面 $x=x(y,z)$，若它上面点的切平面法向量指向前面，则曲面取前侧，指向后面，则取后侧；对曲面 $y=y(x,z)$，若它上面点的切平面法向量指向左面，则曲面取左侧，指向右面，则取右侧；对封闭曲面，它上面点的切平面法向量指向外面，则曲面取外侧，指向里面，则取内侧.

<u>2. 有向曲面</u>: 规定了法向量指向(即取定了侧)的曲面.

<u>3. 有向曲面块 Σ 在坐标平面上的投影</u>：即带正负号的投影区域面积，如有向曲面块 ΔS 在 xoy 平面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 规定为 $(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, \cos\gamma>0,\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, \cos\gamma<0,\\ 0, \qquad \cos\gamma=0,\end{cases}$ 这里 $(\Delta\sigma)_{xy}$ 表示曲面块 ΔS 在 xoy 平面上的投影区域面积，$\cos\gamma$ 表示曲面块上点的切平面法向量指向与 z 轴正向的夹角余弦; 同理规定有向曲面块 ΔS 在 yoz 平面上的投影为 $(\Delta S)_{yz}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{yz}, \cos\alpha>0,\\ -(\Delta\sigma)_{yz}, \cos\alpha<0,\\ 0, \qquad \cos\alpha=0,\end{cases}$ 在 xoz 平面上的投影为

$(\Delta S)_{xz}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xz}, \cos\beta>0,\\ -(\Delta\sigma)_{xz}, \cos\beta<0,\\ 0, \qquad \cos\beta=0,\end{cases}$ 其中 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 分别表示曲面块上点的切平面法向量指向与 x 轴正向和 y 轴正向的夹角余弦.

4. 单位时间流向曲面指定侧的流体质量

密度为 1 且流速为常向量 $\vec{v}$ 的流体经过平面闭区域 D 单位时间内流向指定侧的流体质量 $\Phi = A(\vec{v}\cdot\vec{n})$，其中 A 是平面闭区域 D 的面积、$\vec{n}$ 是平面闭区域 D 上指定侧的单位法向量.

密度为 1 且流速为向量 $\vec{v}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ 的流体经过曲面 Σ 单位时间内流向指定侧的流体质量 Φ，这里假设 $\vec{v}(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续.

求法：(1). 分割，将曲面块 Σ 任意分成 n 个小曲面块 $\Delta S_1, \Delta S_1, \cdots, \Delta S_n$，$\Delta S_i$ 也表示第 i 个小曲面块的面积，并在小曲面块 ΔS_i 内任取一点 $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$；

(2). 近似求和：当第 i 个小曲面块 ΔS_i 充分小时，由于 $\vec{v}(x,y,z)$ 在 ΔS_i 上连续，从而 $\vec{v}(x,y,z)$ 在 ΔS_i 上各点的函数值相差不大，故可以 $\vec{v}(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ 近似代替小曲面块 ΔS_i 上各点流速，以 $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ 的单位法向量 $n_i = (\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$ 近似代替小曲面块 ΔS_i 上各点单位法向量，则经过曲面块 ΔS_i 单位时间内流向指定侧的流体质量 $\Delta\Phi_i \approx (\vec{v}_i, \vec{n}_i)\Delta S_i, i = 1,2,\cdots,n$. 当小曲面块 $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$ 都较小时，经过曲面 Σ 单位时间内流向指定侧的流体质量 $\Phi = \sum_{i=1}^{n}\Delta\Phi_i \approx \sum_{i=1}^{n}\vec{v}(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\cdot\vec{n}_i\Delta S_i$；

注意到当小曲面块 ΔS_i 充分小时，若 $\cos\gamma_i > 0$ 时，小曲面块 ΔS_i 在 xoy 平面上的投影 $(\Delta S_i)_{xy} = (\Delta\sigma_i)_{xy} =$ 过点 $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ 的切平面上对应小块的面积 $\times\cos\gamma_i \approx \Delta S_i\cos\gamma_i$；若 $\cos\gamma_i < 0$ 时，小曲面块 ΔS_i 在 xoy 平面上的投影 $(\Delta S_i)_{xy} = -(\Delta\sigma_i)_{xy} = -[$ 过点 $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ 的切平面上对应小块的面积 $\times\cos(\pi - \gamma_i)] \approx \Delta S_i\cos\gamma_i$；同理 $(\Delta S_i)_{yz} \approx \Delta S_i\cos\alpha_i, (\Delta S_i)_{xz} \approx \Delta S_i\cos\beta_i$.

