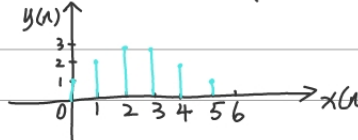


1.2 已知线性移不变系统的输入为  $x(n]$ , 系统的单位抽样响应为  $h[n]$ , 试求系统的输出  $y[n]$ , 并画图。

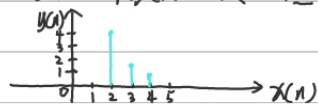
- (1)  $x[n] = \delta[n]$ ,  $h[n] = R_3[n]$   
 (2)  $x[n] = R_3[n]$ ,  $h[n] = R_4[n]$   
 (3)  $x[n] = \delta[n-2]$ ,  $h[n] = 0.5^n R_3[n]$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

解: (2)  $y[n] = x[n] * h[n] = \{1, 1, 1\} * \{1, 1, 1, 1\} = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$



(3)  $y[n] = x[n] * h[n] = \delta[n-2] * 0.5^n R_3[n]$   
 $= 0.5^{n-2} R_3[n-2] = \{0, 0, 4, 2, 1\}$



1.7 试判断以下每一系统是否是(1)线性, (2)移不变, (3)因果, (4)稳定的?

- (1)  $T[x[n]] = g[n]x[n]$  (2)  $T[x[n]] = \sum_{k=n_0}^n x[k]$   
 (3)  $T[x[n]] = x[n-n_0]$  (4)  $T[x[n]] = e^{x[n]}$   
 (5)  $T[x[n]] = nx[n]$  (6)  $T[x[n]] = x[n^3]$   
 (7)  $T[x[n]] = x[n+2] + ax[n]$

解: (1) ①:  $T[ax_1[n] + bx_2[n]] = g[n][ax_1[n] + bx_2[n]]$

$= ag[n]x_1[n] + bg[n]x_2[n] = aT[x_1[n]] + bT[x_2[n]] = aT[ax_1[n] + bx_2[n]]$

$\therefore$  该系统是线性系统。

②:  $T[x[n-m]] = g[n]x[n-m] \neq y[n-m] = g[n-m]x[n-m]$

$\therefore$  该系统不是移不变系统。

③:  $y[n_0] = T[x[n]]|_{n=n_0} = g[n_0]x[n_0]$ , 只取决于  $x[n]|_{n \leq n_0}$ ,  $\therefore$  系统是因果的。

④ 若  $g[n]$  有界, 则  $y[n] = g[n]x[n]$  有界, 系统稳定, 否则  $g[n]x[n]$  无界, 系统不稳定。

(3) ①:  $T[ax_1[n] + bx_2[n]] = aT[x_1[n]] + bT[x_2[n]] = aT[x_1[n-n_0]] + bT[x_2[n-n_0]]$

$\therefore$  系统是线性系统。

②:  $T[x[n-m]] = x[n-m-n_0] = y[n-m] = x[n-m-n_0]$ ,  $\therefore$  该系统是移不变系统。

③: 该系统是线性移不变 (LSI) 系统,  $\therefore$  该系统单位抽样响应为:

$h[n] = T[\delta[n]] = \delta[n-n_0]$ , 当  $n_0 < 0$  时,  $h[n] = 1 \neq 0$ , 非因果;

当  $n_0 > 0$  时,  $h[n] = 1$ ,  $h[n]|_{n \leq 0} = 0$ , 因果。

④:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 1 < \infty$ , 绝对可和,  $\therefore$  系统是稳定的。

(5) ①:  $T[ax_1[n] + bx_2[n]] = n[ax_1[n] + bx_2[n]] = anx_1[n] + bnx_2[n] = aT[x_1[n]] + bT[x_2[n]]$

$= anx_1[n] + bnx_2[n]$ ,  $\therefore$  该系统是线性系统。

②:  $T[x[n-m]] = nx[n-m] \neq y[n-m] = (n-m)x[n-m]$ ,  $\therefore$  不是移不变系统。

③:  $y[n_0] = n_0 x[n_0] = T[x[n]]|_{n=n_0} = n_0 x[n_0]$ , 只取决于  $x[n]|_{n \leq n_0}$ ,  $\therefore$  因果。

④:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |nx[n]|$  不绝对可和,  $\therefore$  不稳定。

