填空

1.点 M$(-2,-3,1)$位于第______卦限。

解 由点、向量的坐标定义，点 M 的坐标即其向径$\overrightarrow{OM}$的坐标，且有

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$，其中$\overrightarrow{OP}=-2\vec{i}$,$\overrightarrow{OQ}=-3\vec{j}$,$\overrightarrow{OR}=\vec{k}$分别是长方体的三条棱，故长方体包含了$x$轴负半轴、$y$轴负半轴、$z$轴正半轴。故长方体在第 3 卦限，而点 M 是长方体的顶点，故点 M 位于第 3 卦限。

2. 点 M$(1,2,3)$关于x轴的对称点坐标为__________，关于xoy坐标面的对称点坐标为__________。

解 设点 M$(1,2,3)$关于x轴的对称点$M'(x,y,z)$，则$\overrightarrow{MM'}=(x-1,y-2,z-3)$，

因为$\overrightarrow{MM'}\perp x$轴或$\vec{i}=(1,0,0)$，得$(x-1,y-2,z-3)\cdot(1,0,0)=0$，得$x=1$；

又因为点 M$(1,2,3)$和$M'(x,y,z)$的连线段的中点在x轴上（x轴上点的第二、第三坐标恒为 0），由中点坐标公式得$\dfrac{2+y}{2}=0,\dfrac{3+z}{2}=0$，得$y=-2,z=-3$，得点 M$(1,2,3)$关于$x$轴的对称点坐标为$(1,-2,-3)$。

设点 M$(1,2,3)$关于xoy坐标面的对称点$M'(x,y,z)$，则$\overrightarrow{MM'}=(x-1,y-2,z-3)$，

因为$\overrightarrow{MM'}\perp x$轴和$y$轴或$\perp\vec{i}=(1,0,0),j=(0,1,0)$，得$(x-1,y-2,z-3)\cdot(1,0,0)=0$，$(x-1,y-2,z-3)\cdot(0,1,0)=0$得$x=1,y=2$；

又因为点 M$(1,2,3)$和$M'(x,y,z)$的连线段的中点在xoy坐标面上（xoy坐标面上点的第三坐标恒为 0），由中点坐标公式得$\dfrac{3+z}{2}=0$，得$z=-3$，得点 M$(1,2,3)$关于xoy坐标面的对称点坐标为$(1,2,-3)$。

3.点$(4,-3,5)$到y轴到距离为____________，到xoz坐标面的距离为________。

（$\sqrt{41}$，3）

4. 向量$\vec{a}=(4,-3,4)$在向量$\vec{b}=(2,2,1)$上的投影$\mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}=$__________。

$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})$ $=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

$=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

（$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{8-6+4}{3}=2$）

5. 对向量 $\vec{a}=(3,5,-2)$ 和 $\vec{b}=(2,1,4)$，当向量 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 与 z 轴垂直时，实数 λ 和 μ 满足的关系是__________。（$\lambda=2\mu$）

解 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\lambda(3,5,-2)+\mu(2,1,4)=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)$。向量 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 与 z 轴垂直即与 $\vec{k}=(0,0,1)$ 垂直，得 $(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)\cdot(0,0,1)=0$，得 $-2\lambda+4\mu=0,$ 得 $\lambda=2\mu$。

计算题

已知点 $M_1(1,-1,2),M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$，求

(1) 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 $\overrightarrow{M_2M_3}$ 均垂直的向量坐标;

(2) $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}$ 的单位向量 $\vec{e}$ 及第一个方向余弦值;

(3) 三角形 $M_1M_2M_3$ 的面积 S .

解:（1） $\overrightarrow{M_1M_2}=(2,4,-1),\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-2,2)$,

法 1 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\left(\begin{vmatrix}4&-1\\-2&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&2\\2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&4\\0&-2\end{vmatrix}\right)=(6,-4,-4)//(3,-2,-2)//\lambda(3,-2,-2)$,

故所求向量为 $\lambda(3,-2,-2),\lambda$ 为任意实数;

法 2 设与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 $\overrightarrow{M_2M_3}$ 均垂直的向量为 $\vec{a}=(x,y,z)$，则 $\vec{a}\perp\overrightarrow{M_1M_2},\vec{a}\perp\overrightarrow{M_2M_3}$，得 $\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0,\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_2M_3}=0$，即 $2x+4y-z=0,\ -2y+2z=0$，得 $x=-\frac{3}{2}y,y=z$，于是 $\vec{a}=(x,y,z)=(-\frac{3}{2}y,y,y)//y(-\frac{3}{2},1,1)//y(3,-2,-2)$，故所求向量为 $\lambda(3,-2,-2),\lambda$ 为任意实数。

（2） $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}$ 的单位向量 $\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{17}}(3,-2,-2)$，第一个方向余弦值为 $\frac{3}{\sqrt{17}}$；

（3） $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}\right|$.

$$=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$$