从而，$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)(\Delta S_i)_{xz} + R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)(\Delta S_i)_{xy}]$.

(3). 取极限：令 d_i 表示小曲面块 ΔS_i 上任两点长度的最大值(小曲面块 ΔS_i 的直径)，$\lambda = \max_{1\le i\le n}(\Delta d_i)$，则经过曲面 Σ 单位时间内流向指定侧的流体质量

$$\Phi = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)(\Delta S_i)_{xz} + R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)(\Delta S_i)_{xy}].$$

将上述例子中的具体函数看成普通函数再写出三个步骤即得对坐标的曲面积分的定义.

对坐标的曲面积分定义：$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)(\Delta S_i)_{xy}$，

$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)(\Delta S_i)_{yz}$，$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)(\Delta S_i)_{xz}$.

注：(1) 记号：$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+\iint_\Sigma Q(x,y,z)dxdz+\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$

$=\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$. 在上述记号下，按定义可得上例中经过曲面$\Sigma$单位时间内流向指定侧的流体质量

$$\Phi=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{xz}+R(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

$$=\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy.$$

(2) 在上例中，当流速$\vec{v}(x,y,z)$的坐标$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在有向曲面$\Sigma$上连续时，得流体质量为$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$. 一般，当被积函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在有向曲面$\Sigma$上连续时，对坐标的曲面积分$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$都存在;

(3) 当有向曲面Σ是封闭曲面时，对坐标的曲面积分记为

$$\oint\!\!\oint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy.$$

二、对坐标的曲面积分的性质（与其他积分类似）

性质 1 (函数可加性及齐性) 对常数α,β，

$$\iint_\Sigma \alpha P(x,y,z)dydz+\beta Q(x,y,z)dxdz=\alpha\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+\beta\iint_\Sigma Q(x,y,z)dxdz;$$

性质 2（区域可加性）如果曲面块Σ可分成n部分Σ_1,Σ_2，则

$$\iint_\Sigma Pdydz+Qdxdz+Rdxdz=\iint_{\Sigma_1} Pdydz+Qdxdz+Rdxdz+\iint_{\Sigma_2} Pdydz+Qdxdz+Rdxdz;$$

性质 3（反号性） 在有向曲面Σ和取相反侧的有向曲面Σ^-上对坐标的曲面积分反号，即

$$\iint_\Sigma Pdydz=-\iint_{\Sigma^-}Pdydz,\quad \iint_\Sigma Qdxdz=-\iint_{\Sigma^-}Qdxdz,\quad \iint_\Sigma Rdxdy=-\iint_{\Sigma^-}Rdxdy.$$

证明：$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{xy}$，$(\Delta S_i)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma_i)_{xy},\cos\gamma_i>0,\\-(\Delta\sigma_i)_{xy},\cos\gamma_i<0,\\0,\qquad\cos\gamma_i=0,\end{cases}$

$\iint_{\Sigma^-} R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{xy}^-$，$(\Delta S_i)_{xy}^-=\begin{cases}(\Delta\sigma_i)_{xy}^-,\cos\gamma_i^->0,\\-(\Delta\sigma_i)_{xy}^-,\cos\gamma_i^-<0,\\0,\qquad\cos\gamma_i^-=0,\end{cases}$ 其中，

$(\Delta\sigma_i)_{xy}=(\Delta\sigma_i)_{xy}^-$都表示小曲面块$\Delta S_i$在$xoy$平面上的投影区域面积，$\gamma_i$是有向曲面$\Sigma$上点$(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$

处的切平面单位法向量 $\vec{n}_i$ 与 z 轴正向的夹角，它与有向曲面 Σ^- 上点 $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$ 处的切平面单位法向量 $\vec{n}_i^-(=-\vec{n}_i)$ 与 z 轴正向的夹角 γ_i^- 是互补的. 故 $-(\Delta S_i)_{xy}=\begin{cases}-(\Delta\sigma_i)_{xy},\cos\gamma_i^-<0\\ (\Delta\sigma_i)_{xy},\cos\gamma_i^->0\\ 0,\qquad \cos\gamma_i^-=0\end{cases}=(\Delta S_i)_{xy}^-$，从而

