郑州大学

第一章　矢量分析

1.1 矢量运算

矢量：用数值和方向表示物理量。

单位矢量：模为1的矢量，只表示矢量的方向。

1. 单位矢量$\boldsymbol{e}_R$

$$\boxed{\boldsymbol{e}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{R}}$$

直角坐标系 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$

圆柱坐标系 $\boldsymbol{e}_r$， $\boldsymbol{e}_\varphi$， $\boldsymbol{e}_z$

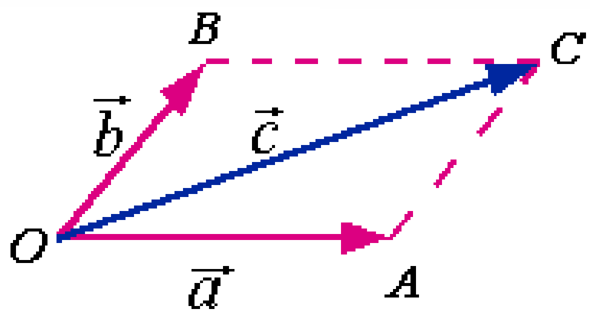
球坐标系 $\boldsymbol{e}_\mathrm{r}$， $\boldsymbol{e}_\theta$， $\boldsymbol{e}_\varphi$

点电荷场强

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\boldsymbol{e}_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}}$$

2. 矢量加减法

(1) 平行四边形法则（或三角形法则）



(2) 分量式加减法

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{e}_x a_1 + \boldsymbol{e}_y a_2 + \boldsymbol{e}_z a_3 \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{e}_x b_1 + \boldsymbol{e}_y b_2 + \boldsymbol{e}_z b_3 \\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{e}_x \left(a_1 + b_1\right) + \boldsymbol{e}_y \left(a_2 + b_2\right) + \boldsymbol{e}_z \left(a_3 + b_3\right) \end{aligned}}$$

3. 标量积（点乘）： $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=ABcos\theta$

θ是**A**和**B**的夹角。

4. 矢量积（叉乘）： $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

数值 $\left|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right|=AB\sin\theta$ 　　方向：右手定则

$$\boxed{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}}$$

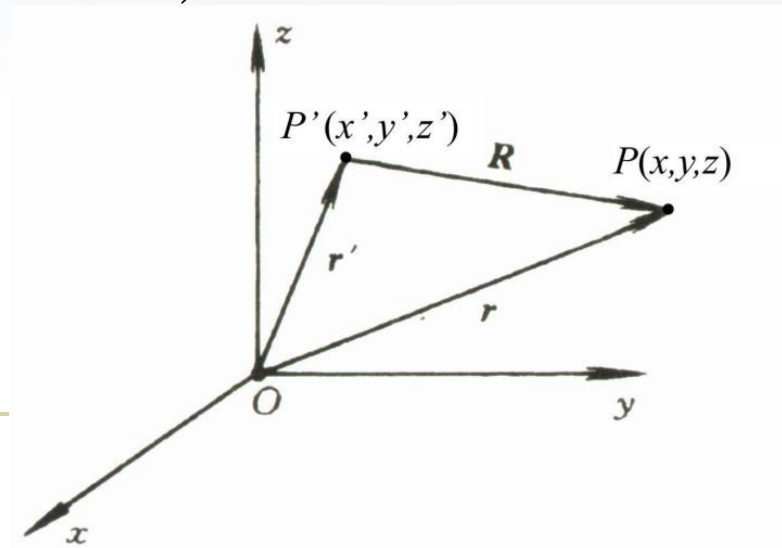
5. 混合积:（$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$）$\cdot\boldsymbol{C}$

6. 常用数学公式见附录3

1.2 空间矢量

在$P'(x',y',z')$点放一个点电荷q(或一个带电体)—源点

求$P(x,y,z)$点的场强—场点



$$\boxed{P'(x',y',z')\text{点，}\quad \boldsymbol{r}'=x'\boldsymbol{e}_x+y'\boldsymbol{e}_y+z'\boldsymbol{e}_z}$$

$$\boxed{P(x,y,z)\text{点，}\quad \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z}$$

由源点指向场点：**距离矢量** $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$

$$\boxed{\text{大小(模)}\ R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

$$\boxed{\text{方向}\qquad \boldsymbol{e}_R=\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}$$

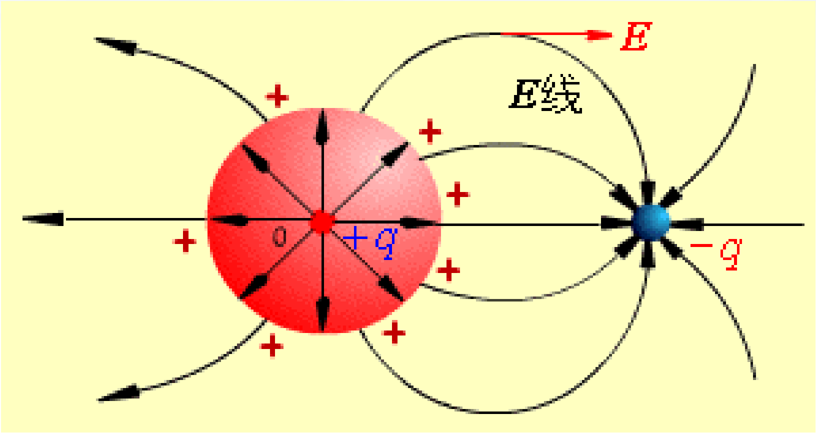
点电荷场强

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\boldsymbol{e}_R}$$

1.3 矢量场和标量场

1. 矢量场

以电场为例，电场中每一点都可以定义一个电场强度矢量E_1、E_2 …，这些矢量的总和构成一个矢量场$E\,(x, y, z)$），矢量场可以用场线表示，例如：电力线、磁感线 …



