工程电磁场

Engineering Electromagnetics

沈启平

电气与电子工程学院





第二章 静电场

2.1 库伦定律与电场强度

- **静电场：**

相对观察者静止且量值不随时间变化的电荷所产生的电场。

- **本章任务：**

研究静电荷与电场之间的关系、在已知电荷或电位的情况下求解电场的各种计算方法、以及静电场的应用问题（参数的求解、静电力和静电能量的计算)。

- **静电场知识结构框图**
- 静电场是本课程的基础。由此建立的物理概念、分析方法在一定条件下可类比推广到其它场。

2.1 库伦定律与电场强度

2.1.1 库仑定律

库仑定律是静电现象的基本实验定律。大量试验表明: 真空中两个静止的点电荷 q_1 与 q_2 之间的相互作用力:

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{e}_{12}}{R_{12}^2} \text{ N（牛顿）}$$

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{e}_{21}}{R_{21}^2} \text{ N（牛顿）}$$

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$$

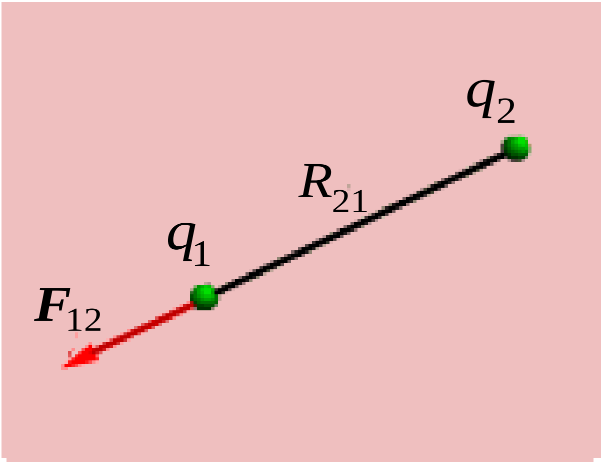


图2.1.1 两点电荷间的作用力

适用条件:
- 两个可视为点电荷的带电体之间的相互作用力;
- 无限大真空情况（式中 $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} = 8.85\times10^{-12}$ F/m ）

⟶ 可推广到无限大各向同性均匀介质中 $(\varepsilon_0 \to \varepsilon)$

2.1 库伦定律与电场强度

	库仑定律	万有引力定律
适用对象	点电荷	质点
力的性质	静电力或库仑力(电场力)	万有引力
力的方向	既有引力,也有斥力	仅有引力,没有斥力
表达式	$F=k\frac{q_1q_2}{r^2}$	$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$
表达式的相同点	都与距离的平方成反比	
表达式的不同点	与电荷量的乘积成正比	与质量的乘积成正比
比例系数	静电力常量 $k=9\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$	引力常量 $G=6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$

2.1 库伦定律与电场强度

几个概念

(1)点电荷

把带电体看作几何上的一个点，称为远距离观察的近似，当

$R_{12}\to 0$，$F_{21}\to\infty$ 时，

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{e}_{12}}{R_{12}^2}$$

在数学上这是个奇点，但从物理上看，带电体已不能看成点电荷。

(2)单位制

$$\boldsymbol{F}_{21}=k\frac{q_1 q_2}{R_{12}^2}\boldsymbol{e}_{12}$$

在国际单位制中（SI） 力—牛顿（N），距离— 米（m），则比例系数

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0=\frac{10^{-9}}{36\pi}=8.85\times10^{-12}\ \ \text{F/m}$$ 为真空介电系数，也称电容率 。

2.1 库伦定律与电场强度

(3)平方反比

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{e}_{12}}{R_{12}^2}$$

平方反比定律是库仑定律的精髓，否则电磁场的论述都将改变。

(4)作用力与电量成正比

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2}\cdot \boxed{q_1}\,\boldsymbol{e}_{12}$$

这一结论非常重要，它直接导致了叠加原理的成立。

2.1 库伦定律与电场强度

思考

- 当真空中引入第三个点电荷q_3时，试问q_1与q_2相互间的作用力改变吗? 为什么?

结论：电场力符合矢量叠加原理

$$\boldsymbol{f}_0=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{R_{0k}^2}\boldsymbol{e}_{k0}$$

<u>**异号相吸**</u>

<u>**同号相斥**</u>

2.1 库伦定律与电场强度

2.1.2　静电场基本物理量——电场强度

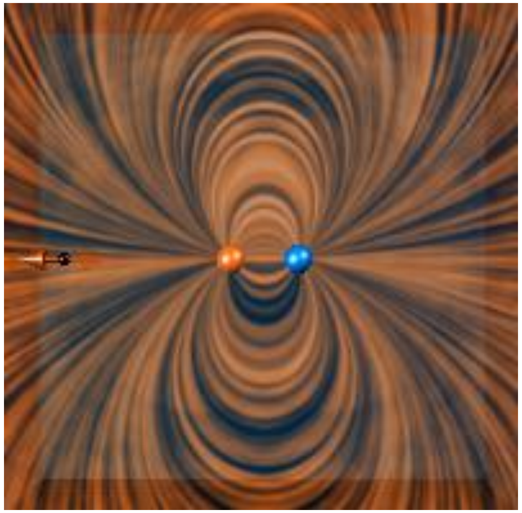
定义: 电场强度（Electric Field Intensity ）E 表示单位正电荷在电场中所受到的力(F)， 它是空间坐标的矢量函数, 定义式给出了E 的大小、方向与单位。

$$E(x,y,z)=\lim_{q_t\to 0}\frac{F(x,y,z)}{q_t}\qquad \text{V/m (N/C)}$$

创造一个电场

毁灭一个电场

电场对运动电荷的影响1，2



2.1 库伦定律与电场强度

a) 点电荷产生的电场强度

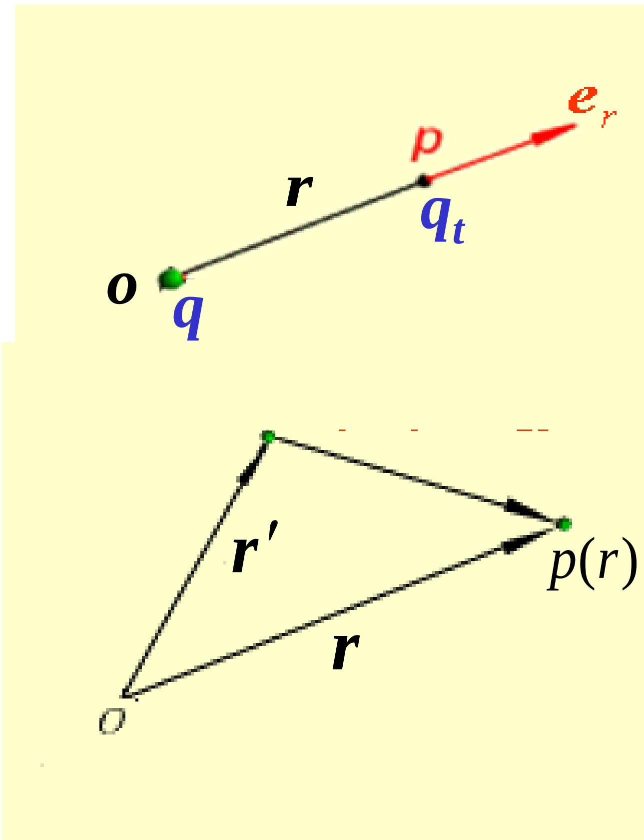


图2.1.3 点电荷的电场

$$\boldsymbol{F} = \frac{q\,q_t}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}$$

$$\boldsymbol{E}_p(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{F}}{q_t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \quad \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{E}_p(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{F}}{q_t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$= \frac{q(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R \quad \text{V/m}$$

2.1 库伦定律与电场强度

b) N个点电荷产生的电场强度 (注意:矢量叠加)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k'\right|^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k'\right|}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k}{R_k^{\ 2}}\boldsymbol{e}_k \qquad \mathrm{V/m}$$

2.1 库伦定律与电场强度

c) 连续分布电荷产生的电场强度

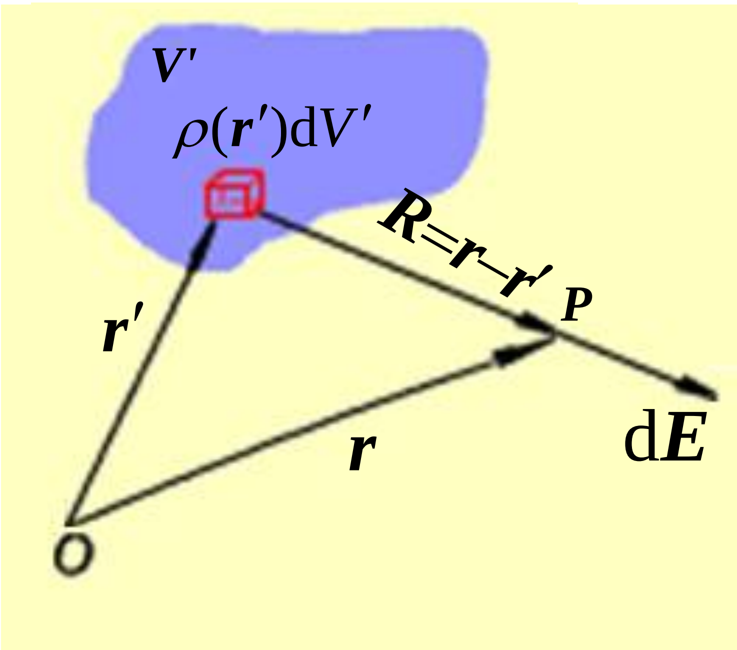


图2.1.4 体电荷的电场

$$d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}dq(\boldsymbol{r}')$$

体电荷分布 $dq=\rho(\boldsymbol{r}')dV'$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}dq$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')dV'}{R^2}\boldsymbol{e}_R$$

面电荷分布: $dq=\sigma(\boldsymbol{r}')ds'$

线电荷分布: $dq=\tau(\boldsymbol{r}')dl'$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s'}\frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\,ds'}{R^2}\boldsymbol{e}_R$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\tau(\boldsymbol{r}')dl'}{R^2}\boldsymbol{e}_R$$

例2-1 真空中有长为 $2L$ 的均匀带电直导线，电荷线密度为 τ，试求线外任一点的电场强度。

解: 由场分布的对称性，采用圆柱坐标系，并将坐标原点选在导线中点。

$$dq = \tau\, dz'$$

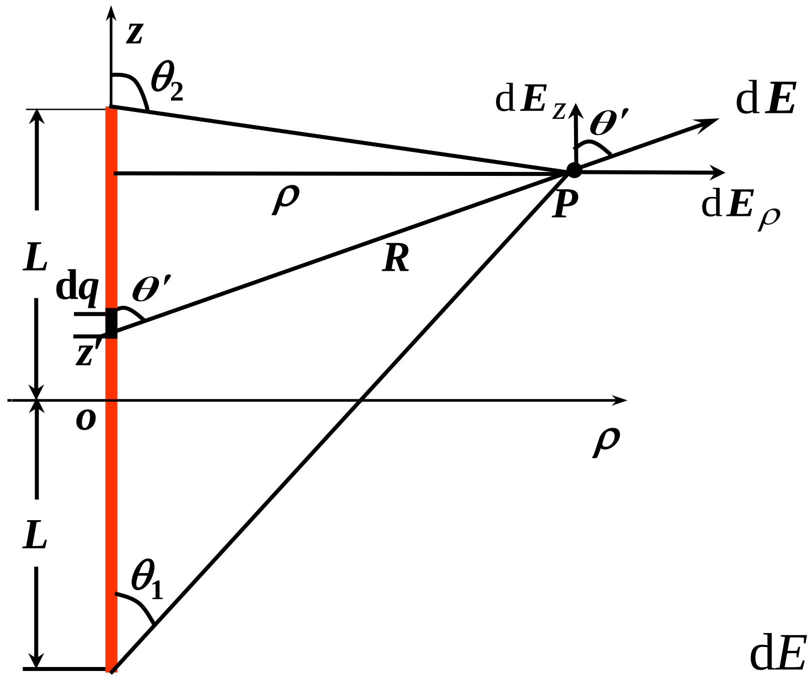


图2.1.5 带电长直导线的电场

$$d\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, dz'}{R^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

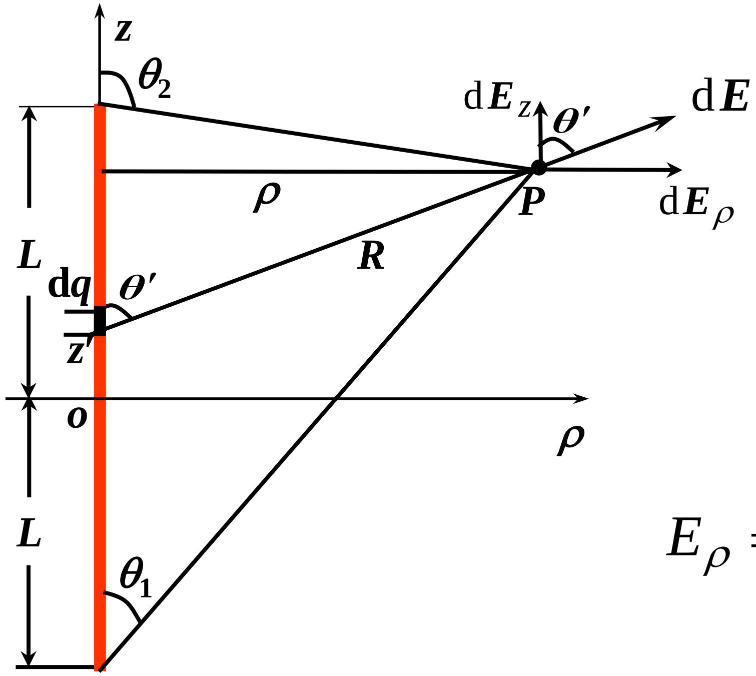
$$dE_\rho = d\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_\rho = dE\sin\theta' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, dz'}{R^2}\sin\theta'$$

$$dE_z = d\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_z = dE\cos\theta' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, dz'}{R^2}\cos\theta'$$

$$R = \frac{\rho}{\sin\theta'} \qquad z' = (z - \rho\,\mathrm{ctg}\,\theta') \qquad dz' = \rho\csc^2\theta' d\theta'$$

$$dE_\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\rho\csc^2\theta' d\theta'}{\rho^2\csc^2\theta'}\sin\theta' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\sin\theta'}{\rho}d\theta'$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\rho\csc^2\theta' d\theta'}{\rho^2\csc^2\theta'}\cos\theta' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\cos\theta'}{\rho}d\theta'$$



$$\mathrm{d}E_\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\rho\csc^2\theta'\mathrm{d}\theta'}{\rho^2\csc^2\theta'}\sin\theta' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\sin\theta'}{\rho}\mathrm{d}\theta'$$

$$\mathrm{d}E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\rho\csc^2\theta'\mathrm{d}\theta'}{\rho^2\csc^2\theta'}\cos\theta' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\cos\theta'}{\rho}\mathrm{d}\theta'$$

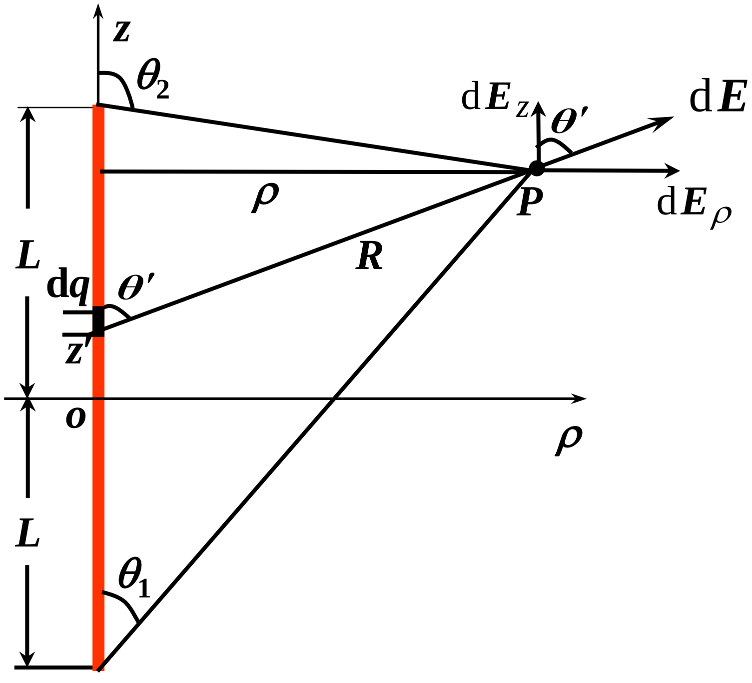
$$E_\rho = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta'\mathrm{d}\theta' = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left(\frac{L+z}{\sqrt{\rho^2+(L+z)^2}} + \frac{L-z}{\sqrt{\rho^2+(L-z)^2}}\right)$$

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta'\mathrm{d}\theta' = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(L-z)^2}} - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(L+z)^2}}\right)$$

$$\boldsymbol{E} = E_\rho\,\boldsymbol{e}_\rho + E_z\,\boldsymbol{e}_z$$



$$E_\rho = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left(\frac{L+z}{\sqrt{\rho^2+(L+z)^2}} + \frac{L-z}{\sqrt{\rho^2+(L-z)^2}}\right)$$

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(L-z)^2}} - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(L+z)^2}}\right)$$

当$L\to\infty$时， $\theta_1 \to 0 \quad \theta_2 \to \pi$

$$\boldsymbol{E} = E_\rho \boldsymbol{e}_\rho + \cancelto{0}{E_z \boldsymbol{e}_z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho}$$

2.1 库伦定律与电场强度

讨论与引伸

- 无限长直均匀带电导线产生的电场为**轴对称场。**

- 电场强度 $E(r)$ 的矢量积分一般先转化为**标量积分**, 然后再合成,即

$$\boldsymbol{E} = E_{\rho}\,\boldsymbol{e}_{\rho} + E_{z}\,\boldsymbol{e}_{z} + E_{\phi}\,\boldsymbol{e}_{\phi}$$

- 积分是对源点 r' 进行的,计算结果是场点 $\boldsymbol{r}$ 的函数。

2.2 静电场的无旋性 电位

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV'$$

利用矢量恒等式

$$\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\left(-\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)dV'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}-\nabla\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

$$=-\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'\right]$$

2.2 静电场的无旋性 电位

2. 电位及其物理意义

1）电位的引出

$$\because \nabla \times \boldsymbol{E} = \mathbf{0}$$

根据矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$

定义：

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi$$

上式中φ称为电位，单位为伏特。式中负号表明电场强度的方向就是电位最大减少率的方向。

两点说明：

① **电位是空间坐标的函数，也是表征电场特性的基本物理量；**

② **在静电场中，通过求解电位函数，再利用上式可方便地求得电场强度E。**

2.2 静电场的无旋性 电位

2）电位的物理意义

研究电场力对试验电荷q_t做功。

q_t在静电场内移动$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$距离时，电场力所做的功为：

$$dA = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = q_t\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

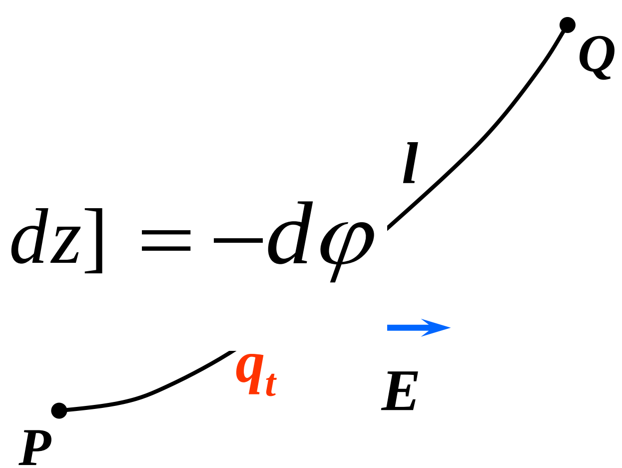
电场力将q_t从P点沿任意路径$\boldsymbol{l}$移到Q点时所做的功为：

$$A = q_t\int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

电场力对单位正电荷做的功：

$$-\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{l} = -[\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz] = -d\varphi$$

$$\frac{A}{q_t} = \int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_P^Q -\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_P^Q d\varphi$$