(7) ①:  $T[ax_1[n] + bx_2[n]] = a[x_1[n+2] + ax_1[n]] + b[x_2[n+2] + ax_2[n]] = aT[x_1[n]] + bT[x_2[n]]$

$= a[x_1[n+2] + ax_1[n]] + b[x_2[n+2] + ax_2[n]]$ ,  $\therefore$  是线性系统。

②:  $y[n-m] = x[n-m+2] + ax[n-m] = T[x[n-m]] = x[n-m+2] + ax[n-m]$ ,  $\therefore$  是移不变系统。

③ 令  $n=0$ ,  $y[0] = x[2] + ax[0]$ , 不满足只取决于  $x[n]|_{n \leq 0}$  的条件,  $\therefore$  不是因果的。

④:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n+2] + ax[n]|$  绝对可和,  $\therefore$  稳定。

1.8 以下序列是系统的单位抽样响应  $h[n]$ , 试说明系统是否是(1)因果的, (2)稳定的。

(1)  $\frac{1}{n^2} u[n]$

(2)  $\frac{1}{n!} u[n]$

(3)  $3^n u[n]$

(4)  $3^n u[-n]$

(5)  $0.3^n u[n]$

(6)  $0.3^n u[-n-1]$

(7)  $\delta[n+4]$

(8)  $u[4-n]$

解: (3) ①:  $h[n] = 3^n u[n]$  只取决于  $h[n]|_{n \leq 0}$ ,  $\therefore$  是因果。

②:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |3^n u[n]| = \infty$  不绝对可和,  $\therefore$  不稳定。

(4) ①:  $n < 0$  时,  $h[n] = 3^n u[-n] \neq 0$ ,  $\therefore$  不是因果。

②:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |3^n u[-n]| = 3^0 + 3^{-1} + 3^{-2} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} < \infty$ , 绝对可和, 稳定。

(5) ①:  $n < 0$  时,  $h[n] = 0.3^n u[n] = 0$ ,  $\therefore$  是因果。

②:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |0.3^n u[n]| < \infty$  绝对可和,  $\therefore$  稳定。

(7) ①:  $n < 0$  时,  $h[n] = \delta[n+4] \neq 0$ ,  $\therefore$  不是因果。

②:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta[n+4]| < \infty$  绝对可和,  $\therefore$  稳定。

2.18 研究一个输入为  $x[n]$  和输出为  $y[n]$  的时域离散线性移不变系统, 已知它满足  $y[n-1] -$

$\frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n]$ , 并已知系统是稳定的。试求其单位抽样响应。

解: 对差分方程两边作 Z 变换:

$Z^{-1}Y(Z) - \frac{10}{3}Y(Z) + ZY(Z) = X(Z)$

$Y(Z) \left( Z - \frac{10}{3} + Z \right) = X(Z)$   
 $Y(Z) \left( 2Z - \frac{10}{3} \right) = X(Z)$   
 $Y(Z) = \frac{X(Z)}{2Z - \frac{10}{3}}$   
 $Y(Z) = \frac{X(Z)}{2Z - \frac{10}{3}}$   
 $Y(Z) = \frac{X(Z)}{2Z - \frac{10}{3}}$

若  $h[n]$  为因果序列, 则  $h[n] = 0, n < 0$   
 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{-\frac{1}{3} + z + z^{-1}} = \frac{z}{z^2 - \frac{1}{3}z + 1} = \frac{z}{(z - \frac{1}{3})(z - 3)}$$

$\therefore$  极点为  $z_1 = \frac{1}{3}, z_2 = 3$ ,  $\therefore$  系统稳定,  $\therefore$  收敛域为  $\frac{1}{3} < |z| < 3$

$$\therefore \frac{H(z)}{z} = \frac{1}{(z - \frac{1}{3})(z - 3)} = \frac{A_1}{z - \frac{1}{3}} + \frac{A_2}{z - 3}, A_1 = \frac{z}{(z - \frac{1}{3})(z - 3)} \Big|_{z = \frac{1}{3}} = -\frac{1}{8}, A_2 = \frac{z}{(z - \frac{1}{3})(z - 3)} \Big|_{z = 3} = \frac{1}{8}, \therefore H(z) = \frac{-\frac{1}{8}z}{z - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{8}z}{z - 3}$$