场线

$$\boxed{\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}}$$

2. 标量场

以电场为例，电场中每一点都可以定义一个电位$U_1, U_2, \ldots,$ 这些标量的总和构成一个标量场$U(x, y, z)$，标量场可以用等值线（面）表示。

例如等位面$U(x, y, z)$＝常数。

$$\boxed{u(x, y, z) = c}$$

等值面两两不相交

1.4 三种常用的正交坐标系

1. 直角坐标系

直角坐标系中三个相互正交的单位矢量是 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$

满足如下的关系

$$\boxed{\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y}$$

任一矢量A在直角坐标系中可以表示为

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z}$$

直角坐标系中的位置矢量为 $\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z}$

微分线元

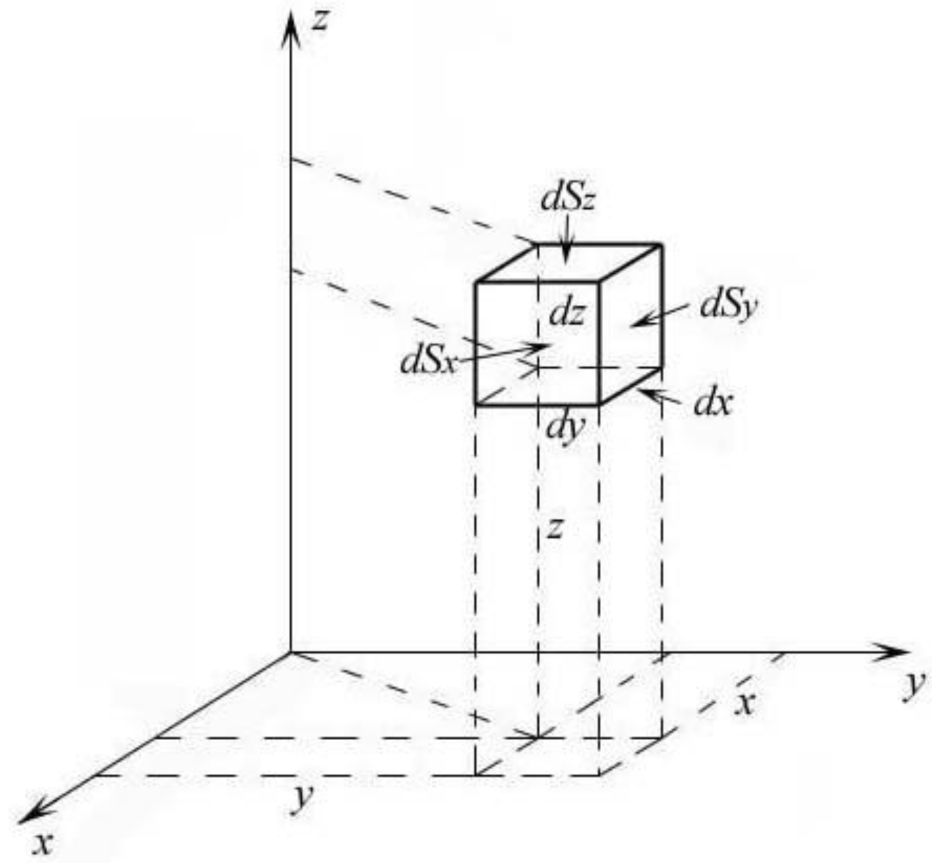
$$\boxed{d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x dx+\boldsymbol{e}_y dy+\boldsymbol{e}_z dz}$$

与三个坐标方向相垂直的三个面积元分别为

$$\boxed{\begin{aligned} dS_x &= dydz \\ dS_y &= dxdz \\ dS_z &= dxdy \end{aligned}}$$

