

# 电磁场与电磁波

## 第一部分 知识点归纳

### 第一章 矢量分析

#### 1、三种常用的坐标系

##### (1) 直角坐标系

微分线元:  $d\vec{R} = \vec{a}_x dx + \vec{a}_y dy + \vec{a}_z dz$  面积元:  $\begin{cases} dS_x = dydz \\ dS_y = dx dz \\ dS_z = dx dy \end{cases}$ , 体积元:  $d = \tau dx dy dz$

##### (2) 柱坐标系

长度元:  $\begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\phi = r d\phi \\ dl_z = dz \end{cases}$ , 面积元:  $\begin{cases} dS_r = dl_\phi dl_z = r d\phi dz \\ dS_\phi = dl_r dl_z = dr dz \\ dS_z = dl_r dl_\phi = r dr d\phi \end{cases}$ , 体积元:  $d = \tau r dr d\phi dz$

##### (3) 球坐标系

长度元:  $\begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\theta = r d\theta \\ dl_\phi = r \sin \theta d\phi \end{cases}$ , 面积元:  $\begin{cases} dS_r = dl_\theta dl_\phi = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ dS_\theta = dl_r dl_\phi = r \sin \theta dr d\phi \\ dS_\phi = dl_r dl_\theta = r dr d\theta \end{cases}$ , 体积元:

$$d = \tau r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

#### 2、三种坐标系的坐标变量之间的关系

##### (1) 直角坐标系与柱坐标系的关系

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

##### (2) 直角坐标系与球坐标系的关系

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

##### (3) 柱坐标系与球坐标系的关系

$$\begin{cases} r' = r \sin \theta \\ \phi = \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{r'^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \\ \phi = \phi \end{cases}$$

#### 3、梯度

##### (1) 直角坐标系中:

$$\text{grad} \mu = \nabla \mu = \vec{a}_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

##### (2) 柱坐标系中:

$$\text{grad} \mu = \nabla \mu = \vec{a}_r \frac{\partial \mu}{\partial r} + \vec{a}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \phi} + \vec{a}_z \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

##### (3) 球坐标系中:

$$\text{grad}\mu = \nabla\mu = \vec{a}_r \frac{\partial\mu}{\partial r} + \vec{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\mu}{\partial\theta} + \vec{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\mu}{\partial\varphi}$$

#### 4. 散度

(1) 直角坐标系中:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(2) 柱坐标系中:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(3) 球坐标系中:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

5、高斯散度定理:  $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} d\tau = \int_V \text{div} \vec{A} d\tau$ , 意义为: 任意矢量场  $\vec{A}$  的散度在场中任

意体积内的体积分等于矢量场  $\vec{A}$  在限定该体积的闭合面上的通量。

#### 6. 旋度

(1) 直角坐标系中:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

(2) 柱坐标系中:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\varphi & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

(3) 球坐标系中:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\theta & r\sin\theta \vec{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

两个重要性质: ① 矢量场旋度的散度恒为零,  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$  ② 标量场梯度的旋度恒为零,  $\nabla \times (\nabla \mu) = 0$

#### 7. 斯托克斯公式:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

## 第二章 静电场和恒定电场

1、静电场是由空间静止电荷产生的一种发散场。描述静电场的基本变量是电场强度  $\vec{E}$ 、电

位移矢量  $\vec{D}$  和电位  $\varphi$ 。电场强度与电位的关系为： $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 。 $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} F/m$

2、电场分布有点电荷分布、体电荷分布、面电荷分布和线电荷分布。其电场强度和电位的计算公式如下：

(1) 点电荷分布

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N q_k \frac{\vec{R}_k}{R_k^3} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N q_k \nabla\left(\frac{1}{R_k}\right), \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{R_k} + C$$

(2) 体电荷分布

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(r')(\vec{r}-\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(r')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + C$$

(3) 面电荷分布

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\rho_s(r')(\vec{r}-\vec{r}')dS'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\rho_s(r')dS'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + C$$

(4) 线电荷分布

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l(r')(\vec{r}-\vec{r}')dl'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l(r')dl'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + C$$

