1.2 概率 （Probability）

概念：给定一个试验及其样本空间 Ω, 概率的目标是对每一个事件 A 分配一个数 $P(A)$（唯一的），称为事件 A 的概率， 如果 $P(A)$ 满足如下**三个公理：**

公理 1: 对任意事件 A, $P(A) \geq 0$; 非负性

公理 2: 对必然事件 S或(Ω), $P(\Omega) = 1$. 规范性

公理 3: 对于互不相容的可数无穷多个事件 $A_1, A_2, \ldots$,

有$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ 可数可加性

概率是事件A发生的机会或几率的一个准确测度或测量

概率的含义:

- 三条公理并没有确定一个事件对应概率的方法（如何计算概率）
- 一个最常用和最容易理解的用来解释概率的概念就是相对频率(relative frequency)。

考虑一个可以在相同条件且相对独立情形下重复进行的试验。 令 A 表示由该试验的某些固定结果构成的事件.

如：投针、掷骰子、抛硬币

假定试验进行了 n 次, 其中事件 A 发生了n_A次

事件 A 在这n 次试验中发生的相对频率: $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$

满足如下条件:

1: 对任意事件 A, $0 \le f_n(A) \le 1$;

2: 对必然事件 S(或Ω), $f_n(S)=1$.

3: 若事件A, B互不相容, 则 $f_n(A \cup B)=f_n(A)+f_n(B)$

例 1: 考虑抛硬币试验,记录正面(H)朝上的次数.硬币分别抛5 次, 50 次, 和 500 次.独立将上述试验重复进行10次.

Experiment ID	$n = 5$			$n = 50$			$n = 500$		
	n_H	$F_n(H)$	$\lvert F_n(H)$-0.5$\rvert$	n_H	$F_n(H)$	$\lvert F_n(H)$-0.5$\rvert$	n_H	$F_n(H)$	$\lvert F_n(H)$-0.5$\rvert$
1	2	0.4	0.1	22	0.44	0.06	251	0.502	0.002
2	3	0.6	0.1	25	0.50	0.00	249	0.498	0.002
3	1	0.2	0.3	21	0.42	0.08	256	0.512	0.012
4	5	1.0	0.5	25	0.50	0.00	253	0.506	0.006
5	1	0.2	0.3	24	0.48	0.02	251	0.502	0.002
6	2	0.4	0.1	21	0.42	0.08	246	0.492	0.008
7	4	0.8	0.3	18	0.36	0.14	244	0.488	0.012
8	2	0.6	0.1	24	0.48	0.02	258	0.516	0.016
9	3	0.6	0.1	27	0.54	0.06	262	0.524	0.024
10	3	0.6	0.1	31	0.62	0.12	247	0.494	0.006

The first column ($n = 5$) shows how the relative frequency n_H/n fluctuates rather substantially over the course of the first 5 replications.

But as the number of replications continues to increase, see the third column for $n = 500$, the relative frequency stabilizes.

Empirical(经验的) evidence, based on the results of many such repeatable experiments, indicates that any relative frequency of this sort will stabilize as n increases.

That is, as n gets arbitrarily large, n_A/n approaches a limiting value (in probability 1) referred to as the limiting (or long-run) relative frequency of the event A.

概率的性质:

性质 1：$P(\emptyset)=0$， 这里 $\emptyset$ 为空事件、或不可能事件

注1： 不可能 事件的概率为 0， 但是其逆命题不一定成立。

性质 2: **若** $A_1, A_2, \dots, A_k$ 为两两互不相容事件, 则有

$$P\left(\cup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

或 $P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)$

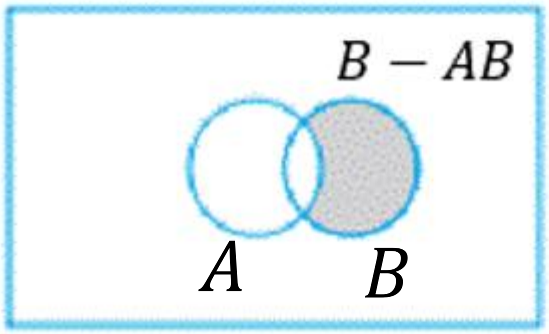
注2： 有限可加性

注3： 事件并（和）的概率等于其概率的和. **错误**

注4： 互不相容事件的和的概率等于其概率的和. **正确**

性质 3：设A，B为两个事件，则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

证明：由于 $AB\subset B$，且 $B=AB\cup(B-A)$，



而 $AB\cap(B-A)=\emptyset$， $AB, B-A$ 互斥

故有 $P(B)=P(AB)+P(B-A)$，

即 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

思考 $P(A-B)=$？？ $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

性质 3'：设 A 和 B 为两个事件，如果 $A\subset B$，则

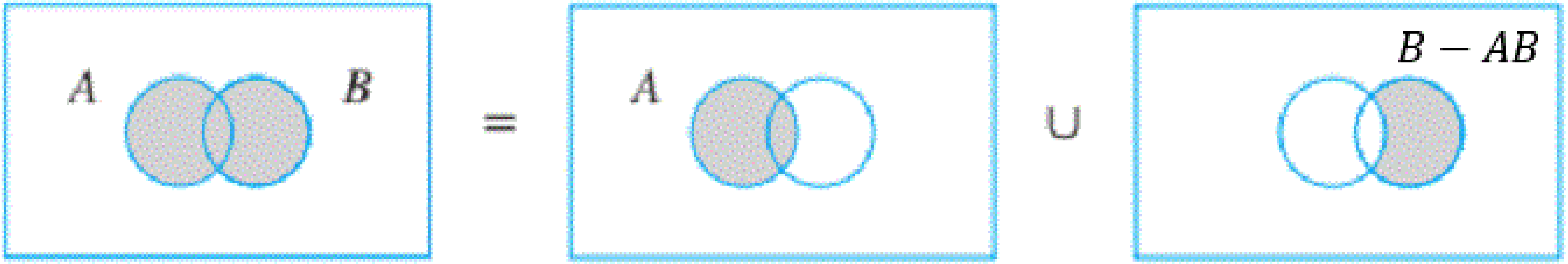
$P(B-A)=P(B)-P(A)$ 且 $P(B)\geq P(A)$.

性质 4：对任意事件A，$P(A) \le 1$.

性质 5：对任意事件 A，$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

性质 6：对任意两事件 A 和 B，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



$$A \cup B = A \cup (B - A), \quad A \cap (B - A) = \emptyset$$

故 $\mathrm{P}(A \cup B) = P\big(A \cup (B - A)\big) = P(A) + P(B - A)$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

性质 7：对任意三个事件 A, B 和 C,

$$P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

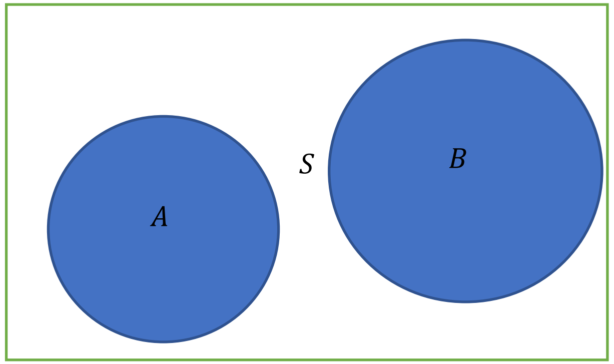
一般地, 对任意 n 个事件, $A_1, A_2, \dots, A_n$,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

注：奇数个事件，符号为正；
偶数个事件，符号为负

例 1：设事件A 和 B 互不相容，相应的概率分别为 $P(A) = 0.4$， $P(B) = 0.5$. 计算 $P(\bar{A})$，$P(\bar{B})$，$P(AB)$，$P(A \cup B)$，$P(\bar{A}B)$,$P(\bar{A}\bar{B})$，$P(\overline{AB})$, 及 $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