直角坐标系中的体积元为

$$\boxed{dV=dxdydz}$$

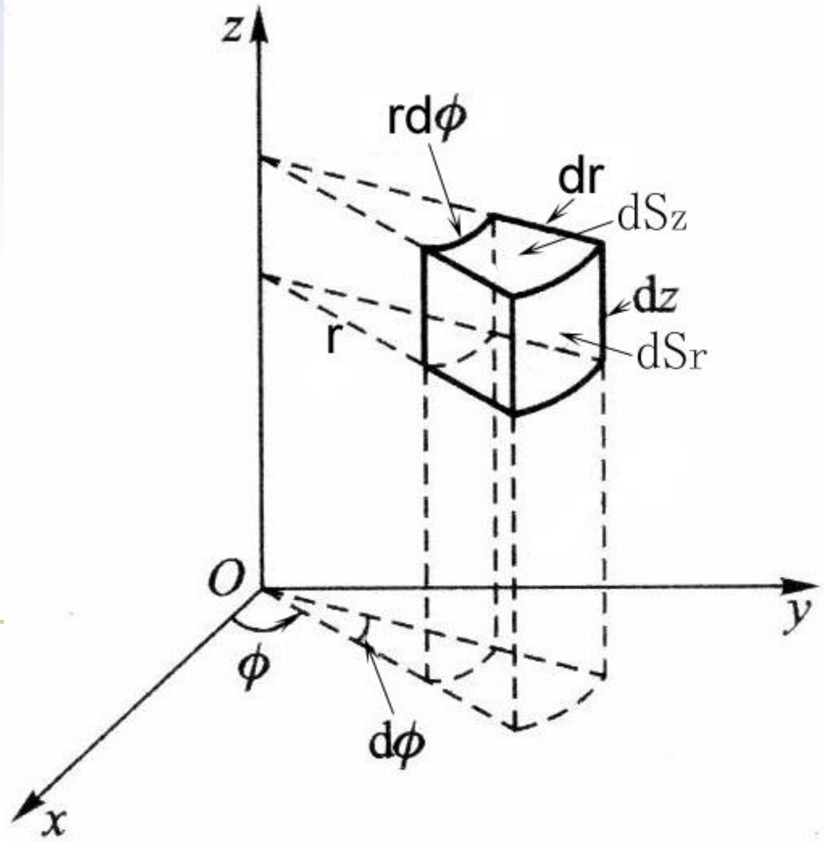


2. 圆柱坐标系

圆柱坐标系中的三个坐标分量是r、φ、z，它们的变化范围分别是

$0\le r<\infty$，$0\le\varphi\le 2\pi$，$-\infty<z<\infty$

圆柱坐标系与直角坐标系之间的变换关系为

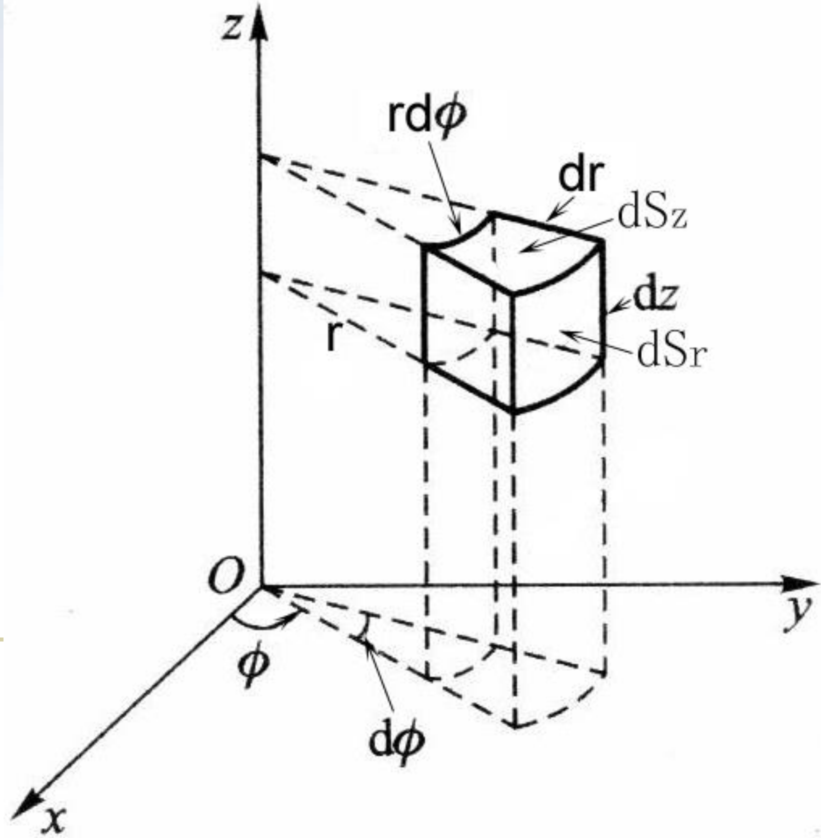


$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

圆柱坐标系中三个相互正交的单位矢量是 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z$ 满足如下的关系

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\varphi&=\boldsymbol{e}_z\\ \boldsymbol{e}_\varphi\times\boldsymbol{e}_z&=\boldsymbol{e}_r\\ \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_r&=\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}}$$



除 $\boldsymbol{e}_z$ 外， $\boldsymbol{e}_\varphi$ $\boldsymbol{e}_r$ 都不是常矢量，它们的方向随P点位置不同而变化，但三者总保持正交且遵循右手螺旋法则

直角坐标系中的矢量A可以利用下式换算为圆柱坐标系中的矢量

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

可以利用上式中变换矩阵的逆矩阵把圆柱坐标系中的矢量A换算为直角坐标系中的矢量

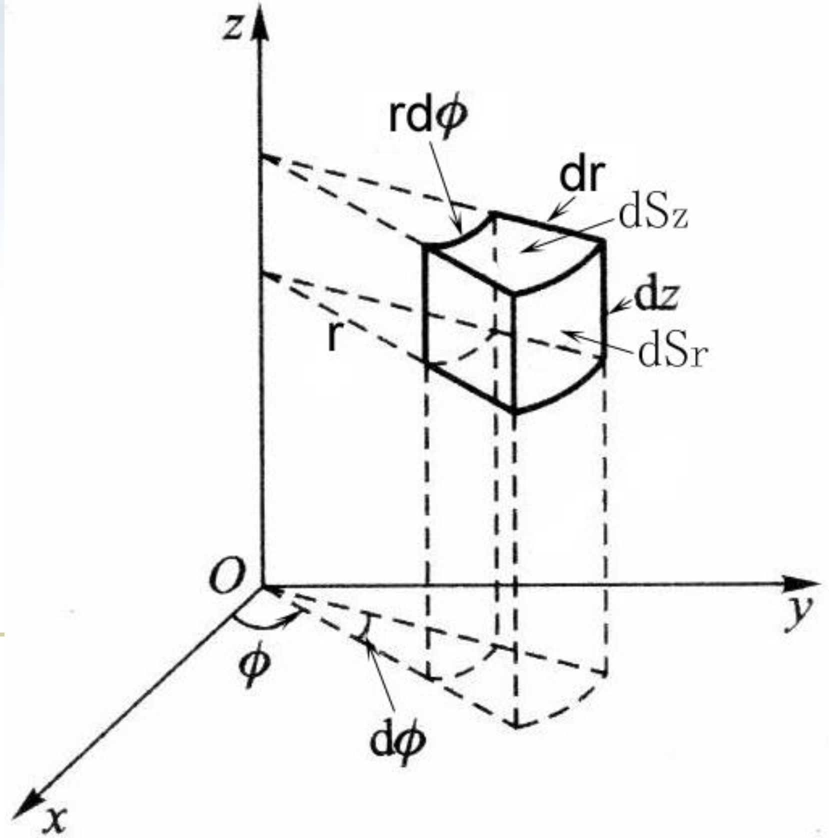
$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

