第七章 微分方程

第一节 微分方程的基本概念

定义 表示自变量、未知函数及未知函数导数的方程称为**微分方程**。如

$xy+(y^{(3)})^2=0, y'=2, y^{(2)}=y', y^{(5)}=\sin x$ 等都是微分方程。

注 微分方程中必须出现未知函数的导数，自变量或未知函数可以不出现。

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶**，如微分方程 $xy+(y^{(3)})^2=0, y'=2, y^{(2)}=y', y^{(5)}=\sin x$ 的阶数分别为 3,1,2,5。

满足微分方程的函数称为**微分方程的解**，其中，不含任意常数的解称为**特解**；含任意常数且任意常数的个数等于微分方程阶数的解称为**通解**；存在既不是特解也不是通解的解；如函数 $y=2, y=C_1x+C_2, y=C_1x$（C_1,C_2 为任意常数）都是二阶微分方程 $y''=0$ 的解，其中 $y=2$ 是特解， $y=C_1x+C_2$ 是通解， $y=C_1x$ 既不是特解也不是通解的解，这些解都是显示形式的解。

注 （1）微分方程的解除了以显示形式出现外，许多时候也以隐示形式出现，如函数 $y=\ln(xy)$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $(xy-x)y''+x(y')^2+yy'-2y'=0$ 的隐示形式的解，这是因为由 $y=\ln(xy)$，得 $y'=\dfrac{1}{xy}(y+xy')$ 即 $(y-1)xy'=y$，再求导得 $y'xy'+(y-1)(y'+xy'')=y'$，即 $(xy-x)y''+x(y')^2+yy'-2y'=0$。

（2）通解不是包含所有解的解，如 $\sqrt{y}=\dfrac{1}{2}x^2+C,(C$ 是任意常数$)$为微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2x\sqrt{y}$ 的通解，$y=0$ 也是解，但没包含在通解中，同理，函数 $y=\dfrac{-1}{x^2+C},(C$ 是任意常数$)$为微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy^2$ 的通解，但特解 $y=0$ 也没包含在通解中。

将通解中所有任意常数确定为具体常数从而得到特解，所添加的条件称为**初始条件**（一个初始条件就是一个等式）。因为 n 阶微分方程的通解中有 n 个任意常数，将这 n 个任意常数都确定为具体常数需添加 n 个初始条件（即 n 个等式）建立 n 元代数方程组求解，所以 n 阶微分方程有 n 个初始条件。微分方程连同其初始条件称为**初值问题**。

第二节 可分离变量的微分方程

定义 称 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ 为**可分离变量的微分方程**。

其求解步骤为：1.分离变量 即将原方程化为 $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,(g(y)\neq 0)$；

2. 两边同时积分 $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$ 得通解；

3. 若 $g(y)=0$ 得函数 $y=$常数，则 $y=$常数也是解。

例 求 $\frac{dy}{dx}=2xy$ 的解

解 将方程分离变量得 $\frac{dy}{y}=2xdx, y\neq 0$，两边同时积分 $\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$ 得通解为 $\ln|y|=x^2+C_1$，另外，$y=0$ 也是解。

注 方程的通解也可表示为 $y=Ce^{x^2},C$ 为任意常数，这是因为由通解 $\ln|y|=x^2+C_1$ 得 $y=\pm e^{C_1}\cdot e^{x^2}=C_2e^{x^2},(C_2=\pm e^{C_1}$ 为任意非零常数)，又 $y=0$ 也是解，于是通解可合起来写。

例 求微分方程 $xdy+2ydx=0, y|_{x=2}=1$ 满足初始条件的特解

解 方程可化为 $\frac{dy}{dx}=\frac{-2y}{x}$，为可分离变量方程，分离变量得 $\frac{dy}{y}=\frac{-2dx}{x}$，两边同时积分得通解 $\ln|y|=-2\ln|x|+C_1$，亦即 $yx^2=C_2$，这里 $C_2=\pm e^{C_1}$ 为任意非零常数,代入初始条件 $y|_{x=2}=1$ 得 $C_2=4$，于是所求特解为 $yx^2=4$。

第三节 齐次微分方程

定义 称 $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$ 为**齐次微分方程，其中 $\varphi(\cdot)$ 为某个函数**。