$$\therefore h(n) = \frac{1}{8} \left[ a_1^n u(n-1) + a_2^n u(n) \right], a_1 = 3, a_2 = \frac{1}{3}, \star$$

$$\therefore h(n) = -\frac{3}{8} [3^n u(n-1) + (\frac{1}{3})^n u(n)]$$

◆ 例: 已知一个差分方程

$$y(n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$$

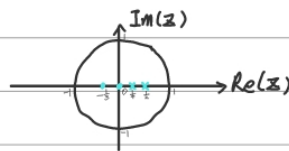
- 1、求系统函数  $H(z)$ ;
- 2、零、极点分布图, 可能存在的几种收敛域;
- 3、若系统稳定且因果, 求相应的  $h(n)$ ;

解: 1. 对差分方程两边进行  $z$  变换:

$$Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z + \frac{1}{3}}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} = \frac{z(z + \frac{1}{3})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$$

2. 由 1 可知, 零点为  $z_1 = 0, z_2 = -\frac{1}{3}$ , 极点为  $z_1 = \frac{1}{2}, z_2 = \frac{1}{4}$ . 零极点图:



可能存在的几种收敛域:  $|z| < \frac{1}{4}, \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}, |z| > \frac{1}{2}$ .

3. 若系统稳定且因果, 则收敛域为  $|z| > \frac{1}{2}$ , 为右边序列.

$$\therefore \frac{H(z)}{z} = \frac{z + \frac{1}{3}}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} = \frac{A_1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{4}}, A_1 = \frac{z + \frac{1}{3}}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} \Big|_{z = \frac{1}{2}} = \frac{10}{3}, A_2 = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore H(z) = \frac{10}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{7}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{4}}, \therefore h(n) = \frac{10}{3} (\frac{1}{2})^n u(n) - \frac{7}{3} (\frac{1}{4})^n u(n)$$

3.5 试求以下有限长序列的  $N$  点 DFT (闭合形式表达式):

(1)  $x(n) = a(\cos \omega_0 n) R_N(n)$

(2)  $x(n) = a^n R_N(n)$

(3)  $x(n) = \delta(n - n_0), 0 < n_0 < N$

(4)  $x(n) = n R_N(n)$

$$\cos w = \frac{e^{-jw} + e^{jw}}{2}$$

$$e^{jw} = \cos w + j \sin w$$

解: (1)  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} a \cos \omega_0 n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{2} a \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-jn\omega_0} + e^{jn\omega_0}) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{a}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(n\omega_0 + \frac{2\pi}{N}k)n} + \frac{a}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(n\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)n} = \frac{a}{2} \left( \frac{1 - e^{-j(N\omega_0 + \frac{2\pi}{N}k)N}}{1 - e^{-j(\omega_0 + \frac{2\pi}{N}k)}} + \dots \right)$

(2)  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1 - a^N e^{-j\frac{2\pi}{N}Nk}}{1 - a e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$

(3)  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - n_0) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{N-1}{N} e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k}$

3.10 图 P3.10 表示一个 5 点序列  $x(n]$ , 试画出:

- (1)  $x(n] * x(n]$  (2)  $x(n] \oplus x(n]$  (3)  $x(n] \otimes x(n]$

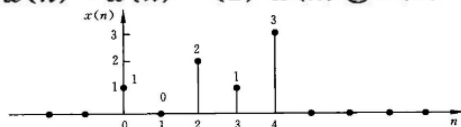


图 P3.10



解:  $x(n) = \{1, 0, 2, 1, 3\}$

(1)  $x(n) * x(n) = \{1, 0, 4, 2, 10, 4, 13, 6, 9\}$

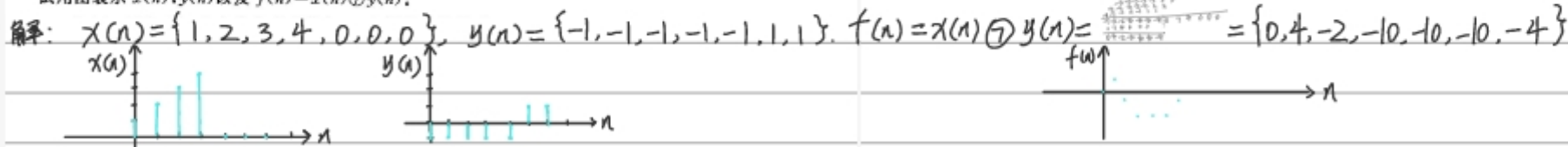
(2)  $x(n) \oplus x(n) = \{5, 13, 10, 11, 10\}$