解:



$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.6,$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.5,$

$AB = \emptyset$, so $P(AB) = 0,$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.9,$

$P(\bar{A}B) = P(B - A) = P(B) - P(AB) = P(B) = 0.5,$

$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.1,$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(AB) = 1.$

$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1$

例 2：设A 和B为两事件， $P(A)=0.5$， $P(B)=0.3, P(AB)=0.1$.
求：
（1） A 发生 B 不发生的概率
（2） A 不发生 B 发生的概率
（3） 至少有一个事件发生的概率
（4） 都不发生的概率
（5） 至少有一个事件不发生的概率

解 (1) $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.4$;

(2) $P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.2$;

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.3-0.1=0.7$;

(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$;

(5) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9$.

古典概型（等可能事件）

考虑掷骰子（质地均匀）的试验：1-6 点出现的概率应该是相同的。直觉告诉我们, 每一个面出现的概率是 1/6.

事实上，由概率的3个公理:

$1 = P(S)$

$= P(\{1,2,3,4,5,6\}) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\})$

$= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$

如果所有的 $P(\{j\})$ 相同，那么，$1 = 6P(\{j\})$, 则, $P(\{j\}) = 1/6$ 对每一个j

出现奇数（odd）点的概率是:

$P(\{1,3,5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$

定义 1.4 若随机试验 E 满足以下条件:

1° 试验的样本空间 Ω 只有有限个样本点,即

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\};$$

2° 试验中每个基本事件的发生是等可能的,即

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}),$$

则称此试验为古典概型,或称为等可能概型.

得到古典概型中事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}},$$

称古典概型中事件 A 的概率为古典概率.

一般地，可利用排列、组合、乘法原理、加法原理来计算上式中的 k,n，再计算相应的概率。

例 3. 将一枚硬币连续抛3 次

A_1: 恰好出现一次正面. A_2: 至少出现一次正面.

计算 $P(A_1), P(A_2)$.

解: 样本空间为

$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$A_1 = \{ HTT, THT, TTH\}$;

$A_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$

So, $P(A_1) = \frac{3}{8}$, $P(A_2) = \frac{7}{8}$.

当样本空间的元素较多时，我们一般不再将 Ω 中的元素一一列出，而只需分别求出 Ω 中与 A 中包含的元素的个数（即基本事件的个数），再求出 A 的概率.

排列 (Permutation) & 组合(Combination)

m 的阶乘: $m! = m \times (m-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$

特别地 $1! = 1,\quad 0! = 1.$

有用的公式

$$\boldsymbol{P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!};}$$

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!};}$$

$$\boldsymbol{C_n^k = C_n^{n-k}}$$

例 1.6 一口袋装有6只球，其中4只白球，2只红球.从袋中取球两次，每次随机地取一只.考虑两种取球方式：

(a) 第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再任取一球.这种取球方式叫做有放回抽取.

(b) 第一次取一球后不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球.这种取球方式叫做不放回抽取.

试分别就上面两种情形求：

(1) 取到的两只球都是白球的概率；

(2) 取到的两只球颜色相同的概率；

(3) 取到的两只球中至少有一只是白球的概率.

4只白球，2只红球

解：令事件 A：“两个球都是白球”，

B：“两个球都是红球”；　$A\cup B=?$，　$A\cap B=?$　$\bar{B}=?$

C：“至少一只白球”.