其求解步骤为：1. 作变换 $u=\frac{y}{x}$；

2. 将 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$ 得可分离变量方程 $\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$，求得通解后再代回 $u=\frac{y}{x}$ 即得齐次方程通解。

例 求 $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$ 的解

解 将方程化为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1}$，为齐次方程，令 $u=\frac{y}{x}$ 代入得 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1}$ 即得可分离变量方程 $x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}$，分离变量得 $(1-\frac{1}{u})du=\frac{dx}{x}$，两边同时积分得通解为 $u-\ln|u|=\ln|x|+C$，从而原方程通解为 $\frac{y}{x}=\ln|y|+C$。

注 因该题中 $x^2\neq 0$ (否则原方程不是微分方程)，故求解第一步可分子分母分别除以 x^2。

例 求 $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},y|_{x=1}=2$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=2$ 的特解

解 令 $u=\frac{y}{x}$ 代入原方程得 $u+x\frac{du}{dx}=u+\frac{1}{u}$ 即得可分离变量方程 $x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$，分离变量得 $udu=\frac{dx}{x}$，两边同时积分得通解为 $\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$，代入初始条件 $y|_{x=1}=2$ 得 $C=2$，于是所求特解为 $(\frac{y}{x})^2=\ln x^2+4$。

第四节 一阶线性微分方程

定义 分别称 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$，$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 为**一阶线性齐次微分方程**和**一阶线性非齐次微分方程**，这里**线性**是指未知函数及其导数 y,y' 都是 1 次方，右端等于零称为**齐次**，右端不等于称为**非齐次**。

1. 一阶线性齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$，其中的不定积分 $\int P(x)dx$ 不含任意常数；

推导： 方程变形为 $\frac{dy}{y}=-P(x)dx,\ \ y\neq 0$，为可分离变量方程，两边同时积分得通解为 $\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1$，这里 $\int P(x)dx$ 中的任意常数已提出来并入了任意常数 C_1 中，从而不含任意常数。此通解再化为 $y=\pm e^{C_1}\cdot e^{-\int P(x)dx}=C_2e^{-\int P(x)dx}$，$C_2=\pm e^{C_1}$ 为任意非零常数，又 $y=0$ 也是原方程的解，故原方程通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$，其中积分 $e^{-\int P(x)dx}$ 不含任意常数。

2.一阶线性非齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的通解为

$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$，其中的不定积分均不含任意常数。

推导：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$ (积分不含任意常数)，对比 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 和 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的结构，猜想 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的解为 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$ (积分不含任意常数)，下面看函数 $u(x)$ 是否存在？存在时是什么表达式(这种方法称为**常数变易法**)。

将 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$、$\frac{dy}{dx}=u'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 得 $u'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$，即 $\frac{du(x)}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}$，两边积分得 $u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$，这里 $e^{\int P(x)dx}$ 不含任意常数，$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 中的任意常数已提出来并入了任意常数 C 中。于是原方程通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$.

注　(1) 通解 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$ 中 $e^{-\int P(x)dx}$ 和 $e^{\int P(x)dx}$ 互为倒数；

(2) $\frac{dx}{dy}+P(y)x=0$ 的通解为 $x=Ce^{-\int P(y)dy}$，$\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$ 的通解为

$x=e^{-\int P(y)dy}\left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+C\right)$，其中的不定积分均不含任意常数。

例 求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 $P(x)=\frac{-2}{x+1},Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$，于是原方程通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}+C)$$

$$=(x+1)^2(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}(x+1)^{-2}dx+C)=(x+1)^2(\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx+C)$$

$$=(x+1)^2(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C)$$

例 解方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$

解 表面上看原方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$是没学过的方程类型，但将方程变为$\dfrac{dx}{dy}=x+y$，则得一阶线性非齐次微分方程$\dfrac{dx}{dy}-x=y$，其中$P(y)=-1,\ Q(y)=y$，通解为

$$x=e^{-\int P(y)dy}\left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+C\right)=e^{-\int(-1)dy}\left(\int ye^{\int(-1)dy}dy+C\right)$$

$$=e^{y}(\int ye^{-y}dy+C)=e^{y}(C-\int yde^{-y})=e^{y}\left(C-\left(ye^{-y}-\int e^{-y}dy\right)\right)$$