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n R(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{xy}=-\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n R(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{xy}^-=-\iint_{\Sigma^-}R(x,y,z)dxdy.$$

性质 4（投影性质） 当有向曲面 Σ 在 xoy 平面上的投影区域面积为 0，则 $\iint_\Sigma Rdxdy=0$；当有向曲面 Σ 在 xoz 平面上的投影区域面积为 0，则 $\iint_\Sigma Qdxdz=0$；当有向曲面 Σ 在 yoz 平面上的投影区域面积为 0，则 $\iint_\Sigma Pdydz=0$.

证明：注意到 $\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n R(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{xy}$，$(\Delta S_i)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma_i)_{xy},\cos\gamma_i>0,\\ -(\Delta\sigma_i)_{xy},\cos\gamma_i<0,\\ 0,\qquad \cos\gamma_i=0,\end{cases}$

其中，$(\Delta\sigma_i)_{xy}$ 表示小曲面块 ΔS_i 在 xoy 平面上的投影区域面积，立得结论.

三、对坐标的曲面积分的计算

1. 转化为二重积分计算

当有向曲面块 Σ：$z=z(x,y)$ 在 xoy 平面上的投影区域为 D_{xy}，则

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\begin{cases}\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dxdy,\text{当}\Sigma\text{取上侧},\\ -\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dxdy,\text{当}\Sigma\text{取下侧}\end{cases};$$

当有向曲面块 Σ：$y=y(x,z)$ 在 xoz 平面上的投影区域为 D_{xz}，则

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dxdy=\begin{cases}\iint_{D_{xz}}Q(x,y(x,z),z)dxdz,\text{当}\Sigma\text{取右侧},\\ -\iint_{D_{xz}}Q(x,y(x,z),z)dxdz,\text{当}\Sigma\text{取左侧}\end{cases};$$

当有向曲面块 Σ：$x=x(y,z)$ 在 yoz 平面上的投影区域为 D_{yz}，则

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\begin{cases}\iint_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)dydz,\text{当}\Sigma\text{取前侧},\\ -\iint_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)dydz,\text{当}\Sigma\text{取后侧}\end{cases};$$

证明：注意到 $\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n R(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)(\Delta S_i)_{xy}$，$(\Delta S_i)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma_i)_{xy},\cos\gamma_i>0,\\ -(\Delta\sigma_i)_{xy},\cos\gamma_i<0,\\ 0,\qquad \cos\gamma_i=0,\end{cases}$

其中，$(\Delta\sigma_i)_{xy}$ 表示小曲面块 ΔS_i 在 xoy 平面上的投影区域面积，γ_i 是有向曲面 Σ 上点 $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$ 处的切平面单位法向量 $\vec{n}_i$ 与 z 轴正向的夹角. 当 Σ 取上侧(即 $\cos\gamma_i > 0$)时,

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))(\Delta\sigma_i)_{xy} = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$；当 Σ 取下侧(即 $\cos\gamma_i < 0$)时，$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy = -\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))(\Delta\sigma_i)_{xy} = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$.

例 1 计算 $\iint_\Sigma x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，

其中 Σ 是长方体 $\Omega = \{(x,y,z)\big|0\le x\le a, 0\le y\le b, 0\le z\le c\}$ 整个表面的外侧.

解：将有向曲面 Σ 分成六个部分：

Σ_1: $z = c(0\le x\le a, 0\le y\le b)$ 的上侧；Σ_2: $z = 0(0\le x\le a, 0\le y\le b)$ 的下侧；

Σ_3: $x = a(0\le y\le b, 0\le z\le c)$ 的前侧；Σ_4: $x = 0(0\le y\le b, 0\le z\le c)$ 的后侧；

Σ_5: $y = b(0\le x\le a, 0\le z\le c)$ 的右侧；Σ_6: $y = 0(0\le x\le a, 0\le z\le c)$ 的左侧；则

$$\iint_{\Sigma_1} = \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4} + \iint_{\Sigma_5} + \iint_{\Sigma_5} + \iint_{\Sigma_6} \quad .$$