$A\cup B$ “两只球的颜色相同”；$A\cap B=\emptyset$；　$\bar{B}=C$，

	有放回	无放回
样本空间元素个数:	$6\times 6=36$	$6\times 5=30$
A中元素个数:	$4\times 4=16$	$4\times 3=12$
$P(A)=$	$\frac{4\times 4}{6\times 6}=\frac{4}{9}$	$\frac{4\times 3}{6\times 5}=\frac{2}{5}$

	有放回	无放回
样本空间容量:	$6 \times 6 = 36$	$6 \times 5 = 30$
B 的容量:	$2 \times 2 = 4$	$2 \times 1 = 2$
$P(B) =$	$\frac{2 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{9}$	$\frac{2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{1}{15}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$	$\frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$
$P(C) = 1 - P(B)$	$1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$	$1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$

例 5: 将 n 个不同的小球随机放入 N $(N \geq n)$ 个盒子中.

求每个盒子里最多有1个球的概率(假定每个盒子能容纳所有的小球).

解析: 任务将 n 个不同的小球随机放入 N 个盒子中，可以分为 n 步:

每一步（每个小球）都有 N 种方法. 样本空间的容量为

$$\underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{n \text{ times}} = N^n. \text{(乘法原理)}$$

事件A：每个盒子里最多有1个球，分两步:

（1）：从N个盒子中抽出n个盒子，共有 C_N^n 种不同的方法

（2）：每个盒子放入一个球，共有 $n!$ 种不同的方法

故A 的样本点的容量为 $n!\,C_N^n$. 所求概率为

$$P(A) = \frac{n!\,C_N^n}{N^n} = \frac{P_N^n}{N^n}$$

很多问题都具有和上述问题相同的数学模型. 例如，生日问题，假定每个人出生在一年365天中每一天的概率都是1/365.

n （$n \le 365$）个人生日各不相同的概率是

$$\frac{P_{365}^{n}}{365^{n}} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)}{365^{n}}$$

n 个人中至少有两个人生日相同（每个人的生日互不相同的反面）

$$p = 1 - \frac{P_{365}^{n}}{365^{n}} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)}{365^{n}}.$$

n	20	23	30	40	50	64	100
p	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.999 999 7

例 6: N 件产品中有 D件次品. 从中随机抽取 n 个产品.
计算恰有 k 个次品的概率.

解: 样本空间 S 的容量: C_N^n (Combination).
令事件 A: 恰有 k 件次品：分两步
step 1： 在D件次品中抽出k 件： C_D^k 种不同的方法;
step 2： 在$N-D$ 正品中随机抽取 $n-k$ 件： C_{N-D}^{n-k}种不同的方法
A 含有的样本点数： $C_D^k C_{N-D}^{n-k}$.

故 A 的概率是：
$$P(A) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

例 7: 一个盒子中有 $a+b$ 个球, 其中 蓝球 a 个, 红球b 个. 依次从中抽取k个球。求 (1) 若是有放回抽样, 求第 i 个人抽到红球的概率

(2) 若是不放回抽样, 求第 i 个人抽到红球的概率

解: 令 A 表示第 k个人抽到红球

情形 (1): 有放回抽样, 每次抽球情况一样 故 $P(A)=\frac{b}{a+b}$.

情形 (2): 无放回抽样: 样本空间容量

$$|S|=(a+b)(a+b-1)\cdots[a+b-(i-1)]\ [a+b-i]\ \cdots\ (a+b-(k-1)]$$

为了使第 k 次抽到红球（设为事件 A）, 先选择一个红球($C_b^1=b$ 种方法), 其他 $k-1$ 次任意从 $a+b-1$ 中抽取一个球.

事件 A 的容量

$$(a+b-1)(a+b-2)\cdots[(a+b-(i-1)]\ b\ (a+b-i)\cdots\ [a+b-(k-1)]$$

所以 $P(A)=\dfrac{b}{a+b}$

抓阄问题: 如跑道抽取; 刮彩票等都是公平的

例 8: 一个盒子中有 $a+b$ 个球, 其中 蓝球 a 个, 红球 b 个. 现做不放回抽样, 每次取一只。求

(1) 任取 $m+n$ 只球, 恰有m 只蓝球和n只红球的概率, $m \le a, n \le b$;

(2) 第 k 次才取到蓝球的概率 ($k \le b+1$)

