超甜微积分习题集

Math1001 第四季 第 18.50 稿

曲豆豆 ⊗ BIUBIU 码字

一起 biu 题吧!

2020 年 10 月 1 日

来自曲豆豆的高数讨论 qq 群：1022388218
这是一个分享 LaTeX 数学原创笔记、讲义的地方

- 曲豆豆高数群近期事宜：
- 这是超甜微积分第四季的首版, 第四季题目的背景色为黄色.
- 群作业功能上线! 超甜微积分的更新进程将同步到【超甜作业】.
- 2020.5.3 是本群建群一周年纪念日, 大家开心庆祝呀!
- 《Dummit 代数学千题解》于 2019.12.20 启动，正在高效更新中.

这一页用来打广告

本群主群已接近满员, 欢迎大家加入分群!

- **曲豆豆的高等数学群** (主群, 群号 1022388218). 此群比较欢乐, 大一萌新居多, 也常有大佬活跃于此. 学习高数之余可在此水群.
- **数学专业学习交流群** (第一分群, 群号 992412601). 此群同样历史悠久, 面向数学专业以及数学爱好者, 讨论高数, 线代以上的数学内容.
- **喵哥考研数学交流答疑群** (第二分群, 群号 664123059). 专为考研党准备, 交流讨论考研数学一二三的内容. 此群严禁水群, 纪律严明. 群里不乏考研上岸者以及喵哥等大佬.

曲豆豆亲手码字, 《超甜微积分》编写不易, 还请大家支持! 微信扫码, 即可打赏曲豆豆!

目录

1 数列极限 **1**

1.1 数列极限的基本概念与性质 . . . 1

1.2 单调收敛定理与压缩映射原理 . . . 10

1.3 Stolz 定理 . . . 15

1.4 上极限与下极限 . . . 18

2 连续函数 **23**

2.1 函数的基本概念 . . . 23

2.2 一元函数的极限与连续性 . . . 25

2.3 一元连续函数的性质 . . . 29

2.4 无穷大量与无穷小量 . . . 32

2.5 多元连续函数 . . . 33

3 一元微分学 **37**

3.1 导数的基本概念与计算 . . . 37

3.2 高阶导数 . . . 40

3.3 泰勒公式与极限的计算 . . . 44

3.4 隐函数与参数方程的求导 . . . 51

3.5 微分中值定理 . . . 53

3.6 用导数研究函数的性质 . . . 66

4 一元积分学 **70**

4.1 不定积分的计算 . . . 70

4.2 定积分的计算 . . . 72

4.3 积分中值定理 . . . 86

4.4 Good kernel 及其应用 . . . 93

4.5 定积分的数值计算 . . . 97

4.6 积分不等式 . . . 106

5 无穷级数与反常积分 **113**

5.1 级数基本概念、正项级数 . . . 113

5.2 一般项级数 . . . 118

5.3 幂级数 . . . 123

5.4 无穷乘积 127
5.5 反常积分的收敛性 128
5.6 反常积分的计算 130

6 多元微分学 137
6.1 偏导数与可微性 137
6.2 隐映射定理及其应用 142
6.3 极值与条件极值 147
6.4 几何与物理应用 153
6.5 简单的偏微分方程 156

7 多重积分 157
7.1 二重积分 157
7.2 三重积分 167
7.3 多重积分 170
7.4 积分不等式 II 173

8 曲线积分与曲面积分 177
8.1 第一型曲线积分 177
8.2 第一型曲面积分 181
8.3 第二型曲线积分 191
8.4 第二型曲面积分 197
8.5 $\mathbb{R}^3$ 中的矢量分析与场论 199

每日一题-日期索引

2019-05-07 超甜微积分第一季！, 163
2019-05-08, 44
2019-05-09, 78
2019-05-10, 165
2019-05-11, 188
2019-05-12, 88, 89
2019-05-13, 54
2019-05-14, 1
2019-05-15, 46
2019-05-16, 93
2019-05-17, 94
2019-05-18, 2
2019-05-19, 86
2019-05-20, 159
2019-05-21, 139
2019-05-22, 26
2019-05-23, 73
2019-05-24, 168
2019-05-25, 24
2019-05-26, 197
2019-05-27, 58
2019-05-28, 163
2019-05-29, 170
2019-05-30, 59
2019-05-31, 182
2019-06-01, 46
2019-06-02, 75
2019-06-03, 144
2019-06-04, 120
2019-06-05, 10
2019-06-06, 16
2019-06-07, 72
2019-06-08, 56
2019-06-09, 114
2019-06-10, 153
2019-06-11, 184
2019-06-12, 155
2019-06-13, 153
2019-06-14, 98
2019-06-15, 144
2019-06-16, 114
2019-06-17, 185
2019-06-18, 115
2019-06-19, 52
2019-06-20, 13
2019-06-21, 91
2019-06-22, 49
2019-06-23, 161
2019-06-24 至 2019-06-30 暂停更新一周, i
2019-07-01 第二季开始, 66
2019-07-02, 6
2019-07-03, 113
2019-07-04, 128
2019-07-05, 159
2019-07-06, 51
2019-07-07, 39
2019-07-08, 199
2019-07-09, 172
2019-07-10, 173
2019-07-11, 131
2019-07-12, 73
2019-07-13, 169
2019-07-14, 77
2019-07-15, 35
2019-07-16, 40
2019-07-17, 39
2019-07-18, 7
2019-07-19, 136

2019-07-20, 161
2019-07-21, 99
2019-07-22, 101
2019-07-23, 103
2019-07-24, 105
2019-07-25, 43
2019-07-26, 62
2019-07-27, 168
2019-07-28, 48
2019-07-29, 102
2019-07-30, 128
2019-07-31, 87
2019-08-01, 121
2019-08-02, 92
2019-08-03, 63
2019-08-04, 64
2019-08-05, 82
2019-08-06, 200
2019-08-07, 66
2019-08-08, 137
2019-08-09, 175
2019-08-10, 132
2019-08-11, 175
2019-08-12, 134
2019-08-13, 111
2019-08-14, 110
2019-08-15, 120
2019-08-16, 65
2019-08-17, 8
2019-08-18, 165
2019-08-19, 116
2019-08-20, 146
2019-08-21, 130
2019-08-22, 82
2019-08-23, 67
2019-08-24, 182
2019-09-09 第三季开始！, 118
2019-09-11, 158
2019-09-17, 109
2019-09-20, 113
2019-09-25, 97
2019-09-27, 125
2019-09-28, 191
2019-09-29, 189
2019-10-01, 17
2019-10-02, 8
2019-10-03, 107
2019-10-04, 76
2019-10-05, 33
2019-10-06, 190
2019-10-07, 158
2019-10-09, 142
2019-10-10, 126
2019-10-11, 45
2019-10-12, 18
2019-10-13, 193
2019-10-14, 9, 21
2019-10-15, 5, 15, 112
2019-10-16, 96
2019-10-17, 61, 148
2019-10-18, 50
2019-10-19, 131, 139
2019-10-20, 59, 68
2019-10-21, 13
2019-10-24, 4, 124, 169
2019-10-30, 147
2019-11-03, 77
2019-11-06, 3, 34
2019-11-07, 55, 56, 109, 200
2019-11-09, 123
2019-11-19, 47
2019-11-20, 42
2019-11-21, 138
2019-11-23, 34

2019-11-24, 110
2019-11-27, 127
2019-11-28, 20
2019-11-29, 187
2019-12-01, 140
2019-12-02, 65
2019-12-16, 130
2019-12-20, 84
2019-12-21, 30, 58, 122
2020-02-08 第四季首题！, 41
2020-02-09, 51
2020-02-15, 110
2020-02-19, 3
2020-03-20, 27
2020-03-28, 149
2020-03-29, 151
2020-03-30, 118
2020-03-31, 152
2020-04-05, 167
2020-04-08, 145
2020-04-10, 36
2020-04-13, 145
2020-04-21, 162
2020-04-28, 186
2020-05-09, 178
2020-05-12, 180
2020-05-30, 194
2020-05-31, 192
2020-06-01, 196
2020-06-03, 198
2020-06-12, 83
2020-06-15, 122
2020-06-25, 201
2020-06-27, 121
2020-07-26, 14
2020-08-04, 143

第一章 数列极限

1.1 数列极限的基本概念与性质

习题 1. 已知正数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$，

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 存在正的下界（换句话说，存在 $\varepsilon > 0$，使得 $a_n \geq \varepsilon$ 对任意 $n \geq 1$ 都成立）；

（2）举例说明数列 $\{a_n\}$ 之中可能没有最小数。

证明. **(1)** 由数列极限的定义，存在正整数 N，使得对任意 $n > N$，都有 $a_n > \frac{A}{2}$；对于这个 N，注意 $a_1, a_2, ..., a_N$ 都为正数，从而考虑

$$\varepsilon := \min\{a_1, a_2, ..., a_N; \frac{A}{2}\}$$

易知如此的 ε 是数列 $\{a_n\}$ 的一个正下界。

(2) 例如 $a_n = A + \frac{1}{n}$. □

习题 2. 已知非负数列 $\{a_n\}$ 使得对任意 $n \geq 1$ 都成立 $a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{n^2}$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在。

证明. 考虑数列 $b_n := a_n + \frac{2}{n}$，则由 $a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{n^2}$ 容易得到 $b_{n+1} \leq b_n$，即 $\{b_n\}$ 单调递减。又易知 $\{b_n\}$ 非负，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 存在。因此

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (b_n - \frac{2}{n}) = \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} b_n$$

□

习题 3. 已知正数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，证明：存在正数列 $\{b_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$.

证明. 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，从而存在正整数 N_1，使得当 $n > N_1$ 时，$a_n < \frac{1}{1^2}$. 之后考虑子列 $\{a_n\}_{n=N_1}^{+\infty}$，该数列也趋于 0，从而存在正整数 $N_2 > N_1$，使得当 $n > N_2$ 时，$a_n < \frac{1}{2^2}$.

如此不断地归纳构造下去，可得到一列 $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots$，使得对任意 $k \geq 1$，若 $n > N_k$，则 $a_n < \frac{1}{k^2}$. 注意到对任何正整数 n，要么 $n \leq N_1$，要么存在唯一的 $k \geq 1$，使得 $N_k < n \leq N_{k+1}$. 构造数列 $\{b_n\}$ 如下：

$$b_n = \begin{cases} a_n & n \leq N_1 \\ ka_n & N_k < n \leq N_{k+1} \end{cases}$$

则当 $N_k < n \leq N_{k+1}$ 时，$b_n = ka_n < k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$，于是易知 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$；又因为 $N_k < n \leq N_{k+1}$ 时，$\frac{b_n}{a_n} = k$，由此易知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$. □

另一种更直接的构造是 $b_n = \sqrt{a_n}$。

注记

此题表明，不存在“收敛速度最慢”的数列。

习题 4. 设 $a_1, a_2, ..., a_N$ 是 N 个给定的正数，证明：

$$\lim_{n\to+\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_N^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_1, a_2, ..., a_N\}$$

证明. 令 $A := \max\{a_1, a_2, ..., a_N\}$，则一方面有

$$(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_N^n)^{\frac{1}{n}} \leq (NA^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{N}A \to A \qquad (n \to +\infty)$$

另一方面，$\left\{a_i \middle| 1 \leq i \leq N\right\}$ 之中至少有一个为 A，从而

$$(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_N^n)^{\frac{1}{n}} \geq (A^n)^{\frac{1}{n}} = A$$

从而由夹逼原理，$\lim\limits_{n\to+\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_N^n)^{\frac{1}{n}} = A = \max\{a_1, a_2, ..., a_N\}$. □

习题 5. 已知数列 $\{a_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 存在，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

证明. 记数列 $\{a_n\}$ 的部分和 $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则由题意 $A := \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$ 存在。从而有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1} \right) = A - 1 \cdot A = 0$$

□

习题 6. 已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均为单调递增的无界数列，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$. 证明：集合 $X:=\left\{a_n-b_m\middle|m,n\in\mathbb{Z}_+\right\}$ 在 $\mathbb{R}$ 当中稠密（其中“稠密”是指，任意开区间 (r,s) 与 X 的交集非空）。

证明. 由于 $\{a_n\},\{b_n\}$ 单调递增且无界，从而当 $n\to+\infty$ 时它们都趋于 $+\infty$.

对任意给定的开区间 (r,s), 记 $\varepsilon:=s-r>0$. 则由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ 可知存在 $N>0$ 使得当 $n\geq N$ 时成立 $a_{n+1}<a_n+\varepsilon$. 另外由 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=+\infty$ 可知存在 $m\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $b_m>-r+a_N$, 即 $-b_m<r-a_N$. 对于此 m, 考虑集合

$$\mathcal{I}_m:=\left\{n\in\mathbb{Z}_+\middle|a_n-b_m\leq r\right\}$$

因为 $b_m>-r+a_N$, 所以 $a_N-b_m<r$, 所以 $N\in\mathcal{I}_m$, 所以集合 $\mathcal{I}_m$ 非空。又因为 $\{a_n\}$ 单调递增趋于正无穷，从而当 n 足够大时 $a_n-b_m>r$, 故集合 $\mathcal{I}_m$ 有上界。又 $\mathcal{I}_m$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的子集，从而必存在最大元。记 n 为集合 $\mathcal{I}_m$ 的最大元，则 $n\geq N$.

由 n 在 $\mathcal{I}_m$ 之中的最大性可知 $a_{n+1}-b_m>r$. 另一方面由 $n\geq N$ 可知 $a_{n+1}-b_m<a_n-b_m+\varepsilon\leq r+(s-r)=s$. 综上可知 $a_{n+1}-b_m\in(r,s)$, 从而 $X\cap(r,s)\neq\varnothing$. 这就证明了 X 在 $\mathbb{R}$ 当中稠密。 □

习题 7. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1^1+\sqrt[n]{2^2+\sqrt[n]{3^3+\sqrt[n]{\cdots+\sqrt[n]{n^n}}}}}.$$

证明. 只需注意到

$$1\leq\sqrt[n]{1^1+\sqrt[n]{2^2+\sqrt[n]{3^3+\sqrt[n]{\cdots+\sqrt[n]{n^n}}}}}\leq\sqrt[n]{1+2+\cdots+n}\leq\sqrt[n]{2n^2}\to1\quad(n\to+\infty).$$

从而由夹逼原理可知该极限为 1. □

习题 8. 计算极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n\binom{n}{k}}.$$

解. ：对于 $n\geq2$，注意对任意的 $2\leq k\leq n-2$，成立

$$\binom{n}{k}\geq\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

因此对于 $n \geq 4$，成立

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n\binom{n}{k}} &= \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{n+1-k}{n\binom{n}{k}} \\ \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{n}{n\frac{n(n-1)}{2}} &= \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{2(n-4)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$，则上式右边趋于 0；又因为 $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n\binom{n}{k}} > 0$，从而由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n\binom{n}{k}} = 0.$$

□

习题 9. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{1}}{n^2+n+1} + \frac{2+\frac{1}{2}}{n^2+n+2} + \frac{3+\frac{1}{3}}{n^2+n+3} + \cdots + \frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n+n} \right).$$

解. 使用夹逼原理。对于 $n \geq 1$，注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+\frac{1}{k}}{n^2+n+k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n+k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{k}}{n^2+n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \to \frac{1}{2} \qquad (n \to +\infty)\end{aligned}$$

另一方面，我们还有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+\frac{1}{k}}{n^2+n+k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n+k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+2n} = \frac{n+1}{2(n+2)} \to \frac{1}{2} \qquad (n \to +\infty)$$

因此由夹逼原理，原极限存在，并且等于 $\frac{1}{2}$. □

习题 10. 已知实数 $\alpha > 1$, 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1^\alpha} + \frac{1}{n+2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n+n^\alpha} \right).$$

解. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 由 $\alpha > 1$, 从而众所周知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 收敛. 由柯西收敛准则可知存在正整数 M 使得对任何正整数 k 都成立

$$\frac{1}{M^\alpha} + \frac{1}{(M+1)^\alpha} + \frac{1}{(M+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(M+k)^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于此 M,取 $N := [\frac{2M}{\varepsilon}] + 1$, 则对于任意 $n \geq N$, 成立

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k^\alpha} &\leq \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{n+k^\alpha} + \sum_{k=M+1}^{n} \frac{1}{n+k^\alpha} \\ &\leq \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{n} + \sum_{k=M+1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

因此有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1^\alpha} + \frac{1}{n+2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n+n^\alpha}\right) = 0.$ □

习题 11. 计算极限:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left[1 - \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)\right].$$

解. 注意到该数列的通项

$$\sqrt{n}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}\right) = \sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{(n+\sqrt{k})\sqrt{n}}$$

注意函数 $x \mapsto \sqrt{x}$ 单调递增，从而有不等式

$$\frac{2}{3}\left[(n+1)\sqrt{n+1} - 1\right] = \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \geq \int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}n\sqrt{n}$$

从而我们得到

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}\right) &\leq \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{(n+1)\sqrt{n+1} - 1}{n\sqrt{n}} \\ \sqrt{n}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}\right) &\geq \frac{1}{(n+\sqrt{n})\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{n\sqrt{n}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{n}} \end{aligned}$$

令 $n \to +\infty$, 则由夹逼原理立刻得到

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}\right) = \frac{2}{3}$$

□

习题 12. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)$$

证明. 对于 $x>0$，注意不等式 $x-\frac{1}{6}x^3<\sin x<x$，从而有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}=1$$

$$\begin{aligned}1-\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}\right) &< \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n^2}\right)^3<\frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{2n}k^3\\ &< \frac{1}{6n^6}\int_1^{2n+1}x^3\,\mathrm{d}x<\frac{(3n)^4}{24n^6}\to 0\qquad(n\to+\infty)\end{aligned}$$

于是由夹逼原理立刻得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)=1.$ □

另证. 首先仍由 $\sin x\le x$ 得出 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}\le 1$. 不过另一边不等号可以这样估计：注意到极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，从而对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意 $|x|<\delta$，都有 $\frac{\sin x}{x}>1-\varepsilon$，即 $\sin x>x-\varepsilon x$. 现在取足够大的 N，使得 $N>\frac{2}{\delta}$，则对任意 $n>N$，$\frac{1}{n^2},\frac{3}{n^2},\ldots,\frac{2n-1}{n^2}$ 都小于 δ，因此有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}\ge\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n^2}-\varepsilon\frac{2k-1}{n^2}\right)=1-\varepsilon$$

因此由数列极限的定义，即得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)=1.$

□

习题 13. 对于常数 θ，计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\theta}{n\sqrt{n}}$$

解. 考虑函数 $f(x)=\ln\cos x$ 在 $x=0$ 附近的泰勒展开，容易知道存在常数 $M>0$ 使得当 $|x|$ 充分小时成立

$$\ln\cos x=-\frac{1}{2}x^2+r(x)$$

其中余项 $|r(x)|\le Mx^4$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{k\theta}{n\sqrt{n}}\ =\ \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2\theta^2}{n^3}\right)+\sum_{k=1}^{n}r\left(\frac{k\theta}{n\sqrt{n}}\right)$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r\left(\frac{k\theta}{n\sqrt{n}}\right)\right| \leq M\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4\theta^4}{n^6} = \frac{M\theta^4}{n^6}\sum_{k=1}^{n}k^4 \to 0 \qquad (n\to+\infty)$$

从而令 $n\to+\infty$，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{k\theta}{n\sqrt{n}} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2\theta^2}{n^3}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\theta^3}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\ &= -\theta^2\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} = -\frac{\theta^2}{6}\end{aligned}$$

对上式两边取指数，即得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{k\theta}{n\sqrt{n}} = e^{-\frac{\theta^2}{6}}$.

□

习题 14. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}+n\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

解. 首先注意到

$$\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}+\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{(n-k)\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+\cos\frac{(n-k)\pi}{n}\right) = 0$$

因此

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}+n\left(\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}-\cos\frac{0\cdot\pi}{n}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

习题 15. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{\pi}{2}}\ln n\cdot\sin\left[(\sqrt{2}+1)^n\pi\right]$$

解. 考虑数列 $a_n := (1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n$，则 $a_1=2, a_2=6$，并且用数学归纳法容易验证递推关系

$$a_{n+2} = 2a_{n+1}+a_n \qquad (n\geq 1)$$

特别地，由递推关系归纳可得数列 $\{a_n\}$ 的每一项都为偶数，从而

$$\sin\left[(\sqrt{2}+1)^n\pi\right] = \sin\left[(a_n-(1-\sqrt{2})^n)\pi\right] = (-1)^n\sin\left[(\sqrt{2}-1)^n\pi\right]$$

再注意 $|\sqrt{2}-1|<1$，从而 $n\to+\infty$ 时有等价无穷小量

$$\sin\left[(\sqrt{2}-1)^n\pi\right]\sim(\sqrt{2}-1)^n\pi$$

因此立刻得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{\pi}{2}}\ln n\cdot\sin\left[(\sqrt{2}+1)^n\pi\right]=0.$ □

习题 16. 将集合 $\left\{2^m3^n\middle|m,n\geq 0\right\}$ 之中的元素从小到大排成数列 $\{a_n\}$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$

证明. 我们需要一个初等的结果：对于任意正数 $a,b>0$，如果 $\frac{a}{b}$ 为无理数，那么对任意 $\delta>0$，存在非负整数 p,q,r,s，使得 $-\delta<pa-qb<0<ra-sb<\delta$.（用抽屉原理易证）

现在，对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$ 使得 $e^\delta<1+\varepsilon$. 考虑正实数 $a=\ln 2$, $b=\ln 3$，则容易验证 $\frac{a}{b}$ 为无理数，从而由引理可知存在非负整数 p,q,r,s 使得

$$-\delta<p\ln 2-q\ln 3<0<r\ln 2-s\ln 3<\delta$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1<\frac{3^p}{2^q}<e^\delta<1+\varepsilon\\ 1<\frac{2^r}{3^s}<e^\delta<1+\varepsilon\end{cases}$$

注意到显然有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$，从而存在 $N>0$使得对任意 $n>N$ 都有 $a_n>2^q\cdot 3^s$. 于是对任意 $n>N$，记 $a_n=2^u\cdot 3^v$，由 $a_n>2^q\cdot 3^s$ 可知 $u\geq q$ 与 $v\geq s$ 至少有一个成立。不妨 $u\geq q$，则 $2^{u-q}\cdot 3^{v+p}\in\{a_n\}$，并且由 $2^{u-q}\cdot 3^{v+p}=a_n\cdot\frac{3^p}{2^q}>a_n$ 可知 $2^{u-q}\cdot 3^{v+p}\geq a_{n+1}$，从而

$$1\leq\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{2^{u-q}\cdot 3^{v+p}}{2^u\cdot 3^v}=\frac{3^p}{2^q}<1+\varepsilon$$

同理也能证明当 $v\geq s$ 是也有 $1\leq\frac{a_{n+1}}{a_n}<1+\varepsilon$. 因此对任意 $n>N$ 都成立 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right|<\varepsilon$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$ □

习题 17. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$$

证明. 对于任意 $\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-x_{n-2})=0$ 的定义可知，存在 $N>0$ 使得当 $n\geq N$ 时成立 $|x_n-x_{n-2}|<\frac{\varepsilon}{2}$, 因此对任意整数 $m\geq 0$, 成立

$$|x_{N+m}-x_{N+m-1}|\leq|x_{N+m}-x_{N+m-2}|+|x_{N+m-1}-x_{N+m-2}|\leq|x_{N+m-1}-x_{N+m-2}|+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \quad \cdots \leq |x_N - x_{N-2}| + \frac{m\varepsilon}{2}$$

对于此 N, 取足够大的 $M > N$ 使得 $\frac{|x_N - x_{N-2}|}{M} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, 从而当 $n \geq M$ 时成立

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{n} \leq \frac{|x_N - x_{N-2}|}{n} + \frac{(n-N)\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$. □

注记

此题还有一种奇技淫巧，巧妙运用 Stolz 定理如下：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n(x_n - x_{n-1})}{n} \xlongequal{\text{Stolz}} \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{x_n - x_{n-2}}{n-(n-1)} = 0$$

习题 18. 将 $\tan x = x$ 的正根从小到大依次记为 $x_1, x_2, x_3, \ldots$. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^2 \sin(x_{n+1} - x_n)$$

解. 易知对任意正整数 k, $x = \tan x$ 在区间 $(k\pi, (k+\frac{1}{2})\pi)$ 当中有唯一的根，在 $((k-\frac{1}{2})\pi, k\pi)$ 当中没有根。从而 $x_k \in (k\pi, (k+\frac{1}{2})\pi)$. 先断言：$\lim\limits_{k\to+\infty} x_k - (k+\frac{1}{2})\pi = 0$. 这是因为，记 $x_k = (k+\frac{1}{2})\pi - t_n$, 则 $t_n \in (0, \frac{\pi}{2})$. 从而

$$k\pi < x_k = \tan x_k = \tan\left[(k+\frac{1}{2})\pi - t_n\right] = \frac{1}{\tan t_n}$$

从而 $0 < t_n < \arctan \frac{1}{k\pi} \to 0$, $(k \to +\infty)$. 这就说明了 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k - (k+\frac{1}{2})\pi = 0$. 由此容易得到 $\lim\limits_{k\to+\infty} (x_{k+1} - x_k) = \pi$.

现在，注意 $\tan x_n = x_n$, 从而可知 $\sin x_n = \frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}$, $\cos x_n = \frac{1}{\sqrt{1+x_n^2}}$, 从而有

$$\sin(x_{n+1} - x_n) = \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{1+x_{n+1}^2} \cdot \sqrt{1+x_n^2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^2 \sin(x_{n+1} - x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n^2 \cdot \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{1+x_{n+1}^2} \cdot \sqrt{1+x_n^2}} = \lim_{n\to+\infty} x_n^2 \cdot \frac{\pi}{x_{n+1}x_n} = \pi$$

□

1.2 单调收敛定理与压缩映射原理

习题 19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \sqrt{\frac{1}{2^2} + \sqrt{\cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2}}}}}$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在，并且

$$\lim_{n\to+\infty} a_n < 1.471$$

证明. 显然 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，为证其极限存在，只需再证它有上界。我们令

$$b_n := \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}}_{n\text{ 个根号}}$$

显然 $a_n \le b_n$，以及递推关系 $b_{n+1} = \sqrt{1+b_n}$. 断言对任意 $n \ge 1$，都有 $b_n < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，这是因为 $b_1 = 1 < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，并且由数学归纳法 $b_{n+1} = \sqrt{1+b_n} < \sqrt{1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 从而对任意 $n \ge 1$，$a_n \le b_n < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 从而 $\{a_n\}$ 是单调递增的有界数列，故极限存在。并且我们得到

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \le \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803\cdots < 1.619$$

为得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 更精确的估计，对于 $n \ge 3$，令

$$c_n := \underbrace{\sqrt{\frac{1}{3^2} + \sqrt{\frac{1}{4^2} + \sqrt{\cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2}}}}}}_{n-2\text{ 个根号}}$$

则有 $a_n = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{4} + c_n}}$. 注意到

$$c_n \le \underbrace{\sqrt{\frac{1}{3^2} + \sqrt{\frac{1}{3^2} + \sqrt{\cdots + \sqrt{\frac{1}{3^2}}}}}}_{n-2\text{ 个根号}} =: d_n$$

而类似地，我们知道 $\{d_n\}$ 单调递增且极限存在，并且其极限 $d>0$ 满足 $d^2=\frac{1}{3^2}+d$，从而 $d=\frac{3+\sqrt{13}}{6}$. 因此有 $c_n\le d=\frac{3+\sqrt{13}}{6}$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty}a_n\le\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{4}+d}}=\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3+\sqrt{13}}{6}}}=1.47047\cdots<1.471$$

□

习题 20. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\frac{1}{2}$，并且 $x_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_n^2$, $(\forall n\ge 1)$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{2}-1$.

证明. 对于 $n\ge 1$，记 $y_n:=x_n-\sqrt{2}+1$，则递推关系 $x_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_n^2$ 化为

$$y_{n+1}=-\frac{1}{2}y_n^2-(\sqrt{2}-1)y_n \tag{$*$}$$

首先归纳证明 $|y_n|<1$. 这是因为 $y_1=\frac{1}{2}-\sqrt{2}+1$ 显然满足 $|y_1|<1$，再利用归纳假设，有

$$|y_{n+1}|=|-\frac{1}{2}y_n^2-(\sqrt{2}-1)y_n|\le\frac{1}{2}|y_n|^2+(\sqrt{2}-1)|y_n|\le\frac{1}{2}+\sqrt{2}-1<1$$

这就证明了对任意 $n\ge 1$ 都有 $|y_n|<1$；进而得到

$$|y_{n+1}|=|-\frac{1}{2}y_n^2-(\sqrt{2}-1)y_n|\le(\sqrt{2}-1+\frac{1}{2})|y_n|=(\sqrt{2}-\frac{1}{2})|y_n|$$

反复迭代上式，有 $|y_n|\le\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^{n-1}|y_1|$. 注意 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}<1$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{2}-1$. □

习题 21. 设 $a>0$，$x_1>0$，数列 $\{x_n\}$ 满足递推关系

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)\quad\forall n\ge 1$$

试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值。

解. 首先注意 $x_1>0$ 以及 $a>0$，用数学归纳法已知 $x_n>0$ 对任意 $n\ge 1$ 成立，因此数列 $\{x_n\}$ 有下界。对任意 $n\ge 2$，使用平均值不等式可知

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{1}{4}\left(3x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}^3}\right)=\frac{1}{4}\left(x_{n-1}+x_{n-1}+x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}^3}\right)\\&\ge\sqrt[4]{x_{n-1}\cdot x_{n-1}\cdot x_{n-1}\cdot\frac{a}{x_{n-1}^3}}=\sqrt[4]{a}\end{aligned}$$

因此对任意 $n \geq 2$，$x_n \geq \sqrt[4]{a}$，进而

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{x_n^3} - x_n\right) < 0$$

这表明数列 $\{x_n\}$ 在 $n \geq 2$ 是单调递减的。又因为此数列有下界，从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。设其极限值为 x，则对 $x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{a}{x_n^3}\right)$ 两边取 $n \to \infty$，得

$$x = \frac{1}{4}\left(3x + \frac{a}{x^3}\right)$$

由因为每个 $x_n > 0$，故极限值 $x \geq 0$，因此从上式解得 $x = \sqrt[4]{a}$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[4]{a}$. □

习题 22. 已知 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为正整数列，并且满足 $a_{n+1} + \sqrt{5}b_{n+1} = \left(a_n + \sqrt{5}b_n\right)^2$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 存在，并求其值。

证明. 注意到 a_n, b_n 都是正整数，从而比较 1 与 $\sqrt{5}$ 的系数易知 $\begin{cases} a_n = a_{n-1}^2 + 5b_{n-1}^2 \\ b_n = 2a_{n-1}b_{n-1} \end{cases}$，从而得到

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{5}{2}\cdot\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$$

记 $\lambda_n := \frac{a_n}{b_n}$，则由均值不等式可知当 $n \geq 2$ 时 $\lambda_n = \frac{1}{2}\lambda_{n-1} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\lambda_{n-1}} \geq \sqrt{5}$，从而

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{5 - \lambda_{n-1}^2}{2\lambda_{n-1}} \leq 0$$

又显然 $\lambda_n \geq 0$，从而由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n$ 存在。之后易求该极限为 $\sqrt{5}$. □

习题 23. 对于 $a > 0$，已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \sqrt{a}$，$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.
证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，并求其值。

证明. 令 $\eta := \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ 为方程 $x = \sqrt{a+x}$ 的唯一的根。断言对任意 $n \geq 1$，有 $x_n < x_{n+1} < \eta$. 容易验证 $n = 1$ 的情形成立。

对于 $n \geq 1$，如果 $x_n < \eta$，则 $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \leq \sqrt{a + \eta} = \eta$，这就归纳证明了 $x_n < \eta$ 对任意 $n \geq 1$ 成立。此外，容易验证函数 $f(x) := \sqrt{a+x} - x$ 在 $(0, \eta)$ 上取值为正，在 $(\eta, +\infty)$ 取值为负；而我们已经证明了 $x_n < \eta\ (\forall n \geq 1)$，从而有

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{a + x_n} - x_n > 0$$

因此 $x_n < x_{n+1} < \eta$ 对任意 $n \geq 1$ 成立，从而数列 $\{x_n\}$ 单调有界，故极限存在。对 $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ 两边取极限易知 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \eta := \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. □

习题 24. 已知数列 $b_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$, $(\forall n \geq 1)$. 证明：

（1）$b_n = \frac{n+1}{2n} b_{n-1} + 1$; （2）$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 2$.

证明. 只需注意到

$$
\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k!(n-1-k)!(n-k)}{(n-1)!} + 1 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{\binom{n-1}{k}} + 1 = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \left[(n-k) + n - (n-1-k)\right] + 1 \\
&= \frac{n+1}{2n} b_{n-1} + 1
\end{aligned}
$$

从而（1）得证。将此递推关系整理得

$$
b_n - 2 = \frac{n+1}{2n}(b_{n-1} - 2) + \frac{1}{n} \tag{$*$}
$$

记 $c_n := |b_n - 2|$, 则当 $n \geq 2$ 时有 $c_n \leq \frac{1}{2} c_{n-1} + 1$, 从而易知数列 $\{c_n\}$ 有界, 从而有上界.

对 $(*)$ 两边取上极限, 有

$$
\overline{\lim_{n\to+\infty}} |b_n - 2| = \frac{1}{2} \overline{\lim_{n\to+\infty}} |b_n - 2|
$$

从而解得 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |b_n - 2| = 0$, 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 2$. □

习题 25. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$，并且 $a_1 > 0$. 证明：极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(a_n - n)$ 存在。

证明. 由 $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$ 可知，

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - (n+1) &= a_n - n + \frac{n - a_n}{a_n} = \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)(a_n - n) \\
a_n - n &= (a_2 - 2)\prod_{k=2}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{a_k}\right)
\end{aligned}
$$

对于 $n \geq 2$，由平均值不等式与数学归纳法，$a_n = a_{n-1} + \frac{n-1}{a_{n-1}} \geq 2\sqrt{n-1} \geq 2$，从而 $0 < 1 - \frac{1}{a_n} < 1$，从而数列 $\left\{\prod\limits_{k=2}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{a_k}\right)\right\}$ 单调递减且有下界 0，故极限存在。记

$$
b := \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{a_k}\right)
$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-n)=(a_2-2)b$，于是

$$\frac{1/n}{1/a_n}=\frac{a_n}{n}=\frac{a_n-n}{n}+1\to 1\quad(n\to+\infty)$$

又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散，从而无穷乘积 $\prod\limits_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{a_k}\right)$ 发散于 0，即 $b=0$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-n)=0$.

因此存在 $N>0$，使得对任意 $n\geq N$，成立 $a_n<n+\frac{1}{2}$. 再注意到

$$\begin{aligned}(n+1)\left[a_{n+1}-(n+1)\right] &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{a_n}\right)n(a_n-n)\\ n(a_n-n) &= N(a_N-N)\prod_{k=N}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{a_k}\right)\quad(n\geq N)\end{aligned}$$

注意到 $n>N$ 是成立 $a_n<n+\frac{1}{2}$，从而

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{a_n}\right)<\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)=1-\frac{1}{n(2n+1)}<1$$

于是数列 $\{n(a_n-n)\}$ 在 n 充分大（$>N$）时是单调递减的，并且有下界 0，从而极限存在。 □

习题 26. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1\in(0,1)$, 并且

$$a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{n^2},$$

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在.

证明. 记 $a_1=a$. 首先用数学归纳法证明 $a_n\geq na^{\frac{n+1}{2}}$. $n=1$ 时显然成立; 假设 $n=k$ 时有 $a_k\geq ka^{\frac{k+1}{2}}$, 则利用算术-几何平均值不等式可知

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= a_k+\frac{a_k^2}{k^2}\geq ka^{\frac{k+1}{2}}+a^{k+1}\\ &= \underbrace{a^{\frac{k+1}{2}}+a^{\frac{k+1}{2}}+\cdots+a^{\frac{k+1}{2}}}_{k\text{个}}+a^{k+1}\\ &\geq (k+1)\left(a^{\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)}\right)^{\frac{1}{k+1}}=(k+1)a^{\frac{k+2}{2}}.\end{aligned}$$

归纳完毕. 接下来再由 Bernoulli 不等式可得

$$a_n\geq n[1+(a-1)]^{\frac{n+1}{2}}\geq n\left[1+\frac{n+1}{2}(a-1)\right]=\frac{n(n+1)}{2}(a+1)-n^2,$$

从而 $n^2 + a_n \geq \frac{n(n+1)}{2}(a+1)$. 因此

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n + \frac{a_n^2}{n^2}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{n^2 + a_n} \geq \frac{1}{a_n} - \frac{2}{n(n+1)} \frac{1}{a+1},$$

因此, 递归地, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}} &\geq \frac{1}{a_1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a} - \frac{2}{a+1} + \frac{2}{(n+1)(a+1)} \\ &\geq \frac{1}{a} - \frac{2}{a+1} = \frac{1-a}{a(a+1)} > 0, \end{aligned}$$

因此 $a_{n+1} \leq \frac{a(a+1)}{1-a}$, 这表明数列 $\{a_n\}$ 有上界. 又因为该数列显然单调递增, 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在. □

1.3 Stolz 定理

习题 27. 设 $d > 0$，求极限

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^d + 2^d + \cdots + n^d - \frac{n^{d+1}}{d+1}}{n^d}$$

解. 直接使用 Stolz 定理，有

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{1^d + 2^d + \cdots + n^d - \frac{n^{d+1}}{d+1}}{n^d} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^d - \frac{(n+1)^{d+1} - n^{d+1}}{d+1}}{(n+1)^d - n^d} \\ =& \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^d - n \cdot \frac{(1+\frac{1}{n})^{d+1}-1}{d+1}}{(1+\frac{1}{n})^d - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{d}{n} - \frac{n}{d+1}\left[\frac{d+1}{n} + \binom{d+1}{2}\frac{1}{n^2}\right] + o(\frac{1}{n})}{\frac{d}{n}} \\ =& \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{d}{n} - \frac{n}{d+1} \cdot \frac{d(d+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{d}{n}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

注记

此题还可以化为定积分来做，见习题144.

习题 28. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(a_n - a) = b$. 则对于正整数 k, 成立

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n}{n^{k+1}} - \frac{a}{k+1}\right) = \frac{b}{k} + \frac{a}{2}$$

证明. 记 $a_n := a + b_n$, 则有 $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = b$. 于是有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_1+2^k a_2+\cdots+n^k a_n}{n^{k+1}}-\frac{a}{k+1}\right)\\
=\ & a\lim_{n\to+\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k-\frac{n^{k+1}}{k+1}}{n^k}+\lim_{n\to+\infty}\frac{b_1+2^k b_2+\cdots+n^k b_n}{n^k}\\
\xlongequal{\text{习题27}}\ & \frac{a}{2}+\lim_{n\to+\infty}\frac{b_1+2^k b_2+\cdots+n^k b_n}{n^k}\xlongequal{\text{Stolz}}\frac{a}{2}+\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^k b_{n+1}}{(n+1)^k-n^k}=\frac{a}{2}+\frac{b}{k}
\end{aligned}
$$

□

习题 29. 记 $H_n := \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，则众所周知，极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_n-\ln n)$ 存在，并且其极限值为 *Euler* 常数 $\gamma\approx 0.577$. 证明：存在常数 α,β，使得当 $n\to+\infty$ 时成立

$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

并求出 α,β 的值。

解. 注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_n-\ln n-\gamma)=0$，从而使用 Stolz 定理，有

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n(H_n-\ln n-\gamma) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{H_n-\ln n-\gamma}{1-\frac{1}{n}}\xlongequal{\text{Stolz}}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n+1}+o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

接下来我们继续考虑：

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n^2(H_n-\ln n-\gamma-\frac{1}{2n}) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{H_n-\ln n-\gamma-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^2}}\xlongequal{\text{Stolz}}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}}\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-2\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}}
\end{aligned}
$$

接下来的计算过程中（灵活使用等价无穷小、泰勒展开可简化计算），注意当 $n\to+\infty$ 时，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2} &= \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\sim\frac{2}{n^3}\\
\frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\\
\ln(1+\frac{1}{n}) &= \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})
\end{aligned}
$$

因此有

$$\text{原式} = -\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}-2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{2}{n^3}} = -\frac{1}{12}$$

因此可知，$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$，特别地，$\alpha = \frac{1}{2}$，$\beta = -\frac{1}{12}$. □

习题 30. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[n\sin(2n!e\pi) - 2\pi\right]$$

解. 众所周知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{n!n}\right)=0$, 从而考虑

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n^3 n!\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{n!n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{e-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{n!n}}{\frac{1}{n^3 n!}} \\
\overset{\text{Stolz}}{=\!=} \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!(n+1)}-\frac{1}{n!n}}{\frac{1}{n^3 n!}-\frac{1}{(n+1)^3(n+1)!}} &= \lim_{n\to+\infty} n^3 n!\left[\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n!n}\right] \\
= \lim_{n\to+\infty} n^3\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}-\frac{1}{n}\right) &= -1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad e = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right), \quad (n\to+\infty)$$

再考虑函数 $x \mapsto \sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开，有

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to+\infty} n^2\left[n\sin(2n!e\pi)-2\pi\right] \\
= & \lim_{n\to+\infty} n^2\left[n\sin\left(\underbrace{2\pi n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}_{2\pi\text{ 的整数倍}}+\frac{2\pi}{n}-\frac{2\pi}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)-2\pi\right] \\
= & \lim_{n\to+\infty} n^2\left[n\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\frac{2\pi}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)-2\pi\right] \\
= & \lim_{n\to+\infty} n^2\left[n\left(\frac{2\pi}{n}-\frac{2\pi}{n^3}-\frac{8\pi^3}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)-2\pi\right] \\
= & -2\pi-\frac{4}{3}\pi^3
\end{aligned}$$

□

1.4 上极限与下极限

习题 31. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足：对任意 $m,n \geq 1$ 都成立 $0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n$. 证明：极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在。

证明. 任意取定正整数 m，则对于任意正整数 n，考虑带余除法

$$n = km + r$$

其中 k,r 为整数，并且余数 $0 \leq r < n$. 从而有题设易知 $x_n = x_{km+r} \leq kx_m + x_r$，从而有

$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{k}{n}x_m + \frac{1}{n}x_r = \frac{k}{km+r}x_m + \frac{1}{n}x_r \leq \frac{1}{m}x_m + \frac{1}{n}x_r$$

令 $n \to +\infty$，两边取上极限（注意 m 事先给定，与 n 无关）立刻得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{x_n}{n} \leq \frac{1}{m}x_m + \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n}x_r = \frac{x_m}{m}$$

再将上式两边取 $m \to +\infty$ 的下极限，即得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{x_n}{n} \leq \underline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{x_m}{m}$$

所以极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在。 □

习题 32. 已知数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + 2x_{n+1}) = A$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{A}{3}$.

证明. 首先证明 $\{a_n\}$ 是有界数列。这是因为，由 $\{a_n + 2a_{n+1}\}$ 收敛于 A 的定义可知，存在 $N > 0$ 使得当 $n \geq N+1$ 时 $\varepsilon_n := a_n + 2a_{n+1} - A$ 满足 $|\varepsilon_n| < 1$. 因此由 $a_n + 2a_{n+1} = A + \varepsilon_n$ 可知当 $n \geq N+1$ 时

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{2}|A + \varepsilon_n - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n| + (\frac{|}{A}| + |\varepsilon_n|) \leq \frac{1}{2}|a_n| + B$$

其中 $B := \frac{|A|+1}{2}$ 为正实数。所以有 $|a_{n+1}| - 2B \leq \frac{1}{2}(|a_n| - 2B)$. 由此容易得到，$\left\{|a_n| - 2B \middle| n \geq N+1\right\}$ 是有上界的，从而 $\{a_n\}$ 为有界数列。

所以 $\{a_n\}$ 的上、下极限不为无穷。注意到 $a_n = (a_n + 2a_{n+1}) - 2a_{n+1}$, 两边同时取上、下极限，得到

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n &= A - 2 \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \\ \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n &= A - 2 \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \end{aligned}$$

从而解得 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = \frac{A}{3}$. 因此数列 $\{a_n\}$ 极限存在，且收敛于 $\frac{A}{3}$. □

习题 33. 给定数列 $\{x_n\}$, 记 $S_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ 为该数列前 n 项的算术平均数。证明:

$$\varliminf_{n\to+\infty} x_n \le \varliminf_{n\to+\infty} S_n \le \varlimsup_{n\to+\infty} S_n \le \varlimsup_{n\to+\infty} x_n$$

证明. 不妨只证明 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n \le \varliminf\limits_{n\to+\infty} S_n$. 记 $x := \varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n$.

如果 $x = -\infty$, 则上式自动成立；如果 $x = +\infty$, 则 $\{x_n\}$ 为正无穷大量，此时对任意 $M > 0$, 取 $N > 0$ 使得当 $n \ge N+1$ 时成立 $x_n \ge 2M+1$. 取定此 N, 记 $K := x_1 + x_2 + \cdots + x_N$. 则当 n 足够大时 $\frac{|K|}{n} < \frac{1}{2}$, 并且 $\frac{n-N}{n} > \frac{1}{2}$, 从而

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\left(K + \sum_{k=N+1}^{n} x_k\right) \ge \frac{n-N}{n}(2M+1) - \frac{|K|}{n} \\ &\ge \frac{2M+1}{2} - \frac{1}{2} = M \end{aligned}$$

从而 $\{S_n\}$ 也为正无穷大量，$\varliminf\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

如果 $x := \varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n \ne \pm\infty$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 由下极限的性质可知存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时成立 $x_n > x - \varepsilon$. 取定此 N, 记 $K := \sum\limits_{k=1}^{N} x_k$. 则当 $n \ge N$ 时成立

$$S_n = \frac{1}{n}\left(K + \sum_{k=N+1}^{n} x_k\right) \ge \frac{K}{n} + \frac{n-N}{n}(x-\varepsilon)$$

对上式两边取 $n \to +\infty$ 的下极限，立刻得到

$$\varliminf_{n\to+\infty} S_n \ge x - \varepsilon$$

注意到上式对任意 $\varepsilon > 0$ 都成立，再令 $\varepsilon \to 0$ 即可。 □

习题 34. 已知数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $x_{n+1} = y_n + \theta x_n\ (\forall n \ge 1)$，其中 $0 < \theta < 1$ 为常数。证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 存在。

证明. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，注意到 $y_n = x_{n+1} - \theta x_n$，两边取极限立刻知道 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 存在。

我们只需考察另一方面，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 存在，记其极限值为 y，则对 $x_{n+1} = y_n + \theta x_n\ (\forall n \ge 1)$ 两边取上、下极限，有

$$\varlimsup_{n\to+\infty} x_n = \varlimsup_{n\to+\infty} (y_n + \theta x_n) \le \varlimsup_{n\to+\infty} y_n + \theta \varlimsup_{n\to+\infty} x_n = y + \theta \varlimsup_{n\to+\infty} x_n$$

$$\varliminf_{n\to+\infty} x_n = \varliminf_{n\to+\infty}(y_n+\theta x_n) \geq \lim_{n\to+\infty} y_n + \theta \varliminf_{n\to+\infty} x_n = y + \theta \varliminf_{n\to+\infty} x_n$$

再注意到 $\{y_n\}$ 收敛，从而为有界数列，记 M 为 $\{y_n\}$ 的一个上界，从而 $|x_{n+1}| \leq |y_n| + \theta|x_n| \leq M + \theta|x_n|$. 由数学归纳法易知 $|x_n| \leq \frac{M}{1-\theta}$，因此 $\{x_n\}$ 为有界数列，从而 $\varlimsup_{n\to+\infty} x_n$ 与 $\varliminf_{n\to+\infty} x_n$ 为有限值，从而有

$$\frac{1}{1-\theta}y \leq \varliminf_{n\to+\infty} x_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} x_n \leq \frac{1}{1-\theta}y$$

因此极限 $\lim_{n\to+\infty} x_n$ 存在，且极限值为 $\frac{y}{1-\theta}$. □

习题 35. 已知正数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1} \leq a_n + b_n$, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$.

证明：极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n$ 存在。

证明. 记正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = M \geq 0$. 由于 $a_n \geq 0$, 从而下极限 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n \neq -\infty$. 又因为

$$a_n \leq a_{n-1} + b_{n-1} \leq a_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-1} \leq \cdots \leq a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \leq a_1 + M$$

所以上极限 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n < +\infty$.

记数列 $\{a_n\}$ 的上、下极限分别为 $\alpha^*, \alpha_* \in \mathbb{R}$. 如果极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 不存在，则 $\alpha_* < \alpha^*$. 记 $\varepsilon := \alpha^* - \alpha_* > 0$. 由正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$ 的柯西收敛准则，存在 $N' > 0$ 使得对任意 $m > N'$ 都成立

$$b_{N'} + b_{N'+1} + \cdots + b_m < \frac{\varepsilon}{4}$$

对于此 N', 由下极限 α_* 的定义可知存在 $N > N'$ 使得 $a_N < \alpha_* + \frac{\varepsilon}{4}$. 于是对任意 $n > N'$, 成立

$$a_n \leq a_{n-1} + b_{n-1} \leq \cdots \leq a_N + \sum_{k=N}^{n-1} < \alpha_* + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \alpha^* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

这就与上极限 α^* 的性质矛盾。此矛盾表明 $\alpha_* = \alpha^*$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在。 □

习题 36. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{1+n^k}} = 1$$

证明. 首先注意到 $\frac{1}{\sqrt[k]{1+n^k}} \leq \frac{1}{n}$，从而

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+n^k}} \leq \varlimsup_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1$$

另一方面，对任意 $\varepsilon>0$，则对任意 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，以及任意 $k\geq 1$，都有

$$[(1+\varepsilon)^k-1]n^k \geq k\varepsilon\cdot n^k \geq n\varepsilon > 1$$

从而对任意 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 以及任意 $k\geq 1$，$\frac{1}{\sqrt[k]{1+n^k}} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\cdot\frac{1}{n}$，所以

$$\varliminf_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+n^k}} \geq \varliminf_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{1+\varepsilon}$$

因此对任意 $\varepsilon>0$，都成立

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \leq \varliminf_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+n^k}} \leq \varlimsup_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+n^k}} \leq 1$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 即得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+n^k}}=1$$

□

注记

上述做法其实做麻烦了。只需注意到不等式

$$n^k \leq n^k+1 \leq (n+1)^k$$

从而 $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt[k]{1+n^k}} \leq \frac{1}{n}$, 再夹逼即可。

习题 37. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^n}$$

解. 记 $a_n := \frac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^n} = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n$. 首先注意到对任意 $0\leq k\leq n$, 有不等式 $\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \leq e^{-k}$, 从而有

$$\varlimsup_{n\to+\infty}a_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}e^{-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-k}=\frac{e}{e-1}$$

另一方面，任意取定正整数 m, 则对任意 $n\geq m$, 成立

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{m}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n$$

令 $n \to +\infty$, 取下极限得到

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \varliminf_{n\to+\infty} \left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{m} e^{-k}$$

注意上式对任意 $m \geq 0$ 都成立，从而令 $m \to +\infty$ 有 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} \geq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1}$. 综上，得到

$$\frac{e}{e-1} \leq \varliminf_{n\to+\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \leq \frac{e}{e-1}$$

所以有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1^n+2^n+\cdots n^n}{n^n} = \frac{e}{e-1}$. $\square$

第二章　连续函数

2.1　函数的基本概念

习题 38. 已知函数
$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$$
求 $f(x)$ 的自然定义域以及值域.

