复变函数的积分

1. 概念

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta z_k \tag{1}$$

C的负方向积分：$\int_{C^-} f(z)\,dz$

C为闭曲线，则：$\oint_C f(z)\,dz$，其中C的正向为逆时针方向（大部分情况如此，具体情况具体分析）

2. 计算

若曲线C：$z(t)=x(t)+i\cdot y(t)$，$(\alpha\le t\le\beta)$光滑，且$f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$在$C$上连续，那么$f(z)$沿$C$可积。有：

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\cdot\int_C v\,dx + u\,dy \tag{2}$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f\Big[z(t)\Big]\cdot z'(t)\,dt \tag{3}$$

利用上面两个式子计算积分即可。

3. 基本性质

- $$\int_C f(z)\,dz = -\int_{C^-} f(z)\,dz \tag{4}$$
- α,β为复常数

$$\int_C \Big[\alpha f(z)\pm\beta g(z)\Big]\,dz = \alpha\int_C f(z)\,dz \pm \beta\int_C g(z)\,dz \tag{5}$$

- 若$C=C_1+C_2$：（C按段光滑，C_1,C_2光滑）

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz \tag{6}$$

- $$\Big|\int_C f(z)\,dz\Big| \le \int_C |f(z)|\,ds \tag{7}$$

4. 柯西-古萨特基本定理

(1) 柯西基本定理：

设函数$f(z)$在单连通域B内解析，C为B内任一简单闭曲线，则有：

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{8}$$

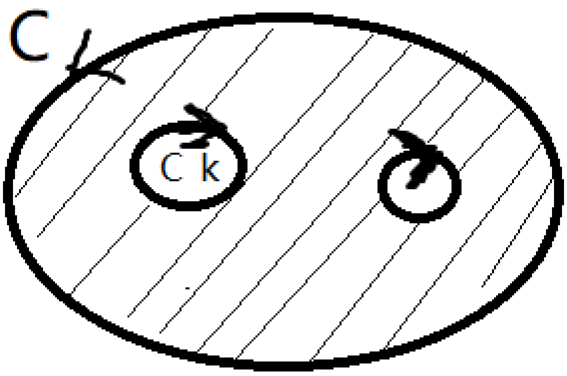
(2) 定理

设函数$f(z)$在单连通域B内解析，z_0与z_1为B内任意两点，C_1与C_2为连接z_0与z_1的积分路线（最好明确是同一方向：比如即从z_0到z_1），C_1与C_2都含于B，则：

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz \tag{9}$$

> $f(z)$为单连通域B内的解析函数时，**积分与路径无关。**

5. 复合闭路定理



（注意曲线的正方向到底是怎么样！）

我们记录$\Gamma = C + C_1^- + \cdots + C_n^-$

有定理如下：

- C与C_k均取**正向**

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz \tag{10}$$

- $$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0 \tag{11}$$

由相关内容引出的结论如下：

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \begin{cases} 2\pi i & ,n=0 \\ 0 & ,n\neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

其中C为包含z_0的正向闭曲线。

6. 原函数

(1) Def

单连通区域B内满足$\phi'(z) = f(z)$，则$\phi(z)$为$f(z)$在单连通区域B内的一个**原函数。**

当$f(z)$在B内解析时，其原函数$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$也解析。且注意：$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi = F(z) + C$，$C$为（复）常数。

(2) 定理

感觉类似**牛莱公式**：

若$f(z)$在单连通域B内解析，$F(z)$为$f(z)$的一个原函数，则：

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = F(z_1) - F(z_0) \tag{13}$$

7. 柯西积分公式

$f(z)$在区域D内解析，C为D内正向闭曲线，C完全属于D，且$z_0 \in C$，则有：

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i \cdot f(z_0) \tag{14}$$

平均值公式/推论：略过。

8. 解析函数的高阶导数

仅给出公式：

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \tag{15}$$

注意C为$f(z)$解析区域D内含z_0的任一条正向简单闭曲线，其内部完全属于D。

9. 解析函数与调和函数的关系

(1) Def

二元实函数$\phi(x, y)$，在区域D内：

- 有二阶连续偏导数
- 满足二维$Laplace$方程：$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$

那么我们称$\phi(x, y)$为区域D内的**调和函数。**

(2) 定理

若$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$在区域$D$内解析，则$u(x, y), v(x, y)$都是区域$D$内的调和函数。

(3) 共轭调和函数

$u(x, y)$为给定的D内调和函数，使$f(z) = u + i \cdot v$在D内解析的$v(x, y)$，称为$u(x, y)$的**共轭调和函数。**

(4) 题型

已知解析函数$f(z) = u + i \cdot v$的u或v，求另一个。（即求其共轭调和函数）

有两种方法解决此类问题：

- 偏导数法（不喜欢用）
- 原函数法

这里介绍一下**原函数法**，一定要加深对$C-R$方程的记忆：$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$，利用$C-R$方程，则等价为：$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$

于是有：$f(z) = \int U(z)\, dz + c$。其中$U(z)$为关于$z$的函数，一般令上面的导数式中$x = z, y = 0$即可。