(3) 第 k 次恰取到蓝球的概率 ($k \le a+b$)

解:

$$P_1 = \frac{C_a^m C_b^n}{C_{a+b}^{m+n}};$$

$$P_2 = \frac{P_b^{k-1} P_a^1}{P_{a+b}^k};$$

$$P_3 = \frac{P_{a+b-1}^{k-1} P_a^1}{P_{a+b}^k} = \frac{a}{a+b};$$

例 1.9 12 名新生中有 3 名优秀生，将他们随机地平均分配到 3 个班中去，试求：

(1) 每班各分配到一名优秀生的概率；

(2) 3 名优秀生分配到同一个班的概率.

解 12 名新生平均分配到 3 个班的可能分法总数为 $C_{12}^4C_8^4C_4^4=\dfrac{12!}{(4!)^3}$.

(1) 设 A 表示"每班各分配到一名优秀生". 3 名优秀生每一个班分配一名共有 3!种

其他 9 名学生平均分配到 3 个班共有 $\dfrac{9!}{(3!)^3}$ 种分法　A 的容量　$3!\cdot\dfrac{9!}{(3!)^3}=\dfrac{9!}{(3!)^2}$.

$$P(A)=\frac{9!}{(3!)^2}\Big/\frac{12!}{(4!)^3}=\frac{16}{55}.$$

(2) 设 B 表示"3 名优秀生分到同一班". 3 名优秀生分到同一班共有 3 种分法，

其他 9 名学生分法总数为 $C_9^1C_8^4C_4^4=\dfrac{9!}{1!\cdot 4!\cdot 4!}$,

$$P(B)=\frac{3\cdot 9!}{(4!)^2}\Big/\frac{12!}{(4!)^3}=\frac{3}{55}.$$

几何概型

古典概型中样本空间中样本点为有限个，如果试验结果有无穷多个，则不是古典概型。

设试验具有以下特点：

1°　样本空间 Ω 是一个几何区域，这个区域大小可以度量（如长度、面积、体积等），并把 Ω 的度量记作 $m(\Omega)$.

2°　向区域 Ω 内任意投掷一个点，落在区域内任一个点处都是"等可能的". 或者设落在 Ω 中的区域 A 内的可能性与 A 的度量 $m(A)$ 成正比，与 A 的位置和形状无关.

事件 A 的概率 $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$，称它为几何概率

什么是无穷大？

无穷大是否有大小？

自然数集、整数集、偶数集、奇数集、有理数集，哪个集合含有的元素多？

一样多！

什么是可数的无穷？

什么是不可数的无穷？

无穷是否有大小?

- 可数集合（可列集）：如自然数集，整数集，有理数集对应的基数被定义为阿列夫0 (ℵ)，他们含有的元素为可数无穷(countable infinite)，相等的。能与自然数集建立一一对应关系。

- 不可数集合：比可数集合“大”的称之为不可数集合，如实数集，其基数与自然数的幂集相同。

无穷是否有大小？

- 集合论中对无穷有不同的定义。
- 德国数学家康托尔提出，对应于不同无穷集合的元素的个数(基数)，有不同的“无穷”。
- 比较不同的无穷的“大小”的时候唯一的办法就是通过是否可以建立“一一对应关系”来判断
- 抛弃了欧几里得“整体大于部分”的看法。
- 例如整数集和自然数集由于可以建立一一对应的关系，它们就具有相同的无穷基数。

例 9: 从闭区间 $[0, 2]$ 中随机抽取一点

事件A_1: 这个点落在闭区间 $[0,1]$, 则 $P(\mathrm{A}_1) =$ 0.5

事件A_2: 这个点落在开区间 $(0, 1)$,则 $P(\mathrm{A}_2) =$ 0.5

事件A_3: 这个点落在开区间 $(0, 2)$, 则 $P(\mathrm{A}_3) =$ 1

问： A_3是必然事件吗？？ 不是！！ However, 其概率为1

事件A_4: 这个点是 0, 或 1， 甚至任意有理数， 则 $P(\mathrm{A}_4) =$ 0

问： A_4 是不可能事件吗？？ 不是！！ However, 其概率为 0

概率为 0 的事件一般称为零概率事件， 或几乎不可能 事件

概率为 1 的事件一般称为1概率事件， 或几乎必然事件

例 10: 在区间 $(0,1)$ 中随机抽取两个点，求两个点的坐标乘积小于1/4 的概率.