郑州大学

圆柱坐标系中的位置矢量为

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r r + \boldsymbol{e}_z z}$$

(其中不显含φ分量，已包含在$\boldsymbol{r}$的方向中。)

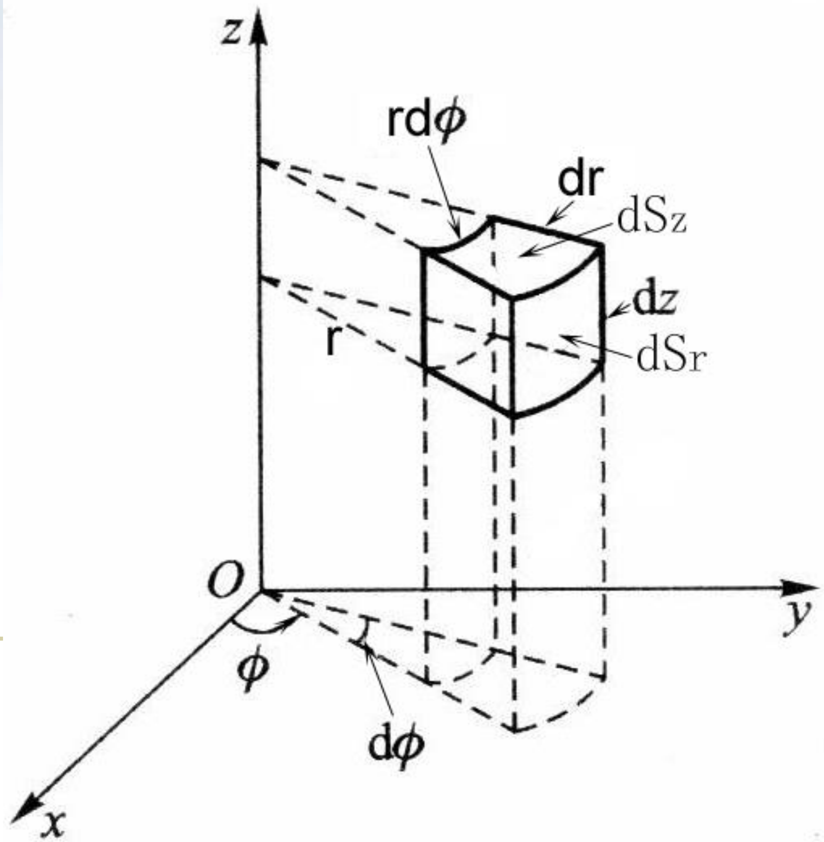


微分线元为

$$\boxed{d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r dr + \boldsymbol{e}_\varphi r d\varphi + \boldsymbol{e}_z dz}$$

圆柱坐标系中与三个坐标方向相垂直的三个面积元分别为

$$\boxed{\begin{aligned} dS_r &= rd\varphi dz \\ dS_\varphi &= drdz \\ dS_z &= rdrd\varphi \end{aligned}}$$



圆柱坐标系中的体积元为

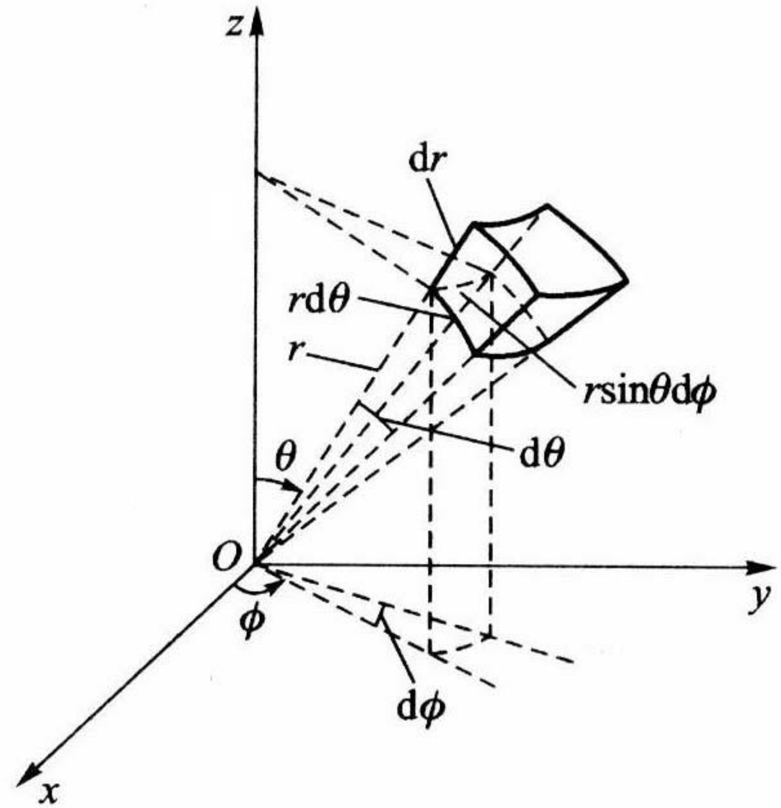
$$\boxed{dV = rdrd\varphi dz}$$

3. 球坐标系

球坐标系中的三个坐标分量是r、θ、φ，它们的变化范围分别是

$0 \le r < \infty$，$0 \le \theta \le \pi$，$0 \le \varphi \le 2\pi$

球坐标系与直角坐标系之间的变换关系为



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ tg\theta &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ tg\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}}$$