2.2 静电场的无旋性 电位

$$\frac{A}{q_t}=\int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_P^Q d\varphi=\varphi_P-\varphi_Q \ =U_{PQ} \qquad \text{(1)}$$

结论:

① 单位正电荷从电位为φ_P的点,经 l 路径 移至电位为φ_Q的点时,电场力对该电荷所做的功就是两点的电位差，即电压。

② E 的线积分只与积分起点电位和终点电位有关，与积分路径无关，体现了静电场为保守场这一特征。

③ 当E 给定后，只能求出空间P、Q两点的电位差，即两点电位的相对值， φ_P和 φ_Q 的值具体为多少不能由(1)式确定。

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\nabla(\varphi+C)$$

说明φ和 $\varphi+C$代表同一个电场，电位具有多值性。

2.2 静电场的无旋性 电位

令 $\varphi_Q=0$，即Q点为电位参考点。

$$\int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot d\,\boldsymbol{l} \quad = -\int_P^Q d\varphi = \varphi_P - \varphi_Q = \varphi_P$$

$$\boxed{\varphi(P) = \int_P^{参考点} \boldsymbol{E}\cdot d\,\boldsymbol{l}}$$

电位物理意义：空间某一点的电位就是电场力移动单位正电荷,从该点至参考点时所作的功，作功的结果导致单位正电荷位能的减少。

2.2 静电场的无旋性 电位

3．E 与 φ 的微分关系和积分关系

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$$

在静电场中，任意一点的电场强度 E 的方向总是指向该点电位减少最快的方向，其大小等于该点电位的最大变化率。

在直角坐标系中： $\boldsymbol{E} = -[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z]$

问题： 根据 E 与 φ 的微分关系，试问静电场中的某一点

- $\varphi = 0 \rightarrow \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ ？ （ X ）
- $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \rightarrow \varphi = \boldsymbol{0}$ ？ （ X ）

$$\varphi(P) = \int_P^{\text{参考点}} \boldsymbol{E} \cdot d\,\boldsymbol{l}$$

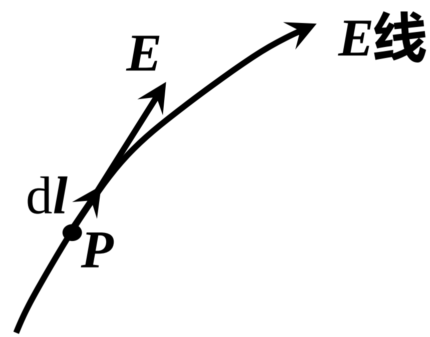
在静电场中，任意一点的电位 φ 为单位正电荷所具有的位能。

2.2 静电场的无旋性 电位

4．静电场的图示

1）电力线（E 线）：

曲线上每一点切线方向应与该点电场强度E 的方向一致，若 dl 是电力线的长度元，E 矢量将与dl 方向一致，



故电力线微分方程 $\boxed{\boldsymbol{E} \times d\boldsymbol{l} = 0}$

在直角坐标系中：

$$\frac{E_x}{dx} = \frac{E_y}{dy} = \frac{E_z}{dz}$$

微分方程的解即为电力线 E 的方程。

2）等位面（线）

静电场中，由电位相等的点构成的曲面称为等位面，等位面(线)方程:

$$\varphi(x, y, z) = C$$

当取不同的 C 值时，可得到不同的等位面（线）。

2.2 静电场的无旋性 电位

3）电力线与等位面（线）的特点：

① E线不能相交；不同值的等位面(线)不能相交，但同一条等位面(线)可以相交；

② E线起始于正电荷，终止于负电荷；

③ E 线愈密处，场强愈大；等位面愈密，说明电位梯度愈大；

④ E线与等位面（线）处处正交, E线的方向从高电位指向低电位；

⑤ 导体表面为等位面。

2.2 静电场的无旋性 电位

5．已知电荷分布，求电位：

电场强度的场源关系：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'\right]$$

与电位定义式比较

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$$

可得电位函数的场源关系：

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' + C$$

C **为积分常数，与参考点的选择有关。**

2.2 静电场的无旋性 电位

点电荷

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} + C$$

点电荷群

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i'|} + C$$

连续分布电荷

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Gamma'} \frac{dq}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} + C$$

2.2 静电场的无旋性 电位

电位参考点的选择原则

① 参考点可以任意选择，但同一个物理问题，只能选取一个参考点。

② 选择参考点尽可能使电位表达式简单，且要有意义。

③ 电荷分布在有限区域时，选择无穷远处为参考点可使电位表达式最简；

④ 电荷分布在无限区域时，选择有限远处为参考点。

注意： 场中任意两点的电位差与参考点无关。

2.2 静电场的无旋性 电位

例如：点电荷产生的电场：

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

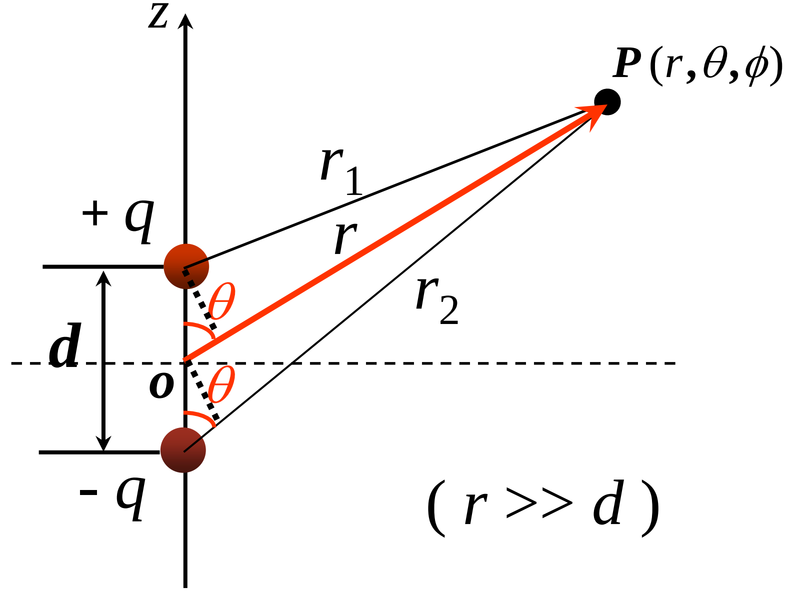
$$\varphi\big|_{r=0} = 0 \qquad C \to \infty$$

表达式无意义

$$\varphi\big|_{r=R_0} = 0 \qquad C = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} \qquad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}$$

$$\varphi\big|_{r\to\infty} = 0 \qquad C = 0 \qquad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

例 2-3 两个大小相等，符号相反的点电荷 $+q$ 和 $-q$，其间拉开一个小位移d，方向由负电荷指向正电荷，由此构成了一个电偶极子。求电偶极子在真空中产生的φ、E。



$(r >> d)$

解：选球坐标系：

$$\varphi_p(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}$$

因为 $r >> d$**，得**

$$r_2-r_1\approx\left(r+\frac{d}{2}\cos\theta\right)-\left(r-\frac{d}{2}\cos\theta\right)=d\cos\theta$$

$$r_1r_2\approx r^2$$

代入上式，得

$$\varphi_p(r,\theta)=\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\varphi_p = \frac{qd\,\boldsymbol{\cos}\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ **（库•米） 表示电偶极矩，方向由负电荷指向正电荷。**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\right)$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\right)$$

2.2 静电场的无旋性 电位

电偶极子的场图

等位线方程：

$$\varphi_p = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = C$$

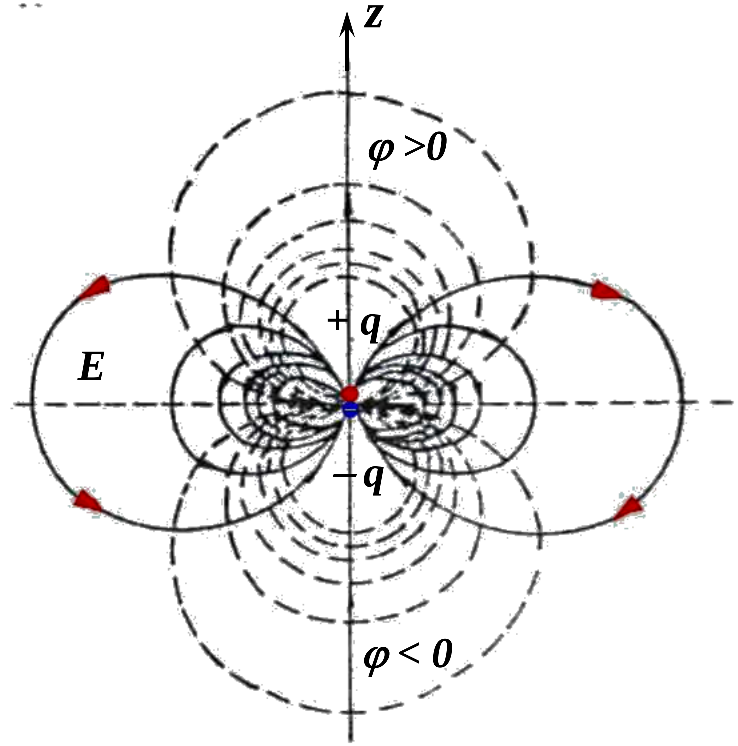
$$r = C'\sqrt{\cos\theta}$$

电力线微分方程：

$$\boldsymbol{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\right)$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta}$$

将E_θ和 E_r 代入左式，



电偶极子的等位线和电力线

解得 *E*线方程为 $r = D\sin\theta$

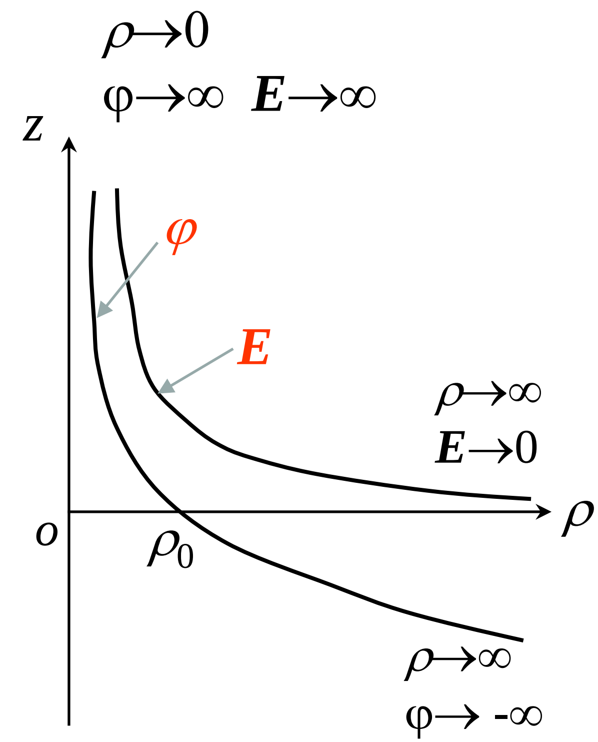
例 2-4 真空中有一无限长均匀线电荷，其电荷密度为 τ，求电位 φ。

解： 选圆柱坐标，应用电场强度与电位的积分关系计算电位，

$$\because \quad \boldsymbol{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho$$

$$\therefore \quad \varphi = \int_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_\rho^{\rho_0} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathrm{d}\rho$$

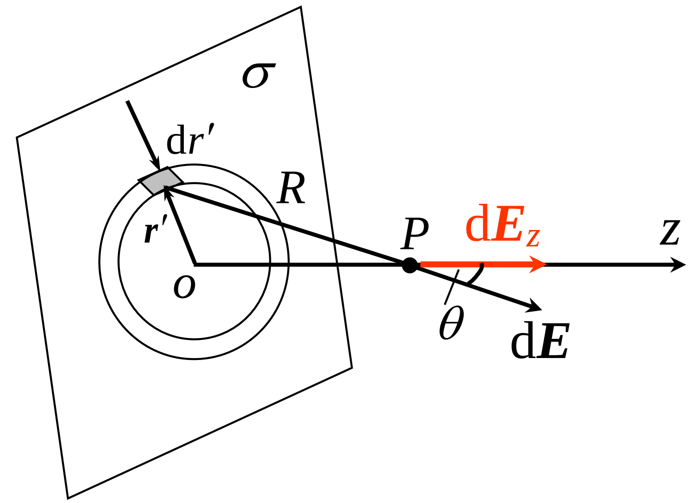
$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{\rho} \Rightarrow 0\infty$$



无限长均匀线电荷的电位与电场

例2-2 一均匀带电的无限大平面,其电荷面密度为σ,求周围空间的电场.

解： 采用直角坐标系，为了简化求解过程，将观察点P 取在z 轴上。以原点o 为圆心，作一半径为 r'，宽为 $\mathrm{d}r'$的圆环，环上的元电荷$\mathrm{d}q = \sigma\, 2\pi\, r'\mathrm{d}r'$ 。根据对称性，此环形元电荷的电场方向沿z轴，即



均匀无限大面电荷的电场

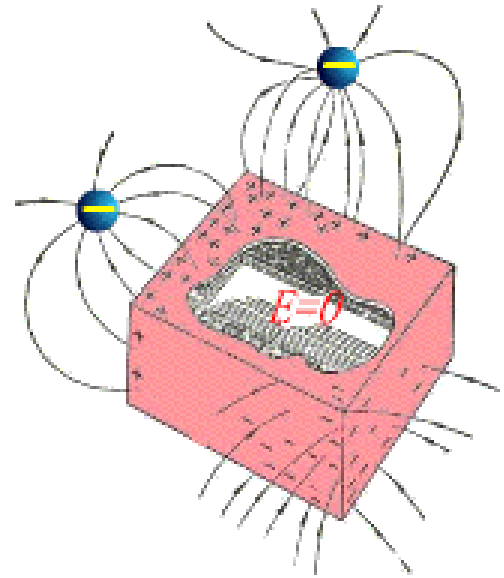
$$\mathrm{d}E_z = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{\sigma r'\mathrm{d}r'}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(r'^2+z^2)^{3/2}}$$

则无限大面电荷在P点产生的电场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_z\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{r'\mathrm{d}r'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} = \boldsymbol{e}_z\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{r'^2+z^2}}\right]_0^\infty = \boldsymbol{e}_z\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z & z>0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z & z<0 \end{cases}$$

2.3 导体与电介质

2.3.1. 静电场中的导体

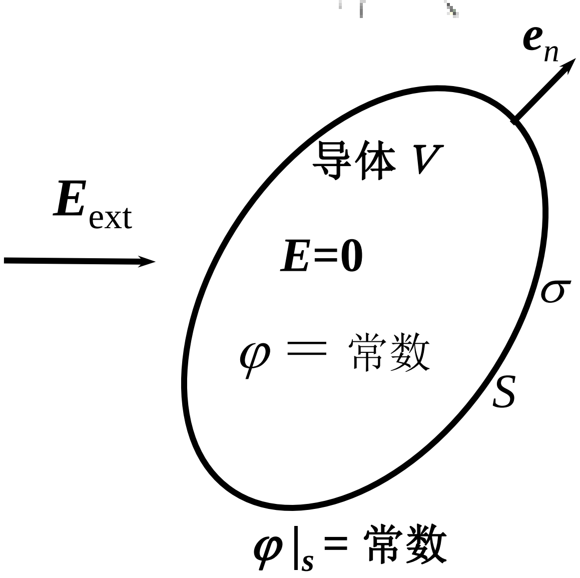


- **导体内电场强度 E 为零，静电平衡；**
- **导体是等位体，导体表面为等位面；**

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$$

- **电场强度垂直于导体表面；**
- **电荷分布在导体表面，且**

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}。$$

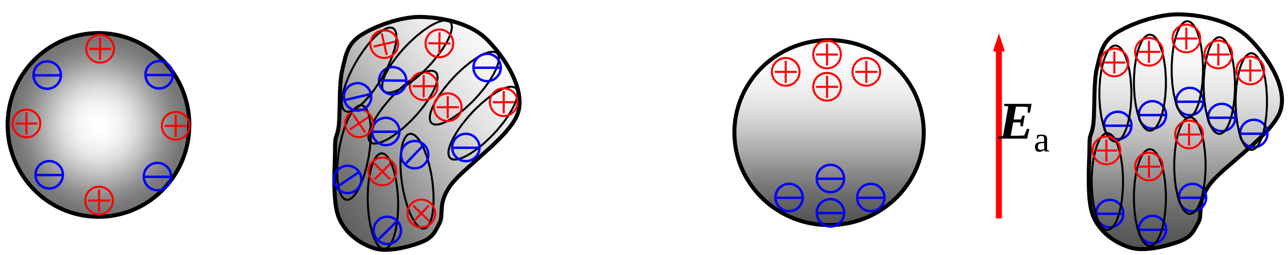


2.3 导体与电介质

4. 介质极化

导体中的电子称为**自由电子**，其电荷称为**自由电荷**。**介质**中的电荷不会自由运动，因此称为**束缚电荷**。

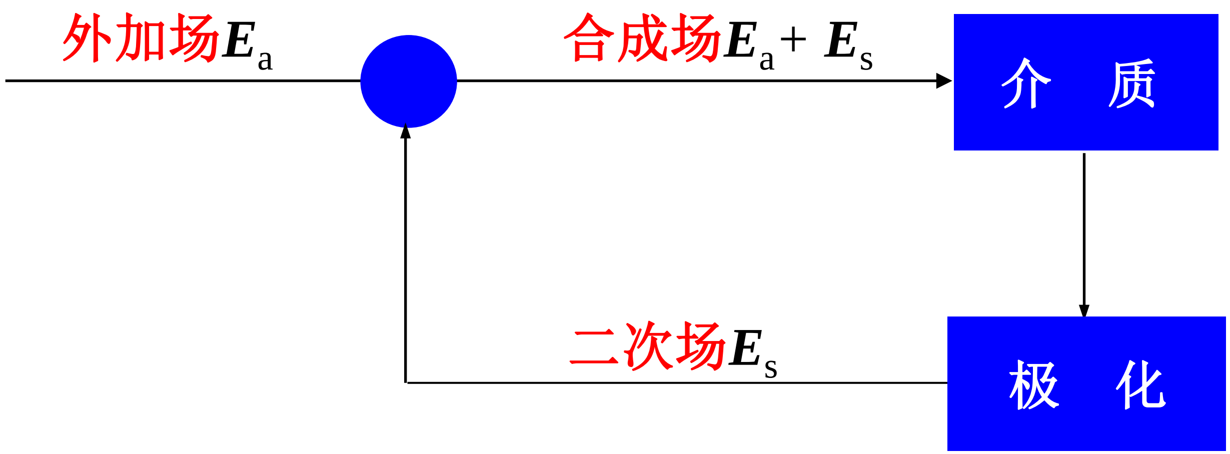
在电场作用下，介质中束缚电荷发生位移的现象称为**极化**。**无极**分子的极化称为**位移**极化，**有极**分子的极化称为**取向**极化。