(3)  $\because 10 > 5+5-1=9, \therefore x(n) \otimes x(n) = x(n) * x(n) = \{1, 0, 4, 2, 10, 4, 13, 6, 9\}$

$$x(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} -1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 1, & 5 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

试用图表示  $x(n)$ ,  $y(n)$  以及  $f(n) = x(n) \otimes y(n)$ .



3.15 设  $x(n]$  为  $N=6$  点的实有限长序列

$$x(n) = \{1, 2, 4, 3, 0, 5\}$$

试确定以下表达式的数值,并用 MATLAB 计算 DFT 进行验证。

(1)  $X(0)$  (2)  $X(3)$  (3)  $\sum_{k=0}^5 X(k)$  (4)  $\sum_{k=0}^5 |X(k)|^2$

解:  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = 1 + 2W_6^k + 4W_6^{2k} + 3W_6^{3k} + 5W_6^{5k}$

(1)  $X(0) = 1 + 2 + 4 + 3 + 5 = 15$

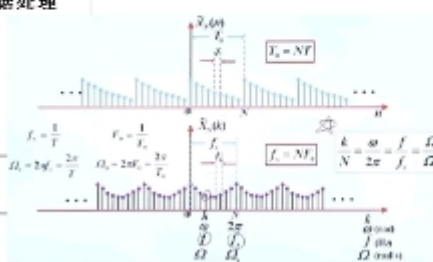
(2)  $X(3) = 1 + (-2) + 4 + 3W_6^3 + 5W_6^5 = 3 + 3e^{-j\frac{2\pi}{2}} + 5e^{-j\frac{2\pi}{2}} = 3 + 3(\cos 3\pi - j\sin 3\pi) + 5(\cos 5\pi - j\sin 5\pi) = 3 - 3 - 5 = -5$

(3)  $\because X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$ , 令  $n=0$ ,  $X(0) = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 X(k)$ ,  $\therefore \sum_{k=0}^5 X(k) = 6X(0) = 90$

3.19 设有一谱分析用的信号处理器,抽样点数必须为 2 的整数幂,假定没有采用任何特殊数据处理措施,要求频率分辨率  $\leq 10\text{Hz}$ ,如果采用的抽样时间间隔为  $0.1\text{ms}$ ,试确定:

- (1) 最小记录长度  $T_0$ ,  $T_0 = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{1000} = 0.001\text{s}$
- (2) 所允许处理的信号的最高频率:  $f_s = \frac{1}{T_0} = 1000\text{Hz}$
- (3) 在一个记录中的最少点数:  $N = \frac{T_0}{T} = \frac{0.1}{0.001} = 100$

频率分辨率  $f_s$ , 最小记录长度  $T_0$ , 抽样频率, 抽样时间间隔, 信号最高频率, 一个记录中的点数



7. 快速傅里叶变换  
 $f_s$  - 采样频率  
 $T_0$  - 采样记录长度  
 $T$  - 采样时间间隔  
 $N$  - 采样点数  
 $f_s = \frac{1}{T_0}$   
 $T_0 = \frac{1}{f_s}$   
 $N = \frac{T_0}{T}$   
 $T = \frac{1}{f_s} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{f_s N}$

解: (1)  $T_0 = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{1000} = 0.001\text{s}$

(2)  $f_s \geq 2f_h, \therefore f_h \leq \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T} = \frac{1}{2 \times 0.001} = 500\text{Hz}$

(3)  $N \geq \frac{T_0}{T} = \frac{0.1}{0.001} = 100$ ,  $\because N$  为 2 的整数幂,  $\therefore N$  最小为  $2^7 = 128$

4.1 如果一台通用计算机的速度为平均每次复乘  $(40\text{ns})$ , 每次复加  $(5\text{ns})$ , 用它来计算 512 点的 DFT  $[x(n)]$ , 问直接计算需要多少时间? 用 FFT 运算需要多少时间? 若做 128 点快速卷积运算, 问最低抽样频率是多少?  $f_s = \frac{1}{T} = \dots$

① 直接利用 DFT 计算: 复乘次数为  $N^2$ , 复加次数为  $N(N-1)$ ,  
 ② 利用 FFT 计算: 复乘次数为  $\frac{N}{2} \log_2 N$ , 复加次数为  $N \log_2 N$ .