解法一. 由二次函数知识，$x^2\pm x+1$ 恒大于 0，从而 f 的自然定义域为全体实数。接下来我们证明 f 的值域为 $(-1,1)$. 一方面，注意到

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= \left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)^2\\
&= 2x^2+2-2\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\\
&= 2\left(\sqrt{(x^2+1)^2}-\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}\right)\\
&= 2\frac{x^2}{x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}}\\
&< 2\frac{x^2}{x^2+x^2}=1
\end{aligned}$$

因此有 $|f(x)|<1$ 恒成立，也就是说 $-1\le f(x)\le 1$. 另一方面，由于

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}=\frac{-2x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}$$

可知，

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$

再由 f 的连续性，可知 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$. □

解法二. 我们还可以用别的方法求 $f(x)$ 的值域。首先用第一种解法得 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\mp1$，之后再断言 f 为单调递减函数，再由 f 的连续性也可证明 f 的值域恰为 $(-1,1)$. 接下来我们证明 f 单调递减。注意到

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x)<0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}<\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-x+1} \tag{$*$}$$

当 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 时，$(*)$ 式左边为负，右边为正，从而该不等式成立；而 $|x|\geq\frac{1}{2}$ 时，不妨 $x\geq\frac{1}{2}$ $(x<-\frac{1}{2}$ 的情形类似)，此时只需证明

$$\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}\right)^2<\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-x+1}\right)^2$$

把平方打开，整理得

$$x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}<x^4+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$$

而当 $x\geq\frac{1}{2}$ 时此式明显成立。证毕。 □

习题 39. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，回答以下问题：

（1）若每个实数都是 $f\circ f$ 的不动点（也就是说，$f(f(x))=x$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 都成立），则满足此条件的 f 有多少个？

（2）在（1）的条件下，若 $f(x)$ 还是单调递增的，求 $f(x)$.

（3）如果 $f\circ f$ 只有两个不动点 $a,b(a\neq b)$，那么只可能 $\begin{cases} f(a)=a \\ f(b)=b \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} f(a)=b \\ f(b)=a \end{cases}$.

解. **(1)** 有无穷多个。比如对任意 $a<b$，考虑函数 $f_{ab}(x)=\begin{cases} b & (x=a) \\ a & (x=b) \\ x & (x\neq a,b) \end{cases}$，则如此的 $f_{ab}(x)$ 均满足题设，这样的函数有无穷多个。

(2) 此时必有 $f(x)=x$. 这是因为，如果存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $f(a)\neq a$，我们分 $f(a)>a$ 与 $f(a)<a$ 两种情况考虑。若 $f(a)>a$，则由 f 单调递增知 $f(f(a))\geq f(a)$，再注意任何实数都是 $f\circ f$ 的不动点，特别地 $f(f(a))=a$，因此

$$a=f(f(a))\geq f(a)$$

这与 $f(a)>a$ 矛盾。而 $f(a)<a$ 的情形也类似得到矛盾。因此必有 $f(x)=x$.

(3) 不妨 $a<b$. 按逻辑讲，有且仅有以下三种情况：$f(a)=a$，$f(a)=b$，以及 $f(a)\neq a,b$.

如果 $f(a)=a$，那么我们记 $c:=f(b)$，注意 $f(f(c))=f(f(f(b)))=f(f\circ f(b))=f(b)=c$，也就是说 c 是 f 的不动点，因此由题设可知 $c=a$ 或 $c=b$. 但此时 $c=a$ 不成立，因为如果 $c=a$，则 $b=f(f(b))=f(c)=f(a)=a$，与 $a\neq b$ 矛盾，所以必有 $c=b$，因此 $\begin{cases} f(a)=a \\ f(b)=b \end{cases}$.

如果 $f(a)=b$，那么 $a=f(f(a))=f(b)$，所以 $\begin{cases} f(a)=b \\ f(b)=a \end{cases}$.

如果 $f(a)\neq a,b$，记 $d:=f(a)$，则由（1）中的讨论，知 d 也为 $f\circ f$ 的不动点，因此由题设 $d=a$ 或 $d=b$，这与 $d=f(a)\neq a,b$ 矛盾。因此这种情况不存在。综上得证。

□

2.2 一元函数的极限与连续性

习题 40. 用函数极限的定义直接证明：

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x}{2x-1}=3$$

证明. 首先注意到，如果 $|x-1|<\frac{1}{3}$，那么 $x>\frac{2}{3}$，因此 $2x-1>\frac{1}{3}$. 现在，对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta:=\min\{\frac{1}{3},\frac{\varepsilon}{9}\}$，则对于任意的 x，若 $|x-1|<\delta$，则有

$$\left|\frac{3x}{2x-1}-3\right|=\frac{3|x-1|}{2x-1}<\frac{3\delta}{1/3}=9\delta\le 9\cdot\frac{\varepsilon}{9}=\varepsilon$$

从而证毕。 □

注记

如果在考场上，出于对出题人、阅卷人的嘲讽，曲豆豆更倾向于下述证法:

特别傻逼的另证. 首先注意到，如果 $|x-1|<\frac{1}{2}-\frac{1}{4666}$，那么 $x>\frac{1}{2}+\frac{1}{4666}$，因此 $2x-1>\frac{1}{2333}$. 现在，对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta:=\min\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4666},\frac{\varepsilon}{6999}\}$，则对于任意的 x，若 $|x-1|<\delta$，则有

$$\left|\frac{3x}{2x-1}-3\right|=\frac{3|x-1|}{2x-1}<\frac{3\delta}{1/2333}=6999\delta\le 6999\cdot\frac{\varepsilon}{6999}=\varepsilon$$

从而证毕。

□

习题 41. 用函数极限的定义直接证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{2}=+\infty$$

证明. 对任意 $M>0$，令 $N:=4M^2$，则对任意 $x>N$，都有

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{2}\ge\frac{\sqrt{x}}{2}\ge\frac{\sqrt{4M^2}}{2}=M$$

从而由函数极限的定义知 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{2}=+\infty$. □

习题 42. 已知函数 $f(x), g(x)$ 均为定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，并且满足

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$$

证明：恒有 $f(x)\equiv g(x)$.

证明. 设 T_1 与 T_2 分别为 f, g 的一个正周期，则对任意给定的 $x\in\mathbb{R}$，则有

$$\begin{aligned}
f(x)-g(x) &= \lim_{n\to+\infty}(f(x+nT_1)-g(x+nT_2)) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\Big[\underbrace{(f(x+nT_1)-g(x+nT_1))}_{\to 0}+(g(x+nT_1)-f(x+nT_2)) \\
&\qquad +\underbrace{(f(x+nT_2)-g(x+nT_2))}_{\to 0}\Big] \\
&= \lim_{n\to+\infty}(g(x+nT_1)-f(x+nT_2)) \\
&= \lim_{n\to+\infty}(g(x+n(T_1+T_2))-f(x+n(T_1+T_2)))=0
\end{aligned}$$

□

习题 43. （黎曼函数）考虑闭区间 $[0,1]$ 上的函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & 若x=\frac{p}{q}，其中\ p\ 与\ q\ 为互素的整数，且q\geq 0 \\ 0 & 若\ x\ 为无理数\end{cases}$$

则 $R(x)$ 在哪些点连续，在哪些点不连续？

证明. $R(x)$ 在 $x_0\in[0,1]$ 处连续，当且仅当 x_0 是无理数。这可用连续性的定义直接验证。

（1）若 $x_0\in[0,1]$ 为无理数，断言 $R(x)$ 在 x_0 处连续，也就是说 $\lim_{x\to x_0}R(x)=R(x_0)=0$.对任意 $\varepsilon>0$，注意到集合 $X_\varepsilon:=\left\{\frac{p}{q}\middle|q\geq 1, \frac{1}{q}>\varepsilon, 0\leq p\leq q\right\}$ 是有限集，且该集合包括所有的分母小于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的有理数。注意 x_0 为无理数，从而 $x_0\notin X_\varepsilon$. 于是

$$\delta:=\min\left\{|x_0-r|\middle|r\in X_\varepsilon\right\}>0$$

取定这个 δ，则对于任意的 $x\in[0,1]$，如果 $|x-x_0|<\delta$，若 x 为无理数，$R(x)=0$，从而 $|R(x)-R(x_0)|<\varepsilon$ 自动成立；而 x 为有理数时，由 δ 的定义，不难知道此时 $R(x)<\varepsilon$，因此总之有 $|R(x)-R(x_0)|=|R(x)|<\varepsilon$，从而 $R(x)$ 在无理点 x_0 处连续。

(2) 若 $x_0\in[0,1]$ 为有理数，显然 $R(x)$ 在 x_0 不连续。因为此时 $R(x_0)>0$，但另一方面取一列趋近于 x_0 的无理数序列 $\{x_n\}$，注意 $R(x_n)=0$ 对任意 $n\geq 0$ 成立，从而 $\lim_{n\to+\infty}R(x_n)=0\neq R(x_0)$，因此 $R(x)$ 在 x_0 不连续。 □

习题 44. 已知函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$, 并且 $f(x)$ 是局部有界的（这指的是, f 在任何有界区间 $(a,b)\subseteq(0,+\infty)$ 上都有界）. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. 如果去掉局部有界的条件，要证明的结论还成立吗？

证明. 对任意 $\varepsilon>0$, 由极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$ 的定义可知, 存在 $N_0>0$ 使得对任意 $x>N_0$ 都成立 $|f(x+1)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 对于此 N_0, 由于 $f(x)$ 是局部有界的, 从而取 $|f(x)|$ 在区间 $[N_0,N_0+1]$ 的一个上界 $A>0$. 取 $N:=\max\{N_0,\frac{2A}{\varepsilon}\}+1$, 则对于任意 $x>N$, 由于 $x>N\geq N_0+1$, 从而必存在 $\alpha\in[0,1)$ 以及正整数 M, 使得 $x=N_0+\alpha+M$. 从而有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \frac{1}{x}\cdot\left|f(N_0+\alpha)+\sum_{k=1}^{M}[f(N_0+k+\alpha)-f(N_0+k-1+\alpha)]\right|\\ &\leq \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{M}|f(N_0+k+\alpha)-f(N_0+k-1+\alpha)|+\frac{1}{x}|f(N_0+\alpha)|\\ &\leq \frac{M}{x}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{A}{x}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{A}{2A/\varepsilon}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

若去掉 $f(x)$ 的局部有界性条件, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ 不再成立. 此时任何周期为 1 的无界函数都可作为反例. □

习题 45. 记 $C[0,+\infty)$ 为定义在非负实轴上的连续函数之全体。对于 $f,g \in C[0,+\infty)$，如果

$$\exists x_0 > 0, \forall x > x_0, |f(x) - g(x)| < 1$$

则称 f “**猥亵**” g；而如果

$$\forall x_0 > 0, \exists x > x_0, |f(x) - g(x)| < 1$$

则称 f “**骚扰**” g. 判断以下命题的正误，并说明理由或举出反例：

（1）任意 $f,g \in C[0,+\infty)$，如果 f 猥亵 g，那么 g 猥亵 f;

（2）任意 $f,g \in C[0,+\infty)$，如果 f 骚扰 g，那么 g 骚扰 f;

（3）任意 $f,g \in C[0,+\infty)$，如果 f 猥亵 g，那么 f 骚扰 g;

（4）任意 $f,g \in C[0,+\infty)$，如果 f 骚扰 g，那么 f 猥亵 g;

（5）任意 $f,g,h \in C[0,+\infty)$，如果 f 猥亵 g 且 g 猥亵 h，那么 f 猥亵 h;

（6）任意 $f,g,h \in C[0,+\infty)$，如果 f 骚扰 g 且 g 骚扰 h，那么 f 骚扰 h.

（7）任意 $f,g \in C[0,+\infty)$，如果 f 猥亵 g，那么存在 $h \in C[0,+\infty)$，使得 f,g,h 之中任何两个都猥亵。

（8）任意 $f,g \in C[0,+\infty)$，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$ 存在且绝对值小于 1，则 f 猥亵 g.

（9）任意 $f,g \in C[0,+\infty)$，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = 1$，则 f 猥亵 g.

解.（1）（2）显然正确，因为 $|f(x)-g(x)| < 1 \iff |g(x)-f(x)| < 1$.

（3）正确，（4）错误。由“骚扰”与“猥亵”的定义，显然猥亵一定骚扰; 但反之未必，例如 $f(x) = 2\sin x$，$g(x) = 0$ 是“骚扰而不猥亵”的例子。

（5）（6）都错误，例如 $f(x) = 0.6$，$g(x) = 0$，$h(x) = -0.6$ 均为常函数，易验证 f 猥亵 (骚扰)g，g 猥亵 (骚扰)h, 但 f 并不猥亵（骚扰）h.

（7）正确，比如可以取 $h(x) = f(x)$.

（8）正确，记 $A = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$，则 $|A| < 1$，从而存在（足够小的）正数 ε，使得 $-1 < A-\varepsilon < A+\varepsilon < 1$，则由函数极限的定义，存在 $x_0 > 0$，使得对任意 $x > x_0$，

$$A - \varepsilon \le f(x) - g(x) \le A + \varepsilon$$

因此对于此 x_0，若 $x > x_0$，则 $|f(x)-g(x)| < 1$. 从而 f 猥亵 g.

（9）错误，例如 $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$，$g(x) = -\frac{1}{x+1}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = 1$，但是由于 $|f(x)-g(x)|$ 恒大于 1，故 f 不可能猥亵 g. □

注记

纯逻辑题，关键是理解“猥亵”与“骚扰”的定义。建议思考一下，若 f 骚扰（猥亵）g，则 f 与 g 的函数图像之间有何位置关系，这可以加深直观认识。

习题 46. 概念、记号同上题。设 $\left\{f_k \middle| k \geq 1\right\}$ 为任意给定的一列 $C[0,+\infty)$ 中的函数，证明：存在 $g \in C[0,+\infty)$，使得 g 骚扰所有的 f_k（也就是说，任意 $k \geq 1$，g 骚扰 f_k）。

证明. 我们具体构造一个满足题设的 g. 对于任意正整数 p，以及正整数 k，如果 $k \leq p$，我们定义正实数

$$x_{pk} := p + \frac{k-1}{p}$$

则我们得到点列 $\left\{x_{p,k} \middle| p \geq 1, 1 \leq k \leq p\right\}$（将这些数从小到大依次排列）；之后定义函数 $g \in C[0,+\infty)$ 如下：g 的函数图像是以 $(0,0)$ 为起点，顺次连接端点 $(x_{pk}, f_k(x_{pk}))$ 所得到的无穷折线段，那么 g 显然连续，并且 g 骚扰每一个 f_n. □

注记

对于 $f_n(x) = n$ 为常函数的具体例子，请读者画出如此构造的 g 的函数图像作为练习。

2.3 一元连续函数的性质

习题 47. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $f(0) = f(1)$. 证明：对任意 $0 < \alpha < 1$，存在 $x \in (0,1]$，使得 $f(x) = f(\alpha x)$.

证明. 不妨 $f(0) = f(1) = 0$. 考虑 $[0,1]$ 上的连续函数

$$g(x) := f(x) - f(\alpha x)$$

只需要证明 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 上有零点。由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 连续，从而 $f(x)$ 能取到最大值或者最小值。不妨 f 的最值不在端点 $x = 0,1$ 取到（否则 f 是常函数）。

令 $\beta \in (0,1)$ 为 f 的一个最大值点，则 $g(\beta) = f(\beta) - f(\alpha\beta) \geq 0$. 如果再有 $g(1) \leq 0$，那么由 g 的介值性，$g(x)$ 在 $[\beta,1]$ 之中存在零点。

令 $\gamma \in (0,1)$ 为 f 的一个最小值点，则 $g(\gamma) = f(\gamma) - f(\alpha\gamma) \leq 0$. 如果再有 $g(1) \geq 0$，那么由 g 的介值性，$g(x)$ 在 $[\gamma,1]$ 之中存在零点。

综上所述，无论 $g(1) \leq 0$ 还是 $g(1) \geq 0$，$g(x)$ 在 $(0,1]$ 都存在零点。从而证毕。 □

习题 48. 设 $\varphi(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 并且存在正整数 n 使得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=0.$$

(1) 证明: 当 n 为奇数时, 方程 $x^n+\varphi(x)=0$ 存在实根;
(2) 证明: 当 n 为偶数时, 函数 $f(x):=x^n+\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在且能取到最小值.

证明. 由极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=0$ 的定义可知，存在 $N>0$, 使得当 $|x|\geq N$ 时成立 $|\varphi(x)|<\frac{1}{2}|x^n|$. 取定此 N. 记 $g(x)=x^n+\varphi(x)$.

1. 注意当 $x>0$ 时 $x^n>0$. 从而

$$g(N)=N^n+\varphi(N)\geq N^n-|\varphi(N)|\geq N^n-\frac{1}{2}N^n>0$$

另一方面，由于 n 为奇数，则当 $x<0$ 时 $x^n<0$, 从而

$$g(-N)=-N^n+\varphi(N)\leq -N^n+|\varphi(N)|\leq -N^n+\frac{1}{2}N^n<0$$

考虑闭区间 $[-N,N]$ 上的连续函数 $g(x)$, 注意已有 $g(-N)<0$ 以及 $g(N)>0$, 从而由连续函数介值定理 $g(x)$ 在 $(-N,N)$ 存在零点.

2. 当 n 为偶数时，x^n 恒非负。类似 (a) 的方法，可知对任意 $|x|\geq N$, 都成立 $g(x)\geq\frac{1}{2}x^n>0$. 记 $A:=g(0)$, 取足够大的正数 $M>N$, 使得 $\frac{1}{2}M^n>A$. 则当 $|x|>M$ 时, 必有

$$g(x)\geq\frac{1}{2}M^n>A=g(0)$$

因此如果 $g(x)$ 存在最小值，则最小值不可能在 $|x|>M$ 处取到. 而 $g(x)$ 在闭区间 $[-M,M]$ 连续, 从而由连续函数最值定理可知存在 $x_0\in[-M,M]$ 使得 $g(x_0)$ 为函数 $g(x)$ 在 $[-M,M]$ 的最小值. 由之前所述易知它事实上也是 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最小值.

□

习题 49. 设 f 为定义在 $[0,1]$ 上的函数，$f(0)=1$, $f(1)=0$，并且存在 $[0,1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得 $f(x)+g(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增。
（1）f 一定是连续函数吗？说明理由。
（2）证明：$f(x)$ 可以取到 $[0,1]$ 当中的任何值。

证明. **(1)** 满足题设的 f 不一定是连续函数。例如 $f(x)=\begin{cases}-2333x+1 & x\in[0,1)\\ 0 & x=1\end{cases}$，则 $f(0)=1$, $f(1)=0$. 考虑连续函数 $g(x)=23333x$，则 $f(x)+g(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增——但是 $f(x)$ 并不是连续函数，因为在 $x=1$ 处间断。

（2）由于 $f+g$ 单调递增，所以对任意 $x_0 \in (0,1)$，左、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}(f(x)+g(x))$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}(f(x)+g(x))$ 都存在，并且

$$\lim_{x\to x_0^-}(f(x)+g(x)) \le f(x_0)+g(x_0) \le \lim_{x\to x_0^+}(f(x)+g(x))$$

又因为 $g(x)$ 连续，从而由极限的运算性质可知

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x) \tag{$*$}$$

对任意的 $x_0 \in (0,1)$ 都成立。

现在我们要证明 $f(x)$ 的值域包含 $[0,1]$. 我们已经知道 $f(0)=1, f(1)=0$，即 $0,1$ 在 f 的值域中，故只需再证 $(0,1)$ 位于 f 的值域。反证法，假设存在 $y_0 \in (0,1)$，使得 y_0 不位于 f 的值域，则考虑集合

$$\mathcal{L} := \left\{x \in [0,1] \middle| \forall 0 \le t \le x,\ f(t) > y_0\right\}$$

则显然 $0 \in \mathcal{L}$，故 $\mathcal{L} \ne \varnothing$. 由确界存在原理，考虑 $\mathcal{L}$ 的上确界

$$x_0 := \sup \mathcal{L}$$

则 $0 \le x_0 \le 1$. 先断言 $x_0 \in \mathcal{L}$. 这是因为，如果 $x_0 \notin \mathcal{L}$，则由集合 $\mathcal{L}$ 的定义可知 $f(x_0) \le y_0$. 而又由集合 $\mathcal{L}$ 的定义，易知 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \ge y_0$，再注意 $(*)$ 式左边的不等号，从而有

$$y_0 \ge f(x_0) \ge \lim_{x\to x_0^-} f(x) \ge y_0$$

这迫使 $f(x_0)=y_0$，这与 y_0 不在 f 的值域的假设矛盾。因此 $x_0 \in \mathcal{L}$，特别地 $f(x_0) > y_0$.

再断言 $x_0 = 1$. 如果 $x_0 < 1$，则由上确界 x_0 的定义可知，存在一列 $\{x_n\}_{n\ge1}$，使得 $x_k \in (x_0, x_0+\frac{1}{k})$，$f(x_k) \le y_0$ 对任意 $k \ge 1$ 成立，因此 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \le y_0$. 再注意 $f(x_0) > y_0$，从而与 $(*)$ 式矛盾。

因此有 $1 = x_0 \in \mathcal{L}$，特别地 $f(1) > y_0 > 0$，与 $f(1)=0$ 矛盾。上述一系列矛盾表明，最初的假设“存在 $y_0 \in (0,1)$ 不位于 f 的值域”是错的，因此原命题得证。 □

习题 50. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数，$f(0) \ne f(1)$. 证明：存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 x_0 不是 f 的极值点。

证明. 不妨 $f(0) < f(1)$. 对于 $s \in (0,1)$，我们称 s 为函数 f 的“**阳光点**”，如果

$$\forall t \in [0,s), \quad f(t) < f(s)$$

一方面，对于任意 $y \in (f(0), f(1))$，由连续函数介值原理，集合

$$f^{-1}(y) := \left\{ x \in (0,1) \middle| f(x) = y \right\}$$

非空，因此由确界存在原理，考虑 $s_y := \inf f^{-1}(y) \in (0,1)$，则由有关定义容易验证 $f(s_y) = y$，并且 s_y 为阳光点。也就是说，对每个 $y \in (f(0), f(1))$，我们都能至少找到一个相应的阳光点 s_y，并且显然不同的 y 对应不同的阳光点 s_y. 特别地，f 有不可数个阳光点。

另一方面，假设 $(0,1)$ 当中所有的点都是 f 的极值点，则阳光点只能是极大值点。因此对于 f 的任何一个阳光点 s，存在 s 的右邻域 $I_s := (s, s+\delta_s)$，使得对任意 $x \in I_s$，$f(x) \le f(s)$。从而区间 I_s 中的所有点都**不是** f 的阳光点。因此，对于 f 的任何两个不同的阳光点 s_1 与 s_2，$I_{s_1} \cap I_{s_2} = \varnothing$. 也就是说集合族

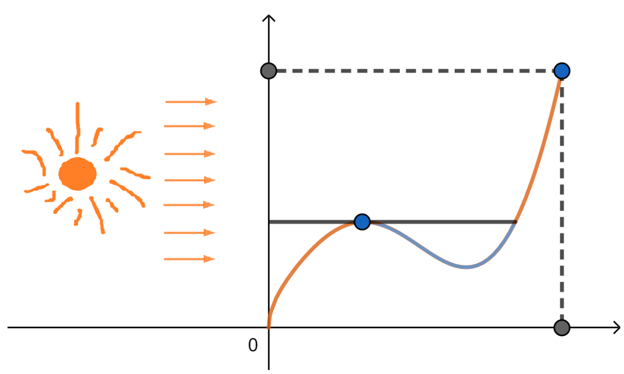
$$\mathcal{S} := \left\{ I_s \middle| s \in (0,1) \text{是 } f \text{ 的阳光点} \right\}$$

是一族两两不交的开区间，从而是至多可数集。特别地，f 的阳光点至多可数个。

综上两方面，得到矛盾。此矛盾表明假设“$(0,1)$ 当中所有的点都是 f 的极值点”不正确，从而原命题得证。 □

注记

这里引入了“阳光点”的概念。它之所以被形象地称作“阳光”，是因为如下：把函数 $f(x)$ 的图像想象成一座山，再设想初升的太阳从左往右水平地照射在山峰上，被阳光照射到的点就是“阳光点”。



习题50示意图：被阳光照射到的橙色部分即为函数 $f(x)$ 的“阳光点”。

2.4 无穷大量与无穷小量

习题 51. 计算极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{e^{2x}-1}{2}\right)^{\sin 2x} - 1}{1 - \cos x}$$

解. 等价无穷小量的运用：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\frac{e^{2x}-1}{2}\right)^{\sin 2x}-1}{1-\cos x} &= \lim_{x\to0}\frac{e^{\sin 2x\ln\left(1+\frac{e^{2x}-1}{2}\right)}-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{\sin 2x\ln\left(1+\frac{e^{2x}-1}{2}\right)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to0}2\cdot\frac{2x\frac{e^{2x}-1}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{e^{2x}-1}{x}=4\end{aligned}$$

□

2.5 多元连续函数

习题 52. 对于正实数 a,b,c,d, 考虑函数 $f(x)=\frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d}$. 证明：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\text{存在} \iff \frac{a}{c}+\frac{b}{d}>1$$

证明. 如果 $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}<1$, 则考虑 (x,y) 沿着曲线 $y=x^{\frac{c}{d}}$ 方向区域原点，有

$$\lim_{\substack{y=x^{\frac{c}{d}}\\(x,y)\to(0,0)}}\frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{a+\frac{bc}{d}}}{2x^c}=\lim_{x\to0^+}x^{c\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{d}-1\right)}=+\infty$$

故极限不存在。

如果 $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=1$, 则对任意 $k>0$, 考虑 (x,y) 沿路径 $y=kx^{\frac{c}{d}}$ 趋于原点，容易计算得到

$$\lim_{\substack{y=kx^{\frac{c}{d}}\\(x,y)\to(0,0)}}\frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d}=\lim_{x\to0^+}\frac{k^bx^{a+\frac{bc}{d}}}{(k^d+1)x^c}=\frac{k^b}{k^d+1}$$

其值与 k 的选取有关。因此 $f(x)$ 在原点处的极限不存在。

而当 $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}>1$ 时，注意对数函数 $x\mapsto\ln x$ 的凸性，从而有

$$\begin{aligned}\ln(|x|^a|y|^b) &= \frac{a}{c}\ln|x|^c+\frac{b}{d}\ln|y|^d\le\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{d}\right)\ln\left(\frac{\frac{a}{c}}{\frac{a}{c}+\frac{b}{d}}|x|^c+\frac{\frac{b}{d}}{\frac{a}{c}+\frac{b}{d}}|y|^d\right)\\ &\le \left(\frac{a}{c}+\frac{b}{d}\right)\ln\left(|x|^c+|y|^d\right)\end{aligned}$$

$$\frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d}\le\frac{(|x|^c+|y|^d)^{\frac{a}{c}+\frac{b}{d}}}{|x|^c+|y|^d}=(|x|^c+|y|^d)^{\frac{a}{c}+\frac{b}{d}-1}\to0\qquad(x,y)\to(0,0)$$

即 $f(x,y)$ 在原点处的极限为 0. □

习题 53. 已知二元函数 $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 关于分量 x,y 都连续，并且对任意 $x\in\mathbb{R}, y\mapsto f(x,y)$ 是单调的。证明：$f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 连续。

证明. 对于任意 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 断言 f 在该点处连续。对任意 $\varepsilon>0$, 先取定 $y_0'\in\mathbb{R}$, 使得 $|f(x_0,y_0')-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{4}$. 记 $\delta_1:=|y_0'-g_0|>0$. 取定此 y_0', 注意到关于 x 的函数

$$x\mapsto|f(x,y_0')-f(x,y_0)|$$

是连续的（特别地，在 x_0 处连续），从而存在 $\delta_2>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时成立

$$|f(x,y_0')-f(x,y_0)|<|f(x_0,y_0')-f(x_0,y_0)|+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

再注意 $x\mapsto f(x,y_0)$ 在点 x_0 处连续，从而存在 $\delta_3>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta_3$ 时，成立 $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

取 $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}>0$, 则对任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 如果 $|x-x_0|<\delta$ 并且 $|y-y_0|<\delta$, 则由 δ_1 的定义，以及 $y\mapsto f(x,y)$ 的单调性，有 $|f(x,y)-f(x,y_0)|\le|f(x,y_0')-f(x,y_0)|$. （这是关键一步！）所以有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)| &\le |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\ &\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

从而 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。 □

习题 54. （点到集合的距离）

设 A 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空子集。对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 称

$$\mathrm{d}_A(\boldsymbol{x}):=\inf\left\{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|\,\middle|\,\boldsymbol{y}\in A\right\}$$

为点 $\boldsymbol{x}$ 到集合 A 的**距离**，其中 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|:=\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 为两点间的标准欧氏距离。证明：函数 $\mathrm{d}_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足：对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$,

$$|\,\mathrm{d}_A(\boldsymbol{y})-\mathrm{d}_A(\boldsymbol{x})|\le\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|.$$

证明. 取定 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, 注意到对任意 $\boldsymbol{u}\in A$ 都有三角不等式

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\|\ge\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}\|\ge\mathrm{d}_A(\boldsymbol{y})$$

将上式最左边的 $\boldsymbol{u}$ 取遍 A, 并取下确界，得到

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|+\mathrm{d}_A(\boldsymbol{x})\ge\mathrm{d}_A(\boldsymbol{y})$$

同理也有

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| + \mathrm{d}_A(\boldsymbol{y}) \geq \mathrm{d}_A(\boldsymbol{x})$$

整合上述两式，立刻得到 $|\mathrm{d}_A(\boldsymbol{y}) - \mathrm{d}_A(\boldsymbol{x})| \leq \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$. □

习题 55. 证明：方程组 $\begin{cases} \sin(x+u) - e^y + 1 = 0 \\ x^2 + y + e^u = 1 \end{cases}$ 有无穷多组解 (x, y, u).

证明. 从这两个式子当中反解出 y，只需证明方程

$$\ln(1+\sin(x+u)) = 1 - x^2 - e^u \tag{$*$}$$

有无穷多组解 (x, u).

对任意正整数 k，考虑 $u = 2k\pi$，代入 $(*)$ 式，只需证明关于 x 的方程

$$\ln(1+\sin x) = 1 - x^2 - e^{2k\pi}$$

有解即可。事实上此方程在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 内有解，这只需考虑 $x \to -\frac{\pi}{2}^+$ 以及 $x \to 0^-$ 的情形，再用连续函数的介值原理即可。 □

注记

注意 $(0,0,0)$ 是原方程组的一个解。事实上由隐映射定理容易知道，在 $(0,0,0)$ 附近存在有该方程组决定的隐函数 $x = x(u)$ 以及 $y = y(u)$. 由此也可说明原方程组有无限多组解。

习题 56. 证明：不存在从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续单射。

证明. 假设 $f : \mathbb{R}^2 \to R$ 为连续单射，则考虑映射

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

于是复合函数 $f \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为以 2π 为周期的连续函数。由 f 为单射可知 $f \circ \varphi$ 非常值。令 m, M 分别为连续周期函数 $f \circ \varphi$ 的最小、最大值; 并且存在 $t_1 \in \mathbb{R}$ 使得 $f \circ \varphi(t_1) = f \circ \varphi(t_1 + 2\pi) = m$. 利用 $f \circ \varphi$ 的连续、周期性，再取 $t_2 \in (t_1, t_1 + 2\pi)$ 使得 $f \circ \varphi(t_2) = M$. 从而有连续函数介值定理，存在 $s_1 \in (t_1, t_2)$ 以及 $s_2 \in (t_2, t_1 + 2\pi)$，使得 $f \circ \varphi(t_1) = f \circ \varphi(t_2) = \frac{m+M}{2}$. 但此时显然有 $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$，这就与 f 的单射性矛盾。 □

注记

一般地，对于 $m > n$，不存在从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续单射。本题的方法能够证明 $n = 1$ 的情形。而当 $n > 1$ 时，证明非常困难，需要**代数拓扑学**的工具。

习题 57. 给定 $\mathbb{R}^n$ 上的 m 个不同的点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_m$. 证明: 存在半径最小的闭球 $B := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \le r\right\}$, 使得 $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_m$ 都在 B 中.

证明. 对每个 $1 \le i \le m$, 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f_i(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_i\|$, 则 f_i 连续. 再对每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 记

$$f(\boldsymbol{x}) := \max_{1 \le i \le m} f_i(\boldsymbol{x})$$

则 f 也是连续函数, 并且易知 $f(\boldsymbol{x})$ 是以 $\boldsymbol{x}$ 为球心的能覆盖 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_m\}$ 的球的最小的半径. 接下来断言 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上能取到最小值. 为此, 首先取足够大的 $N > 0$, 使得 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_m\} \subseteq \overline{B}_N(\mathbf{0})$. 其中 $\overline{B}_N(\mathbf{0})$ 是以原点 $\mathbf{0}$ 为球心, 半径为 N 的闭球. 再考虑闭球 $\overline{B}_{3N}(\mathbf{0})$, 易知对任意 $\boldsymbol{x} \notin \overline{B}_{3N}(\mathbf{0})$, 都有 $f(\boldsymbol{x}) > 2N$. 再注意 $\overline{B}_{3N}(\mathbf{0})$ 是紧致集, 从而连续函数 f 在其中能取到最小值

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \min_{\|\boldsymbol{x}\| \le 3N} f(\boldsymbol{x})$$

其中 $\boldsymbol{x}_0 \in \overline{B}_{3N}(\mathbf{0})$. 再注意到

$$\min_{\|\boldsymbol{x}\| \le 3N} f(\boldsymbol{x}) \le \min_{\|\boldsymbol{x}\| \le N} f(\boldsymbol{x}) \le 2N$$

因此 $\boldsymbol{x}_0$ 实际上是函数 f 在空间 $\mathbb{R}^n$ 上的最小值点. 此时, 易知以 $\boldsymbol{x}_0$ 为球心, 半径为 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 的球是符合题设的 (半径) 最小的球, 得证. □

第三章　一元微分学

3.1　导数的基本概念与计算

习题 58. 对于任意给定的定义在 $x=0$ 某邻域的函数 $f(x)$，如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某去心邻域上可导，试判断下列命题的对错：

（1）如果 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=A$，则 $f'(0)$ 存在并且 $f'(0)=A$；

（2）如果 $f'(0)$ 存在并且 $f'(0)=A$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=A$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\infty$，则 $f'(0)$ 不存在；

（4）如果 $f'(0)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\infty$.

证明.（3）正确，（1）（2）（4）不正确。原因如下：

首先考虑函数 $f(x):=\begin{cases} 0 & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 满足题设（即在 $x=0$ 某邻域有定义，在 $x=0$ 某去心邻域可导）。注意这个 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0$，但是 $f'(0)$ 不存在，这个反例说明了（1）不正确；再注意此时 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0\neq\infty$，从而（4）不正确。

再考虑另一个例子 $f(x):=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$；但是对于 $x\neq 0$，$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$，易知 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在。这个反例说明（2）不正确。

最后断言（3）正确。采用反证法，假设 $f'(0)$ 存在，令 $A:=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$. 于是由极限的定义知，存在 $\delta>0$，使得对任意 $0<|x|<\delta$ 都成立

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\leq |A|+1$$

于是对任意的 $0<|x|<\delta$，有

$$\left|\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right|=\left|2\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{f(\frac{x}{2})-f(0)}{\frac{x}{2}}\right|\leq 2\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|+\left|\frac{f(\frac{x}{2})-f(0)}{\frac{x}{2}}\right|\leq 3(|A|+1)$$

而由拉格朗日中值定理，存在介于 $\frac{x}{2}$ 与 x 之间的 ξ，使得 $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$.

以上论述表明，任意 $x>0$，存在 ξ 使得 $0<|\xi|<x$，并且 $|f'(\xi)|\leq 3(|A|+1)$. 而这与 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\infty$ 的定义矛盾。 □

注记

在（1）中，如果额外增加条件“$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续”，则此时（1）正确。这是因为此时有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1}=A$$

注意额外增加的条件保证了使用洛必达法则的合法性。

习题 59. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有定义，在 $x=0$ 处可导，并且满足 $f(0)=0$，$f'(0)=1$. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})\right)$$

解. 对于足够大的 $n>1$（使得 $[0,\frac{1}{n}]$ 位于 f 的定义域中），定义数列

$$\begin{aligned}a_n &:= f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})\\ b_n &:= \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\end{aligned}$$

则有 $b_n=\frac{n+1}{2n}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$. 如果我们证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，那么就有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}[(a_n-b_n)+b_n]=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)+\lim_{n\to\infty}b_n=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

接下来我们证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，从而完成本题。对于任意 $\varepsilon>0$，由于 $f'(0)=1$，从而存在 $N>0$，使得对任意 $0<x<\frac{1}{N}$，成立

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-1\right|<\varepsilon$$

即 $|f(x)-x|<\varepsilon x$. 特别地，对任意 $n>N$ 以及任意 $1\le k\le N$，成立

$$\left|f(\frac{k}{n^2})-\frac{k}{n^2}\right|<\varepsilon\frac{k}{n^2}$$

因此对于任意 $n>N$，有

$$\begin{aligned}|a_n-b_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(f(\frac{k}{n^2})-\frac{k}{n^2}\right)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|f(\frac{k}{n^2})-\frac{k}{n^2}\right|\\ &< \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\varepsilon\frac{n+1}{2n}\le\varepsilon\end{aligned}$$

这表明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$. □

习题 60. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可导，$A\in\mathbb{R}$ 为常数。

（1）如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+f'(x)=A$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

（2）如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+xf'(x)\ln x=A$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

证明.（1）注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x)e^x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty} f(x)+f'(x)=A$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$，从而由洛必达法则，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x)e^x)'}{(e^x)'}=A$$

（2）与（1）完全类似，只需注意 $f(x)=\frac{f(x)\ln x}{\ln x}$. □

注记

此题是洛必达法则的绝妙应用！

习题 61. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的非常值可微函数，并且满足 $f(f(x))=f(x)$. 证明：$f(x)\equiv x$.

证明. 令 $R(f)$ 为 f 的值域。由于 f 可微知 f 连续，从而 $R(f)$ 为 $\mathbb{R}$ 的连通子集。由 $f(f(x))=f(x)$ 立刻得到，任意 $x\in R(f)$，成立 $f(x)=x$. 从而只需证明 $R(f)=\mathbb{R}$.

记 $A:=\sup R(f)$ 为 f 的值域的上确界，断言 $A=+\infty$. 如果 $A<+\infty$，则由 $f(x)=x$ 在 $R(f)$ 上成立以及 f 的连续性可知 $f(A)=A$，特别地 $A\in R(f)$. 再注意 f 在 $x=A$ 可微，以及在 $x=A$ 的足够小的左邻域当中成立 $f(x)=x$，从而必然 $f'(A)=1$. 因此存在 $\delta>0$，使得 $f(A+\delta)\geq f(A)+\frac{1}{2}\delta>A$，这与 A 的定义矛盾。此矛盾表明 $A=+\infty$.

同理 $\inf R(f)=-\infty$. 从而由 $R(f)$ 的连通性可知 $R(f)=\mathbb{R}$。 □

习题 62. 考虑定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases} x^{x+1} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$，试证明 $f'(0)=1$，但是二阶导数 $f''(0)$ 不存在。

证明. 首先用定义计算一阶导数：

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}x^x=1$$

对于 $x>0$，有 $f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{(x+1)\ln x}=x^{x+1}\ln x+x^x(x+1)$，从而

$$f''(0)\;=\;\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\left[x^x(1+\ln x)+\frac{x^x-1}{x}\right]$$

$$\frac{x^x-1}{x} = \frac{e^{x\ln x}-1}{x} = \ln x + \frac{1}{2}x\ln^2 x + o(x\ln^2 x) = \ln x + o(1) \qquad (x\to 0)$$

从而 $f''(0) = \lim\limits_{x\to 0}(x^x(1+\ln x)+\ln x) = -\infty$. □

3.2 高阶导数

习题 63. 已知函数 $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，计算 f 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

解. 注意到 $\sqrt{1-x^2}f(x)=\arcsin x$，两边求导有

$$\begin{aligned} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f(x)+\sqrt{1-x^2}f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow \qquad (1-x^2)f'(x)-xf(x) &= 1 \end{aligned}$$

对上式两边求 $(n-1)$ 阶导，注意使用对乘积求高阶导数的 Leibniz 法则，得到

$$(1-x^2)f^{(n)}(x)-2(n-1)xf^{(n-1)}(x)-2\binom{n-1}{2}f^{(n-2)}(x)-xf^{(n-1)}(x)-(n-1)f^{(n-2)}(x)=0$$

令 $x=0$，可以得到递推关系 $f^{(n)}(0)=(n-1)^2f^{(n-2)}(0)$，由此递推关系容易得到

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} [(2k)!!]^2 & n=2k+1 \\ 0 & n=2k \end{cases}$$

□

习题 64. 证明：函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处任意阶可导，且任意阶导数都为 0.

证明. 先归纳证明：对任意 $n\geq 0$，存在多项式 $P_n(x)\in\mathbb{R}[x]$，使得 f 当 $x\neq 0$ 处的 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)=P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$，并且多项式的次数 $\deg P_n=3n$. 显然 $P_0(x)\equiv 1\in\mathbb{R}[x]$ 符合断言；此外如果存在符合断言的 P_n，则

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}\right]=\left[-\frac{1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x})+2\frac{1}{x^3}P_n(\frac{1}{x})\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$$

因此多项式 $P_{n+1}(x):=-x^2P_n'(x)+2x^3P_n(x)$ 满足断言，并且显然 $\deg P_{n+1}=\deg P_n+3$.

接下来再归纳证明对任意 $n\geq 0$，$f^{(n)}(0)=0$. $n=0$ 时显然；如果 $f^{(n)}(0)=0$，则

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

从而证毕。 □

习题 65. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的光滑函数 (即任意阶连续可导), 并且 $f(0)=0$. 证明: 函数 $g(x):=\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ f'(0) & x=0\end{cases}$ 也是 $(0,1)$ 上的光滑函数，并且对任意 $n\geq 0$ 都有 $g^{(n)}(0)=\frac{f^{n+1}(0)}{n+1}$.

证明. 只需验证 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的各阶可微性. 对 n 归纳证明 $g^{(n)}(0)=\frac{f^{n+1}(0)}{n+1}$. 首先 $n=0$ 时成立. 现在对于 $n\geq 0$, 假设结论对此 n 成立，则利用两函数乘积的高阶导数公式直接计算，有

$$\begin{aligned}
g^{(n+1)}(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(0)}{x-0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(f(x)\cdot\frac{1}{x}\right)-\frac{f^{(n+1)(0)}}{n+1}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\cdot(-1)^{n-k}(n-k)!x^{k-n-1}-\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}f^{(k)}(x)\cdot x^{k-n-1}-\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

对于每个 $0\leq k\leq n$, 讲函数 $f^{(k)}(x)$ 在 $x=0$ 处作带 Peano 余项的泰勒展开直到 $f^{(n+2)}(x)$ 项，之后利用组合恒等式暴力整理得，当 $x\to 0$ 时成立

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}f^{(k)}(x)\cdot x^{k-n-1}\\
=&\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}x^{k-n-1}\left(\sum_{l=0}^{n+2-k}\frac{f^{(k+l)}(x)}{l!}x^l+o(x^{n+2-k})\right)\\
=&\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}x^{k-n-1}\sum_{l=0}^{n+2-k}\frac{f^{(k+l)}(x)}{l!}x^l+o(x)\\
=&\sum_{d=0}^{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{d}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(d-k)!}}_{=0}x^{d-n-1}f^{(d)}(x)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n+1-k)!}f^{(n+1)}(x)\\
&+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n+2-k)!}xf^{(n+2)}(x)+o(x)\\
=&\,0+\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n+1}{k}+\frac{xf^{(n+2)}(x)}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n+2}{k}+o(x)\\
=&\frac{f^{(n+1)(x)}}{n+1}+\frac{xf^{(n+2)}(x)}{n+2}+o(x)
\end{aligned}$$

因此我们有

$$g^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}f^{(k)}(x)\cdot x^{k-n-1}-\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{f^{(n+1)(x)}}{n+1}+\frac{xf^{(n+2)}(x)}{n+2}+o(x)-\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\right)\\
&= \frac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}.
\end{aligned}
$$

□

注记

好多人想当然以为由 $f(0)=0$ 泰勒展开得

$$f(x)\approx xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

从而“得到”

$$g(x)\approx f'(0)+\frac{1}{2}xf''(0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^n+\cdots$$

再比较泰勒系数得 $g^{(n)}(0)=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$. 可惜这是错误的.

习题 66. 对于正整数 n, 已知 *Legendre* 多项式

$$P_n(x):=\frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.$$

试计算 $P_n(1)$ 与 $P_n(-1)$ 的值，并证明 $P_n(x)$ 满足微分方程

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0.$$

解. 注意 $x^2-1=(x+1)(x-1)$, 从而直接由高阶导数的 Leibniz 公式得到

$$P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x+1)^n\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x-1)^n$$

所以立刻得到

$$
\begin{aligned}
P_n(1) &= \frac{1}{n!2^n}(x+1)^n\Big|_{x=1}\cdot n!=1\\
P_n(-1) &= \frac{1}{n!2^n}(x-1)^n\Big|_{x=-1}\cdot n!=(-1)^n.
\end{aligned}
$$

对于正整数 n, 记 $f(x):=(x^2-1)^n$, 两边求导容易验证

$$(x^2-1)f'(x)=2nxf(x)$$

对上式两边求 $(n+1)$ 阶导数，由 Leibniz 公式直接计算得：

$$(x^2-1)f^{(n+2)}(x)+(n+1)\cdot 2x\cdot f^{(n+1)}(x)+\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2\cdot f^{(n)}(x)=2nx\cdot f^{(n+1)}(x)+(n+1)\cdot 2n\cdot f^{(n)}(x)$$

整理即得 $(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0.$ □

习题 67. （*KdV* 方程的 *Lax* 表示）

记 $C^\infty(\mathbb{R})$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的无穷阶可微函数（光滑函数）之全体，则 $C^\infty(\mathbb{R})$ 在通常的函数加法、数乘意义下构成线性空间。给定 $u\in C^\infty(\mathbb{R})$，考虑 $C^\infty(\mathbb{R})$ 上的线性算子 $\begin{cases} L := -\partial_x^2+u \\ A := 4\partial_x^3-6\partial_x-3u_x \end{cases}$.

试验证上述算子满足对易关系

$$[L,A]=-u_{xxx}+6uu_x$$

一些记号说明： (1) 我们将 $C^\infty(\mathbb{R})$ 当中的函数 f 通过函数乘法视为 $C^\infty(\mathbb{R})$ 上的线性算子，即 $g\mapsto fg$；(2)$\partial_x := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 为微分算子，$\partial_x^2 := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 等为高阶微分算子；(3) 对于函数 u，$u_x := \partial_x u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 为 u 的导函数，u_{xx}, u_{xxx} 等为其高阶导函数；(4) 设 A,B 为线性空间 V 上的线性算子，则记对易子 $[A,B]:=AB-BA.$

证明. 容易验证 $[,]$ 满足反交换性以及对加法的分配律，即对任何算子 A,B,C，成立 $[A,B]=-[B,A]$，$[A,B+C]=[A,B]+[A,C]$. 这完全是线性代数的。具体到此题，有

$$\begin{aligned}[L,A] &= [-\partial_x^2+u, 4\partial_x^3-6u\partial_x-3u_x] \\ &= -4[\partial_x^2,\partial_x^3]+6[\partial_x^3,u\partial_x]+3[\partial_x^2,u_x]-4[\partial_x^3,u]-6[u,u\partial_x]-3[u,u_x]\end{aligned}$$

对任意 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$，有 $[\partial_x^2,\partial_x^3]f=\partial_x^2\partial_x^3 f-\partial_x^3\partial_x^2 f=\partial_x^5 f-\partial_x^5 f=0$，从而 $[\partial_x^2,\partial_x^3]=0$. 类似地，也显然有 $[u,u_x]=0$. 再注意到

$$\begin{aligned} &[\partial_x^2,u\partial_x]f=\partial_x^2(uf_x)-u\partial_x(f_{xx})=u_{xx}f_x+2u_xf_{xx}+uf_{xxx}-uf_{xxx}=u_{xx}f_x+2u_xf_{xx} \\ \Rightarrow\ &[\partial_x^2,u\partial_x]=u_{xx}\partial_x+2u_x\partial_x^2\end{aligned}$$

无非就是反复求导，其余几项也类似，经计算可得

$$\begin{aligned}[\partial_x^2,u\partial_x] &= u_{xx}\partial_x+2u_x\partial_x^2 \\ [\partial_x^2,u_x] &= u_{xxx}+2u_{xx}\partial_x \\ [\partial_x^3,u] &= u_{xxx}+3u_{xx}\partial_x+3u_x\partial_x^2 \\ [u,u\partial_x] &= -uu_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[L,A] &= 6[\partial_x^3,u\partial_x]+3[\partial_x^2,u_x]-4[\partial_x^3,u]-6[u,u\partial_x] \\ &= 6(u_{xx}\partial_x+2u_x\partial_x^2)+3(u_{xxx}+2u_{xx}\partial_x)-4(u_{xxx}+3u_{xx}\partial_x+3u_x\partial_x^2)+6uu_x \\ &= -u_{xxx}+6uu_x\end{aligned}$$

□

3.3 泰勒公式与极限的计算

习题 68. 已知定义在 $0 \in \mathbb{R}$ 附近的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，并且 $f'(0)$ 存在，试计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}$$

解. 因为 $f(0)=0$ 且 $f'(0)$ 存在，所以对于 $x\to 0$，有

$$f(x)=xf'(0)+o(x)$$

因此使用等价无穷小代换，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)f'(0)}{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}\\ &= \lim_{x\to 0} f'(0)\frac{1}{1+\cos x\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}}\\ &= \frac{f'(0)}{1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}}\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-2x^2+o(x^3)}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2+o(x^3))}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

从而原式 $=\frac{1}{3}f'(0)$. □

习题 69. 计算极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{e^x-1}-\sin x+2\cos x-3}{\tan x-\sin x}$$

解. 首先注意到 $x\to 0$ 时

$$\begin{aligned}\tan x-\sin x &= \sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}-1\right)\\ &= \left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

即得等价无穷小量 $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3 \quad (x\to 0)$. 再注意到

$$e^{e^x-1} = e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

$$\begin{aligned}
&= 1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2 \\
&\quad +\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o(x^3) \\
&= 1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}(x^2+x^3)+\frac{1}{6}x^3+o(x^3) \\
&= 1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}
e^{e^x-1}-\sin x+2\cos x-3 &= \left(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)+2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-3+o(x^3) \\
&= x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{e^x-1}-\sin x+2\cos x-3}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{1}{2}x^3}=2.$$

□

习题 70. 计算极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)-e^{\sin x}+1}{\sin^4 x}.$$

解. 直接泰勒展开至四阶，有

$$\begin{aligned}
\sin(e^x-1) &= \sin\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) \\
&= \left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^4) \\
&= x+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4+o(x^4) \\
e^{\sin x}-1 &= e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}-1 \\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4) \\
&= x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)-e^{\sin x}+1}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4\right)-\left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4\right)+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}$$

□

习题 71. 已知实数 α,β 满足

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\left(1-(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})\right)=\beta$$

并且 $\beta\neq 0$. 求 α 与 β.