3、介质中和真空中静电场的基本方程分别为

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q, (\text{积分形式}) \xrightarrow{\text{表示意义}} \text{介质中的高斯定理} (q \text{ 为 } S \text{ 面内的总源电荷和 } S \text{ 面内的总极化电荷之和}) \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho(r) (\text{微分形式}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, (\text{积分形式}) \xrightarrow{\text{表示意义}} \text{安培环路定理, 说明静电场是一种发散场, 也是保守场。} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 (\text{微分形式}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i, (\text{积分形式}) \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} (\text{微分形式, } \rho \text{ 为体电荷密度}) \end{cases} \xrightarrow{\text{表示意义}} \text{真空中的高斯定理}$$

在线性、各向同性介质中，本构方程为： $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$

4、电介质的极化

(1) 极化介质体积内的极化体电荷密度为： $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$  ( $\vec{P}$  极化强度矢量)。

(2) 介质表面的极化面电荷密度为： $\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \vec{n}$  ( $\vec{n}$  为表面的单位法向量矢量)

5、在均匀介质中，电位满足的微分方程为泊松方程和拉普拉斯方程，即

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{有源区域}), \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad (\text{无源区域})$$

## 6、介质分界面上的边界条件

### (1) 分界面上 $D_n$ 的边界条件

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \text{ 或 } \vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$

( $\rho_s$  为分界面上的自由电荷面密度)，当分界面上没有自由电荷时，则有：

$D_{1n} = D_{2n}$  即  $\vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \vec{n} \cdot \vec{D}_2$ ，它给出了  $\vec{D}$  的法向分量在介质分界面两侧的关系：

(I) 如果介质分界面上无自由电荷，则分界面两侧  $\vec{D}$  的法向分量连续；

(II) 如果介质分界面上分布电荷密度  $\rho_s$ ， $\vec{D}$  的法向分量从介质 1 跨过分界面进入介质 2 时将有一增量，这个增量等于分界面上的面电荷密度  $\rho_s$ 。

$$\text{用电位表示：} -\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \rho_s \text{ 和 } \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} (\rho_s = 0)$$

### (2) 分界面上 $E_t$ 的边界条件 (切向分量)

$$\vec{n} \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{E} \text{ 或 } E_{1t} = E_{2t}, \text{ 电场强度的切向分量}$$

在不同的分界面上总是连续的。

由于电场的切向分量在分界面上总连续，法向分量有限，故在分界面上的电位函数连续，即

$$\varphi_1 = \varphi_2。$$

$$\text{电力线折射定律：} \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}。$$

## 7、静电场能量

### (1) 静电电荷系统的总能量

$$\text{① 体电荷：} W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi d\tau；$$

$$\text{② 面电荷：} W_e = \frac{1}{2} \int_S \rho_s \Phi ds；$$

$$\text{③ 线电荷：} W_e = \frac{1}{2} \int_l \rho_l \Phi dl。$$

$$(2) \text{ 导体系统的总能量为：} W_e = \frac{1}{2} \sum_k q_k \varphi_k。$$

### (3) 能量密度

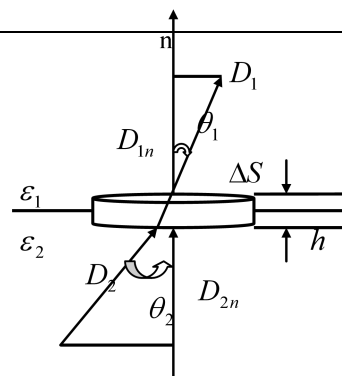
静电能是以电场的形式存在于空间，而不是以电荷或电位的形式存在于空间中的。场中任意

$$\text{一点的能量密度为：} \omega_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 J/m^3$$

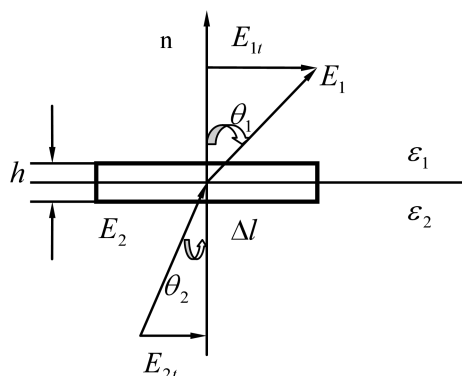
在任何情况下，总静电能可由  $W_e = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon E^2 d\tau$  来计算。