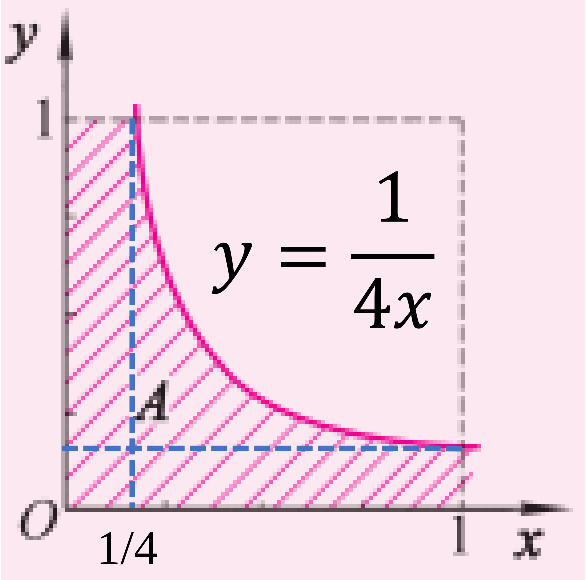
解: 令 x,y 分别表示两个点的坐标，则有

$0 < x < 1,\ 0 < y < 1.$

样本空间的面积等于 1.

令 A :"两个点的坐标小于 $\frac{1}{4}$"

则 $A = \left\{(x,y)|0 < xy < \frac{1}{4}, 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\right\}$;



$$A\text{的面积} = 1 \times \frac{1}{4} + \int_{1/4}^{1} \frac{1}{4x} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ln x \Big|_{\frac{1}{4}}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

所以, $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

例 11: 两人相约在某天下午 2:00—3:00 在预定地点见面，先到者要等候 20 min，过时则离去. 如果每人在这指定的 1 h 内任一时刻到达是等可能的，求约会的两人能会到面的概率.

解 设 x,y 为两人到达预定地点的时刻，那么，两人到达时间的一切可能结果落在边长为 60 的正方形内，这个正方形就是样本空间 Ω，而两人能会面的充要条件是 $|x-y|\leqslant 20$，即

$$x-y\leqslant 20 \quad 且 \quad y-x\leqslant 20.$$

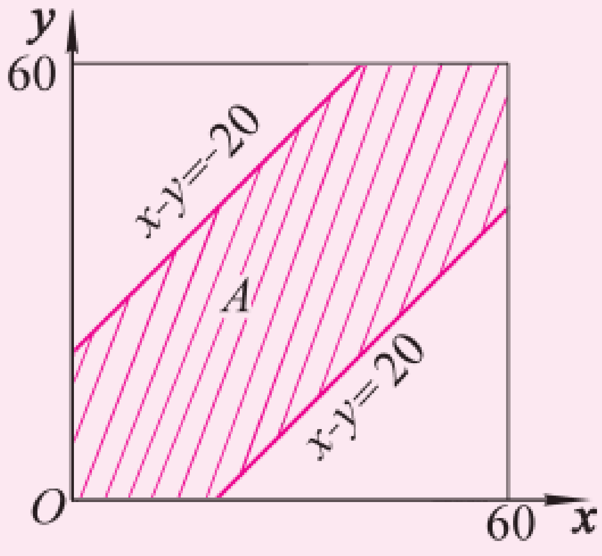


图 1 - 8

令事件 A 表示“两人能会到面”，这区域如图 1 - 8 中的 A，则

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$