解. 注意到当 $x\to+\infty$ 时，有泰勒展开 $\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})$，从而有

$$\begin{aligned}1-(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x}) &= 1-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right)\\ &= 1-\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)\\ &= -\frac{1}{12x^2}+o(\frac{1}{x^2})\end{aligned}$$

因此立刻得到 $\alpha=2,\beta=-\frac{1}{12}$. □

习题 72. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{2})^n}{n^2}$$

解. 只需先计算其对数的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\ln(2\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{2})-2\ln n\right]$. 注意到

$$n\ln(2\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{2})-2\ln n=\ln 2+n\ln\left[1+2\left(\sqrt[n]{\frac{n}{2}}-1\right)\right]-2\ln n$$

$$\sqrt[n]{\frac{n}{2}}-1=e^{\frac{1}{n}\ln\frac{n}{2}}-1=\frac{1}{n}\ln\frac{n}{2}+\frac{1}{2n^2}\ln^2\frac{n}{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\ln^2\frac{n}{2}\right)\qquad(n\to+\infty)$$

因此有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[n\ln(2\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{2})-2\ln n\right] &= \lim_{n\to+\infty}\left[\ln 2+n\ln\left(1+\frac{2}{n}\ln\frac{n}{2}+\frac{1}{n^2}\ln^2\frac{n}{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\ln^2\frac{n}{2}\right)\right)-2\ln n\right]\\ &= \ln\frac{1}{2}+\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\ln^2\frac{n}{2}+o\left(\frac{1}{n}\ln^2\frac{n}{2}\right)\right]=\ln\frac{1}{2}\end{aligned}$$

因此原极限 $=\exp\left(\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. □

习题 73. 计算极限：

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}-\frac{\pi}{4}x\right)$$

证明. 注意利用 $\arctan x$ 在 $x=1$ 处的泰勒展开，有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty}\left[xe^{\frac{1}{x}}\left(\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}-\frac{\pi}{4}\right)+x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot\frac{\pi}{4}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty} x\left(\arctan\left(1-\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}\right)-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4} \\
&= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x-3}{(x+1)(x+2)}+o(\frac{1}{x})\right)+\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}-1
\end{aligned}$$

□

习题 74. 计算极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{(\sin x)^x}-(\sin x)^{x^{\sin x}}}{x^3}.$$

解. 直接计算之，有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^{(\sin x)^x-1}-(\sin x)^{x^{\sin x}-1}\cdot\frac{\sin x}{x}}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{((\sin x)^x-1)\ln x}-e^{\left(x^{\sin x}-1\right)\ln\sin x}\cdot\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)}{x^2} \\
&= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^{((\sin x)^x-1)\ln x}-e^{\left(x^{\sin x}-1\right)\ln\sin x}}{x^2}}_{:=A_1}+\underbrace{\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}e^{\left(x^{\sin x}-1\right)\ln\sin x}}_{:=A_2}.
\end{aligned}$$

先观察上式的 A_2 部分，注意 $\lim_{x\to 0}(x^{\sin x}-1)\ln\sin x=\lim_{x\to 0}\left(e^{\sin x\ln x}-1\right)\ln\sin x=\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x\cdot\ln\sin x=0$. 类似地，上式 A_1 的分子上的 e 的指数 $((\sin x)^x-1)\ln x$ 与 $\left(x^{\sin x}-1\right)\ln\sin x$ 都为 $x\to 0$ 的无穷小量，从而对 A_1 的分子使用（关于函数 $x\mapsto e^x$）拉格朗日中值定理，有

$$\text{（接上）原式} = \lim_{x\to 0}\frac{((\sin x)^x-1)\ln x-(x^{\sin x}-1)\ln\sin x}{x^2}+\frac{1}{6}.$$

□

之后考虑泰勒展开。先注意到 $x\to 0$ 时有

$$\ln\sin x=\ln x+\ln\frac{\sin x}{x}=\ln x-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)$$

于是有：

$$((\sin x)^x-1)\ln x = \left(e^{x\ln\sin x}-1\right)\ln x$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(x\ln\sin x + \frac{1}{2}x^2\ln^2\sin x + o(x^2)\right)\ln x \\
&= x\ln^2 x + \frac{1}{2}x^2\ln^3 x + o(x^2) \\
(x^{\sin x}-1)\ln\sin x &= \left(e^{\sin x\ln x}-1\right)\left(\ln x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) \\
&= \left(x\ln x + \frac{1}{2}x^2\ln^2 x + o(x^2)\right)\left(\ln x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) \\
&= x\ln^2 x + \frac{1}{2}x^2\ln^3 x + o(x^2).
\end{aligned}
$$

因此，我们最终得到

$$
\begin{aligned}
\text{（接上）原式} &= \frac{1}{6} + \lim_{x\to 0}\frac{((\sin x)^x - 1)\ln x - (x^{\sin x}-1)\ln\sin x}{x^2} \\
&= \frac{1}{6} + \lim_{x\to 0}\frac{\left(x\ln^2 x + \frac{1}{2}x^2\ln^3 x + o(x^2)\right) - \left(x\ln^2 x + \frac{1}{2}x^2\ln^3 x + o(x^2)\right)}{x^2} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

习题 75. 计算极限：

$$
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n
$$

解. 首先注意到

$$
\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n = e^{n\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)} = e^{n\ln\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}-\frac{1}{n}\right)\right)}
$$

再注意到

$$
\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n^2} + R_k(n)\right) = -\frac{k}{2n^3} + \frac{1}{n}R_k(n)
$$

其中 Tayor 展开的 Lagrange 余项 $R_k(n)$ 满足

$$
R_k(n) = \frac{3}{8}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}}\frac{k^2}{n^4}
$$

其中 $\xi \in (0, \frac{k}{n^2}) \subseteq (0,1)$. 从而易知 $|R_k(n)| \le \frac{3}{8}(1+0)^{-\frac{5}{2}}\frac{k^2}{n^4} = \frac{3k^2}{8n^4}$. 因此，

$$
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} - \frac{1}{n}\right) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^3} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}R_k(n) = -\frac{n(n+1)}{4n^3} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}R_k(n)
$$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}R_k(n)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{3k^2}{8n^4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{16n^5} < \frac{1}{n^2}$$

因此 $n \to +\infty$ 时成立 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}R_k(n) = o(\frac{1}{n})$，从而有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}-\frac{1}{n}\right) = -\frac{n(n+1)}{4n^3}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}R_k(n) = -\frac{1}{4n}+o(\frac{1}{n})$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}-\frac{1}{n}\right)\right)}\\ = &\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{4n}+o(\frac{1}{n})\right)} = e^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

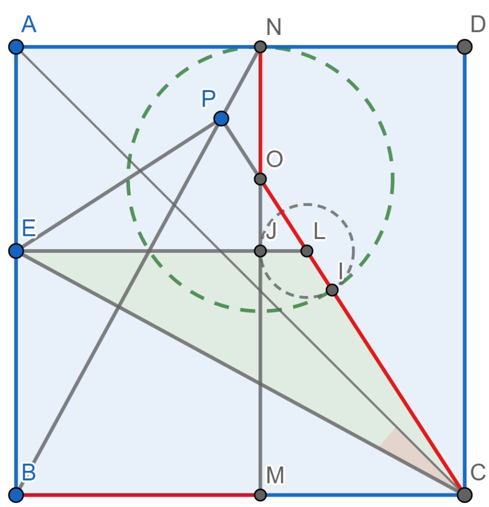
□

习题 76. 考虑平面上的边长为 1 的正方形 $ABCD$，E 为线段 AB 上的任意一点，点 P 与点 B 关于线段 CE 对称，直线 BP 交线段 AD 于 N，过 N 作 BC 的垂线，垂足为 M. 过 E 作 MN 的垂线，垂足为 J，直线 EJ 交 PC 于 L. 记 O 为 MN 与 PC 的交点；以 O 为圆心，ON 为半径作圆，该圆交 OC 于 I.

（1）证明：$LJ = LI$，并且 $BM + ON = OC$;

（2）记 CE 与 CA 所夹的锐角为 φ，线段 ON 的长度为 R，线段 LI 的长度为 r；将 R 与 r 视为 φ 的函数。证明当 $\varphi \to 0^+$ 时有等价无穷小

$$R(\varphi) \sim \varphi, \qquad r(\varphi) \sim 2\varphi^2$$



习题76示意图

证明. 记 $\angle BCE=\theta$，则 $\theta=\frac{\pi}{4}-\varphi$（$\varphi$ 的定义见第 2 问），以及 $\angle OCM=2\theta$.

(1)：直接计算可知 $BE=\tan\theta$，从而 $CM=1-\tan\theta$，所以

$$\begin{aligned}OC&=\frac{CM}{\cos 2\theta}=\frac{1-\tan\theta}{\cos 2\theta}\\ ON&=1-OM=1-OC\sin 2\theta=1-(1-\tan\theta)\tan 2\theta\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}OC-ON-BM&=\frac{1-\tan\theta}{\cos 2\theta}-(1-(1-\tan\theta)\tan 2\theta)-\tan\theta\\ &\overset{t:=\tan\theta}{=\!=}\frac{1-t}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}-\left(1-\frac{(1-t)\cdot 2t}{1-t^2}\right)-t\\ &=\frac{1+t^2}{1+t}-\frac{1-t}{1+t}-t=0\end{aligned}$$

这就证明了 $OC=ON+BM$. 再注意到 $ON=OI$，$BM=EJ$，从而

$$OC=ON+BM=OI+EJ$$

因此 $EJ=CI$. 又由 $\angle LCE=\angle ECB=\angle LEC$ 得到 $LE=LC$，因此 $LE-EJ=LC-CI$，即 $LJ=LI$.

(2)：直接计算得

$$\begin{aligned}R&=1-(1-\tan\theta)\tan 2\theta=1-\left[1-\tan(\frac{\pi}{4}-\varphi)\right]\tan(\frac{\pi}{2}-2\varphi)\\ &=1-\left(1-\frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi}\right)\frac{1-\tan^2\varphi}{2\tan\varphi}=\tan\varphi\sim\varphi\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}r&=LI=LJ=EL-EJ=\frac{EC}{2\cos 2\theta}-BM\\ &=\frac{1}{1+\cos 2\theta}-\tan\theta=\frac{1}{1+\sin 2\varphi}-\frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi}\\ &=\frac{2\tan^2\varphi}{(1+\tan\varphi)^2}\sim 2\varphi^2\end{aligned}$$

□

习题 77. 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，$f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, 并且

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}},\qquad \forall x>0$$

试计算 $f(x)$ 的表达式。

解. 对每个 $x>0$, 有

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} = \exp\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{hxf'(x)+o(h)}{f(x)}\right)\right) = e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}$$

因此有 $\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}$ 对任意 $x>0$ 成立。整理得

$$\frac{\mathrm{d}f}{f}=\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

两边积分有 $\ln f=-\frac{1}{x}+C$, 从而 $f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}$. 再由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ 可知积分常数 $C=1$. 从而 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$. □

习题 78. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 并且对任意 $x>0$ 都有

$$f(x^2)=2f(x).$$

证明: 存在常数 c, 使得 $f(x)=c\ln x$.

证明. 对任意 $x>0$, 反复题设条件, 可以归纳证明对任意正整数 n 都成立

$$f(x)=2^n f(x^{\frac{1}{2^n}})$$

现在, 取定 $x>0$, 令 $n\to+\infty$, 则有

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^n f(x^{\frac{1}{2^n}})=2^n f(e^{\frac{1}{2^n}\ln x}) \\ &= 2^n f(1+\frac{\ln x}{2^n}+o(\frac{1}{2^n})) \\ &= 2^n\left(\frac{f'(1)\ln x}{2^n}+o(\frac{1}{2^n})\right) \\ &= f'(1)\ln x+o(1) \end{aligned}$$

这就证明了 $f(x)=f'(1)\ln x$. □

3.4 隐函数与参数方程的求导

习题 79. 设 $0<\varepsilon<1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-\varepsilon\sin y=x$ 决定，试求 $y''(x)$.

证明. 将方程两边对 x 求导，得 $y'-\varepsilon\cos y\cdot y'=1$，从而 $y'=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$. 再求导，得

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}=-\frac{\varepsilon\sin y\cdot y'}{(1-\varepsilon\cos y)^2}=-\frac{\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$$

□

习题 80. 设函数 $y=\varphi(x)$ 定义在 $x=0$ 附近，在 $x=0$ 处可导，且满足方程

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2} \tag{$*$}$$

其中 $a,b,c>0$ 为常数。证明：当 $x\to 0$ 时，成立

$$\varphi(x)=a^{-4}c^2x^3+o(x^3)$$

证明. 考虑广义极坐标换元 $\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$，则约束方程 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$ 化为 $r^2=\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta$，因此函数 $y(x)$ 具有参数表示

$$\begin{cases} x=a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{3}{2}}\theta \\ y=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{-1}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta \end{cases}$$

特别地，$\theta\to 0^+$ 时有等价无穷小

$$x\sim a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\theta^{\frac{1}{2}} \tag{$**$}$$

注意由 $(*)$ 的对称性可知隐函数 $y=y(x)$ 为偶函数，由 $y'(0)$ 存在可知 x 在 0 附近时，参数 θ 在 0 附近（而不是 $\frac{\pi}{2}$ 附近）从而我们只需考虑 $y(x)$ 在参数 $\theta=0$ 处的右导数即可。我们只需要求出 $\left.\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=0}$，之后用泰勒公式即可。

首先 $y(0)=0$，从而由定义，

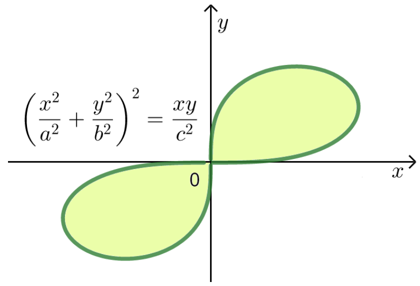
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{y}{x}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{-1}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta}{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{3}{2}}\theta}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{b}{a}\tan\theta=0$$

而对于 $x=0(\theta=0)$ 附近的点，由参数方程求导法则，容易得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}\theta}=a^{-1}b\frac{\frac{3}{2}\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{3}{2}}\theta-\frac{1}{2}\sin^{\frac{5}{2}}\theta\cos^{-\frac{1}{2}}\theta}{\frac{1}{2}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{5}{2}}\theta-\frac{3}{2}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta} \\ &= a^{-1}b\frac{3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta}\sim 3a^{-1}b\theta \qquad (\theta\to 0^+)\end{aligned}$$

从而由二阶导数的定义直接计算，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{y'(x)}{x}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{3a^{-1}b\theta}{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\theta^{\frac{1}{2}}}=0$$



图：隐函数 $y=y(x)$ 的图像为原点附近“贴近” x-轴的那一支

我们继续计算 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的三阶导数。在 $x=0(\theta=0)$ 附近，有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\\
&= a^{-1}b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)\cdot 2a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}c\cdot\frac{\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta}{\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta}\\
&= 2a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}c\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta\times\\
&\quad\left(\frac{(3\cos^3\theta-6\sin^2\theta\cos\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)(\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)}{(\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)^3}\right.\\
&\quad\left.-\frac{(-3\cos^2\theta\sin\theta-6\sin\theta\cos^2\theta+3\sin^3\theta)(3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta)}{(\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)^3}\right)\\
&= 6a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}c\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta\times\frac{(\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)^2+(\sin^3\theta-3\sin\theta\cos^2\theta)^2}{(\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)^3}\\
&\sim 6a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}c\theta^{\frac{1}{2}}\qquad(\theta\to0^+)
\end{aligned}$$

从而直接由三阶导数的定义，有

$$y'''(0)=\lim_{x\to0}\frac{y''(x)-y''(0)}{x}=\lim_{\theta\to0^+}\frac{6a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}c\theta^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\theta^{\frac{1}{2}}}=6a^{-4}c^2$$

因此由 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开，

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{1}{2}y''(0)x^2+\frac{1}{6}y'''(0)x^3+o(x^3)=a^{-4}c^2x^3+o(x^3)$$

□

3.5 微分中值定理

习题 81. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 处处可导。

（1）是否对于每个 $x_0 \in (a,b)$，都一定存在 $\xi,\eta \in (a,b)$，使得 $\xi \neq \eta$，并且 $\frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} = f'(x_0)$？

（2）对于 $x_0 \in (a,b)$，如果 f 在 x_0 处二阶可导，并且 $f''(x_0) \neq 0$，证明：存在 $\xi,\eta \in (a,b)$，使得 $\xi \neq \eta$，并且

$$\frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} = f'(x_0)$$

证明. **(1)** 这不一定。例如 $(a,b) = (-1,1)$，$x_0 = 0$，考虑函数 $f(x) = x^3$，则 $f'(x_0) = 0$；但是注意到对任意的 $\xi,\eta \in (-1,1)$，如果 $\xi \neq \eta$，那么一定有 $f(\xi) \neq f(\eta)$，从而

$$\frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} \neq 0 = f'(x_0)$$

因此不存在如此的 ξ,η.

(2) 此时，不妨 $f''(x_0) > 0$（若 $f''(x_0) < 0$，则我们考虑 $-f(x)$，完全类似）。我们定义新的函数

$$g(x) := f(x) - f'(x_0)x$$

则 $g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$，以及 $g''(x_0) = f''(x_0) > 0$. 因此，x_0 是函数 $g(x)$ 的严格极小值点。也就是说，存在 x_0 的邻域 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq (a,b)$，使得 $g(x) > g(x_0)$ 对任何满足 $0 < |x-x_0| < \varepsilon$ 的 x 都成立。记

$$M_- := g(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}) \qquad M_+ := g(x_0 + \frac{\varepsilon}{2})$$

则 M_- 与 M_+ 都大于 $g(x_0)$，从而 $\min\{M_-, M_+\} > g(x_0)$. 之后，分别在区间 $(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \frac{\varepsilon}{2})$ 当中对 $g(x)$ 使用连续函数介值原理，可知存在 $\xi \in (x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0)$ 以及 $\eta \in (x_0, x_0 + \frac{\varepsilon}{2})$，使得

$$g(\xi) = g(\eta) = \frac{\min\{M_-, M_+\} + f(x_0)}{2}$$

所以有

$$\frac{g(\xi)-g(\eta)}{\xi-\eta} = 0 = g'(x_0)$$

易验证上式等价于

$$\frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} = f'(x_0)$$

从而证毕。 □

习题 82. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微，并且存在常数 $a_1,a_2,b_1,b_2\,(a_1<a_2)$ 使得极限

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-a_1x-b_1\big),\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-a_2x-b_2\big)\tag{$*$}$$

都存在。证明，对任意 $a\in(a_1,a_2)$，存在 $\xi\in\mathbb{R}$，使得 $f'(\xi)=a$.

证明. 对任意 $a\in(a_1,a_2)$，取定 $\varepsilon>0$ 使得 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subseteq(a_1,a_2)$. 记 $(*)$ 中的两个极限值分别为 α,β. 由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-a_1x-b_1\big)=\alpha$，从而存在 $N_1>0$ 使得对任意 $x\le -N_1$ 都有 $|f(x)-a_1x-b_1-\alpha|<1$. 于是取 $x_2=-N_1$ 以及 $x_1=-N_1-\frac{3}{\varepsilon}$，则有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-a_1\right| &= \frac{\varepsilon}{3}\big|\big(f(x_2)-a_1x_2-b_1-\alpha\big)-\big(f(x_1)-a_1x_1-b_1-\alpha\big)\big|\\ &\le \frac{\varepsilon}{3}(1+1)<\varepsilon\end{aligned}$$

而另一方面由拉格朗日中值定理，存在 $\eta_1\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(\eta_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，也就是说存在 $\eta_1<0$ 使得 $|f'(\eta_1)-a_1|<\varepsilon$. 又因为 $a-\varepsilon>a_1$，从而 $f'(\eta_1)<a$.

同理，取足够大的正数 $0<y_1<y_2$，使得 $\left|\frac{f(y_2)-f(y_1)}{x_2-x_1}-a_2\right|<\varepsilon$，再由拉格朗日中值定理易知存在 $\eta_2>0$ 使得 $f'(\eta_2)>a$. 从而有 $f'(\eta_1)<a<f'(\eta_2)$，之后再利用导函数介值的 Darboux 定理即可。 □

习题 83. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 连续，在 $(0,a)$ 可导，其中 $a>0$, 并且 $f(0)=1,f(a)=0$. 证明：在 $(0,a)$ 内必存在两点 $x_1\neq x_2$ 使得 $f'(x_1)f'(x_2)=\frac{1}{a^2}$.

证明. 考虑函数 $g(x):=f(x)+\frac{1}{a}x-1$, 则 $g(x)$ 在闭区间 $[0,a]$ 连续，从而存在 $t_1,t_2\in[0,a]$ 使得 $g(x)$ 在 x_1,x_2 处分别取到最大、最小值. 此外 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 可导，且 $g(0)=g(1)=0$.

- 如果 $g(x)$ 为常函数，则易证。故不妨假设 $g(x)$ 不是常函数，此时必有 $x_t\neq t_2$, 并且 t_1,t_2 至少有一个落在开区间 $(0,a)$ 当中。
- 如果 $t_1\neq t_2$ 都落在 $(0,a)$ 当中，则 $g'(t_1)=g'(t_2)=0$, 从而 $f'(t_1)=f'(t_2)=-\frac{1}{a}$, 此时取 $x_1=t_1,x_2=t_2$ 即可。
- 如果 t_1,t_2 当中有一个落在 $[a,b]$ 的端点处，不妨为 t_2. 从而 $g(t_2)=0$, 因此 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 非负。此时 $t_1\in(a,b),g(t_1)>0,g'(t_1)=0$. 考虑函数

$$\varphi(x):=\begin{cases}\frac{g(t_1)-g(x)}{t_1-x} & x\neq t_1\\ 0 & x=t_1\end{cases},$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\varphi(0)>0,\varphi(a)<0$. 记 $\varepsilon:=\min\{\varphi(0),-\varphi(a)\}>0$, 取实数 $\alpha\in(-\frac{1}{a}-\varepsilon,-\frac{1}{a})$ 以及 $\beta\in(-\frac{1}{a},-\frac{1}{a}+\varepsilon)$ 使得 $\alpha\beta=\frac{1}{a^2}$. 对 $\varphi(x)$ 使用连续函数介值定理，存在 $y_1\in(0,t_1)$ 使得

$\varphi(y_1) = \beta + \frac{1}{a}$, 整理得 $\frac{f(t_1)-f(y_1)}{t_1-y_1} = \beta$. 再由拉格朗日中值定理，存在 $x_1 \in (y_1, t_1)$ 使得 $f'(x_1) = \beta$. 对区间 (t_1, a) 采用类似的操作（φ 的介值性以及拉格朗日中值定理）同理可得存在 $x_2 \in (t_1, a)$ 使得 $f'(x_2) = \alpha$. 显然 $x_1 < x_2$, 且 $f'(x_1)f'(x_2) = \frac{1}{a^2}$.

综上，证毕。 □

习题 84. 已知函数 $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 可微，常数 $a > 1$. 证明：存在趋于正无穷的非负数列 $\{x_n\}$, 使得对任意 $n \geq 1$ 都成立

$$f'(x_n) \leq f(ax_n).$$

证明. 反证法。若不然，存在 $N > 0$, 使得对任意 $x \geq N$ 都成立 $f'(x) > f(ax)$. 任意取定 $x > N$, 则由拉格朗日中值定理得到

$$f(ax) - f(x) = (a-1)xf'(\xi) > (a-1)xf(a\xi) \geq (a-1)xf(ax)$$

注意到 $f(a_x) > 0$, 从而当 $x > \frac{1}{a-1}$ 时上式不可能成立，从而产生矛盾。证毕。 □

习题 85. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，并且 $f(0) = f(1)$，给定常数 $\alpha \in (0,1)$. 在习题*47*中我们已经证明了存在 $x \in (0,1]$ 使得 $f(x) = f(\alpha x)$. 现在，若再假定 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 可导，并且对任意 $x \neq y \in (0,1)$ 成立 $f'(x) \neq \alpha f'(y)$. 证明：使得 $f(x) = f(\alpha x)$ 的 $x \in (0,1]$ 是唯一的。

证明. 反证法，假设存在 $x_1 \neq x_2 \in (0,1]$ 使得 $f(x_i) = f(\alpha x_i), (i = 1, 2)$. 不妨 $x_1 < x_2$.

- 如果 $x_1 \leq \alpha x_2$，则开区间 $(\alpha x_1, x_1)$ 与 $(\alpha x_2, x_2)$ 不交。由罗尔定理，取 $\eta_1 \in (\alpha x_1, x_1)$ 以及 $\eta_2 \in (\alpha x_2, x_2)$，使得 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$. 显然 $\eta_1 \neq \eta_2$，但是 $f'(\eta_1) = 0 = \alpha f'(\eta_2)$，从而与题设矛盾。
- 如果 $x_1 > \alpha x_2$，则有 $0 < \alpha x_1 < \alpha x_2 < x_1 < x_2 \leq 1$. 此时令 $f(x_i) = f(\alpha x_i) = A_i, (i = 1, 2)$，则由拉格朗日中值定理：

$$\begin{aligned} \exists \xi \in (x_1, x_2), \qquad f'(\xi) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{A_2 - A_1}{x_2 - x_1} \\ \exists \eta \in (\alpha x_1, \alpha x_2), \qquad f'(\eta) &= \frac{f(\alpha x_2) - f(\alpha x_1)}{\alpha x_2 - \alpha x_1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{A_2 - A_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

则 $\xi \neq \eta$，但是 $f'(\xi) = \alpha f'(\eta)$，从而与题设矛盾。

综上证毕。 □

习题 86. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$. 证明：存在 $\xi\in[0,1]$ 以及 $\eta\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$$

证明. 令 $g(x):=f(x)-\frac{1}{2}x$，则 $g(0)=g(1)=0$. 我们只需要证明：存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得

$$g(\xi)-\frac{1}{2}\xi=\eta-g'(\eta)-\frac{1}{2}.$$

- 如果存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $-\frac{1}{2}<\eta-g'(\eta)-\frac{1}{2}<0$，则注意到 $g(0)-\frac{1}{2}\cdot 0=0$ 以及 $g(1)-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}$，从而对连续函数 $x\mapsto g(x)-\frac{1}{2}x$ 使用介值原理即可找到满足题设的 ξ.
- 如果 Case1 不成立，那么只可能有以下两种情况：

$$\begin{cases}\forall x\in(0,1),\ x-g'(x)-\frac{1}{2}\le-\frac{1}{2} & (2.1)\\ \forall x\in(0,1),\ x-g'(x)-\frac{1}{2}\ge 0 & (2.2)\end{cases}$$

如果 (2.1) 成立，即 $g'(x)\ge x$ 对任意 $x\in(0,1)$ 成立；但是另一方面对 $g(x)$ 使用罗尔定理，存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $g'(x_0)=0<x_0$，产生矛盾，即 (2.1) 不可能发生。
若 (2.2) 成立，即 $g'(x)\le x-\frac{1}{2}$ 对任意 $x\in(0,1)$ 成立，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x)-\frac{x^2-x}{2}\right)\le 0\qquad\Rightarrow\qquad g(x)\le\frac{x^2-x}{2}$$

特别地 $g(1)\le\frac{1^2-1}{2}=0$. 又因为 $g(0)=0$，上述不等式取到等号迫使 $g(x)=\frac{x^2-x}{2}$. 此时取 $\xi=0$，任取 $\eta\in(0,1)$ 即可满足题设。

综上，证毕。 □

习题 87. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 二阶可导，$f(0)=f'(0)$，并且 $f(\frac{1}{2})=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$，使得

$$f''(\xi)=\frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$$

证明. 考虑函数

$$g(x):=(1-2x)f'(x)-f(x)$$

则 $g(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 可导，并且 $g(0)=f'(0)-f(0)=0$ 以及 $g(\frac{1}{2})=0\times f'(0)-f(\frac{1}{2})=0$. 从而由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$ 使得 $g'(\xi)=0$，即 $-2f'(\xi)+(1-2\xi)f''(\xi)-f'(\xi)=0$，整理得

$$f''(\xi)=\frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$$

□

习题 88. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，并且 $f(0)=0, f(1)=1$. 又设 $k_1,k_2,...,k_n$ 是任意 n 个正实数。证明：存在 $(0,1)$ 当中的 n 个互不相同的数 $t_1,t_2,...,t_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(t_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

证明. 对于 $1\le i\le n$, 记 $s_i:=k_1+k_2+\cdots+k_i$, 再记 $s:=s_n=k_1+k_2+\cdots+k_n$. 再记 $y_i:=\frac{s_i}{s}$, 并特别规定 $y_0=0$. 则有

$$0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=1$$

为闭区间 $[0,1]$ 的一个分割，注意到 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0, f(1)=1$, 从而反复使用连续函数介值定理，易知存在 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$, 使得 $f(x_i)=y_i$ 对每个 $0\le i\le n$ 都成立。现在，对任意 $1\le i\le n$, 由 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的拉格朗日中值定理，存在 $t_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使得 $f'(t_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$, 整理得

$$x_i-x_{i-1}=\frac{1}{s}\cdot\frac{k_i}{f'(t_i)}$$

上式两边对 i 从 1 到 n 求和，整理得到 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(t_i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$, 从而证毕。 □

习题 89. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，并且对任意 $x\in[0,1]$ 成立 $|f''(x)|\le A$，其中 A 为常数。证明：

$$|f'(x)|\le\frac{A}{2},\quad \forall x\in[0,1]$$

证明. 对于任意 $x\in[0,1]$，分别将 $f(1)$ 与 $f(0)$ 在 x 处作泰勒展开，有

$$\begin{aligned} f(1) &= f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(1-x)^2 \\ f(0) &= f(x)+f'(x)(-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(-x)^2 \end{aligned}$$

其中 $\xi\in[x,1]$ 以及 $\eta\in[0,x]$. 将以上两式相减，注意 $f(0)=f(1)$，整理得

$$f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\eta)(-x)^2=0$$

因此有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \frac{1}{2}\Big|f''(\xi)(1-x)^2-f''(\eta)x^2\Big|\le\frac{1}{2}\Big(|f''(\xi)|(1-x)^2+|f''(\eta)|x^2\Big) \\ &\le \frac{A}{2}((1-x)^2+x^2)\le\frac{A}{2} \end{aligned}$$

□

习题 90. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 二阶可导，并且 $f''(x)$ 有界。证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. 此外，如果去掉“$f''(x)$ 有界”的条件，那么要证明的结论还一定成立吗？

证明. 由于 $f''(x)$ 有界，从而存在 $M>0$，使得 $|f''(x)|\le M$ 对任意 $x\ge 0$ 成立。对任意 $\varepsilon>0$，记 $h:=\frac{2\varepsilon}{3M}$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，因此存在 $N>0$，使得对任意 $x>N$ 都成立 $|f(x)|\le\frac{h}{3}\varepsilon$. 因此对于任意 $x>N$，由泰勒公式得

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(\xi)$$

其中 $\xi\in(x,x+h)$. 因此有

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left|\frac{1}{h}\Big(f(x+h)-f(x)\Big)-\frac{1}{2}hf''(\xi)\right| \\
&\le \frac{1}{h}\Big(|f(x+h)|+|f(x)|\Big)+\frac{1}{2}h|f''(\xi)| \\
&\le \frac{1}{h}\left(\frac{h}{3}\varepsilon+\frac{h}{3}\varepsilon\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\varepsilon}{3M}M \\
&= \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon
\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

如果去掉条件“$f''(x)$ 有界”的条件，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ 未必成立。例如考虑函数

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\sin(x^2)$$

容易验证 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 二阶可导，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，但是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在。 □

习题 91. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近二阶连续可导，并且 $f(0)=f'(0)=0$, 以及对定义域中的任意 x 都成立

$$|f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|$$

证明：存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 内恒为 0.

证明. 对任意 x, 由泰勒公式的拉格朗日余项可知，存在位于 x 与 0 之间的 ξ,η, 使得

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \\
f'(x) &= f'(0)+f''(\eta)x=f''(\eta)x
\end{aligned}$$

取（足够小的）$\delta>0$ 使得 $[-\delta,\delta]$ 在 $f(x)$ 的定义域内，并且 $\delta=\frac{1}{4}$. 注意到 $x\mapsto|f(x)|+|f'(x)|$ 在闭区间 $[-\delta,\delta]$ 连续，从而能取到最大值。取 $x_0\in[-\delta,\delta]$ 使得

$$M:=|f(x_0)|+|f'(x_0)|=\max\Big\{|f(x)|+|f'(x)|\,\Big|\,-\delta\le x\le\delta\Big\}$$

注意到对任意 $x \in [-\delta, \delta]$ 都有 $|f''(x)| \le |f(x)| + |f'(x)| \le M$. 从而成立

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}|f''(\xi_0)|x_0^2 + |f''(\eta_0)|x_0 \le \frac{1}{4}\left(|f''(\xi_0)| + |f''(\eta_0)|\right) \\ &\le \frac{1}{4}(M+M) = \frac{1}{2}M \end{aligned}$$

这迫使 $M = 0$, 从而由 M 的定义立刻得到 $f(x)$ 在 $[-\delta, \delta]$ 恒为 0. □

注记

如果 $f(x)$ 的定义域是连通的（例如定义在 $\mathbb{R}$ 上），则还能推出 f 在其定义域内恒为零，不仅仅是在 $x = 0$ 的小邻域内。

习题 92. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 二阶可导，并且成立

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 2,$$

（1）证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = 0$；

（2）证明：存在 $\eta \in (0,1)$，使得 $f(\eta) = f''(\eta)$.

证明. 首先注意 $f(x)$ 在 $x = 0, 1$ 连续，从而容易知道 $f(0) = f(1) = 0$，以及 $f'(0) = 1, f'(1) = 2$. 再由洛必达法则，$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$，从而 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续。同理 $f'(x)$ 也在 $x = 1$ 连续。又因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 二阶可导，所以综上可知 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 连续。

(1) 由极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$ 的定义可知，存在 $0 < \delta < 1$，使得对任意 $x \in (0, \delta)$，都有 $f(x) > \frac{1}{2}x$. 特别地，存在 $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$，使得 $f(x_1) > 0$. 同理由 $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ 可知，存在 $x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$，使得 $f(x_2) < 0$. 因此由连续函数介值原理，存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0,1)$，使得 $f(\xi) = 0$.

(2) 反证法。如果不存在 $\eta \in (0,1)$ 使得 $f(\eta) = f''(\eta)$，则由 f'' 与 f 的介值性可知，要么 $f''(x) > f(x)$ 在 $(0,1)$ 恒成立，要么 $f''(x) < f(x)$ 在 $(0,1)$ 恒成立。

(2.1) 如果 $f''(x) > f(x)$，则由之前所述的 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性可知存在（$x = 0$ 附近的）$y_1 \in (0,1)$，使得 $\begin{cases} f(y_1) > 0 \\ f'(y_1) > 0 \end{cases}$. 考虑集合

$$\mathcal{S} := \left\{ x \in [y_1, 1] \,\middle|\, f(t) \ge f(y_1), \forall t \in [y_1, x] \right\}$$

则由 $f(x)$ 的连续性，$\mathcal{S}$ 为 $[y_1, 1]$ 的闭子集。又 $y_1 \in \mathcal{S}$，从而 $\mathcal{S}$ 非空。

再断言 $\mathcal{S}$ 是 $[y_1, 1]$ 的开子集。对于任意 $x \in \mathcal{S}$（不妨 $x \ne 1$），则 $f(t) \ge f(y_1) > 0$ 在 $[y_1, x]$ 成立，又因为 $f'' > f$，从而 $f''(t) > f(t) > 0$ 在 $[y_1, x]$ 成立，从而 $f'(t)$ 在 $[y_1, x]$ 单调递增，特别地 $f'(x) \ge f'(y_1) > 0$. 从而存在 $\delta > 0$，使得 $f(t) \ge f(x) \ge f(y_1)$ 在 $t \in [x, x+\delta)$ 成立。这就证

明了 $\mathcal{S}$ 为 $[y_1,1]$ 的开子集。从而 $\mathcal{S}$ 非空，且在 $[y_1,1]$ 中既开又闭，因此由 $[y_1,1]$ 的连通性，必有 $\mathcal{S}=[y_1,1]$，特别地 $1\in\mathcal{S}$，从而 $f(1)\geq f(y_1)>0$，与 $f(1)=0$ 矛盾。

(2.2) 如果 $f''(x)<f(x)$ 在 $(0,1)$ 成立，则由 f' 在 $x=1$ 的连续性，存在（$x=1$ 附近的）$y_2\in(0,1)$，使得 $\begin{cases} f(y_2)<0 \\ f'(y_2)>0 \end{cases}$. 与上一种情况类似，考虑集合

$$\mathcal{T}:=\left\{x\in[0,y_2]\middle|f(t)\leq f(y_2),\ \forall t\in[x,y_2]\right\}$$

完全类似的方法可说明 $\mathcal{T}=[0,y_2]$，从而 $0\in\mathcal{T}$，从而 $f(0)\leq f(y_2)<0$，与 $f(0)=0$ 矛盾。

以上矛盾可知，必存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f(\eta)=f''(\eta)$，从而证毕。 □

注记

这种做法适用于一般的 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=A>0 \\ \lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=B>0 \end{cases}$ 的情形，而此题是 $A=1,B=2$ 的特例。对于 $A=1,B=2$ 的特殊情形（事实上是 $\frac{B}{e}<A<Be$ 的情形），我们有**奇技淫巧**的做法如下：

第（2）问的另证. 取辅助函数 $\begin{cases} g(x):=e^{-x}(f(x)+f'(x)) \\ h(x):=e^{x}(f(x)-f'(x)) \end{cases}$，则由之前论述已知 g 与 h 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导。如果存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $g'(\eta)=0$ 或者 $h'(\eta)$=0，那么如此的 η 即为所求。现在，采用反证法，假设对任意 $x\in(0,1)$，$g'(x)\neq0$ 且 $h'(x)\neq0$。

由于对任意 $x\in(0,1)$，$g'(x)=e^{-x}(f''(x)-f(x))\neq0$，则由导函数的介值性，$g'(x)$ 恒正或者恒负。由拉格朗日中值定理，存在 $y_1\in(0,1)$ 使得 $g'(y_1)=g(1)-g(0)=\frac{2}{e}-1<0$，因此 $g'(x)<0$ 在 $(0,1)$ 成立，从而得出 $f''(x)<f(x)$ 在 $(0,1)$ 成立。类似地，由于对任意 $x\in(0,1)$，$h'(x)=e^{x}(f(x)-f''(x))\neq0$，注意 $h(1)-h(0)=(-2e)-(-1)<0$，从而必有 $h'(x)$ 在 $(0,1)$ 恒负，这表明 $f(x)<f''(x)$ 在 $(0,1)$ 成立。

因此得出对任意 $x\in(0,1)$，$f''(x)<f(x)$ 且 $f(x)<f''(x)$，这是自相矛盾的。从而证毕。 □

习题 93. 已知 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且 $g(a)=0$. 设 $\lambda\neq0$ 为常数，使得

$$|g(x)f(x)+\lambda g'(x)|\leq|g(x)|,\qquad\forall x\in[a,b].$$

证明：$g(x)\equiv0$.

证明. 考虑函数 $h(x):=e^{\frac{1}{\lambda}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}g(x)$, 则 $h(a)=0$, 并且对任意 $x\in[a,b]$ 都有

$$|h'(x)|=\frac{1}{\lambda}e^{\frac{1}{\lambda}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}\left|f(x)g(x)+\lambda g'(x)\right|\leq\frac{1}{|\lambda|}e^{\frac{1}{\lambda}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}|g(x)|=\frac{1}{|\lambda|}|h(x)|$$

从而对任意 $x \in [a,b]$, 如果 $x-a<\frac{|\lambda|}{2}$, 设 $|h(c)|$ 为 $|h(x)|$ 在 $[a,x]$ 之中的最大值，其中 $c \in [a,x]$. 于是有

$$|h(c)| = |h(c)-h(0)| = (c-a)|h'(\xi)| \le \frac{|\lambda|}{2}\cdot\frac{1}{|\lambda|}|h(\xi)| \le \frac{1}{2}|h(c)|$$

这迫使 $|h(c)|=0$, 从而函数 h 在 $[a,a+x]$ 上恒为 0. 反复运用上述方法，不难归纳证明 h 在 $[a,b]$ 恒为 0, 之后立刻得到 $g(x)\equiv 0$. □

习题 94. （线性插值及其误差估计）

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的二阶连续可微函数。考虑一次函数 $\varphi(x)$,使得其图像为连接 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 两点的线段。证明：对任意 $x\in(a,b)$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi).$$

进而得到，对任意 $x\in[a,b]$，有误差估计

$$|f(x)-\varphi(x)| \le \frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le t\le b}|f''(t)|.$$

证明. 记 $R(x):=f(x)-\varphi(x)$，则由 $\varphi(x)$ 的性质容易得到 $R(a)=R(b)=0$. 现在，固定 $x\in(a,b)$，考虑关于 t 的函数

$$\psi(t):=R(t)-R(x)\frac{(t-a)(t-b)}{(x-a)(x-b)}$$

则 $\psi(a)=\psi(x)=\psi(b)=0$. 反复使用罗尔定理，可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\psi''(\xi)=0$；而注意一次函数 $\varphi(t)$ 的二阶导数为零，因此整理得

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi)$$

取绝对值，再使用均值不等式，容易得到

$$|f(x)-\varphi(x)| \le \frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le t\le b}|f''(t)|$$

□

习题 95. （二次插值与一般的 *Lagrange* 插值公式）给定 $\mathbb{R}$ 上的三个点 $x_0 < x_1 < x_2$，

（1）试构造二次多项式函数 φ_i，使得 $\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ 对任意 $i, j = 0, 1, 2$ 都成立。如此 $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ 构成二次多项式函数空间的一组基，俗称**插值基**；

（2）对任意实数 a_1, a_2, a_3，试构造二次多项式函数 $\varphi(x)$，使得 $\varphi(x_i) = a_i\ (i = 0, 1, 2)$.（提示：把 $\varphi(x)$ 写成 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 的线性组合）；

（3）试将上述想法推广：给定 n 个实数 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$，以及 $a_0, a_1, ..., a_n$，试构造一个 n 次多项式函数 $\varphi(x)$，使得 $\varphi(x_i) = a_i$ 对任意 $i = 0, 1, ..., n$ 成立。

解.（1）（2）只需要取 $\begin{cases} \varphi_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ \varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{cases}$，容易验证满足题意。之后取 $\varphi(x) := a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x)$.

（3）一般地，给定 n 个插值点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$，定义

$$\varphi_i(x) := \frac{\prod\limits_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (x - x_k)}{\prod\limits_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (x_i - x_k)} \qquad (0 \leq i \leq n)$$

则显然对任意 $i, j = 0, 1, 2, ..., n$，φ_i 为 n 次多项式函数，并且显然 $\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. 之后令

$$\varphi(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

则显然 $\varphi(x_i) = a_i$. □

注记

此题表明，对 $\mathbb{R}$ 上任意给定的 n 个点，都存在 $n+1$ 次多项式，使得该多项式在每个点处取到给定的值。第（3）问的 $\varphi(x)$ 的表达式称为 **Lagrange 插值公式**。特别地，使用此公式可以暴力破解一切“找规律填数”问题，从而证明小学奥数的傻逼性：

例子 3.5.1. 找规律填数：

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 8,\quad \underline{?}$$

解. 问号处应该填 23333，这是因为我们可以构造 6 次插值多项式 $\varphi(x)$，使得 $\varphi(x)$ 在 $x=1,2,3,4,5,6,7$ 处的取值分别为 $1,1,2,3,5,8,23333$；因此题中数列的规律是：第 n 个数字为 $\varphi(n)$. □

事实上，问号处填任何数，我们都可以将其中的“规律”自圆其说，而且多项式函数似乎并不超出小学生的理解范围。

习题 96. （二次插值的误差估计）

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的三阶连续可微函数，$x_0<x_1<x_2$ 为 $[a,b]$ 中的三个点。取二次多项式函数 $\varphi(x)$，使得 $\varphi(x_i)=f(x_i)$ 对任意 $i=0,1,2$ 成立。记 $R(x):=f(x)-\varphi(x)$. 证明：对任意 $x\in[a,b]$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$R(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

特别地，对任意 $x\in[a,b]$ 都有

$$|R(x)|\le\frac{(b-a)^3}{6}\max_{a\le x\le b}|f'''(x)|.$$

证明. 与线性插值（习题94）的做法完全类似。对于任意给定的 $x\in[a,b]$（不妨 x 不等于 x_0,x_1,x_2），考虑关于 t 的函数

$$\psi(t):=R(t)-\frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_2)}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}R(x)$$

则 x_0,x_1,x_2,x 是 $\psi(t)$ 的四个不同的零点；反复使用罗尔定理可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\psi'''(\xi)=0$. 注意到 $R(x)=f(x)-\varphi(x)$，而 $\varphi(x)$ 作为二次多项式函数，其三阶导数为零，因此 $R'''(x)=f'''(x)$。从而将 $\psi'''(\xi)=0$ 整理可得

$$R(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

□

习题 97. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,d]$ 三阶连续可微，证明：对任意 $a<b<c<d$，存在 $\xi\in(a,d)$，使得

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}f'''(\xi) &= \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)(b-d)}\\ &\quad+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{f(d)}{(d-a)(d-b)(d-c)}.\end{aligned}$$

证明. 考虑插值多项式

$$\begin{aligned}\varphi(x) := &\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)(a-d)}(x-b)(x-c)(x-d)+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)(b-d)}(x-a)(x-c)(x-d)\\ &+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)(c-d)}(x-a)(x-b)(x-d)+\frac{f(d)}{(d-a)(d-b)(d-c)}(x-a)(x-b)(x-c)\end{aligned}$$

则 $\varphi(a)=f(a),\varphi(b)=f(b),\varphi(c)=f(c),\varphi(d)=f(d)$，也就是说 a,b,c,d 是函数 $\varphi-f$ 的四个不同零点，从而反复使用罗尔定理可知存在 $\xi\in(a,d)$ 使得 $\varphi'''(\xi)=f'''(\xi)$，而 $\varphi'''(\xi)$ 容易直接计算出来。易知该 ξ 即为所求。 □

习题 98. 设 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 是 n 个互不相同的常数，$C_1,C_2,...,C_n$ 为 n 个不全为零的常数。

证明：函数

$$f(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+C_ne^{\lambda_n x}$$

至多有 $n-1$ 个零点。

证明. 对 n 归纳。当 $n=1$ 时显然成立。如果此命题对 n 成立（$n\geq 1$），则对于 $n+1$ 的情形，若 x_0 使得

$$f(x):=\sum_{k=1}^{n+1}C_ke^{\lambda_k x}=0$$

不妨 $C_{n+1}\neq 0$, 则上式整理得

$$g(x):=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{C_{n+1}}e^{(\lambda_k-\lambda_{n+1})x}=0$$

用反证法，如果 $f(x)$ 有多于 n 个零点，则上述 $g(x)$ 也有多于 n 个零点，记 $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n$ 为 $g(x)$ 的 $n+1$ 个零点，则对 $g(x)$ 在每个区间 $[x_{k-1},x_k]$ 当中使用罗尔定理，可知 $g'(x)$ 有多于 $n-1$ 个零点。

但是另一方面，

$$g'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{C_{n+1}}(\lambda_k-\lambda_{n+1})e^{(\lambda_k-\lambda_{n+1})x}$$

若对每个 $1 \le k \le n$, 记 $C_k' := \frac{C_k}{C_{n+1}}(\lambda_k - \lambda_{n+1})$ 以及 $\lambda_k' := \lambda_k - \lambda_{n+1}$, 则 C_k' 仍然不全为零，λ_k' 仍然互不相同。从而由归纳假设知 $g'(x)$ 至多有 $n-1$ 个零点。这就与 $g'(x)$ 有多于 $n-1$ 个零点矛盾。从而 $f(x)$ 至多有 n 个零点。 □

3.6 用导数研究函数的性质

> **习题** 99. 对于正整数 m, n，求函数 $f(x) := \sin^m x \cos^n x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值。

解. 直接对 $f(x)$ 求导得

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= m\sin^{m-1} x\cos^{n+1} x - n\sin^{m+1} x\cos^{n-1} x \\
&= \sin^{m-1} x\cos^{m-1} x(m\cos^2 x - n\sin^2 x)
\end{aligned}
$$

令 $f'(x) = 0$，解得驻点 $x_0 = \arctan\sqrt{\frac{m}{n}}$. 容易验证 $f'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 为正，在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 为负，从而 x_0 是 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上（唯一的）极大值点，从而为最大值点。容易得到

$$
\begin{aligned}
\sin x_0 &= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+n}} \\
\cos x_0 &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+n}} \\
\Rightarrow \quad \max_{0\le x\le \frac{\pi}{2}} f(x) &= f(x_0) = \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{(m+n)^{\frac{m+n}{2}}}
\end{aligned}
$$

□

> **习题** 100. 求平面曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上的点 A，使得该曲线在点 A 处的法线被该曲线所截得线段的长度最短。

证明. 对于曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上的一点 $A : (x_0, \frac{1}{2}x_0^2)$，由关于 y 轴的对称性，不妨 $x_0 > 0$. 容易求出该曲线在 A 处的法线 ℓ 的方程为

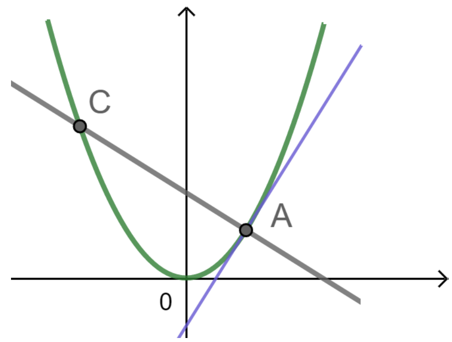
$$
y - \frac{1}{2}x_0^2 = -\frac{1}{x_0}(x - x_0)
$$

记 ℓ 与该曲线的另一个交点为 $C : (x_1, y_1)$，则联立曲线方程与法线 ℓ 的方程，可知 x_1 满足方程

$$
x^2 + \frac{2}{x_0}x - (x_0^2 + 2) = 0
$$

此方程的两个根为 x_0 与 x_1，由韦达定理有 $x_0 + x_1 = -\frac{2}{x_0}$，从而点 C 的横坐标 $x_1 = -\frac{2}{x_0} - x_0$. 从而线段 AC 的长度

$$
l(x_0) = |x_1 - x_0|\sqrt{1 + \frac{1}{x_0^2}} = 2\sqrt{1 + x_0^2}\left(1 + \frac{1}{x_0}\right)
$$



习题100示意图

只需求 $x_0>0$ 时 $l(x_0)$ 的最小值点。求导得

$$l'(x_0)=2\left(\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}\frac{1+x_0^2}{x_0^2}-2\frac{\sqrt{1+x_0^2}}{x_0^3}\right)=\frac{2\sqrt{1+x_0^2}}{x_0^3}(x_0^2-2)$$

从而 $x_0=\sqrt{2}$ 为驻点，且易验证为 $x_0>0$ 当中的最小值点。因此 $(\sqrt{2},1)$ 为所求；由对称性，$(-\sqrt{2},1)$ 也为所求。因此 A 的坐标为 $(\pm\sqrt{2},1)$. □

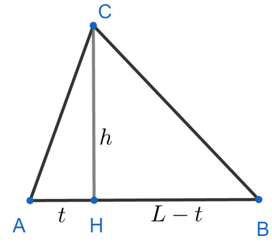
习题 101. 对于 $p>0$，试求周长为 $2p$ 的三角形，使得它绕其给定的一条边旋转所得的旋转体体积最大。

解. 设三角形三边分别为 a,b,c，其中 $a,b,c\geq 0, a+b+c=2p$；该旋转体的体积视为定义在 $\mathbb{R}^3$ 的紧子集 $\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\middle|a,b,c\geq 0,\ a+b+c=2p\right\}$ 上的连续函数，故最大值必存在且必能取到。

如果三角形 $\triangle ABC$ 满足题设，绕 AB 边旋转所得旋转体的体积 V 取最大，记 $|AB|=L$，边 AB 的高为 h，则 $V=\frac{1}{3}\pi h^2 L$.

引理 1：给定 $L,h>0$，则以 L 为底以 h 为高的三角形的周长取到最小值当且仅当该三角形是以 L 为底边的等腰三角形。

这是因为，如下图所示，



设 $AH = t$，则此三角形的周长 $C(t) = L + \sqrt{t^2 + h^2} + \sqrt{(L-t)^2 + h^2}$，对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+h^2}} - \frac{L-t}{\sqrt{(L-t)^2+h^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(t) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \frac{L}{2}$$

容易验证驻点 $t = \frac{L}{2}$ 为最小值点，从而引理 1 证毕。

引理 2： 设 $\triangle ABC$ 是满足本题要求的三角形，使得绕 AB 边旋转所得旋转体体积 V 最大，那么必有 $|CA| = |CB|$（即 $\triangle ABC$ 是以 AB 为底边的等腰三角形）。

这是因为，假如 $\triangle ABC$ 不是以 AB 为底边的等腰三角形，记 $|AB| = L$，AB 边的高为 h，我们考虑底边长为 L、对应的高为 h 的**等腰**三角形 $\triangle A'B'C'$，则由引理 1 可知 $\triangle A'B'C'$ 的周长严格小于 $\triangle ABC$ 的周长 $2p$. 但是这两个三角形所得到的旋转体体积相等（因为同底等高）。于是就出问题了：取一个与 $\triangle A'B'C'$ 相似的三角形 $\triangle A''B''C''$，使得该三角形的周长 $= 2p$（即，把 $\triangle A'B'C'$ 适当地按比例放大），那么 $\triangle A''B''C''$ 绕边 $A''B''$ 旋转得到的旋转体体积必然 $> V$，这就与 V 的最大性矛盾。

Step3: 有了引理 2，我们的计算就方便多了。设 $|AB| = 2t$，则 $|CA| = |CB| = p - t$，高 $h = \sqrt{(p-t)^2 - t^2}$. 于是

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot 2t = \frac{4}{3}\pi p(\frac{1}{2}p - t)t \le \frac{4}{3}\pi p(\frac{p}{4})^2 = \frac{1}{12}\pi p^3$$

等号成立当且仅当 $\frac{1}{2}p - t = t$，即 $t = \frac{p}{4}$. 此时 $\triangle ABC$ 的三边长度为 $\frac{\partial}{2}, \frac{3}{4}p, \frac{3}{4}p$，该旋转体体积最大值 $V = \frac{1}{12}\pi p^3$. □

注记

当然也可以用条件极值的拉格朗日乘子法直接做。但事实上用不着如此惊天动地，高中知识就解决了。

习题 102. 求最小的实数 C, 使得对任何实数 x 都成立

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \le e^{Cx^2}$$

解. 一方面，假设实数 C 满足题设，则考虑函数 $F(x) := e^{Cx^2} - \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, 则恒有 $F(x) \ge 0$. 注意到 $F(0) = F'(0) = 0$, 从而必有 $F''(0) \ge 0$, 即

$$0 \le \left((4C^2x^2 + 2C)e^{Cx^2} - \frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\bigg|_{x=0} = 2C - 1$$

从而得到 $C \geq \frac{1}{2}$.