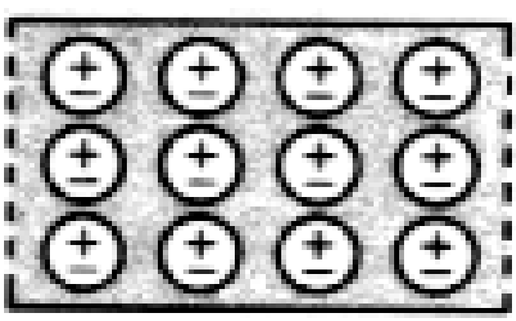


无极分子　　有极分子　　无极分子　　有极分子

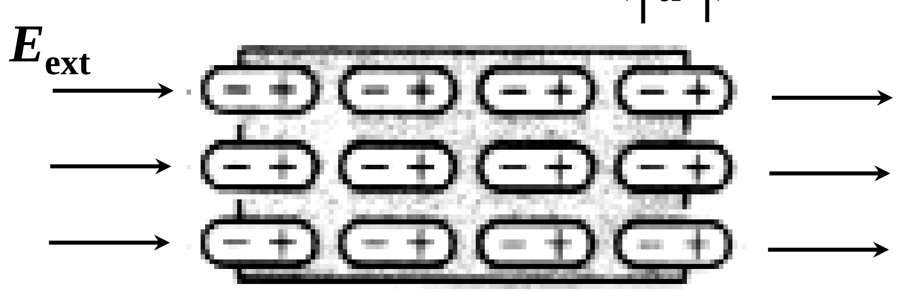
2.3 导体与电介质

介质极化现象是**逐渐**形成的。自外电场E_a加入发生极化后，一直达到**动态平衡**的过程如下图所示。





(a）极化前的介质分子



(b）极化后形成电偶极子

2.3 导体与电介质

单位体积中电矩的矢量和称为**极化强度**，以$\boldsymbol{P}$ 表示，即

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i}{\Delta V}$$

式中，$\boldsymbol{p}_i$ 为体积 ΔV 中第 i 个电偶极子的电矩；N 为ΔV 中电偶极子的数目。

大多数介质发生极化时，$\boldsymbol{P} \propto \boldsymbol{E}$，令

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_{\mathrm{e}} \boldsymbol{E}$$

式中χ_{e} 称为**极化率**，它是一个**正**实数。

2.3 导体与电介质

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_{\mathrm{e}} \boldsymbol{E}$$

可见，极化强度与合成的电场强度的方向相同。极化率与电场方向无关，这类介质称为各向同性介质。

另一类介质的极化强度$\boldsymbol{P}$与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系可用下列矩阵表示

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{\mathrm{e}11} & \chi_{\mathrm{e}12} & \chi_{\mathrm{e}13} \\ \chi_{\mathrm{e}21} & \chi_{\mathrm{e}22} & \chi_{\mathrm{e}23} \\ \chi_{\mathrm{e}31} & \chi_{\mathrm{e}32} & \chi_{\mathrm{e}33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

可见，极化特性与电场强度方向有关，这类介质称为各向异性介质。

2.3 导体与电介质

空间各点极化率相同的介质称为**均匀**介质，否则，称为**非均匀**介质。

极化率与电场强度的**大小**无关的介质称为**线性**介质，否则，称为**非线性**介质。

因此，若极化率是一个**正实常数**，则适用于**线性均匀且各向同性**的介质。若前述**矩阵**的各个元素都是一个**正实常数**，则适用于线性均匀各向**异**性的介质。

2.4 高斯定理—静电场的电通量

实验表明，真空中静电场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 满足下列两个积分形式的方程

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

式中，ε_0 为真空介电常数。

$$\varepsilon_0 = 8.854\,187\,817\cdots\times 10^{-12}\ (\mathrm{F/m}) \approx \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\ (\mathrm{F/m})$$

2.4 高斯定理—静电场的电通量

$$\oint_s \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

此式称为高斯定律。它表明真空中静电场的电场强度通过任一封闭曲面的电通等于该封闭曲面所包围的电荷量与真空介电常数之比。

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

此式表明，真空中静电场的电场强度沿任一条闭合曲线的环量为零。

2.4 高斯定理—静电场的电通量

$$\oint_s \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

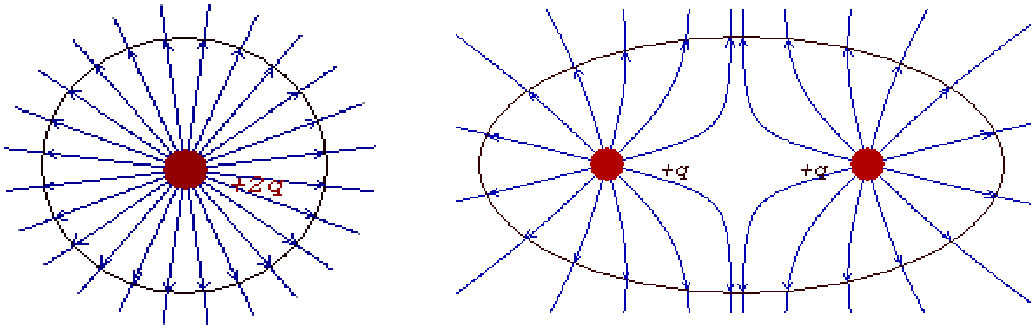
根据上面两式可以求出电场强度的散度及旋度分别为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

左式表明，真空中静电场的电场强度在某点的散度等于该点的电荷体密度与真空介电常数之比。右式表明，真空中静电场的电场强度的旋度处处为零。

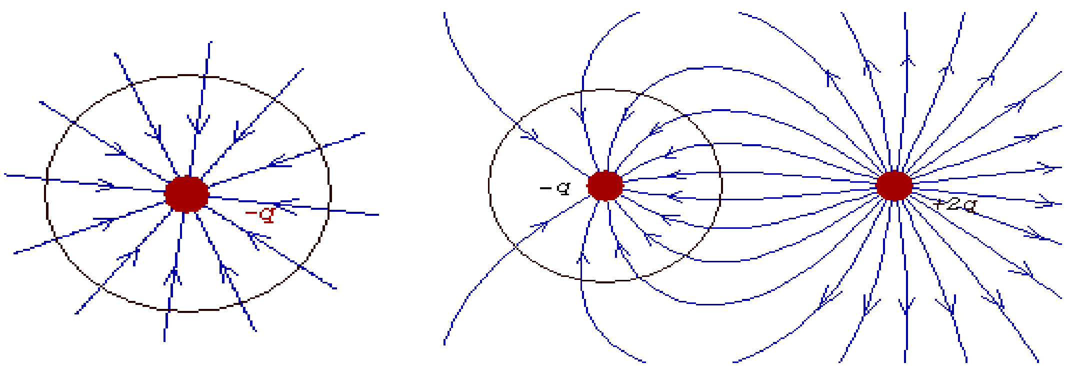
真空中静电场是有散无旋场。

2.4 高斯定理—静电场的电通量



闭合曲面的电通量

E 的通量仅与闭合面S所包围的净电荷有关。



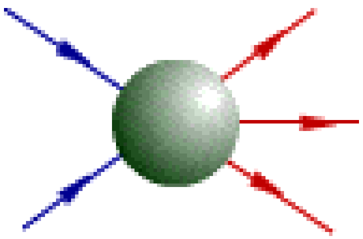
闭合面外的电荷对场的影响

S 面上的 E 是由系统中全部电荷产生的。

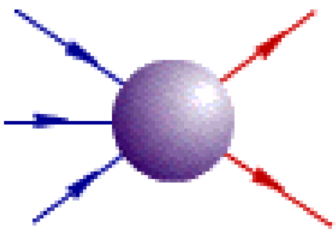
2.4 高斯定理—静电场的电通量

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

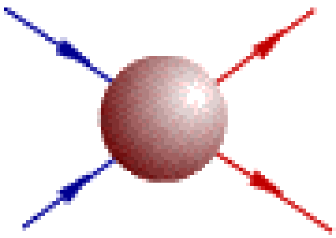
其物理意义表示为



$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} > 0$$



$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} < 0$$



$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

高斯定律说明了静电场是一个有源场，电荷就是场的通量源，电力线从正电荷发出，终止于负电荷。

2.4 高斯定理—静电场的电通量

2、高斯定律的微分形式

(真空中) $$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$$ →

(电介质中) $$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}$$

代入 $\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$,得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f-\nabla\cdot\boldsymbol{P}) \quad\longrightarrow\quad \nabla\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})=\rho_f$$

定义**电位移矢量**（ Displacement）

$$\boxed{\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}}\qquad (\mathrm{C/m^2})$$

则有 $$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho}$$ 电介质中高斯定律的微分形式

2.4 高斯定理—静电场的电通量

高斯定律的一般形式

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho}$$

- D 的散度表明空间某点电场的散度只与该点的电荷密度有关，而与其它点的电荷分布无关。

- D 线从正的自由电荷发出而终止于负的自由电荷。

2.4 高斯定理—静电场的电通量

图示平行板电容器中放入一块介质后，其*D* 线、*E* 线和*P* 线的分布。

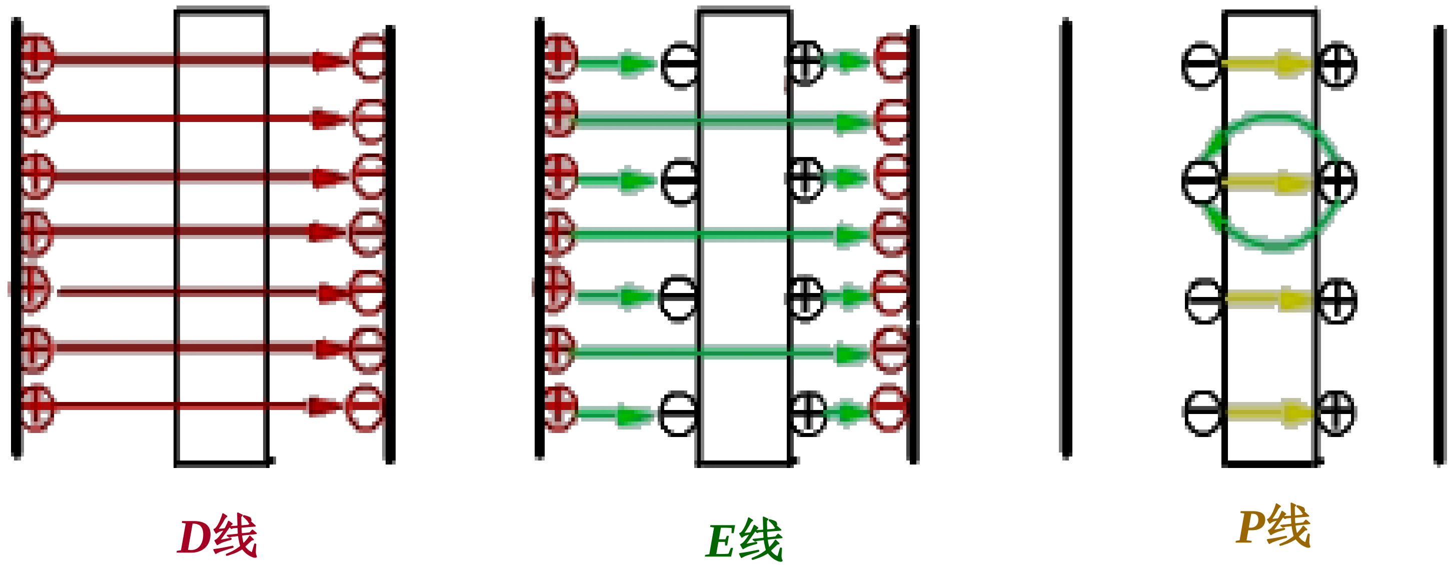


图2.2.17 *D*、*E*与 *P* 三者之间的关系

- *D* 线由正的自由电荷发出，终止于负的自由电荷；
- *E* 线的起点与终点既可以在自由电荷上，又可以在极化电荷上；

2.4 高斯定理—静电场的电通量

图示平行板电容器中放入一块介质后，其*D* 线、*E* 线和*P* 线的分布。

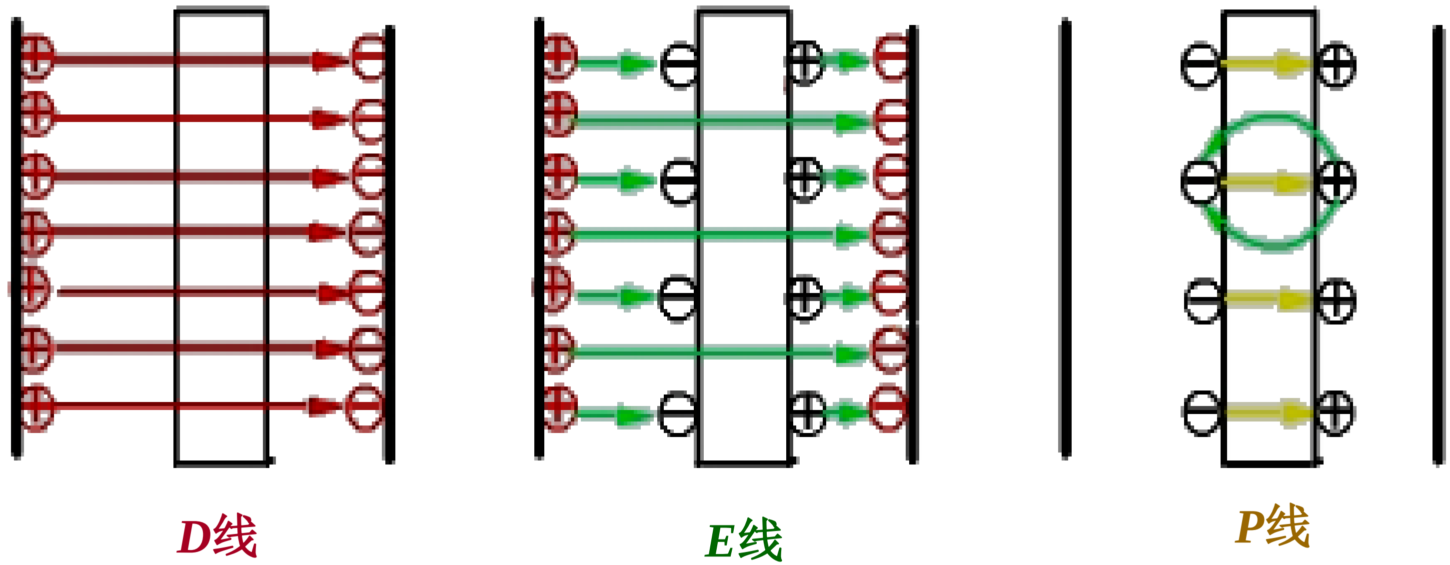


图2.2.17 *D*、*E*与 *P* 三者之间的关系

- *P* 线由负的极化电荷发出，终止于正的极化电荷。

2.4 高斯定理—静电场的电通量

3、高斯定律的积分形式

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho}$$

$$\Rightarrow \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{D} dV = \int_V \rho \, dV$$

散度定理

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \sum q}$$

D 的通量与介质无关，但不能认为D 的分布与介质无关。

2.4 高斯定理—静电场的电通量

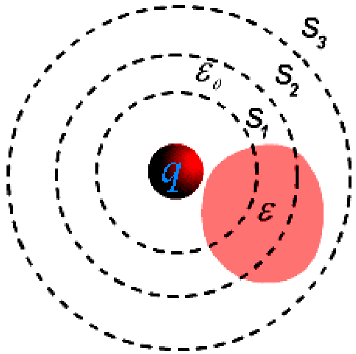


图2.2.18 点电荷的电场中置入任意一块介质

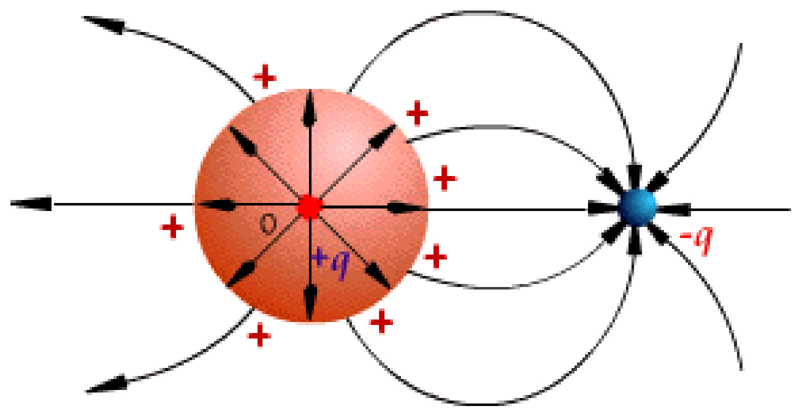
$$\oint_{S_1} \boldsymbol{D}_1 \cdot d\boldsymbol{S} = \quad (q\,)$$

$$\oint_{S_2} \boldsymbol{D}_2 \cdot d\boldsymbol{S} = \quad (q\,)$$

$$\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{D}_3 = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (\times)$$

D **通量只取决于高斯面内的自由电荷，而高斯面上的** ***D*** **是由高斯面内、外的系统所有电荷共同产生的。**

图2.2.19 点电荷±***q*** 分别置于金属球壳的内外



2.4 高斯定理—静电场的电通量

有关问题的说明

① 介质的构成方程 $D=\varepsilon_0 E+P$ 的作用：

a.得出了高斯定律的一般形式

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=Q \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

b.实为联系$D\sim E$的关系式

$$\because\ \boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) \qquad \therefore\ \boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E})$$

$$\left.\begin{array}{ll}\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0 & \nabla\times\boldsymbol{E}=0\\ \oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=Q & \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\end{array}\right\}\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$$

2.4 高斯定理—静电场的电通量

② 各向同性线性介质的介电常数和构成方程

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E}$$

$$=\varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

其中 $\varepsilon_r=1+\chi_e$ ——**相对介电常数；**

ε ——**介电常数，单位**（F/m）

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

③ 各向同性线性无限大均匀介质中的场源关系

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=Q \xrightarrow{\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}} \oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\varepsilon}$$

2.4 高斯定理—静电场的电通量

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = Q \xrightarrow{\boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E}} \oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

与真空中的高斯定律比较，形式上只是把 ε_0 换成了 ε，因此，在各向同性线性无限大均匀介质中的场源关系为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left\{\int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} dV' + \int_{S'} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} dS' + \int_{l'} \frac{\tau(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} dl' + \cdots\cdots \right\}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left\{\int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|} dV' + \int_{S'} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|} dS' + \int_{l'} \frac{\tau(\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|} dl' + \ldots \right\}$$

2.4 高斯定理—静电场的电通量

4. 高斯定律的应用

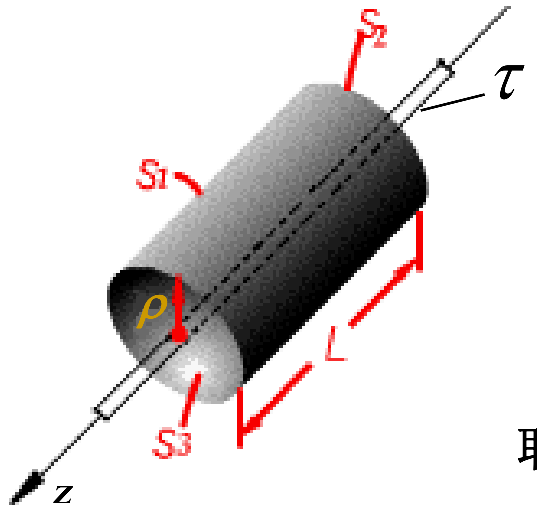
- 高斯定律适用于任何情况，但只有具有一定对称性的场才能得到解析解。

计算技巧：

a）分析给定场分布的对称性，判断能否用高斯定律求解。

b）选择适当的闭合面作为高斯面，使 $\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}$ 容易积分。

例2.4.1 求电荷线密度为 τ 的无限长均匀带电体的电场。



解：电场分布特点：

- $\boldsymbol{D}$ 线皆垂直于导线，呈辐射状态；
- 等 ρ 处 $\boldsymbol{D}$ 值相等；

取长为 L，半径为 ρ 的封闭圆柱面为高斯面。

由 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\mathbf{S} = q$，得

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_1} \boldsymbol{D}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 + \underbrace{\int_{S_2} \boldsymbol{D}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2}_{0} + \underbrace{\int_{S_3} \boldsymbol{D}_3\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_3}_{0} = \tau L$$

$$D_1\cdot 2\pi\rho L = \tau L \qquad \boldsymbol{D}_1 = \frac{\tau}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\rho$$

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho$$

例 2.4.2 试分析图1与图2的电场能否直接用高斯定律来求解场的分布?

