傅里叶变换

$\mathcal{F}$ 用来表示傅里叶变换。

1. 傅里叶级数

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin \omega_0 t \tag{1}$$

其中$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega_0 t\, dt$，$(n = 0, 1, 2\cdots)$

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega_0 t\, dt$，$(n = 1, 2, \cdots)$

在间断点t_0处，右端收敛于$\frac{1}{2}\left[f_T(t_0+0) + f_T(t_0-0)\right]$

复指数形式：

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \tag{2}$$

其中，$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$，$c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-in\omega_0 t}\, dt$，$(n \in Z)$

c_n被称为周期函数$f_T(t)$的**离散频谱**，$|c_n|$：离散频谱振幅，$\arg c_n$：离散相位谱。

2.单位脉冲函数(δ函数)

1. 定义：

满足下面两个条件的广义函数：

1)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & ,t \neq 0 \\ \infty & ,t = 0 \end{cases} \tag{3}$$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1 \tag{4}$$

2.性质：

下面的$\phi(t)$为R上的无穷项可微函数。

1)筛选性质：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t-t_0)\, dt = \phi(t_0) \tag{5}$$

2)偶函数：

$$\delta(t) = \delta(-t) \tag{6}$$

3)

$$t\delta(t) \equiv 0 \tag{7}$$

4)

$$\phi(t)\delta(t-t_0)=\phi(t_0)\delta(t-t_0) \tag{8}$$

5)尺度变换性质：

$$\delta(at\pm b)=\frac{1}{|a|}\delta(t\pm\frac{b}{a}),\ a\neq 0 \tag{9}$$

6)单位阶跃函数$u(t)$与$\delta(t)$的关系，其中$u(t)=\begin{cases}1 & ,t>0\\ 0 & ,t<0\end{cases}$

$$\delta(t)=u'(t) \tag{10}$$

3.傅里叶积分公式与傅里叶变换

1. 傅里叶积分公式

又称为傅氏积分公式。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau\Big]e^{i\omega t}\,d\omega \tag{11}$$

2.傅里叶变换

下面我用**F.T来表示傅里叶变换，IFT表示傅里叶逆变换。**

F.T：

$$\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=F(w) \tag{12}$$

IFT：

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{i\omega t}\,d\omega=f(t) \tag{13}$$

3.傅里叶变换的性质：

1. **线性性质：**

$$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\leftrightarrow\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega) \tag{14}$$

2. **对偶性质：**

$$F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \tag{15}$$

3. **频移性质：**

$$f(t)\cdot e^{\pm i\omega_0 t}=F[\omega\mp\omega_0] \tag{16}$$

4. **时移性质：**

$$f(t\pm t_0)\leftrightarrow F(\omega)\cdot e^{\pm i\omega t_0} \tag{17}$$

5. **时间尺度变换：(先平移，再缩放)**

$$f(at\pm b)=f[a(t\pm\frac{b}{a})]\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(i\frac{\omega}{a})\cdot e^{\pm i\omega\frac{b}{a}} \tag{18}$$

6. **共轭对称性质**：写出来有点麻烦，这里略过，仅需要知道$F(\omega)$可以写为实数部分和虚数部分即可：（利用欧拉公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$）

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt-i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt \tag{19}$$

7. **卷积定理：**

   1)时域上的卷积：

$$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(\omega)\cdot F_2(\omega) \tag{20}$$

   2)频域上的卷积：

$$f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega) \tag{21}$$

8. **时域微分性质与积分性质：**

   1)时域微分性质：

$$f^{(n)}(t)\leftrightarrow (i\omega)^n\cdot F(i\omega) \tag{22}$$

   2)时域积分性质：

$$f^{(-1)}(t)\leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\omega)}{i\omega} \tag{23}$$

9. **频域微分与积分性质：**

   这里并没有考虑推广到n，基本上目前用到的都是1次求导或1次微分。

   1)频域微分性质：

$$(-it)f(t)\leftrightarrow \frac{d\,F(\omega)}{d\omega} \tag{24}$$

   2)频域积分性质：

$$\pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-it}\leftrightarrow F^{(-1)}(\omega) \tag{25}$$

10. **调制定理：**

$$f(t)\cdot\cos(\omega_0 t)\leftrightarrow \frac{1}{2}F[(\omega-\omega_0)]+\frac{1}{2}F[(\omega+\omega_0)] \tag{26}$$

4. 常用的傅里叶变换对：

$\delta(t)\ \leftrightarrow\ 1(\omega)$	$\begin{cases}\frac{t}{\tau}+1\ ，t\in[-\tau,0]\\ -\frac{t}{\tau}+1\ ，t\in[0,\tau]\\ 0\ ，\text{其他}\end{cases}\leftrightarrow \tau\cdot Sa^2(\frac{\omega\tau}{2})$
$\delta'(t)\ \leftrightarrow\ i\omega$	$\varepsilon(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$g_\tau(t)\ \leftrightarrow\ \tau\cdot Sa(\frac{\omega\tau}{2})$	$1(t)\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$
$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\ \frac{1}{\alpha+i\omega}$，$\alpha>0$	$Sgn(t)\leftrightarrow \frac{2}{i\omega}$
$e^{-\alpha\lvert t\rvert}\varepsilon(t)\leftrightarrow\ \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$，$\alpha>0$	

补充：

$$\begin{aligned}\sin\omega_0 t&\leftrightarrow i\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\\ \cos\omega_0 t&\leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]\end{aligned} \tag{27}$$

4.序列的傅里叶变换DTFT

其实就是把连续的情况推回到了离散的情况。这里不打算给出。