由投影性质和被积函数中的 x, y, z 要满足有向曲面的方程知，

$\iint_{\Sigma_1} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iint_{\Sigma_1} z^2dxdy$; $\quad \iint_{\Sigma_2} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iint_{\Sigma_2} z^2dxdy = 0$;

$\iint_{\Sigma_3} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iint_{\Sigma_3} x^2dydz$; $\quad \iint_{\Sigma_4} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iint_{\Sigma_4} x^2dydz = 0$;

$\iint_{\Sigma_5} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iint_{\Sigma_5} y^2dxdz$; $\quad \iint_{\Sigma_6} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iint_{\Sigma_6} y^2dxdz = 0$;

注意到 $\Sigma_1 : z = c$, $D_{xy} : 0\le x\le a, 0\le y\le b$, $\iint_{\Sigma_1} z^2dxdy = \int_0^a dx\int_0^b c^2dy = c^2ab$; 同理可得

$\iint_{\Sigma_3} x^2dydz = a^2bc$; $\iint_{\Sigma_5} y^2dxdz = b^2ac$, 得 $\iint_\Sigma x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = abc(a+b+c)$.

例 2 计算 $\iint_\Sigma xyzdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\ge 0, y\ge 0$ 的部分.

解：因有向曲面 Σ 的方程 $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$，故分 Σ 为两个部分：$\Sigma_1 : z = \sqrt{1-x^2-y^2}$，取上侧，$\Sigma_2 : z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$，取下侧，它们在 xoy 平面上的投影区域均为 $D_{xy} : 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 1$；从而 $\iint_\Sigma xyzdxdy = \iint_{\Sigma_1} xyzdxdy + \iint_{\Sigma_2} xyzdxdy$.

$$\iint_{\Sigma_1} xyz\,dxdy = \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 \rho^2\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho = \frac{1}{15}$$

$\iint_{\Sigma_2} xyz\,dxdy = -\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy = \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \dfrac{1}{15}$，故 $\iint_{\Sigma} xyzdxdy = \dfrac{2}{15}$.

2. 转化为对面积的曲面积分计算

对有向曲面块Σ，有 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS$;

$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz = \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta dS$; $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha dS$;

其中α,β,γ分别是有向曲面Σ上点的切平面法向量指向与x,y,z轴正向夹角. 从而

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

$= \iint_{\Sigma}[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS$ (**当Σ是有向平面时效果更好**).

证明：假设有向曲面块Σ的方程为$z=z(x,y)$，它在xoy平面上的投影区域为D_{xy}. <u>当有向曲面Σ取上侧时</u>，$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$; 又有向曲面块$\Sigma$上点的切平面法向量为$(-z_x,-z_y,1)$，其方向余弦为$\cos\alpha = \dfrac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos\beta = \dfrac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$,

曲面面积微元$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$，故对面积的曲面积分

$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y)dxdy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$; <u>当有向曲面$\Sigma$取下侧时</u>，$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$; 又有向曲面块$\Sigma$上点的切平面法向量为$(z_x,z_y,-1)$，其方向余弦为$\cos\alpha = \dfrac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos\beta = \dfrac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$,

曲面面积微元$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$，故对面积的曲面积分

$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y)dxdy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$; 类似得另两式.

例 1 计算$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$，其中$\Sigma$是旋转抛物面$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=0$及$z=2$之间的部分的下侧.

解：有向曲面$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$取下侧，令$F(x,y,z)=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)-z$，即得其上点的切平面法向量$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(x,y,-1)$，其方向余弦为

$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}},\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}},\cos\gamma=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$，曲面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 的面积微元

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$， $D_{xy}:x^2+y^2\le 4$，于是

$$\iint_\Sigma (z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_\Sigma [(z^2+x)\cos\alpha-z\cos\gamma]dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}\{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x]x+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}dxdy=\iint_{D_{xy}}[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]dxdy=8\pi.$$

例 2 计算 $\iint_\Sigma dydz+dzdx+dxdy$，其中

(1) Σ 是平面 $x+y+z=0$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所截部分的上侧.

(2) Σ 是平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标平面所截成的平面三角形的上侧.