8、恒定电场存在于导电媒质中由外加电源维持。描述恒定电场特性的基本变量为电场强度  $\vec{E}$  和电流密度  $\vec{J}$ ，且  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ 。 $\sigma$  为媒质的电导率。

### (1) 恒定电场的基本方程



分界面上  $D_n$  的边界条件



分界面上  $E_t$  的边界条件

电流连续性方程: 
$$\begin{cases} \text{积分形式: } \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t} \\ \text{微分形式: } \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ 或 } \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

恒定电流场中的电荷分布和电流分布是恒定的。场中任一点和任一闭合面内都不能有电荷的增减, 即  $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$  和  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 。因此, 电流连续性方程变为:  $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$  和  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ , 再加上  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  和  $\nabla \times \vec{E} = 0$ , 这变分别是恒定电场基本方程的积分形式和微分形式。

## (2) 恒定电场的边界条件

(1)  $J_{1n} = J_{2n}$  或  $\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0$ , (2)  $E_{1t} = E_{2t}$  或  $\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$

应用欧姆定律可得:  $\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$  和  $\frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2}$ 。

此外, 恒定电场的焦耳损耗功率密度为  $p = \sigma E^2$ , 储能密度为  $\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ 。

## 第四章 恒定磁场

1、磁场的特性由磁感应强度  $\vec{B}$  和磁场强度  $\vec{H}$  来描述, 真空中磁感应强度的计算公式为:  
(真空磁导率:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$  )

(1) 线电流: 
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{Id\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

(2) 面电流: 
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{J}_S \times \vec{a}_R}{R^2} dS' = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{J}_S \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

(3) 体电流: 
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\tau \frac{\vec{J} \times \vec{a}_R}{R^2} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\tau \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'$$

## 2、恒定磁场的基本方程

(1) 真空中恒定磁场的基本方程为:

A、磁通连续性方程: 
$$\begin{cases} \text{积分形式: } \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \text{微分形式: } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$
 , B、真空中安培环路定理:

$$\begin{cases} \text{积分形式: } \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \\ \text{微分形式: } \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

(2) 磁介质中恒定磁场的基本方程为:

A、磁通连续性方程仍然满足: 
$$\begin{cases} \text{积分形式: } \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \text{微分形式: } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

B、磁介质中安培环路定理: 
$$\begin{cases} \text{积分形式: } \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \\ \text{微分形式: } \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases}$$

C、磁性媒质的本构方程： $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} (\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M})$ , 其中  $\vec{M}$  为磁化强度矢量)。

恒定磁场是一种漩涡场，因此一般不能用一个标量函数的梯度来描述。

### 3、磁介质的磁化

磁介质在磁场中被磁化，其结果是磁介质内部出现净磁矩或宏观磁化电流。磁介质的磁化程度用磁化强度  $\vec{M}$  表示。

(1) 磁介质中的束缚体电流密度为： $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$ ；

(2) 磁介质表面上的束缚面电流密度为： $\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \vec{n}$  (其中,  $\vec{n}$  为表面的单位法向量矢量)

4、恒定磁场的矢量磁位为： $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，矢量  $\vec{A}$  为矢量磁位。

在库仑规范条件 ( $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ) 下，场与源的关系方程为： $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$  (有源区)  $\nabla^2 \vec{A} = 0$  (无源区)  
对于分布型的矢量磁位计算公式：

(1) 线电流： $\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_l \frac{Id\vec{l}}{R}$  (2) 面电流： $\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_s \frac{\vec{J}_s dS}{R}$  (3) 体电流： $\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_\tau \frac{\vec{J} d\tau}{R}$

### 5、恒定磁场的边界条件

(1) 分界面上  $B_n$  的边界条件

在两种磁介质的分界面上，取一个跨过分界面两侧的小扁状闭合柱面 (高  $h \rightarrow 0$  为无穷小量)，

如右图所示，应用磁通连续性方程可得：

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B}_1 \cdot \vec{n} dS - \vec{B}_2 \cdot \vec{n} dS = 0$$