解: ①  $N=512$  时, DFT:  $T = N^2 \times 40 \times 10^{-9} + N(N-1) \times 5 \times 10^{-9} = 0.0118\text{s}$

FFT:  $T = (\frac{N}{2} \log_2 N) \times 40 \times 10^{-9} + (N \log_2 N) \times 5 \times 10^{-9} = 0.000152\text{s}$

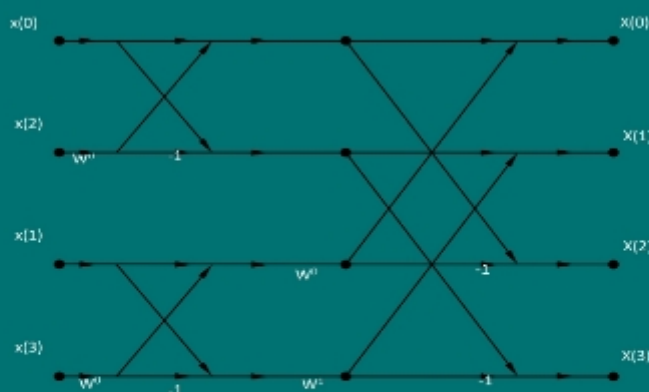
②  $N=128$  时, 做快速卷积运算, 需做 2 次  $N$  点 FFT, 1 次  $N$  点 IFFT,  $N$  次复乘

$\therefore T = 3 \times [(\frac{N}{2} \log_2 N) \times 40 \times 10^{-9} + (N \log_2 N) \times 5 \times 10^{-9}] + N \times 40 \times 10^{-9}$

$= 0.0007232\text{s}$

$\therefore f_s = \frac{1}{T} = \dots$

例: 画出  $N=4$  时的, 按时间抽取的 FFT 的蝶形图



5.1 设 FIR 滤波器的单位抽样响应为

$$h(n) = a^n R_4(n), \quad 0 < a < 1$$

- (1) 求滤波器的系统函数  $H(z)$  并画出它的卷积型结构的信号流图;
- (2) 画出它的级联型结构流图(一个 FIR 系统和一个 IIR 系统的级联);
- (3) 用  $H(z)$  的有理分式表示法, 画出直接 II 型结构流图(比(2)的结构要省一个延时器)。

解: (1)  $H(z) = \sum_{n=0}^5 a^n z^{-n} = 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + a^4 z^{-4} + a^5 z^{-5}$ ,  $0 < a < 1$ .

卷积型结构的信号流图:

(2)  $H(z) = \frac{1-a^6 z^{-6}}{1-a z^{-1}}$ , 级联型结构流图:

(3) 直接II型:

5.2 已知 FIR 滤波器的单位冲激响应为

$$h(n) = \delta(n) + 0.3\delta(n-1) + 0.72\delta(n-2) + 0.11\delta(n-3) + 0.12\delta(n-4)$$

写出它的系统函数  $H(z)$  并画出其级联型结构实现。

解:  $H(z) = \sum_{n=0}^4 h(n) z^{-n} = 1 + 0.3z^{-1} + 0.72z^{-2} + 0.11z^{-3} + 0.12z^{-4}$

5.5 设某 FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{5} (1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4})$$

试画出此滤波器的线性相位结构。

解:  $\therefore h(n) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\delta(n-1) + \delta(n-2) + \frac{3}{5}\delta(n-3) + \frac{1}{5}\delta(n-4) = \{\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\}$ .

$\therefore$  该线性相位滤波器满足  $h(n) = h(N-1-n)$ , 偶对称。

横截型结构:

线性相位结构:

8. 假设一个模拟低通滤波器的系统函数为  $H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3}$ , 其中  $T=1$ ,

(1) 试用冲激响应不变法其转变为数字系统函数  $H(z)$ ;

(2) 冲激响应不变法和双线性变换法各有什么优缺点?