$$=e^{y}(C-ye^{-y}-e^{-y})=Ce^{y}-y-1\text{。}$$

注 方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$实质上是一阶线性非齐次微分方程。

例 求解$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x},\ y\big|_{x=\pi}=1$

解 $P(x)=\dfrac{1}{x},Q(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，通解$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int\dfrac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C_1)=\dfrac{1}{|x|}(\int\dfrac{\sin x}{x}|x|dx+C_1)$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(\int\sin xdx+C_1),x>0\\-\dfrac{1}{x}(-\int\sin xdx+C_1),x<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(-\cos x+C_1),x>0\\-\dfrac{1}{x}(\cos x+C_1),x<0\end{cases}=\dfrac{1}{x}(-\cos x+C)$$，$C=\pm C_1$为任意常数。代入初始条件$y\big|_{x=\pi}=1$得$C=\pi-1$，故特解为$y=\dfrac{\pi-1-\cos x}{x}$。

第五节 可降阶的高阶微分方程

一、$y^{(n)}=f(x)$

解法：由$y^{(n-1)}=\int y^{(n)}dx=\int f(x)dx$，$y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}dx=\int(\int f(x)dx)dx,\cdots,$

$y=y^{(0)}=y^{(n-n)}=f(x)$不定积分n次，即得通解。

例 求微分$y''=\sin x$的通解

解 $y'=\int y''dx=\int\sin xdx=-\cos x+C_1$，得

$y=\int y'dx=\int(-\cos x+C_1)dx=-\sin x+C_1x+C_2$为原方程通解。

例 求微分 $y'''=e^{2x}-\cos x$ 的通解

解 $y''=\int y'''dx=\int (e^{2x}-\cos x)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1$,

$y'=\int y''dx=\int (\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1)dx=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2$,

$y=\int y'dx=\int (\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2)dx=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$ 即为通解.

二、 $y''=f(x,y')$，不显含未知函数 y 。

解法　作变换 $p=y'$，将 $\frac{dp}{dx}=y''$ 代入 $y''=f(x,y')$ 得 $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$，设该方程通解为 $p=\varphi(x,C_1)$，即 $\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1)$，则原方程通解为 $y=\int \varphi(x,C_1)dx+C_2$.

例 求 $(x^2+1)y''=2xy'$， $y\big|_{x=0}=1,\ \ y'\big|_{x=0}=3$ 。

解 方程化为 $y''=\frac{2x}{1+x^2}y'$，令 $p=y'$，将 $y''=\frac{dp}{dx}$ 代入方程得 $\frac{dp}{dx}-\frac{2x}{1+x^2}p=0$，为一阶线性齐次微分方程，其通解为 $p=Ce^{-\int\frac{-2x}{1+x^2}dx}=Ce^{\ln(1+x^2)}=C(1+x^2)$，即 $\frac{dy}{dx}=C(1+x^2)$，故原方程通解为 $y=C(x+\frac{1}{3}x^3)+C_1$，代入初始条件 $y\big|_{x=0}=1,\ \ y'\big|_{x=0}=3$ 得 $C_1=1,C=3$，故原方程的特解为 $y=x^3+3x+1$ 。

三、 $y''=f(y,y')$，不显含自变量 x 。

四、（期中期末考试不要求）

解法　作变换 $p=y'$，将 $\frac{dp}{dx}=y''$ 代入原方程 $y''=f(y,y')$ 得 $\frac{dp}{dx}=f(y,p)$，该方程有两个未知函数 p,y 和一个自变量 x，该一阶微分方程无法求解。

注意到 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，代入原方程 $y''=f(y,y')$ 得 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$，该方程只有一个自变量 y 和一个未知函数 p，有可能求解。设该方程通解为 $p=\varphi(y,C_1)$，即 $\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1)$，分离变量得 $\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$，则原方程通解为 $x=\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}+C_2$.