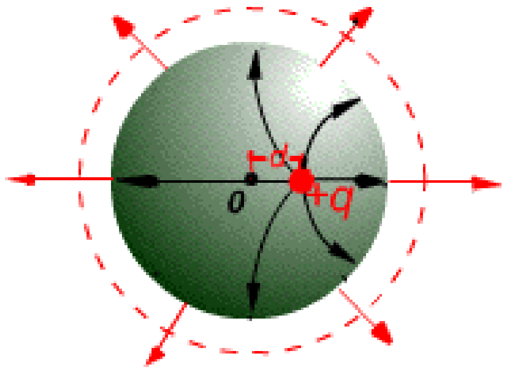


图1 点电荷q置于金属球壳内任意位置的电场

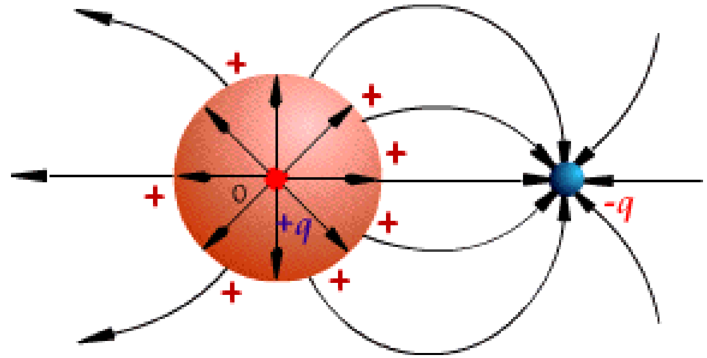


图2 点电荷±q分别置于金属球壳内的中心处与球壳外的电场

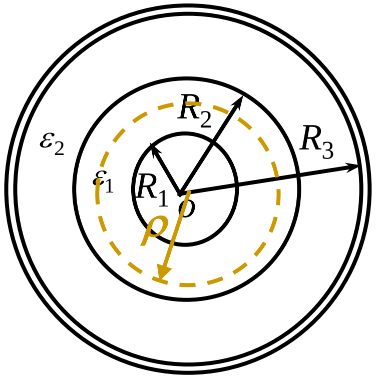
图1 **球壳外**的电场 $(r \geq R)$

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D \cdot 4\pi r^2 = q \qquad \boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

图 2 **球壳内**的电场 $(r \leq R)$

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D \cdot 4\pi r^2 = q \qquad \boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

例2.4.3 有一两层介质（设 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$）的长直同轴电缆，尺寸如图所示。已知内、外导体单位长度上的电荷分别为 τ 和 $-\tau$，求介质中的 D，E，φ 及介质分界面上的 σ_p。



解：(1) 求 D，E

作半径为 ρ，长度为 l 的同轴圆柱面，该圆柱面上 D 是均匀的，并且方向沿径向，应用高斯定律

$$\oint_s \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{s} = (2\pi\rho\, l)D = \tau l \qquad \boldsymbol{D} = \frac{\tau}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\rho \qquad R_1 \le \rho \le R_3$$

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_1} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\rho}\boldsymbol{e}_\rho \qquad R_1 \le \rho < R_2 \qquad \boldsymbol{E}_2 = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\rho}\boldsymbol{e}_\rho \qquad R_2 < \rho \le R_3$$

(2) 求 φ

设外导体电位为零，即 $\varphi_2\big|_{\rho=R_3}$, = 则

$R_2 \le \rho \le R_3$

$R_1 \le \rho \le R_2$

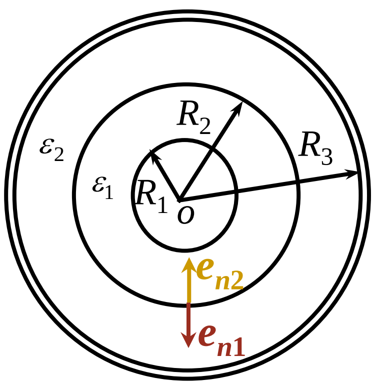
$$\varphi_2 = \int_\rho^{R_3} \boldsymbol{E}_2\cdot\left(\mathrm{d}\rho\,\boldsymbol{e}_\rho\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{\rho} \qquad \varphi_1 = \int_\rho^{R_2} \boldsymbol{E}_1\cdot(\mathrm{d}\rho\,\boldsymbol{e}_\rho) + \varphi_2\big|_{\rho=R_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{\rho} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}$$

(3) 求 σ_P

$$\sigma_P\big|_{\rho=R_2}=\left(\sigma_{P_1}+\sigma_{P_2}\right)_{\rho=R_2}=\left(\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{e}_{n_1}+\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{e}_{n_2}\right)_{\rho=R_2}$$

$$=\left[(\boldsymbol{D}_1-\varepsilon_0\,\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{e}_\rho-(\boldsymbol{D}_2-\varepsilon_0\,\boldsymbol{E}_2)\cdot\boldsymbol{e}_\rho\right]_{\rho=R_2}=\varepsilon_0\left(E_2-E_1\right)_{\rho=R_2}$$

$$=\frac{\varepsilon_0\tau}{2\pi R_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$



$$\boldsymbol{D}=\frac{\tau}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_{\rho} \qquad R_1\le\rho\le R_3$$

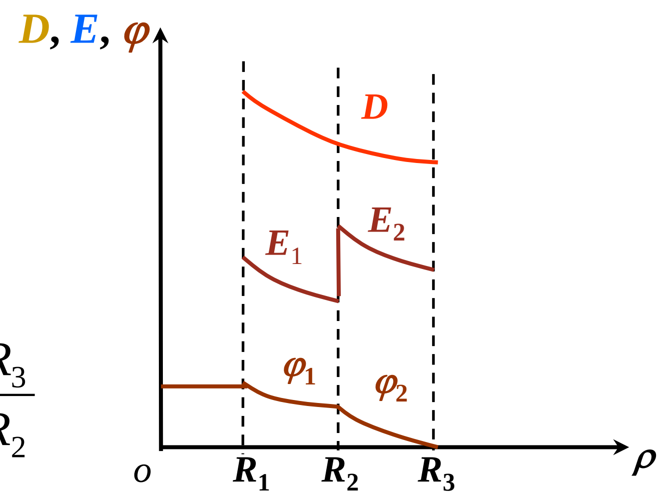
$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_1}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\rho}\boldsymbol{e}_{\rho} \qquad R_1\le\rho\le R_2 \qquad \boldsymbol{E}_2=\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_2}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\rho}\boldsymbol{e}_{\rho} \qquad R_2\le\rho\le R_3$$

$R_2\le\rho\le R_3$

$$\varphi_2=\int_{\rho}^{R_3}\boldsymbol{E}_2\cdot\left(\mathrm{d}\rho\,\boldsymbol{e}_{\rho}\right)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{\rho}$$

$R_1\le\rho\le R_2$

$$\varphi_1=\int_{\rho}^{R_2}\boldsymbol{E}_1\cdot(\mathrm{d}\rho\,\boldsymbol{e}_{\rho})+\varphi_2\big|_{\rho=R_2}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{\rho}+\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}$$



结论：由于电场的存在，在两种介质的分界面上将出现过剩的极化电荷；反过来，介质不连续的分界面上的极化电荷是导致E 突变的原因，如图所示。

- 球对称分布：包括均匀带电的球面，球体和多层同心球壳等。

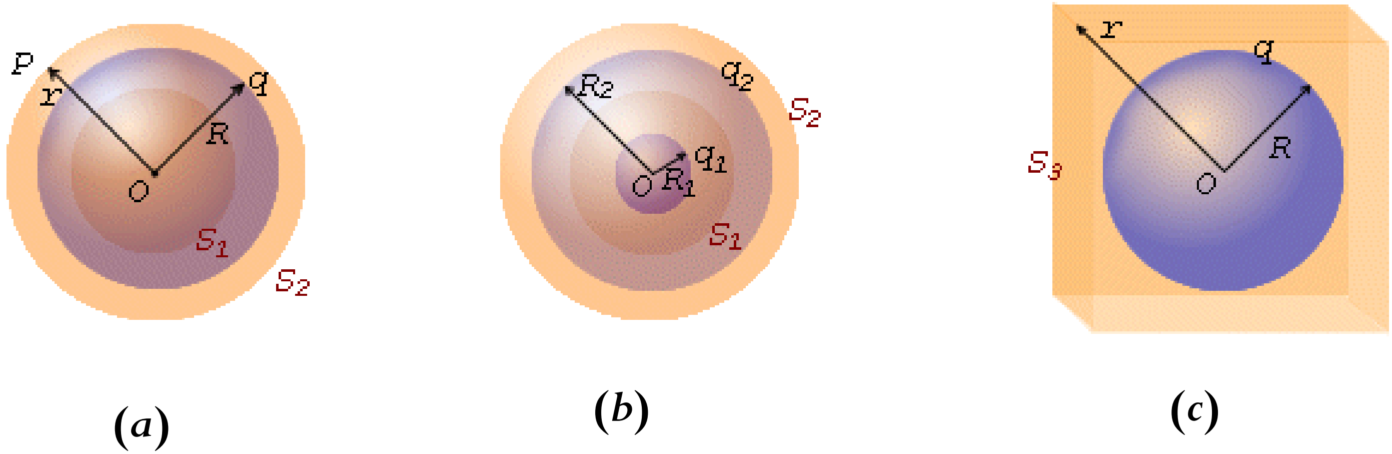


图1.2.20. 球对称场的高斯面

试问：　能否选取正方形的高斯面求解球对称场

- 轴对称分布：包括无限长均匀带电的直线，圆柱面，圆柱壳等。

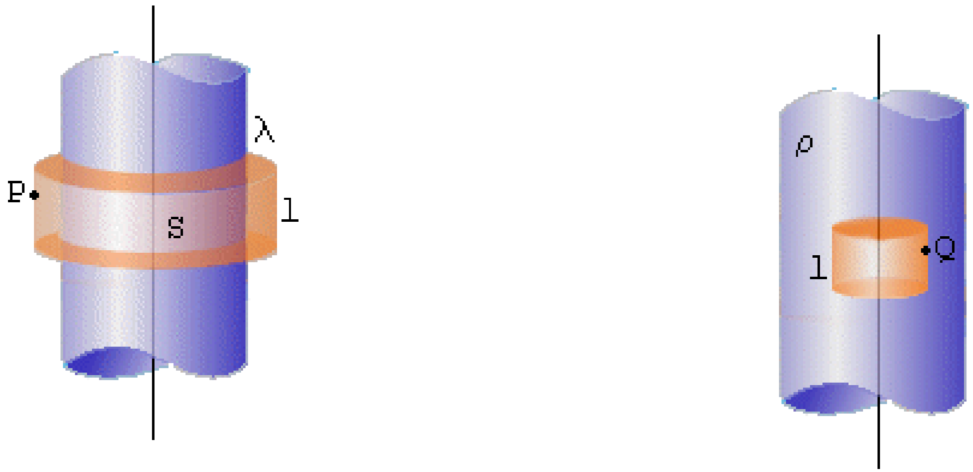


图1.2.21. 轴对称场的高斯面

2.5 静电场基本方程 介质分界面的衔接条件

2.5.1 静电场的基本方程

静电场是一个无旋、有源场，静止电荷就是静电场的源。这两个重要特性用简洁的数学形式为：

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E}=0 \qquad (\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0 \\ \oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=q \end{cases}$$

本构关系 $D=\varepsilon_0 E+P$ 或 $D=\varepsilon E$

2.5 静电场基本方程 介质分界面的衔接条件

例2.5.1 已知 $\boldsymbol{A}=3x\boldsymbol{e}_x+4y\boldsymbol{e}_y+5z\boldsymbol{e}_z$，试判断它能否表示一个静电场？

解：根据静电场的旋度恒等于零的性质,

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z=0$$

对应静电场的基本方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}\equiv\boldsymbol{0}$，**矢量** A **可以表示一个静电场。**

思考

能否根据矢量场的散度来判断该矢量场是否是静电场?

2.5 静电场基本方程 介质分界面的衔接条件

2.5.2 介质分界面上的衔接条件

1、电位移矢量*D* 的衔接条件

以分界面上点*P* 作为观察点，作一小扁圆柱高斯面（$\Delta L \to 0$）。

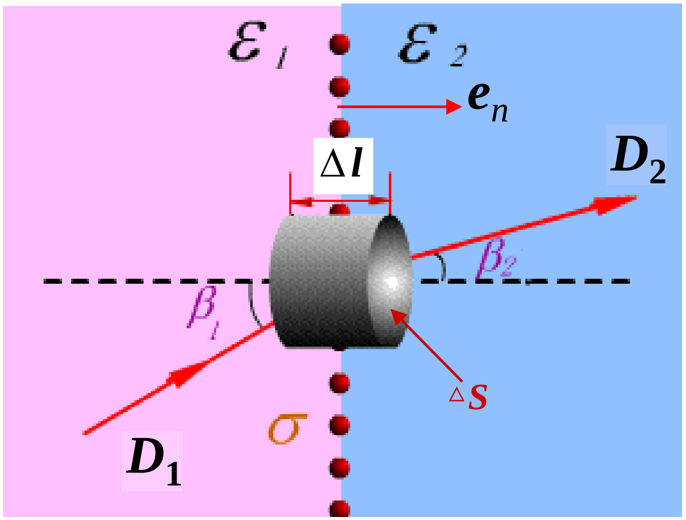


图2.5.1 在电介质分界面上应用高斯定律

根据

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = q$$

则有

$$-D_{1n}\Delta S + D_{2n}\Delta S = \sigma \Delta S$$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma} \qquad \boxed{\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma}$$

分界面两侧的 *D* 的法向分量不连续。当 $\sigma = 0$ 时，*D* 的法向分量连续。

2.5 静电场基本方程 介质分界面的衔接条件

2、电场强度 *E* 的衔接条件

以点*P*作为观察点，作一小矩形回路（ $\Delta l_2 \to 0$ ）。

根据 $\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$ 则有

$$E_{1t}\Delta l_1 - E_{2t}\Delta l_1 = 0$$

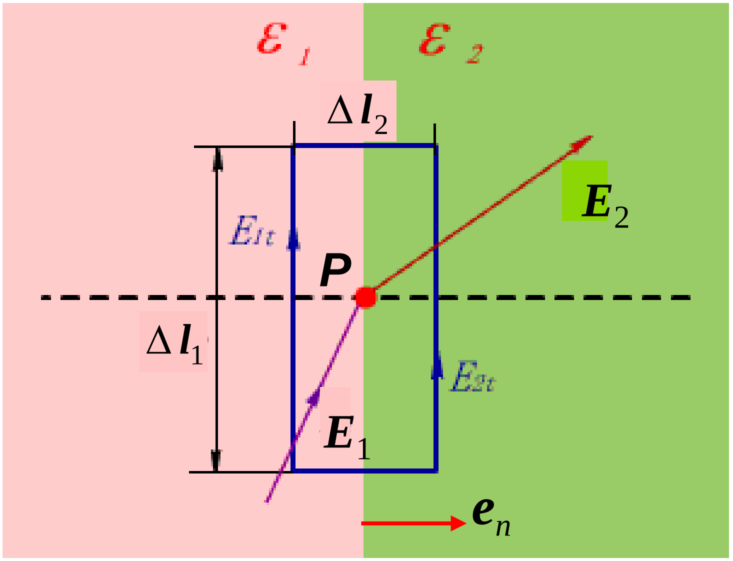


图2.5.2　在电介质分界面上应用环路定律

$$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0}$$

分界面两侧 *E* 的切向分量连续。

2.5 静电场基本方程 介质分界面的衔接条件

讨论与引伸

当分界面为导体与电介质的交界面时，分界面上的衔接条件为：

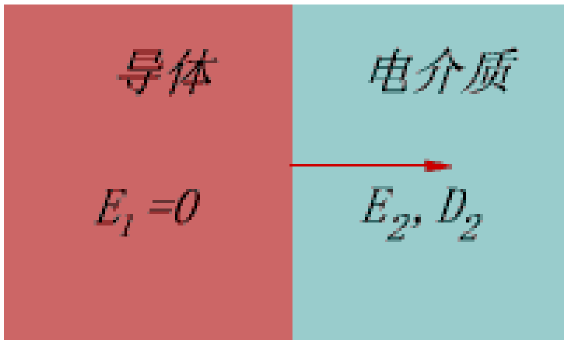


图 2.5.3 导体与电介质分界面

$$\begin{cases} D_{2n}-D_{1n}=\sigma \\ E_{1t}=E_{2t} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} D_{2n}=\sigma \\ E_{2t}=0 \end{matrix}}$$

表明：（1）导体表面是一等位面，电力线与导体表面垂直，电场仅有法向分量；（2）导体表面上任一点的D就等于该点的自由电荷密度σ。

2.5 静电场基本方程 介质分界面的衔接条件

折射定律：

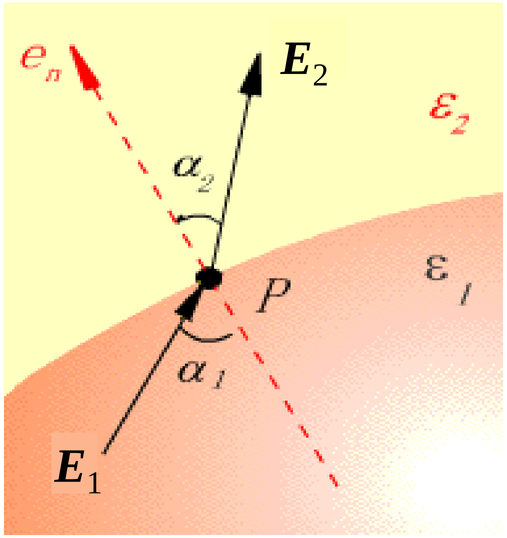


图 2.5.4 分界面上E线的折射

$$D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2$$

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2$$

$$\boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

折射定律

对于各向同性线性介质，在交界面上不存在σ 时，*E*、*D* 满足折射定律。

2.5 静电场基本方程 介质分界面的衔接条件

3、用电位函数 φ 表示分界面上的衔接条件

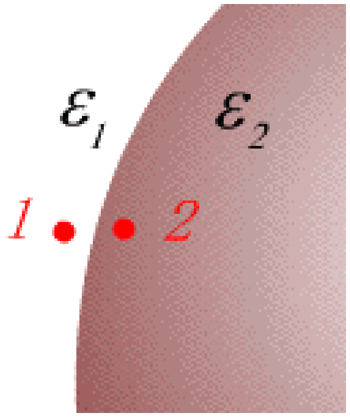


图2.5.5 电位的衔接条件

设点1与点2分别位于分界面的两侧，其间距为 d , $d \to 0$ **，则**

$$\phi_1 - \phi_2 = \lim_{1\to 2}\int_1^2 \mathrm{E}\cdot d\,\mathrm{l} = \lim_{d\to 0}\left(E_{1n}\frac{d}{2} + E_{2n}\frac{d}{2}\right) = 0$$

因此 $\boxed{\varphi_1 = \varphi_2}$

表明：在介质分界面上，电位是连续的。

$$\because \quad D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \quad , \quad D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2n} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

所以 $\boxed{\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma} \Longleftrightarrow \boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$

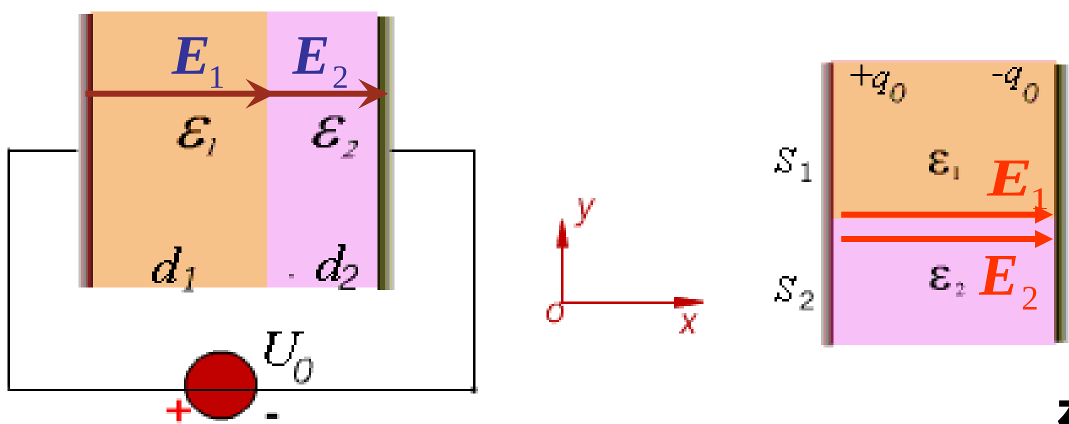
表明: 一般情况下 $(\sigma \neq 0)$ **,电位的导数是不连续的。**

2.5 静电场基本方程 介质分界面的衔接条件

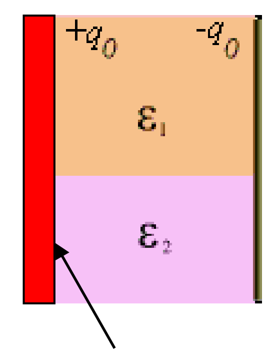
思考

对于导体与理想介质分界面，用电位 φ 表示的衔接条件应是如何呢?

