7.3 区间估计 Interval estimation

1. 概念及定义

2. 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$的均值及方差的置信区间 (The confidence interval)

1. 简介. 随机样本的应用

- 点估计，由于只是一个简单的数字，缺乏关于估计的精度及估计的可靠性等信息
- A point estimate, because it is a single number, by itself provides no information about the precision and reliability of estimation.
- 考虑用样本均值 $\bar{X}$ 计算总体的均值的一个点估计。
  假设 $\bar{x} = 62.5$，由于采样的可变性（每个样本看做随机变量），

  $P(\bar{X} = \mu) = 0$
- The point estimate says nothing about how close it might be to μ .
- 另一个选择方案就是给出一个大致范围，而不是一个数，使得总体的均值 μ 有很高的概率落在该范围内—给出一个区间估计或者置信区间 an *interval estimate or confidence interval* (CI).

定义： 置信区间

设 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 使两个关于 θ 的统计量. 给定概率 $1-\alpha$, 其中 $0 < \alpha < 1$， 如果

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 为 θ 的置信区间 （confidence interval）

$1-\alpha$ 称为置信概率 或者置信度、置信水平 confidence level.

注：区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 的大小依赖于样本值，可能包含 θ， 也可能不包含 θ

注：当 $1-\alpha = 0.95$时，$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 的意义是指：在100次重复抽样得到的100个随机区间中，大约有95个区间包含参数的真值，有5个区间不包含θ

对于单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

情形 1. σ^2 已知的条件下，μ 的区间估计

(1) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, or $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ ✓

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ✗

(3) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ ✗

情形1. σ^2已知， μ 的置信区间

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的随机样本

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$

那么， $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$

或者 $P\left(\bar{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$

所以，μ 的置信概率为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\bar{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

情形 2. σ^2未知时， μ 的置信区间

统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\qquad \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1\right)$$

例 7.12 某车间生产滚珠，已知其直径 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，现从某一天生产的产品中随机地抽出 6 个，测得直径如下（单位：mm）：

$$14.6,\ 15.1,\ 14.9,\ 14.8,\ 15.2,\ 15.1,$$

试求滚珠直径 X 的均值 μ 的置信概率为 95% 的置信区间.

分析: σ^2 未知，应用如下统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

解 样本的均值 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=14.95$

样本方差 $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=0.05102$ $s=0.22588,$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(5)=2.571,$$

$$\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=0.24$$

所以，当置信水平为 0.9 时，σ^2 的置信区间为，

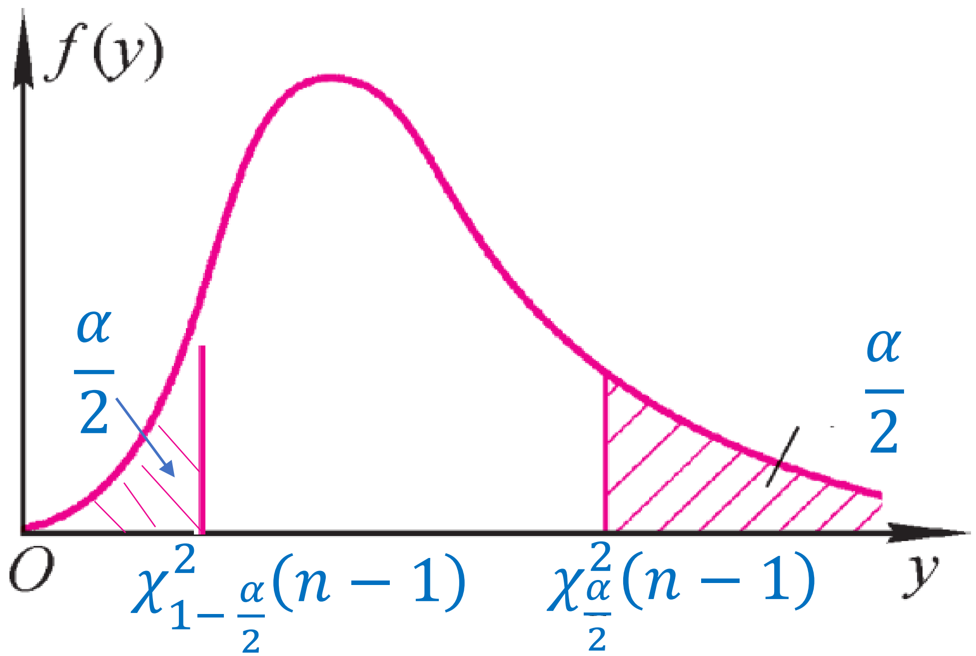
$$\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

或者 $(14.95-0.24，14.95+0.24)$

情形 3. μ 未知时， σ^2 的置信区间

统计量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha$$



$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

σ^2的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

例 7.13 某种钢丝的折断力服从正态分布，今从一批钢丝中任取 10 根，试验其折断力，得数据如下： 572，570，578，568，596，576，584，572，580，566，试求方差 σ^2 的置信概率为 0.9 的置信区间.

解

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{10}(572+570+\cdots+566)=576.2,\quad s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=79.51$$

又 $\alpha=0.10$， 查附表得

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.05}(9)=16.919,$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.95}(9)=3.325,$$

所以，σ^2 的置信概率为 0.9 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)\qquad 或\ \left(\frac{9s^2}{\chi^2_{0.05}(9)},\ \frac{9s^2}{\chi^2_{0.95}(9)}\right)$$

代入得 (42.30，215.22)

正态总体的均值、方差的置信度为$(1-\alpha)$的置信区间

待估参数	其他参数	统计量	置信区间
μ	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 原点对称	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
μ	σ^2 未知	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 原点对称	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$
σ^2	μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$ 关于原点不对称	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$