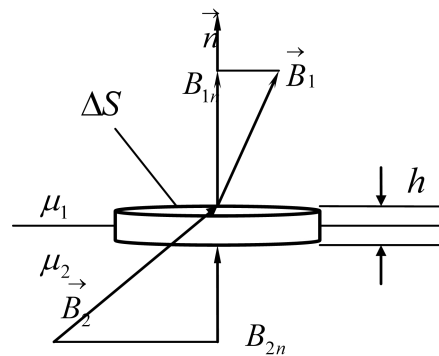
于是有： $n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$  或  $B_{1n} = B_{2n}$

(2) 分界面上  $H_t$  (切向分量) 的边界条件：

$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$ ，如果分界面上无源表面电流

(即  $\vec{J}_s = 0$ )，则  $\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0$  即  $\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t}$  或  $H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2$

分界面上  $B_n$  的边界条件



磁力线折射定律： $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

用矢量磁位表示的边界条件为： $\vec{A}_1 = \vec{A}_2, \frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \vec{A}_1)_t - \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \vec{A}_2)_t = \vec{J}_s$

### 6、电感的计算

(1) 外自感： $L_0 = \frac{\Psi_0}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint_0 \frac{d\vec{l}_0 \cdot d\vec{l}}{R}$ ，(2) 互感： $M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0 n_1 n_2}{4\pi} \oint \oint_{l_1 l_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R}$

(3) 内自感：单位长度的圆截面导线的内自感为： $L = \frac{\mu}{8\pi}$  (长度为  $l$  的一段圆截面导线的内

自感为  $L = \frac{\mu l}{8\pi}$ )。

### 7、磁场的能量和能量密度

(1) 磁场的总能量

磁介质中，载流回路系统的总磁场能量为： $W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_{kj} I_j I_k$

(3) 磁场能量密度

A、任意磁介质中： $\omega_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$ ，此时磁场总能量可以由  $W_m = \frac{1}{2} \int_\tau \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau$  计算出；B、

在各向同性，线性磁介质中： $\omega_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu \vec{H} \cdot \vec{H}$ ，此时 **磁场总能量** 可以由

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 d\tau$$

## 第五章 时变电磁场

### 1、法拉第电磁感应定律

(1) 感应电动势为： $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$ ；

(2) **法拉第电磁感应定律**：

$$\begin{cases} \text{积分形式: } \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_s - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \text{微分形式: } \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

它说明时变的磁场将激励电场，而且这种感应电场是一种旋涡场，即感应电场不再是保守场，感应电场  $\vec{E}$  在时变磁场中的闭合曲线上的线积分等于闭合曲线围成的面上磁通的负变化率。

### 2、麦克斯韦位移电流假说

按照麦克斯韦提出的位移电流假说，电位移矢量对时间的变化率可视为一种广义的电流

密度，称为位移电流密度，即  $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 。位移电流一样可以激励磁场，从而可以得出

**时变场中的安培环路定律**：

$$\begin{cases} \text{积分形式: } \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \text{微分形式: } \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

### 3、麦克斯韦方程组

(1) 微分形式

$$\begin{cases} (1) \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ (2) \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (3) \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ (4) \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases}$$

(2) 积分形式

$$\begin{cases} (1) \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ (2) \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ (3) \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \\ (4) \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \end{cases}$$

(3) 非限定形式的麦克斯韦方程组

在线性和各向同性的介质中，有媒质的本构关系：

$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \vec{J}_c = \sigma \vec{E}$ ，由此可得 **非限定形式的麦克斯韦方程组**：

(1)  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

(2)  $\nabla \times \vec{E} = - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

(3)  $\nabla \cdot \mu \vec{H} = 0$

(4)  $\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \rho$

### (4) 麦克斯韦方程组的实质

**A、第一方程**：时变电磁场中的安培环路定律。物理意义：磁场是由电流和时变的电场激励的。

**B、第二方程：法拉第电磁感应定律。**物理意义：说明了时变的磁场激励电场的这一事实。

**C、第三方程：时变电场的磁通连续性方程。**物理意义：说明了磁场是一个旋涡场。

**D、第四方程：高斯定律。**物理意义：时变电磁场中的发散电场分量是由电荷激励的。

思考题：麦克斯韦方程中为什么没有写进电流连续性方程？

答：因为它可以由微分形式的方程组中①、④式两式导出。把①式两边同时取散度得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad \nabla \cdot \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

