《复变函数与积分变换》
考试样题的答题规范及相关说明

＊ 免责声明：答案不保证绝对正确，请同学们自行验证。

一、单选题

1、 D 2、 C 3、 D 4、 D 5、 A

6、 D 7、 B 8、 A 9、 C 10、 B

二、填空题

1、 2

2、 $2-2\sqrt{3}\,i$

3、 -1

4、 $\frac{e-e^{-1}}{2}i$

5、 0

6、 i

7、 $-\pi i$

8、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9、 -3

10、 $\frac{\beta}{\beta^2+4}+\frac{2}{\beta^2+4}i$

＊ 建议同学们按上面答案格式将选择题和填空题统一写在答题册的第一面，计算题则从答题册的第二面开始写。选择和填空的题号要写清楚，如果没写题号则判卷时默认按从左到右和从上到下的顺序编号，其中被涂掉或划掉的答案默认跳过不计。

三、计算题

1、解：$\left(\sqrt{3}-i\right)^{1+2i}=e^{(1+2i)Ln\left(\sqrt{3}-i\right)}$

$$=e^{(1+2i)\left(\ln\left|\sqrt{3}-i\right|+i\left(\arg\left(\sqrt{3}-i\right)+2k\pi\right)\right)}$$

$$=e^{(1+2i)\left(\ln 2+i\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)}$$

$$=e^{\ln 2+\frac{\pi}{3}-4k\pi+i\left(2\ln 2+2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=e^{\ln 2+\frac{\pi}{3}-4k\pi}\left(\cos\left(2\ln 2-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(2\ln 2-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）

2、解：先将 $u(x,y)$ 中的 y 视为变量，x 视为常数，利用柯西−黎曼方程计算 u 关于 y 的导数得：$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，

利用偏积分 $u=\int\frac{\partial u}{\partial y}dy=\int\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy=-\frac{x}{x^2+y^2}+g(x)$

再由 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ \Longrightarrow\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+g'(x)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \Longrightarrow\ g'(x)=0$

$\Longrightarrow g(x)=C$　带入前式得

$u(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2}+C$

3、解：$f(z)=\frac{e^z}{(z+i)(z-i)^3}$，函数在闭曲线内有一个一级极点$-i$，和一个三级极点 i，

由留数公式得：

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),-i]+2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),i]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to -i}(z+i)f(z)+2\pi i\lim_{z\to i}\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-i)^3f(z)\right)$$

$$=2\pi i\left.\frac{e^z}{(z-i)^3}\right|_{z=-i}+2\pi i\cdot\frac{1}{2}\left.\left(\frac{e^z}{z+i}\right)''\right|_{z=i}$$

$$=2\pi i\frac{e^{-i}}{(-2i)^3}+\pi i\left.\left(e^z\frac{1}{z+i}+2e^z\frac{-1}{(z+i)^2}+e^z\frac{2}{(z+i)^3}\right)\right|_{z=i}$$

$$=\frac{\pi(\cos(1)-\sin(1))}{2}+\frac{\pi\cos(1)}{2}i$$

4、解：设$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$，对每个方程两边同时做 Laplace 变换得：

$$\begin{cases} s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-s^2X(s)+sx(0)+x'(0)+sX(s)-x(0)-Y(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s} \\ 2s^2Y(s)-2sy(0)-2y'(0)-x^2X(s)+sx(0)+x'(0)-2sY(s)+2y(0)+X(s)=-\frac{1}{s^2} \end{cases}$$

整理得到 $\begin{cases}(s+1)Y(s)-sX(s)=\frac{-s+2}{s(s-1)^2}\\ 2sY(s)-(s+1)X(s)=\frac{-1}{s^2(s-1)}\end{cases}$

求解方程组得到相函数：$X(s)=\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}$，$Y(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}$

利用拉氏逆变换（反演公式）得到：

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=Res[X(s)e^{st},0]+\mathrm{Res}[X(s)e^{st},1]$$

$$=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}(s^2X(s)e^{st})+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}((s-1)^2X(s)e^{st})$$

$$=\left(\frac{(2s-1)e^{st}}{(s-1)^2}\right)'\bigg|_{s=0}+\left(\frac{(2s-1)e^{st}}{s^2}\right)'\bigg|_{s=1}$$

$$=\left(\frac{2e^{st}+(2s-1)te^{st}}{(s-1)^2}+\frac{(2s-1)e^{st}(-2)}{(s-1)^3}\right)\bigg|_{s=0}+\left(\frac{2e^{st}+(2s-1)te^{st}}{s^2}+\frac{(2s-1)e^{st}(-2)}{s^3}\right)\bigg|_{s=1}$$

$$=-t+te^t$$

同理，$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=Res[Y(s)e^{st},0]+\mathrm{Res}[Y(s)e^{st},1]$

$$=\lim_{s\to 0}sY(s)e^{st}+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}((s-1)^2Y(s)e^{st})$$

$$=\frac{e^{st}}{(s-1)^2}\bigg|_{s=0}+\left(\frac{te^{st}}{s}+\frac{e^{st}(-1)}{s^2}\right)\bigg|_{s=1}=1+te^t-e^t$$

*　考试范围：第 6 章和第 9 章不讲也不考；第 2 章初等函数中反三角、双曲与反双曲函数不考；第 5 章只考 1、2 节内容；第 7 章只考 1、2 节内容；第 8 章主要考察 Laplace 变换在求解微分方程中的用法，同学们只要求记忆几个常用初等函数比如常数、幂函数 t^n、指数函数 e^{at} 的 Laplace 变换，然后是熟悉 Laplace 变换的基本性质、反演公式（逆变换）的用法以及留数的计算。

以上除了明确不考的内容，其余内容均在考试范围内，详见《课程知识点和复习大纲》。除了最后一个计算题的考点固定外（Laplace 变换解微分方程），其余考点和问法以及小题的分值可能会有所调整，比如计算题变填空题或者选择题变计算题等等，此样卷仅供提示和参考。因此请同学们务必全面复习，看书要细致，多做些书本上的基础练习，正确理解概念，掌握计算方法最重要。

*　关于判卷和答题：判卷原则上采用“标准答案，踩点得分”的方式，因此试卷中许多题目设有具体作答要求，请同学们规范作答。比如题目要求答案化简形式为“ $x+iy$ ”，那么将答案 i 写成 $-\frac{1}{i}$ 会直接判错，甚至将 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ 写成 $\frac{1+2i}{3}$ 或者 $\frac{1}{3}(1+2i)$ 也可能被判错。由于试卷已有明确说明，上述不按规范作答而导致判错，阅卷老师概不负责，请同学们悉知。

对于计算题，基本要求是关键步骤（得分点）完整，关键步骤必须清晰地写出来（以样题中的写法为例），字迹工整书写规范。判卷时，学生的卷面内容将逐行与标准答案核对，如果某个关键步骤写错或者漏写，这一步骤的分值就扣掉，这就是所谓“踩点判分”的原则。

*　本课程考试无需计算器。