直角坐标系中的矢量A可以利用下式换算为球坐标系中的矢量

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

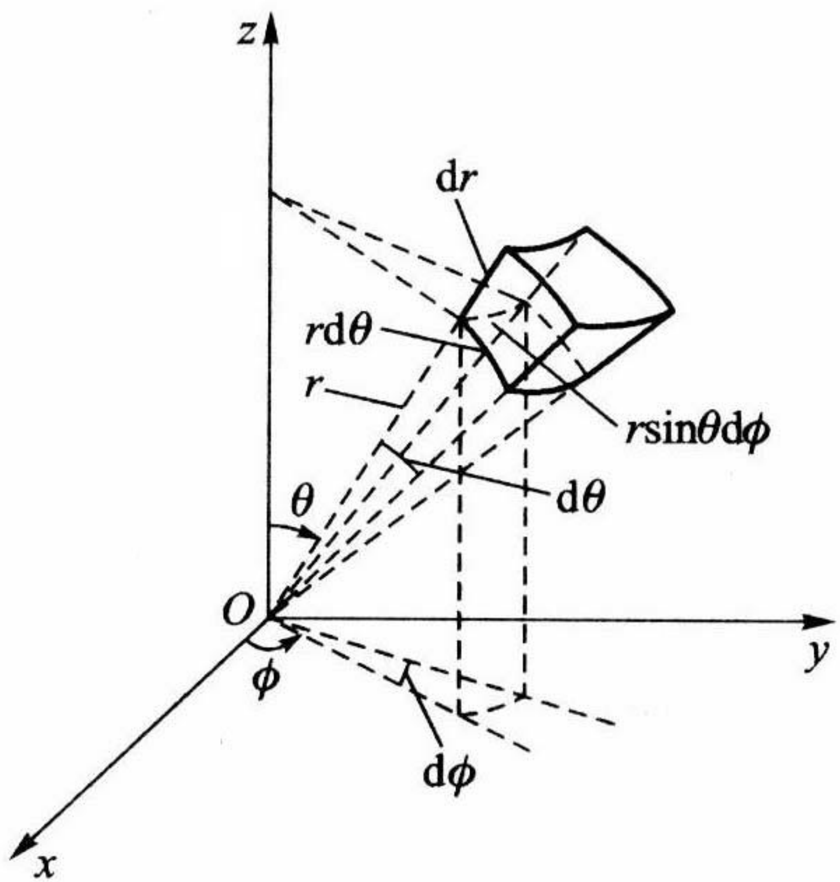
可以利用上式中变换矩阵的逆矩阵把球坐标系中的矢量A换算为直角坐标系中的矢量

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

球坐标系中的位置矢量为r

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r r}$$

(其中不显含*θ*分量和*φ*分量，已包含在$\boldsymbol{e}_r$的方向中。)

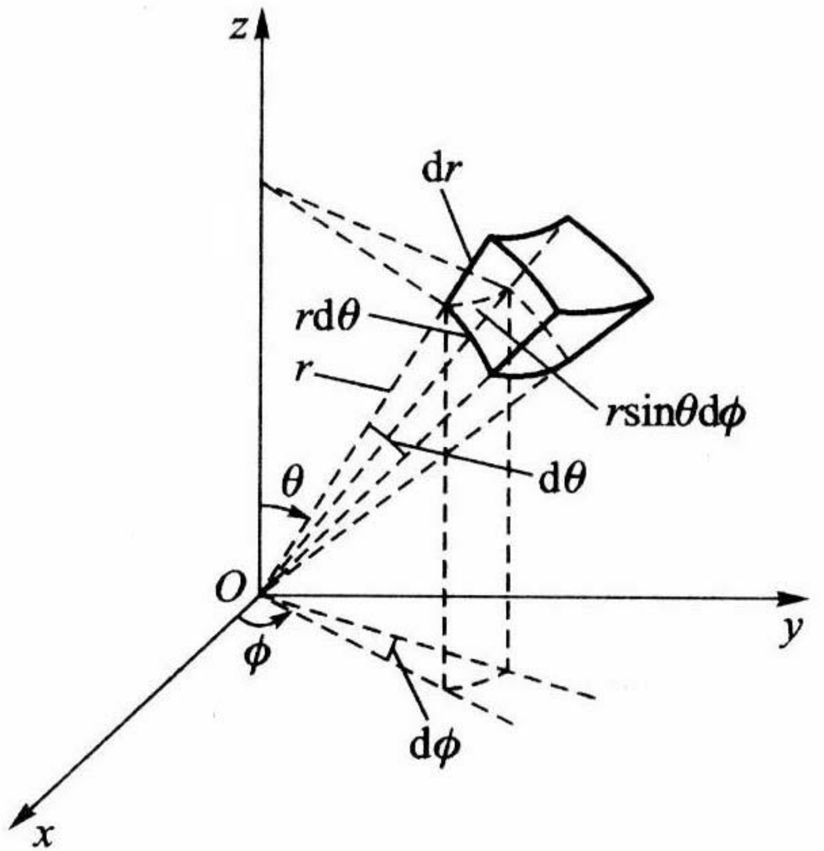


在r、θ、φ增加方向上的微分元分别为dr、$rd\theta$、$r\sin\theta d\varphi$，
微分线元为

$$\boxed{d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r dr + \boldsymbol{e}_\theta r d\theta + \boldsymbol{e}_\varphi r \sin\theta d\varphi}$$

球坐标系中与三个坐标方向相垂直的三个面积元分别为

$$\boxed{\begin{aligned} dS_r &= r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ dS_\theta &= r\sin\theta dr d\varphi \\ dS_\varphi &= r dr d\theta \end{aligned}}$$