例 2.5.2 如图(a) 与图(b) 所示平行板电容器,已知 $d_1, d_2, S_1, S_2, \varepsilon_1$ 和 ε_2 ,图(a)已知极板间电压U_0，图(b)已知极板上总电荷 q_0 ,试分别求其中的电场强度。



(a) (b)



在导体与介质分界面上 $D'_{2n} = \sigma$，$D'_{1n} = 0$

图 2.5.6 平行板电容器

2.5 静电场基本方程 介质分界面的衔接条件

解： **忽略边缘效应**

图（a）

$$\because \begin{cases} \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \quad D_{1n} = D_{2n} \\ E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{E}_1 = \dfrac{\varepsilon_2 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{E}_2 = \dfrac{\varepsilon_1 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \boldsymbol{e}_x \end{cases}$$

图（b）

$$\because \begin{cases} \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = q_0 \\ \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \boldsymbol{e}_x$$

$$= \frac{q_0}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2} \boldsymbol{e}_x$$

2.6 静电场的边值问题与求解方法

2.6.1 电位的微分方程

推导电位微分方程的基本出发点是静电场的基本方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \longrightarrow \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \longrightarrow \nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon=-\varepsilon\nabla\cdot\nabla\varphi=\rho$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \qquad \varepsilon=\text{常数}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}}$$ **泊松方程**

当$\rho=0$时

$$\boxed{\nabla^2\varphi=0}$$ **拉普拉斯方程**

∇^2 ——**拉普拉斯算子** $\quad \nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

注意：泊松方程与拉普拉斯方程只适用于各向同性、线性的均匀媒质。

2.6 静电场的边值问题与求解方法

求解边值问题注意事项：

1．根据求解场域内是否有 ρ 存在，决定电位满足泊松方程还是拉氏方程，然后判断场域是否具有对称性，以便选择适当的坐标系。

2．正确表达边界条件，并利用它们确定通解的待定常数。

3．若所求解的场域内有两个（或以上）的均匀介质区域，应分区求解。不能用一个电位函数表达两个区域的情况。这时会出现4个积分常数，还需考虑介质分界面上的衔接条件来确定积分常数。

4.对于开域问题，还需给出无限远处的自然边界条件。当场域有限分布时，应有：

$$\lim_{r\to\infty} r\varphi = \text{有限值}$$

即：φ 至少按一次方反比变化，通常可简单取

$$\varphi\big|_{r\to\infty} = 0$$

2.6 静电场的边值问题与求解方法

例2.4.1 **列出求解区域的微分方程**

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0$$

$$\nabla^2 \varphi_3 = -\frac{\rho_3}{\varepsilon_3}$$

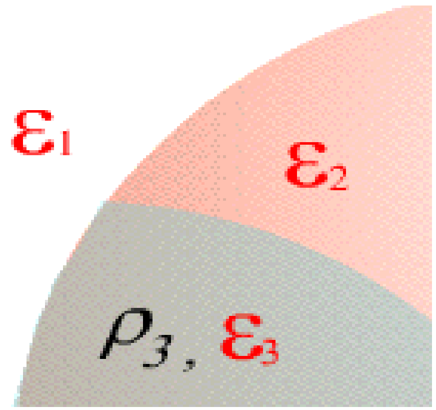


图2.6.1 三个不同媒质区域的静电场

2.6.2 静电场的边值问题

2.6 静电场的边值问题与求解方法

- 边值问题
  - 微分方程
    - $\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$
    - $\nabla^2\varphi = 0$
  - 边界条件
    - 场域边界条件
      - 第一类边界条件：$\varphi\big|_S = f_1(s)$
      - 第二类边界条件：$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S = f_2(s)$
      - 第三类边界条件：$\left(\varphi + \beta\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\Big|_S = f_3(s)$
    - 分界面衔接条件
      - $\varphi_1 = \varphi_2$
      - $\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \sigma$
    - 自然边界条件
      - 参考点电位
      - $\lim\limits_{r\to\infty} r\varphi =$ 有限值

图2.6.2 边值问题框图

思考

为什么说第二类边界条件

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S = f_2(s)$$

与导体上给定电荷分布或边界是电力线的条件是等价的?

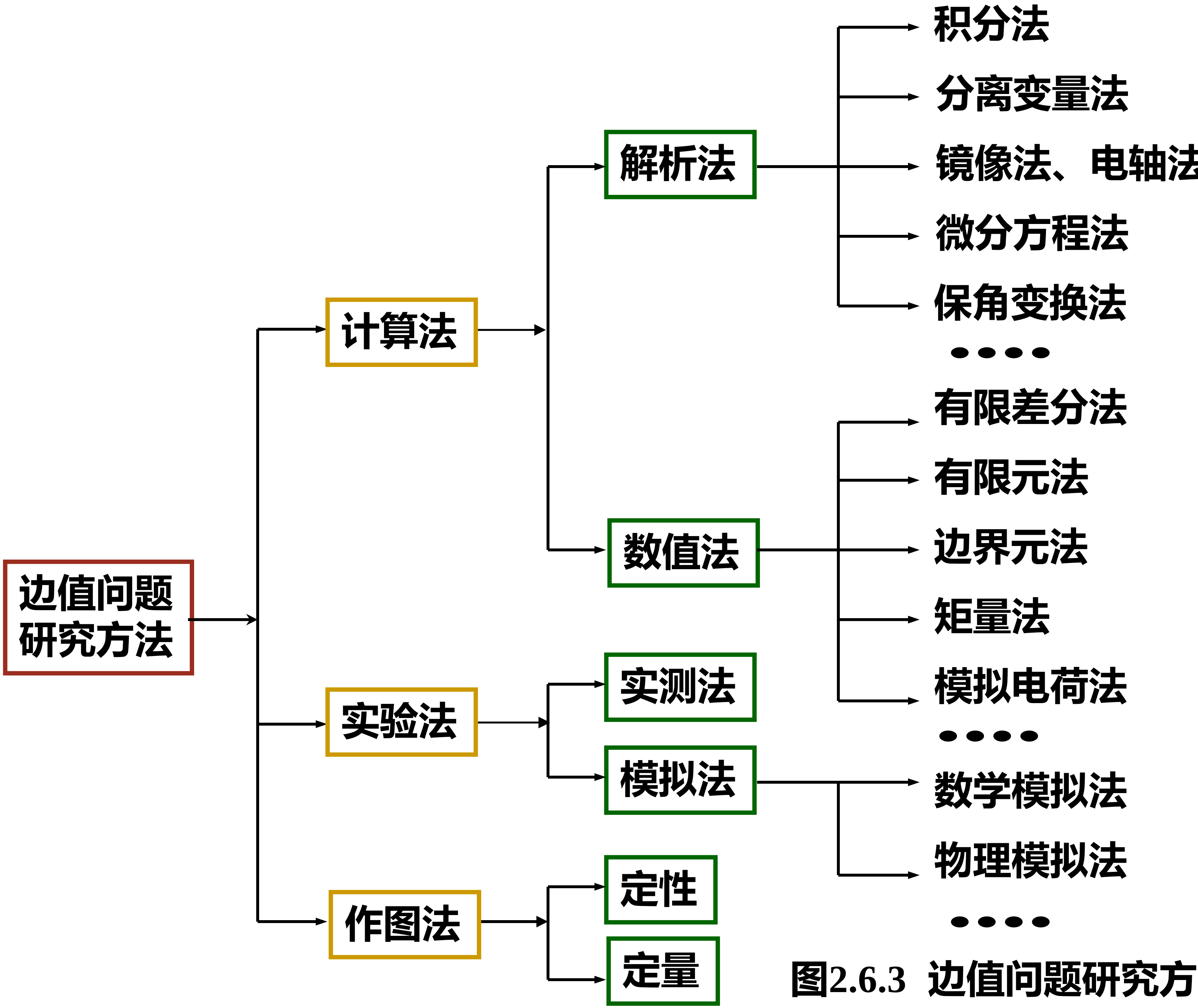


图2.6.3 边值问题研究方法框图

2.6 静电场的边值问题与求解方法

例2.6.1 图示长直同轴电缆横截面。已知缆芯截面是一边长为$2b$的正方形，铅皮半径为a，内外导体之间电介质的介电常数为ε，并且在两导体之间接有电源 U，试写出该电缆中静电场的边值问题。

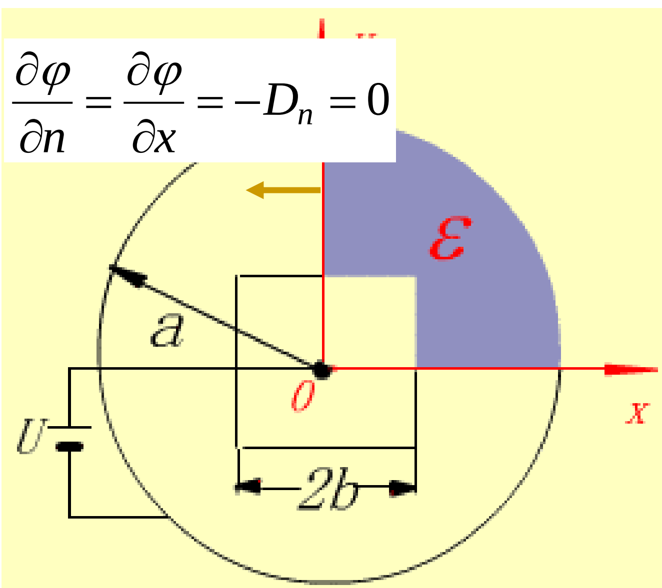


图 2.6.4 缆心为正方形的同轴电缆横截面

解： 根据场分布对称性，确定场域。

场的边值问题

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad （阴影区域）$$

$$\varphi\Big|_{(x=b,0\le y\le b及y=b,0\le x\le b)}=U$$

$$\varphi\Big|_{x^2+y^2=a^2,x\ge0,y\ge0}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{(x=0,b\le y\le a)}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{(y=0,b\le x\le a)}=0$$

2.6 静电场的边值问题与求解方法

例2.6.2 设有电荷均匀分布在半径为a 的介质球型区域中，电荷体密度为ρ，试用解微分方程的方法求球体内、外的电位及电场。

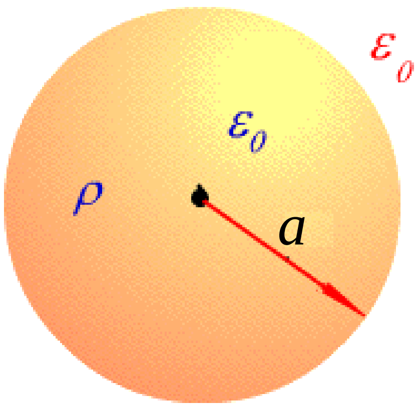


图 2.6.5 体电荷分布的球形域电场

解: 采用球坐标系,分区域建立方程

$$\nabla^2\varphi_1 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\varphi_1}{dr}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (0 \le r \le a)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\varphi_2}{dr}) = 0 \qquad (a \le r \le \infty)$$

积分得通解 $\varphi_1(r) = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_1\dfrac{1}{r} + C_2$ $\qquad \varphi_2(r) = \dfrac{C_3}{r} + C_4$

边界条件 $\varphi_1\big|_{r=a} = \varphi_2\big|_{r=a}$ $\qquad \varphi_1\big|_{r\to 0} \Rightarrow$ 有限值

$$\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=a} = \varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=a}$$

$\varphi_2\big|_{r\to\infty} = 0$ 参考点电位

2.6 静电场的边值问题与求解方法

对于一维场（场量仅仅是一个坐标变量的函数），只要对二阶常系数微分方程积分两次，得到通解；然后利用边界条件求得积分常数，得到电位的解；再由 $E=-\nabla\varphi$ 得到电场强度E的分布。

$$\varphi_1(r)=-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}+C_1\frac{1}{r}+C_2$$

$$\varphi_2(r)=\frac{C_3}{r}+C_4$$

$$C_1=0 \quad C_4=0$$

$$C_3=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}, \quad C_2=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}$$

电位：

$$\varphi_1(r)=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3a^2-r^2) \qquad 0\le r\le a$$

$$\varphi_2(r)=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} \qquad a\le r\le\infty$$

2.6 静电场的边值问题与求解方法

对于一维场（场量仅仅是一个坐标变量的函数），只要对二阶常系数微分方程积分两次，得到通解；然后利用边界条件求得积分常数，得到电位的解；再由 $E=-\nabla\varphi$ 得到电场强度E的分布。

电场强度（球坐标梯度公式）：

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})=-\nabla\varphi_1=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\boldsymbol{e}_r=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r \qquad 0\le r\le a$$

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})=-\nabla\varphi_2=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\boldsymbol{e}_r=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad a\le r\le\infty$$

2.6 静电场的边值问题与求解方法

2.6.2 唯一性定理

1、唯一性定理 (Uniquness theorem)。

在静电场中满足给定边界条件的电位微分方程（泊松方程或拉普拉斯方程)的解是唯一的，称之为静电场的唯一性定理

证明：（反证法）

- **可判断静电场问题的解的正确性：**
- **唯一性定理为静电场问题的多种解法(试探解、数值解、解析解等）提供了思路及理论根据。**

2.6 静电场的边值问题与求解方法

例2.6.3 图示平板电容器的电位，哪一个解答正确?

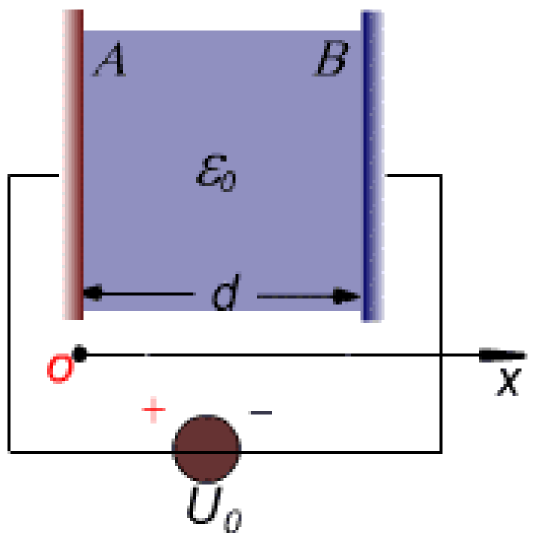


图 2.6.7 平板电容器外加电源U_0

A、 $\varphi_1 = \dfrac{U_0}{d} x^2$

B、 $\varphi_2 = \dfrac{U_0}{d} x + U_0$

C、 $\varphi_3 = -\dfrac{U_0}{d} x + U_0$

答案：（ C ）

2.6 静电场的边值问题与求解方法

证明 (反证法)：

设场中任一点有两个电位函数φ_1与φ_2均满足泊松方程,则其差值$u=\varphi_1-\varphi_2$必满足拉普拉斯方程,即

$$\nabla^2 u=\nabla^2\varphi_1-\nabla^2\varphi_2=-\frac{\rho}{\varepsilon}+\frac{\rho}{\varepsilon}=0$$

利用矢量恒等式 $\nabla\cdot(u\nabla u)=u\nabla^2 u+(\nabla u)^2=(\nabla u)^2$

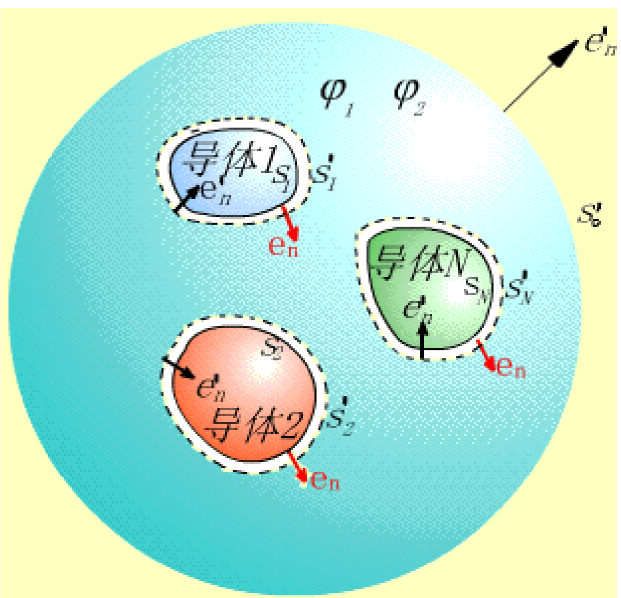


图2.6.6 证明唯一性定理用图

对场域求体积分,并利用高斯散度定理

$$\int_V\nabla\cdot(u\nabla u)dV=\oint_S u\nabla u\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V(\nabla u)^2 dV$$

S为体积V的边界面,即$S=S_0+S'$,$S'=S_1+S_2+\cdots+S_n$,
由于在无穷远S_0处电位为零,因此有

$$\oint_S u\nabla u\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_{S'}u\nabla u\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V(\nabla u)^2 dV$$

2.6 静电场的边值问题与求解方法

$$\oint_s u\nabla u\cdot dS=\int_{S'}u\frac{\partial u}{\partial n}dS'=\int_V(\nabla u)^2dV \qquad (1)$$

若导体边界为第一类边界条件,即$u=\varphi_1-\varphi_2=0$,则式(1)右边也为零,即

$$\nabla u=\nabla(\varphi_1-\varphi_2)=0$$

积分后,$\varphi_1-\varphi_2=C$,该式既满足场域,又满足边界,故 $C=0,\varphi_1=\varphi_2$,得证。

若导体边界为第二类边界条件,即已知电荷面密度

$$\sigma=\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \qquad 即 \qquad \varepsilon\frac{\partial(\varphi_1-\varphi_2)}{\partial n}=\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}=0$$