例 求 $yy''-(y')^2=0$。

解 作变换 $p=y'$，将 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ 代入原方程得 $yp\dfrac{dp}{dy}-p^2=0$，即 $p(y\dfrac{dp}{dy}-p)=0$。

（1）若 $p=0$，即 $y=$常数，是原方程的解；

（2）若 $p\neq 0$ 得方程 $\dfrac{dp}{dy}-\dfrac{1}{y}p=0$，其通解为 $p=Ce^{-\int(-\frac{1}{y})dy}=Ce^{\ln|y|}=C|y|=\pm Cy=C_1y$，

$C_1=\pm C$ 为任意常数。于是得 $\dfrac{dy}{dx}-C_1y=0$，解得原方程通解为 $y=C_2e^{-\int(-C_1)dx}=C_2e^{C_1x}$.

综上，原方程通解为 $y=C_2e^{C_1x}$，C_1,C_2 为任意常数。

例 求 $y''-a(y')^2=0, y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=-1$ 的特解。

解 当 $a=0$，原方程化为 $y''=0$，得通解 $y=C_1x+C_2$。代入初始条件得特解 $y=-x$；

当 $a\neq 0$ 时，作变换 $p=y'$，将 $p=y', y''=\dfrac{dp}{dx}$ 代入原方程得 $\dfrac{dp}{dx}=ap^2$ 为可分离变量方程，

分离变量得 $\dfrac{dp}{p^2}=adx$，两边积分得通解 $-\dfrac{1}{p}=ax+C_1$，即 $\dfrac{dx}{dy}+ax=-C_1$，其通解为

$$x=e^{-\int ady}\left(\int(-C_1)e^{\int ady}dy+C_2\right)=e^{-ay}\left(-C_1\int e^{ay}dy+C_2\right)=e^{-ay}\left(-\frac{C_1}{a}e^{ay}+C_2\right)=C_2e^{-ay}-\frac{C_1}{a},$$

两端对 x 求导得 $1=C_2e^{-ay}(-a)y'$，代入初始条件得 $\begin{cases}C_2-\dfrac{C_1}{a}=0\\ 1=-aC_2(-1)\end{cases}$，$C_1=1, C_2=\dfrac{1}{a}$，于是

所求特解为 $ax=e^{-ay}-1$。

法二　当 $a=0$，原方程特解 $y=-x$，同上；

当 $a\neq 0$ 时，作变换 $p=y'$，将 $p=y', y''=p\dfrac{dp}{dy}$ 代入原方程得 $p\dfrac{dp}{dy}-ap^2=0$，即

$p(\dfrac{dp}{dy}-ap)=0$。当 $p=0$，即 $y=$常数为原方程的解，不满足初始条件；当 $p\neq 0$ 时，得

方程 $\dfrac{dp}{dy}-ap=0$ 的通解为 $p=C_1e^{-\int -ady}=C_1e^{ay}$，即 $\dfrac{dy}{dx}=C_1e^{ay}$，分离变量得

$e^{-ay}dy = C_1 dx$，通解为 $e^{-ay} = -aC_1 x + C_2$，两端对 x 求导得 $e^{-ay}(-a)y' = -aC_1$，代入初始条件 $x=0, y=0, y'=-1$ 得 $\begin{cases} C_2 = 1 \\ -a(-1) = -aC_1 \end{cases}$，$C_1 = -1, C_2 = 1$，于是所求特解为 $e^{-ay} = ax+1$。

第六节 高阶线性微分方程

二阶线性微分方程解的结构

对二阶线性齐次微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$　　**（6）**

定理 1　方程（6）的两个解 $y_1(x), y_2(x)$ 的任意倍数和 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$，C_1, C_2 均为任意常数，仍是（6）的解。

证　由 $y_1(x), y_2(x)$ 是(6)的两个解，故 $y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$，$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$，

得到 $[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)]'' + P(x)[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)]' + Q(x)[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)]$

$= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] = 0$。故结论成立。

定理 2　方程（6）的两个比值不等于常数的解 $y_1(x), y_2(x)$ 的任意倍数和 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$，C_1, C_2 均为任意常数，是（6）的通解。

注　两个函数 $y_1(x), y_2(x)$ 比值不等于常数也称为 $y_1(x), y_2(x)$ **线性无关**。

证　由定理 1，$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$，C_1, C_2 均为任意常数，仍是（6）的解。当 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数，即 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = x$ 的函数 $\varphi(x)$ 时，解 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1\varphi(x)y_2(x) + C_2 y_2(x) = (C_1\varphi(x) + C_2)y_2(x)$ 中含有两个不能合并的任意常数。故是（6）的通解。