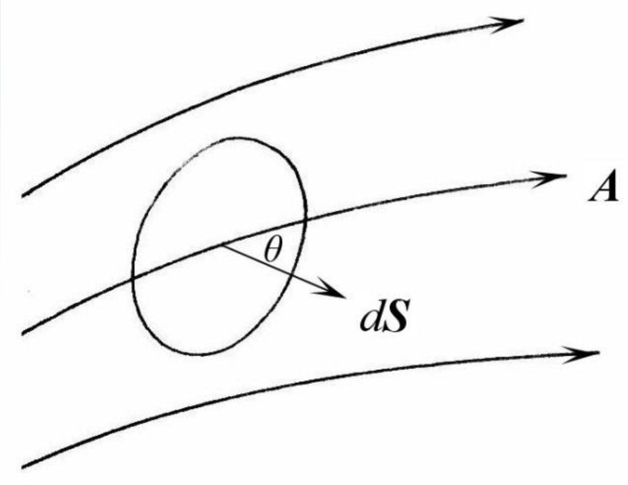


球坐标系中的体积元为

$$\boxed{dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}$$

1.5 矢量的微分

1. 矢量场的散度，散度定理



矢量的通量

设有一个矢量场*A*，在场中任取一面元*dS*,则

$$\boxed{d\phi = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = A\cos\theta dS}$$

称为穿过面元*dS*的通量（Flux）

穿过**闭合曲面**的通量及其物理意义

闭合曲面是一个特殊情况，有特殊的意义和用途，一般取闭合曲面的外法线方向为曲面方向（指向闭合曲面S外部空间方向）。

在矢量场*A*中，围绕某一点*P*作一闭合曲面*S*，法线方向向外，则 矢量*A*穿过闭合曲面S的通量或发散量。

$$\boxed{\phi = \oiint_{S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}}$$

散度的定义

根据穿出闭合曲面的通量的正负，可以判断出该曲面内有正源或负源，但源在曲面内的分布情况和强弱却是通量无法说明的。

设闭合曲面S包围的体积为ΔV，则 $\dfrac{\oint\!\!\oint_s \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}$ 为ΔV内的平均发散量，令$\Delta V\to 0$，就得到矢量场在P点的发散量或散度，记作：$div\,A$或$\nabla\cdot A$，即

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\!\!\oint_s \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}}$$

矢量（场）的散度是一个标量（场）

散度的表达式

直角坐标系

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

圆柱坐标系

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r A_r\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

球坐标系

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}}$$

3. 散度定理

矢量场A通过任一闭合曲面S的通量等于它所包围的体积V内散度的积分，即：

$$\oint\!\!\!\oint_{s} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{v} \nabla \cdot \boldsymbol{A} dv$$

利用散度定理，可以把面积分变为体积分，也可以把体积分变为面积分。

例：电场的高斯定理

积分形式

$$\oint\!\!\!\oint_{s} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \sum q_0 = \iiint_{v} \rho_0 dv$$

由散度定理 $\oint\!\!\!\oint_{s} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{v} \nabla \cdot \boldsymbol{D} dv = \iiint_{v} \rho_0 dv$

微分形式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

例题： 矢量场$A(r)=r$，计算$A(r)$穿过一个球心在圆点，半径为a的球面的通量；并计算此矢量场的散度$\nabla \cdot A(r)$。

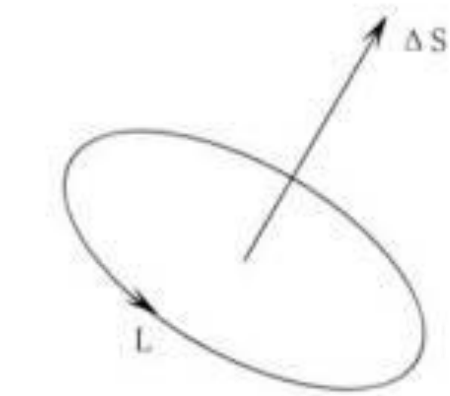
解：由于在球坐标内，$A(r)=e_r r$，$r=a$的球面上各点的矢量为$A(\mathrm{a})=e_r a$，其大小处处相等，而球面上的面元矢量$dS=e_r dS$，所以

$$\boxed{\oiint_s A(a)\cdot d\boldsymbol{S}=\oiint_s ads\left(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r\right)=a\oiint_s ds=4\pi a^3}$$

$$\boxed{\nabla\cdot A(\boldsymbol{r})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 r\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\right)=3}$$

2. 矢量场的旋度

旋度是研究矢量场局域涡旋性



定义：设闭合回路L所围的面积为△S，其法线矢量n与L构成右手关系，则 $\dfrac{\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta s}$

为△S内沿n方向的平均涡旋量（环量密度），令△S→0（△S 收缩成一个点P）就得到矢量场A在P点处沿 n 方向的涡旋量。

$$\boxed{\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta s}=(rot)_n\boldsymbol{A}}$$

称为矢量A的旋度，记为， $\boxed{rot\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}}$

旋度是一个矢量

旋度的表达式：

$$\text{在直角坐标系中}\quad \nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$\text{在圆柱坐标系中}\quad \nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r} & \boldsymbol{e}_\varphi & \dfrac{\boldsymbol{e}_z}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_r & rA_\varphi & A_z\end{vmatrix}$$

旋度的表达式：

在球坐标系中 $$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

旋度的一个重要性质（旋无散）

$$\boxed{\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0}$$

证明：在直角坐标系中

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\cdot \left[\boldsymbol{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0$$

斯托克斯定理：矢量场沿任意闭合回路上的环量等于以L为边界的曲面S上的旋度的积分。

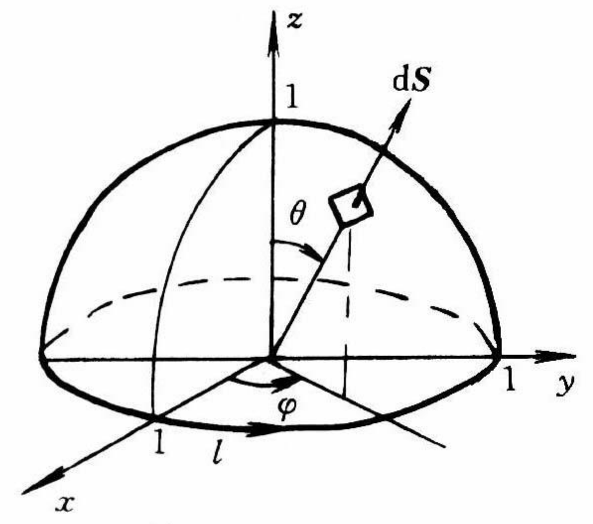
$$\boxed{\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_s(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}}$$