则式(1)右边也为零, 同上分析 ,必有$\varphi_1=\varphi_2$, 证毕。

由此,在场域V中各点, $u\equiv 0$, 即$\varphi_1=\varphi_2$, 也就是说有两个不同解都满足微分方程和边界条件的假设是不成立的, 故唯一性定理得证。

返回

2.7 镜像法

1.平面导体的镜像

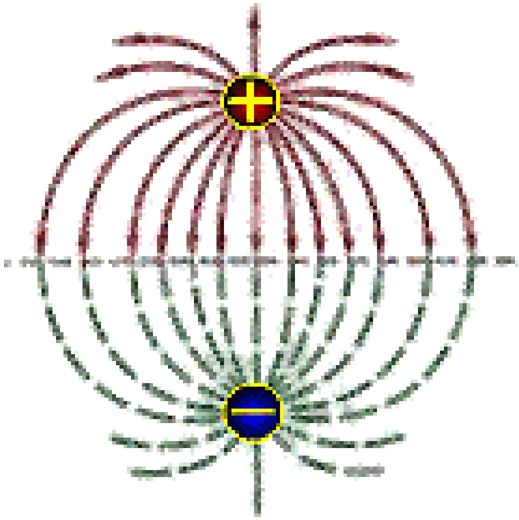


图2.7.1　平面导体的镜像

边值问题：

$$\nabla^2\varphi = 0$$ （除 q 所在点外的区域）

$$\varphi = 0$$ （导板及无穷远处）

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = q$$ （S 为包围 q 的闭合面）

上半场域边值问题：

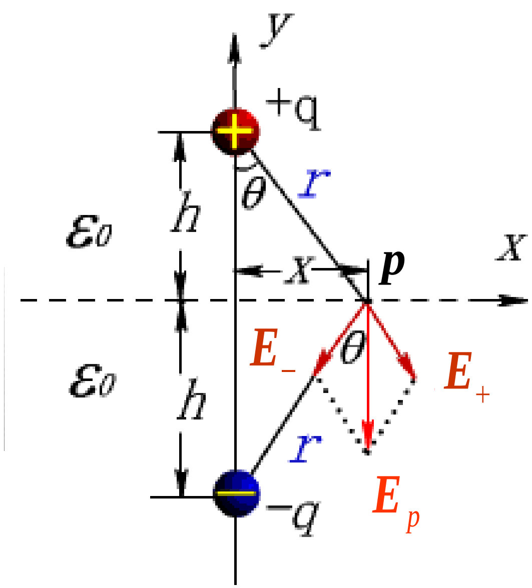
$$\nabla^2\varphi = 0$$ （除 q 所在点外的区）

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0$$ （导板及无穷远处）

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = q$$ （S 为包围q 的闭合面）

镜像法：用虚设的电荷分布等效替代媒质分界面上复杂电荷分布,虚设电荷的个数、大小与位置使场的解答满足唯一性定理。

例2.7.1 求空气中一个点电荷 q 在地面引起的感应电荷分布情况。



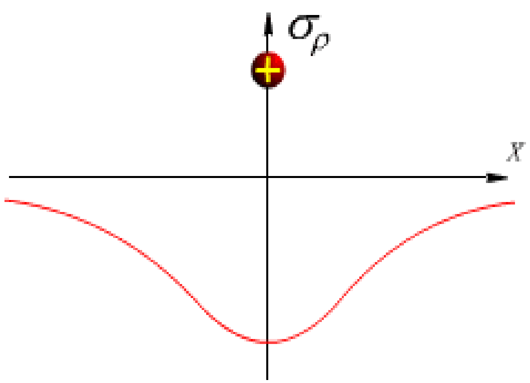


图2.7.2 点电荷q 在地面引起的感应电荷的分布

解: 设点电荷q 离地面高度为h，则

$$\boldsymbol{E}_p = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- \qquad \text{(方向指向地面)}$$

$$E_p = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$= \frac{qh}{2\pi\varepsilon_0 (h^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\sigma_p = -\varepsilon_0 E_p = -\frac{qh}{2\pi(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

整个地面上感应电荷的总量为

$$\int_S \sigma_p dS = \int_0^\infty \frac{-qh}{2\pi(h^2 + x^2)^{3/2}} \cdot 2\pi x dx$$

$$= qh\left[\frac{1}{(h^2 + x^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = -q$$

2.7 镜像法

2.不同介质分界面的镜像

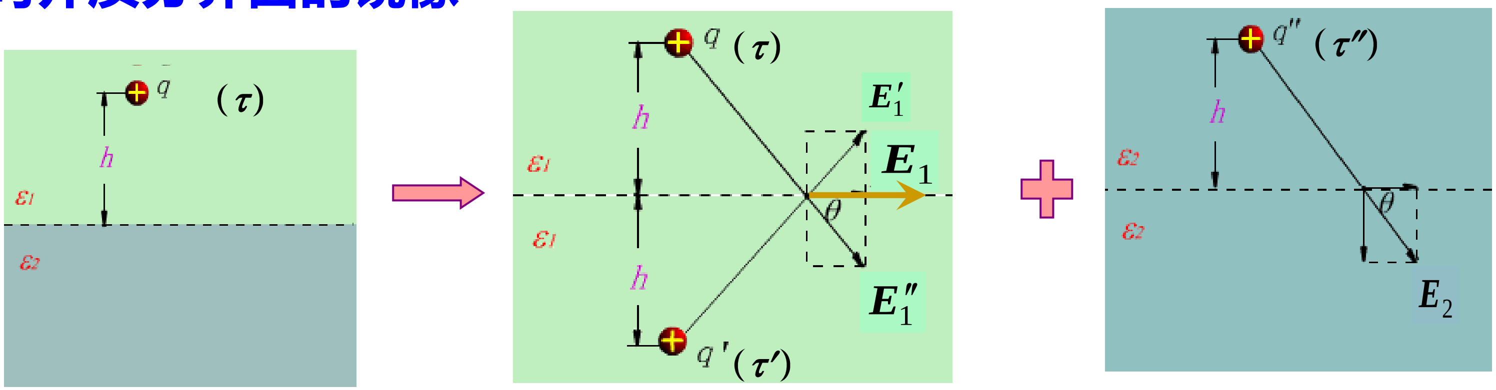


图2.7.3　点电荷对无限大介质分界面的镜像

边值问题：

$$\nabla^2\varphi_1 = 0$$ **(除 *q* 点外的上半空间)**

$$\nabla^2\varphi_2 = 0$$ **(下半空间)**

$$E_{1t} = E_{2t} \longrightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\cos\theta$$

$$D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow \frac{q}{4\pi r^2}\sin\theta - \frac{q'}{4\pi r^2}\sin\theta = \frac{q''}{4\pi r^2}\sin\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_1} + \dfrac{q'}{\varepsilon_1} = \dfrac{q''}{\varepsilon_2} \\ q - q' = q'' \end{cases} \longrightarrow \boxed{q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q} \quad \text{和} \quad \boxed{q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q}$$

2.7 镜像法

讨论与引伸

- ε_1 **中的电场是由 q 与 q' 共同产生，其有效区在上半空间，q' 是等效替代极化电荷的影响。**
- ε_2 **中的电场是由 q'' 决定，其有效区在下半空间，q'' 是等效替代自由电荷与极化电荷的作用。**

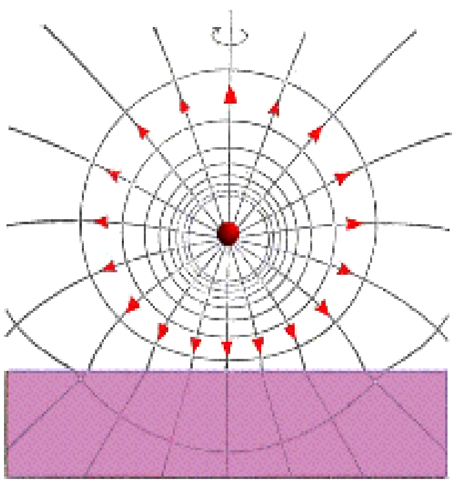


图2.7.4 点电荷 q 位于不同介质平面上方的场图

即

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q$$

$$= \frac{\varepsilon_2+\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q + \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q$$

$$= q + \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q$$

$$q''' = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q$$

2.7 镜像法

思考

为求解图示 ε_1 与 ε_2 区域的电场，试确定镜像电荷的个数、大小与位置。

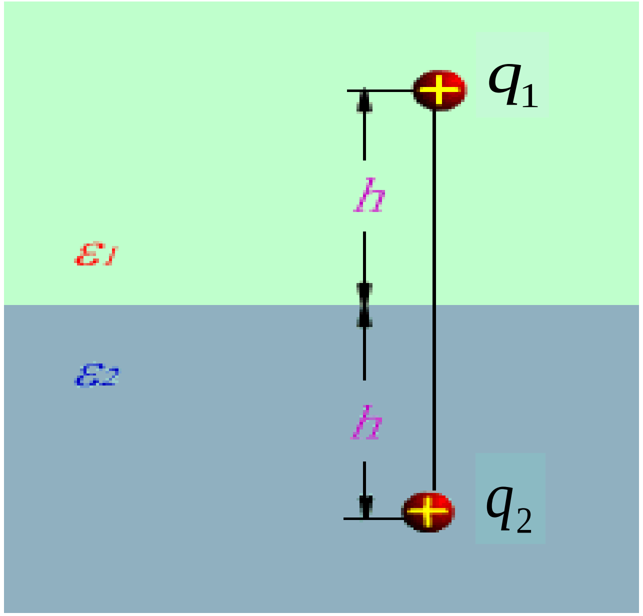


图2.7.5 点电荷 q_1 与 q_2 分别置于 ε_1 与 ε_2 区域中

2.7 镜像法

镜像法小结

- 镜像法的**理论基础**是静电场唯一性定理；

- 镜像法的**实质**是用虚设的镜像电荷替代未知电荷的分布，使计算场域为无限大均匀介质；

- 镜像法的**关键**是确定镜像电荷的个数，大小及位置；

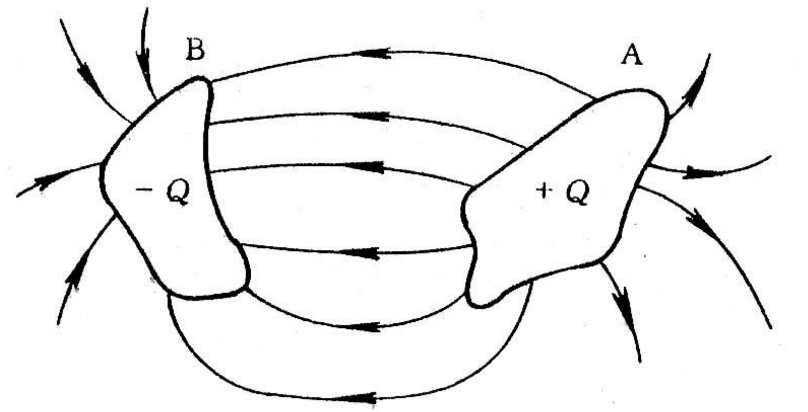
应用镜像法解题时，**注意：**镜像电荷只能放在待求场域以外的区域。**叠加时**，要注意场的适用区域。

2.8 电容与部分电容

2.8.1 电容

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

单位：F(法拉)，μF，pF



电容只与两导体的几何形状、尺寸、相互位置及导体周围的介质有关。

工程上的实际电容：电力电容器，电子线路用的各种小电容器。

电容的计算思路：

a.设 $Q(-Q) \xrightarrow{\text{高斯定律}} E \xrightarrow{\int E \cdot dl} U = U(Q) \longrightarrow C = \dfrac{Q}{U}$

b.设 $U \xrightarrow{\text{解边值问题}} \varphi \xrightarrow{E = -\nabla \varphi} E \xrightarrow{\text{边界条件}} \sigma \xrightarrow{\int_S \sigma ds} Q = Q(U) \longrightarrow C$

2.8 电容与部分电容

例2.8.1 **试求球形电容器的电容。**

解：设内导体的电荷为 q **,则** $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = q$,

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r\ ,\qquad \boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

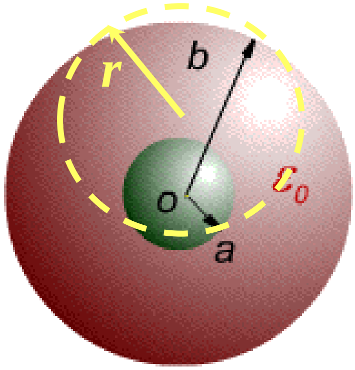


图2.8.1　球形电容器

同心导体间的电压

$$U = \int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{b-a}{ab}$$

球形电容器的电容

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

当 $b\to\infty$ **时**　　$C = 4\pi\varepsilon_0 a$　　**(孤立导体球的电容)**

2.8 电容与部分电容

2.8.2 多导体系统、部分电容

1 多导体系统

- **线性、多导体(三个以上导体)组成的系统；**
- **静电独立系统——*D*线从这个系统中的带电体发出，并终止于该系统中的其余带电体，与外界无任何联系，即**

$$\sum_{k=0}^{n} q_k = 0 .$$

表明0－ n 号导体的电荷线性相关。

2 部分电容概念

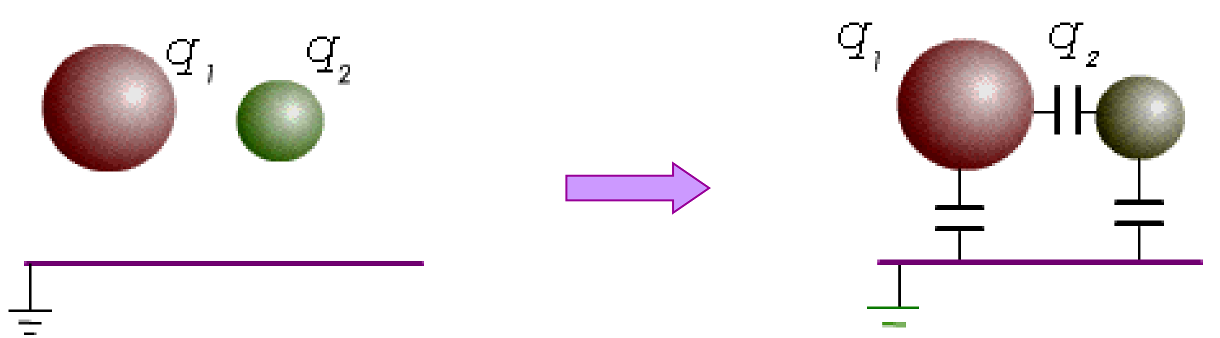


图2.8.2 三导体静电独立系统

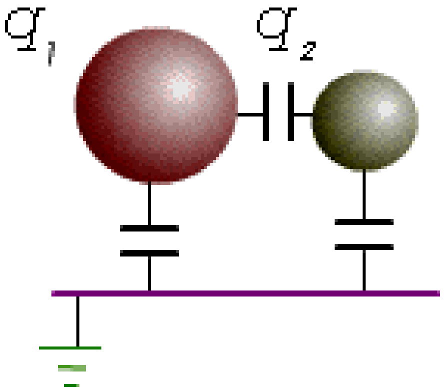
2.8 电容与部分电容

Ⅰ.已知导体的电荷，求电位和电位系数

以接地导体为电位参考点,导体的电位与各导体上的电荷的关系为

$$\varphi_{10} = a_0 q_0 + a_1 q_1 + a_2 q_2 \qquad \varphi_{20} = b_0 q_0 + b_1 q_1 + b_2 q_2$$

$$\because \quad q_0 = -(q_1 + q_2)$$



$$\therefore \quad \varphi_{10} = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2$$

$$\varphi_{20} = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2$$

2.8 电容与部分电容

以此类推 $(n+1)$个多导体系统只有 n 个电位线性独立方程，即

$$\varphi_1=\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\cdots\cdots+\alpha_{1i}q_i+\cdots\cdots+\alpha_{1N}q_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_i=\alpha_{i1}q_1+\alpha_{i2}q_2+\cdots\cdots+\alpha_{ii}q_i+\cdots\cdots+\alpha_{iN}q_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_N=\alpha_{N1}q_1+\alpha_{N2}q_2+\cdots\cdots+\alpha_{Ni}q_i+\cdots\cdots+\alpha_{NN}q_N$$

$$q_0=-(q_1+q_2+\cdots\cdots+q_i+\cdots+q_N)$$ (**非独立方程**)

写成矩阵形式为 $$[\varphi]=[\alpha]\,[q]$$

α —— **电位系数**，表明导体电荷对导体电位的贡献；

α_{ii}——**自有电位系数**，表明导体 i 上电荷对导体 i 电位的贡献；

α_{ij}——**互有电位系数**，表明导体 j上的电荷对导体 i 电位的贡献；

α 的性质：

1. $\alpha>0$； 2. $\alpha_{ij}<\alpha_{ii}>\alpha_{ji}$； 3. $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$

2.8 电容与部分电容

α 的值可以通过给定各导体电荷 q ,计算各导体的电位 φ 而得。

$$\varphi_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \cdots\cdots + \alpha_{1i}q_i + \cdots\cdots + \alpha_{1N}q_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_i = \alpha_{i1}q_1 + \alpha_{i2}q_2 + \cdots\cdots + \alpha_{ii}q_i + \cdots\cdots + \alpha_{iN}q_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_N = \alpha_{N1}q_1 + \alpha_{N2}q_2 + \cdots\cdots + \alpha_{Ni}q_i + \cdots\cdots + \alpha_{NN}q_N$$

$$\alpha_{ii} = \left.\frac{\varphi_i}{q_i}\right|_{q_1=q_2=\cdots=q_{i-1}=q_{i+1}=\cdots=q_N=0,\, q_i=-q_0}$$

$$\alpha_{ij} = \left.\frac{\varphi_i}{q_j}\right|_{q_1=q_2=\cdots=q_{j-1}=q_{j+1}=\cdots=q_N=0,\, q_j=-q_0}$$

2.8 电容与部分电容

Ⅱ 已知带电导体的电位，求电荷和感应系数

$$[q]=[\alpha]^{-1}[\varphi]=[\beta][\varphi] \qquad [\beta]=[\alpha]^{-1}$$

$$q_1=\beta_{11}\varphi_1+\beta_{12}\varphi_2+\cdots\cdots+\beta_{1i}\varphi_i+\cdots+\beta_{1N}\varphi_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_i=\beta_{i1}\varphi_1+\beta_{i2}\varphi_2+\cdots\cdots+\beta_{ii}\varphi_i+\cdots+\beta_{iN}\varphi_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_N=\beta_{N1}\varphi_1+\beta_{N2}\varphi_2+\cdots\cdots+\beta_{Ni}\varphi_i+\cdots+\beta_{NN}\varphi_N$$

β（单位：库/伏）：**静电感应系数**，表示导体电位对导体电荷的贡献；

β_{ii}： **自有感应系数**，表示导体 i 电位对导体 i 电荷的贡献；

β_{ij}：**互有感应系数**，表示导体 j 电位对导体 i 电荷的贡献。

2.8 电容与部分电容

β 的性质：

1. $\beta_{ii} > 0$；　2. $\beta_{ij} < 0$；　3. $\beta_{ij} = \beta_{ji}$；　4. $\left|\beta_{ij}\right| < \beta_{ii} > \left|\beta_{ji}\right|$