另一方面，如果 $C = \frac{1}{2}$, 我们断言 $e^{\frac{1}{2}x^2} \geq \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 对任意实数 x 都成立。事实上，注意两边都为偶函数，从而只需证明上式对任意 $x \geq 0$ 成立。这只需证明：

$$\frac{1}{2}x^2 \geq \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 \qquad (\forall x \geq 0)$$

上式两边视为关于 x 的函数。注意到当 $x = 0$ 时上式两边相等，从而对上式两边求导，只需证明：

$$x \geq \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad \text{整理得} \quad \frac{1}{1+e^{2x}} \geq \frac{1}{1-x}$$

为了证明 $\frac{1}{1+e^{2x}} \geq \frac{1}{1-x}$, 注意到此式两边在 $x = 0$ 时相等，从而两边求导，只需证明 $\frac{-2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \geq -\frac{1}{2}$, 而这等价于 $(e^{2x} - 1)^2 \geq 0$, 从而证毕。综上所述，满足题设的最小实数 C 为 $\frac{1}{2}$. □

习题 103. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导，$f(0) < 0$，并且 $f''(x) > 0$ 恒成立。

（1）证明：$f(x)$ 至多有 2 个不同零点，至少有一个零点；

（2）证明：如果 $f(x)$ 恰有两个不同零点 $x_1 < x_2$，则 $x_1x_2 < 0$.

证明. 易知 $f'(x)$ 严格单调递增，$f(x)$ 为凸函数。

（1）先证明 $f(x)$ 至少有一个零点。如果 $f'(0) \geq 0$，则由 $f(0) < 0$ 以及 f 的连续性可知，存在足够小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $f(\varepsilon) < 0$，再由由 f' 的严格单调性立刻得到 $f'(\varepsilon) > 0$. 从而对与任意 $x > \varepsilon$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x) = f(\varepsilon) + (x - \varepsilon)f'(\xi) \geq f(\varepsilon) + (x - \varepsilon)f'(\varepsilon)$$

注意 $f'(\varepsilon) > 0$，从而由上式知当 x 充分大时必有 $f(x) > 0$，然而 $f(0) < 0$，从而由连续介值原理知 f 在 $(0, x)$ 当中必有零点。如果 $f'(x) < 0$，类似方法可以证明当 x 足够接近 $-\infty$ 时 $f(x) > 0$，之后再用连续介值。

再证明 $f(x)$ 至多由两个零点。否则，若 $a < b < c$ 为 $f(x)$ 的三个不同零点，则反复使用罗尔定理，存在 $\eta_1 \in (a, b)$ 以及 $\eta_2 \in (b, c)$ 使得 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$，从而存在 $\eta_3 \in (\eta_1, \eta_2)$ 使得 $f''(\eta_3) = 0$，与 $f''(x)$ 恒正矛盾。

（2）反证法，如果 $x_1x_2 > 0$，不妨它们同为正（同为负的情形类似），由凸函数的性质可知 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 取值为负，从而易知 $f'(x_1) < 0$（用拉格朗日中值定理与 f' 的单调性），因此 $\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1} = f'(\xi) < f'(x_1) < 0$，推出 $f(0) > 0$，这就与 $f(0) < 0$ 矛盾。 □

第四章 一元积分学

4.1 不定积分的计算

习题 104. 计算不定积分

$$\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

证明. 考虑换元 $x=t^3$，从而有

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x &= \int e^t\,\mathrm{d}(t^3)=3\int t^2\,\mathrm{d}e^t=3\left(t^2e^t-\int e^t\,\mathrm{d}t^2\right)\\&=3t^2e^t-6\int t\,\mathrm{d}e^t=3t^2e^t-6\left(te^t-\int e^t\,\mathrm{d}t\right)\\&=(3t^2-6t+6)e^t+C\\&=(3x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+6)e^{\sqrt[3]{x}}+C\end{aligned}$$

□

习题 105. 计算不定积分：

$$\int \cos 2x\cos 3x\cos 4x\,\mathrm{d}x$$

解. 注意使用三角函数的积化和差公式 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$，从而有

$$\begin{aligned}\int \cos 2x\cos 3x\cos 4x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos x)\cos 4x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int(\cos 9x+\cos x+\cos 5x+\cos 3x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{36}\sin 9x+C\end{aligned}$$

□

习题 106. 计算不定积分：

$$\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 考虑换元 $u=\sqrt{x-1}$，有

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u\arctan u}{u^2+1}2u\,\mathrm{d}u\\ &= 2\int \arctan u\,\mathrm{d}u - 2\int \frac{\arctan u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\\ &= 2\left(u\arctan u - \int \frac{u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\right) - \arctan^2 u + C\\ &= 2u\arctan u - \ln|u^2+1| - \arctan^2 u + C\\ &= 2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1} - \ln|x| - \arctan^2\sqrt{x-1} + C\end{aligned}$$

□

习题 107. 计算不定积分：

$$\int x\arctan x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$$

解. 我们首先注意到

$$\begin{aligned}\int x\arctan x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \arctan x\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\left(x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2}[(1+x^2)\arctan x - x] + C\end{aligned}$$

注意利用上述结果，我们有

$$\begin{aligned}&\int x\arctan x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x\\ =\ & \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}[(1+x^2)\arctan x - x]\\ =\ & \frac{1}{2}\left([(1+x^2)\arctan x - x]\ln(1+x^2) - \int\left(2x\arctan x - \frac{2x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right)\\ =\ & \frac{(1+x^2)\arctan x - x}{2}\ln(1+x^2) - \int x\arctan x\,\mathrm{d}x + \int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ =\ & \frac{(1+x^2)\arctan x - x}{2}[\ln(1+x^2)-1] + x - \arctan x + C\end{aligned}$$

□

习题 108. 计算不定积分：

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{1-2\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$$

解. 注意到 $(\cos x-\sin x)^2=1-2\sin x\cos x$，从而

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos x-\sin x}{1-2\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=x-\frac{\pi}{4}} -\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\sin u}{1-\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{1-\cos^2 u}\,\mathrm{d}\cos u=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1+\cos u}{\sin u}\right|+C\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}\right|+C\end{aligned}$$

□

4.2 定积分的计算

习题 109. 用定积分的定义证明 *Dirichlet* 函数

$$D(x):=\begin{cases}1 & 若\ x\ 是有理数\\ 0 & 若\ x\ 是无理数\end{cases}$$

在闭区间 $[0,1]$ 上不可积。

证明. 注意到函数 $D(x)$ 的值域为 $\{0,1\}$，并且满足性质：对任何开区间 $(a,b)\subseteq[0,1]$，存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $D(\xi)=0$ 以及 $D(\eta)=1$（也就是说函数值为 $0,1$ 的点都在定义域中稠密）。

注意到对区间 $[0,1]$ 的任何一个划分

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1$$

则对任意 $k=1,2,...,N$，总可以在 (x_{k-1},x_k) 当中取一点 ξ_k，使得 $D(\xi_k)=0$，于是有

$$\sum_{k=0}^{N}(x_k-x_{k-1})D(\xi_k)=0$$

于是由定积分的定义可知，如果 $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则必有 $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x=0$. 但是另一方面，同样也总可以在 (x_{k-1},x_k) 当中取标记点 η_k 使得 $D(\eta_k)=1$，因此

$$\sum_{k=0}^{N}(x_k-x_{k-1})D(\eta_k)=\sum_{k=0}^{N}(x_k-x_{k-1})\cdot 1=1$$

从而推出：如果 $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则必有 $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x=1$.

综上，如果 $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则 $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x=0$ 并且 $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x=1$，自相矛盾。因此 $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x$ 不存在，即 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 不可积。 □

习题 110. 回顾我们在习题43当中定义的 $[0,1]$ 上的函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{若} x=\frac{p}{q}\text{，其中 } p \text{ 与 } q \text{ 为互素的整数，且} q\geq 0\\ 0 & \text{若 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

请用定积分的定义直接证明：$R(x)$ 在 $[0,1]$ 上是可积的，并且

$$\int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x=0$$

证明. 对任意 $\varepsilon>0$，注意到集合 $A:=\left\{x\in[0,1]\middle|R(x)\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ 是有限集，记 A 的元素个数为 N，取 $\delta:=\frac{\varepsilon}{2N}$。则对于 $[0,1]$ 的任何带标记点的分割

$$(\pi,\xi):0=x_0<x_1<\cdots<x_M=1$$
$$\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ \forall 1\leq i\leq M$$

如果 $\max\left\{|x_i-x_{i-1}|\middle|1\leq i\leq M\right\}<\delta$，那么注意到集合划分

$$\{1,2,...,M\}=\left\{1\leq i\leq M\middle|[x_{i-1},x_i]\cap A\neq\varnothing\right\}\bigsqcup\left\{1\leq i\leq M\middle|[x_{i-1},x_i]\cap A=\varnothing\right\}$$

将上式右边的两个集合分别记为 B_1,B_2，则显然 B_1 的元素个数 $\leq A$ 的元素个数 $(=N)$. 再注意到 $0\leq R(x)\leq 1$ 总成立，从而我们对函数 $R(x)$ 关于划分 (π,ξ) 的黎曼和有如下估计：

$$\begin{aligned}0\leq\sum_{i=1}^{M}(x_i-x_{i-1})R(\xi_i) &= \sum_{i\in B_1}(x_i-x_{i-1})R(\xi_i)+\sum_{i\in B_2}(x_i-x_{i-1})R(\xi_i)\\ &\leq \sum_{i\in B_1}\delta\cdot 1+\sum_{i\in B_2}(x_i-x_{i-1})\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq |B_1|\cdot\delta+1\cdot\frac{\varepsilon}{2}\leq N\cdot\frac{\varepsilon}{2N}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了 $R(x)$ 为 $[0,1]$ 上的可积函数，并且 $\int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x=0$. □

习题 111. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{1}{k}}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明. 对任意 $\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，从而存在 $N_1>0$，使得对任意 $n>N_1$ 都有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积，故有界，记 M 为 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 的一个

上界。取 $N := \max\{N_1, \frac{2M}{\varepsilon}\}$，则对任意 $n > N$，成立

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{1}{k}}f(\frac{k}{n})-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{1}{k}}f(\frac{k}{n})-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
\le\ & \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{k}}-\frac{1}{n}\right)\cdot|f(\frac{k}{n})|+\frac{\varepsilon}{2} \le M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn(n+\frac{1}{k})}+\frac{\varepsilon}{2} \le M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
=\ & \frac{M}{n}+\frac{\varepsilon}{2} \le \frac{M}{2M/\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

这就证明了本题结论。 □

习题 112. 对于常数 $a > 1$，计算定积分：

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}\,\mathrm{d}x$$

解. 考虑三角换元 $x = \sin t$，则

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{a-\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{a-\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t + a + \frac{1-a^2}{a-\sin t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \pi a + (1-a^2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a-\sin t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

使用万能代换 $u = \arctan\frac{t}{2}$，有

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a-\sin t}\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{a-\frac{2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{a}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(u-\frac{1}{a})^2+1-\frac{1}{a^2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{a}\int_{-1-\frac{1}{a}}^{1-\frac{1}{a}}\frac{1}{v^2+(1-\frac{1}{a^2})}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{2}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}\arctan\frac{v}{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}\Bigg|_{-1-\frac{1}{a}}^{1-\frac{1}{a}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(\arctan\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}+\arctan\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}
\end{aligned}
$$

从而：

$$\text{原式} = \pi a + (1-a^2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a-\sin t}\,\mathrm{d}t = \pi a + (1-a^2)\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{\pi}{a+\sqrt{a^2-1}}$$

□

注记

我们可以利用对称性技巧处理积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a-\sin t}\,\mathrm{d}t$，使得简化计算。考虑换元 $t \mapsto -t$，易知

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a-\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin t}\,\mathrm{d}t$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a-\sin t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{a-\sin t}+\frac{1}{a+\sin t}\right)\mathrm{d}t \\ &= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2-\frac{u^2}{1+u^2}}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{a}{a^2-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2+\frac{a^2}{a^2-1}}\,\mathrm{d}u = \frac{a}{a^2-1}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\pi = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\end{aligned}$$

习题 113. 设常数 $d > r > 0$，计算定积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{d+r\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

解. 直接考虑万能代换 $t = \tan\frac{\theta}{2}$，得到

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{d+r\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta &= 2\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{d+r\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \xlongequal{t=\tan\frac{\theta}{2}} 2\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{d+r\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{(d-r)t^2+(d+r)}\frac{1-t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{8}{d-r}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\frac{d+r}{d-r}}\cdot\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \frac{4}{d-r}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\frac{d+r}{d-r}} \\ &= \frac{8}{d-r}\cdot\frac{d-r}{2r}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+\frac{d+r}{d-r}}\right)\mathrm{d}t - \frac{4}{d-r}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\frac{d+r}{d-r}} \\ &= \frac{4}{r}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{\frac{d+r}{d-r}}}\right) - \frac{2\pi}{\sqrt{d^2-r^2}} = \frac{2\pi}{r}\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2-r^2}}\right)\end{aligned}$$

□

习题 114. 对于常数 $|x|<1$，计算定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\sin^2 t}{1-x^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

解.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\sin^2 t}{1-x^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1-x^2)\sin^2 t+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t}{(1-x^2)\tan^2 t+1}\,\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2} \xlongequal{u=\tan t} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1-x^2)u^2+1}\,\mathrm{d}u-\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)
\end{aligned}$$

□

习题 115. 计算定积分：

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

解. 换元 $x=\frac{1}{2}\sinh\theta := \frac{e^\theta-e^{-\theta}}{4}$, 并且记 $\alpha=\sinh^{-1}2=\ln(2+\sqrt{5})$, 则易知

$$\begin{cases}\sinh\alpha = 2\\ \cosh\alpha=\sqrt{5}\end{cases},\quad \begin{cases}\sinh 2\alpha = 4\sqrt{5}\\ \cosh 2\alpha=9\end{cases},\quad \begin{cases}\sinh 4\alpha = 72\sqrt{5}\\ \cosh 4\alpha=161\end{cases},\quad \sinh 6\alpha=1292\sqrt{5}$$

因此有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^4\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{32}\int_0^\alpha \sinh^4\theta\cosh^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{32}\int_0^\alpha \left(\frac{\cosh 2\theta-1}{2}\right)^2\frac{\cosh 2\theta+1}{2}\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{512}\int_0^\alpha (\cosh 4\theta-1)(\cosh 2\theta-1)\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{512}\int_0^\alpha \left(\frac{1}{2}\cosh 6\theta-\cosh 4\theta-\frac{1}{2}\cosh 2\theta+1\right)\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{512}\cdot\frac{1}{12}\sinh 6\alpha-\frac{1}{512}\cdot\frac{1}{4}\sinh 4\alpha-\frac{1}{512}\cdot\frac{1}{4}\sinh 2\alpha+\frac{1}{512}\alpha\\
&= \frac{133}{768}\sqrt{5}+\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{512}
\end{aligned}$$

□

习题 116. 计算定积分：

$$I := \int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

解. 首先注意恒等式

$$\arcsin(2x-1)+\frac{\pi}{2} = 2\arcsin\sqrt{x} \tag{$*$}$$

这是因为 $x=0$ 是上式两边相等，并且容易验证对上式两边关于 x 求导之后也相等。利用 $(*)$ 式，容易得到

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arcsin(2x-1)+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{u=2x-1}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{\arcsin u+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{u^2+3}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+3}}\,\mathrm{d}u \overset{u=\sqrt{3}\tan\theta}{=\!=\!=\!=} \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\cos^2\theta} \overset{t=\sin\theta}{=\!=\!=\!=} \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \\ &= \frac{\pi}{4}\ln 3 \end{aligned}$$

□

习题 117. （*Taylor* 公式的积分余项）

已知函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内 $n+1$ 阶连续可微，则对于该邻域内的 x，成立

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_{n+1}(a,x)$$

其中余项 $r_{n+1}(a,x)$ 满足

$$r_{n+1}(a,x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

证明. 对 n 使用数学归纳法。$n=0$ 时显然成立；此外注意到对任意 $n\geq 0$，使用分部积分易得

$$\begin{aligned} r_{n+1}(a,x) &= \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!}\cdot\frac{-1}{n+1}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}(x-t)^{n+1} \\ &= \frac{-1}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^{(n+1)}\Big|_a^x - \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \right] \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + r_{n+2}(a,x) \end{aligned}$$

从而易知证毕。 □

习题 118. 已知定义在 $x=0$ 附近的函数

$$F(x) := \int_0^{x^2} t^2 \sin\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t$$

求极限：

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^7}$$

注记

曲豆豆试过，企图对 $F(x)$ 求导用洛必达，非常难算。甚至不可能算出来。

解. 只需注意到

$$\frac{F(x)}{x^7} \le \frac{1}{x^7}\int_0^{x^2} t^2 \sin x\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{x^6}\int_0^{x^2} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$$

$$\frac{F(x)}{x^7} \ge \frac{\sin\sqrt{x^2-x^4}}{x^7}\int_0^{x^2} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\frac{\sin(x\sqrt{1-x^2})}{x} \to \frac{1}{3} \quad (x\to 0^+)$$

从而由夹逼原理，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x^7} = \frac{1}{3}$. □

注记

biu 神使用洛必达未遂，但提供了一个有意思的想法：

另解. 首先注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^7}\int_0^{x^2} t^2\sin\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t \xlongequal{t=x\sin u} \frac{1}{x^4}\int_0^{\arcsin x} \sin^2 u\cos u\sin(x\cos u)\,\mathrm{d}u \\
=\ & \frac{1}{3x^4}\int_0^{\arcsin x}\sin(x\cos u)\,\mathrm{d}(\sin^3 u) \\
=\ & \frac{1}{3x^4}\left(\sin^3 u\sin(x\cos u)\Big|_0^{\arcsin x} + x\underbrace{\int_0^{\arcsin x}\sin^4 u\cos(x\cos u)\,\mathrm{d}u}_{:=R(x)}\right) \\
=\ & \frac{1}{3x^4}\left(x^3\sin(x\cos\arcsin x) + xR(x)\right) \\
=\ & \frac{\sin(x\cos\arcsin x)}{3x} + \frac{1}{3x^3}R(x)
\end{aligned}$$

而注意到当 x 充分小时成立 $\arcsin x < 2x$，因此有

$$|R(x)| \le \int_0^{\arcsin x} u^4\,\mathrm{d}u \le \int_0^{2x} u^4\,\mathrm{d}u = \frac{32}{5}x^5$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^7}\int_0^{x^2} t^2\sin\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x\cos\arcsin x)}{3x} = \frac{1}{3}$$

□

习题 119. $F(x)$ 同上题（习题118），计算极限：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{F(x)}{x^7}-\frac{1}{3}\right)$$

证明. 对 $F(x)$ 分部积分，有

$$F(x) = \frac{1}{3}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{d}(t^3) = \frac{1}{3}\left(x^6\sin\sqrt{x^2-x^4} + \int_0^{x^2}\frac{t^4}{\sqrt{x^2-t^2}}\cos\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

其中注意到

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x^2}\frac{t^4}{\sqrt{x^2-t^2}}\cos\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t\\
=\ &\int_0^{x^2}\frac{t^4}{x}\cos\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^{x^2} t^4\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-t^2}}-\frac{1}{x}\right)\cos\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t}_{:=S(x)}\\
=\ &\frac{1}{x}\left(\int_0^{x^2} t^4\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^{x^2} t^4\left(\cos\sqrt{x^2-t^2}-1\right)\,\mathrm{d}t}_{:=R(x)}\right) + S(x)\\
=\ &\frac{1}{5}x^9 + \frac{1}{x}R(x) + S(x)
\end{aligned}$$

注意到对于充分小的正实数 u，成立不等式 $|\cos u - 1| < u^2$；由此可知当正数 x 充分小时成立

$$|R(x)| \le \int_0^{x^2} t^4(x^2-t^2) \le x^2\int_0^{x^2} t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}x^{12}$$

再注意当正数 x 充分小时成立 $x^4 < \frac{3}{4}x^2$，因此正数 x 充分小时成立

$$|S(x)| \le \int_0^{x^2} t^4\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-t^2}}-\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} t^4\cdot\frac{t^2}{x\sqrt{x^2-t^2}}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_0^{x^2} \frac{t^6}{x\sqrt{x^2-\frac{3}{4}x^2}}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^3}\int_0^{x^2} t^6\,\mathrm{d}t = \frac{2}{7}x^{11}$$

因此综上可知当 $x \to 0^+$ 时成立

$$\int_0^{x^2} \frac{t^4}{\sqrt{x^2-t^2}}\cos\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}x^9 + o(x^9)$$

最后考虑 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}\sin\sqrt{x^2-x^4} &= \sqrt{x^2-x^4} - \frac{1}{6}(x^2-x^4)^{\frac{3}{2}} + o(x^3)\\ &= x(1-\frac{1}{2}x^2) - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \qquad F(x) &= \frac{1}{3}\left(x^6\sin\sqrt{x^2-x^4} + \int_0^{x^2}\frac{t^4}{\sqrt{x^2-t^2}}\cos\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(x^6(x-\frac{2}{3}x^3) + \frac{1}{5}x^9\right) + o(x^9) = \frac{1}{3}x^7 - \frac{7}{45}x^9 + o(x^9)\end{aligned}$$

由此立刻得到

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{F(x)}{x^7}-\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{45}.$$

□

习题 120. 计算极限：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

解. 先取对数，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}\right] &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2x\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x}e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{2x^2}e^{x^2}+e^{x^2}}{e^{x^2}} = 1\end{aligned}$$

所以有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]\right) = e$$

□

注记

除了暴力使用洛必达，还可以采用上下极限、放缩技术。

另解. 与之前解法一样先取对数，只需证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}=1 \tag{$*$}$$

换元 $u=t^2$ 得 $\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}\frac{e^u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$. 记常数 $M:=\int_0^1\frac{e^u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$，则有

$$\begin{aligned}\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}&\geq\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^{x^2}\frac{e^u}{2x}\,\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{x^2}-1\right)-\ln 2x}{x^2}=1\\ \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}&\leq\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(M+\int_1^{x^2}\frac{e^u}{2\sqrt{1}}\,\mathrm{d}u\right)}{x^2}=1\end{aligned}$$

综上，$(*)$ 得证。 □

习题 121. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}ne^{n^2}\int_n^{n+1}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

解. 令函数 $f(x)=xe^{x^2}\int_x^{x+1}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,(x\geq 0)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则该极限等于原极限。而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+1}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}e^{-x^2}}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}-e^{-(x+1)^2}}{2e^{-x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x-1}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

注记

除了暴力使用洛必达，我们还有更加优雅的使用积分中值定理的解法：

另解. 换元 $t^2=u$ 并使用积分第一中值定理得

$$\int_n^{n+1}e^{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt{\xi_n}}\int_{n^2}^{(n+1)^2}e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

其中存在 $\xi_n\in[n^2,(n+1)^2]$. 记 $\sqrt{\xi_n}=n+\eta_n$，其中 $\eta_n\in[0,1]$. 从而整理得

$$ne^{n^2}\int_n^{n+1}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{n}{n+\eta_n}\left(1-e^{-2n-1}\right)$$

两边取极限即可。 □

习题 122. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(ne^{n^2}\int_n^{n+1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\right)$$

解. 换元 $t^2=u$ 之后马上分部积分，然后再用积分中值定理，

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}(e^{-u})\\ &= -\frac{1}{2}\left(\left.\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\right|_{n^2}^{(n+1)^2}+\frac{1}{2}\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-n^2}}{n}-\frac{e^{-(n+1)^2}}{n+1}\right)-\frac{1}{4(n+\lambda_n)^3}\left(e^{-n^2}-e^{-(n+1)^2}\right)\end{aligned}$$

其中 $\lambda_n\in[0,1]$ 为与 n 有关的常数。因此

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(ne^{n^2}\int_n^{n+1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{n^3}{n+1}e^{-2n-1}-\frac{n^3}{4(n+\lambda_n)^3}(1-e^{-2n-1})\right)=-\frac{1}{4}$$

□

习题 123. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n^5\left(n^3\int_n^{2n}\frac{t}{1+t^5}\,\mathrm{d}t-\frac{7}{24}\right)$$

解. 考虑 $f(x):=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开，有

$$\begin{aligned}\int_n^{2n}\frac{t}{1+t^5}\,\mathrm{d}t &= \int_n^{2n}\frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{t^5}}\,\mathrm{d}t=\int_n^{2n}\frac{1}{t^4}\left(1-\frac{1}{t^5}+R(t)\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{7}{24}\cdot\frac{1}{n^3}-\frac{255}{2048}\cdot\frac{1}{n^8}+\int_n^{2n}R(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

其中 $R(t)$ 为上述泰勒展开的拉格朗日余项：对每个 $t>0$，存在 $\xi\in(0,\frac{1}{t^5})$ 使得 $R(t)=\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot\frac{1}{(t^5)^2}$. 特别地，存在常数 $M>0$ 使得对任意 $t>0$ 都有 $|R(t)|\le\frac{M}{t^{10}}$. 因此

$$\left|\int_n^{2n}R(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_n^{2n}\frac{M}{n^{10}}\,\mathrm{d}t=\frac{M}{n^9}$$

$$\Rightarrow\qquad \int_n^{2n}\frac{t}{1+t^5}\,\mathrm{d}t=\frac{7}{24}\cdot\frac{1}{n^3}-\frac{255}{2048}\cdot\frac{1}{n^8}+o(\frac{1}{n^8})$$

从而立刻得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5\left(n^3\int_n^{2n}\frac{t}{1+t^5}\,\mathrm{d}t-\frac{7}{24}\right)=-\frac{255}{2048}$. □

习题 124. 设函数

$$F(x) := \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) \mathrm{d}t,$$

其中 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数. 试计算 $F'(0)$.

解. 不妨先计算单侧导数 $F'(0^+)$. 对任意充分小的 $x > 0$, 取 (依赖于 x 的) 正整数 n, 使得 $\frac{1}{n+1} \le x < \frac{1}{n}$. 则 $x \to 0^+$ 时有渐近等价 $x \sim \frac{1}{n}$, 特别地 $o(x) = o(\frac{1}{n})$. 于是,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\frac{1}{n+k+1}}^{\frac{1}{n+k}} \left(\frac{1}{t} - (n+k)\right) \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{n+1}}^{x} \left(\frac{1}{t} - n\right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k+1}\right) + \int_{\frac{1}{n+1}}^{x} \left(\frac{1}{t} - n\right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

而注意到当 $x \to 0^+$(此时 $n \to +\infty$) 时, 成立

$$0 \le \int_{\frac{1}{n+1}}^{x} \left(\frac{1}{t} - n\right) \mathrm{d}t \le \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{t} - n\right) \mathrm{d}t = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = o(\frac{1}{n}) = o(x),$$

因此,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k+1}\right) + o(x) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(n+k)^2} + \frac{\theta_{n,k}^3}{3}\right) + o(x) \end{aligned}$$

其中泰勒展开余项 $\theta_{n,k} \in [0, \frac{1}{n+k}]$. 再注意到 $\frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} - \frac{1}{(n+k-1)(n+k)^2}$, 因此继续整理 $F(x)$ 得

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}\right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(n+k-1)(n+k)^2} + \frac{\theta_{n,k}^3}{3}\right) + o(x) \\ &= \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n}}_{=\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(n+k-1)(n+k)^2} + \frac{\theta_{n,k}^3}{3}\right) + o(x) \\ &= \frac{1}{2n} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(n+k-1)(n+k)^2} + \frac{\theta_{n,k}^3}{3}\right) + o(x) \end{aligned}$$

我们再对上式最右边的第二项作估计, 先注意

$$0 \le \sum_{k=1}^{+\infty} \theta_{n,k}^3 \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^3} \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^2}$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}=\frac{1}{n(n-1)}=o(\frac{1}{n})=o(x)\qquad(x\to 0^+).$$

同样的方法, 也可证明当 $x\to 0^+$ 时成立 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+k-1)(n+k)^2}=o(x)$. 因此有

$$F(x)=\frac{1}{2n}+o(x)=\frac{1}{2}x+o(x),\qquad(x\to 0^+),$$

又显然 $F(0)=0$, 从而由导数的定义立刻得 $F'(0^+)=\frac{1}{2}$. 同样的方法也可说明左导数 $F'(0^-)=\frac{1}{2}$, 因此 $F'(0)=\frac{1}{2}$. □

习题 125. 证明：对每个正整数 n, 存在唯一的正实数 x_n, 使得

$$\int_0^{x_n}(u^n+e^{-u^2}\cos u)\,\mathrm{d}u=2.$$

并且证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1.$

证明. 对于每个正整数 n, 考虑函数 $F_n(x):=\int_0^x(u^n+e^{-u^2}\cos u)\,\mathrm{d}u$, 显然 $F_n(x)$ 连续，且 $F_n'(x)=x^n+e^{-x^2}\cos x$.

- 当 $0\leq x\leq 1$ 时，$e^{-x^2}\cos x>0$, 从而 $F_n'(x)>0$; 而当 $x>1$ 时，$F_n'(x)\geq x^n-|e^{-x^2}\cos x|>1-1=0$. 综上可知 $F_n'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 恒大于零，因此 $F_n(x)$ 严格递增。又因为 $F_n(0)=0$, 并且

$$\begin{aligned}\int_0^x(u^n+e^{-u^2}\cos u)\,\mathrm{d}u &\geq \int_0^x u^n\,\mathrm{d}u-\left|\int_0^x e^{-u^2}\cos u\,\mathrm{d}u\right|\\ &\geq \frac{x^{n+1}}{n+1}-\int_0^x 1\cdot\mathrm{d}u=\frac{x^{n+1}}{n+1}-x\end{aligned}$$

取足够大的 $y_n>0$ 使得 $\frac{y_n^{n+1}}{n+1}-y_n>2$, 则 $F_n(y_n)>2$. 故由连续函数介值原理可知存在 $x_n\in(0,y_n)$ 使得 $F_n(x_n)=2$. 再由 $F_n(x)$ 的严格单调性可知，上述 x_n 是唯一的。
- 再断言 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$. 我们分若干步进行。首先断言 $x_n>1$ 对任意 n 成立。若不然则有

$$2=\int_0^{x_n}(u^n+e^{-u^2}\cos u)\,\mathrm{d}u<\int_0^{x^n}(1^n+1)\,\mathrm{d}u=2x_n<2$$

从而产生矛盾。之后再注意到

$$\begin{aligned}2 &= \int_0^{x_n}(u^n+e^{-u^2}\cos u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{x_n^{n+1}}{n+1}+\int_0^{x_n}e^{-u^2}\cos u\,\mathrm{d}u\\ &\leq \frac{x_n^{n+1}}{n+1}+\underbrace{\int_0^{+\infty}|e^{-u^2}\cos u|\,\mathrm{d}u}_{:=M}\end{aligned}$$

则易知 $M < \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u < \int_0^1 1\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = 2$, 于是上式整理得

$$x_n \leq \sqrt[n+1]{(n+1)(2-M)}$$

综上所述，我们有

$$1 \leq x_n \leq \sqrt[n+1]{(n+1)(2-M)}$$

令 $n \to +\infty$, 由数列极限的夹逼原理，立刻得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

□

习题 126. 求满足以下方程的连续函数 $f(x)$:

$$f(x) = x\sin x + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \tag{$*$}$$

解. 对 $(*)$ 两边对 x 求导两次，得到

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x + x\cos x + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ f''(x) &= 2\cos x - x\sin x + f(x) \end{aligned}$$

在 $(*)$ 式与上式当中令 $x=0$ 即可得到 $f(0) = f'(0) = 0$. 因此函数 $f(x)$ 满足如下的初值问题：

$$\begin{cases} f''(x) - f(x) = 2\cos x - x\sin x \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

该微分方程的齐次部分 $f''(x) - f(x) = 0$ 通解为 $f(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$；为求原方程的一个特解，采用待定系数法，令

$$f(x) = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x$$

代入方程 $f''(x) - f(x) = 2\cos x - x\sin x$ 比较有关系数得 $\begin{cases} C-A &= 0 \\ A+D-B &= 2 \\ -A-C &= -1 \\ C-B-D &= 0 \end{cases}$,从而 $\begin{cases} A &= \frac{1}{2} \\ B &= -\frac{1}{2} \\ C &= \frac{1}{2} \\ D &= 1 \end{cases}$,

因此原方程有特解 $f(x) = \frac{(x-1)\cos x + (x+2)\sin x}{2}$. 由线性常微分方程的理论，原方程的通解形如

$$f(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{(x-1)\cos x + (x+2)\sin x}{2}$$

再将上式代入初值条件 $f(0) = f'(0) = 0$，即可确定常数 $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -1$，从而

$$f(x) = \frac{1}{2}e^x - e^{-x} + \frac{(x-1)\cos x + (x+2)\sin x}{2}$$

□

4.3 积分中值定理

习题 127. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续且非负，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\max\left\{f(x)\middle|a\le x\le b\right\}$$

证明. 记 $A:=\left\{f(x)\middle|a\le x\le b\right\}$，由于 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，从而存在 $x_0\in[a,b]$，使得 f 在 x_0 处取到最大值 A.

对任意 $\varepsilon>0$，注意函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，从而存在 x_0 的邻域 $x_0\in[a',b']\subseteq[a,b]$，使得当 $f(x)>A-\frac{\varepsilon}{2}$ 在 $[a',b']$ 成立。记 $\delta:=b'-a'>0$ 为此区间的长度。从而有

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\ge\left(\int_{a'}^{b'} f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\ge\delta^{\frac{1}{n}}(A-\frac{\varepsilon}{2})$$

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(\int_a^b A^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\le(b-a)^{\frac{1}{n}}A$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta^{\frac{1}{n}}=1=\lim\limits_{n\to+\infty}(b-a)^{\frac{1}{n}}$，因此存在 $N>0$，使得对于任意 $n\ge N$，都有

$$A-\varepsilon\le\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\le A+\varepsilon$$

从而证毕。 □

习题 128. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(\frac{x}{n})\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

解. 注意到

$$n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(\frac{x}{n})\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(n\tan(\frac{x}{n})\right)^n\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}$$

对于任意 $\varepsilon>0$，注意到当 n 足够大时，

$$x\le n\tan(\frac{x}{n})\le(1+\varepsilon)x\qquad\forall x\in[0,\frac{\pi}{4}]$$

于是，注意利用习题127的结论（或者直接计算也行），有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(\frac{x}{n})\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\le\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}((1+\varepsilon)x)^n\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4}(1+\varepsilon)$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(\frac{x}{n})\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4}$$

这就说明了对任意 $\varepsilon>0$，都有

$$\frac{\pi}{4} \leq \varliminf_{n\to+\infty} n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(\frac{x}{n})\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(\frac{x}{n})\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\pi}{4}(1+\varepsilon)$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(\frac{x}{n})\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4}$. □

习题 129. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的恒为正的连续函数，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 [f(x)]^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^n = \exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

证明. 由于 $f(x)$ 恒正、连续，从而取 $M>0$ 使得 $|\ln f(x)|\leq M$ 对任意 $x\in[0,1]$ 都成立。注意

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 [f(x)]^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^n = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} n\ln\int_0^1 e^{\frac{1}{n}\ln f(x)}\,\mathrm{d}x\right)$$

考虑函数 $t\mapsto e^t$ 在 $t=0$ 的泰勒展开，有

$$e^{\frac{1}{n}\ln f(x)} = 1+\frac{1}{n}\ln f(x)+R_n(x)$$

其中 Lagrange 余项 $R_n(x)=\frac{1}{2}e^{\xi_n(x)}\left(\frac{1}{n}\ln f(x)\right)^2=\frac{\ln^2 f(x)}{2n^2}e^{\xi_n(x)}$，并且 $|\xi_n(x)|<\frac{1}{n}|\ln f(x)|=\frac{M}{n}$. 因此当 n 足够大（$n>M$）时有 $|\xi_n(x)|\leq 1$，从而 $|R_n(x)|\leq\frac{eM}{2n^2}$. 因此有

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 R_n(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_0^1 \frac{eM}{2n^2}\,\mathrm{d}x = \frac{eM}{2n^2}\\
\Rightarrow \int_0^1 e^{\frac{1}{n}\ln f(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(1+\frac{1}{n}\ln f(x)\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 R_n(x)\,\mathrm{d}x\\
&= 1+\frac{1}{n}\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x + o(\frac{1}{n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 [f(x)]^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^n &= \exp\left(\lim_{n\to+\infty} n\ln\int_0^1 e^{\frac{1}{n}\ln f(x)}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \exp\left(\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x+o(\frac{1}{n})\right)\mathrm{d}x\right)\\
&= \exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

□

习题 130. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0$$

证法一.（分部积分直接计算）

令 $I_n:=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，注意到对于 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 总有 $0\le\sin^{n+1}x\le\sin^n x$，所以 $I_n\ge I_{n+1}\ge 0$，即 $\{I_n\}$ 为单调递减的非负数列。再注意

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}\cos x\\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x=(n-1)(I_{n-2}-I_n)
\end{aligned}$$

从而得到递推关系 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 因此对任意 $n\ge 1$，注意存在唯一的 $k\ge 0$ 使得 $2k\le n\le 2k+1$，从而

$$\begin{aligned}
I_n &\le I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}I_{2k-2}=\cdots=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{1}{2}I_0\\
&= e^{\sum\limits_{m=1}^{k}\ln\left(1-\frac{1}{2m}\right)}I_0\le e^{-\sum\limits_{m=1}^{k}\frac{1}{2m}}I_0
\end{aligned}$$

注意当 $n\to+\infty$ 时，$k\to+\infty$，从而 $\sum\limits_{m=1}^{k}\frac{1}{2m}\to+\infty$. 因此当 $n\to+\infty$ 时，上式最右端趋于 0；又因为 $I_n\ge 0$，从而由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}I_n=0$$

□

证法二.（放缩估计）

直接用数列极限的定义证明之。对于任意 $\varepsilon>0$（不妨 $\varepsilon<1$），取足够大的正整数 N使得

$$\left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^N<\frac{\varepsilon}{\pi}$$

则对于任意 $n\ge N$，成立

$$\begin{aligned}
0 &\le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\\
&\le \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\cdot\mathrm{d}x\\
&\le \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^N\,\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0$. □

习题 131. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x=0$$

此题与上题很像，但远比上题困难。这个积分一般无法直接计算。

证法一.（利用积分第二中值定理）

对于正整数 n，注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(x^n)\,\mathrm{d}x+\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{nx^{n-1}}\cdot nx^{n-1}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{积分第二中值定理}} \frac{1}{n}\int_1^{\xi_n}nx^{n-1}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n}\int_1^{\xi_n}(-\cos(x^n))'\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}(-\cos(\xi_n^n)+\cos 1)\end{aligned}$$

其中 $\xi_n\in[1,\frac{\pi}{2}]$ 为某个与 n 有关的常数。从而有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_0^1\sin(x^n)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{n}|-\cos(\xi_n^n)+\cos 1|\\ &\leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x+\frac{2}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n}\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，则上式右端趋于 0，于是由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x=0$. □

注记

上述证法巧妙使用积分第二中值定理。若不熟悉此定理，或者想不到它，还可以有如下常规做法：

证法二.（换元，然后划分区间）

对于 $n\geq 1$，首先注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x\xlongequal{x^n=t}\frac{1}{n}\int_0^{(\frac{\pi}{2})^n}t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\,\mathrm{d}t$$

对于 $n\geq 2$，注意到对于 $n\geq 0$，存在唯一正整数 M_n，使得

$$2M_n\pi\leq (\frac{\pi}{2})^n<2(M_n+1)\pi$$

此时有 $\left|(\frac{\pi}{2})^n-2M_n\pi\right|\leq 2\pi$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=+\infty$. 注意到：

$$\frac{1}{n}\int_0^{(\frac{\pi}{2})^n}t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M_n}\left(\int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi}t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\,\mathrm{d}t\right)+\frac{1}{n}\int_{2M_n\pi}^{(\frac{\pi}{2})^n}t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\,\mathrm{d}t \tag{$*$}$$

$$\begin{aligned}\int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi}t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\,\mathrm{d}t &= \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi}t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}-\sin t\left((t-\pi)^{\frac{1}{n}-1}-t^{\frac{1}{n}-1}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

固定上式的 n 与 k，当 $k\geq 2$ 时，对于 $(2k-1)\pi\leq t\leq 2k\pi$，对函数 $f(u)=u^{\frac{1}{n}-1}$ 在 $[t-\pi,t]$ 使用拉格朗日中值定理，得

$$\begin{aligned}\left|(t-\pi)^{\frac{1}{n}-1}-t^{\frac{1}{n}-1}\right| &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\xi^{\frac{1}{n}-2}\leq (t-\pi)^{\frac{1}{n}-2}\\ &\leq ((2k-2)\pi)^{\frac{1}{n}-2}\leq \frac{1}{\pi^2(2k-2)^2}(M_n\pi)^{\frac{1}{n}}\\ &\leq \frac{1}{\pi^2(2k-2)^2}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2\pi(2k-2)^2}\end{aligned}$$

而 $k=1$ 时，有估计

$$\left|\int_0^{2\pi}t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\,\mathrm{d}t\right|\leq \int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t\leq\int_0^{2\pi}t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t\leq\int_0^{2\pi}(2\pi)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t\leq\int_0^{2\pi}2\pi\,\mathrm{d}t=4\pi^2$$

综上所述，有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M_n}\left(\int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi}t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\,\mathrm{d}t\right)+\frac{1}{n}\int_{2M_n\pi}^{(\frac{\pi}{2})^n}t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{M_n}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}|\sin t|\cdot\left|(t-\pi)^{\frac{1}{n}-1}-t^{\frac{1}{n}-1}\right|\mathrm{d}t\\ &\quad+\frac{1}{n}\left|\int_0^{2\pi}t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\,\mathrm{d}t\right|+\frac{1}{n}\int_{2M_n\pi}^{(\frac{\pi}{2})^n}t^{\frac{1}{n}-1}|\sin t|\,\mathrm{d}t\\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{M_n}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{1}{2\pi(2k-2)^2}\,\mathrm{d}t+\frac{4\pi^2}{n}+\frac{2\pi}{n}\\ &\leq \frac{1}{8n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)+\frac{4\pi^2}{n}+\frac{2\pi}{n}\end{aligned}$$

可见 $n\to\infty$ 时, 上式右端趋于 0. 于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x=0$. □

习题 132. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负、严格单调递增的连续函数。对于任意 $n \geq 1$，由积分中值定理，存在 $x_n \in [0,1]$，使得

$$f^n(x_n) = \int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t$$

则由 f 的单调性容易知道 x_n 是唯一的。

试求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

证明. 注意到 x_n 满足

$$f(x_n) = \left(\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}$$

利用习题127的结论，有

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{x\in[0,1]} f(x) = f(1)$$

再由 f 的单调性与连续性，可得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

□

习题 133. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 二阶连续可微，并且 $f(a) = f(b) = 0$.

证明：存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$

证明. 对任意实数 m, n（待定），都有

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x+m) = -\int_a^b f'(x)(x+m)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}[(x+m)^2+n] \\
&= -\frac{1}{2}\left(f'(x)[(x+m)^2+n]\Big|_a^b - \int_a^b f''(x)[(x+m)^2+n]\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

现在，令 $\begin{cases} m = -\frac{a+b}{2} \\ n = -\frac{(b-a)^2}{4} \end{cases}$，则有 $(a+m)^2+n = (b+m)^2+n = 0$，于是

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)[(x+m)^2+n]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b \left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{4}\right]\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$

□

另证. 考虑函数

$$g(x) := f(x) + \frac{6}{(b-a)^3}(x-a)(x-b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

则容易验证 $g(a)=g(b)=0$，$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 以及

$$g''(x) = f''(x) + \frac{12}{(b-a)^3}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

由于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，并且 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$，从而必存在 $\omega \in (a,b)$，使得 $g(a) = g(\omega) = g(b) = 0$；再由罗尔定理可知存在 $\eta_1 \in (a,\omega)$ 以及 $\eta_2 \in (\omega, b)$ 使得 $g'(\eta_1) = g'(\eta_2) = 0$，从而存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subseteq [a,b]$ 使得 $g''(\xi) = 0$，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$

□

习题 134. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x - 1\right)$$

解. 首先注意到

$$\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2n}{n+\sqrt{n^2+n}} = 1 - \frac{n}{(n+\sqrt{n^2+n})^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x - 1\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)\,\mathrm{d}x - \frac{n}{(n+\sqrt{n^2+n})^2}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

对于 $n \geq 1$ 以及 $x \in (n^2, n^2+n)$，考虑 Taylor 展开 $e^{-\frac{1}{x}} - 1 = -\frac{1}{x} + R_n(x)$，其中余项 $R_n(x) = \frac{1}{2x^2}e^{\xi}$，$\xi < -\frac{1}{n^2+n}$. 从而当 n 充分大时，对任意 $x \in (n^2, n^2+n)$ 都有

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{2n^4}$$

$$\left|n\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)\,\mathrm{d}x\right| \leq n\left(\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}|R_n(x)|\,\mathrm{d}x\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\ 2n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)+\frac{1}{2n^3}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\
&\to\ 0\qquad (n\to+\infty)
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to+\infty} n\left(\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}
$$

□

4.4 Good kernel 及其应用

习题 135. 设 $\left\{f_n\middle|n\geq 1\right\}$ 是一族定义在闭区间 $[-1,1]$ 上的连续函数，并且满足以下条件：

（1）$\int_{-1}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x=1$ 对任何 $n\geq 1$ 都成立；

（2）存在 $M>0$，使得对任意 $n\geq 1$，都有 $\int_{-1}^{1}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x\leq M$；

（3）对任意的 $0<\delta<1$，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq 1}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x=0$.

证明：对于任何定义于 $[-1,1]$ 的连续函数 $g(x)$，都成立

$$
\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(0).
$$

证明. 对于在 $[-1,1]$ 上的连续函数 $g(x)$，记 M' 为 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值。

对于任意 $\varepsilon>0$，由于 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而存在 $\delta>0$，使得对任意 $x\in[-1,1]$，如果 $|x|\leq\delta$，就有 $|g(x)-g(0)|<\frac{\varepsilon}{2M}$.（其中 M 为条件（2）中的那个）. 不妨 $\delta<1$. 对于如此的 δ，由条件（3）可知存在正整数 N，使得对于任意 $n\geq N$，

$$
\int_{\delta\leq|x|\leq 1}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4M'}
$$

于是，对于任意的 $n\geq N$，注意到条件（1），我们有：

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^{1} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x-g(0)\right| &= \left|\int_{-1}^{1} f_n(x)(g(x)-g(0))\,\mathrm{d}x\right|\\
&= \left|\left(\int_{|x|\leq\delta}+\int_{\delta\leq|x|\leq 1}\right) f_n(x)(g(x)-g(0))\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leq \int_{|x|\leq\delta}|f_n(x)|\cdot|g(x)-g(0)|\,\mathrm{d}x+\int_{\delta\leq|x|\leq 1}|f_n(x)|\cdot|g(x)-g(0)|\,\mathrm{d}x\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2M}\int_{|x|<\delta}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x+2M'\int_{\delta\leq|x|\leq 1}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2M}M+2M'\frac{\varepsilon}{4M'}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

从而证毕。 □

习题 136. 设 $f(x)$ 为定义在 $[-1,1]$ 上的连续函数，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=f(0).$$

证明. 我们利用上一题（习题135）的结论来做。令

$$\varphi_n(x):=\frac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}$$

我们只需要验证函数族 $\left\{\varphi_n(x)\middle| n\geq 1\right\}$ 满足习题135的条件（1）（2）（3）. 而（1）（2）是显然成立的，我们只剩下（3）.

现在，对于任意给定的 $0<\delta<1$，我们需要证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_{\delta\leq|x|\leq 1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=0$$

易知有不等式 $\begin{cases}1-x^2\geq-\delta x+1 & (0\leq x\leq\delta)\\ 1-x^2\leq 1-\delta^2 & (\delta\leq x\leq 1)\end{cases}$ ，从而有

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x &\leq (1-\delta^2)^n\\ \int_{0}^{\delta}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x &\geq \int_{0}^{\delta}(1-\delta x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\delta}\frac{1}{n+1}\left[1-(1-\delta^2)^n\right]\end{aligned}$$

因此有如下估计：

$$\begin{aligned}\frac{\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x} &= 1+\frac{\int_{0}^{\delta}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}\geq 1+\frac{\frac{1}{\delta}\frac{1}{n+1}\left(1-(1-\delta^2)^n\right)}{(1-\delta^2)^n}\\ &= 1-\frac{1}{(n+1)\delta}+\frac{1}{\delta(n+1)(1-\delta^2)^n}\end{aligned}$$

注意 $0<1-\delta^2<1$，从而当 $n\to+\infty$ 时，上式右端趋于 $+\infty$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=+\infty$，也就是说，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=0$，从而证毕。 □

习题 137. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

证明. **Step1** 首先注意到当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时，$\sin x \le x \le \tan x$，从而

$$n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^n x \, \mathrm{d}x \le n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x \, \mathrm{d}x \le n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^{n-1} x \, \mathrm{d}x$$

上式最左边和最右边的积分可以通过换元法直接计算。令 $n \to +\infty$，由夹逼原理不难知道

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x \, \mathrm{d}x = 1$$

因此有

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x \, \mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x \, \mathrm{d}x}$$

Step2 令 $\varphi_n(x) := \frac{x\cos^n x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x \, \mathrm{d}x}$，则我们只需计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x)\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) \mathrm{d}x$.