由于矢量的旋度的散度恒等于零，故得

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

这便是电流连续性方程。

#### 4、分界面上的边界条件

##### (1) 法向分量的边界条件

A、 $\vec{D}$ 的边界条件  $\vec{n} \times (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$ ，若分界面上  $\rho_s = 0$ ，则  $\vec{n} \times (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0$

B、 $\vec{B}$ 的边界条件  $\vec{n} \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$

##### (2) 切向分量的边界条件

A、 $\vec{E}$ 的边界条件  $\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$

B、 $\vec{H}$ 的边界条件  $\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$ ，若分界面上  $\vec{J}_s = 0$ ，则  $\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0$

##### (3) 理想导体 ( $\infty = \sigma$ ) 表面的边界条件

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \vec{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s \Leftrightarrow \vec{H}_t = \vec{J}_s \\ (2) \vec{n} \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{E}_t = 0 \\ (3) \vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow B_n = 0 \\ (4) \vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

式中  $\vec{n}$  是导体表面法线方向的单位矢量。上述边界条件说明：在理想导体与空气的分界面上，如果导体表面上分布有电荷，则在导体表面上有电场的法向分量，则由上式中的④式决定，导体表面上电场的切向分量总为零；导体表面上磁场的法向分量总为零，如果导体表面上分布有电流，则在导体表面上有磁场的切向分量，则由上式中的①决定。

#### 5、波动方程

无源区域内， $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 的波动方程分别为： $\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$ 、 $\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ ；

此两式为三维空间中的矢量齐次波动方程。由此可以看出：时变电磁场在无源空间中是以波动的方式

在运动，故称时变电磁场为电磁波，且电磁波的传播速度为  $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 。

#### 6、坡印廷定理和坡印廷矢量

数学表达式： $-\oint_S \vec{E} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) d\tau + \int_V \sigma E^2 d\tau$

由于  $W_e = \int_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 d\tau$  为体积  $\tau$  内的总电场储能， $W_m = \int_V \frac{1}{2} \mu H^2 d\tau$  为体积  $\tau$  内的总磁场储能， $P = \int_V \sigma E^2 d\tau$  为体积  $\tau$  内的总焦耳损耗功率。于是上式可以改写成：

$$-\oint_S \vec{E} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) + P$$

式中的  $S$  为限定体积  $\tau$  的闭合面。

物理意义：对空间中任意闭合面  $S$  限定的体积  $\tau$ ， $\vec{S}$  矢量流入该体积边界的流量等于该体积内电磁能量的增加率和焦耳损耗功率，它给出了电磁波在空间中的能量守恒和能量转换关系。



坡印廷矢量（能流矢量） $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  表示沿能量流动方向单位面积上传过的功率。

7、动态矢量磁位  $\vec{A}$  和动态标量为  $\Phi$  与电磁场的关系为：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

达朗贝尔方程（或称  $\vec{A}$  与  $\Phi$  的非齐次波动方程）为

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}, \quad \nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

## 第六章 正弦平面电磁波

欧拉公式： $e^{jx} = \cos x + j \sin x$

### 1、正弦电磁场

（1）正弦电场、磁场强度的复数表示方法（以电场强度为例）  
在直角坐标系中，正弦电磁场的电场分量可以写成：

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{a}_x E_{xm}(x, y, z) \cdot \cos[\omega t + \varphi_x(x, y, z)] + \vec{a}_y E_{ym}(x, y, z) \cdot \cos[\omega t + \varphi_y(x, y, z)] + \vec{a}_z E_{zm}(x, y, z) \cos[\omega t + \varphi_z(x, y, z)]$$

运用欧拉公式将其表示成复数矢量形式：

$$\begin{aligned} E_x &= E_{xm} \cos[\omega t + \varphi_x(x, y, z)] = \operatorname{Re}[E_{xm} e^{j(\omega t + \varphi_x)}] = \operatorname{Re}(\dot{E}_{xm} e^{j\omega t}) \\ E_y &= E_{ym} \cos[\omega t + \varphi_y(x, y, z)] = \operatorname{Re}[E_{ym} e^{j(\omega t + \varphi_y)}] = \operatorname{Re}(\dot{E}_{ym} e^{j\omega t}) \\ E_z &= E_{zm} \cos[\omega t + \varphi_z(x, y, z)] = \operatorname{Re}[E_{zm} e^{j(\omega t + \varphi_z)}] = \operatorname{Re}(\dot{E}_{zm} e^{j\omega t}) \end{aligned}$$