对二阶线性非齐次微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$　　**（5）**

定理 3　方程（6）的通解 $Y(x)$ 与（5）的一个特解 $y^*(x)$ 之和 $Y(x) + y^*(x)$ 为（5）的通解。

证　由已知，$Y''(x) + P(x)Y'(x) + Q(x)Y(x) = 0$，$[y^*(x)]'' + P(x)[y^*(x)]' + Q(x)y^*(x) = f(x)$，

得到 $[Y(x) + y^*(x)]'' + P(x)[Y(x) + y^*(x)]' + Q(x)[Y(x) + y^*(x)]$

$= Y''(x) + P(x)Y(x) + Q(x)Y(x) + [(y^*(x))'' + P(x)(y^*(x))' + Q(x)y^*(x)] = 0 + f(x) = f(x)$。

又 $Y(x)$ 含两个任意常数，$y^*(x)$ 不含任意常数，故 $Y(x) + y^*(x)$ 含两个任意常数。综上即证。

定理4 设 y_1^*, y_2^* 分别为方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$ 和 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的两个特解，则 $y_1^*+y_2^*$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解。

证 因为 $(y_1^*)''+P(x)(y_1^*)'+Q(x)y_1^*=f_1(x)$，$(y_2^*)''+P(x)(y_2^*)'+Q(x)y_2^*=f_2(x)$，得到

$$(y_1^*+y_2^*)''+P(x)(y_1^*+y_2^*)'+Q(x)(y_1^*+y_2^*)=(y_1^*)''+P(x)(y_1^*)'+Q(x)y_1^*+[(y_2^*)''+P(x)(y_2^*)'+Q(x)y_2^*]$$

$=f_1(x)+f_2(x)$。故结论得证。

定理 5 设 y_1^*, y_2^* 分别为方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解，则 $y_1^*-y_2^*$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解。

证 因为 $(y_1^*)''+P(x)(y_1^*)'+Q(x)y_1^*=f(x)$，$(y_2^*)''+P(x)(y_2^*)'+Q(x)y_2^*=f(x)$，得到

$$(y_1^*-y_2^*)''+P(x)(y_1^*-y_2^*)'+Q(x)(y_1^*-y_2^*)=(y_1^*)''+P(x)(y_1^*)'+Q(x)y_1^*-[(y_2^*)''+P(x)(y_2^*)'+Q(x)y_2^*]$$

$=f(x)-f(x)=0$。故结论得证。

例 已知 $y=1, y=x, y=x^2$ 为二阶线性非齐次微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的三个解，求该方程的通解。

解 由解的结构定理 5 知，$x-1$ 和 x^2-1 均为二阶线性齐次微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解，且比值不等于常数，再由解的结构定理 3 知，所求方程的通解为 $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$.

第七节 常系数齐次线性微分方程

对二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$，p,q 为常数 （1）

注意到当 r 为常数时，函数 $y=e^{rx}$ 的导数 $y'=re^{rx},y''=r^2e^{rx}$ 代入方程（1）得到

$(e^{rx})''+p(e^{rx})'+qe^{rx}=0,$即$e^{rx}(r^2+pr+q)=0,$亦即$r^2+pr+q=0$ （2）

因此，函数 $y=e^{rx}$ 为方程（1）的解 $\Leftrightarrow$ 常数 r 是二次代数方程 $r^2+pr+q=0$ 的根。故称 $r^2+pr+q=0$ 为微分方程 $y''+py'+qy=0$， p,q 为常数，的**特征方程。**

（1）当特征方程有两个不等实数根 r_1,r_2 时，e^{r_1x},e^{r_2x} 为方程（1）的两个比值不等于常数的解，故由解的结构定理 2 知， $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ 为方程（1）的通解。

（2）当特征方程有两个相等实数根 $r_1,(=r_2)$ 时， $y_1=e^{r_1x}$ 为方程（1）的解，设 y_2 也为（1）的解，且 $\dfrac{y_2}{y_1}\neq$ 常数。设 $\dfrac{y_2}{y_1}=u(x)$，将 $y_2=u(x)e^{r_1x}$， $y_2'=e^{r_1x}(u'(x)+u(x)r_1)$ 和