利用斯托克斯定理，可以把线积分变为面积分，也可以把面积分变为线积分。

- 在电磁场理论中，高斯定理 和 斯托克斯定理 是两个非常重要的公式。

例题：已知矢量场，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x z+\boldsymbol{e}_y x+\boldsymbol{e}_z y$

对半球面 $S\left(x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\right)$ 验证斯托克斯定理。



解：直角坐标系中，A的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$$

斯托克斯定理：$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}$

郑州大学

本例题使用的数学公式：

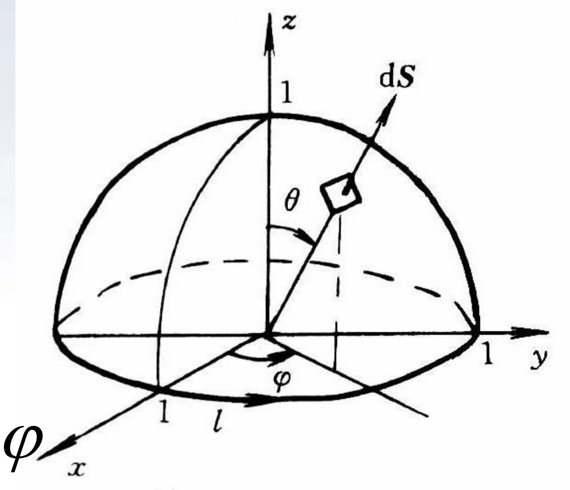
$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$$

解：如图所示， 在球坐标系内， 半

球面上的面元矢量为：



$$\mathbf{dS} = \mathbf{e}_r \, r^2 sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z\right) \cdot \mathbf{e}_r \sin\theta d\theta d\varphi$$

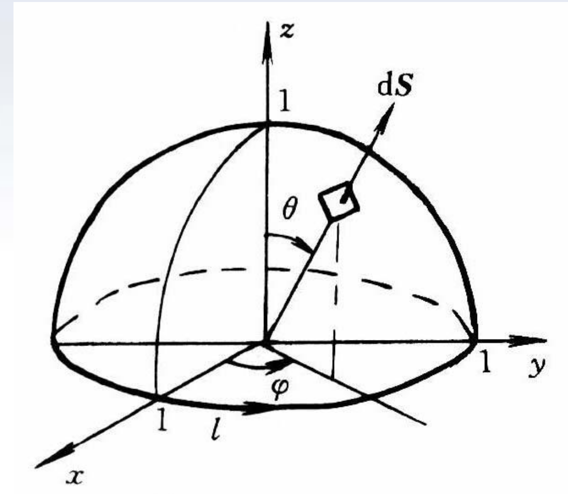
$$= \iint_S \left(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r\right) \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta + 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= \pi$$

半球面S的边界是xy平面内的圆$x^2+y^2=1$，边界上的线元$d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x\,dx+\boldsymbol{e}_y\,dy$，沿边界的环流为



$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_L\left(\boldsymbol{e}_x z+\boldsymbol{e}_y x+\boldsymbol{e}_z y\right)\cdot\left(\boldsymbol{e}_x dx+\boldsymbol{e}_y dy\right)$$

$$=\oint_L\left(zdx+xdy\right)$$

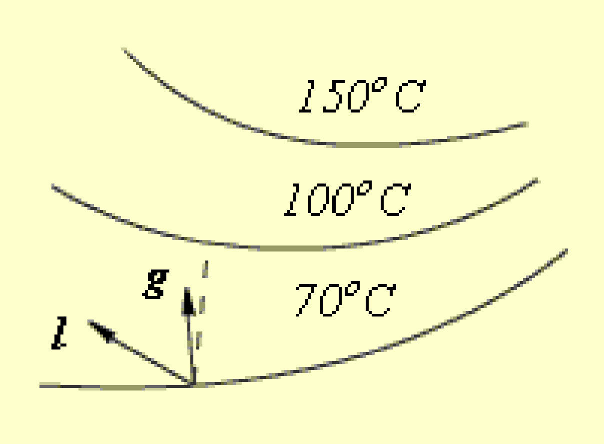
$$=\oint_L xdy=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy+\int_{1}^{-1}\left(-\sqrt{1-y^2}\right)dy$$