通常，β 的值可以通过给定各导体的电位 φ，测量各导体的电荷 q 而得。

$$q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \cdots\cdots + \beta_{1i}\varphi_i + \cdots + \beta_{1N}\varphi_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_i = \beta_{i1}\varphi_1 + \beta_{i2}\varphi_2 + \cdots\cdots + \beta_{ii}\varphi_i + \cdots + \beta_{iN}\varphi_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_N = \beta_{N1}\varphi_1 + \beta_{N2}\varphi_2 + \cdots\cdots + \beta_{Ni}\varphi_i + \cdots + \beta_{NN}\varphi_N$$

$$\beta_{ii} = \left.\frac{q_i}{\varphi_i}\right|_{\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_{i-1}=\varphi_{i+1}=\cdots=\varphi_N=0} \qquad \beta_{ij} = \left.\frac{q_i}{\varphi_j}\right|_{\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_{j-1}=\varphi_{j+1}=\cdots=\varphi_N=0}$$

2.8 电容与部分电容

III 已知带电导体间的电压，求电荷和部分电容

$$q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \cdots\cdots + \beta_{1i}\varphi_i + \cdots + \beta_{1N}\varphi_N$$

如果将电荷与电位的关系表示成电荷与电压的关系，有

$$q_1 = (\beta_{11} + \beta_{12} + \cdots + \beta_{1N})(\varphi_1 - 0) - \beta_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$- \beta_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) - \cdots - \beta_{1N}(\varphi_1 - \varphi_N)$$

$(\varphi_1 - 0)$ **是1号导体与大地之间的电压。令**

$$C_{10} = \beta_{11} + \beta_{12} + \cdots + \beta_{1N} \qquad C_{12} = -\beta_{12}, \quad C_{13} = -\beta_{13}, \quad \ldots, \quad C_{1N} = -\beta_{1N}$$

则 $$q_1 = C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} + \cdots + C_{1N}U_{1N}$$

得方程组

$$q_1 = C_{10}U_{10} + \cdots + C_{1i}U_{1i} + \cdots + C_{1N}U_{1N}$$

$$\cdots\cdots \qquad q_{i1} \qquad\qquad q_{1i}$$

$$q_i = C_{i1}U_{i1} + \cdots + C_{i0}U_{i0} + \cdots + C_{iN}U_{iN}$$

$$\cdots\cdots$$

$$q_N = C_{N1}U_{N1} + \cdots + C_{Ni}U_{Ni} + \cdots + C_{N0}U_{N0}$$

2.8 电容与部分电容

$$[q]=[C][U]$$ （矩阵形式）

式中：C —— 部分电容，它表明各导体间电压对各导体电荷的贡献；

$C_{i1}=-\beta_{i1}, C_{i2}=-\beta_{i2}, \cdots\cdots, C_{iN}=-\beta_{iN}$ （互有部分电容）；

$C_{i0}=(\beta_{i1}+\beta_{i2}+\cdots\cdots+\beta_{ii}+\cdots+\beta_{iN})$ （自有部分电容）。

部分电容性质:

- 所有部分电容都是正值，且仅与导体的形状、尺寸、相互位置及介质的 ε 值有关；
- 互有部分电容 $C_{ij}=C_{ji}$ ，即 $[C]$ 为对称阵；
- **(*n*+1)** 个导体静电独立系统中，共应有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个部分电容；
- 部分电容是否为零,取决于两导体之间有否电力线相连。

静电网络与等效电容

2.8 电容与部分电容

例2.8.2 试计算考虑大地影响时，二线传输线的各部分电容及二线输电线的等效电容。已知 $d >> a, a << h$ 如图示：

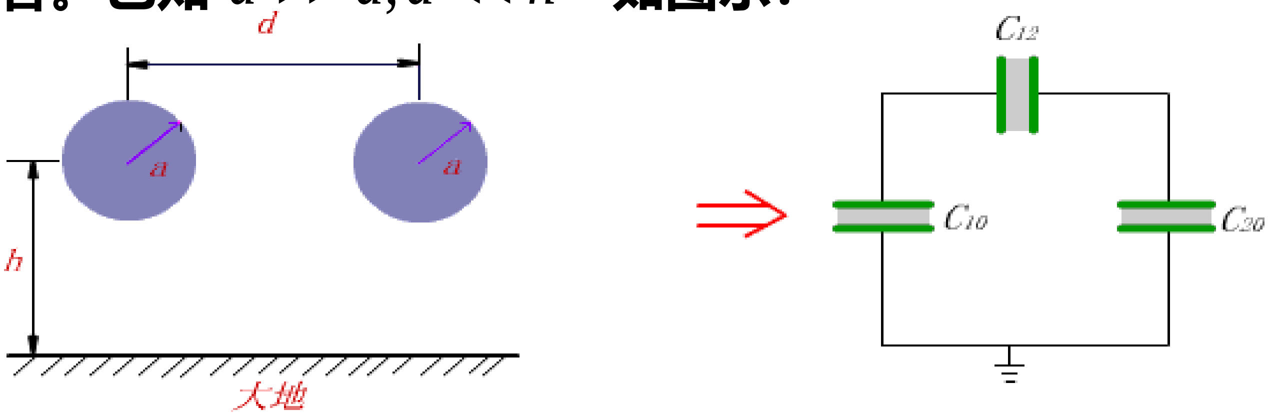


图2. 8. 3　两线输电线及其电容网络

解：部分电容个数 $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{2(2+1)}{2} = 3$ **，如图所示。**

由对称性得 $C_{10} = C_{20}$， $C_{12} = C_{21}$

线电荷与电位的关系为

$$\tau_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$\tau_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{20}\varphi_2$$

2.8 电容与部分电容

令 $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0,$ 则 $\begin{cases} 1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ 0 = C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{20}\varphi_2 \end{cases}$ (2)

利用镜像法，输电线两导体的电位 $(\varphi = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_2}{r_1}\ ,d >> a)$ 为

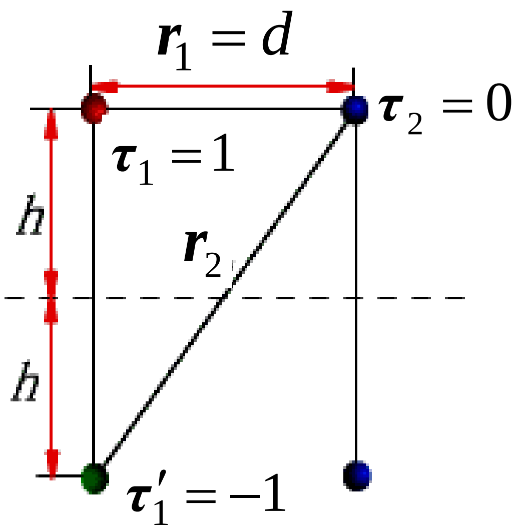


图2.8.4 两线输电线对大地的镜像

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2h}{a} \\ \varphi_2 = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d} \end{cases} \quad (3)$$

将（3）式代入（2）式得

$$\begin{cases} 1 = C_{10}\cdot\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2h}{a} + C_{12}\cdot\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2hd}{a\sqrt{4h^2+d^2}} \\ 0 = C_{21}\cdot\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{a\sqrt{4h^2+d^2}}{2hd} + C_{20}\cdot\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d} \end{cases}$$

2.8 电容与部分电容

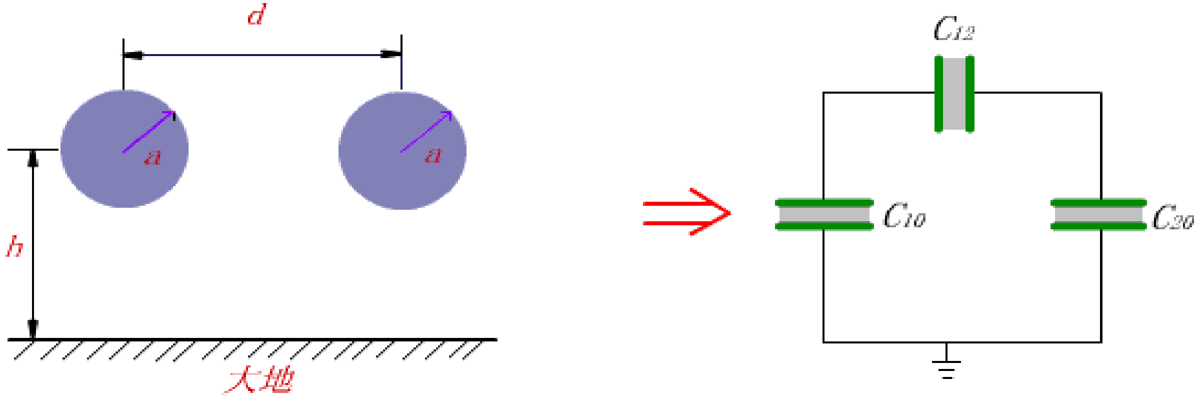


图2.8.5　两线输电线及其电容网络

联立解之得

$$C_{10}=C_{20}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h\sqrt{4h^2+d^2}}{ad}}$$

$$C_{12}=C_{21}=\frac{2\pi\varepsilon_0\ln\dfrac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}}{(\ln\dfrac{2h}{a})^2-(\ln\dfrac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d})^2}$$

二线间的等效电容： $C_{eq}=C_{12}+\dfrac{C_{10}C_{20}}{C_{10}+C_{20}}=\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(\dfrac{2h}{d}\cdot\dfrac{d}{\sqrt{4h^2+d^2}})}$

2.8 电容与部分电容

IV 静电屏蔽

应用部分电容还可以说明静电屏蔽问题。

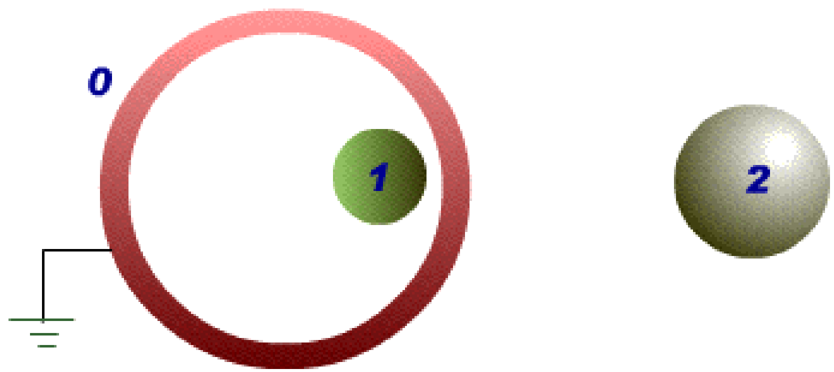


图2.8.6　静电屏蔽

$$q_1 = C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12}$$

$$q_2 = C_{21}U_{21} + C_{20}U_{20}$$

令　$q_1 = 0,\quad U_{10} = 0$

$$C_{12}U_{12} = 0 \quad \Rightarrow C_{12} = 0$$

0号导体接地，得

$$q_1 = C_{10}U_{10}$$

$$q_2 = C_{20}U_{20}$$

这说明了q_1只与U_{10}有关，q_2只与U_{20}有关，即1号导体与2号导体之间无静电联系，达到了静电屏蔽的要求。

静电屏蔽在工程上有广泛应用。

2.8 电容与部分电容

综上，可以即[α],[β],[C] 来表示多导体系统电荷与电位间关系 。α 易于计算，β 便于测量，C 可通过α 计算，也可直接测定，其主要优点是可以将场的概念和路的概念联系起来，

即　**静电场问题** → **静电电容的网络问题。**

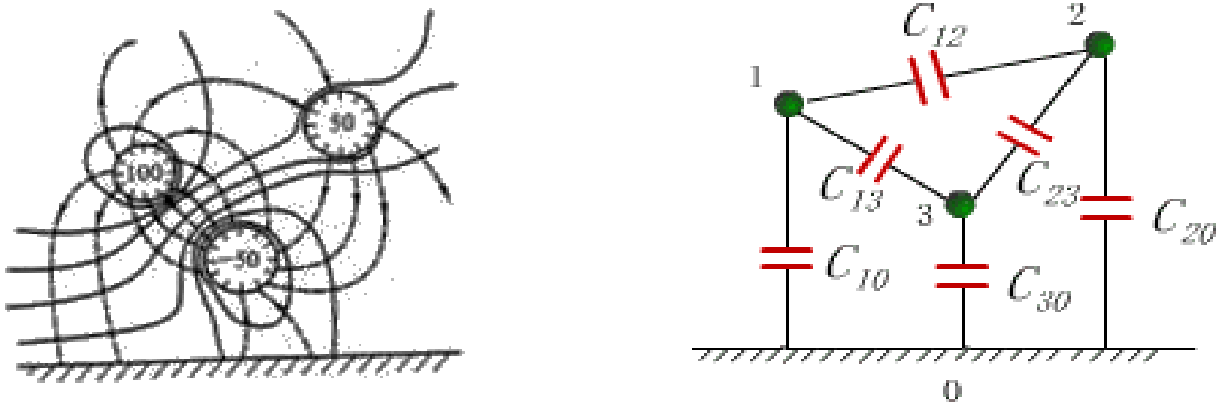


图2.8.7　部分电容与电容网络

工程上，常引入 **等效电容**的概念，它是指在多导体静电独立系统中，把两导体作为电容器的两个极板，设在这两个电极间加上已知电压 U ,极板上所带电荷为 $\pm q$,则把比值 q/U 叫做这两导体的等效电容或工作电容。返回

2.9 静电能量与电场力

电场力对电荷的作用 1

电场力对电荷的作用 2

电场能量的建立与释放

静电场对电荷有作用力，并能移动电荷作功，表明它是一个具有作功本领的系统——能量系统。另外，静电能量的变化，可用静电力（移动电荷）所作的功来量度，因此，静电力与静电能量的变化密切相关。

2.9 静电能量与电场力

2.9.1 静电能量

1. 带电体系统中的静电能量

静电能量是在电场的建立过程中，由外力作功转化而来的。

1）连续分布电荷系统的静电能量

假设：
- 电荷系统中的介质是线性的；
- 建立电场过程缓慢（忽略动能与能量辐射）。
- 电场的建立与充电过程无关,导体上电荷与电位的最终值为q、φ，在充电过程中，q 与φ 的增长比例为m，且 $0 \le m \le 1$ 。

因此，在充电过程中外力所作的功将全部转化为静电能量，并且在充电过程的任一时刻的电场均可视为静电场。

2.9 静电能量与电场力

t'时刻，场中P点的电位为 $\varphi'(x,y,z)$, 若将电荷增量 dq 从无穷远处移至该点，

外力作功 $$\delta A=\varphi'(x,y,z)dq$$

这个功转化为静电能量储存在电场中。 t'时刻电荷密度与电荷增量为

$$d\rho'=d\left[m\rho(x,y,z)\right]=\rho(x,y,z)d\,m\,,\qquad dq=d\rho'dV=\rho dmdV$$

电位为 $$\boldsymbol{\varphi}'(x,y,z)=\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{\varphi}(x,y,z)$$

所以，t'时刻外力做的元功转化为电场能量的增量为

$$dW_e=dA=\int_V\varphi'dq=\int_V m\varphi\cdot\rho dmdV$$

故 $$W_e=A=\int\varphi'dq=\int_0^1 mdm\int_V\rho\varphi dV=\frac{1}{2}\int_V\rho\varphi dV$$

2.9 静电能量与电场力

体电荷系统的静电能量

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV$$

面电荷系统

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS$$

线电荷系统

$$W_e = \frac{1}{2}\int_L \tau\varphi dl$$

2.9 静电能量与电场力

2) 带电导体系统

$$\mathrm{W_e} = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k \int_{S_k} \sigma_k dS = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k q_k$$

即

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k q_k}$$

特例：带等值异号的两导体（电容器），设 $q_2 = -q_1$

有

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\varphi_k q_k = \frac{1}{2}(\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2)$$

$$= \frac{1}{2}q_1(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}q_1 U_{12} = \frac{1}{2}qU$$

$$= \frac{1}{2}CU^2 = \frac{q^2}{2C}$$

$$C = \frac{q^2}{2W_e} = \frac{2W_e}{U^2}$$

2.9 静电能量与电场力

讨论与引伸

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S \varphi dq \qquad W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \varphi_k q_k$$

- **式中φ 是元电荷所在处的电位，积分对源进行。**
- **φ_k 是所有导体（含k号导体）表面上的电荷在k号导体产生的电位。**
- **自有能与互有能的概念** $\quad W_e = W_{自} + W_{互}$

自有能是将许多元电荷 dq “压紧”构成 q 所需作的功。互有能是由于多个带电体之间的相互作用引起的能量。

2.9 静电能量与电场力

例如空间中有两带电体，单独存在时，导体的电位、电荷分别为φ_1 ,q_1和φ_2 ,q_2。将带电体2放入带电体1的电场中，两导体的电位会发生变化，如图所示。

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}\varphi_K q_K=\frac{1}{2}\left[q_1(\varphi_1+\Delta\varphi_1)+q_2(\varphi_2+\Delta\varphi_2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(q_1\varphi_1+q_2\varphi_2)+\frac{1}{2}(q_1\Delta\varphi_1+q_2\Delta\varphi_2)$$

自有能　　　　**互有能**

点电荷的自有能为无穷大。

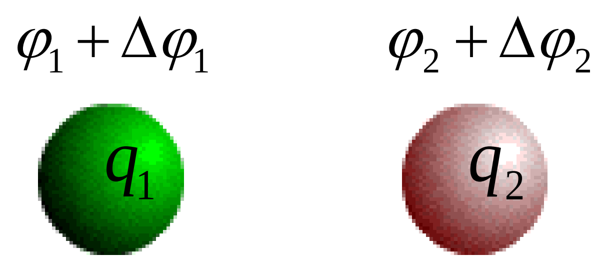


图2.9.1 推导能量用图

2.9 静电能量与电场力

2. 静电能量的分布及能量体密度

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \varphi\rho dV' + \frac{1}{2}\int_S \varphi\sigma dS$$

***V'*——扩大到无限空间*V*，**

***S*——所有带电体表面。**

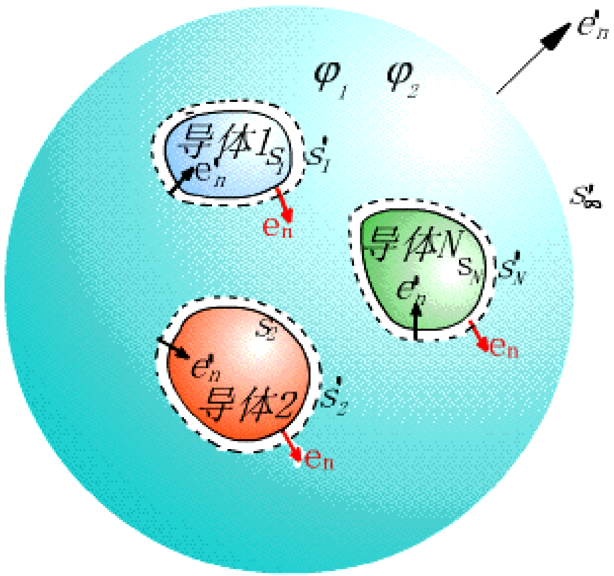


图2.9.2 推导能量密度用图

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D}\, dV + \frac{1}{2}\int_S \varphi\boldsymbol{D}\cdot d\,\boldsymbol{S}$$

由矢量恒等式 $\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi$ 得

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\phi\mathbf{D})dV + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dV + \frac{1}{2}\int_S \phi\mathbf{D}\cdot\mathbf{e}_n dS \qquad (1)$$

2.9 静电能量与电场力

$$W_e=\frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})dV+\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,dV+\frac{1}{2}\int_S \varphi\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}_n dS \tag{1}$$