我们对 $\{\varphi_n(x)\}$ 利用习题135的结论（把区间 $[-1,1]$ 改为 $[0, \frac{\pi}{2}]$，完全类似)，只需再证明：对任意 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x = 0$ 即可。如果这个成立，我们将立刻得到

$$\text{原极限} = \ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\bigg|_{x\to 0} = \ln 2$$

Step3 对于给定的 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$，注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x = 0$ 等价于

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{\delta} x\cos^n x \, \mathrm{d}x}{\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x \, \mathrm{d}x} = +\infty \tag{$*$}$$

我们考察函数 $f_n(x) := x\cos^n x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的单调性。注意

$$f_n'(x) = \cos^n x - nx\cos^{n-1} x \sin x = (\cos x)^{n-1}(\cos x - nx\sin x)$$

从而易知 $f_n(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有唯一的极大值点，记为 x_n，并且 $f_n(x)$ 在 $[0, x_n]$ 单调递增，在 $[x_n, \frac{\pi}{2}]$ 单调递减。其中 x_n 满足方程 $\cos x_n = nx_n \sin x_n$，从而

$$\frac{1}{nx_n} = \tan x_n \ge x_n$$

所以极大值点 $x_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}$，特别地 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. 于是对于 $\delta > 0$，当 n 足够大时，$x_n < \delta$，从而 $x\cos^n x$ 在 $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ 单调递减，因此有

$$\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x \, \mathrm{d}x \le \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \delta\cos^n \delta \, \mathrm{d}x \le \frac{\pi\delta}{2}\cos^n \delta \tag{$**$}$$

Step4 断言对于足够大的 n，$f_n''(x) \le 0$ 在 $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ 上成立，并且 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\delta}{2}$. 从而 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ 上是凸函数。我们先假定这个断言成立（将在后文 Step 5 给出证明)，则由凸函数的性质，当 n 足够大的时候成立

$$\int_0^{\delta} x\cos^n x \, \mathrm{d}x \ge \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} x\cos^n x \, \mathrm{d}x \ge \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cos^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right) x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\cos^n \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{2n}\cos^n \frac{\delta}{2} \tag{$***$}$$

因此由 $(**)$ 与 $(***)$ 可知，

$$\frac{\int_0^\delta x\cos^n x\,\mathrm{d}x}{\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x\,\mathrm{d}x} \geq \frac{1}{n\pi\delta}\left(\frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\delta}\right)^n \to +\infty \qquad (n\to+\infty)$$

这就证明了（*），从而完成。

Step5 至此，我们只剩下：对于足够大的 n，$f_n''(x)\leq 0$ 在 $[0,\frac{1}{\sqrt{n}}]$ 成立。

直接计算 $f_n(x)$ 的二阶导数，有

$$f_n''(x) = nx\cos^{n-2}x\left(-2\frac{\sin x}{x} - \cos^2 x + (n-1)\sin^2 x\right)$$

当 $x\in[0,\frac{1}{\sqrt{n}}]$ 时，$(n-1)\sin^2 x \leq (n-1)\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{n-1}{n} < 1$；另一方面，当 n 足够大时，对任意的 $x\in[0,\frac{1}{\sqrt{n}}]$ 都有

$$2\frac{\sin x}{x} + \cos^2 x \geq 2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

（这利用了 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 以及 $\lim\limits_{x\to0}\cos^2 x = 1$ 的定义）。因此，当 n 足够大时，对任意 $x\in[0,\frac{1}{\sqrt{n}}]$，成立

$$-2\frac{\sin x}{x} - \cos^2 x + (n-1)\sin^2 x \leq -\frac{3}{2}+1 = -\frac{1}{2} < 0$$

从而 $f''(x)<0$. 完成了断言的证明。

总结：综合 Step1-5，得到

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

□

注记

此题还有其它解法，详见 http://tieba.baidu.com/p/4923216320?share=9105&fr=share&see_lz=0&sfc=qqfriend&client_type=2&client_version=10.2.8.0&st=1558143174&unique=0CEDEA7D19F2AB0E21408D38406AE031

习题 138. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 黎曼可积, $f(1)=0$, 且 $f'(1)$ 存在. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = -f'(1).$$

证明. 记 $f'(1)=a$. 则由导数的定义可知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $0<\delta<1$ 使得当 $1-\delta<x<1$ 时成立

$$(a+\varepsilon)(x-1) \leq f(x) \leq (a-\varepsilon)(x-1) \qquad (*)$$

再注意到 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积, 而有界. 取 $M>0$ 使得 $|f(x)|<M$ 在 $[0,1]$ 成立，从而对于任意 $0<\delta<1$ 都有

$$\left|n^2\int_0^{1-\delta}x^nf(x)\,\mathrm{d}x\right|\le M\left|n^2\int_0^{1-\delta}x^n\,\mathrm{d}x\right|=\frac{Mn^2(1-\delta)^{n+1}}{n+1}\to 0\qquad(n\to+\infty)$$

从而对 $(*)$ 取上极限得到

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{n\to+\infty}n^2\int_0^1x^nf(x)\,\mathrm{d}x=\varlimsup_{n\to+\infty}\left(n^2\int_0^{1-\delta}x^nf(x)\,\mathrm{d}x+n^2\int_{1-\delta}^1x^nf(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ =&\varlimsup_{n\to+\infty}n^2\int_{1-\delta}^1x^nf(x)\,\mathrm{d}x\le(a-\varepsilon)\varlimsup_{n\to+\infty}n^2\int_{1-\delta}^1x^n(x-1)\,\mathrm{d}x\\ =&(a-\varepsilon)\varlimsup_{n\to+\infty}n^2\left(\frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{n+1}-\frac{1-(1-\delta)^n}{n}\right)=-a+\varepsilon\end{aligned}$$

同样地，考虑下极限则有

$$\varliminf_{n\to+\infty}n^2\int_0^1x^nf(x)\,\mathrm{d}x\ge-a-\varepsilon$$

从而对任意 $\varepsilon>0$ 都成立

$$-a-\varepsilon\le\varliminf_{n\to+\infty}n^2\int_0^1x^nf(x)\,\mathrm{d}x\le\varlimsup_{n\to+\infty}n^2\int_0^1x^nf(x)\,\mathrm{d}x\le-a+\varepsilon$$

再令 $\varepsilon\to0$ 即可。 □

4.5 定积分的数值计算

习题 139. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac1n}$$

解. 取对数，然后用定积分的定义，可得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac1n}=\lim_{n\to+\infty}\exp\left(\frac1n\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)\\&=\exp\left(\lim_{n\to+\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)=\exp\int_0^2\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x\\&=\exp\left(x\ln(1+x^2)\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)=e^{2\ln5-4+2\arctan2}=\frac{25}{e^4}e^{2\arctan2}\end{aligned}$$

□

习题 140. 证明对任意 $n \geq 1$，成立不等式

$$\frac{3n+1}{2n+2} < \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n < \frac{2n+1}{n+1}$$

证明. 考虑定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x) = nx^n$，则 f 为单调递增的严格凸函数。我们考虑“阶梯函数” $g(x) := f(\frac{k}{n})$（如果 $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}), k \in \mathbb{Z}$）；以及“折线函数” $h(x)$ 定义为：$h(x)$ 的图像是依次连接点 $(0, f(0)), (\frac{1}{n}, f(\frac{1}{n})), \ldots, (\frac{n}{n}, f(\frac{n}{n}))$ 所得的折线。则易知 $g(x) < f(x) < h(x)$，从而知 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$，也就是

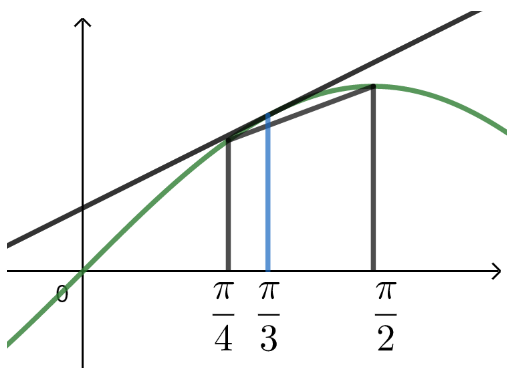
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} n\left(\frac{k}{n}\right)^n < \int_0^1 nx^n\,\mathrm{d}x < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2}\cdot\left[\left(\frac{k}{n}\right)^n + \left(\frac{k-1}{n}\right)^n\right]$$

整理上式即得 $\frac{3n+1}{2n+2} < \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n < \frac{2n+1}{n+1}$. □

习题 141. 证明：

$$(\sqrt{2}-1)(\ln 2 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{8} + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\ln 2$$

（提示：对于函数 $f(x) = \sin x$，考虑连接 $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$ 与 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 两点的线段；再考虑 f 在点 $(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3}))$ 处的切线）



习题141示意图

证明. 考虑函数 $f(x) = \sin x, x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$，则 $f''(x) \leq 0$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 成立。考虑连接 $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$ 与 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 两点的线段，易求该线段所在直线的解析式为 $y = \frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}x + (\sqrt{2}-1)$. 再考虑 $\frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$，易求 $f(x)$ 的图像在 $(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3}))$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$. 于是由 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上的凸性可知，对于 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$，成立

$$\sin x \quad \geq \quad \frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}x + (\sqrt{2}-1)$$

$$\sin x \quad \le \quad \frac{1}{2}x+\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$$

将此式代入积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 当中即可。 □

习题 142. 计算数列极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+1}}{\left(1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}\right)^n}$$

证明. 首先注意到

$$\frac{n^{n+1}}{\left(1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}\right)^n}=\frac{1}{\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n}$$

对于给定的 $n>0$，注意到 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ 是单调递增的，从而由定积分的几何意义，易知

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\le\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$$

直接计算两边的定积分，有

$$\frac{n}{n+1}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\le\frac{n}{n+1}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}-\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}\right]$$

令 $n\to+\infty$，容易验证 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})$（利用习题62），从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+1}}{\left(1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}\right)^n}\quad=\quad\lim_{n\to+\infty}e^{-n\ln\left(1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{-n\left[-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right]}=e$$

□

习题 143. 已知 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 的某开邻域上的 2 阶连续可微函数，证明：当 $n\to+\infty$ 时成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+\frac{b-a}{n}k)-\frac{b-a}{2n}[f(b)-f(a)]+o(\frac{1}{n})$$

证明. 为方便书写，记 $L:=b-a$ 为区间 $[a,b]$ 的长度，记 $x_{nk}:=a+\frac{Lk}{n}$ 为区间 $[a,b]$ 的第 k 个 n 等分点（$0\le k\le n$）. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶连续可微，取定 M 为 $|f''(x)|$ 在 $[a,b]$ 的一个上界。现在固定 $n\ge 1$。

对于每个 $1 \le k \le n-1$，以及 $x \in [x_{nk}-\frac{L}{2n}, x_{nk}+\frac{L}{2n}]$，考虑 Taylor 展开

$$f(x) = f(x_{nk}) + f'(x_{nk})(x-x_{nk}) + \frac{1}{2}f''(\xi_{nk})(x-x_{nk})^2$$

其中 $\xi_{n,k} \in [x_{nk}-\frac{L}{2n}, x_{nk}+\frac{L}{2n}]$. 从而有

$$\left|f(x)-f(x_{nk})-f'(x_{nk})(x-x_{nk})\right| = \left|\frac{1}{2}f''(\xi_{nk})(x-x_{nk})^2\right| \le \frac{M}{2}(x-x_{nk})^2$$

将上式在区间 $[x_{nk}-\frac{L}{2n}, x_{nk}+\frac{L}{2n}]$ 积分，得

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_{nk}-\frac{L}{2n}}^{x_{nk}+\frac{L}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{L}{n}f(x_{nk})\right| &= \left|\int_{x_{nk}-\frac{L}{2n}}^{x_{nk}+\frac{L}{2n}} \left[f(x)-f(x_{nk})-f'(x_{nk})(x-x_{nk})\right]\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \frac{M}{2}\int_{x_{nk}-\frac{L}{2n}}^{x_{nk}+\frac{L}{2n}} (x-x_{nk})^2\,\mathrm{d}x = \frac{ML}{24n^3}\end{aligned}$$

将上式中的 k 从 1 到 $n-1$ 求和，得到

$$\left|\int_{a+\frac{L}{2n}}^{b-\frac{L}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{nk})\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_{x_{nk}-\frac{L}{2n}}^{x_{nk}+\frac{L}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{L}{n}f(x_{nk})\right)\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1}\left|\int_{x_{nk}-\frac{L}{2n}}^{x_{nk}+\frac{L}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{L}{n}f(x_{nk})\right| \le \frac{ML}{24}\cdot\frac{n-1}{n^3} = o(\frac{1}{n})$$

$$\Rightarrow \quad \int_{a+\frac{L}{2n}}^{b-\frac{L}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{nk}) + o(\frac{1}{n}) \tag{$*$}$$

再考虑变上限的积分 $\varphi(t) = \int_a^{a+t} f(x)\,\mathrm{d}x$，将它在 $t=0$ 处 Taylor 展开得

$$\int_a^{a+\frac{L}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2n}f(a) + o(\frac{1}{n})$$

类似地也有

$$\int_{b-\frac{L}{2n}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2n}f(b) + o(\frac{1}{n})$$

结合 $(*)$ 式，注意到 $b = x_{nn}$，可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{a+\frac{L}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\frac{L}{2n}}^{b-\frac{L}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b-\frac{L}{2n}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{L}{2n}f(a) + \frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{nk}) + \frac{L}{2n}f(b) + o(\frac{1}{n}) \\ &= \frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{nk}) - \frac{L}{2n}(f(b)-f(a)) + o(\frac{1}{n})\end{aligned}$$

从而证毕。 □

注记

另一种做法是，直接使用之前做过的习题94的结论。

另证. 对于正整数 n，将区间 $[a,b]n$ 等分，有关记号同之前。对于 $0 \le k \le n-1$，考虑定义在 $[x_{nk}, x_{n,k+1}]$ 上的一次函数 $\varphi_{nk}(x)$，使得其图像为连接 $(x_{nk}, f(x_{nk}))$ 与 $(x_{n,k+1}, f(x_{n,k+1}))$ 的线段。则由习题94的结论可知，对于 $x \in [x_{nk}, x_{n,k+1}]$，有

$$|f(x) - \varphi_{nk}(x)| \le \frac{(b-a)^2}{8n^2} \max_{x\in[x_{nk},x_{n,k+1}]} |f''(x)| \le \frac{(b-a)^2}{8n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

于是考虑定义在 $[a,b]$ 上的"折线函数" $\varphi_n(x)$，使得其图像为依次连接点 $(x_{n0}, f(x_{n0})), (x_{n1}, f(x_{n1})), \ldots, (x_{nn}, f(x_{nn}))$ 所得的折线（注意 $x_{n0} = a, x_{nn} = b$），则对任意 $x \in [a,b]$ 都有

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \le \frac{(b-a)^2}{8n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{(b-a)^2}{8n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{8n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \qquad (*)$$

而另一方面，"折线函数" $\varphi_n(x)$ 的积分可以直接计算：

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_{nk}) - \frac{b-a}{2n}(f(b) - f(a))$$

结合 $(*)$ 式可得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_{nk}) - \frac{b-a}{2n}(f(b) - f(a)) + R_n(x)$$

其中 $|R_n(x)| \le \frac{(b-a)^3}{8n^2} \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$，特别地当 $n \to +\infty$ 时成立 $R_n(x) \sim o(\frac{1}{n})$，从而完成证明。 □

习题 144. （习题27的另解）设常数 $\alpha > 0$，计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^\alpha} - \frac{n}{\alpha+1}\right)$$

解. 考虑 $[0,1]$ 上的函数 $f(x) = x^\alpha$，对其使用习题143的结果，有

$$\frac{1}{\alpha+1} = \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^\alpha} - \frac{n}{\alpha+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha - \frac{1}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{2}$$

□

习题 145. 计算下列极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}-\ln 2\right) \tag{1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{2}$$

解. 考虑 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，使用习题143的结论，可知

$$\begin{aligned}\ln 2 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}-\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2}-1\right)+o(\frac{1}{n})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{4n}+o(\frac{1}{n}) \quad (n\to+\infty)\end{aligned}$$

从而立刻得

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}-\ln 2\right)=-\frac{1}{4}$$

再看第 (2) 式，考虑 $[0,1]$ 上的函数 $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$，使用习题143的结果，有

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}-\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2}-1\right)+o(\frac{1}{n})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}+\frac{1}{4n}+o(\frac{1}{n})\end{aligned}$$

从而立刻得

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4}$$

□

注记：本题的 (1) 亦可使用 Stolz 定理求解。

习题 146. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{2}}\left(\int_0^1\frac{1}{\sqrt{n+x}}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{k}{n}}}\right)$$

证明. 令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，则 $f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$. 利用习题143的另证的某中间结论，可知

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{n+x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{k}{n}}}-\frac{(n+1)-n}{2n}(f(n+1)-f(n))+R_n$$

$$\text{其中} |R_n| \leq \frac{[(n+1)-n]^3}{8n^2} \max_{x\in[n,n+1]} |f''(x)| = \frac{3}{32}n^{-\frac{9}{2}}$$

所以当 $n \to +\infty$ 时成立 $R_n \sim o(n^{-\frac{5}{2}})$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{2}} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{n+x}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+\frac{k}{n}}} \right) = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{1}{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{4}$$

□

习题 147. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+j^2}$$

解. 注意到 $\sum\limits_{j=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+j^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n^2} \frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}$，于是考虑函数 $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[0,n]$ 上的积分，将此区间 n^2 等分用求和近似替代之。注意到 $f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，记 $M > 0$ 为它的一个上界，则由习题143另证当中的某中间结果，有

$$\int_0^n \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} - \frac{n}{2n^2}(f(n)-f(0)) + R_n(x)$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{n^3}{8(n^2)^2} \max_{x\in[0,n]} |f''(x)| \leq \frac{M}{8n}$$

从而立刻得到

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^n \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+j^2} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

□

习题 148. 对于区间 $[a,b]$，正整数 n 以及 $0 \leq k \leq n$，记 $L := b-a$ 以及 $x_{nk} = a + \frac{kL}{n}$. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的 4 阶连续可微函数，证明：$n \to +\infty$ 时成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{nk}) - \frac{L}{2n}(f(b)-f(a)) - \frac{L^2}{12n^2}(f'(b)-f'(a)) + o(\frac{1}{n^3})$$

证明. 与习题143完全类似。取定 n,k，考虑 $f(x)$ 在 x_{nk} 处的 Taylor 展开

$$f(x)=f(x_{nk})+f'(x_{nk})(x-x_{nk})+\frac{1}{2}f''(x_{nk})(x-x_{nk})^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(x_{nk})(x-x_{nk})^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_{nk})(x-x_{nk})^4$$

注意 $f^{(4)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，从而有上界。将上述 Taylor 展开式在区间 $[x_{nk}-\frac{L}{2n},x_{nk}+\frac{L}{2n}]$ 积分可得

$$\int_{x_{nk}-\frac{L}{2n}}^{x_{nk}+\frac{L}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{L}{n}f(x_{nk})+\frac{L^2}{24n^2}f''(x_{nk})+R_{nk}$$

其中余项 R_{nk} 满足 $|R_{nk}|\le\frac{ML^5}{1920n^5}$，其中 M 为 $|f^{(4)}(x)|$ 在 $[a,b]$ 的一个上界。特别地，$R_{nk}=o(\frac{1}{n^4})$. 将 k 从 1 到 $n-1$ 求和可得

$$\begin{aligned}
\int_{a+\frac{L}{2n}}^{b-\frac{L}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{nk})+\frac{L^3}{24n^3}\sum_{k=1}^{n-1}f''(x_{nk})+o(\frac{1}{n^3})\\
&= \frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{nk})+\frac{L^2}{24n^2}\left(\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x+\frac{L}{2n}(f''(b)-f''(a))+o(\frac{1}{n})\right)\\
&\quad -\frac{L^3}{24n^3}f''(b)+o(\frac{1}{n^3})\\
&= \frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{nk})+\frac{L^2}{24n^2}(f'(b)-f'(a))-\frac{L^3}{48n^3}(f''(b)+f''(a))+o(\frac{1}{n^3})
\end{aligned}$$

上述推导过程中，对 $f''(x)$ 使用了之前习题143的结论。类似地，对变上限的积分作 Taylor 展开，有

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+\frac{L}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{L}{2n}f(a)+\frac{L^2}{8n^2}f'(a)+\frac{L^3}{48n^3}f''(a)+o(\frac{1}{n^3})\\
\int_{b-\frac{L}{2n}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{L}{2n}f(b)-\frac{L^2}{8n^2}f'(b)+\frac{L^3}{48n^3}f''(b)+o(\frac{1}{n^3})
\end{aligned}$$

将以上各式相加即可得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_{nk})-\frac{L}{2n}(f(b)-f(a))-\frac{L^2}{12n^2}(f'(b)-f'(a))+o(\frac{1}{n^3})$$

□

注记

一般地，对于 $[a,b]$ 上充分高阶可微的函数 $f(x)$，以及任意 $m,n\geq 1$，沿用本题记号，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得成立

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{nk})-\frac{L}{2n}[f(b)-f(a)]\\ &\quad -\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}L^{2k}}{n^{2k}(2k)!}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]\\ &\quad -\frac{B_{2m+2}L^{2m+3}}{(2m+2)!n^{2m+2}}f^{(2m+2)}(\xi)\end{aligned}$$

其中 B_k 为伯努利数。上述公式称为 **Euler-Maclaurin 求和公式**。本题是其 $m=2$ 的简化版本。

习题 149. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}\right)$$

解. 考虑函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. 对 $f(x)$ 使用习题148的结论，有

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}-\frac{1}{2n}(f(1)-f(0))-\frac{1}{12n^2}(f'(1)-f'(0))+o(\frac{1}{n^3})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{24n^2}+o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

从而立刻得到

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{24}$$

□

习题 150. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\ln 2-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}}\right)$$

解. 考虑 $f(x):=\frac{1}{1+x}$ 在 $[0,1]$ 上的积分。分别考虑将区间 $[0,1]$ 作 $2n$、n 等分，套用习题148的结论，有

$$\ln 2 = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{2n}}-\frac{1}{2\cdot 2n}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{12\cdot(2n)^2}\cdot\frac{3}{4}+o(\frac{1}{n^3})$$

$$\ln 2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \frac{1}{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12n^2}\cdot\frac{3}{4} + o(\frac{1}{n^3})$$

上式第一式乘 2 再减去第二式，得到

$$\ln 2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}} + \frac{1}{32n^2} + o(\frac{1}{n^3})$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\ln 2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}}\right) = \frac{1}{32}$$

□

4.6 积分不等式

习题 151. 证明：对任意 $a \geq 0$，成立不等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+a\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi}{4}(1+\sqrt{1+a})$$

证明. 这是因为，由均值不等式可得，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+a\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1+a)\sin^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)+\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1+a)\sin^4 x+(2+a)\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1+a)\sin^4 x+2\sqrt{1+a}\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1+a}\sin^2 x+\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}(1+\sqrt{1+a})
\end{aligned}$$

□

注记 事实上，使用柯西不等式更容易，当然技巧性也很高：

另证. 使用柯西不等式，有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+a\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1+a)\sin^2 x+\cos^2 x}\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1+a}\sin^2 x+\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}(1+\sqrt{1+a})
\end{aligned}$$

□

习题 152. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续、恒正，证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x \geq \ln \frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x}$$

证明. 事实上，由众所周知的算术-几何-调和平均不等式，对任意 n 个正实数 $x_1, x_2, ..., x_n$，有

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

而本题是它的连续版本：将区间 $[a,b]$ 作 n 等分，记分割点为 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，则

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k) &= \ln\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)} \\ \ln\frac{b-a}{\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{f(x_k)}} &= \ln\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{f(x_k)}} \end{aligned}$$

再令 $n \to +\infty$，利用定积分的定义以及算术-几何-调和平均值不等式即证。 □

注记

事实上 $f(x)$ 恒正、可积足矣，“连续”这个条件过强。

习题 153. 对于 $[0,1]$ 上的可积函数 $f(x)$, 证明：

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x f^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{16}$$

证明. 注意在区间 $[0,1]$ 上恒成立 $x(x-2f(x))^2 \geq 0$, 从而

$$0 \leq \int_0^1 x[x-2f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - 4\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 4\int_0^1 x f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

整理即得证。 □

习题 154. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 一阶连续可导，并且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 证明：

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x, \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\right\}$$

证明. 如果 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 不变号，则显然 $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. 从而不妨 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 当中存在零点。记 $c \in [0,1]$ 为 $f(x)$ 的一个零点，则对任意 $x \in [0,1]$, 有

$$|f(x)| = |f(x) - f(c)| = \left|\int_c^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

取上式两边关于 x 在 $[0,1]$ 上的积分，即得证。 □

习题 155. 已知 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续可微函数，并且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 证明：

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \ge 2\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

证明. 注意到 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，从而有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 [2f(x) - f(0) - f(1)]f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{2}\int_0^1 |f(x)|\left(\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t + \int_x^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

习题 156. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数，且 $f(0) = 0$. 证明：

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\,\mathrm{d}x \le 4\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

证明. 注意 $f(0) = 0$，从而分部积分得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\frac{1}{x} \\
=& \int_0^1 \frac{2f(x)f'(x)}{x}\,\mathrm{d}x - f^2(1) \le 2\int_0^1 \frac{f(x)f'(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
\le& 2\left(\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

整理即得

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\,\mathrm{d}x \le 4\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

□

习题 157. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，并且成立 $1 \le f(x) \le 3$. 证明不等式：

$$1 \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$$

证明. 一方面注意 $f(x) \ge 0$，从而由柯西不等式得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \ge \left(\int_0^1 f(x) \cdot \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2 = 1$$

另一方面，注意到 $1 \le f(x) \le 3$, 从而可得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\,\mathrm{d}x \quad \le \quad \frac{1}{4}\left[\int_0^1 \left(f(x) + \frac{3}{f(x)}\right)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4$$

从而整理得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$. □

习题 158. 已知函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 非负、在 $\mathbb{R}$ 上反常可积，并且满足

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} t f(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

证明：对任意 $x > 0$, 成立不等式

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \ge \frac{x^2}{1+x^2}.$$

证明. 取定 $x > 0$, 注意对于任意 $t \ge x$ 成立 $\frac{1}{1+tx} \le \frac{1}{1+x^2}$, 从而有

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &\le \left(\int_x^{+\infty} f(t)(1+tx)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+tx)^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)(1+tx)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \left(\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &\le \frac{1}{(1+x^2)^2} \int_{\mathbb{R}} f(t)(1+tx)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

因此有 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \ge \frac{x^2}{1+x^2}$. □

注记

这是概率论中的一个重要的不等式。事实上，$f(x)$ 可以视为某个随机变量 X 的概率密度函数，则题设条件翻译为“X 的期望、方差分别为 $0,1$”. 需要证明的不等式翻译为“对任意 $x > 0, \mathbb{P}(X \le x) \ge \frac{x^2}{1+x^2}$”.

习题 159. 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,\pi]$ 连续，$f(0)=1$, 并且满足

$$\left(\int_0^{\pi}(\sin x+\cos x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\pi\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

试计算 $\int_0^{\pi}f^3(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 首先注意到 Cauchy 不等式：

$$\begin{aligned}\pi\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}(\sin x+\cos x)^2\,\mathrm{d}x\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &\geq \left(\int_0^{\pi}(\sin x+\cos x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &= \pi\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

上述柯西不等式取到等号，从而存在常数 C 使得 $f(x)=C(\sin x+\cos x)$. 由 $f(0)=1$ 可知 $C=1$, 即 $f(x)=\sin x+\cos x$. 从而

$$\int_0^{\pi}f^3(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\sin x+\cos x)^3\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{10}{3}.$$

□

习题 160. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶连续可微，且满足

$$f''(x)\leq 0,\quad 0\leq f(x)\leq 1,\quad f(0)=f(1)=0$$

证明：平面曲线 $y=f(x), 0\leq x\leq 1$ 的弧长 $s\leq 3$.

证明. 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 连续，从而存在 $x\in[0,1]$ 使得 f 在 $x=c$ 处取到最大值。不妨 $f(c)>0$（否则 f 为常函数），则 $c\in(0,1)$，因此 $f'(c)=0$. 又因为 $f''(x)\leq 0$，从而易知 $f'(x)$ 在 $[0,c]$ 非负，在 $[c,1]$ 非正。所以有

$$\begin{aligned}s &= \int_0^1\sqrt{1+|f'(x)|^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^c\sqrt{1+|f'(x)|^2}\,\mathrm{d}x+\int_c^1\sqrt{1+|f'(x)|^2}\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_0^c(1+f'(x))\,\mathrm{d}x+\int_c^1(1-f'(x))\,\mathrm{d}x=1+2f(c)\leq 3.\end{aligned}$$

□

习题 161. 记 L_n 为平面曲线 $y=x^n$, $(0\leq x\leq 1)$ 的弧长. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}L_n=2.$$

证明. 首先注意到

$$L_n = \int_0^1 \sqrt{1+[(x^n)']^2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \left(1+|(x^n)'|\right)\,\mathrm{d}x = 2$$

另一方面，对每个 n, 考虑曲线 $y=x^n$ 上的点 $P_n=(a_n,b_n)$, 其中 $a_n = 1-\frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$. 则容易验证 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. 设原点 $(0,0)$ 到点 P_n 的距离为 p_n, 点 $(1,1)$ 到 P_n 的距离为 q_n. 则由两点之间线段最短可知 $L_n \ge p_n+q_n$. 而

$$\lim_{n\to+\infty}(p_n+q_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\sqrt{(a_n-1)^2+(b_n-1)^2}\right)=2.$$

因此由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 2$. □

习题 162. 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，常数 $p>1$，并且 $\int_0^{+\infty}|f(t)|^p\,\mathrm{d}t<+\infty$. 证明：

$$\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{+\infty}|f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明. 记 $g(x) := \int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$，则对任意 $0<a<A<+\infty$，成立

$$\begin{aligned}
\int_a^A x^{-p}g^p(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{1-p}\int_a^A g^p(x)\,\mathrm{d}x^{1-p}\\
&= \frac{1}{1-p}\left(g^p(x)x^{1-p}\Big|_a^A - p\int_a^A x^{1-p}g^{p-1}(x)|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{p}{p-1}\int_a^A x^{1-p}g^{p-1}(x)|f(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p-1}\left(g^p(a)a^{1-p}-g^p(A)A^{1-p}\right)\\
&\le \frac{p}{p-1}\int_a^A x^{1-p}g^{p-1}(x)|f(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p-1}g^p(a)a^{1-p}
\end{aligned}$$

对上式两边取极限 $a\to0^+$ 以及 $A\to+\infty$，之后再使用 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^{-p}g^p(x)\,\mathrm{d}x &\le \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} x^{1-p}g^{p-1}(x)|f(x)|\,\mathrm{d}x\\
&\le \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{+\infty}x^{-p}g^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

整理即得

$$\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{+\infty}|f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

□

习题 163. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在任意阶导数，并且满足

$$\left|f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)\right|<\frac{1}{n^2},\qquad \forall n\in\mathbb{Z}_+,\forall x\in\mathbb{R}$$

证明：存在常数 C, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f^{(n)}(x)=Ce^x$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 成立。

证明. 考虑函数 $\varepsilon_n(x):=f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)$, 则 $|\varepsilon_n(x)|<\frac{1}{n^2}$. 解关于 $f^{(n-1)}(x)$ 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x)=\varepsilon_n(x)$$

可得

$$f^{(n-1)}(x)=\left(C_{n-1}+\int_0^x e^{-t}\varepsilon_n(t)\,\mathrm{d}t\right)e^x \tag{$*$}$$

其中 C_{n-1} 为常数，与 n 的选取有关。同样我们也有

$$f^{(n)}(x)=\left(C_n+\int_0^x e^{-t}\varepsilon_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t\right)e^x \tag{$**$}$$

将 $(*)$ 与 $(**)$ 代入 $f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)=\varepsilon_n(x)$, 整理得

$$C_n-C_{n-1}=\int_0^x e^{-t}\left(\varepsilon_n(t)-\varepsilon_{n+1}(t)\right)\,\mathrm{d}t+\varepsilon_n(x)e^{-x}$$

注意此式左边为常数，而右边与 x 有关。令 $x\to+\infty$, 注意 $\varepsilon_n(x)$ 为有界函数，从而得到

$$|C_n-C_{n-1}|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-t}\left(\varepsilon_n(t)-\varepsilon_{n+1}(t)\right)\,\mathrm{d}t\right|\le\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t\le\frac{2}{n^2}$$

由 $|C_n-C_{n-1}|\le\frac{2}{n^2}$ 不难推出 $\{C_n\}$ 为柯西列，从而收敛于某个常数 C. 于是对于任意 $x\in\mathbb{R}$, 注意到

$$\left|\int_0^x e^{-t}\varepsilon_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{(n+1)^2}\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t\to0,\qquad(n\to+\infty)$$

从而对 $(**)$ 式两边令 $n\to+\infty$, 立刻得到

$$\lim_{n\to+\infty}f^{(n)}(x)=Ce^x$$

□

注记

如果熟悉一致收敛逐项求导的相关知识，则由 $|f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)|<\frac{1}{n^2}$ 容易知道函数列 $\{f^{(n)}\}$ 一致收敛于某个函数 f, 并且

$$f'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to+\infty}f^{(n)}\overset{\text{易证}}{=\!=\!=}\lim_{n\to+\infty}f^{(n+1)}=f$$

即 $f'=f$, 解得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f^{(n)}(x)=f(x)=Ce^x$.

第五章 无穷级数与反常积分

5.1 级数基本概念、正项级数

习题 164. 设 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 为正数列，$S_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 为其部分和。

证明：对任意 $\varepsilon > 0$，级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{S_k^{1+\varepsilon}}$ 收敛。

证明. 如果 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k = a < +\infty$，则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{S_k^{1+\varepsilon}} \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{x_1^{1+\varepsilon}} = \frac{a}{x_1^{1+\varepsilon}} < +\infty$. 故不妨 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k = +\infty$. 注意到

$$\begin{aligned} \frac{x_k}{S_k^{1+\varepsilon}} &= \frac{1}{S_k^{1+\varepsilon}}(S_k - S_{k-1}) = \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{1}{S_k^{1+\varepsilon}}\,\mathrm{d}x \leq \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\,\mathrm{d}x \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{S_k^{1+\varepsilon}} &\leq \frac{x_1}{S_1^{1+\varepsilon}} + \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x_1^{\varepsilon}} + \int_{S_1}^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} < +\infty \end{aligned}$$

因此级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{S_k^{1+\varepsilon}}$ 收敛。 □

习题 165. 记 $r_1, r_2, r_3, \ldots$ 为全体有理数。对于实数 $x \in \mathbb{R}$，考虑函数

$$f(x) = \sum_{r_k < x} \frac{1}{2^k}$$

证明：函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有意义，严格单调递增，并且只在有理点处间断。

证明. 对于实数 $x \in \mathbb{R}$，$f(x)$ 为正项级数，显然 $f(x) \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$，从而该正项级数收敛，即 $f(x)$ 有意义。对任意实数 $x < y$，注意到有理数的稠密性，存在有理数 r_k 满足 $x < r_k < y$，因此 $f(y) - f(x) = \sum\limits_{x \leq r_n < y} \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^k}$, 这就证明的 $f(x)$ 是严格单调递增的。

断言 $f(x)$ 在有理点处间断。对于有理数 $x = r_k$，则对于任意实数 $y > x$, 成立 $f(y) - f(x) = \sum\limits_{x \leq r_n < y} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^k}$，因此右侧极限 $\lim\limits_{y \to x^+} f(y) \neq f(x)$，从而 f 在有理点 $x = r_k$ 不连续。

最后断言 $f(x)$ 在无理点处连续。对于任意给定的无理数 r, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 取足够大的 N 使得 $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$. 考虑集合 $A := \left\{ r_n \middle| n \leq N \right\}$ 为 $\mathbb{Q}$ 的有限子集. 由于 r 为无理数，从而 $r \notin A$, 于是

$$\delta := \min_{1 \leq n \leq N} |r_n - r| > 0$$

取定这个 δ，由 δ 的定义可知，对于任何一个有理数 r_k，如果 $|r_k - r| < \delta$，那么必须 $k \geq N$. 因此对任意 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $|x-r| < \delta$, 有

$$|f(x) - f(r)| = \left| \sum_{r_n\text{介于 } x \text{ 与 } r \text{ 之间}} \frac{1}{2^n} \right| \leq \sum_{|r_n - r| < \delta} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{2^N} = \frac{2}{2^N} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这就证明了 $f(x)$ 在无理点连续。 □

习题 166. 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ (2) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln\ln n}}$

证明. **(1)** 注意到 $(\ln\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \cdot \ln\ln\ln n} = n^{\ln\ln\ln n}$. 当 $n > e^{e^{e^2}}$ 时，$\ln\ln\ln n > 2$，因此 $n^{\ln\ln\ln n} > n^2$，从而

$$\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，从而原级数收敛。

(2) 注意到

$$\ln[(\ln\ln n)^{\ln\ln n}] = \ln\ln n \cdot \ln\ln\ln n < [\ln\ln n]^2$$

而对于足够大的实数 x，总有 $\ln x < \sqrt{x}$. 取 $x = \ln n$（n 足够大），则 $\ln\ln n < \sqrt{\ln n}$，所以 $[\ln\ln n]^2 < \ln n$，因此有

$$\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln[(\ln\ln n)^{\ln\ln n}]}} > \frac{1}{e^{[\ln\ln n]^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，从而原级数发散。 □

习题 167. 设 $a > 0$ 为常数，试讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} x_n$ 的敛散性，其中：

（1）$x_n = \dfrac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln n}{\ln(2+a) \cdot \ln(3+a) \cdots \ln(n+a)}$ （2）$x_n = (2-\sqrt{a})(2-\sqrt[3]{a})\cdots(2-\sqrt[n]{a})$

证明. 注意当 n 足够大时，（1）（2）中的 x_n 都不再变号。

（1）：此时有 $\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{\ln(n+2+a)}{\ln(n+2)}$，从而

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\ln(1+\frac{a}{n+2})}{\ln(n+2)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n+2}a+o(1)}{\ln(n+2)}=0$$

有 Rabbe 判别法可知级数（1）发散。

（2）：若 $0<a\leq 1$，则易知 $x_n\geq 1$ 对任意 $n\geq 2$ 都成立，从而原级数发散。于是不妨 $a>1$. 注意到 $\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{1}{2-\sqrt[n+1]{a}}$，从而

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(\sqrt[n+1]{a}-1)}{2-\sqrt[n+1]{a}}=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{\ln a}{n+1}=\ln a$$

从而有 Rabbe 判别法可知，当 $\ln a>1$ 即 $a>e$ 时，原级数收敛；$1<a<e$ 是原级数发散。而 $a=e$ 时 Rabbe 判别法失效，于是采用更精细的 Gauss 判别法如下：

$$\lim_{n\to+\infty}\ln n\left(n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right)=\lim_{n\to+\infty}\ln n\cdot\frac{ne^{\frac{1}{n+1}}-n-2+e^{\frac{1}{n+1}}}{2-e^{\frac{1}{n+1}}}=\lim_{n\to+\infty}\ln n\left(\frac{1}{2(n+1)}+o(\frac{1}{n})\right)=0$$

从而有 Gauss 判别法知 $a=e$ 时原级数发散。综上，原级数在 $0<a\leq e$ 时发散，在 $a>e$ 时收敛。 □

习题 168. 对于常数 $p,q>0$，讨论以下级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}.$$

解. 我们令

$$a_n:=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}=\frac{1}{qn^p}\left(\frac{1}{q+1}\cdot\frac{2}{q+2}\cdots\frac{n}{q+n}\right)$$

注意到该级数是正项级数，考虑 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\cdot\frac{n+q}{n}$，从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)&=\lim_{n\to+\infty} n\left[(1+\frac{1}{n})^p\cdot(1+\frac{q}{n})-1\right]\\&=\lim_{n\to+\infty} n\left[\left((1+\frac{1}{n})^p-1\right)\cdot(1+\frac{q}{n})+\frac{q}{n}\right]=p+q\end{aligned}$$

于是由 Raabe 判别法可知当 $p+q>1$ 时原级数收敛；$p+q<1$ 时原级数发散。而 $p+q=1$ 时 Raabe 判别法失效，我们考虑更精细的 Gauss 判别法：此时

$$\lim_{n\to+\infty}\ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]=\lim_{n\to+\infty}\ln n\left[n\left((1+\frac{1}{n})^p-1\right)\left(1+\frac{q}{n}\right)-p\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty} \ln n \left[\left(n\left((1+\frac{1}{n})^p-1\right)-p\right)\left(1+\frac{q}{n}\right)+p\cdot\frac{q}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[pq\cdot\frac{\ln n}{n}+\ln n\left(\frac{p(p-1)}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)\left(1+\frac{q}{n}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

从而 $p+q=1$ 时原级数发散。综上，当 $p+q>1$ 时原级数收敛，$p+q\leq 1$ 时原级数发散。 □

习题 169. 判断下述级数的收敛性。若收敛，则求和：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}.$$

证明. 众所周知，当 $n\to+\infty$ 时有等价无穷大量 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n$，而 $\ln n$ 为 $\sqrt{n}$ 的低阶无穷大量。易知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛，从而由正项级数的比较判别法可知原级数收敛。交换求和次序得

$$\text{原式} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1.$$

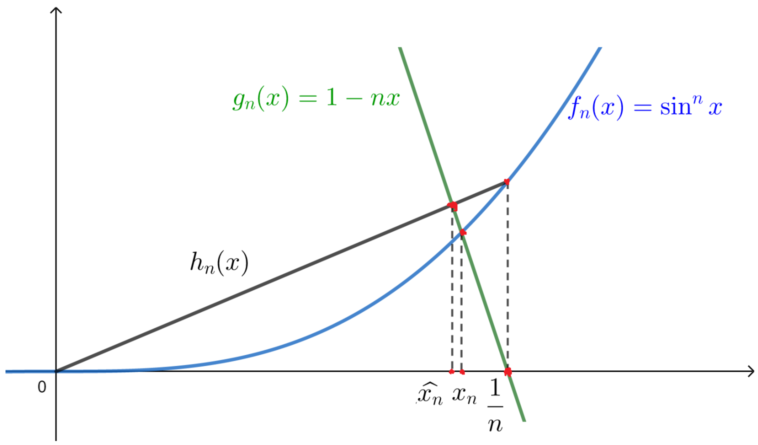
□

习题 170. 对于 $n\geq 1$，

（1）证明：方程 $\sin^n x+nx=1$ 有唯一实根，记为 x_n；

（2）对于 $\alpha>0$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n^\alpha$ 的敛散性。

证明. 考虑函数 $\begin{cases} f_n(x):=\sin^n x \\ g_n(x):=1-nx \end{cases}$，则易知 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_n(x)-g_n(x))=n(\sin^{n-1}x\cos x-1)\leq 0$，从而易知 f_n-g_n 严格单调递减。又因为 $f_n(0)<g_n(0)$ 以及 $f_n(\frac{1}{n})>g_n(\frac{1}{n})=0$，从而由介值原理可知存在 $x_n\in(0,\frac{1}{n})$ 使得 $f_n(x_n)=g_n(x_n)$，即 x_n 为题中方程的根。又由 f_n-g_n 的严格单调性，知满足题设的 x_n 唯一。



习题170示意图

对于 $n \geq 2$，注意到 $f_n''(x) = n\sin^{n-2}x\cos 2x$，从而易知 f_n 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 为凸函数。考虑函数 $h_n(x) := nx\sin^n \frac{1}{n}$，其图像为连接原点与 $(\frac{1}{n}, f_n(\frac{1}{n}))$ 的直线。由 f_n 的凸性可知 $h_n(x) \geq f_n(x)$ 在 $(0, \frac{1}{n})$ 成立（见示意图）。记 $\widehat{x_n}$ 为方程 $h_n(x) = g_n(x)$ 的根，则 $g_n(\widehat{x_n}) = h_n(\widehat{x_n}) \geq f_n(\widehat{x_n})$，从而由介值原理可知 $\widehat{x_n} \leq x_n < \frac{1}{n}$. 而容易计算得到 $\widehat{x_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\sin^n \frac{1}{n}}$，因此有

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\sin^n \frac{1}{n}} \leq x_n < \frac{1}{n}$$

特别地，$n \to +\infty$ 时有等价无穷小量 $x_n \sim \frac{1}{n}$，从而由正项级数比较判别法立刻得到原级数收敛当且仅当 $\alpha > 1$. □

习题 171. 已知正数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$，并且存在 $\delta > 0$ 使得 $b_{k+1} \geq b_k + \delta$ 对任意 $k \geq 1$ 成立. 证明：

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{b_k b_{k+1}} \sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)} < +\infty.$$

证明. 记 $S_k := \sum\limits_{i=1}^{k} a_i b_i$，则注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} a_k &= \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{S_k}{b_k} - \frac{S_k}{b_{k+1}}\right) + \frac{S_N}{b_N} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{b_{k+1} - b_k}{b_k b_{k+1}} S_k + \frac{S_N}{b_N} \geq \delta \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}}.\end{aligned}$$

从而正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$ 收敛。另一方面，注意不等式

$$\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)} = \sqrt[k]{(a_1 b_1)(a_2 b_2) \cdots (a_k b_k)} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k}{k} = \frac{S_k}{k}$$

因此易知证毕。 □

习题 172. 设正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛于 A.

证明: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在趋于正无穷的正数列 $\{x_n\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_n x_n < \varepsilon.$$

证明. 对每个 $k \geq 1$, 取足够大的正整数 n_k, 使得 $\sum\limits_{n=n_k}^{+\infty} x_n < \frac{1}{4^k}$. 此外特别规定 $n_0 = 1$. 不妨数列 $\{n_k\}$ 严格单调递增. 考虑数列 $\{a'_n\}$ 使得

$$a'_n := 2^k \quad \text{如果} n_{k-1} \leq n < n_k$$

则数列 $\{a'_n\}$ 单调递增趋于无穷, 且

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a'_k x_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} a'_k x_k = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} x_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \sum_{n=n_{k-1}}^{+\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \cdot \frac{1}{4^{k-1}} = 4$$

从而对于任意 $\varepsilon > 0$, 取数列 $a_n := \frac{\varepsilon}{4} a'_n$, 则 $\{a_n\}$ 依然趋于正无穷, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \leq \frac{\varepsilon}{4} \cdot 4 = \varepsilon$. □

5.2 一般项级数

习题 173. 已知级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，$\{p_n\}$ 是递增趋于无穷的正数列。证明：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p_n} \sum_{k=1}^{n} p_k a_k = 0.$$

证明. 不妨 $p_n > 0$ 恒成立。对任意 $\varepsilon > 0$，由级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛的柯西收敛准则可知存在 $N > 0$，使得对任意 $M' > 0$，都有

$$\left| \sum_{k=N}^{N+M'} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

取定此 N，记 $A := \max\left\{ |a_k| \middle| 1 \leq k \leq N \right\}$. 由于 $\{p_n\}$ 单调递增趋于无穷，从而存在 $M > 0$ 使得对任意 $n > N + M$ 都成立 $p_n > \frac{2Np_N A}{\varepsilon}$. 取定如此的 $N + M$，则对于任意的 $n > N + M$，注意 $\{p_n\}$

单调递增，从而有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{n}p_ka_k\right| &\leq \left|\frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{N}p_ka_k\right|+\underbrace{\left|\frac{1}{p_n}\sum_{k=N+1}^{n}p_ka_k\right|}_{:=R_n}\\ &\leq \frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{N}p_k|a_k|+R_n\leq \frac{1}{p_n}Np_NA+R_n\leq\frac{\varepsilon}{2}+R_n\end{aligned}$$

为估计 R_n，对于 $n\geq N$ 我们记 $S_n:=\sum\limits_{k=N}^{n}a_n$ 为 $\{a_n\}$ 的从第 N 项开始相加的部分和。则由前文所述，当 $n\geq N$ 时成立 $|S_n|<\frac{\varepsilon}{4}$，于是

$$\begin{aligned}|R_n| &= \left|\frac{1}{p_n}\sum_{k=N}^{n}p_k(S_k-S_{k-1})\right|=\frac{1}{p_n}\left|\sum_{k=N}^{n-1}(p_k-p_{k+1})S_k+p_nS_n\right|\\ &\leq \frac{1}{p_n}\left(\sum_{k=N}^{n-1}|p_k-p_{k+1}|\cdot|S_k|+p_n|S_n|\right)\\ &\leq \frac{1}{p_n}\left(\sum_{k=N}^{n-1}(p_{k+1}-p_k)+p_n\right)\cdot\frac{\varepsilon}{4}\leq\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

因此当 $n>N+M$ 时，成立

$$\left|\frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{n}p_ka_k\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+R_n\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

从而得证。 □

习题 174. 判断下述级数的敛散性：

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

证明. 该级数发散。记 $a_n:=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ $(n\geq 2)$，考虑 $b_n:=a_{2n}+a_{2n+1}$，则

$$\begin{aligned}b_n &= \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\\ &= \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}(\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1})}\right)<0\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-b_n)$ 为正项级数；而由上式易得等价无穷小 $b_n\sim-\frac{1}{2n}$，从而由正项级数的比较判别法立刻得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散。因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_n$ 也发散。 □

另证. 其实更简便的做法是泰勒展开，注意把余项说清楚即可。注意到

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\frac{\theta_n}{n\sqrt{n}}$$

其中 $\{\theta_n\}$ 是**有界**数列，于是 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\theta_n}{n\sqrt{n}}$ 收敛。又显然 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，但是 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，从而立刻得到原级数发散。 □

注记

此题的阴险之处在于，诱使一些人想当然地以为可以用等价无穷小

$$a_n:=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

又因为交错级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，所以“由比较判别法可知”原级数收敛。上述做法是错误的，用通项等价无穷小的比较判别法只适用于正项级数。

习题 175. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，并且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0.$

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|f(\frac{1}{n})|$ 收敛。

证明. 由条件 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 容易得出 $f(0)=f'(0)=0.$ 记 $A:=f''(0)$，考虑 f 在 $x=0$ 的泰勒展开

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(0)+R(x)=\frac{A}{2}x^2+R(x)$$

其中余项 $R(x)\sim o(x^2)$，即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{R(x)}{x^2}=0.$ 从而取 $\delta>0$，使得对任意 $|x|\le\delta$ 都有 $|R(x)|<x^2.$ 记 $N:=\frac{1}{\delta}+1$，则对任意 $n\ge N$ 都有

$$|f(\frac{1}{n})|=\left|\frac{A}{2n^2}+R(\frac{1}{n})\right|\le\left(\frac{A}{2}+1\right)\frac{1}{n^2}$$

从而立刻得到 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}|f(\frac{1}{n})|$ 收敛。从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|f(\frac{1}{n})|$ 也收敛。 □

习题 176. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，$p>0$ 为正实数。讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 的敛散性。

证明. 该级数在 $p>1$ 时收敛，在 $0<p\le 1$ 时发散。我们先断言当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时成立

$$\frac{16}{\pi^2}x^2 \le \tan x \le \frac{4}{\pi}x$$

令 $g(x):=\frac{16}{\pi^2}x^2$ 以及 $h(x):=\frac{4}{\pi}x$，则注意到 $g(0)=\tan 0=h(0)=0$ 以及 $g(\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=h(\frac{\pi}{4})=1$. 容易求导验证 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big|_{x=0}(\tan x-g(x))>0\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big|_{x=\frac{\pi}{4}}(\tan x-g(x))<0\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\tan x-g(x))\le 0,\ \forall x\in[0,\frac{\pi}{4}]\end{cases}$，因此 $\tan x\ge g(x)=\frac{16}{\pi^2}x^2$. 而 $\tan x\le\frac{4}{\pi}x$ 更容易验证。因此有

$$\begin{aligned} a_n &\ge \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{16}{\pi^2}x^2)^n\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2n+1}\\ a_n &\le \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{4}{\pi}x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

因此，若 $p>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p\le(\frac{\pi}{4})^p\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p}<+\infty$，因此原级数收敛；而当 $0<p\le 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p\ge(\frac{\pi}{4})^p\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^p}=+\infty$，因此原级数发散。 □

习题 177. 判断下述级数的敛散性：

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

解. 该级数发散。注意到该级数的通项

$$\begin{aligned} &(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\\ =\ &(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\\ =\ &(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}+(-1)^n\frac{1}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

由交错级数的 Leibniz 判别法可知 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ 与 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ 都收敛；再注意 $n\to+\infty$ 时的等价无穷小 $\frac{\sqrt{n}}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{n}$，从而比较判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散。综上所述，原级数发散。 □

习题 178. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

证明. 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} &= -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots\frac{1}{15}\right)+\cdots\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

令 $b_n:=\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}$, 则只需证明交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$ 收敛即可. 事实上, 由定积分几何意义以及函数 $\frac{1}{x}$ 的单调性可知

$$\begin{aligned}0\le b_n &\le \int_{n^2-1}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln\frac{n^2+2n}{n^2-1}=\ln\left(1+\frac{2n+1}{n^2-1}\right)\to 0\qquad (n\to+\infty)\end{aligned}$$

从而由交错级数的 Leibniz 判别法得证. □

习题 179. 计算极限:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right).$$

解. 由定积分的定义, 有

$$原式=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[2\cdot\frac{1}{\frac{k}{n}}\right]-2\left[\frac{1}{\frac{k}{n}}\right]\right)=\int_0^1\left(\left[\frac{2}{t}\right]-2\left[\frac{1}{t}\right]\right)\mathrm{d}t,$$

于是只需计算上述等号右侧的反常积分. 容易验证对于正整数 $k\ge 2$, 当 $t\in(\frac{2}{k+1},\frac{2}{k})$ 时, 成立

$$[\frac{2}{t}]-2[\frac{1}{t}]=\begin{cases}1 & k为奇数;\\ 0 & k为偶数.\end{cases}$$

从而易知

$$\begin{aligned}原式 &= \sum_{k=2}^{+\infty}\int_{\frac{2}{k+1}}^{\frac{2}{k}}\left([\frac{2}{t}]-2[\frac{1}{t}]\right)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{\substack{k=3\\ k\text{ 为奇数}}}^{+\infty}\int_{\frac{2}{k+1}}^{\frac{2}{k}}\mathrm{d}t=\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{2l+1}-\frac{2}{2l+2}\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)\\ &= 2\ln 2-1.\end{aligned}$$

□

5.3 幂级数

习题 180. 对于正整数 n, 考虑函数 $f(x)=(1+x)^{2n+1}+(1-x)^{2n+1}$. 试通过对 $f(x)$ 作二项展开、求导，证明以下组合恒等式：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k} &= 2^{2n}\\ \sum_{k=0}^{n}k\binom{2n+1}{2k} &= (2n+1)2^{2n-2}\\ \sum_{k=0}^{n}k^2\binom{2n+1}{2k} &= (n+1)(2n+1)2^{2n-3}.\end{aligned}$$

证明. 对 $f(x)$ 的表达式作二项展开易得

$$f(x)=(1+x)^{2n+1}+(1-x)^{2n+1}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}x^k \qquad (*)$$

令 $x=1$ 得 $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}=2^{2n}$. 对 $(*)$ 两边求导并且令 $x=1$ 得到

$$(2n+1)2^{2n}=\sum_{k=1}^{n}2\cdot 2k\binom{2n+1}{k}$$

从而整理得 $\sum\limits_{k=0}^{2n}k\binom{2n+1}{2k}=(2n+1)2^{2n-2}$. 再对 $(*)$ 两边求二阶导并且令 $x=1$（此时要格外小学求和指标的范围），得到

$$\begin{aligned}f''(1) &= n(2n+1)2^{2n}\\ f''(1) &= 2\sum_{k=1}^{n}2k(2k-1)\binom{2n+1}{2k}\\ &= 4\left[2\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{2n+1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}k\binom{2n+1}{2k}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}k^2\binom{2n+1}{2k} &= \frac{1}{2}\left(n(2n+1)2^{2n-2}+\sum_{k=0}^{n}k\binom{2n+1}{2k}\right)\\ &= n(2n+1)2^{2n-3}+(2n+1)2^{2n-3}\\ &= (n+1)(2n+1)2^{2n-3}.\end{aligned}$$

□

习题 181. 对于函数 $f(x)=x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，试求 $f^{(n)}(0)$.