解: (1) ① 冲激响应不变法:

$$H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{2}{(s+3)(s+1)} = \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+1}, A_1 = \frac{2}{(s+3)(s+1)} \times (s+3)|_{s=-3} = -1, A_2 = 1, \therefore H_a(s) = \frac{-1}{s+3} + \frac{1}{s+1}$$

$$\therefore h_a(t) = (-e^{-3t} + e^{-t})u(t), \text{ 令 } t = nT, \therefore h(n) = h_a(nT) = (-e^{-3nT} + e^{-nT})u(nT)$$

$$\text{又: } T=1, \therefore h(n) = (-e^{-3n} + e^{-n})u(n)$$

$$\therefore H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{-1}{1-e^{-3}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}$$

② 双线性变换法:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \left( \frac{-1}{s+3} + \frac{1}{s+1} \right) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{-1-z^{-1}}{5+z^{-1}} + \frac{1+z^{-1}}{3-z^{-1}}$$

(2) 冲激响应不变法会产生混叠失真, 不能用于设计高通及带阻滤波器, 模拟频率及数字频率之间是线性变换关系; 而双线性变换法克服了混叠失真, 可以设计各型滤波器, 但是频率之间的变换是非线性的。

例: 设计低通数字滤波器, 要求在通带内频率低于  $0.2\pi \text{ rad}$  时, 容许幅度误差在  $1\text{dB}$  以内; 在频率  $0.3\pi$  到  $\pi$  之间的阻带衰减大于  $15\text{dB}$ 。指定模拟滤波器采用巴特沃斯低通滤波器, 试分别用脉冲响应不变法和双线性变换法设计滤波器。

解: (1) 脉冲响应不变法:

① 数字滤波器指标:  $\omega_p = 0.2\pi, \alpha_p = 1\text{dB}, \omega_{st} = 0.3\pi, \alpha_s = 15\text{dB}$ .

② 模拟滤波器指标:  $\Omega_p = 0.2\pi \text{ rad/s}, \alpha_p = 1\text{dB}, \Omega_{st} = 0.3\pi \text{ rad/s}, \alpha_s = 15\text{dB}, T=1\text{s}$ .

③ 设计巴特沃斯低通滤波器

计算阶数  $N$  以及  $3\text{dB}$  截止频率  $\Omega_c$ :

$$N = \frac{\lg K_p}{\lg \lambda_p}, K_p = \sqrt{\frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_s/10} - 1}}, \lambda_p = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$$

$$\therefore N = 5.8858 \Rightarrow N = 6, \Omega_c = \Omega_p (10^{\alpha_p/10} - 1)^{\frac{1}{2N}} = 0.7032 \text{ rad/s}$$

查表得  $H_a(p) = \dots$

最后去归一化: 将  $p = \frac{s}{\Omega_c}$  代入到  $H_a(p)$  中得到  $H_a(s)$ .

④ 用脉冲响应不变法求得  $H(z)$ .

(2) 双线性变换法:

① 数字滤波器指标:  $\omega_p = 0.2\pi, \alpha_p = 1\text{dB}, \omega_{st} = 0.3\pi, \alpha_s = 15\text{dB}$ .

② 模拟滤波器指标:  $\Omega = \frac{2}{T} \tan(\frac{\omega}{2}), T=1\text{s}$ .

$$\therefore \Omega_p = \frac{2}{T} \tan(\frac{\omega_p}{2}) = 2 \tan(0.1) = 0.65 \text{ rad/s}, \alpha_p = 1\text{dB}, \Omega_{st} = \frac{2}{T} \tan(\frac{\omega_{st}}{2}) = 2 \tan(0.15) = 1.019 \text{ rad/s}, \alpha_s = 15\text{dB}$$

③ 设计巴特沃斯低通滤波器: 同(1).