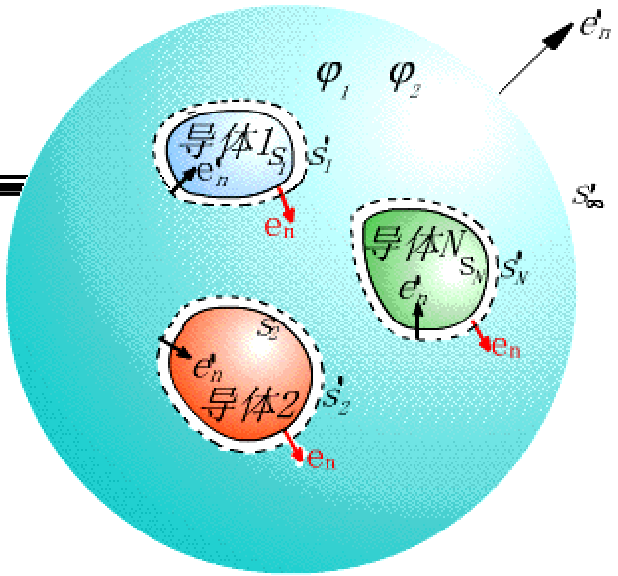


图2.9.2 推导能量密度用图

对上式第一项应用散度定理

$$\frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})dV=\frac{1}{2}\oint_{S'+S'_\infty}\varphi\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\int_{S'_\infty}\varphi\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}'_n\,dS'+\frac{1}{2}\int_S\varphi\boldsymbol{D}\cdot(-\boldsymbol{e}_n)dS \tag{2}$$

将式(2)代入式(1),得

$$W_e=\frac{1}{2}\int_{S'_\infty}\varphi\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}'_n\,dS'+\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,dV=\int_V\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,dV$$

注 $\varphi\propto\frac{1}{r},\ D\propto\frac{1}{r^2},\ dS\propto r^2$

2.9 静电能量与电场力

静电能量

$$\boxed{W_e = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}dV = \int_V w_e dV}$$ **J(焦耳)**

能量密度定义为

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}$$ $\mathbf{J}/\mathrm{m}^3$

结论：凡是静电场不为零的空间都储存着静电能量。

2.9 静电能量与电场力

例2.9.1 试求真空中体电荷密度为 ρ，半径为 a 的介质球产生的静电能量。

解法一 **应用高斯定理，**

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho\, dV \quad \longrightarrow \quad 4\pi r^2 D = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

得:

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r & r < a \\[2ex] \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & r > a \end{cases}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,dV = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2 dV$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\int_0^a \frac{\rho^2 r^2}{9\varepsilon_0^{\ 2}}\cdot 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{\rho^2 a^6}{9\varepsilon_0^{\ 2} r^4}\cdot 4\pi r^2 dr\right) = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 a^5$$

2.9 静电能量与电场力

例2.9.1 试求真空中体电荷密度为 ρ，半径为 a 的介质球产生的静电能量。

解法二 **由微分方程法得**

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=\begin{cases}-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & r\le a\\[2ex] 0 & r>a\end{cases}$$

$$\varphi\big|_{r\to\infty}=0,\quad \varphi\big|_{r\to 0}=\text{有限} \qquad \varphi_1=\varphi_2,\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \qquad r=a$$

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} & r\ge a\\[2ex] \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(a^2-\dfrac{r^2}{3}\right) & r\le a\end{cases}$$

$$W_e=\frac{1}{2}\int_V\varphi\rho dV=\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{2\varepsilon_0}\int_0^a\left(a^2-\frac{r^2}{3}\right)4\pi r^2dr=\frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2a^5$$

例2.9.2 一个原子可以看成是由带正电荷q 的原子核和被总电量等于$-q$且均匀分布于球形体积内的负电荷云包围，如图所示。试求原子结合能。

解： $$W_{总}=W_{互}+W_{自}$$

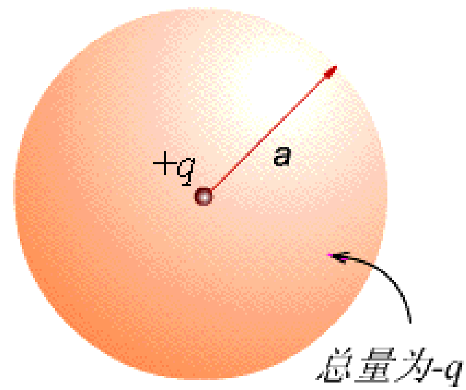


图2.9.3　原子结构模型

$$W_{自}=\frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2a^5\,;\qquad W_{互}=q\varphi_{-}(0)$$

$$\varphi_{-}(0)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(a^2-\frac{r^2}{3}\right)_{r=0}=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$$

$$=-\frac{q}{(4/3)\pi a^3}\cdot\frac{a^2}{2\varepsilon_0}=-\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 a}\qquad W_{互}=-\frac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

$$W_{总}=W_{自}+W_{互}=\frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2a^5-\frac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}=-\frac{9q^2}{40\pi\varepsilon_0 a}$$

表示将正负电荷从无穷远处移来置于原子中的位置时外力必须做的功。

注意： **正电荷从无穷远处移至此处不需要电场力作功,故原子结合能未包括原子核正电荷本身的固有能量。**

2.9 静电能量与电场力

2.9.2 静电力

1. 由电场强度E的定义求静电力，即

$$\boxed{f = qE} \qquad \boxed{df = E dq} \qquad \boxed{f = \int E dq}$$

2.虚位移法（ Virtual Displacement Method ）

虚位移法是基于虚功原理计算静电力的方法。

- **广义坐标：距离、面积、体积、角度。**
- **广义力：企图改变某一个广义坐标的力。广义力的正方向为广义坐标增加的方向。**

二者关系： $\boxed{\text{广义力} \times \text{广义坐标} = \text{功}}$

广义坐标	距 离	面 积	体 积	角 度	
广义力	机械力	表面张力	压强	转矩	
(单位)	(N)	(N/m)		(N/m^2)	N•m

2.9 静电能量与电场力

设$(n+1)$个导体组成的系统,只有P 号导体发生位移 dg，此时系统中带电体的电压或电荷将发生变化，其功能关系为

$$dW = dW_e + fdg = \sum \varphi_k dq_k$$

$$\boxed{\text{外源提供能量}} = \boxed{\text{静电能量增量}} + \boxed{\text{电场力所作功}}$$

I、常电荷系统（K 打开）：

$$0 = dW_e + fdg$$

$$\rightarrow \quad -fdg = dW_e$$

$$\boxed{f = -\frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{q_k = const.}}$$

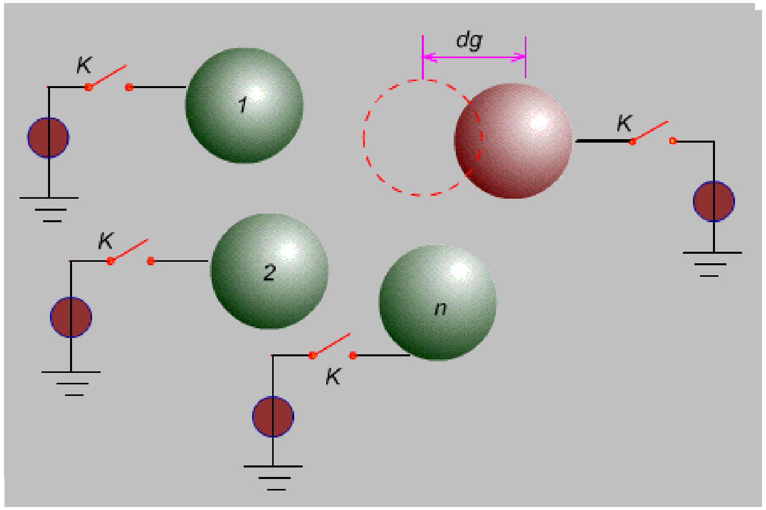


图2.9.4 多导体系统

它表示取消外源后，电场力做功必须靠减少电场中静电能量来实现。

2.9 静电能量与电场力

Ⅱ、常电位系统（K合上）：

外源提供能量的增量

$$dW=\sum\varphi_k dq_k$$

静电能量的增量 $$dW_e=\frac{1}{2}\sum\varphi_k dq_k$$

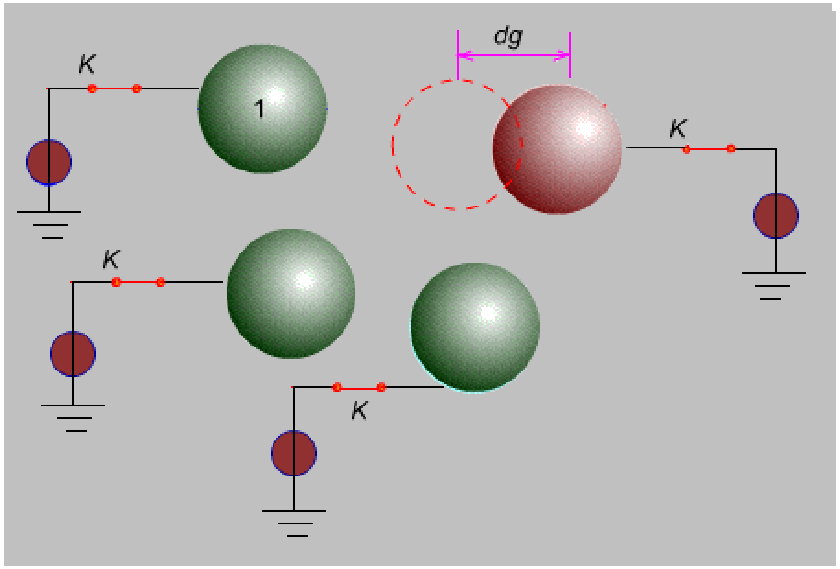


图2.9.4　多导体系统

$$\sum\varphi_k dq_k=\frac{1}{2}\sum\varphi_k dq_k+fdg$$

外源提供的能量有一半用于静电能量的增量，另一半用于电场力做功。

$$\boxed{f=+\left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{\varphi_k=const.}}$$

2.9 静电能量与电场力

讨论与引伸

- 两个公式所求得的**广义力是代数量** 。还需根据“±”号判断其方向。

- 上述两个公式所得结果是相等的

$$f=-\frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{q_k=const}=+\frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{\varphi_k=const}$$

2.9 静电能量与电场力

例2.6.3 试求图示平行板电容器的电场力。

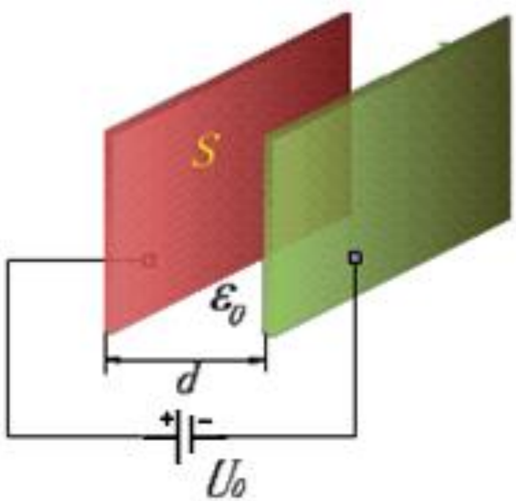


图2. 9. 5　平行板电容器

解法一：常电位系统

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 \qquad C = \frac{\varepsilon_0 s}{d}$$

$$f = +\frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{\varphi_k = const} = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{U^2 \varepsilon_0 S}{2d^2} < 0$$

解法二：常电荷系统

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 s}{d}$$

$$f = -\frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{q_k = const} = -\frac{\partial}{\partial g}\left[\frac{q^2}{2C}\right] = \frac{q^2}{2C^2} \cdot \frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{U^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 S}{d^2} < 0$$

两种方法计算结果相同，电场力有使 *d* 减小的趋势，即电容增大的趋势。

例2.9.4 **图示一球形薄膜带电表面，半径为 a，其上带电荷为 q，试求薄膜单位面积所受的电场力。**

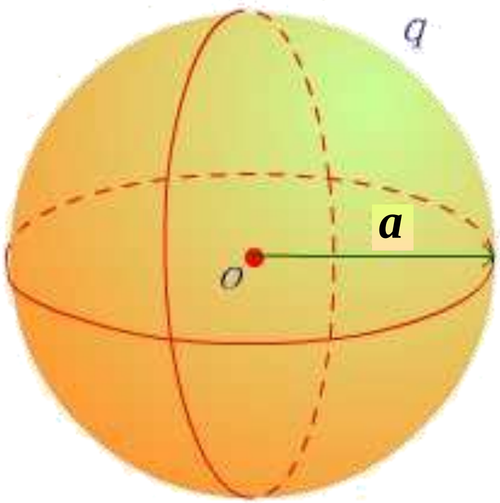


图2.9.6 球形薄膜

解：

$$W_e = \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C} \qquad C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

$$f = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial a}\right|_{q=const} = -\frac{\partial W_e}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial a}$$

$$= \frac{q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2} > 0$$

表示广义力 f 的方向是广义坐标 a 增大的方向，即为膨胀力。

单位面积上的力：

$$f' = f/4\pi a^2 = \left(\frac{q}{4\pi a^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\sigma E = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} \qquad (\mathrm{N/m^2})$$

2.9 静电能量与电场力

工程上，静电力有广泛的应用。

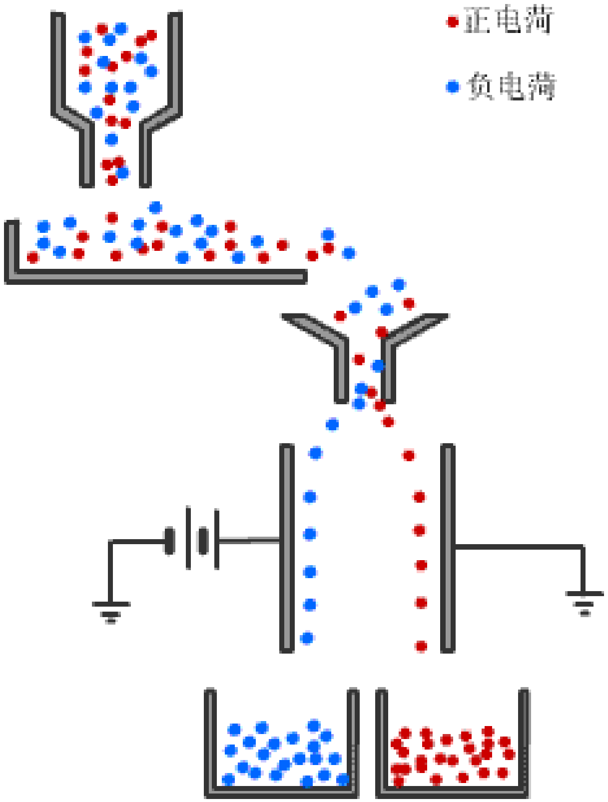


图2.9.7　静电分离

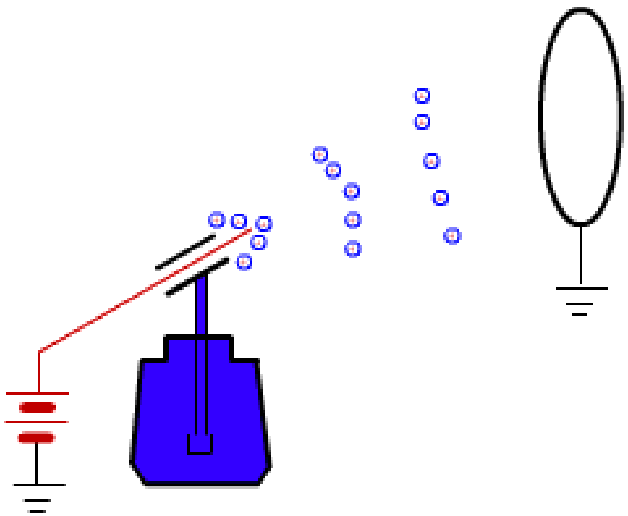


图2.9.8 静电喷涂

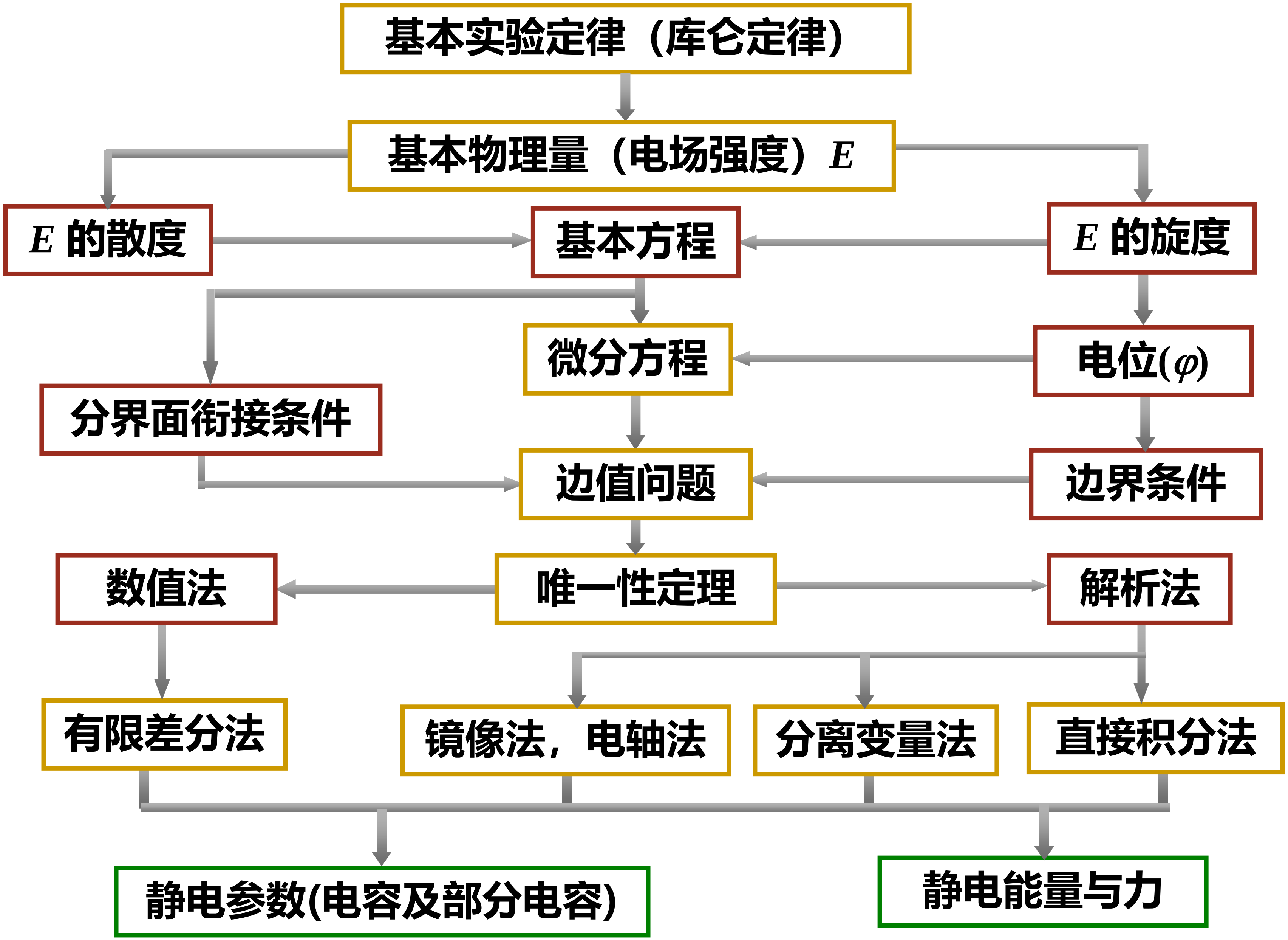


图2.0　静电场知识结构图

返回