解. 我们考虑在 $x=0$ 处的幂级数展开。令 $g(x):=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}x^{2k}=1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k}$$

再逐项积分可得

$$f(x)=x^2\left(x+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k+1}\right)$$

从而与 $x=0$ 的泰勒系数比较，立刻得到

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=0,1,2\text{ 或者 }n\text{ 为偶数}\\ 6 & n=3\\ (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!(2k+1)!}{2^{2k-1}(k-1)!(2k-1)} & n>3\text{ 且 }n=2k+1\text{ 为奇数}\end{cases}$$

□

习题 182. 将函数

$$f(x)=\int_0^x e^{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t$$

展开为 $x=0$ 附近的幂级数。

解法一：.（直接暴力计算）写成两个级数的柯西乘积，有

$$\begin{aligned}f(x)&=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{k!}\right)\cdot\left(\int_0^x\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-t)^{2l}}{l!}\,\mathrm{d}t\right)\\&=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{1}{2l+1}\cdot\frac{(-1)^l}{l!}x^{2l+1}\right)\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l}{l!(k-l)!(2l+1)}\right)x^{2k+1}\end{aligned}$$

对于每个 $k\geq 0$, 为了计算 x^{2k+1} 项的系数 $\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l}{l!(k-l)!(2l+1)}$, 我们引入函数

$$g_k(x):=\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l}{l!(k-l)!(2l+1)}x^{2l+1}$$

则 $g_k'(x)=\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l}{l!(k-l)!}x^{2l}=\frac{1}{k!}(1-x^2)^k$, 于是

$$\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l}{l!(k-l)!(2l+1)}=g_k(1)=\int_0^1 g_k'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k!}\int_0^1(1-x^2)^k\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{k!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{2^k}{(2k+1)!!}$$

从而 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!!} x^{2k+1}$. □

解法二：.（考虑系数的递推关系）易知 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的幂级数存在，且注意到 $f(x)$ 为积函数，从而可设

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{2k+1} \tag{$*$}$$

对 $f(x) = \int_0^x e^{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t$ 两边求导得 $f'(x) = 2xf(x)+1$, 将幂级数展开 $(*)$ 代入, 比较系数得

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ (2k+1)a_k = 2a_{k-1}, \quad \forall k \geq 1 \end{cases}$$

从而容易解得 $a_k = \frac{2^k}{(2k+1)!!}$. 从而 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!!} x^{2k+1}$. □

习题 183. 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n^2-1}$ 的和函数。

证明. 直接计算之，有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{x^2}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{x^2-1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k} + \frac{1}{2}\left(-x + \frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{1-x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}.
\end{aligned}$$

□

习题 184. 计算和函数：

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^{2n-1}.$$

解. 注意到对于任意 $k \geq 2$, 成立

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}$$

从而得到

$$\begin{aligned} S(x) &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^{2n-1} \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!} \left((-1)^{n-1} 2^{2n-1} x^{2n-1}\right) \\ &= x - \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x^2)^n \\ &= x - \frac{\sqrt{1-4x^2}-1+2x^2}{2x} = \frac{\sqrt{1-4x^2}-1}{2x} \end{aligned}$$

□

习题 185. 对于正整数 k, 计算和函数:

$$f(x) := \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$$

解.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+k)x^n \\ &= \frac{x^k}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+k}\right) = \frac{x^k}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - \cdots - x^{k-1}\right) \\ &= \frac{x^k}{k!}\cdot\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \end{aligned}$$

□

习题 186. 级数求和:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1^2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\cdots+\frac{k^2}{k!}\right)\frac{1}{3^k}$$

解. 交换求和次序，有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{3^k}\frac{i^2}{i!} = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i^2}{i!}\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i^2}{i!}\frac{1}{3^i} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i}{(i-1)!}\frac{1}{3^i}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{i!}\frac{1}{3^i}+\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\frac{1}{3^i}\right) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}+1)e^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

□

习题 187. 对于正整数 n, 将平面曲线 $x^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{1}{n}}=1$ 在第一象限的部分与坐标轴围成的区域的面积记为 I_n. 证明：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} I_n \le \frac{8}{9}.$$

证明. 先计算并估计 I_n. 易知

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^n \mathrm{d}x \xlongequal{x=t^n} n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^n\,\mathrm{d}t = n\int_0^1[t(1-t)]^{n-1}\cdot(1-t)\,\mathrm{d}t\\ &\le n\int_0^1\left(\frac{t+1-t}{2}\right)^{2n-2}\cdot(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{2^{2n-2}}\int_0^1(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{2^{2n-1}}.\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} I_n \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{2n-1}} = \frac{8}{9}$. □

5.4 无穷乘积

习题 188. 计算无穷乘积：

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right).$$

解. 对于任意 $n\ge 1$, 直接计算前 n 项乘积，有

$$\begin{aligned}&\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{2^k}}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{2^{k+1}}-1}{2^{2^k}-1}\right) = \frac{1}{2^{\sum\limits_{k=1}^{n}2^k}}\cdot\frac{2^{2^{n+1}}-1}{3}\\ =\ &\frac{1}{2^{2^{n+1}-2}}\cdot\frac{2^{2^{n+1}}-1}{3} = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)\end{aligned}$$

从而令 $n\to+\infty$ 立刻得到 $\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)=\frac{4}{3}$. □

5.5 反常积分的收敛性

习题 189. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，其零点为 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n<\cdots$，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

证明：如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

证明. 我们用 Cauchy 收敛准则来说明反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

对任意 $\varepsilon>0$，由级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知存在 $N>0$，使得对任意 $n_2>n_1\geq N$，都有

$$\left|\sum_{k=n_1}^{n_2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}$$

再注意到 $\{x_k\}$ 为连续函数 $f(x)$ 的全部零点，从而由连续函数的性质可知对任意 $k\geq 0$，$f(x)$ 在区间 (x_k,x_{k+1}) 不变号，从而对于 (x_k,x_{k+1}) 的任何一个子区间 (x_k',x_{k+1}')，必有

$$\left|\int_{x_k'}^{x_{k+1}'} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

回顾我们已经取定的 N，现在我们令 $M:=x_{N+1}$，则对于任意 $a_2>a_1\geq M$，必存在唯一的 n_1，使得 $a_1\in[x_{n_1-1},x_{n_1})$；以及唯一的 n_2，使得 $a_2\in[x_{n_2},x_{n_2+1})$. 容易知道 $n_1,n_2\geq N+1$. 从而有

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{a_1}^{x_{n_1}} f(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{k=n_1}^{n_2-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_{n_2}}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \left|\int_{a_1}^{x_{n_1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\sum_{k=n_1}^{n_2-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_{n_2}}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \left|\int_{x_{n-1}}^{x_{n_1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\sum_{k=n_1}^{n_2-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_{n_2}}^{x_{n_2+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon
\end{aligned}$$

从而反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。 □

习题 190. 已知定义在 $[1,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 使得 $\int_1^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$，并且存在 $M>0$ 使得对任意 $x,y\geq 1, x\neq y$ 都成立

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明. 采用反证法。如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 不成立，则存在 $\varepsilon>0$，以及存在一列 $1<x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$，并且 $|f(x_n)|>\varepsilon$ 对任意 $n\geq 1$ 成立。我们不妨假设 $x_{n+1}-x_n>\frac{\varepsilon}{M}$ 总成立（否则适当取子列）。对于每个 $n\geq 1$，考虑区间 $I_n:=(x_n-\frac{\varepsilon}{2M},x_n+\frac{\varepsilon}{2M})$，则对于不同的 m,n，$I_m\cap I_n=\varnothing$. 注意到对任意 $x\in I_n$，

$$|f(x)|\geq |f(x_n)|-|f(x)-f(x_n)|\geq |f(x_n)|-M|x-x_n|\geq \varepsilon-M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\frac{\varepsilon}{2}$$

从而有

$$\int_1^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{I_n}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\geq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon^2}{4}\int_{I_n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon^3}{4M}=+\infty$$

与 $\int_1^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$ 产生矛盾。 □

习题 191. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，并且 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在。证明：

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x=0$$

证明. 考虑函数 $F(y):=\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{y\to+\infty}F(y)$ 存在，记该极限为 A. 则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{y}\int_0^y x\,\mathrm{d}F(x)=\frac{1}{y}\left(xF(x)\big|_0^y-\int_0^y F(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= F(y)-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{y\to+\infty}F(y)=A$，从而由众所周知的方法易证 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y F(x)\,\mathrm{d}x=A$，因此令上式的 $y\to+\infty$ 取极限得

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x=A-A=0$$

□

习题 192. 已知 $f:[1,+\infty)\to(e,+\infty)$ 是单调递增的连续函数，并且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x=+\infty$. 证明：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)}=+\infty$$

证明. 反证法。假设积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)}$ 收敛，则由 Cauchy 收敛准则，存在 $N>1$ 使得对任意 $A_2>A_1>N$ 都成立

$$\frac{1}{2}\geq\int_{A_1}^{A_2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)}\geq\int_{A_1}^{A_2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(A_2)}=\frac{1}{\ln f(A_2)}\ln\frac{A_2}{A_1}$$

令 $A_2=A_1^3$，则上式整理得

$$f(A_2)\geq A_2^{\frac{4}{3}}$$

对任意 $A_2>N^3$ 都成立。也就是说，对于充分大的 x 都有 $f(x)\geq x^{\frac{4}{3}}$，从而立刻得 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 收敛，与题设矛盾。 □

习题 193. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续可导，$f(0)>0$，并且 $f'(x)>0$ 恒成立。证明：若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 也收敛。

证明. 由题设可知 $f(x)$ 恒为正，且严格单调递增。对任意 $x>0$，考虑 $F(x):=\int_0^x\frac{1}{f'(t)}\,\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 是单调递增函数。若再证明 $F(x)$ 有上界，则得证。记 $M:=\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}F(x)&\leq\left|\int_0^x\left(\frac{1}{f(t)}-\frac{1}{f(t)+f'(t)}\,\mathrm{d}t\right)\right|+\int_0^x\frac{1}{f(t)+f'(t)}\,\mathrm{d}t\\&\leq\int_0^{+\infty}\frac{f'(t)}{f(t)(f(t)+f'(t))}\,\mathrm{d}t+M\\&\leq\int_0^{+\infty}\frac{f'(t)}{f^2(t)}\,\mathrm{d}t+M=\int_{f(0)}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}+M=M+\frac{1}{f(0)}\end{aligned}$$

这就证明了 $F(x)$ 有上界。综上，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ 收敛。 □

5.6 反常积分的计算

习题 194. 计算反常积分：

$$\int_0^{+\infty}e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$

解. 易知 $\int e^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}e^{-2x}(\cos x+2\sin x)$，于是有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}e^{-2x}(\cos x+2\sin x)\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-(2k+1)\pi}+e^{-2k\pi}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}\end{aligned}$$

□

习题 195. （*Frullani* 积分）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，并且极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 均存在且有限。证明：对任意 $a,b>0$，成立

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=(f(+\infty)-f(0^+))\ln\frac{a}{b}$$

证明. 不妨 $a>b$. 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{M\to+\infty}\int_{1/M}^{M}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{M\to+\infty}\left(\int_{a/M}^{aM}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{b/M}^{bM}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{M\to+\infty}\int_{bM}^{aM}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\lim_{M\to+\infty}\int_{b/M}^{a/M}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta:=\frac{1}{\ln\frac{a}{b}}>0$，则由 $f(+\infty)$ 存在可知，存在 $M_0>0$，使得对任意 $x>M_0$ 都有 $|f(x)-f(+\infty)|\le\frac{\varepsilon}{\ln\frac{a}{b}}$. 对任意 $M>M_0$，注意到 $\int_{bM}^{aM}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\frac{a}{b}$，从而

$$\begin{aligned}\left|\int_{bM}^{aM}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-f(+\infty)\ln\frac{a}{b}\right| &= \left|\int_{bM}^{aM}\frac{f(x)-f(+\infty)}{x}\,\mathrm{d}x\right|\\ &\le \int_{bM}^{aM}\frac{|f(x)-f(+\infty)|}{x}\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{\varepsilon}{\ln\frac{a}{b}}\int_{bM}^{aM}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{M\to+\infty}\int_{bM}^{aM}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}$. 同理我们也有 $\lim\limits_{M\to+\infty}\int_{b/M}^{a/M}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0^+)\ln\frac{a}{b}$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{M\to+\infty}\int_{bM}^{aM}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\lim_{M\to+\infty}\int_{b/M}^{a/M}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= (f(+\infty)-f(0^+))\ln\frac{a}{b}\end{aligned}$$

□

习题 196. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调，并且反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在。证明：

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{h\to0^+}h\sum_{n=1}^{+\infty}f(nh)$$

证明. 不妨 $f(x)$ 是单调递减的，则由 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛可知，$f(x)$ 单调递减趋近于 0（$x\to+\infty$）. 从而对任意 $h>0$ 以及正整数 N, 成立

$$h\sum_{n=1}^{N} f(nh)\le\int_0^{Nh} f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

令 $N\to+\infty$, 得到

$$h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\le\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

注意上式对任意 $h>0$ 都成立，从而取 $h\to0^+$ 的上极限，得到

$$\varlimsup_{h\to0^+} h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\le\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{$*$}$$

另一方面，对任意 $\varepsilon>0$, 由于 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛可知，存在 $M>0$ 使得成立

$$\int_0^{M} f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x-\varepsilon$$

取定此 M, 注意到对任意 $h>0$, 成立

$$h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\ge h\sum_{n=1}^{\left[\frac{M}{h}\right]} f(nh)$$

从而取 $h\to0^+$ 的下极限得到

$$\varliminf_{h\to0^+} h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\ge\varliminf_{h\to0^+} h\sum_{n=1}^{\left[\frac{M}{h}\right]} f(nh)\xlongequal{\text{定积分的定义}}\int_0^{M} f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x-\varepsilon \tag{$**$}$$

结合 $(*)$ 与 $(**)$ 式可知，对任意 $\varepsilon>0$ 都成立

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x-\varepsilon\le\varliminf_{h\to0^+} h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\le\varlimsup_{h\to0^+} h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\le\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 即得证。 □

习题 197. 对于实数 $t>0$，证明:

$$\int_0^{+\infty} e^{-y-\frac{t^2}{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}=\sqrt{\pi}e^{-2t}$$

证明.

$$\int_0^{+\infty} e^{-y-\frac{t^2}{y}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} \xlongequal{y=x^2} 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x = 2e^{-2t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{t}{x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$I(t) := \int_0^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{t}{x}\right)^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x\mapsto\frac{t}{x}} \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2} e^{-\left(x-\frac{t}{x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \qquad 2I(t) = \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{x^2}\right)e^{-\left(x-\frac{t}{x}\right)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{t}{x}\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{t}{x}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

从而 $I(t) := \int_0^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{t}{x}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，因此有

$$\int_0^{+\infty} e^{-y-\frac{t^2}{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = 2e^{-2t}I(t) = \sqrt{\pi}e^{-2t}$$

□

习题 198. 计算积分：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

解. 先反复分部积分，再注意三倍角公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$，有

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin^3 x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^3 x}{x^2}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{3\sin^2 x\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= -\frac{3}{2}\left(\frac{\sin^2 x\cos x}{x}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x - 3\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x - \frac{3}{4}(3\sin x - \sin 3x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \left(-\frac{3}{8}+\frac{9}{8}\right)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\pi
\end{aligned}$$

□

习题 199. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^n \frac{\arctan\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

解. 首先由泰勒公式容易证明，存在 $\delta > 0$，使得对任意 $|x| < \delta$ 都成立 $|\arctan x - x| < x^3$. 此外注意 $|\arctan x| \le |x|$ 总是成立的，从而 $|\arctan x - x| \le 2|x|$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立。

现在，对任意的 $\varepsilon > 0$，易知反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$ 收敛，从而由柯西收敛原理可知存在 $M > 0$，使得 $\int_M^{+\infty} \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)\,\mathrm{d}x} \le \frac{\varepsilon}{2}$. 现在，取

$$N := \max\left\{\left(\frac{2}{\varepsilon}\int_0^M \frac{x^3}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{M}{\delta}\right\} + 1$$

从而对任意 $n > N$，成立

$$\begin{aligned}
&\left| n\int_0^n \frac{\arctan\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x - \int_0^n \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \right| \le \int_0^{+\infty} \frac{|n\arctan\frac{x}{n} - x|}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\
= &\int_0^M \frac{|n\arctan\frac{x}{n} - x|}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x + \int_M^{+\infty} \frac{|n\arctan\frac{x}{n} - x|}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\
\le &\frac{1}{n^2}\int_0^M \frac{x^3}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x + \int_M^{+\infty} \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\
\le &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

这就说明了

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^n \frac{\arctan\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

接下来只需计算右边的反常积分：

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1+x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

□

习题 200. 计算极限：

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x+1-\cos\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$$

解. 换元积分 $x = \frac{u}{\lambda}$ 整理得

$$\lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x+1-\cos\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}\,\mathrm{d}u$$

上式两边对 λ 取极限得

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x+1-\cos\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}\,\mathrm{d}u \\
\overset{??}{=} \int_0^{+\infty} \lim_{\lambda\to+\infty} e^{-u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}\,\mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

但是这还没完。上述"$\overset{??}{=\!=}$"的交换积分与极限顺序并非理所当然，其合法性需要验证。（若熟悉**一致收敛**的有关知识，则容易验证该步的合法性。我们假装读者不熟悉"一致收敛"，但还是要假惺惺地证明一下）现在我们证明"$\overset{??}{=\!=}$"的合法性，即证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}\,\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\lim_{\lambda\to+\infty} e^{-u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}\,\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}u}\,\mathrm{d}u \qquad (*)$$

对任意 $\varepsilon>0$，取定 $M>0$ 使得 $\int_M^{+\infty}e^{-u}\,\mathrm{d}u<\frac{\varepsilon}{4}$，则有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{+\infty} e^{-u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}\,\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{3}{2}u}\,\mathrm{d}u\right|\\
\le\ &\int_0^M\left|e^{-u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}\,\mathrm{d}u-e^{-\frac{3}{2}u}\right|\,\mathrm{d}u+\int_M^{+\infty}e^{-u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}\,\mathrm{d}u+\int_M^{+\infty}e^{-\frac{3}{2}u}\,\mathrm{d}u\\
\le\ &\int_0^M e^{-\frac{3}{2}u}\left|e^{\frac{1}{2}u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}-1\right|\,\mathrm{d}u+2\int_M^{+\infty}e^{-u}\,\mathrm{d}u\\
\le\ &\int_0^M\left|e^{\frac{1}{2}u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}-1\right|\,\mathrm{d}u+2\cdot\frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

考虑 $f(x)=\cos x$ 在 0 处的带 Lagrange 余项的泰勒展开，有

$$\begin{aligned}
&\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}=1-\frac{u}{2\lambda}+\frac{\cos\xi_\lambda}{4!}\cdot\frac{u^2}{\lambda^2}\\
\Rightarrow\quad &\frac{1}{2}u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)=\frac{\cos\xi_\lambda}{4!}\cdot\frac{u^2}{\lambda}>0
\end{aligned}$$

因此对任意 $0\le u\le M$，有

$$\left|e^{\frac{1}{2}u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}-1\right|=e^{\frac{\cos\xi_\lambda}{4!}\cdot\frac{u^2}{\lambda}}-1\le e^{\frac{u^2}{\lambda}}-1\le e^{\frac{M^2}{\lambda}}-1$$

而 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}e^{\frac{M^2}{\lambda}}-1=0$，从而取 $N>0$使得对任意 $\lambda>N$ 都成立 $e^{\frac{M^2}{\lambda}}-1\le\frac{\varepsilon}{2M}$. 于是对任意 $\lambda>N$，成立

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{+\infty} e^{-u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}\,\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{3}{2}u}\,\mathrm{d}u\right|\\
\le\ &\int_0^M\left|e^{\frac{1}{2}u-\lambda\left(1-\cos\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\right)}-1\right|\,\mathrm{d}u+2\cdot\frac{\varepsilon}{4}\\
\le\ &\int_0^M\left(e^{\frac{M}{\lambda^2}}-1\right)\,\mathrm{d}u+\frac{\varepsilon}{2}\le\int_0^M\frac{\varepsilon}{2M}\,\mathrm{d}u+\frac{\varepsilon}{2}=M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

从而完成证明。 □

习题 201. 计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[n\left(n\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^n}\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

解. 对于给定的 $n\geq 2$，分部积分得

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^n}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{1-n}\int_1^{+\infty}\arctan x\,\mathrm{d}(x^{1-n})\\ &= \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n-1}\int_1^{+\infty}\frac{x^{1-n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n-1}\int_0^{1}\frac{x^{n-1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

反复分部积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(x^n)}{1+x^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\int_0^1\frac{2x^{n+1}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2n}+\frac{2}{n(n+2)}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(x^{n+2})}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{1}{2n}+\frac{2}{n(n+2)}\left(\frac{1}{4}+2\int_0^1\frac{2x^{n+3}}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n(n+2)}+\frac{8}{n(n+2)}\int_0^1\frac{x^{n+3}}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\qquad(n\to+\infty)\end{aligned}$$

再注意到 $\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})$，从而有

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^n}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)\\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)+o(\frac{1}{n^3})\\ &= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n^2}+\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

因此立刻得到

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[n\left(n\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^n}\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{4}+1$$

□

第六章 多元微分学

6.1 偏导数与可微性

习题 202. 已知二元函数 $f(x,y) := \begin{cases} \left(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b\right)\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 求 a,b 的值.

解. 首先由定义直接计算 f 在 $(0,0)$ 处的偏导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0 \end{aligned}$$

由于 f 在 $(0,0)$ 可微, 从而 $x,y\to 0$ 时必有 $f(x,y)\sim o(\sqrt{x^2+y^2})$, 特别地 f 在 $(0,0)$ 处的任何方向导数都为 0. 于是

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(a\sqrt{|x|}+2x^2+b\right)\frac{\sin(x^3)}{x(x^2+x^4)}=\lim_{x\to 0}b\cdot\frac{x^3}{x\cdot x^2}=b$$

. 即 $b=0$. 再注意 $f(x,y)\sim o(\sqrt{x^2+y^2})$, 从而考虑 (x,y) 沿路径 $x=y^2\ (y>0)$ 趋近于 0, 有

$$0=\lim_{\substack{(x,y\to(0,0))\\ x=y^2,y>0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{y\to 0}\left(ay+y^4+y^2\right)\frac{\sin(y^4)}{y\cdot 2y^4}=\lim_{y\to 0}ay\cdot\frac{y^4}{2y^5}=\frac{a}{2}.$$

从而迫使 $a=0$. 综上, 若 f 在 $(0,0)$ 可微, 则必有 $a=b=0$. □

注记

我们也可以证明其逆命题: 当 $a=b=0$ 时 f 在 $(0,0)$ 可微. 这是因为 $(x,y)\to(0,0)$ 时有

$$\begin{aligned} |f(x,y)|=\left|(x^2+y^2)\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}\right| &\leq (x^2+y^2)\frac{|x||y|^2}{x^2+y^4}\leq (x^2+y^2)\frac{|x||y|^2}{2\sqrt{x^2\cdot y^4}} \\ &= \frac{x^2+y^2}{2}\sim o(\sqrt{x^2+y^2}). \end{aligned}$$

习题 203. 已知函数 $f(x,y,z)=x^{y^z}$，求偏导 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$.

解. 易求 $\frac{\partial f}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$. 再看 f 关于 y,z 的偏导. 注意到

$$f(x,y,z)=x^{y^z}=e^{y^z\ln x}$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{y^z\ln x}\frac{\partial}{\partial y}(y^z\ln x)=x^{y^z}\ln x\cdot zy^{z-1}=x^{y^z}y^{z-1}z\ln x\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= e^{y^z\ln x}\frac{\partial}{\partial z}(y^z\ln x)=x^{y^z}\ln x\cdot y^z\ln y=x^{y^z}y^z\ln x\cdot\ln y.\end{aligned}$$

□

习题 204. 设实数 a,b 满足 $b>a^2$. 试计算积分:

$$I_2(a,b):=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2ax+b}.$$

计算出 $I_2(a,b)$ 之后，对此表达式适当求偏导数，证明:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2ax+b)^2}=-\frac{a}{2b}\cdot\frac{1}{b-a^2}+\frac{1}{2(b-a^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\right).$$

（在此题，假定求偏导与积分可以交换次序）

解. 换元 $t=x+a$, 注意 $b-a^2>0$, 从而

$$I_2(a,b)=\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+(b-a^2)}=\frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{b-a^2}}\bigg|_{t=a}^{t=+\infty}=\frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\right)$$

对上式两边求偏导 $-\frac{\partial}{\partial b}$, 注意我们假定求偏导与积分可以交换次序，从而有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2ax+b)^2} &= \int_0^{+\infty}-\frac{\partial}{\partial b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2ax+b}\\ &= -\frac{\partial}{\partial b}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2ax+b}\\ &= -\frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\right)\right]\\ &= -\frac{a}{2b}\cdot\frac{1}{b-a^2}+\frac{1}{2(b-a^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\right).\end{aligned}$$

□

习题 205. 设 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的连续可微函数，并且 $f(\mathbf{0}) = 0$（其中 $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ 为原点）。证明：存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), ..., \varphi_n(\boldsymbol{x})$, 使得

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1\varphi_1(\boldsymbol{x}) + x_2\varphi_2(\boldsymbol{x}) + \cdots + x_n\varphi_n(\boldsymbol{x}).$$

证明. 对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 考虑定义在 $[0,1]$ 上的一元函数

$$\begin{aligned} V_{\boldsymbol{x}} : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

则显然 $V_{\boldsymbol{x}}(0) = f(\mathbf{0}) = 0$ 以及 $V_{\boldsymbol{x}}(1) = f(\boldsymbol{x})$. 从而有

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= V_{\boldsymbol{x}}(1) - V_{\boldsymbol{x}}(0) = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_{\boldsymbol{x}}(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k}\left(f(t\boldsymbol{x})\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} x_k \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(t\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

从而对于 $1 \leq k \leq n$, 易知函数 $\varphi_k(\boldsymbol{x}) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(t\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}t$ 满足题设。 □

注记

当 $n = 1$ 时，有显然的构造

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}$$

显然 $f(x) = x\varphi(x)$ 并且 $\varphi(x)$ 连续。但这种想法难以推广到 $n \geq 2$ 的高维情形。本题目是一个十分重要的引理，尤其在微分几何当中。

习题 206. 令 $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的函数，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的可微函数，令

$$u(x, y, z; t) := \frac{1}{r}(\varphi(r - at) + \psi(r + at))$$

其中 $a \in \mathbb{R}$ 为常数。证明：u 满足**波方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \triangle u = 0$$

证明. 无非是直接求偏导验证，注意利用 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$（以及对 y, z 求偏导的类似情形）。一方面

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a}{r}[\psi'(r + at) - \varphi'(r - at)]\right) = \frac{a^2}{r}[\psi''(r + at) + \varphi''(r - at)]$$

另一方面，我们计算 $\triangle u$. 注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{x}{r^3}[\varphi(r-at)+\psi(r+at)]+\frac{1}{r}\left(\varphi'(r-at)\cdot\frac{x}{r}+\psi'(r+at)\cdot\frac{x}{r}\right)\\ &= -\frac{x}{r^3}[\varphi(r-at)+\psi(r+at)]+\frac{x}{r^2}\left(\varphi'(r-at)+\psi'(r+at)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{r^3-3r^2\cdot\frac{x^2}{r}}{r^6}[\varphi(r-at)+\psi(r+at)]-\frac{x}{r^3}\cdot\frac{x}{r}[\varphi'(r-at)+\psi'(r+at)]\\ &\quad+\frac{r^2-2r\cdot\frac{x^2}{r}}{r^4}[\varphi'(r-at)+\psi'(r+at)]+\frac{x}{r^2}\cdot\frac{x}{r}[\varphi''(r-at)+\psi''(r+at)]\\ &= \frac{3x^2-r^2}{r^5}[\varphi(r-at)+\psi(r+at)]+\frac{r^2-3x^2}{r^4}[\varphi'(r-at)+\psi'(r+at)]+\frac{x^2}{r^3}[\varphi''(r-at)+\psi''(r+at)]\end{aligned}$$

同理可计算出 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，只需要将上式中的 x 分别替换成 y,z 即可。注意到 $x^2+y^2+z^2=r^2$，从而直接得到

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r}[\varphi''(r-at)+\psi''(r+at)]$$

从而 $a^2\triangle u=\frac{\partial u}{\partial t}$，证毕。 □

习题 207. （*KdV* 方程的规范型）

已知二元可微函数 $\eta=\eta(\tau,\xi)$ 满足偏微分方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau}=\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{3}{4}\eta^2+\alpha\eta+\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\right) \tag{$*$}$$

其中 g,h,α,σ 为常数。试选取合适的参数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, 使得在变量代换 $\begin{cases} t &= \lambda_1\tau \\ x &= \lambda_2\xi \\ u &= \lambda_3\eta+\lambda_4 \end{cases}$ 下，方程 $(*)$ 化为如下标准的 ***KdV* 方程:**

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x.$$

解. 首先我们有 $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}=\lambda_2\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial\tau} &= \frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial t}=\lambda_1\frac{\partial}{\partial t} \\ \eta &= \frac{1}{\lambda_3}(u-\lambda_4) \end{cases}$ ，从而立刻得到

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau}=\frac{\lambda_1}{\lambda_3}u_t \tag{1}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{3}{4}\eta^2+\alpha\eta+\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\right)\\
=\ &\lambda_2\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{4\lambda_3^2}(u-\lambda_4)^2+\frac{\alpha}{\lambda_3}(u-\lambda_4)+\frac{\sigma\lambda_2^2}{2\lambda_3}u_{xx}\right)\\
=\ &\lambda_2\sqrt{\frac{g}{h}}\left[\frac{3}{2\lambda_3^2}uu_x+\left(\frac{\alpha}{\lambda_3}-\frac{3}{2\lambda_3^2}\lambda_4\right)u_x+\frac{\sigma\lambda_2^2}{2\lambda_3}u_{xxx}\right]
\end{aligned}$$

与 (1) 联立，整理得

$$u_t=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{\frac{g}{h}}\left[\frac{3}{2\lambda_3}uu_x+\left(\alpha-\frac{3\lambda_4}{2\lambda_3}\right)u_x+\frac{\sigma}{2}\lambda_2^2u_{xxx}\right]\tag{2}$$

与标准的 KdV 方程比较系数，我们希望 $\begin{cases}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{3}{2\lambda_3} &=6\\ \alpha-\frac{3\lambda_4}{2\lambda_3} &=0\\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{\frac{g}{h}}\cdot\frac{\sigma}{2}\lambda_2^2 &=1\end{cases}$, 将其整理得到

$$\begin{aligned}
\lambda_2^3 &= \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{h}{g}}\lambda_1\\
\lambda_3 &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\\
\lambda_4 &= \frac{2\alpha}{3}\lambda_3
\end{aligned}$$

为了方便计算 λ_2, 不妨取 $\lambda_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h\sigma}}$, 则立刻得到 $\lambda_2=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$, 进而得到 $\lambda_3=\frac{1}{2}$, $\lambda_4=\frac{1}{3}\alpha$. 综上所述，变量替换

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h\sigma}}\tau,\qquad x=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\xi,\qquad u=\frac{1}{2}\eta+\frac{1}{3}\alpha$$

即为所求。 □

注记

古典数学物理里面有两个美丽的传说, 其一是众所周知的苹果砸牛顿, 另一个则是 Russel 骑马千米追逐水波.
传说在 1834 年夏日, 英国科学家 J.S.Russel 骑马沿着一条河旅行, 偶然发现狭窄的河床中行走的船突然停止前进, 被船体带动的水团积聚在船头周围并剧烈地翻动着. 不久, 一个圆形且轮廓分明的巨大孤立波峰开始形成, 并急速离开船头向前运动. 波长约 10 米, 高约 0.5 米, 在行进中波的形状和速度并无明显变化, 以后高度逐渐下降, 在骑马追踪两到三公里后, 终于消失在蜿蜒的河道上. 这次发现的奇特景观促使 Russel 开始更深入研究水波, 他认为这是流体运动的一个稳定解, 并称之为**孤波**. 但他始终没有在理论上证实孤波的存在. 这引起了物理学界的激烈争论.

注记

直到 1895 年, 荷兰数学家 Korteweg 和他的学生 de Vries 建立了浅水波运动方程:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau}=\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{3}{4}\eta^2+\alpha\eta+\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial \xi^2}\right) \tag{$*$}$$

并求解出了与 Russel 描述一致的孤子解, 争论才告终止.

习题 208. *(KdV 方程的 Miura 变换)*

已知二元光滑函数 $w(x,t)$ 满足 ***mKdV* 方程** $w_t=w_{xxx}+6w^2w_x$. 设函数 $u(x,t)$ 满足 $u=iw_x+w^2$ (其中 $i=\sqrt{-1}$ 为虚数单位), 证明: $u(x,t)$ 满足 ***KdV* 方程**

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x.$$

证明. 由于 $u=iw_x+w^2$, 从而暴力求导计算得

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{\partial}{\partial t}(iw_x+w^2)=iw_{tx}+2ww_t\\
&= i(w_{xxx}+6w^2w_x)_x+2w(w_{xxx}+6w^2w_x)\\
&= (2ww_{xxx}+12w^3w_x)+i(w_{xxxx}+12ww_x^2+6w^2w_{xx})\\
u_x &= 2ww_x+iw_{xx}\\
uu_x &= (2w^3w_x-w_xw_{xx})+i(2ww_x^2+w^2w_{xx})\\
u_{xxx} &= (6w_xw_{xx}+2ww_{xxx})+iw_{xxxx}
\end{aligned}$$

因此立刻得到

$$\begin{aligned}
u_{xxx}+6uu_x &= i(w_{xxxx}+12ww_x^2+6w^2w_{xx})+6w_xw_{xx}-6w_xw_{xx}+2ww_{xxx}+12w^3w_x\\
&= u_t.
\end{aligned}$$

□

6.2 隐映射定理及其应用

习题 209. 设方程组 $\begin{cases} x=u+vz \\ y=-u^2+v+z \end{cases}$ 在点 $(x,y,z)=(2,1,1)$ 的某一邻域内确定了隐函数 $u(x,y,z)$ 与 $v(x,y,z)$, 并且 $u(2,1,1)>0$. 试计算 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(2,1,1)}$ 的值.

解. 解方程组容易算出 $u(2,1,1)=v(2,1,1)=1$. 令函数

$$\begin{cases} F_1(x,y,z;u,v)=x-u-vz \\ F_2(x,y,z;u,v)=y+u^2-v-z \end{cases}$$

则关于 x,y,z 的隐函数 u,v 由 $F_1=F_2=0$ 决定。由隐映射定理，直接计算之，

$$\begin{aligned}
\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}\right|_{(2,1,1)} &= -\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}\right|_{(2,1,1)} \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}\right|_{(2,1,1)} \\
&= -\left.\begin{pmatrix} -1 & -z \\ 2u & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right|_{(u,v)=(1,1)} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

因此有 $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{(2,1,1)}=\frac{1}{3}(1+1+0)=\frac{2}{3}$. □

习题 210. 已知函数 $F(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 附近光滑, 使得

$$F(0,0)=F'_x(0,0)=0, \quad F'_y(0,0)F''_{xx}(0,0)>0.$$

记 $y=f(x)$ 为由方程 $F(x,y)=0$ 所决定的在 $x=0$ 附近的隐函数. 证明: 在 $x=0$ 附近成立

$$f(x)\le -\frac{1}{\pi}\frac{F''_{xx}(0,0)}{F'_y(0,0)}x^2.$$

证明. 由隐函数定理计算可知

$$f'(x)=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,f(x))}{f'_y(x,f(x))},$$

特别地 $f'(0)=0$. 再直接计算 f 的二阶导数:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{F'_x(x,f(x))}{f'_y(x,f(x))} \\
&= -\frac{[F''_{xx}(x,f(x))+F''_{xy}(x,f(x))f'(x)]F'_y(x,f(x))-[F''_{xy}(x,f(x))+f''_{yy}(x,f(x))f'(x)]F'_x(x,f(x))}{[F'_y(x,f(x))]^2},
\end{aligned}$$

因此有

$$f''(0)=-\frac{F''_{xx}(0,0)}{F'_y(0,0)}<0.$$

考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开 $f(x)=\frac{1}{2}x^2f''(0)+o(x^2)$, 从而当 $|x|$ 充分小时,

$$f(x)-\frac{1}{\pi}f''(0)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)x^2f''(0)+o(x^2)<0,$$

即 $f(x)\le -\frac{1}{\pi}\frac{F''_{xx}(0,0)}{F'_y(0,0)}x^2$. □

习题 211. 设 $u(x,y,z)$ 与 $F(x,y,z)$ 均为 $\mathbb{R}^3$ 上的可微函数，其中 $u(x,y,z)$ 是由方程 $F(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=0$ 决定的隐函数。证明：$u(x,y,z)$ 满足偏微分方程

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{u}.$$

证明. 设四元函数 $G(x,y,z,u):=F(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)$，则 $u(x,y,z)$ 是由方程 $G(x,y,z,u)=0$ 确定的隐函数，从而有隐映射定理直接写出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial u}=-\frac{-2x\frac{\partial F}{\partial x}}{2u\frac{\partial F}{\partial x}+2u\frac{\partial F}{\partial y}+2u\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{x}{u}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}}$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{u}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}}\qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{u}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}}$$

因此有

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{u}\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{1}{u}$$

□

习题 212. 设 $F(x,y,z)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的可微函数。如果方程 $F(x,y,z)=0$ 决定了可微的隐函数 $x=x(y,z)$、$y=y(x,z)$ 以及 $z=z(x,y)$，证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

证明. 由关于 $x=x(y,z)$ 的隐映射定理，有

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x}$$

同理也有 $\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial y}$ 以及 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$. 因此 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$. □

习题 213. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为 C^1 映射, 取定 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 假设 $Jf(x_0)$ 可逆. 证明: 存在 $\delta>0$, 使得对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 且 $\|x\|<\delta$, 都存在 $z\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$f(x_0+x+z)=f(x_0)+Jf(x_0)x$$

并且 $z=o(\|x\|)$.

证明. 考虑如下定义的函数 $G(x,z)$:

$$\begin{aligned} G:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x,z) &\mapsto f(x_0+x+z)-Jf(x_0)x-f(x_0) \end{aligned}$$

则有 $G(\mathbf{0},\mathbf{0})=0$. 再注意 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{(\mathbf{0},\mathbf{0})}=Jf(x_0)$ 是可逆的, 从而由隐映射定理, 存在 $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$ 的邻域 $U:=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|\|x\|<\delta\right\}$ (其中 $\delta>0$) 以及连续可微映射 $z:U\to U$, 使得对任意 $x\in U$ 都成立 $G(x,z(x))=0$. 也就是说, 对任意 $\|x\|<\delta$, 取 $z=z(x)$, 则有

$$f(x_0+x+z)=f(x_0)+Jf(x_0)x.$$

此外, 再注意

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{x=\mathbf{0}}=-\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\bigg|_{(\mathbf{0},\mathbf{0})}=-(Jf(x_0))^{-1}[Jf(x_0)-Jf(x_0)]=\mathbf{0}$$

因此 $z=o(\|x\|)$. □

习题 214. 设 M_n 为 n 阶实方阵构成的集合, 我们把它等同于欧氏空间 $\mathbb{R}^{n^2}$. 例如 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2$ 可以视为 $\mathbb{R}^{2^2}=\mathbb{R}^4$ 中的向量 (a,b,c,d). 记 $I\in M_n$ 为 n 阶单位矩阵。证明: 给定任意的 n 阶方阵 $A\in M_n$, 以及任意正整数 m, 都存在 $\varepsilon>0$, 以及连续可微映射 $f:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M_n$, 使得成立

$$f(t)^m+tAf(t)=I,\quad (-\varepsilon<t<\varepsilon).$$

并且求出 $f'(0)$.

证明. 定义函数

$$\begin{aligned} F:M_n\times\mathbb{R} &\to M_n \\ (f,t) &\mapsto f^m+tAf-I \end{aligned}$$

则易知 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{I},0)=\mathbf{0}$. 接下来, 只需用隐映射定理说明, 在 $(\boldsymbol{I},0)$ 附近, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{f},t)=0$ 确定了隐函数 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(t)$. 为此, 需要验证隐映射定理的使用条件. 对于 $\boldsymbol{f}\in M_n$, 记 $\boldsymbol{f}=(f_{ij})_{1\le i,j\le n}$, 其中 f_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{f}$ 的第 i 行第 j 列. 于是

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial f_{ij}}\right|_{(\boldsymbol{f},t)=(\boldsymbol{I},0)} &= \left.\frac{\partial}{\partial f_{ij}}(\boldsymbol{f}^m+t\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}-\boldsymbol{I})\right|_{(\boldsymbol{f},t)=(\boldsymbol{I},0)}\\ &= \left.\left(\sum_{k=1}^m \boldsymbol{f}^{k-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial f_{ij}}\boldsymbol{f}^{m-k}+t\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial f_{ij}}\right)\right|_{(\boldsymbol{f},t)=(\boldsymbol{I},0)}\\ &= m\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial f_{ij}}\right|_{(\boldsymbol{f},t)=(\boldsymbol{I},0)}\\ &= m\boldsymbol{E}_{ij}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为第 i 行 j 列为 1, 其余位置全为 0 的 n 阶方阵. 由此易知 $n^2\times n^2$ 的矩阵 $\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{I},0)=m\boldsymbol{I}_{n^2}$, 其中 $\boldsymbol{I}_{n^2}$ 为 $n^2\times n^2$ 的单位阵. 因此, $\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{I},0)$ 是可逆矩阵, 从而由隐函数定理可知存在 $\varepsilon>0$, 以及定义在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 的连续可微函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 使得 $\boldsymbol{f}(0)=I$, 并且 $\boldsymbol{f}(t)^m+t\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{I}$. 对此式关于 t 求导, 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{f}(t)^m+t\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(t)\right)\Big|_{t=0}\\ &= \sum_{k=1}^m\left(\boldsymbol{f}(0)^{k-1}\boldsymbol{f}'(0)\boldsymbol{f}(0)^{m-k}\right)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(0)\\ &= m\boldsymbol{f}'(0)+\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{f}'(0)=-\frac{1}{m}\boldsymbol{A}$. □

习题 215. 已知方程 $u=x+y\sin u$ 确定了连续可微的二元函数 $u(x,y)$.

证明：对任意 $n\ge 1$，成立

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin^n u\right).$$

证明. 对方程 $u=x+y\sin u$ 两边求偏导,得到 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=1+y\cos u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\sin u+y\cos u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$,整理得 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1-y\cos u}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\sin u}{1-y\cos u}\end{cases}$, 从而有 $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$，即证明了 $n=1$ 的情形。

接下来对 n 归纳。$n=1$ 已证；如果欲证结论对 n 成立，则由归纳假设以及 $n=1$ 的结论可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}u}{\partial y^n} &= \frac{\partial^{n-1}}{x^{n-1}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin^n u\right)\\ &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(n\sin^{n-1}u\cos u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\sin^n u\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left((n+1)\sin^n u\cos u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\sin^{n+1}u\right)\\
&= \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin^{n+1}u\right)
\end{aligned}
$$

从而证毕。 □

6.3 极值与条件极值

习题 216. 已知映射 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 在单位闭球 $\overline{B}(\mathbf{0},1):=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m\middle|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2\leq 1\right\}$ 连续可微, 并且存在向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$, 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}$ 恒为常数 $(\forall\boldsymbol{x}\in\partial\overline{B}(\mathbf{0},1))$. 证明: 存在 $\boldsymbol{x}_0\in B(\mathbf{0},1)$, 使得对任意 $1\leq k\leq m$, 都有

$$\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{v}=0.$$

证明. 考虑函数 $\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, 使得 $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}$,$(\forall\boldsymbol{x}\in\overline{B}(\mathbf{0},1))$. 则 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 连续可微，并且由题设可知它在单位球的边界 $\partial\overline{B}(\mathbf{0},1)$ 上为常值函数. 从而易知必存在单位球内部的一点 $\boldsymbol{x}_0\in B(\mathbf{0},1)$, 使得 $\boldsymbol{x}_0$ 为 φ 的最大值点或者最小值点. 取定此 $\boldsymbol{x}_0$, 则对任意 $1\leq k\leq m$ 都有 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0)=0$. 从而

$$0=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0)=\frac{\partial(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0)=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{v}.$$

□

习题 217. 已知二元函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$. 证明：$f(x,y)$ 有无穷多个极大值点，但没有极小值点。

证明. 由于 $f(x,y)$ 可微，故若 (x_0,y_0) 为 f 的极值点，则必有 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0\end{cases}$，于是

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=(1-e^{y_0})\sin x_0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=e^{y_0}(\cos x_0-y_0-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1-e^{y_0})\sin x_0&=&0\\ \cos x_0-y_0-1&=&0\end{cases}$$

解得如下两组解（驻点）:

$$(x_0,y_0)=(2k\pi,0)\quad(k\in\mathbb{Z})\qquad\text{或者}\qquad(x_0,y_0)=((2k+1)\pi,-2)\quad(k\in\mathbb{Z})$$

接下来验证 f 在这些驻点附近的行为。f 的 Hessian 为

$$\operatorname{Hess}(f)(x,y)=\begin{pmatrix}(1-e^y)\cos x & -e^y\sin x\\ -e^y\sin x & e^y(\cos x-y-2)\end{pmatrix}$$

Case 1 若 $(x_0, y_0) = (2k\pi, 0)$，则 f 的 Hessian 满足

$$\mathrm{Hess}(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leq 0$$

从而 $(2k\pi, 0)$ 为 f 的极大值点 $(\forall k \in \mathbb{Z})$；

Case 2 若 $(x_0, y_0) = ((2k+1)\pi, 0)$，则 f 的 Hessian 满足

$$\mathrm{Hess}(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} e^{-2} - 1 & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{pmatrix} \leq 0$$

从而 $((2k+1)\pi, -2)$ 为 f 的极大值点 $(\forall k \in \mathbb{Z})$.

综上，f 有无数个极大值点，无极小值点。 □

习题 218. 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 为二元连续可微函数，且 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) \neq 0$. 已知点 $(0,0)$ 为函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的条件极值点，判断下列命题正误：

（1）若 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$，则 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$;

（2）若 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$，则 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$;

（3）若 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$，则 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$;

（4）若 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$，则 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$.

证明. 注意到 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) \neq 0$，所以由隐函数定理，存在定义于 $x = 0$ 附近的连续可微函数 $\psi(x)$，使得 $\varphi(x, \psi(x)) = 0$ 在 $x = 0$ 附近恒成立，特别地 $\psi(0) = 0$。也就是说，约束条件 $\varphi(x,y) = 0$ 等价于 $y = \psi(x)$. 于是 $x = 0$ 是单变量函数

$$x \mapsto f(x, \psi(x))$$

的极值点，因此

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} f(x, \psi(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\psi'(0)$$

由上式容易判断（4）正确，（3）一定不正确，（1）（2）不一定正确。 □

习题 219. 已知函数 $f(x,y)$ 在单位圆盘 $\mathbb{D} := \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ 一阶连续可微，并且成立 $|f(x,y)| \leq 1$. 证明：在圆盘 $\mathbb{D}$ 的内部存在点 (x_0, y_0), 使得在 f 该点处成立

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \leq 16.$$

证明. 考虑函数 $g(x,y) := f(x,y) + 2(x^2+y^2)$, 则易知 $|g(0,0)| = |f(0,0)| \le 1$, 并且对圆盘边界上的点 $\boldsymbol{p} \in \partial\mathbb{D}$ 成立 $|g(\boldsymbol{p})| = |f(\boldsymbol{p})+2| \ge 1$, 从而或者 $g(x,y)$ 为恒为 1 的常函数，或者 $g(x,y)$ 的极小值点不在圆盘边界取到。从而存在圆盘内部的点 (x_0,y_0) 为 $g(x,y)$ 的极小值点。于是

$$0 = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + 4x_0, \qquad 0 = \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + 4y_0,$$

所以 $\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2 = 16(x_0^2+y_0^2) \le 16.$ □

习题 220. 设 $a>0$. 求 $\mathbb{R}^3$ 当中的曲线 $L := \begin{cases} x^2+y^2 = 2az \\ x^2+y^2+xy = a^2 \end{cases}$ 上的点到 xOy 平面的最大距离与最小距离.

证明. 设函数 $F_1(x,y,z) = x^2+y^2-2az$, $F_2(x,y,z) = x^2+y^2+xy-a^2$. 则容易验证 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2a \\ 2x+y & 2y+x & 0 \end{pmatrix}$$

不是满秩的，当且仅当 $x=y=0$. 而易知 $L = \{F_1(x,y,z) = F_2(x,y,z) = 0\}$ 上的点都不满足 $x=y=0$. 因此由隐函数定理, 集合 L 确实是连续可微曲线. 考虑函数 $d(x,y,z) = z^2$, 视为曲线 L 上的点到 xOy 距离的平方, 这是 L 上的连续函数. 容易验证 L 是 $\mathbb{R}^3$ 当中的紧致集, 从而连续函数 d 能在 L 上取到最大值与最小值; 又由于曲线 L 的连续可微性, 从而 d 在 L 的最值点一定是条件极值点.

于是我们采用 Lagrange 乘子法计算函数 $d(x,y,z) = z^2$ 在约束 $F_1(x,y,z) = F_2(x,y,z) = 0$ 下的条件极值. 引入 Lagrange 乘子 λ,μ, 考虑 Lagrange 函数

$$L(x,y,z;\lambda,\mu) := z^2 + \lambda(x^2+y^2-2az) + \mu(x^2+y^2+xy-a^2)$$

其驻点方程为:

$$\begin{cases} 2x\lambda + (2x+y)\mu = 0 \\ 2y\lambda + (2y+x)\mu = 0 \\ 2z = 2a\lambda = 0 \\ x^2+y^2 = 2az \\ x^2+y^2+xy = a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x\lambda + (2x+y)\mu = 0 & (1) \\ 2y\lambda + (2y+x)\mu = 0 & (2) \\ x^2+y^2 = 2a^2\lambda & (3) \\ xy = a^2(1-2\lambda) & (4) \\ z = a\lambda & (5) \end{cases}$$

将 (1) 式的 y 倍减去 (2) 式的 x 倍, 整理得

$$(x^2-y^2)\mu = 0.$$

若 $\mu = 0$, 则将其代入 (1)-(5) 式容易发现无解, 从而必有 $\mu \ne 0$. 于是 $x^2-y^2 = 0$, $x = \pm y$. 接下来分 $x=y$ 与 $x=-y$ 两种情形考虑.