$y_2''=e^{r_1x}(u''(x)+2u'(x)r_1+u(x)r_1^2)$ 代入方程（1）并消去 e^{r_1x} 得

$u''(x)+(2r_1+p)u'(x)+(r_1^2+pr_1+q)u(x)=0$，

因为 r_1 是二重特征根，故 $2r_1+p=0,\ \ r_1^2+2pr_1+q=0$，故得 $u''(x)=0$，得 $u(x)=ax+b$，a,b 为任意常数。故此时 $y_2=e^{r_1x}(ax+b)$ 均是（1）的解，这里选其中最简单的一个 $y_2=xe^{r_1x}$，由解的结构定理 2 知， $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}=e^{r_1x}(C_1+C_2x)$ 为方程（1）的通解。

（3）当特征方程有两个共轭复根 $r_1=\alpha+i\beta,r_2=\alpha-i\beta$ 时， $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ 为方程（1）的复数通解。为得到实数通解，运用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，（1）的两个复数解化为

$y_1=e^{r_1x}=e^{\alpha x+i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\ \ y_2=e^{r_2x}=e^{\alpha x+i(-\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$，

由解的结构定理 1 得，$\dfrac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x,\dfrac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x$ 仍为方程（1）的两个解（但为实数解）且比值不等于常数(因 $\dfrac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x}=\cot\beta x\neq$ 常数)，根据解的结构定理 2 知，

$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ 为（1）的实数值通解。

例 求 $y''-2y'-3y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 的特解

解　特征方程为 $r^2-2r-3=0$ 的根为 $r_1=3, r_2=-1$，故通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$。

由于 $y'=3C_1e^{3x}-C_2e^{-x}$，代入初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 得

$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ 3C_1-C_2=2 \end{cases}$，$C_1=\frac{3}{4}, C_2=\frac{1}{4}$，故所求特解为 $y=\frac{3}{4}e^{3x}+\frac{1}{4}e^{-x}$。

例 求 $4\frac{d^2x}{dt}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$ 的通解

解 特征方程 $4r^2-20r+25=0$ 的根为 $r_{1,2}=\frac{5}{2}$，故通解为 $x=e^{\frac{5}{2}t}(C_1+C_2t)$。

例 求 $y''-2y'+5y=0$ 的通解

解 特征方程 $r^2-2r+5=0$ 的根为 $r_{1,2}=\frac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$，故通解为

$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$。

例 求通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 的二阶常系数齐次线性微分方程。

解　因为特征根 $r_{1,2}=1,2$，所以特征方程为 $r^2-3r+2=0$，由 $y''+py'+qy=0$**,** p,q 为常数与其特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的对应关系，故所求方程为 $y''-3y'+2y=0$。

第八节 常系数非齐次线性微分方程

由解的结构定理 3 知，常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$，(p,q 为已知常数)的通解等于它的一个特解 y^* 加上常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 $Y(x)$。

下面我们求 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$,(λ 为已知常数, $P_m(x)$ 是已知的 x 的 m 次多项式)时的特解 y^*。

对方程 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$,($\lambda$ 为已知常数, $P_m(x)$ 是已知的 x 的 m 次多项式) ....（1）

由于多项式与 $e^{\lambda x}$ 乘积的一、二阶导数仍然是多项式与 $e^{\lambda x}$ 乘积形式的函数，故多项式 $Q(x)$ 与 $e^{\lambda x}$ 乘积表示的函数 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ 有可能满足方程（1），成为方程（1）的解，下面用待定系数法求 $Q(x)$。

将 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$，$(y^*)'=e^{\lambda x}(Q'(x)+\lambda Q(x))$，$(y^*)''=e^{\lambda x}(Q''(x)+2\lambda Q'(x)+\lambda^2 Q(x))$

代入方程（1）消去 $e^{\lambda x}$，得 $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$ ....(2)

(1) 当 λ 不是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根, 即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$ 时, (3)式中 $Q(x)$ 为 x 的 m 次多项式, 设 $Q(x)=Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$，代入式（3）比较 $x^m,x^{m-1},\cdots,x$ 的同次幂系数和常数项，建立关于待定系数 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 为未知数的 $m+1$ 个代数方程可解出 $b_0,b_1,\cdots,b_m$，从而确定 $Q_m(x)$，于是得到特解 $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$；