解：(1)有向曲面 Σ 是平面 $x+y+z=0$ 上半径为 R 的圆盘面（面积为 πR^2 ），且取上侧，令 $F(x,y,z)=x+y+z$，即得有向曲面 Σ 上点的切平面法向量为 $\vec{n}=(1,1,1)$，其方向余弦为

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，于是

$$\iint_\Sigma dydz+dzdx+dxdy=\iint_\Sigma(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS=\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma 1dS=\sqrt{3}\pi R^2.$$

(2)有向曲面 $\Sigma:z=1-x-y$ 取上侧，令 $F(x,y,z)=x+y+z-1$，即得其上点的切平面法向量 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(1,1,1)$，其方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，曲面面积微元

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy$， $D_{xy}:0\le x\le 1,0\le y\le 1-x$，于是

$$\iint_\Sigma dydz+dzdx+dxdy=\iint_\Sigma(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS=\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma 1dS=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy=\frac{3}{2}.$$

例 3 计算 $\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截的在第一卦限内的部分的前侧.

解：有向曲面 Σ**：** $x=\sqrt{1-y^2}$ 取前侧，令 $F(x,y,z)=x-\sqrt{1-y^2}$，即得其上点的切平面法向量 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(1,\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}},0)$，其方向余弦为 $\cos\alpha=\sqrt{1-y^2},\cos\beta=y,\cos\gamma=0,$ 曲面面积微元 $dS=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}dydz$， $D_{yz}:0\le y\le 1,0\le z\le 3$，于是

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_{\Sigma} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS$$

$$= \iint_{D_{yz}} (\sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot y + z \cdot 0)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dydz = \iint_{D_{yz}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dydz$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \int_0^3 dz = 3\arcsin y\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$$

3. 利用高斯公式转化为三重积分计算

定理 设 $P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$ 在分片光滑的有向闭曲面 Σ 围成的空间闭区域 Ω 上具有一阶连续偏导数，则

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \begin{cases} \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z})dv, & \text{当}\Sigma\text{取外侧} \\ -\iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z})dv, & \text{当}\Sigma\text{取内侧} \end{cases}.$$

定理中的公式称为**高斯公式**.

例 1 计算 $\oiint_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$,

其中 Σ 是长方体 $\Omega = \{(x,y,z)\big| 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$ 整个表面的外侧.

解: 令 $P = x^2, Q = y^2, R = z^2$, 因为 $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial R}{\partial z} = 2z$ 在整个长方体区域 Ω 上都连续, 由高斯公式,

$$\oiint_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iiint_{\Omega} (2x+2y+2z)dv = 2\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x+y+z)dz.$$

$$= 2\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x+y+z)dz = 2\int_0^a dx \int_0^b [(x+y)c + \frac{1}{2}c^2]dy = 2\int_0^a [bcx + \frac{1}{2}cb^2 + \frac{1}{2}c^2b]dx$$

$$= 2(\frac{1}{2}bca^2 + \frac{1}{2}acb^2 + \frac{1}{2}ac^2b) = abc(a+b+c).$$

例 2 求向量 $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 通过闭区域 $\Omega = \{(x,y,z)\big| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量 Φ.

解：设 Σ 表示闭区域 Ω 的边界曲面且取外侧，则

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_{\Omega} 3dv = 3.$$

例 3 计算 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$, 其中 Σ 是半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

解：设曲面 $\Sigma_1 : z = 0,\ \ x^2 + y^2 \le R^2$ 取下侧，则 $\iint_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$，由高斯公式,

$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_{\Omega} 3dv = 2\pi R^3$, 这里 Ω 是封闭曲面 $\Sigma+\Sigma_1$ 围成的立体区域；$\iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_{\Sigma_1} zdxdy = -\iint_{D_{xy}} 0dxdy = 0$, 这里 $D_{xy}: x^2+y^2 \le R^2$ 是曲面 Σ_1 在 xoy 平面上的投影区域，故 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 2\pi R^3$.

例 4 计算 $\iint_{\Sigma}(y^2-z)dydz + (z^2-x)dzdx + (x^2-y)dxdy$，其中 Σ 是锥面

$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0 \le z \le h)$ 的外侧.