其中， $\dot{E}_{xm} = E_{xm} e^{j\varphi_x}$ ,  $\dot{E}_{ym} = E_{ym} e^{j\varphi_y}$ ,  $\dot{E}_{zm} = E_{zm} e^{j\varphi_z}$  分别称为各分量振幅的相量，它的模和相位角都是空间坐标的函数，因此

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[(\vec{a}_x \dot{E}_{xm} + \vec{a}_y \dot{E}_{ym} + \vec{a}_z \dot{E}_{zm}) e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}(\vec{E} e^{j\omega t})$$

其中， $\vec{E} = \vec{a}_x \dot{E}_{xm} + \vec{a}_y \dot{E}_{ym} + \vec{a}_z \dot{E}_{zm}$ ，称为电场强度复矢量，它含有各分量的振幅和初相两大要素。电场强度复矢量是一个为简化正弦场计算的表示符号，一般不能用三维空间中一个矢量来表示，也不能写成指数形式。

例题 1 将下列场矢量的瞬时值改写为复数；将场得复矢量写为瞬时值

$$(1) \vec{H} = \vec{a}_x H_0 k \left(\frac{a}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t) + \vec{a}_z H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t)$$

$$(2) \dot{E}_{xm} = 2jE_0 \sin \theta \cos(kx \cos \theta) e^{-jkz \sin \theta}$$

解：（1）因为  $\cos(kz - \omega t)$  是偶函数，

则  $\cos(kz - \omega t) = \cos(\omega t - kz)$  而  $\sin(kz - \omega t) = \cos(kz - \omega t - \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})$ ，故

$$\vec{H}_m = \vec{a}_x H_0 k \left(\frac{a}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jkz + j\pi/2} + \vec{a}_z H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jkz} = \vec{a}_x \dot{H}_{xm} + \vec{a}_z \dot{H}_{zm}$$

$$(2) \quad \text{因为 } \dot{E}_{xm} = 2jE_0 \sin \theta \cos(kx \cos \theta) e^{-jkz \sin \theta} = 2E_0 \sin \theta \cos(kx \cos \theta) e^{-j(kz \sin \theta - \frac{\pi}{2})}$$

故  $E_x = 2E_0 \sin \theta \cos(kx \cos \theta) \cos(\omega t - kz \sin \theta + \frac{\pi}{2})$

## (2) 麦克斯韦方程组的复数形式

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}, \text{ 此方程组没有时间因子, 注意: 式中的场量仍代表复矢量, 标量仍代表复数。}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

对于正弦电磁场的求解, 我们可根据给出的源写出其复矢量和复数, 然后利用麦克斯韦方程组的复数形式求出场得复矢量, 再由电磁场的复矢量写出电磁场的正弦表达式。

例题 2 在真空中, 已知正弦电磁波的电场分量为  $\vec{E}(z, t) = \vec{a}_y 10^3 \sin(\omega t - \beta z)$ , 求波的磁场分量  $\vec{H}(z, t)$

解: 先将波的电场分量写出复矢量, 即  $E_y = -j10^3 e^{j(\omega t - \beta z)}$ , 将其代入矢量的麦克斯韦方程组:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H} \text{ 可得: } \vec{H} = -\frac{1}{j\omega \mu_0} \nabla \times \vec{E} = \frac{\vec{a}_x}{j\omega \mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \text{ 将 } E_y = -j10^3 e^{j(\omega t - \beta z)} \text{ 代入上式可得}$$

$$\vec{H} = \vec{a}_x \frac{j\beta}{\omega \mu_0} 10^3 e^{j(\omega t - \beta z)}, \text{ 将上式展开取实部得: } \vec{H}(z, t) = -\vec{a}_x \frac{\beta}{\omega \mu_0} 10^3 \sin(\omega t - \beta z)$$