④ 用双线性变换法求  $H(z)$ :



$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}}$$

例2: 设计一个线性相位的FIR滤波器, 给定通带截止频率为 $\omega_p=0.3\pi$ , 阻带起始频率为 $\omega_{st}=0.5\pi$ , 阻带的衰减 $A_s=40\text{dB}$ 。

解: 截止频率 $\omega_c$ :  $\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_{st}}{2} = 0.4\pi$

$$\Delta\omega = |\omega_{st} - \omega_p| = 0.2\pi$$

$\therefore$  阻带衰减 $A_s=40\text{dB}$ ,  $\therefore$  选择汉宁窗 $(-44\text{dB})$ , 又: 汉宁窗过渡带带宽满足 $\Delta\omega = \frac{6.27}{N}$ ,

$$\therefore N=31, \therefore \tau = \frac{N-1}{2} = 15$$

$$\therefore H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega,$$

$$\therefore h_d(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} = \begin{cases} \frac{\sin(0.4\pi(n-15))}{\pi(n-15)}, & n \neq 15 \\ 0.4, & n=15 \end{cases}$$

$$\text{又: } w(n) = \dots, \therefore h(n) = h_d(n) \cdot w(n) = \dots$$

$$\text{最后由 } h(n) \text{ 确定 } H(e^{j\omega}): \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \dots$$

例: 请设计一个线性相位FIR低通滤波器, 技术指标如下:

(1) 抽样频率为 $f_s=15\text{KHz}$ ;

(2) 通带截止频率为 $f_p=1.5\text{KHz}$ ;

(3) 阻带截止频率为 $f_{st}=3\text{KHz}$ ;

(4) 阻带衰减不小于 $50\text{dB}$ 。

$$\Omega_p = 2\pi f_p$$

$$\omega_p = 2\pi \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$$

解: ① 求数字滤波器指标:

$$\omega_p = 2\pi \frac{f_p}{f_s} = 0.2\pi, \omega_{st} = 2\pi \frac{f_{st}}{f_s} = 0.4\pi, \alpha_{st} = 50\text{dB}, \omega_c = \frac{\omega_{st} + \omega_p}{2} = 0.3\pi, \Delta\omega = |\omega_{st} - \omega_p| = 0.2\pi$$

② 求 $h_d(n)$ :

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega,$$

$$\therefore h_d(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

③ 确定窗函数:

$$\text{由 } \alpha_s = 50\text{dB} \text{ 确定海明窗 } (-53\text{dB}): \quad w(n) = \left[ 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n)$$

④ 确定 $N$ 值:

$$\therefore \text{海明窗: } \Delta\omega = \frac{6.6\pi}{N}, \therefore N=33, \tau=16$$

⑤ 求 $h(n)$ :

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) = \dots$$

⑥ 求 $H(e^{j\omega})$ , 验证:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

9. 窗函数设计中, 加窗处理对理想低通滤波器的频率响应有什么影响?

解: (1) 窗谱的主瓣宽度窄, 滤波器有较窄的过渡带, 增加窗的长度 $N$ 可以减少窗谱的主瓣宽度, 降低过渡带的宽度;

(2) 窗谱的第一旁瓣的幅度相对于主瓣较小, 设计出来的滤波器有较小的带内波动和较大的阻带衰减, 这往往是通过增加主瓣的宽度来实现这一目标。

4. 已知序列 $x(n) = \{1, -1, 2, 3\}$ , 求

(1)  $X(e^{j\omega})$

(2)  $X(k)$  和  $X(3)$

(3)  $x(n) \oplus x(n)$ ,  $\sum_{k=0}^3 x(k)$

(4)  $x(n) * x(n)$

解: (1)  $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} = 1 - e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} + 3e^{-j3\omega}$

(2)  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^3 x(k) e^{-j\frac{2\pi}{4}nk} = 1 - e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 2e^{-j\pi k} + 3e^{-j\frac{3\pi}{2}k}$

$\therefore X(3) = 1 - W_4^k + 2W_4^{2k} + 3W_4^{3k} = 1 - W_4^3 + 2W_4^6 + 3W_4^9 = -1 - 4j$

(3)  $x(n) \oplus x(n) = \{13, 7, 5, 2, -2\}$

$\therefore x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$ , 令 $n=0$ ,  $X(0) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k)$ ,  $\therefore \sum_{k=0}^3 X(k) = 4X(0)$

又:  $X(0) = 5, \therefore \sum_{k=0}^{\infty} X(k) = 20$

(4)  $X(n) * X(n) = \{1, -2, 5, 2, -2, 12, 9\}$

6、一个线性移不变因果系统用下列差分方程描述

$$y(n] - 0.16y[n-1] = x[n] + 0.25x[n-1]$$

(1) 求系统的系统函数  $H(z)$ , 画出零极点图,


确定收敛域, 并判断其稳定性;