- 如果 $x=y$, 则易验证 x,y 都不为零. 从而 (1)-(5) 式化为

$$\begin{cases} 2x^2=2a^2\lambda \\ x^2=a^2(1-2\lambda) \\ z=a\lambda \\ 2\lambda+3\mu=0 \end{cases}, \quad \text{解得} \begin{cases} \lambda=\frac{1}{3}, \quad \mu=-\frac{2}{9} \\ x=y=\pm\frac{a}{\sqrt{3}} \\ z=\frac{a}{3} \end{cases}.$$

- 如果 $x=-y$, 则也易验证 x,y 都不为零. 从而 (1)-(5) 式化为

$$\begin{cases} 2x^2=2a^2\lambda \\ -x^2=a^2(1-2\lambda) \\ z=a\lambda \\ 2\lambda+\mu=0 \end{cases}, \quad \text{解得} \begin{cases} \lambda=1, \quad \mu=-2 \\ x=\pm a, \quad y=\mp a \\ z=a \end{cases}.$$

从而解得驻点 $(x,y,z)=(\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{3})$ 以及 $(\pm a,\mp a,a)$. 从而由之前论述可知, 曲线 L 上的点到 xOy 平面的距离 $|z|$ 的最大值与最小值分别为 a 与 $\frac{a}{3}$. □

注记

上述解法的计算过程过于繁琐。事实上，若仔细观察，可如下简化计算：

另解. 由曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2=2az \\ x^2+y^2+xy=a^2 \end{cases}$ 的第一个式子可知, 曲线 L 上的点到平面 xOy 的距离 $|z|$ 满足 $|z|=\frac{1}{2a}(x^2+y^2)$. 从而我们只需求解函数 x^2+y^2 在约束条件 $x^2+y^2+xy=a^2$ 下的条件最值即可. 考虑 Lagrange 函数 $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2+xy-a^2)$, 相应的驻点方程为

$$\begin{cases} 2(1+\lambda)x+\lambda y=0 \\ \lambda x+2(1+\lambda)y=0 \\ x^2+y^2+xy=a^2 \end{cases}$$

此时容易解出驻点

$$\begin{cases} \lambda=-2 \\ x=\pm a \\ y=\mp a \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda=-\frac{2}{3} \\ x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}} \\ y=\pm\frac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

于是易求曲线 L 上的点到 xOy 平面距离 $|z|=\frac{1}{2a}(x^2+y^2)$ 的最大, 最小值分别为 $a,\frac{a}{3}$. □

习题 221. 设 $\triangle ABC$ 是三边长分别为 a,b,c 的三角形. 以其为底面, 作高为 h 的三棱锥, 求此三棱锥的侧面积的最小值.

解. 设 $\triangle ABC$ 的 AB,BC,CA 边的长度分别为 c,a,b, 并且以 $\triangle ABC$ 为底面, 高为 h 的三棱锥的顶点为 P, 则点 P 到平面 ABC 的距离为 h. 过点 P 作平面 ABC 的垂线, 记垂足为 H, 则 $|PH| = h$. 事实上, 点 H 可以在 $\triangle ABC$ 所在的平面上任意选取, 我们只需要求出: 当垂足 H 位于何处时, 三棱锥 $P-ABC$ 的侧面积最小.

设点 H 到边 a,b,c 的"有向距离"分别为 x,y,z. 这里的"有向"是指如下约定: H 到 a(也就是直线 BC) 的距离为 $|x|$, 并且当 H 与 C 在直线 AB 同侧时 $x>0$, 位于异侧时 $x<0$. 对于 y,z 也是类似约定. 由初等几何学的知识, 点 H 的位置由 x,y,z 所唯一确定, 并且 x,y,z 满足约束关系

$$ax+by+cz=2S$$

其中 S 为 $\triangle ABC$ 的面积. (这是因为, 以 H 在 $\triangle ABC$ 的内部为例, 此时 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle HAB} + S_{\triangle HBC} + S_{\triangle HAC}$, 而 $S_{\triangle HBC} = \frac{1}{2}ax$, 其余类似.)

过 H 作直线 BC 的垂线, 垂足记为 A'. 则由初等几何学,

$$\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle HBC}} = \frac{|PA'|}{|HA'|} = \frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}$$

从而 $S_{\triangle PBC} = \frac{a}{2}\sqrt{h^2+x^2}$. 同理, 侧面 $\triangle PCA$ 与 $\triangle PAB$ 的面积分别为 $\frac{b}{2}\sqrt{h^2+y^2}$ 以及 $\frac{c}{2}\sqrt{h^2+z^2}$. 记三棱锥 $P-ABC$ 的侧面积为 $f(x,y,z)$, 视为 x,y,z 的函数, 则

$$f(x,y,z) = \frac{a}{2}\sqrt{h^2+x^2} + \frac{b}{2}\sqrt{h^2+y^2} + \frac{c}{2}\sqrt{h^2+z^2}.$$

至此, 问题转化为求函数 $f(x,y,z)$ 在约束条件 $ax+by+cz=2S$ 下的条件最值. 引入 Lagrange 乘子 λ, 设 Lagrange 函数

$$F(x,y,z;\lambda) = \frac{a}{2}\sqrt{h^2+x^2} + \frac{b}{2}\sqrt{h^2+y^2} + \frac{c}{2}\sqrt{h^2+z^2} + \lambda(ax+by+cz-2S)$$

其驻点方程为

$$\begin{cases} \frac{a}{2}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} + \lambda a = 0 \\ \frac{b}{2}\frac{y}{\sqrt{h^2+y^2}} + \lambda b = 0 \\ \frac{c}{2}\frac{z}{\sqrt{h^2+z^2}} + \lambda c = 0 \\ ax+by+cz = 2S \end{cases}.$$

由该方程组的前三式可知, 若 $\lambda > 0$, 则 x,y,z 都为负数, 这是不可能的 (回顾有向距离 x,y,z 的定义). 因此 $\lambda \le 0$. 于是直接求解前三式, 易得

$$x=y=z=-\frac{2\lambda h}{\sqrt{1-4\lambda^2}}$$

从而在 f 的（条件）驻点处必有 $x=y=z>0$, 即 H 在 $\triangle ABC$ 的内部, 并且到三边的距离相等, 也就是说 H 是 $\triangle ABC$ 的内心（内切圆圆心）. 再验证该驻点为极小值点, 这是因为 F 的 Hessian

$$\operatorname{Hess} F(x,y,z)=\frac{1}{2}h^2\begin{pmatrix}\frac{a}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} & & \\ & \frac{b}{(h^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \\ & & \frac{c}{(h^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}$$

在该驻点处是正定的. 综上, f 在约束 $ax+by+cz$ 下具有唯一的极小值点, (又因为该问题的最小值存在) 故为最小值点. 之后易求三棱锥 $P-ABC$ 的最小值为

$$\frac{a+b+c}{2}\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{p^2h^2+S^2}$$

其中 r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径, $p=\frac{a+b+c}{2}$ 为半周长, S 为 $\triangle ABC$ 的面积. □

习题 222. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称方阵, $S:=\left\{\boldsymbol{x}:=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\middle|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=1\right\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的模长为 1 的 n 维列向量构成的集合（单位球面）. 对于 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$, 定义函数 $f(\boldsymbol{x}):=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 用 *Lagrange* 乘子法证明: 若 $\boldsymbol{x}\in S$ 取到 f 在 S 上的最值, 则 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 进而推出实对称方阵必存在特征向量.

证明. 注意 S 为 $\mathbb{R}^n$ 的光滑曲面, f 为 S 上的连续可微函数, 从而 f 在 S 上的最值点必为关于约束条件 $\boldsymbol{x}\in S$ 的条件极值的驻点. 现在考虑 Lagrange 乘子 λ, 考虑 Lagrange 函数

$$F(\boldsymbol{x},\lambda)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\lambda(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}-1)=-\lambda+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(a_{ij}+\lambda\delta_{ij})x_ix_j$$

其中 $\delta_{ij}:=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$. 若 $\boldsymbol{x}$ 为 f 的最值点, 则必有 $\frac{\partial F}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})=0$ 对 $1\le k\le n$ 成立. 注意 $a_{ij}=a_{ji}$, 从而

$$\begin{aligned}0=\frac{\partial F}{\partial x_k}&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(a_{ij}+\lambda\delta_{ij})(\delta_{ik}x_j+x_i\delta_{jk})\\&=\sum_{j=1}^n(a_{kj}+\lambda\delta_{kj})x_j+\sum_{i=1}^n(a_{ik}+\lambda\delta_{ik})x_i\\&=2\sum_{j=1}^n(a_{kj}+\lambda\delta_{kj})x_j\end{aligned}$$

这对每个 $1\le k\le n$ 都成立, 从而

$$\boldsymbol{0}=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^T=2(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=-2\lambda\boldsymbol{x}$, 从而最值点 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. □

6.4 几何与物理应用

习题 223. 证明球面上的曲线

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}$$

与该球面上的每一条经线相交成定角。其中 φ 为经度，ψ 为纬度，k 为常数。

证明. 建立空间直角坐标系，使得该球面以原点为球心，北极点坐标为 $(0,0,1)$. 于是该球面有参数方程 $\begin{cases} x=\cos\psi\cos\varphi \\ y=\cos\psi\sin\varphi \\ z=\sin\psi \end{cases}$. 对该球面上任何一点 $\boldsymbol{r}(\varphi,\psi)$，考虑球面在该点处的切向量

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi} &= (-\cos\psi\sin\varphi,\cos\psi\cos\varphi,0)\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\psi} &= (-\sin\psi\cos\varphi,-\sin\psi\sin\varphi,\cos\psi)\end{aligned}$$

容易验证 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}$ 与 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\psi}$ 垂直，并且 $\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\right\|=\cos\psi$, $\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\psi}\right\|=1$.

对曲线方程两边微分，得

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}=ke^{k\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}=2ke^{k\varphi}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=k\sin\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)=k\cos\psi$$

从而对于曲线上的一点 $\boldsymbol{r}(\varphi,\psi)$，曲线在该点处的切向量不妨为 $\boldsymbol{v}:=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}+k\cos\psi\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\psi}$. 而与经线的夹角 θ 即为切向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\psi}$ 的夹角，其余弦值

$$\cos\theta=\frac{\langle \boldsymbol{v},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\psi}\rangle}{\|\boldsymbol{v}\|\cdot\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\psi}\right\|}=\frac{k\cos\psi}{\sqrt{k^2+1}\cos\psi}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

为定值。从而证毕。 □

习题 224. （电偶极子）考虑三维空间中的点电荷 A_1,A_2，它们的位置分别为 $\boldsymbol{l},-\boldsymbol{l}$（即关于原点对称），电荷量分别为 $Q,-Q$. 对于位置为 $\boldsymbol{r}$、电荷量为 q 的点电荷 B，证明 A_1,A_2 对 B 的总静电力 $\boldsymbol{F}$ 满足如下近似公式：当 $r:=\|\boldsymbol{r}\|\to+\infty$ 时，

$$\boldsymbol{F}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right)+o(\frac{1}{r^3})$$

其中 $\boldsymbol{p}:=2Q\boldsymbol{l}$ 为点电荷系统 $\{A_1,A_2\}$ 的**电偶极矩**，ε_0 为常数（**真空介电常数**）。

提示（库仑定律）：若点电荷 A_1, A_2 的位置分别为 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$，电荷量分别为 q_1, q_2，则 A_2 所受 A_1 的静电力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{\|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\|^3}$$

证明. 记 $\boldsymbol{e}_r := \frac{\boldsymbol{r}}{r}$，以及 $\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{\boldsymbol{l}}{r}$，则由库伦定律直接计算之，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}\|^3} - \frac{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}\|^3}\right) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - \frac{\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right) \\
&= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{e}_r - \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right]
\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} = (1 + 2\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^2)^{-\frac{3}{2}}$$

而当点电荷 B 到原点的距离 r 趋于无穷时，$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{l}}{r}$ 为无穷小量，从而 $2\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^2$ 也为无穷小量。利用 Taylor 展开式 $(1+x)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}x + o(x)$，可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} &= 1 - 3\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r + o(\frac{1}{r}) \\
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} &= 1 + 3\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r + o(\frac{1}{r})
\end{aligned}$$

代入 $\boldsymbol{F}$ 的表达式，得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{e}_r - \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right] \\
&= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left((6\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r - 2\boldsymbol{\varepsilon} + o(\frac{1}{r})\right) \\
&= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{(6\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{2\boldsymbol{l}}{r}\right) + o(\frac{1}{r^3}) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right) + o(\frac{1}{r^3})
\end{aligned}$$

□

习题 225. 考虑三维空间中关于原点对称分布的两个质点 A_1, A_2，它们的质量均为 m. 记 A_1 的位置向量为 $\boldsymbol{l}$，则 A_2 的位置为 $-\boldsymbol{l}$. 现在，对空间中的质量为 M 的质点 B，其位置向量为 $\boldsymbol{r}$. 我们企图计算质点 A_1, A_2 对 B 的总引力 $\boldsymbol{F}$。有一种偷懒的方法是，用 A_1, A_2 两点的质心对 B 的引力来近似替代，也就是说考虑位于原点、质量为 $2m$ 的质点 C，则 C 对 B 的引力 $\boldsymbol{F}' = -\frac{2GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ 约等于 A_1, A_2 对 B 的总引力 $\boldsymbol{F}$，其中 $r := \|\boldsymbol{r}\|, \boldsymbol{e}_r := \frac{\boldsymbol{r}}{r}$，$G$ 为常数（引力常量）。

证明：当 r 很大时，成立

$$\boldsymbol{F} = -\frac{2GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r - \frac{GMm}{r^4}\Big[\left(15(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{l})^2 - 3\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}\right)\boldsymbol{e}_r - 6l(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{l})\boldsymbol{e}_l\Big] + o(\frac{1}{r^4})$$

其中 $l := \|\boldsymbol{l}\|, \boldsymbol{e}_l := \frac{\boldsymbol{l}}{l}$.

证明. 我们记 $\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{\boldsymbol{l}}{r} = \frac{l}{r}\boldsymbol{e}_l$. 由众所周知的牛顿万有引力定律，质点 A_1, A_2 对 B 的总引力 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= -GMm\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}\|^3} + \frac{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}\|^3}\right)\\
&= -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r - GMm\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}\|^3} + \frac{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}\|^3} - \frac{2\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\\
&= -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r - \frac{GMm}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} + \frac{\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - 2\boldsymbol{e}_r\right)\\
&= -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r - \frac{GMm}{r^2}\Bigg[\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - 2\right)\boldsymbol{e}_r\\
&\quad + \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\Bigg]
\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} = (1 + 2\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^2)^{-\frac{3}{2}}$$

而当质点 B 到原点的距离 r 趋于无穷时，$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{l}}{r}$ 为无穷小量，从而 $2\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^2$ 也为无穷小量。利用 Taylor 展开式 $(1+x)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + o(x^2)$，可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} &= 1 - 3\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{15}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r)^2 + o(\frac{1}{r^2})\\
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} &= 1 + 3\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{15}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r)^2 + o(\frac{1}{r^2})
\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - 2 &= -3\varepsilon^2 + 15(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r)^2 + o(\frac{1}{r^2})\\
\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} &= -6\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r + o(\frac{1}{r^2})
\end{aligned}$$

将它们代回 $\boldsymbol{F}$ 的表达式，有

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r - \frac{GMm}{r^2}\left[\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} + \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - 2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{\varepsilon}\|^3} - \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{\varepsilon}\|^3}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r - \frac{GMm}{r^2}\left[\left(-3\varepsilon^2 + 15(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r)^2 + o(\frac{1}{r^2})\right)\boldsymbol{e}_r + \left(-6\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_r + o(\frac{1}{r^2})\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right] \\
&= -\frac{2GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r - \frac{GMm}{r^4}\left[\left(15(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{l})^2 - 3\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}\right)\boldsymbol{e}_r - 6l(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{l})\boldsymbol{e}_l\right] + o(\frac{1}{r^4})
\end{aligned}
$$

□

6.5 简单的偏微分方程

习题 226. 已知二元连续可微函数 $u(x,y)$ 满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

并且 $u(x,2x) = x$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,2x) = x^2$ 恒成立。求 $u(x,y)$.

解. 考虑变量替换 $\begin{cases} p = x+y \\ q = x-y \end{cases}$，则偏微分方程化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} = 0$, 直接积分可知，存在一元可微函数 f,g 使得

$$u(x,y) = f(p) + g(q) = f(x+y) + g(x-y)$$

代入题设条件可得 $\begin{cases} f(3x) + g(-x) = x \\ f'(3x) + g'(-x) = x^2 \end{cases}$，对第一个式子两边求导，再与第二式联立，解得 $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{4} \\ g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4} \end{cases}$，积分得

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{108}x^3 + \frac{1}{4}x + C_1 \\ g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x + C_2 \end{cases}$$

其中常数 C_1, C_2 满足 $C_1 + C_2 = 0$. 因此

$$u(x,y) = f(x+y) + g(x-y) = \frac{1}{108}(x+y)^3 + \frac{1}{4}(x+y) + \frac{1}{4}(x-y)^3 - \frac{1}{4}(x-y)$$

□

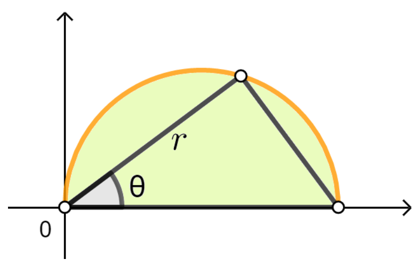
第七章 多重积分

7.1 二重积分

习题 227. 设 $a>0$，计算二重积分

$$\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x+y)^2\,\mathrm{d}y$$

解. 先将该累次积分写为二重积分，易知积分区域为 $D:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|(x-a)^2+y^2<a,y>0\right\}$.



习题227积分区域 D 示意图

考虑极坐标换元 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，则变换后的积分区域为 $D':=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\middle|\theta\in(0,\frac{\pi}{2}),r\in(0,2a\cos\theta)\right\}$. 因此有

$$\begin{aligned}\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x+y)^2\,\mathrm{d}y &= \iint_D(x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'}r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos\theta\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\,\mathrm{d}\theta\\ &= 4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta(1+2\cos\theta\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= 4a^4\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}+2\int_0^1t^5\,\mathrm{d}t\right)=4a^4\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

□

习题 228. 计算二重积分：

$$\iint_D x(y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\leq x^2+y^2\leq 2x\right\}$.

解. 首先注意积分区域 D 关于 x 轴对称，从而立刻得到 $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$，从而只需计算 $\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 考虑极坐标换元 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta} r\cos\theta\cdot r\,\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta} r^2\,\mathrm{d}r\\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(8\cos^4\theta-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\,\mathrm{d}\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}=\cdots=\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

□

习题 229. 计算二重积分：

$$\iint_D \sin\frac{x+y}{x+2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中区域 D 为直线 $x+2y=1$ 与 x 轴、y 轴围成的三角形区域。

解. 考虑变量代换 $(x,y)\mapsto(u,k)$ 使得 $\begin{cases}x+2y=u\\ y=kx\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=\frac{u}{2k+1}\\ y=\frac{uk}{2k+1}\end{cases}$，其中 $(u,k)\in(0,1)\times(0,+\infty)$. 从而 Jacobian

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,k)}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}\frac{1}{2k+1} & -\frac{2u}{(2k+1)^2}\\ \frac{k}{2k+1} & \frac{u}{(2k+1)^2}\end{pmatrix}\right|=\frac{u}{(2k+1)^2}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D \sin\frac{x+y}{x+2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^{+\infty}\sin\frac{\frac{u(k+1)}{2k+1}}{u}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,k)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k\\
&= \int_0^1 u\,\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{k+1}{2k+1}\,\mathrm{d}k\\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\sin\frac{k+1}{2k+1}\,\mathrm{d}\frac{1}{2k+1}\overset{s=\frac{1}{2k+1}}{=\!=\!=}\frac{1}{4}\int_0^1\sin\frac{s+1}{2}\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}-\cos 1\right)
\end{aligned}$$

□

注记

当然也可以直接极坐标换元：

另解. 考虑极坐标换元 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，则有

$$\begin{aligned}
\iint_D \sin\frac{x+y}{x+2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+2\sin\theta}}\sin\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}\cdot r\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta+2\sin\theta}\right)^2\sin\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}\right)\mathrm{d}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}-\cos 1\right)
\end{aligned}$$

□

习题 230. 计算平面上的二重积分：

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

解. 考虑极坐标换元 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\cos(r^2)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\cos(r^2)\,\mathrm{d}r = \pi\int_0^{+\infty} e^{-u}\cos u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{2}e^{-u}(\sin u-\cos u)\Big|_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

习题 231. 设 $\mathbb{H}$ 为上半平面 $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| y>0\right\}$, 计算重积分

$$\iint_{\mathbb{H}}\frac{y}{(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解. 极坐标换元，有

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{H}} \frac{y}{(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi} \frac{r\sin\theta}{r^2(r^2-2r\cos\theta+1)} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
= &\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{r^2-2r\cos\theta+1}\,\mathrm{d}r = \int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}\arctan\frac{x}{\sin\theta}\Big|_{-\cos\theta}^{+\infty} \\
= &\int_0^{\pi}(\pi-\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$

□

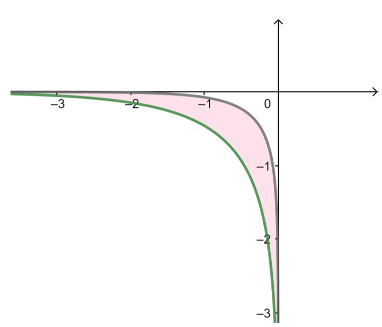
习题 232. 已知平面区域 $\Omega := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| e^x+e^y\ge 1,\ e^{2x}+e^{2y}\le 1\right\}$，计算重积分

$$\iint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

解. 直接化成累次积分，有

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} &= \int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}x\int_{\ln(1-e^x)}^{\frac{1}{2}\ln(1-e^{2x})}\frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}\left(\arctan\frac{\ln(1-e^{2x})}{2x}-\arctan\frac{\ln(1-e^x)}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\arctan\frac{\ln(1-e^{-2x})}{2x}-\arctan\frac{\ln(1-e^{-x})}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \ln\frac{2}{1}\left(\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{\ln(1-e^{-x})}{x}-\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{\ln(1-e^{-x})}{x}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

其中倒数第二个等号利用了 Frullani 积分（见习题195）。



习题232积分区域 Ω 示意图

□

习题 233. 对于常数 $a>0$，计算重积分

$$\iint_D \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中区域 $D := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 0<x,y<a\right\}$.

证明. 先通过伸缩换元把积分区域化为单位正方形 $(0,1)\times(0,1)$，再直接累次积分，有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{a}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{1+x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y \\
&\xlongequal{y=\sqrt{1+x^2}t} \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{t=\tan\theta} \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \\
&\xlongequal{x=\tan\varphi} \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi \xlongequal{u=\sin\varphi} \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6a}
\end{aligned}$$

□

习题 234. 已知平面区域 $\mathbb{D} := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| y\ge x^2+1\right\}$，计算反常重积分：

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{1}{x^4+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

解. 直接化为累次积分，暴力计算之，

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{1}{x^4+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{1}{x^4+y^2}\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&= 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{1}{t}} 2\int_0^{+\infty}\arctan\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left(t\arctan\frac{1}{1+t^2}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t\cdot\frac{-\frac{2t}{(1+t^2)^2}}{1+\frac{1}{(1+t^2)^2}}\,\mathrm{d}t\right) = 4\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+2t^2+2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

注意到 $t^4+2t^2+2=(t^2+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2}-2)=(t^2+\sqrt{2\sqrt{2}-2}t+\sqrt{2})(t^2-\sqrt{2\sqrt{2}-2}t+\sqrt{2})$.

为了方便书写，记 $\begin{cases} \alpha := \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ \beta := \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases}$，则有

$$\frac{t^2}{t^4+2t^2+2} = \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{t}{t^2-2\alpha t+\sqrt{2}} - \frac{t}{t^2+2\alpha t+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{t}{(t-\alpha)^2+\beta^2} - \frac{t}{(t+\alpha)^2+\beta^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{t-\alpha}{(t-\alpha)^2+\beta^2} - \frac{t+\alpha}{(t+\alpha)^2+\beta^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(t-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{1}{(t+\alpha)^2+\beta^2}\right)$$

因此有

$$\iint_D \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+2t^2+2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\alpha}\ln\frac{(t-\alpha)^2+\beta^2}{(t+\alpha)^2+\beta^2}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{\beta}\left(\arctan\frac{t}{\beta}\bigg|_\alpha^{+\infty} + \arctan\frac{t}{\beta}\bigg|_{-\alpha}^{+\infty}\right) = \frac{\pi}{\beta} = \sqrt{2\sqrt{2}-2}\pi$$

□

习题 235. 已知 $D := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x>0,\ y>0\right\}$ 为第一象限. 试计算反常重积分

$$\iint_D e^{-x^2-y^2-2xy\cos\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ 为常数.

解. 直接考虑极坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，可得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} re^{-r^2(1+2\sin\theta\cos\theta\cos\alpha)}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} e^{u(1+2\sin\theta\cos\theta\cos\alpha)}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin 2\theta\cos\alpha} \xlongequal{t=\tan\theta} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{1+\frac{2t}{1+t^2}\cos\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t\cos\alpha+1} = \frac{1}{2}\int_{\cos\alpha}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sin^2\alpha} \\
&= \frac{1}{2\sin\alpha}\arctan\frac{t}{\sin\alpha}\bigg|_{\cos\alpha}^{+\infty} = \frac{\alpha}{2\sin\alpha}.
\end{aligned}$$

□

习题 236. 设 $a>0$，平面区域 D 是**旋轮线**

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

与 x 轴围成的区域，试计算重积分

$$\iint_D y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

解. 考虑变量替换

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = \lambda a(1-\cos t) \end{cases} \qquad (t,\lambda) \in [0,2\pi]\times[0,1]$$

其 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\lambda)} = \det\begin{pmatrix} a(1-\cos t) & 0 \\ * & a(1-\cos t) \end{pmatrix} = a^2(1-\cos t)^4$$

因此有

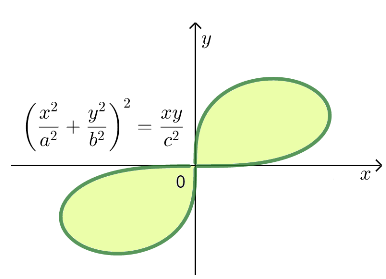
$$\begin{aligned} \iint_D y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \lambda^2 a^2 (1-\cos t)^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\lambda)}\right| \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\lambda = a^4 \int_0^1 \lambda^2 \,\mathrm{d}\lambda \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^4 \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{32}{3} a^4 \int_0^{\pi} \sin^8 \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t = \frac{64}{3} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u \,\mathrm{d}u = \frac{64}{3} a^4 \frac{7!!}{8!!}\frac{\pi}{2} = \frac{35}{12}\pi a^4 \end{aligned}$$

□

习题 237. 计算平面曲线

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2} \qquad (a,b,c>0)$$

所围成区域的面积 S.



习题237示意图

解. 从曲线表达式容易看出该曲线不经过第二、四象限，并且位于第一、三象限的部分关于原点中心对称。从而我们只需考虑该曲线所围成的区域在第一象限的部分（记为 D）即可。

考虑坐标变换 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$,则区域 D 变为 $D' := \left\{(r,\theta)\middle|\theta \in (0,\frac{\pi}{2}), r \in (0,\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta})\right\}$. 因此有

$$\begin{aligned} S &= 2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{D'} abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta}} r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2b^2}{2c^2} \end{aligned}$$

□

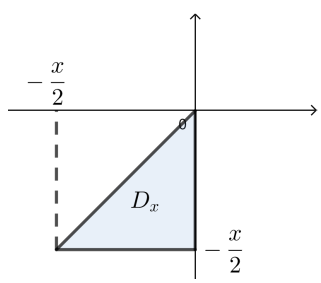
习题 238. 计算极限：

$$\lim_{x\to 0}\int_{-\frac{x}{2}}^{0}\mathrm{d}t\int_{-\frac{x}{2}}^{t}\frac{e^{-(t-u)^2}}{1-e^{-\frac{x^2}{4}}}\mathrm{d}u$$

解. 首先注意等价无穷小 $1-e^{-\frac{x^2}{4}} \sim \frac{x^2}{4}\quad(x\to 0)$，从而

$$\lim_{x\to 0}\int_{-\frac{x}{2}}^{0}\mathrm{d}t\int_{-\frac{x}{2}}^{t}\frac{e^{-(t-u)^2}}{1-e^{-\frac{x^2}{4}}}\mathrm{d}u = \lim_{x\to 0}\frac{4}{x^2}\iint_{D_x} e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

其中积分区域 D_x 是以 $(-\frac{x}{2},-\frac{x}{2}),(0,0),(0,-\frac{x}{2})$ 这三个点为顶点的三角形区域。注意积分区域 D_x 的面积为 $\frac{x^2}{8}$.



习题238：积分区域 D_x 示意图

从而由积分中值定理知，对任意 x，存在点 $(t_x,u_x)\in D_x$ 使得

$$\iint_{D_x} e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = \frac{x^2}{8}e^{-(t_x-u_x)^2}$$

而 $x\to 0$ 时，$(t_x,u_x)\to(0,0)$，由此可知原极限 $=\frac{1}{2}e^{-(0-0)^2}=\frac{1}{2}$. □

习题 239. 设 $f(x,y)$ 为定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的二元连续函数，并且 f 在原点 $(0,0)$ 处可微，且 $f(0,0)=0$. 计算极限：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f^2(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{1}{5}x^5}}$$

解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f^2(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{1}{5}x^5}} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{5\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f^2(t,u)\,\mathrm{d}u}{x^5} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f^2(t,u)\,\mathrm{d}u}{x^4}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}f^2(t,x)\,\mathrm{d}t}{x^4}\end{aligned}$$

而当 $x\to 0^+$ 时，f 在原点可微表明 $f(t,x)=f_x't+f_y'x+o(x)$，其中 $f_x':=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $f_y':=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 为 f 在原点处的偏导。因此

$$f^2(t,x)=(f_x')^2t^2+2f_x'f_y'tx+(f_y')^2x^2+o(x^2)$$

$$\int_0^{x^2}f^2(t,x)\,\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}\left((f_x')^2t^2+2f_x'f_y'tx+(f_y')^2x^2+o(x^2)\right)\mathrm{d}t=(f_y')^2x^4+o(x^4)$$

因此有

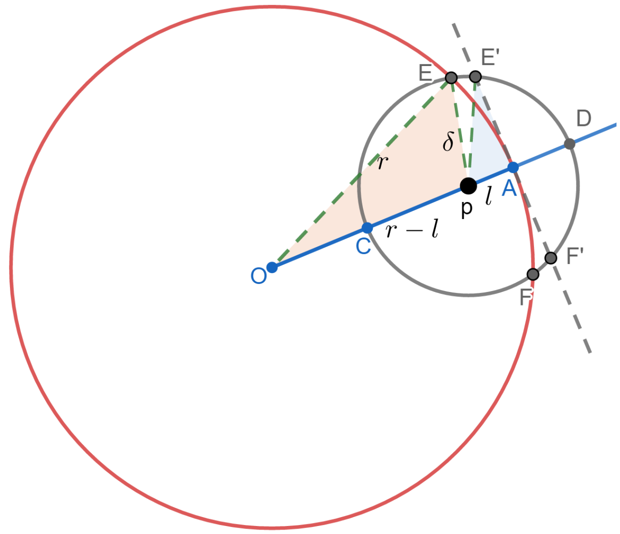
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f^2(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{1}{5}x^5}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}f^2(t,x)\,\mathrm{d}t}{x^4}=(f_y')^2:=\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]^2$$

□

习题 240. 设 D 是半径为 r 的圆所围成的平面区域；对于点 $\boldsymbol{p}=(x,y)\in D$ 以及 $\delta>0$，记 $s_\delta(\boldsymbol{p})$ 为以 $\boldsymbol{p}$ 为圆心的半径为 δ 的圆在 D 外面的那段弧的长度。计算极限：

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\iint_D s_\delta(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

解. 如下图所示，对于点 $\boldsymbol{p}\in D$，则 $s_\delta(\boldsymbol{p})=\widehat{EDF}$ 为圆弧 EDF 的弧长。连接 $O\boldsymbol{p}$ 并延长，与圆盘 D 的边界交于点 A，过点 A 作 D 的切线，与圆弧 EDF 交于 E',F'. 记 $\tilde{s}_\delta(\boldsymbol{p}):=\widehat{E'DF'}$ 为圆弧 $E'DF'$ 的弧长，断言当 $\delta\to 0^+$ 时 $s_\delta(\boldsymbol{p})$ 与 $\tilde{s}_\delta(\boldsymbol{p})$ “充分接近”，从而用后者代替之（如此近似替代的合理性需要验证，并且涉及较深的知识。我们先承认这个并以此计算，事后再补证）。



习题240示意图

记点 $\boldsymbol{p}$ 到 A 的距离为 l，则 $0<l<\delta$. 由初等几何容易得到

$$\tilde{s}_\delta(\boldsymbol{p}) = 2\delta \arcsin \frac{\sqrt{\delta^2-l^2}}{l}$$

以大圆圆心 O 为原点任取坐标系 (x,y)，考虑极坐标变换 $(x,y)\to(l,\theta)$: $\begin{cases} x=(r-l)\cos\theta \\ y=(r-l)\sin\theta \end{cases}$，则 D 内使得 $s_\delta(\boldsymbol{p})$ 与 $\tilde{s}_\delta(\boldsymbol{p})$ 非零的区域都为 $\left\{(l,\theta)\middle|0<l<\delta,\,0<\theta\le 2\pi\right\}$，从而

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta^2}\iint_D \tilde{s}_\delta(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{\delta^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\delta 2\delta\arcsin\frac{\sqrt{\delta^2-l^2}}{l}\cdot(r-l)\,\mathrm{d}l \\
&\xlongequal{l=t\delta} 4\pi\int_0^1 (r-t\delta)\arcsin\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 4\pi r\int_0^1 \arcsin\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t - \underbrace{4\pi\delta\int_0^1 t\arcsin\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t}_{:=\omega(\delta)}
\end{aligned}$$

易知 $\delta\to0^+$ 时 $\omega(\delta)\to0$，从而有

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\delta^2}\iint_D s_\delta(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \xlongequal{??} \lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\delta^2}\iint_D \tilde{s}_\delta(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\pi r\int_0^1\arcsin\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 4\pi r$$

接下来断言用 $\tilde{s}_\delta(\boldsymbol{p})$ 代替 $s_\delta(\boldsymbol{p})$ 的合理性（用到**一致收敛**的有关内容，不熟悉者可跳过）。我们令 $\begin{cases} \delta = kr \\ l = t\delta = tkr \end{cases}$，并将 t,k 视为参变量，其中 $t\in(0,1)$，并且 $k>0$. 我们也不妨 $k<1$. 将示意图中的有关几何量都视为 t,k 的二元函数（于是 $\delta\to0^+$ 转化成 $k\to0^+$）。断言 $\lim\limits_{k\to0^+}\angle E\boldsymbol{p}E'=0$ 关于 $t\in(0,1)$ 一致。考虑三角形 $\triangle OPE$，由余弦定理得

$$\cos\angle EPD = -\frac{(l-r)^2+\delta^2-r^2}{2\delta(r-l)} = \frac{2t-(1+t^2)k}{2(1-tk)}$$

再考察三角形 $\triangle \boldsymbol{p}E'A$，易知 $\cos\angle E'\boldsymbol{p}D = t$. 注意到 $0<k,t<1$，从而有

$$\begin{aligned}\left|\cos\angle E\boldsymbol{p}D-\cos\angle E'\boldsymbol{p}D\right| &= \left|\frac{2t-(1+t^2)k}{2(1-tk)}-t\right| = k\left|\frac{t^2-1}{2(1-tk)}\right| \\ &\le k\cdot\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}k \to 0 \qquad (k\to 0^+)\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{k\to 0^+}(\cos\angle E\boldsymbol{p}D-\cos\angle E'\boldsymbol{p}D)=0$关于 $t\in(0,1)$ 一致。又因为函数 $x\mapsto \cos x$ 在 $[0,\pi]$ 单调、一致连续，从而得到 $\lim\limits_{k\to 0^+}\angle E\boldsymbol{p}E' = \lim\limits_{k\to 0^+}(\angle E\boldsymbol{p}D-\angle E'\boldsymbol{p}D)=0$关于 $t\in(0,1)$ 一致。所以

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\delta^2}\iint_D (s_\delta(\boldsymbol{p})-\tilde{s}_\delta(\boldsymbol{p}))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \le \frac{1}{\delta^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\delta}|s_\delta(\boldsymbol{p})-\tilde{s}_\delta(\boldsymbol{p})|\cdot|r-l|\,\mathrm{d}l \\ \le\ & \frac{2\pi r}{\delta^2}\int_0^1 |s_\delta(\boldsymbol{p})-\tilde{s}_\delta(\boldsymbol{p})|\cdot\delta\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi r}{\delta}\int_0^1 2\delta\angle E\boldsymbol{p}E'\,\mathrm{d}t = 4\pi r\int_0^1 \angle E\boldsymbol{p}E'\,\mathrm{d}t \\ \to\ & 0 \qquad (\delta\to 0^+)\end{aligned}$$

其中最后一步利用了关于 t 的一致收敛性。从而证毕。 □

7.2 三重积分

习题 241. 求曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 围成区域 Ω 的体积.

解. 考虑球坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\varphi\end{cases}$ ，则区域 Ω 变为

$$\Omega' := \left\{(r,\theta,\varphi)\middle|0\le\theta,\varphi\le\pi,\ r\le\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

从而 Ω 的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \xlongequal{t=\tan\varphi} \frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}}{1-2\frac{t^2}{(1+t^2)^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}. \end{aligned}$$

□

习题 242. 对于常数 $a,b,c>0$，计算 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1 \qquad (x,y,z>0)$$

与坐标平面所围成区域的体积 V.

解. 考虑广义球坐标变换 $\begin{cases} x &= ar\sin\theta\cos^2\varphi \\ y &= br\sin\theta\sin^2\varphi \\ z &= cr\cos\theta \end{cases}$，其中 $(r,\theta,\varphi)\in[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$，则该变换的 Jacobian 为

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} &= \det\begin{pmatrix} a\sin\theta\cos^2\varphi & ar\cos\theta\cos^2\varphi & -2ar\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin^2\varphi & br\cos\theta\sin^2\varphi & 2br\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi \\ c\cos\theta & -cr\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2abcr^2\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos^2\varphi & \cos\theta\cos^2\varphi & -1 \\ \sin\theta\sin^2\varphi & \cos\theta\sin^2\varphi & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2abcr^2\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}$$

因此该曲面与坐标平面围成区域的体积

$$V=2abc\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{abc}{3}$$

□

习题 243. 对于常数 $b>a>0$，计算三重积分

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

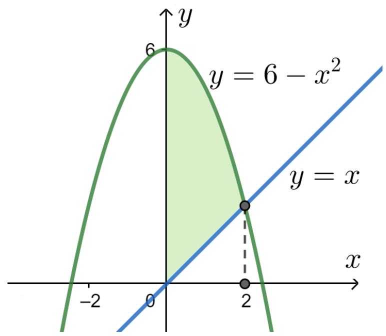
其中 $\mathbb{R}^3$ 中的区域 $D:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,z\geq 0,\ a^2\leq x^2+y^2+z^2\leq b^2\right\}$.

解. 考虑球坐标换元 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$，其中 $(r,\theta,\varphi)\in[a,b]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]$. 从而

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^b r^2\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_a^b r^4\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{4\pi}{15}(b^5-a^5) \end{aligned}$$

□

习题 244. 计算由曲面 $z=6-x^2-y^2$ 与曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成区域的体积。



习题244示意图

证明. 如图所示，易知该空间区域为图中绿色阴影部分绕 y 轴旋转所得的旋转体。从而该旋转体的体积为

$$V = \int_0^2 2\pi x\,\mathrm{d}x\int_x^{6-x^2}\mathrm{d}y = 2\pi\int_0^2(-x^3-x^2+6x)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}\pi$$

□

习题 245. 已知定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，并且 f 在 $x=0$ 可导。对于 $t>0$，记 $\mathbb{B}_t := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2\le t^2\right\}$. 试求极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_{\mathbb{B}_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

解. 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，球坐标变换直接计算之，有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_{\mathbb{B}_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \lim_{t\to0^+}\frac{1}{\pi t^4}\int_0^t 4\pi r^2 f(r)\,\mathrm{d}r \\ = \lim_{t\to0^+}\frac{4}{t^4}\int_0^t r^2 f(r)\,\mathrm{d}r &\xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{t\to0^+}\frac{4}{4t^3}\cdot t^2 f(t) = \lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t} = f'(0)\end{aligned}$$

□

习题 246. 将地球视为半径为 R 的球体，设大气层密度 $\rho(h)=\rho_0 e^{-kh}$, 其中 h 为点到地面的高度（其中 ρ_0,k 为正常数）。试计算地球大气层的总质量 M.

解. 在球坐标 (r,θ,φ) 下，注意 $h=r-R$, 从而

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{r\geq R} \rho_0 e^{-k(r-R)}\,\mathrm{d}V = 2\pi\rho_0 e^{kR}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_R^{+\infty} r^2 e^{-kr}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{4\pi\rho_0 e^{kR}}{k}\left(\int_R^{+\infty} 2re^{-kr}\,\mathrm{d}r + R^2 e^{-kR}\right) = \frac{4\pi\rho_0}{k^3}(k^2R^2+2kR+2) \end{aligned}$$

□

7.3 多重积分

习题 247. 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，证明：对任意 $n\geq 1$ 以及任意 $a>0$,

$$\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_n = \frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^n$$

常规做法. 对 n 使用数学归纳法。

起始步：$n=1$ 是显然正确。

归纳步：对于 $n>1$，如果此命题对 $n-1$ 成立，则

$$\begin{aligned} & \int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_n \\ = & \int_0^a f(x_1)\,\mathrm{d}x_1\left(\int_0^{x^1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_2)\cdots f(x_{n-1})\,\mathrm{d}x_n\right) \\ \xlongequal{\text{归纳假设}} & \int_0^a f(x_1)\cdot\frac{1}{(n-1)!}\left(\int_0^{x^1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{n-1}\mathrm{d}x_1 \\ = & \frac{1}{(n-1)!}\int_0^a\left(\int_0^{x^1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\left(\int_0^{x^1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_1 \\ \xlongequal{\text{换元}u=\int_0^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t} & \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t} u^{n-1}\,\mathrm{d}u \\ = & \frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^n \end{aligned}$$

从而证毕。 □

注记

以上是此题的常规做法。话说对称性是好东西，我们早已见过很多【巧妙利用对称性化简计算】的例子。而对于此题，如果对称性用得好，就能够一眼看出它显然成立。以下给出利用对称性的做法:

另证. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维立方体区域

$$D := \left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \middle| 0<x_i<a,\ \forall 1\le i\le n\right\} = [0,a]^n$$

再考虑 n 维单纯形

$$\triangle := \left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \middle| 0<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<a\right\}$$

容易知道以下两件事：首先，题目中的累次积分化为 n 重积分，积分区域为 $\triangle$，即

$$\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_n = \int_{\triangle} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n$$

再注意到：

$$\int_D f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n = \left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^n$$

（前方高能预警，开始使用对称性了）

注意到对于任意 $\sigma\in S_n$，其中 S_n 为 n 元置换群，考虑变量代换

$$x_i := x'_{\sigma(i)} \qquad (1\le i\le n)$$

则成立

$$\begin{aligned}\int_{\triangle} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n &= \int_{\sigma(\triangle)} f(x'_1)f(x'_2)\cdots f(x'_n)\,\mathrm{d}x'_1\,\mathrm{d}x'_2\cdots\,\mathrm{d}x'_n \\ &= \int_{\sigma(\triangle)} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

上式右边的积分区域 $\sigma(\triangle)$ 为:

$$\sigma(\triangle) := \left\{(x'_1,x'_2,...,x'_n)\in\mathbb{R}^n \middle| 0<x'_{\sigma(n)}<x'_{\sigma(n-1)}<\cdots<x'_{\sigma(1)}<a\right\}$$

至此，我们证明了，对任意 $\sigma\in S_n$，

$$\int_{\triangle} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n = \int_{\sigma(\triangle)} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n$$

上式左右两边的区别在于积分区域的变化。最后再注意到对于任意 $\sigma\ne\tau\in S_n, \sigma(\triangle)\cap\tau(\triangle)=\varnothing$，因此

$$\begin{aligned}&\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_n \\ =\ &\int_{\triangle} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n \\ =\ &\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\int_{\sigma(\triangle)} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!}\int_{\bigcup\limits_{\sigma\in S_n}\sigma(\triangle)} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n\\
&= \frac{1}{n!}\int_D f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n\\
&= \frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^n
\end{aligned}
$$

从而证毕。 □

注记

以上证法可用六个字概括：“由对称性显然”。

习题 248. 对于正整数 n，记 $\mathbb{D}_n := [0,1]^n = \left\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \middle| 0\le x_i\le 1, \forall 1\le i\le n\right\}$ 为 n 维单位立方体。证明：对任意 $\varepsilon>0$，成立

$$
\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\int\int\cdots\int}_{n}{}_{\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{D}^n\middle|\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon\right\}}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n = 0
$$

证明. 取定正整数 n 以及 $\varepsilon>0$，记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 以及 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}:=\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n$ 为 n 维体积元。定义 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $g(\boldsymbol{x}):=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}$. 记 $\mathbb{D}_n$ 的子集

$$
\mathbb{D}_{n,\varepsilon} := \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{D}_n \middle| |g(\boldsymbol{x})|>\varepsilon\right\}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}_n}|g(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &\ge \int_{\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{D}_n\middle||g(\boldsymbol{x})|^2\ge\varepsilon^2\right\}}|g(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\ge\varepsilon^2\int_{\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{D}_n\middle||g(\boldsymbol{x})|^2\ge\varepsilon^2\right\}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\varepsilon^2\int_{\mathbb{D}_{n,\varepsilon}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{D}_{n,\varepsilon}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\le\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{D}_n}|g(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

另一方面，直接计算可知

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}_n}|g(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{D}_n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&= \int_{\mathbb{D}_n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\mathbb{D}_n}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{D}_n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n\int_0^1 x_i^2\,\mathrm{d}x_i+2\sum_{1\le i<j\le n}\int_0^1\int_0^1 x_ix_j\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j\right)-\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\cdot\frac{1}{3}+2\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{12n}$$

因此对于给定的 $\varepsilon > 0$，总成立

$$\int_{\mathbb{D}_{n,\varepsilon}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \le \frac{1}{12n\varepsilon^2}$$

令 $n \to +\infty$，即得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{D}_{n,\varepsilon}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$，从而得证。 □

> **注记**
>
> 本题实际上是**概率论**中的**大数定律**的特殊情形。

习题 249. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，计算极限

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n$$

证明. 注意 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 连续，从而有界，记 M 为 $|f|$ 在 $[0,1]$ 的一个上界。对任意 $\varepsilon > 0$，由 $f(x)$ 的连续性，从而存在 $\delta > 0$，使得当 $|x - \frac{1}{2}| \le \delta$ 时成立 $|f(x) - f(\frac{1}{2})| \le \frac{\varepsilon}{2}$. 固定此 $\delta > 0$，沿用上一题（习题248）的记号与结论，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{D}_{n,\delta}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$，因此取 $N > 0$，使得对任意 $n \ge N$，都有

$$\int_{\mathbb{D}_{n,\delta}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \le \frac{\varepsilon}{4M}$$

于是对任意 $n \ge N$，成立

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{D}_n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} - f(\frac{1}{2})\right| = \left|\int_{\mathbb{D}_n} \left(f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) - f(\frac{1}{2})\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \\
\le\ & \int_{\mathbb{D}_{n,\delta}} \left|f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) - f(\frac{1}{2})\right| \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{D}_n\setminus\mathbb{D}_{n,\delta}} \left|f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) - f(\frac{1}{2})\right| \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
\le\ & 2M \int_{\mathbb{D}_{n,\delta}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{D}_n\setminus\mathbb{D}_{n,\delta}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \le 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon
\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n = f(\frac{1}{2})$$

□

7.4 积分不等式 II

习题 250. 设平面 $\mathbb{R}^2$ 上的闭区域 $D:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 0\le x,y\le 1\right\}$，定义在 D 上的四次连续可微函数 $f(x,y)$ 在 D 的边界处取值恒为 0，并且在 D 上成立

$$\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right|\le b$$

其中 $b\ge 0$ 为常数。证明：

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\le\frac{b}{144}$$

证明. 对于任意 $y\in[0,1]$，注意到对任意实数 C_1,C_2 都成立

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x &= (x+C_1)f(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1(x+C_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\\ &= -\left(\frac{1}{2}(x+C_1)^2+C_2\right)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\left(\frac{1}{2}(x+C_1)^2+C_2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}(C_1+1)^2+C_2=0\\ \frac{1}{2}C_1^2+C_2=0\end{array}\right.$，解得 $\left\{\begin{array}{l}C_1=-\frac{1}{2}\\ C_2=-\frac{1}{8}\end{array}\right.$，因此

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{$*$}$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x^2-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

注意到当 $y=0$ 或 1 时，总有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0$，从而类似 $(*)$ 式，同理可得

$$\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1(y^2-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

因此，

$$\begin{aligned}\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| &= \left|\frac{1}{4}\iint_D(x^2-x)(y^2-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\\ &\le \frac{1}{4}\iint_D\left|(x^2-x)(y^2-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\le \frac{b}{4}\int_0^1(x-x^2)\,\mathrm{d}x\int_0^1(y-y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{b}{144}\end{aligned}$$

□

习题 251. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负连续函数，并且对任意 $t\in\mathbb{R}$ 都成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2} f(x)\,\mathrm{d}x \le 1 \tag{$*$}$$

证明：对任意有界闭区间 $[a,b]$，若 $b-a\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，则成立 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{2\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$.

证明. 将 $(*)$ 式中的 t 在 $[a,b]$ 积分，有

$$\int_a^b \mathrm{d}t\int_a^b e^{-(x-t)^2} f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b \mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2} f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b \mathrm{d}t=b-a$$

另一方面，交换积分次序得到

$$\int_a^b \mathrm{d}t\int_a^b e^{-(x-t)^2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b e^{-(x-t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_{x-b}^{x-a} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

注意上式最右端有 $a\le x\le b$，从而 $x-b\le 0\le x-a$. 现在考虑函数 $\varphi(u)=e^{-u^2}$，则 $\varphi''(u)=(4u^2-2)e^{-u^2}$，从而 $\varphi(u)$ 在 $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 是凸函数。于是对任意 $x\in[a,b]$，若 $b-a\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $|x-b|,|x-a|$ 都小于等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而有

$$\begin{aligned}\int_{x-a}^{x-b} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u &\ge \frac{1}{2}\left(1+e^{-(x-b)^2}\right)(b-x)+\frac{1}{2}\left(1+e^{-(x-a)^2}\right)(x-a)\\ &\ge \frac{1}{2}\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right)(b-a)\end{aligned}$$

从而有

$$\frac{1}{2}\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right)(b-a)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le b-a$$

整理得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{2\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$. □

习题 252. 已知 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的非负连续函数，并且满足

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x=0,\qquad\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

证明：

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|x+y|f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ge\int_{-1}^{1}|x|f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明. 令 $g(x)=f(-x)$，则由题设条件易得

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x \tag{$*$}$$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{$**$}$$

因此有

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |x+y| f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
= & \int_0^1 \int_0^1 (x+y) f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_0^1 (x+y) g(x) g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
& +2 \int_0^1 \int_0^1 |x-y| f(x) g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
\geq & \int_0^1 \int_0^1 (x+y) f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_0^1 (x+y) g(x) g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
= & \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 y f(y)\,\mathrm{d}y \\
& + \int_0^1 x g(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 y g(y)\,\mathrm{d}y \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \\
\xlongequal{(*)(**)} & \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x g(x)\,\mathrm{d}x \\
= & \int_0^1 |x| f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

第八章　曲线积分与曲面积分

8.1　第一型曲线积分

习题 253. 设 3 维欧氏空间中的曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, 其中 $a>0$ 为常数. 求第一型曲线积分

$$I := \int_L x^2\,\mathrm{d}s.$$

解. 首先注意到积分区域是在平面 $x+y+z=0$ 上的以原点 $(0,0,0)$ 为圆心, 半径为 a 的圆周. 再注意到积分区域关于 x,y,z 的对称性, 由换元积分容易得到

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \int_L y^2\,\mathrm{d}s = \int_L z^2\,\mathrm{d}s$$

因此有

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\int_L 1\,\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3$$

□

注记

这种对称性方法十分巧妙, 大大简化计算. 若没有想到对称性, 直接用基础的" 笨办法" 求解也是可行的, 如下:

另解. 我们暴力给出曲线 L 的参数方程, 进而计算该曲线积分. 注意到曲线 L 位于平面 $P: x+y+z=0$ 上, 而该平面有法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$. 再注意到向量 $\boldsymbol{u}:=(1,-1,0)$ 位于平面 P，从而向量

$$\boldsymbol{v} := \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u} = (1,1,-2)$$

也位于平面 P，并且与 $\boldsymbol{u}$ 垂直.