## (3) 正弦场中的坡印廷定理

$$\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} = \int_V (P_m + P_e + P_T) d\tau + j2\omega \int_V (w_{m\text{平均}} - w_{e\text{平均}}) d\tau$$

其中  $w_{m\text{平均}} = \frac{1}{4} \mu' H^2$  为磁场能量密度的平均值,  $w_{e\text{平均}} = \frac{1}{4} \epsilon' E^2$  为电场能量密度的平均值。这里场

量  $\vec{E}, \vec{H}$  分别为正弦电场和磁场的幅值。

正弦电磁场的坡印廷定理说明: 流进闭合面  $S$  内的有功功率供闭合面包围的区域内媒质的各种功率损耗; 而流进 (或流出) 的无功功率代表着电磁波与该区域功率交换的尺度。

## (4) 亥姆霍兹方程 (正弦电磁场波动方程的复数形式)

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \text{ 式中 } k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \text{ 称为正弦电磁波的波数。}$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

## 2、理想介质中的均匀平面波

### (1) 均匀平面波的波动方程及其解

平面波是指波阵面为平面的电磁波。均匀平面波是指波的电场  $\vec{E}$  和磁场  $\vec{H}$  只沿波的传播方向变化, 而在波阵面内  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  的方向、振幅和相位不变的平面波。一般说来, 大多数源辐射的电磁波为球面波。

$$\frac{dz}{dt} = v_p = \frac{\omega}{k}, \text{ } v_p \text{ 通常称为波的相速度。}$$

### (2) 均匀平面波的传播特性

波在一个周期中传播的距离称为波长, 用  $\lambda$  表示。波长与频率、相速的关系

$$\lambda = v_p = \frac{1}{f \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{2\pi}{k} \text{ (其中, } k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \text{), 周期是波在时间上的重复量, 波长是波在}$$

空间上的重复量。

电场与磁场的振幅比为:  $\frac{E_x}{H_y} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  称为媒质的**本征阻抗**, 在自由空间中,  $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377\Omega$ ,

电场能量密度:  $w_e = \frac{\epsilon E^2}{2}$ , 磁场能量密度:  $w_m = \frac{\mu H^2}{2}$ , 且二者满足关系:

$$w_m = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\mu}{2} \frac{\epsilon}{\mu} H^2 = \frac{\epsilon E^2}{2} = w_e。$$

结论：沿  $z$  方向传播的均匀平面波，若电场在  $x$  方向，则磁场在  $y$  方向，电场与磁场总是相互垂直，并垂直于波的传播方向，电场、磁场、波的传播方向三者满足右手螺旋关系。

### 3、电磁波的极化

电磁波的极化表征在空间给定点上电场强度矢量的取向随时间变化的特性。当电场的水平分量与垂直分量相位相同或相差  $180^\circ$  时为直线极化；当两分量的振幅相等，但相位差为  $90^\circ$  或  $270^\circ$  时为圆极化（圆极化波分为左旋极化波和右旋极化波。如果我们面向电磁波传去的方向，电场矢量是顺时针方向旋转的，这样极化的波称右旋极化波。如果电场矢量是逆时针旋转的，这样的极化的波称左旋极化波）；当两分量的振幅和相位均为任意关系时为椭圆极化。

### 4、媒质的损耗及分类

工程上通常按  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$  的大小将媒质划分为：

当  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 10^2$  时，媒质被称为良导体；当  $10^{-2} < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 10^2$  时，媒质被称为半导体介质；当

$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 10^{-2}$  时，媒质被称为低损耗介质。

### 5、波在有耗介质中的传播

电磁波在导电媒质中的相速变慢，波长变短，场的振幅随波的传播按指数规律衰减。传播常数

$$\gamma = \alpha + j\beta, \text{ 其中 } \alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right)}$$
$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right)}$$

导电媒质中波的传播速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right)}}, \text{ 在导电媒质中波的传播速度随频率变化，这种现象称为色散}$$

现象。

导电媒质中磁场能量大于电场能量。

6、相速是波阵面移动的速度，它不代表电磁波能量的传播速度，也不代表信号的传播速度。而群速度才是电磁波信号和电磁波能量的传播速度。