(2) 根据零极点粗略画出幅频响应曲线  $(|H(e^{j\omega})| \sim \omega)$ , 说明系统的滤波特性。

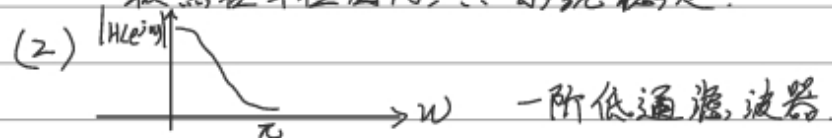
解: (1) 对差分方程两边进行Z变换:

$$Y(z) - 0.16z^{-1}Y(z) = X(z) + 0.25z^{-1}X(z)$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+0.25z^{-1}}{1-0.16z^{-1}} = \frac{z+0.25}{z-0.16} \quad \therefore \text{零点: } z = -0.25, \text{极点: } z = 0.16$$

零极点图:  收敛域:  $|z| > 0.16$

极点, 在单位圆内,  $\therefore$  系统稳定.



7、设计一个线性相位FIR低通滤波器,

给定抽样频率为  $\Omega_s = 2\pi \times 1.5 \times 10^4$  (rad/sec),

通带截止频率为  $\Omega_p = 2\pi \times 1.5 \times 10^3$  (rad/sec),

阻带起始频率为  $\Omega_{st} = 2\pi \times 3 \times 10^3$  (rad/sec),

阻带衰减不小于 -50dB, 幅度特性如图所示

$$\Omega = \frac{2\pi f}{T} = 2\pi f$$

$$\omega_p = 2\pi \frac{f_p}{f_s} = 2\pi \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$$

解: ① 数字滤波器指标:

$$\omega_p = 2\pi \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = 0.2\pi, \quad \omega_{st} = 2\pi \frac{\Omega_{st}}{\Omega_s} = 0.4\pi, \quad \Delta\omega = |\omega_{st} - \omega_p| = 0.2\pi, \quad \omega_c = \frac{\omega_{st} + \omega_p}{2} = 0.3\pi$$

② 求  $h_d(n)$ :

$$\therefore H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega n} e^{j\omega n} d\omega$$

$$\therefore h_d(n) = \frac{\sin(\omega_c(n-n))}{\pi(n-n)}, \quad l = \frac{N-1}{2}$$

③ 确定窗函数:

$$\therefore \alpha_s = 50\text{dB} \therefore \text{选海明窗} (-53\text{dB}), \quad w(n) = [0.54 - 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{N-1})] R_N(n)$$

④ 求阶数  $N$ :

$$\therefore \text{海明窗: } \Delta\omega = \frac{6.6\pi}{N}, \therefore N = 33, \therefore l = 16$$

⑤ 求  $h(n)$ :

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{\sin[0.3\pi(n-16)]}{\pi(n-16)}, & n \neq 16 \\ \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 16 \end{cases} \quad h(n) = h_d(n) \cdot w(n) = \dots$$

⑥ 求  $H(e^{j\omega})$ :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \dots$$

1-14 有一调幅信号

$$x_a(t) = [1 + \cos(2\pi \times 100t)] \cos(2\pi \times 600t)$$

用DFT做频谱分析, 要求能分辨  $x_a(t)$  的所有频率分量, 问

(1) 抽样频率应为多少赫兹 (Hz)?

(2) 抽样时间间隔应为多少秒 (Sec)?

(3) 抽样点数应为多少点?

解:  $x_a(t) = [1 + \cos(2\pi \times 100t)] \cos(2\pi \times 600t)$

$$= \cos(2\pi \times 600t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi \times 700t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi \times 500t)$$

(1)  $f_s \geq 2f_h = 1400\text{ Hz}$

(2)  $T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{1400}\text{ s} = 0.72\text{ ms}$

(3) 法一:  $\therefore$  频率分量为 500Hz, 600Hz, 700Hz,  $\therefore$  采样频率  $F_s = 100\text{ Hz}$

$$\therefore N = \frac{f_s}{F_s} = \frac{1400}{100} = 14, \therefore \text{抽样点数至少为 14 点}$$