(2) 当 λ 是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的二重根, 即 $\lambda^2+p\lambda+q=0,\ 2\lambda+p=0$ 时, (3)式中 $Q(x)$ 为 x 的 $m+2$ 次多项式, 设 $Q(x)=x^2Q_m(x)=b_0x^{m+2}+b_1x^{m+1}+\cdots+b_{m-1}x^3+b_mx^2$，代入式（3）比较 $x^m,x^{m-1},\cdots,x$ 的同次幂系数和常数项，建立关于待定系数 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 为未知数的 $m+1$ 个代数方程可解出 $b_0,b_1,\cdots,b_m$，从而确定 $Q_m(x)$，于是得到特解 $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$；

(3) 当 λ 是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的单重根, 即 $\lambda^2+p\lambda+q=0,\ 2\lambda+p\neq 0$ 时, (3)式中 $Q(x)$ 为 x 的 $m+1$ 次多项式, 设 $Q(x)=xQ_m(x)=b_0x^{m+1}+b_1x^m+\cdots+b_{m-1}x^2+b_mx$，代入式（3）比较 $x^m,x^{m-1},\cdots,x$ 的同次幂系数和常数项，建立关于待定系数 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 为未知数的 $m+1$ 个代数方程可解出 $b_0,b_1,\cdots,b_m$，从而确定 $Q_m(x)$，于是得到特解 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$。

注 在第二种情形中，若设 $Q(x)=b_0x^{m+2}+b_1x^{m+1}+\cdots+b_{m-1}x^3+b_mx^2+b_{m+1}x+b_{m+2}$，代入（3）比较 $x^m,x^{m-1},\cdots,x$ 的同次幂系数和常数项，只能建立关于待定系数 $b_0,b_1,\cdots,b_{m+1},b_{m+2}$ 为未知数的 $m+1$ 个代数方程，无法确定出 $b_0,b_1,\cdots,b_{m+1},b_{m+2}$。第三种情形的说明类似。

结论：二阶常系数非齐次线性微分方程方程 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x),(p,q,\lambda$ 为已知常数, $P_m(x)$ 是已知的 x 的 m 次多项式)的一个特解可设为 $y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m)e^{\lambda x}$，当 λ 不是特征方程的根时 $k=0$；当 λ 是特征方程的单重根时 $k=1$；当 λ 是特征方程的二重根时 $k=2$。将 y^* 代入 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$ 建立待定系数 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 为未知数的 $m+1$ 个代数方程可解出 $b_0,b_1,\cdots,b_m$，从而得到特解 $y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m)e^{\lambda x}$。

例 求 $y''-3y'+2y=5$ 的通解

解　特征方程 $r^2-3r+2=0$ 的特征根为 $r_{1,2}=1,2$, $f(x)=5=5e^{0x}$，设特解 $y^*=b_0e^{0x}$，代入原方程得 $2b_0=5$，解得 $b_0=\dfrac{5}{2}$，于是原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{5}{2}$。

例 求 $y''+a^2y=e^x$ 的通解

解　特征方程 $r^2+a^2=0$ 的特征根为 $r_{1,2}=\pm ai$, $f(x)=e^x$，设特解 $y^*=b_0e^x$，代入原方程得 $b_0+a^2b_0=1$，解得 $b_0=\dfrac{1}{1+a^2}$，于是原方程的通解为 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{e^x}{1+a^2}$。

例 求 $y''-2y'=4x$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=1$ 的特解

解　特征方程 $r^2-2r=0$ 的特征根为 $r_{1,2}=0,2$, $f(x)=4x=4xe^{0x}$，设特解 $y^*=x(b_0x+b_1)e^{0x}=b_0x^2+b_1x$，代入原方程得 $2b_0-2(2b_0x+b_1)=4x$，比较 x 的同次幂系数和常数项得到 $\begin{cases}-4b_0=4\\2b_0-2b_1=0\end{cases}$, 解得 $b_0=-1, b_1=-1$，于是原方程的通解为 $y=C_1e^{0x}+C_2e^{2x}-x^2-x$。

代入初始条件 $y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=1$，得 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\2C_2-1=1\end{cases}$, $C_1=-1, C_2=1$，故所求特解为 $y=e^{2x}-x^2-x-1$。