解：设曲面 $\Sigma_1: z=h,\ \ x^2+y^2 \le h^2$ 取上侧，则 $\iint_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$ ，由高斯公式,

$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)dydz + (z^2-x)dzdx + (x^2-y)dxdy = \iiint_{\Omega} 0dv = 0$, 这里 Ω 是封闭曲面 $\Sigma+\Sigma_1$ 围成的立体区域；

$\iint_{\Sigma_1}(y^2-z)dydz + (x^2-y)dzdx + (x^2-y)dxdy = \iint_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy = \iint_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy,$

$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h (\rho^2\cos^2\theta - \rho\sin\theta)\rho d\rho = \dfrac{\pi h^4}{4}$, 这里 $D_{xy}: x^2+y^2 \le h^2$ 是曲面 Σ_1 在 xoy 平面上的投影区域，故 $\iint_{\Sigma}(y^2-z)dydz + (z^2-x)dzdx + (x^2-y)dxdy = -\dfrac{\pi h^4}{4}$.

空间有向弧上对坐标的曲线积分与空间有向曲面上对坐标的曲面积分关系----斯托克斯公式（不考）

定理 设 Γ 是空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的有向曲面，Γ 的正向与 Σ 上点的切平面法向量指向符合右手法则，且 $P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z)$ 和 $R=R(x,y,z)$ 在曲线 Γ 和曲面 Σ 上具有一阶连续偏导数，则 $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma}(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy$.

注 **右手法则**是指人沿着空间曲线 Γ 的正向行走时，空间曲面 Σ 总在人的左边，人的头顶指向即曲面 Σ 上点的切平面法向量指向。

例 1 计算 $\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$，其中 Γ 是平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面截成的三角形的边界，它的正向与这个平面三角形 Σ 上侧的法向量之间符合右手法则.

解：$P=z, Q=x, R=y$，由斯托克斯公式,

$\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy = \iint_{\Sigma}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)dS$，其中

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 分别是有向曲面块 $\Sigma: z=1-x-y, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x$ 上点的切平面的法向量 $\vec{n}=(1,1,1)$ 与 x,y,z 轴正向夹角，且 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 曲面面积微元

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy$，则 $\oint_\Gamma zdx+xdy+ydz=\iint_\Sigma(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS$

$=\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma dS=\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy=\frac{3}{2}$，这里 $D_{xy}:0\le x\le 1,0\le y\le 1-x$ 是曲面 Σ 在 xoy 平面上的投影区域，其面积为 $\frac{1}{2}$.

例 2 计算 $\oint_\Gamma 3ydx-xzdy+yz^2dz$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2=2z,z=2$，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向.

解：$P=3y,Q=-xz,R=yz^2$，由斯托克斯公式,

$\oint_\Gamma 3ydx-xzdy+yz^2dz=\iint_\Sigma(z^2+x)dydz+(0-0)dzdx+(-z-3)dxdy$，其中

有向曲面 $\Sigma:z=2,x^2+y^2\le 4$ 取上侧，由投影性质，

$\oint_\Gamma 3ydx-xzdy+yz^2dz=\iint_\Sigma(z^2+x)dydz+(-z-3)dxdy=\iint_\Sigma(-z-3)dxdy$

$=\iint_{D_{xy}}(-2-3)dxdy=-20\pi$.这里 $D_{xy}:x^2+y^2\le 4$ 是曲面 Σ 在 xoy 平面上的投影区域，其面积为 4π .

例 3 计算 $\oint_\Gamma 2ydx+3xdy-z^2dz$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2+z^2=9,z=0$，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向.

解：$P=2y,Q=3x,R=-z^2$，由斯托克斯公式,

$\oint_\Gamma 2ydx+3xdy-z^2dz=\iint_\Sigma(0-0)dydz+(0-0)dzdx+(3-2)dxdy=\iint_\Sigma dxdy$，其中

有向曲面 $\Sigma:z=0,x^2+y^2\le 9$ 取上侧，则

$\oint_\Gamma 2ydx+3xdy-z^2dz=\iint_\Sigma dxdy=\iint_{D_{xy}}dxdy=9\pi$. 这里 $D_{xy}:x^2+y^2\le 9$ 是曲面 Σ 在 xoy 平面上的投影区域，其面积为 9π .