$$=\pi$$

所以 $\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}$

3. 标量场的梯度

从场中一点出发有无穷多方向，通常人们关心的是沿何方向变化率最大，此变化率为多少？

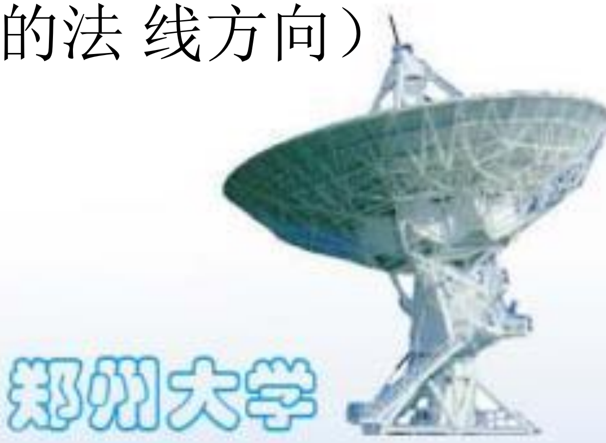


等温线分布

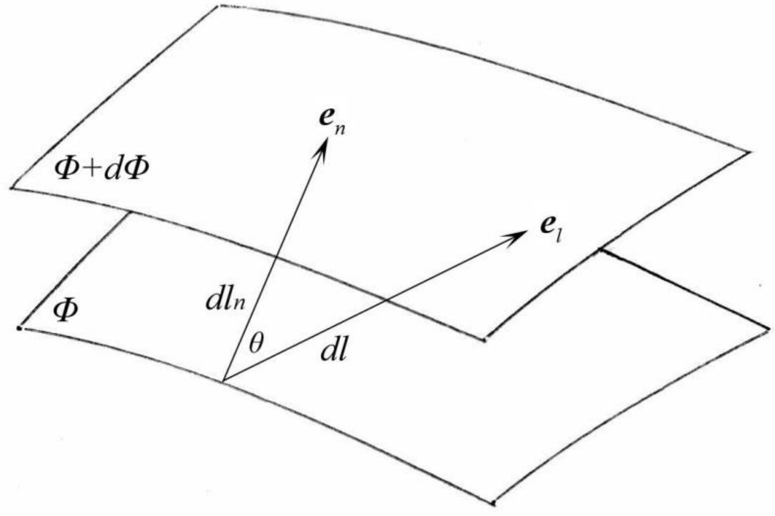
定义：标量（场）的梯度是一个矢量（场），表示某一点处标量场的变化率。

方向：指向标量增加率最大的方向（等值面的法 线方向）

数值：该方向上标量的增加率。



例如，静电场中，空间各点的电位Φ构成一个标量场，等位面Φ，Φ +*d* Φ，沿不同的方向， Φ的变化率不同，e_n为Φ增大方向等位面的法线矢量， e_l 为任意方向。可以看出： $dl\cos\theta = dl_n$



$$\frac{d\Phi}{dl} = \frac{d\Phi}{dl_n} \cdot \cos\theta$$

沿e_n方向，*Φ* 的变化率最大。

$$\boxed{\therefore \quad \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial l_n}\boldsymbol{e}_n}$$

梯度的表达式

（1）直角坐标系

$$\boxed{\nabla u=(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z})u=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}}$$

（2）圆柱坐标系

$$\boxed{\nabla u=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial u}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}}$$

（3）球坐标系

$$\boxed{\nabla u=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial u}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}}$$

梯度的一个重要性质（梯无旋）

$$\boxed{\nabla\times\nabla u = 0}$$

根据这一性质，若一矢量场的旋度处处为0，则可以引入标量位。

静电场中，
$$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi}$$

1.6 亥姆霍兹定理

一个矢量场由它的散度和旋度唯一地 确定，且可以被表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和。即

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) + \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_c}$$

其中，

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

该定理表明任一矢量场均可表示为一个无旋场$\mathrm{F_d}$与一个无散场$\mathrm{F_c}$之和。

所以，研究一个矢量场，必须研究它的**散度**和**旋度**，才能确定该矢量场的性质。

例：静电场 $\oiint_s \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\sum q_0$ $\quad\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_0$ 有源

$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$ $\quad\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ 无旋

稳恒磁场 $\oiint_s \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$ $\quad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 无源

$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum I_0$ $\quad\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$ 涡旋

1.7 微分算符

1. Hamilton 算符 ∇

直角坐标系

$$\boxed{\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}}$$

2. Laplacian算符 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$

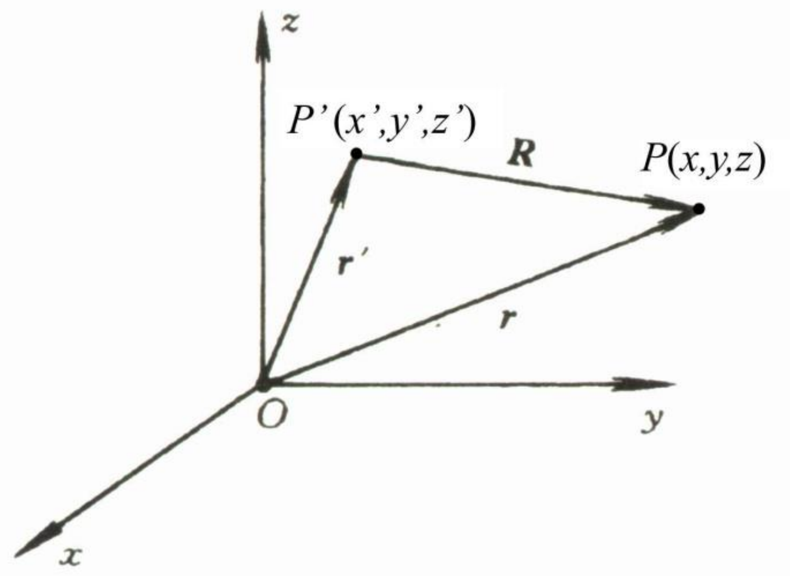
直角坐标系

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

郑州大学

例：距离矢量的微分

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$$



$$R = \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| = \left[\left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2 + \left(z - z'\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$ 对场点坐标微分

$$\nabla' = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$$ 对源点坐标微分

证明：

$$\boxed{\nabla R=-\nabla' R=\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\boldsymbol{e}_R}$$

解：

$$\nabla R=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial R}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial R}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial R}{\partial z}=\boldsymbol{e}_x\frac{x-x'}{R}+\boldsymbol{e}_y\frac{y-y'}{R}+\boldsymbol{e}_z\frac{z-z'}{R}$$

$$=\frac{1}{R}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\boldsymbol{e}_R$$

$$\nabla' R=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial R}{\partial x'}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial R}{\partial y'}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial R}{\partial z'}=-\boldsymbol{e}_x\frac{x-x'}{R}-\boldsymbol{e}_y\frac{y-y'}{R}-\boldsymbol{e}_z\frac{z-z'}{R}$$

$$=-\frac{1}{R}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=-\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\boldsymbol{e}_R=-\nabla R$$

同理，

$$\boxed{\nabla\frac{1}{R}=-\nabla'\frac{1}{R}=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=-\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}}$$