又因为曲线 L 位于平面 P, 且是以原点为圆心, 半径 a 的圆周，记 L 上的点为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, 则直接写出 L 的参数方程

$$\boldsymbol{r} = \frac{a}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}\sin\theta + \frac{a}{\sqrt{6}}\boldsymbol{v}\cos\theta \qquad \theta\in[0,2\pi]$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta \\ y &= -\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta \\ z &= -2\frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta \end{cases}$$

因此有

$$\mathrm{d}s = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta}\right|\mathrm{d}\theta = \left|\frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{u}\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{6}}\mathbf{v}\sin\theta\right|\mathrm{d}\theta = \sqrt{\frac{a^2}{2}|\mathbf{u}|^2\cos^2\theta + \frac{a^2}{6}|\mathbf{v}|^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = a\,\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned} \int_L x^2\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta\right)^2\cdot a\,\mathrm{d}\theta \\ &= a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta + \frac{1}{6}\cos^2\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

□

习题 254. 设 $\mathbb{R}^3$ 中的单叶双曲面 $x^2+y^2=z^2+1$ 与平面 $z=kx$ 相交所得曲线 ℓ_k 的长度为 $L(k)$, 其中参数 $0\le k<1$. 试求极限:

$$\lim_{k\to 1^-}(1-k)^{\frac{1}{2}}L(k).$$

解. 将单叶双曲面方程与平面方程联立, 消去 z, 整理得

$$(1-k^2)x^2+y^2=1$$

这是 xOy 平面上的一个椭圆, 事实上它是曲线 ℓ_k 在 xOy 平面的投影. 从而 ℓ_k 有参数表示:

$$\begin{cases} x = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-k^2}} \\ y = \sin\theta \\ z = \frac{k\cos\theta}{\sqrt{1-k^2}} \end{cases},\quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

从而易知弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{1-k^2}+\cos^2\theta+\frac{k^2\sin^2\theta}{1-k^2}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{k\to 1^-}(1-k)^{\frac{1}{2}}L(k) &= \lim_{k\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1+k}}\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \lim_{k\to 1^-}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

观察上式最右端, 注意当 $k \to 1^-$ 时, $\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}$ 趋于 $\sqrt{2\sin^2\theta}=\sqrt{2}\sin\theta$. 从而我们想当然猜测

$$\text{原式} = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 4.$$

这样所得的结果正确, 但论述不严谨 — 一般地不能将两个极限过程 (这里是求积分与取极限) 随意交换次序. 接下来我们要补充证明交换次序的合法性.

对任意 $\varepsilon > 0$ (不妨 $\varepsilon < 1$), 由于 $\lim\limits_{k\to 1^-}(1-k^2)=0$, 从而存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $k \in (1-\delta, 1)$, 都有 $1-k^2 < \min\{\frac{\varepsilon^2}{4}, \varepsilon\sin\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\}$. 现在取定此 δ, 则对任意 $k \in (1-\delta,1)$ 以及任意 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

- 如果 $\theta \le \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$, 则有

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}-\sqrt{2}\sin\theta\right| \\
\le\ & 2\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{1-k^2}\cos\theta \le 2\sqrt{2}\theta+\sqrt{1-k^2} \\
\le\ & 2\sqrt{2}\cdot\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

- 如果 $\theta > \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$, 则 $\sin\theta > \sin\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$, 从而

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}-\sqrt{2}\sin\theta\right| \\
=\ & \frac{\left|(k^2-1)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta\right|}{\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}+\sqrt{2}\sin\theta} \\
\le\ & \frac{1-k^2}{\sin\theta} \le \frac{1-k^2}{\sin\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}} \le \frac{\varepsilon\sin\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}}{\sin\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了, 当 $k \in (1-\delta, 1)$ 时, 不等式

$$\left|\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}-\sqrt{2}\sin\theta\right| \le \varepsilon$$

对任意 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 都成立. 因此有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right| \\
\le\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}-\sqrt{2}\sin\theta\right|\mathrm{d}\theta \\
\le\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varepsilon\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

这就用极限的定义证明了

$$\lim_{k\to 1^-}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}.$$

从而原式

$$\lim_{k\to 1^-}(1-k)^{\frac{1}{2}}L(k) = \lim_{k\to 1^-}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4.$$

□

注记

本题证明“积分与极限交换次序”的合法性，实际上是在证明

$$\lim_{k\to 1^-}\sqrt{(1+k^2)\sin^2\theta+(1-k^2)\cos^2\theta}=\sqrt{2\sin^2\theta}=\sqrt{2}\sin\theta$$

关于 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ **一致**. 这正是数学分析当中函数列**一致收敛**的相关知识.

习题 255. 设空间中有一个圆形通电导线 L, 该圆周的半径为 R, 电流大小为 I. 以该线圈的圆心为中心建立空间直角坐标系, 使得线圈位于 xOy 平面, 并且从 z 轴正半轴看, 电流的方向为逆时针. 考虑该线圈电流产生的磁场 $\boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{r}=(x,0,z)$ 为空间中的一点, 证明: 当 $r:=\sqrt{x^2+z^2}$ 充分小时, $\boldsymbol{r}$ 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 有如下近似:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{2R}\boldsymbol{e}_z+\frac{3\mu_0 I}{8R^3}\left[xz\boldsymbol{e}_x+(x^2-2z^2)\boldsymbol{e}_z\right]+o(r^2).$$

其中 μ_0 为真空磁导率.

证明. 设通电导线上的点 $\boldsymbol{l}=(R\cos\theta,R\sin\theta,0)$, 其中参数 $\theta\in[0,2\pi]$. 则由电磁学中的 Biot-Savart(毕奥-萨伐尔) 定律, $\boldsymbol{r}$ 处的磁感应强度

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_L\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l})}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}\|^3}$$

容易计算得, $\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l})=R(z\cos\theta,z\sin\theta,R-x\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 以及 $\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}\|^3=(x^2+z^2+R^2-2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}$, 因此 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 的 x,y,z 分量分别为

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z\cos\theta}{(x^2+z^2+R^2-2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\\
B_y &= \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z\sin\theta}{(x^2+z^2+R^2-2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta=0 \qquad \text{(由对称性)}\\
B_z &= \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(x^2+z^2+R^2-2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta-\frac{x}{z}B_x
\end{aligned}$$

注意利用 Taylor 展开得到近似公式

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}x+\frac{15}{8}x^2+o(x^2),\qquad (x\to 0)$$

从而可得

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{\mu_0 I z}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(1-\frac{2x\cos\theta}{R}+\frac{x^2+z^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{\mu_0 I z}{2\pi R^2}\int_0^{\pi}\cos\theta\left(1-\frac{2x\cos\theta}{R}+\frac{x^2+z^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{\mu_0 I z}{2\pi R^2}\int_0^{\pi}\cos\theta\left(1+\frac{3x\cos\theta}{R}-\frac{3}{2}\frac{x^2+z^2}{R^2}+\frac{15}{8}\left(\frac{2x\cos\theta}{R}\right)^2+o\left(x^2+z^2\right)\right)\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{\mu_0 I z}{2\pi R^2}\frac{3x}{R}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta+o(r^2)=\frac{3\mu_0 I}{4R^3}xz+o(r^2).
\end{aligned}$$

类似计算可得

$$B_z=\frac{\mu_0 I}{2R}+\frac{3}{8}\frac{\mu_0 I}{R^3}x^2-\frac{3}{4}\frac{\mu_0 I}{R^3}z^2+o(r^2)=\frac{\mu_0 I}{2R}+\frac{3}{8}\frac{\mu_0 I}{R^3}(x^2-2z^2)+o(r^2)$$

再结合 $B_y=0$, 因此整理得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{2R}\boldsymbol{e}_z+\frac{3\mu_0 I}{8R^3}\left[xz\boldsymbol{e}_x+(x^2-2z^2)\boldsymbol{e}_z\right]+o(r^2).$$

□

8.2 第一型曲面积分

习题 256. 设三维空间中的曲面 S 是圆柱面 $x^2+y^2=9$ 夹在平面 $z=0$ 与平面 $z=2$ 之间的部分. 计算积分:

$$\iint_S (x^2y+z^2)\,\mathrm{d}S.$$

解. 容易写出曲面 S 的参数方程

$$\begin{cases} x=3\cos u\\ y=3\sin u\\ z=v \end{cases}\qquad (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,2]$$

则面积元 $\mathrm{d}S=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$. 因此有

$$\begin{aligned}
\iint_S (x^2y+z^2)\,\mathrm{d}S &= \iint_{[0\times2\pi]\times[0,2]}(27\cos^2 u\sin u+v^2)\cdot 3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= 162\int_0^{2\pi}\cos^2 u\sin u\,\mathrm{d}u+6\pi\int_0^2 v^2\,\mathrm{d}v=16\pi.
\end{aligned}$$

□

注记

事实上，由积分区域关于 xOz 平面的对称性，直接看出 $\iint_S x^2y\,\mathrm{d}S = 0$，从而原积分 $= \iint_S z^2\,\mathrm{d}S = 2\pi \times 3\int_0^2 z^2\,\mathrm{d}z = 16\pi$，可以口算出来。

习题 257. 设 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的部分。求 Σ 的面积。

解. 注意到曲面 Σ 关于 xOy 平面是对称的，并且 Σ 在 xOy 的上半部分 Σ^+ 具有参数表示

$$z(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2} \qquad (x-\frac{a}{2})^2+y^2 < \frac{a^2}{4}$$

记向量 $\boldsymbol{r}(x,y) = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ 为曲面 Σ^+ 上的一点，则 $\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = (1,0,-\frac{x}{z}) \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = (0,1,-\frac{y}{z}) \end{cases}$，从而面积元

$$\mathrm{d}S = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \right\| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $(x,y) \in D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x-\frac{a}{2})^2+y^2 < \frac{a^2}{4}\right\}$. 再考虑极坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，则此变换将区域 D 变为 $D' = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \middle| \theta \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), r \in (0, a\cos\theta)\right\}$. 从而

$$\begin{aligned} \Sigma\text{ 的面积} &= 2\iint_{\Sigma^+} \mathrm{d}S = 2\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2a\iint_{D'} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r \\ &= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 4a^2(\frac{\pi}{2}-1) \end{aligned}$$

□

习题 258. 对于 $0<h<a$，考虑曲面 $\Sigma := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2=a^2, z \geq h\right\}$，计算积分：

$$\iint_\Sigma \frac{1+\sin x}{z}\,\mathrm{d}S$$

解. 首先注意到函数 $\frac{\sin x}{z}$ 关于 x 为积函数，并且曲面 Σ 关于 $x \mapsto -x$ 对称，故由对称性得 $\iint_\Sigma \frac{\sin x}{z}\,\mathrm{d}S = 0$，我们只需计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}\mathrm{d}z$. 考虑曲面 Σ 的参数表示 $z(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则面元 $\mathrm{d}S = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，于是有

$$\text{原式} = \iint_{x^2+y^2\leq a^2-h^2} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= a\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{r}{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi a \ln\frac{a}{h}$$

□

习题 259. 求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 含在柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 内的部分的面积 S.

解. 考虑平面第一象限内的区域 $D := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x,y\geq 0,\, x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}<1\right\}$，则注意到题目中曲面的对称性，类似上一题，

$$S = 8\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

考虑变量代换 $\begin{cases} x = r\cos^3\theta \\ y = r\sin^3\theta \end{cases}$，则区域 D 变为 $D' := \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \middle| r\in(0,1), \theta\in(0,\frac{\pi}{2})\right\}$，并且该变换的 Jacobian 为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos^3\theta & -3r\cos^2\theta\sin\theta \\ \sin^3\theta & 3r\sin^2\theta\cos\theta \end{pmatrix} = 3r\sin^2\theta\cos^2\theta$$

使用此变换，可得

$$\begin{aligned} S &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}}\cdot 3r\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}r \\ &= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}} \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}} \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\frac{2}{\cos^6\theta+\sin^6\theta}\left(1-\sqrt{1-(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}\right) \end{aligned}$$

再注意到

$$\begin{aligned} \cos^6\theta+\sin^6\theta &= (\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta) \\ &= (\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-3\cos^2\theta\sin^2\theta \\ &= 1-3\cos^2\theta\sin^2\theta \end{aligned}$$

继续整理原式，得到

$$\begin{aligned} S &= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{1-3\cos^2\theta\sin^2\theta}\left(1-\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= 12\int_0^{\pi}\frac{\frac{1}{4}\sin^2\theta}{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4-3\sin^2\theta}-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4-3\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta-16\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{4-3\sin^2\theta}-8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta+4\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+3\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta-16\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\mathrm{d}(\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}-4\pi+4\sqrt{3} \\
&= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+3\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta-16\sqrt{3}\int_0^{1}\frac{1}{1+3t^2}\mathrm{d}t-4\pi+4\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

再注意到

$$
\int_0^1\frac{1}{1+3t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{u=\sqrt{3}t}\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+3\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{5+3\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\cos\theta}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+4}=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

代入原式，即可得到

$$
S=32\cdot\frac{\pi}{4}-16\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-4\pi+4\sqrt{3}=4(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})
$$

□

注记

原题是计算“柱面在球面内”的部分的面积；而曲豆豆当时误以为是“球面在柱面内”的部分，于是就有了此题。虽然计算量较大，但别有一番风味。

习题 260. 设 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分。对于曲面 Σ 上的点 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$，记 $\Pi_{\boldsymbol{p}}$ 为曲面 Σ 在点 $\boldsymbol{p}$ 处的切平面，再记 $\rho(\boldsymbol{p})=\rho(x,y,z)$ 为原点到平面 $\Pi_{\boldsymbol{p}}$ 的距离。试计算曲面积分

$$
\iint_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S
$$

证明. 对于 $\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，容易计算出切平面 $\Pi_{\boldsymbol{p}_0}$ 的方程为 $x_0x+y_0y+2z_0z=2$, 因此

$$
\rho(\boldsymbol{p}_0)=\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+(2z_0)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z_0^2}}
$$

考虑曲面 Σ 的参数表示 $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta \\ z = \sin\varphi \end{cases}$，其中 $(\theta,\varphi) \in [0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]$. 则容易验证切向量 $\frac{\partial p}{\partial\theta}$ 与 $\frac{\partial p}{\partial\varphi}$ 垂直，并且 $\left\|\frac{\partial p}{\partial\theta}\right\| = \sqrt{2}\cos\varphi, \left\|\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right\| = \sqrt{1+\sin^2\varphi}$. 从而面积元 $\mathrm{d}S = \sqrt{2}\cos\varphi\sqrt{1+\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. 从而

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \frac{z}{\rho(x,y,z)}\,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cos\varphi\sqrt{1+\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi(1+\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^1 t(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

□

习题 261. 设 Σ 为三维空间中质量分布均匀的曲面，表达式为

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (x,y,z\geq 0, x+y\leq a)$$

其中 $a>0$ 为常数。求 Σ 的重心的坐标。

解. 设 Σ 的重心坐标为 (x_0,y_0,z_0). 由曲面 Σ 的对称性，容易看出 $x_0=y_0$. 注意曲面 Σ 的参数表示 $z(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，其中 $(x,y)\in\triangle := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x,y\geq 0,\ x+y\leq a\right\}$. 容易求出 Σ 在此参数下的面积元 $\mathrm{d}S = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 从而有

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \mathrm{d}S &= a\iint_\triangle \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = a\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{a-y}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= a\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-y}{a+y}}\,\mathrm{d}y \xlongequal{u=\arcsin\sqrt{\frac{a-y}{a+y}}} a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 u\,\mathrm{d}\frac{\cos^2 u}{1+\sin^2 u} \\
&= -a^2\left(\frac{u\cos^2 u}{1+\sin^2 u}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^2 u}{1+\sin^2 u}\,\mathrm{d}u\right) \\
&= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{1+\sin^2 u}-1\right)\mathrm{d}u \xlongequal{t=\tan u} -\frac{\pi}{2}a^2+2a^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{2}a^2+a^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi a^2 \\
\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}S &= a\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{a-y}\frac{x}{\sqrt{a^2-y^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{(a-y)^2}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2-t}}\,\mathrm{d}t \\
&= a\int_0^a\left(\sqrt{a^2-y^2}-\sqrt{2y(a-y)}\right)\mathrm{d}y = \frac{2-\sqrt{2}}{8}\pi a^3 \\
\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S &= \iint_\triangle \frac{a\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a\iint_\triangle\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}a^3
\end{aligned}$$

因此 Σ 的重心的坐标 (x_0, y_0, z_0) 满足

$$\begin{aligned} x_0 = y_0 &= \frac{\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma \mathrm{d}S} = \frac{\sqrt{2}}{4}a \\ z_0 &= \frac{\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma \mathrm{d}S} = \frac{\sqrt{2}+1}{\pi}a \end{aligned}$$

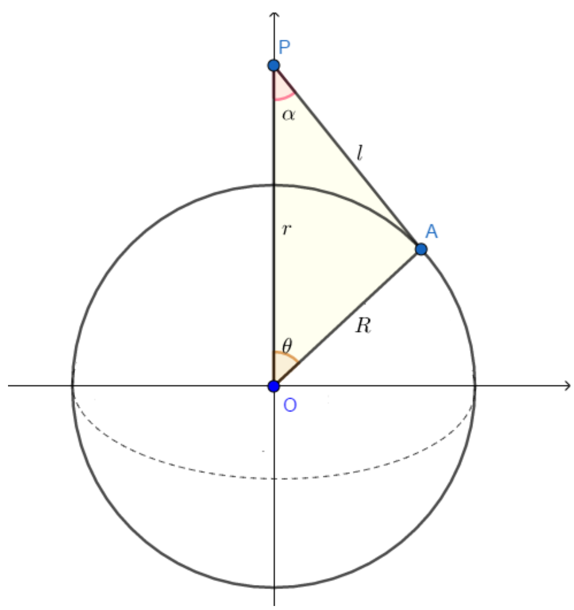
□

习题 262. 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的以原点为中心, 半径为 $R > 0$ 的空心球壳, 其质量分布均匀, 面密度为 ρ. 设 P 为 $\mathbb{R}^3$ 中的质点, 其位置向量为 $\boldsymbol{r}$, 质量为 m, 且 $r := \|\boldsymbol{r}\| \neq R$. 试通过直接计算证明: 球壳 S 对质点 P 的万有引力

$$\boldsymbol{F} := \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{如果} r < R \\ -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} & \text{如果} r > R \end{cases}.$$

其中 G 为万有引力常数, $M := 4\pi R^2 \rho$ 为球壳 S 的质量.

证明. 以球心为原点建立空间直角坐标系, 使得质点 P 位于 z 轴正半轴 (总可以建立这样的坐标系). 如图 (这里只画了 $r > R$ 的情形) 所示, 质点 P 到球心的距离为 r; 设 A 为球面上任意一点, 则 A 到球心的距离为 R, 再记 A 到 P 的距离为 l. 由对称性易知球面对质点 P 的万有引力 $\boldsymbol{F}$ 的方向沿 z 轴负方向, 于是我们只需计算 $\boldsymbol{F}$ 的 z 轴分量的大小F.



F 可表示为如下的第一型曲面积分:

$$F = \iint_S \frac{Gm\rho\,\mathrm{d}S}{l^2}\cos\alpha.$$

为计算该积分, 考虑球面 S 的参数表示 $\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$, 则面积元 $\mathrm{d}S = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. 此外, 由余弦定理得 $l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$, 从而

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + l^2 - R^2}{2rl} = \frac{2r^2 - 2Rr\cos\theta}{2rl} = \frac{r - R\cos\theta}{l}.$$

因此有

$$\begin{aligned}
F &= \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \frac{Gm\rho}{l^3}(r - R\cos\theta)\cdot R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi R^2 Gm\rho \int_0^{\pi} \frac{(r - R\cos\theta)\sin\theta}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi R^2 Gm\rho \int_{-1}^{1} \frac{r - Rt}{(R^2 + r^2 - 2Rrt)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(换元 } u = R^2 + r^2 - 2Rrt\text{)} \\
&= 2\pi R^2 Gm\rho \int_{(r+R)^2}^{(r-R)^2} u^{-\frac{3}{2}}\left(r - \frac{R^2 + r^2 - u}{2r}\right)\left(-\frac{1}{2Rr}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi RGm\rho}{2r^2}\int_{(r-R)^2}^{(r+R)^2}\left[(r^2 - R^2)u^{-\frac{3}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi RGm\rho}{2r^2}\left[-2(r^2 - R^2)\cdot u^{-\frac{1}{2}}\Big|_{(r-R)^2}^{(r+R)^2} + 2\,u^{\frac{1}{2}}\Big|_{(r-R)^2}^{(r+R)^2}\right] \\
&= \frac{\pi RGm\rho}{r^2}\left[r + R - |r - R| - (r - R) + (r + R)\frac{r - R}{|r - R|}\right] \\
&= \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{4\pi R^2\rho Gm}{r^2} = \frac{GMm}{r^2} & r > R \end{cases}.
\end{aligned}$$

以上 F 为万有引力 $\boldsymbol{F}$ 的 z 分量大小. 再注意 $\boldsymbol{F}$ 的方向, 可知 $\boldsymbol{F}$ 可表示外如下矢量形式:

$$\boldsymbol{F} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{如果} r < R \\ -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} & \text{如果} r > R \end{cases}.$$

□

习题 263. 设 $f(x)$ 是连续正值函数，定义关于 $t > 0$ 的函数

$$\varphi(t) := \frac{\iint_{\mathbb{S}_t} f(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S}{\iint_{\mathbb{D}_t} f(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S},$$

其中 $\mathbb{R}^3$ 当中的曲面 $\mathbb{D}_t : \left\{(x, y, 0)\Big| x^2 + y^2 \le t^2\right\}$, 以及 $\mathbb{S}_t := \left\{(x, y, z)\Big| z = x^2 + y^2, z \le t^2\right\}$.

证明：$\varphi(t)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的严格单调递增的连续函数，并且 $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t) = 1$.

证明. 首先计算曲面 $\mathbb{S}_t$ 的面积元 $\mathrm{d}S$. 考虑曲面 $z = x^2+y^2$ 的参数表示：此曲面上的点 $\boldsymbol{p} = (x,y,x^2+y^2)$, 则切向量

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} = (1,0,2x), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} = (0,1,2y)$$

从而面积元 $\mathrm{d}S = \|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y}\|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $r := \sqrt{x^2+y^2}$. 之后考虑标准的平面极坐标换元，易知

$$\varphi(t) = \frac{\iint_{\mathbb{D}_t} \sqrt{1+4r^2} f(r^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathbb{D}_t} r f(f^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{\int_0^t \sqrt{1+4r^2}\, r f(r^2)\,\mathrm{d}r}{\int_0^t r f(r^2)\,\mathrm{d}r} \xlongequal{g(r):=rf(r^2)} \frac{\int_0^t \sqrt{1+4r^2}\, g(r)\,\mathrm{d}r}{\int_0^t g(r)\,\mathrm{d}r}$$

注意到 $g(r)$ 依然是 $(0,+\infty)$ 上的恒正、连续函数。从而对 $\varphi(t)$ 求导，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1+4t^2}\,g(t)\int_0^t g(r)\,\mathrm{d}r - g(t)\int_0^t \sqrt{1+4r^2}\,g(r)\,\mathrm{d}r}{\left(\int_0^t g(r)\,\mathrm{d}r\right)^2} \\ &= \frac{g(t)}{\left(\int_0^t g(r)\,\mathrm{d}r\right)^2}\int_0^t \left(\sqrt{1+4t^2} - \sqrt{1+4r^2}\right) g(r)\,\mathrm{d}r > 0\end{aligned}$$

从而 $\varphi(t)$ 严格单调递增。

而由积分第一中值定理，对任意 $t>0$, 存在 $\xi \in [0,t]$ 使得成立

$$\varphi(t) = \frac{\int_0^t \sqrt{1+4r^2}\,g(r)\,\mathrm{d}r}{\int_0^t g(r)\,\mathrm{d}r} = \frac{\sqrt{1+4\xi^2}\int_0^t g(r)\,\mathrm{d}r}{\int_0^t g(r)\,\mathrm{d}r} = \sqrt{1+4\xi^2}$$

而当 $t \to 0^+$ 时，ξ 也趋于 0^+, 从而 $\sqrt{1+4\xi^2}$ 趋于 1. 这就说明了 $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = 1$. □

习题 264. （*Poisson* 积分公式）

设单变量连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$a,b,c$ 为不全为零的常数，记 $\rho = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

（1）若 S 为三维空间中的单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，证明如下的 ***Poisson* 积分公式**:

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\rho t)\,\mathrm{d}t$$

（2）设 B 为三维空间中的单位球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$，证明：

$$\iiint_B f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1} f(\rho t)\,\mathrm{d}t$$

证明. **(1)** 令三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}\frac{a}{\rho}&\frac{b}{\rho}&\frac{c}{\rho}\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$，其中适当选取实数 $*$ 使得 A 为正交矩阵。考虑变量代换 $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. 注意积分区域 S 的旋转对称性，易知

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=\iint_S f(\rho u)\,\mathrm{d}S$$

之后将 $\mathbb{R}^3=\{(u,v,w)\}$ 中的单位球面（仍记为 S）视为绕 u 轴的旋转曲面，从而由旋转曲面的积分公式，

$$\iint_S f(\rho u)\,\mathrm{d}S = \int_{-1}^{1} f(\rho u)\cdot 2\pi\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sqrt{1-u^2}\right)^2}\,\mathrm{d}u=2\pi\int_{-1}^{1} f(\rho u)\,\mathrm{d}u$$

(2) 记 $r:=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$\iiint_B f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} f\left(\frac{ax+by+cz}{r}\right)\mathrm{d}S$$

对于每个 $0\le r\le 1$，考虑变量代换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$，再注意利用已证明的（1），

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} f\left(\frac{ax+by+cz}{r}\right)\mathrm{d}S=\int_0^1\mathrm{d}r\iint_S f(au+bv+cw)\cdot r^2\,\mathrm{d}S\\ &= \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int_S f(au+bv+cw)\,\mathrm{d}S=\frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1} f(\rho u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

□

习题 265. 对于四维欧氏空间中的点 $\boldsymbol{p}=(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$, 记 $\omega(\boldsymbol{p})$ 为点 $\boldsymbol{p}$ 到直线 $\ell: x=y=z=w$ 的距离。试计算第一型二维曲面积分

$$\iint_{T^2}\omega^2(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}S$$

其中环面 $T^2=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\middle| x^2+y^2=z^2+w^2=1\right\}$.

解. 考虑直线 ℓ 的单位方向向量 $\boldsymbol{n}=\left(\frac12,\frac12,\frac12,\frac12\right)$, 则对任意点 $\boldsymbol{p}=(x,y,z,w)$, 成立

$$\omega^2(\boldsymbol{p})=|\boldsymbol{p}|^2-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})^2=|\boldsymbol{p}|^2-\left(\frac{x+y+z+w}{2}\right)^2$$

考虑曲面 T^2 的参数表示 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=\cos\varphi \\ w=\sin\varphi \end{cases}$, $(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$, 则面积元

$$\mathrm{d}S=\sqrt{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta} & \frac{\partial p}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial p}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial p}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta} & \frac{\partial p}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial p}{\partial\varphi} \end{pmatrix}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

再注意到对于 $\boldsymbol{p}\in T^2$, 恒有 $|\boldsymbol{p}|^2=2$, 因此

$$\begin{aligned}
\iint_{T^2}\omega^2(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[|\boldsymbol{p}|^2-\frac{1}{4}(\cos\theta+\sin\theta+\cos\varphi+\sin\varphi)^2\right]\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\cdot 4\pi^2-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}2\left[\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})\right]^2\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 8\pi^2-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\sin\varphi)^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 8\pi^2-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta+\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 8\pi^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\pi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=6\pi^2
\end{aligned}$$

□

习题 266. 计算五维欧氏空间 $\mathbb{R}^5=\left\{(x,y,z,u,v)\,\middle|\,x,y,z,u,v\in\mathbb{R}\right\}$ 当中的四维曲面

$$\Sigma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ u^2+2v^2\le x^2+v \end{cases}$$

的四维体积。

解. 化为累次曲面积分，有

$$\begin{aligned}
&\iiiint_\Sigma \mathrm{d}S(x,y,z,u,v)=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\mathrm{d}S(x,y,z)\iint_{u^2+2(v-\frac{1}{4})^2=x^2+\frac{1}{8}}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
=\ &\frac{\pi}{\sqrt{2}}\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(x^2+\frac{1}{8}\right)\mathrm{d}S(x,y,z)\xlongequal{\text{球坐标换元}}\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta\cos^2\varphi+\frac{1}{8}\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
=\ &\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{8}\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)=\frac{11\sqrt{2}}{12}\pi^2
\end{aligned}$$

□

8.3 第二型曲线积分

习题 267. 设平面曲线 $L=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2=a^2\right\}$, 其中 $a>0$ 为常数, 曲线 L 取顺时针定向. 计算积分:

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+y(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))\,\mathrm{d}y$$

解. 注意到在曲线 L 上，有 $\sqrt{x^2+y^2}=a$，从而

$$\text{原式}=\oint_L a\,\mathrm{d}x+y(xy+\ln(x+a))\,\mathrm{d}y=\oint_L (xy^2+y\ln(x+a))\,\mathrm{d}y$$

注意积分区域的对称性，$\oint_L y\ln(x+a)\,\mathrm{d}y=0$，从而原式 $=\oint_L xy^2\,\mathrm{d}x$. 注意曲线 L 的定向，取 L 的定向相容的参数表示 $\begin{cases} x=a\sin\theta \\ y=a\cos\theta \end{cases}$，从而

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi} a^3\sin\theta\cos^2\theta(-a\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=-4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{a^4\pi}{4}$$

□

习题 268. 计算第二型曲线积分:

$$\int_L e^{-(x^2-y^2)}\left[x(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x+y(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\right]$$

其中平面曲线 L 为抛物线 $y=x^2$ 的从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的部分。

解. 记 $\begin{cases} P(x,y)=e^{-(x^2-y^2)}x(1-x^2-y^2) \\ Q(x,y)=e^{-(x^2-y^2)}y(1+x^2+y^2) \end{cases}$, 则容易验证

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-2e^{-(x^2-y^2)}xy(x^2+y^2)$$

于是由格林公式可知原积分与从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的积分路径无关。于是我们令取一条积分路径 L', 使得 L' 为从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的线段，它具有参数方程 $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$, $(0\le t\le 1)$. 从而有

$$\text{原式}=\int_{L'} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1[P(t,t)+Q(t,t)]\,\mathrm{d}t=\int_0^1 2t\,\mathrm{d}t=1$$

□

习题 269. 计算平面上的第二型曲线积分:

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^x}{x^2+y^2}\left[(x\sin y - y\cos y)\,\mathrm{d}x + (x\cos y + y\sin y)\,\mathrm{d}y\right],$$

其中 Γ 为任意一条满足原点在其围成区域内部的光滑曲线, 定向取逆时针.

解. 设函数 $\begin{cases} P(x,y) = \frac{e^x}{x^2+y^2}(x\sin y - y\cos y) \\ Q(x,y) = \frac{e^x}{x^2+y^2}(x\cos y + y\sin y) \end{cases}$, 则原式 $= \int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. 经计算, 在 $(x,y) \neq (0,0)$ 处, 成立

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-2ye^x}{(x^2+y^2)^2}(x\sin y - y\cos y) + \frac{e^x}{x^2+y^2}(x\cos y - \cos y + y\sin y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \left[\frac{e^x}{x^2+y^2} - \frac{2xe^x}{(x^2+y^2)^2}\right](x\cos y + y\sin y) + \frac{e^x}{x^2+y^2}\cos y \end{aligned}$$

从而容易验证 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

任取足够小的 $\varepsilon > 0$ 使得圆盘 $B_\varepsilon := \left\{(x,y)\middle| x^2+y^2 < \varepsilon^2\right\}$ 包含于曲线 Γ 围成的区域 Ω. 记区域 $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus B_\varepsilon$, 即位于 Γ 围成区域内部但不在圆盘 B_ε 的点之全体. 则在区域 Ω_ε 当中使用 Green 公式, 有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{L-\partial B_\varepsilon} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{\partial B_\varepsilon} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\partial B_\varepsilon} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos\theta}}{\varepsilon^2}\Big((\varepsilon\cos\theta\sin(\varepsilon\sin\theta) - \varepsilon\sin\theta\cos(\varepsilon\sin\theta))(-\varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &\quad +(\varepsilon\cos\theta\cos(\varepsilon\sin\theta) + \varepsilon\sin\theta\sin(\varepsilon\sin\theta))\varepsilon\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\Big) \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\varepsilon\cos\theta}\cos(\varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

注意上式对任何足够小的 $\varepsilon > 0$ 都成立, 从而(虽然难以直接计算上式最右端)有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{2\pi} e^{\varepsilon\cos\theta}\cos(\varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &\overset{?}{=} \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} e^{\varepsilon\cos\theta}\cos(\varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

□

注记

注意 P, Q 在原点处没有定义 (" 奇点"), 从而如果封闭曲线围成区域包含原点, 则不满足 Green 公式的使用条件. 本题当中我们我们设法避开奇点, 在" 好的" 地方使用 Green 公式从而简化问题, 这种技巧俗称" 挖奇点", 是非常基本的技巧.
此外还要注意, 一般来说两个极限过程不能随意交换次序, 本题最末"?" 处的求积分与取极限交换次序, 其合法性需要验证. 这里留给读者, 请读者尝试用极限的定义直接证明之.

除了上述常规的" 挖奇点" 方法, 本题还有一种避开奇点的特殊技巧, 由 biu 神提供:

另解. 取定足够小的 $\varepsilon > 0$, 同之前解法, 我们已经有

$$\text{原式} = \int_{\partial B_\varepsilon} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

我们考虑函数 $\begin{cases} \widetilde{P}(x,y) := e^x(x\sin y - y\cos y) \\ \widetilde{Q}(x,y) := e^x(x\cos y + y\sin y) \end{cases}$. 注意在 ∂B_ε 上有 $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 从而在 ∂B_ε 上成立等式 $P = \frac{1}{\varepsilon^2}\widetilde{P}$, $Q = \frac{1}{\varepsilon^2}\widetilde{Q}$. 因此

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial B_\varepsilon} \widetilde{P}\,\mathrm{d}x + \widetilde{Q}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{B_\varepsilon}\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{B_\varepsilon} e^x \sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{B_\varepsilon} e^x\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{同样因为此式与 } \varepsilon \text{ 的选取无关} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{2}{\varepsilon^2}e^{x_0}\cos y_0 \iint_{B_\varepsilon}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{积分中值定理, 存在 } (x_0, y_0) \in B_\varepsilon \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

□

习题 270. 给定常数 a, 考虑函数

$$I_a(r) = \int_C \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$$

其中曲线 C 为椭圆 $x^2 + xy + y^2 = r^2$, 定向取逆时针。试计算极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

证明. 曲线 C 的方程为 $(x, y)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r^2$. 易知系数矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ 的本征值为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{3}{2}$, 从而存在某个实数 φ, 使得

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

考虑保持定向的变量替换 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 则 (u,v) 位于椭圆 $C' : \frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 = r^2$, 并且容易验证 $u^2+v^2 = x^2+y^2$ 以及 $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v$. 所以有

$$I_a(r) = \int_{C'} \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^a}$$

现在，考虑曲线 C' 的服从定向的参数化 $\begin{cases} u = \sqrt{2}r\cos\theta \\ v = \frac{\sqrt{6}}{3}r\sin\theta \end{cases}$, 则有

$$I_a(r) = -\frac{2\sqrt{3}r^{2-2a}}{3}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(2\cos^2\theta + \frac{2}{3}\sin^2\theta\right)^a}\,\mathrm{d}\theta$$

从而立刻看出，当 $a>1$ 时 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r) = 0$；当 $a<1$ 时 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r) = -\infty$. 而当 $a=1$ 时，

$$\begin{aligned} I_a(r) &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\cos^2\theta + \frac{2}{3}\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = -4\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\cos^2\theta + \sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &\xlongequal{t=\tan\theta} -4\sqrt{3}\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{3+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = -2\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to+\infty} I_a(r) = \begin{cases} 0 & \text{如果} a>1 \\ -\infty & \text{如果} a<1 \\ -2\pi & \text{如果} a=1 \end{cases}$$

□

注记

当 $a=1$ 时，注意 $\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}\arctan\frac{x}{y}$, 从而可以利用格林公式以及在原点处“挖奇点”的标准方法来计算 $I_a(r)$.

习题 271. 求平面曲线

$$L : x^3+y^3 = 3axy, \quad (a>0)$$

围成区域的面积.

解. 我们采用第二型曲线积分的技巧来计算. 令 $y=kx$, 与曲线方程 $x^3+y^3=3axy$ 联立, 解得 $\begin{cases} x = \frac{3ak}{1+k^3} \\ y = \frac{3ak^2}{1+k^3} \end{cases}$. 这给出了曲线 L 的一个参数方程.

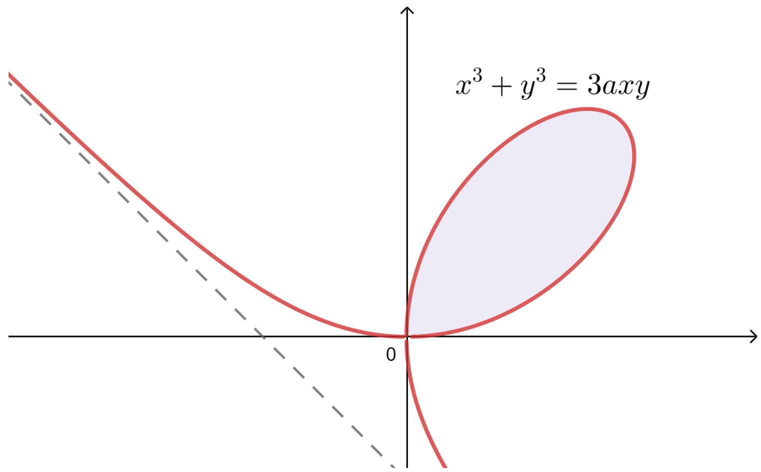


图: 曲线 $x^3+y^3=3axy$ 及其围成区域.

当参数 k 从 0 到 $+\infty$ 时, 曲线 L 上相应的点恰好沿逆时针绕其所围成区域一周. 因此围成区域面积

$$\begin{aligned} S &= \oint_L x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{3ak}{1+k^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{3ak^2}{1+k^3}\right) \\ &= 9a^2\int_0^{+\infty}\frac{2k^2-k^5}{(1+k^3)^3}\,\mathrm{d}k \xlongequal{k^3=u} 3a^2\int_0^{+\infty}\frac{2-u}{(1+u)^3}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}a^2. \end{aligned}$$

□

注记

此题也可以直接用二重积分来计算, 在适当换元的情况下也不难.

另解. 记曲线 L 围成区域为 Ω. 考虑变量替换 $\begin{cases} x = r\cos^{\frac{2}{3}}\theta \\ y = r\sin^{\frac{2}{3}}\theta \end{cases}$, 则在新坐标 (r,θ) 下, 积分区域 $\Omega = \left\{(r,\theta)\middle|\theta\in[0,\frac{\pi}{2}],\, 0\le r\le 3a\cos^{\frac{2}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta\right\}$. 该变换的 Jacobian 为

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix}\cos^{\frac{2}{3}}\theta & -\frac{2}{3}r\cos^{-\frac{1}{3}}\theta\sin\theta \\ \sin^{\frac{2}{3}}\theta & \frac{2}{3}r\sin^{-\frac{1}{3}}\theta\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{2}{3}r\left(\sin^{-\frac{1}{3}}\theta\cos^{\frac{5}{3}}\theta + \cos^{-\frac{1}{3}}\theta\sin^{\frac{5}{3}}\theta\right)$$

因此, 曲线 L 围成区域的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{3a\cos^{\frac{2}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{-\frac{1}{3}}\theta\cos^{\frac{5}{3}}\theta + \cos^{-\frac{1}{3}}\theta\sin^{\frac{5}{3}}\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{3a\cos^{\frac{2}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta} r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{-\frac{1}{3}}\theta\cos^{\frac{5}{3}}\theta + \cos^{-\frac{1}{3}}\theta\sin^{\frac{5}{3}}\theta\right)\left(3a\cos^{\frac{2}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta\right)^2\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta\cos^3\theta+\cos\theta\sin^3\theta\right)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{2}a^2.
\end{aligned}
$$

□

习题 272. 计算 $\mathbb{R}^3$ 的第二型曲线积分:

$$\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z,$$

其中曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x^2+y^2=ax\\ z\geq 0\end{cases}$, $a>0$, 并且从点 $(\frac{a}{2},0,0)$ 看去, Γ 的定向为逆时针.

解. 注意曲线 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 的交线的 $z\geq 0$ 部分. 设曲面 Σ 为曲面 Γ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 当中围成的完全位于 $z\geq 0$ 的那一部分, 并且规定其定向为球面的内法向量. 容易验证曲面 Σ 的定向与其边界 Γ 的定向相符. 设 $\boldsymbol{n}$ 为球面的单位内法向量, 则对于曲面 Σ 上的点 (x,y,z), 成立 $\boldsymbol{n}=-\frac{1}{a}(x,y,z)$. 从而由 Stokes 公式可得,

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_\Sigma \nabla\times(y^2,z^2,x^2)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{2}{a}\iint_\Sigma (yz+zx+xy)\,\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

这就转化成了第一型曲面积分. 注意曲面 Σ 关于 xOz 平面镜面对称, 而被积函数当中的 yz,xy 项关于变换 $y\to -y$ 为奇函数, 从而由对称性可知,

$$\text{原式} = \frac{2}{a}\iint_\Sigma zx\,\mathrm{d}S$$

取 x,y 作为曲面 Σ 的参数, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 则易知面积元 $\mathrm{d}S=\frac{a}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 并且参数 x,y 所在区域 $\Sigma':=\{x^2+y^2\leq ax\}$. 则

$$\text{原式}=\frac{2}{a}\iint_{\Sigma'} xz\frac{a}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{\Sigma'} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

再极坐标换元 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$, 从而

$$\text{原式} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta} r^2\,\mathrm{d}r=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi a^3}{4}.$$

□

8.4 第二型曲面积分

习题 273. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的定向曲面 Σ 为区域

$$\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x > \sqrt{y^2+z^2}, 1 < x^2+y^2+z^2 < 2\right\}$$

的外表面，$f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的可微函数，计算曲面积分

$$\iint_\Sigma x^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + [y^3+f(yz)]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + [z^3+f(yz)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解. 使用 Gauss 公式，有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}[y^3+f(yz)] + \frac{\partial}{\partial z}[z^3+f(yz)]\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 3\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_\Omega (y+z)f'(yz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

考虑变换 $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$，注意积分区域 Ω 关于此变换对称，利用如此对称性易知

$$\iiint_\Omega (y+z)f'(yz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

之后考虑球坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$，则积分区域 Ω 变为 $\Omega' := \left\{(r,\theta,\varphi)\middle| r \in (1,\sqrt{2}),\ \theta \in (0,\frac{\pi}{4}),\ \varphi \in (0,2\pi)\right\}$，从而有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\iiint_{\Omega'} r^2 \cdot r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 3\int_1^{\sqrt{2}} r^4\,\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{5}(4\sqrt{2}-1)(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{5}(9\sqrt{2}-10) \end{aligned}$$

□

习题 274. 设 S 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 介于平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 之间部分的外侧，试计算曲面积分

$$\iint_S -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

解. 注意到曲面 S 的法向量始终与 xOy 平面平行，从而由第二型曲面积分的几何意义容易知道

$$\iint_S (z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

再注意曲面 S 关于 xOz 平面的对称性，容易知道

$$\iint_S -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 2\iint_{S'} -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

其中 S' 是曲面 S 位于 $\left\{(x,y,z)\middle| y\geq 0\right\}$ 的部分。考虑 S' 的与其定向相容的参数表示 (θ,z): $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = z \end{cases}$，其中 $\theta\in[0,\pi]$, $0\leq z\leq 2-2\cos\theta$. 因此有

$$\begin{aligned}\iint_S -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 2\iint_{S'} -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = -2\iint_{S'} 2\sin\theta\,\mathrm{d}z\wedge(-2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)\\ &= -8\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2-2\cos\theta}\mathrm{d}z\\ &= -16\int_0^{\pi}\sin^2\theta(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = -8\pi\end{aligned}$$

□

习题 275. 设 $\mathbb{R}^3$ 当中的曲面为圆锥面 $\Sigma: z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ 的 $z\geq 0$ 部分, 其定向为该圆锥的外侧. 试计算第二型曲面积分

$$\iint_\Sigma (x+e^{y^2+z^2})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y+e^{z^2+x^2})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+e^{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解. 设曲面片 $\Sigma': \begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$, 并且规定其定向为沿 $-z$ 方向的法向量. 记曲面 Σ 与 Σ' 围成的圆锥体区域为 Ω. 再记 Σ'' 为平面 $\mathbb{R}^2$ 的单位圆盘. 则由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(\iint_{\Sigma+\Sigma'} - \iint_{\Sigma'}\right)(x+e^{y^2+z^2})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y+e^{z^2+x^2})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+e^{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+e^{y^2+z^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(y+e^{z^2+x^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(z+e^{x^2+y^2})\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma''} e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= 3\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 re^{r^2}\,\mathrm{d}r\\ &= \pi + \pi(e-1) = \pi e.\end{aligned}$$

□

8.5 $\mathbb{R}^3$ 中的矢量分析与场论

习题 276. 已知定义在 $\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$ 上的函数 $f(x,y,z)$ 二阶可微，且各二阶偏导数连续，并且满足 $\triangle f = \rho$，其中 $\triangle := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为 *Laplace* 算子，$\rho := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 试计算

$$\iiint_\Omega \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

解. 对于 $0 < r < 1$，我们记区域 $\Omega_r := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2 \le r^2\right\}$. 记 $\boldsymbol{\rho} := (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ 为位置向量，则 $\rho = \|\boldsymbol{\rho}\|$. 再记 $\boldsymbol{n} := \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}$ 为单位外法向量，$\mathrm{d}V := \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为体积元。则有

$$\begin{aligned}
&\iiint_\Omega \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega \boldsymbol{\rho}\cdot\nabla f\,\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}r \iint_{\partial\Omega_r} \boldsymbol{\rho}\cdot\nabla f\,\mathrm{d}S \\
= &\int_0^1 r\,\mathrm{d}r \iint_{\partial\Omega_r} \nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \iiint_{\Omega_r} \nabla\cdot\nabla f\,\mathrm{d}V = \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \iiint_{\Omega_r} \rho\,\mathrm{d}V \\
= &\pi\int_0^1 r\cdot r^4\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

□

注记

此题还有另一种漂亮的做法，由 biu 神提供：

另解. 记号同上，考虑曲面积分

$$I := \iint_{\partial\Omega} \rho^2\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

一方面注意到在积分区域 $\partial\Omega$ 上始终有 $\rho = 1$，从而

$$I = \iint_{\partial\Omega} \nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_\Omega \nabla\cdot\nabla f\,\mathrm{d}V = \iiint_\Omega \rho\,\mathrm{d}V = \int_0^1 4\pi\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho = \pi$$

另一方面直接对 I 用 Gauss 公式计算，有

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_\Omega \nabla\cdot(\rho^2\nabla f)\,\mathrm{d}V = \iiint_\Omega \left(\nabla(\rho^2)\cdot\nabla f + \rho^2\triangle f\right)\,\mathrm{d}V \\
&= 2\iiint_\Omega \boldsymbol{\rho}\cdot\nabla f\,\mathrm{d}V + \iiint_\Omega \rho^3\,\mathrm{d}V = 2\iiint_\Omega \boldsymbol{\rho}\cdot\nabla f\,\mathrm{d}V + \int_0^1 4\pi\rho^2\cdot\rho^3\,\mathrm{d}\rho \\
&= 2\iiint_\Omega \boldsymbol{\rho}\cdot\nabla f\,\mathrm{d}V + \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}$$

因此有

$$\iiint_\Omega \boldsymbol{\rho}\cdot\nabla f\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\left(I-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{6}$$

□

习题 277. 对于 $0<r_2<r_1$，计算曲线积分

$$I:=\oint_L (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$$

其中曲线 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=2r_1x$ 与 $x^2+y^2=2r_2x$（$z>0$）的交线，并且从点 $(1,0,0)$ 看 L 是顺时针方向。

解. 记 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2r_1x$ 被柱面 $x^2+y^2=2r_2x$（$z>0$）围住的部分，其定向为球面外侧。对于 Σ 上的一点 (x,y,z)，Σ 在该点处的外法向量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{r_1}(x-r_1,y,z)$. 记 $\mathbb{R}^3$ 的切向量场 $\boldsymbol{v}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)$. 于是由 Stokes 公式得

$$\begin{aligned}I&=\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\overset{\text{Stokes}}{=\!=\!=}\iint_\Sigma(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\\&=\frac{2}{r_1}\iint_\Sigma\left[(y-z)(x-r_1)+(z-x)y+(x-y)z\right]\,\mathrm{d}S\\&=-2\iint_\Sigma(y-z)\,\mathrm{d}S\end{aligned}$$

注意曲面 Σ 关于 xOz 平面对称，从而易知 $\iint_\Sigma y\,\mathrm{d}S=0$，所以 $I=2\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S$. 记 Σ' 为曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影，则 Σ 无非是圆盘 $(x-r_2)^2+y^2<r_2^2$, $z=0$. 再注意

$$\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma r_1\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=r_1\iint_{\Sigma'}\mathrm{d}S=\pi r_1r_2^2$$

因此 $I=2\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S=2\pi r_1r_2^2$. □

注记

多么令曲豆豆惊叹的技巧呀，充分利用几何性质，巧妙避开暴力计算！

习题 278. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑向量场，并且满足

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{r}(\nabla r\times\boldsymbol{A}),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 设 L 为以原点为中心的某球面 Σ 上的一条定向光滑简单闭曲线，$\boldsymbol{\tau}$ 为曲线 L 的与定向相容的单位切向量场。证明：

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s=0.$$

证明. 由题设可知

$$\mathbf{0} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \times \boldsymbol{A}\right) = \left(\nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right) \cdot \boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

因此在球面 Σ 上成立 $(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为球面的单位外法向量。记 Σ' 为球面 Σ 被曲线 L 所围成的部分，且 Σ' 的外侧与 L 定向相容。从而由 Stokes 公式得到

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\tau} \, \mathrm{d}s = \iint_{\Sigma'} \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = 0.$$

□

习题 279. 设 $\boldsymbol{F}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑向量场, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$. 证明 $\boldsymbol{F}$ 的旋度满足如下等价定义:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \lim_{\Omega \to \boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}\sigma.$$

其中 Ω 为边界光滑的区域, 使得 $\boldsymbol{p} \in \Omega$, $\mu(\Omega)$ 为 Ω 的体积, $\boldsymbol{n}$ 为边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场.

证明. 对于任意向量 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, 都有

$$\begin{aligned}
& \left(\lim_{\Omega \to \boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}\sigma\right) \cdot \boldsymbol{a} = \lim_{\Omega \to \boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \iint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{a} \, \mathrm{d}\sigma \\
= & \lim_{\Omega \to \boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{a}) \, \mathrm{d}\sigma = \lim_{\Omega \to \boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \\
= & \lim_{\Omega \to \boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{a}) \, \mathrm{d}V \\
= & \nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{a}) = (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) \\
= & (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{a}.
\end{aligned}$$

因此再由向量 $\boldsymbol{a}$ 选取的任意性, 立刻得

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \lim_{\Omega \to \boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}\sigma.$$

□