更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺“大学生数学竞赛学习交流” 更多视频请在B站或优酷关注UP主“夜雨教你数学竞赛”

第四讲：中值问题 > 罗尔定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $(b-a)f'(\xi)=f(\frac{a+b}{2})$

常数K值法

考虑 $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$ 的情形

$$(b-a)K=f(\frac{a+b}{2})\xrightarrow{\text{将 }b\text{ 换成 }x}(x-a)K=f(\frac{a+x}{2})\xrightarrow{\text{移项}}(x-a)K-f(\frac{a+x}{2})=0$$

构造函数 $G(x)=(x-a)K-f(\frac{a+x}{2})=\frac{x-a}{b-a}f(\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+x}{2})$

$G(a)=G(b)=0$

由罗尔定理存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $G'(\eta)=0\Rightarrow\frac{1}{b-a}f(\frac{a+b}{2})-\frac{1}{2}f'(\frac{a+\eta}{2})=0\Rightarrow f'(\frac{a+\eta}{2})=\frac{2}{b-a}f(\frac{a+b}{2})$

由罗尔定理存在 $\delta\in(a,b)$，使得 $f'(\delta)=0$

由达布定理存在 $\xi\in(a,\frac{a+\eta}{2})$，使得 $f'(\xi)=\frac{1}{b-a}f(\frac{a+b}{2})$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a，b]$ 上连续，在开区间 $(a，b)$ 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$

证明：存在 $\xi\in(a，b)$，使得 $(b-a)f'(\xi)=f(\frac{a+b}{2})$

考虑 $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$ 的情形

构造函数 $G(x)=\frac{x-a}{b-a}f(\frac{a+b}{2})-2f(\frac{a+x}{2})$

$G(a)=0$ $\quad G(b)=-f(\frac{a+b}{2})$ $\quad G(2b-a)=2f(\frac{a+b}{2})$

由零点定理存在 $\eta\in(b,2b-a)$，使得 $G(\eta)=0$

由罗尔定理存在 $\delta\in(a，\eta)$，使得 $G'(\delta)=0\Rightarrow\frac{1}{b-a}f(\frac{a+b}{2})-f'(\frac{a+\delta}{2})=0$

$a<\frac{a+\delta}{2}<\frac{a+2b-a}{2}$ $\quad$ 记 $\frac{a+\delta}{2}=\xi$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，且$f(a)=f(b)=0$

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$(b-a)f'(\xi)=f(\frac{a+b}{2})$

原函数法

考虑$f(\frac{a+b}{2})\neq 0$的情形

$$(b-a)f'(x)=f(\frac{a+b}{2})\xrightarrow{\text{两边积分}}(b-a)f(x)=xf(\frac{a+b}{2})+C\xrightarrow{\text{移项并除以}f(\frac{a+b}{2})}\frac{b-a}{f(\frac{a+b}{2})}f(x)-x=\frac{C}{f(\frac{a+b}{2})}$$

构造函数$G(x)=\dfrac{b-a}{f(\frac{a+b}{2})}f(x)-x$

$G(a)=-a\qquad G(\frac{a+b}{2})=\frac{b-a}{2}-a\qquad G(b)=-b\qquad G(b)<G(a)<G(\frac{a+b}{2})$

由介值定理存在$\eta\in(\frac{a+b}{2},b)$，使得$G(\eta)=G(a)$

由罗尔定理存在$\xi\in(a,\eta)$，使得$G'(\xi)=0$

夜雨教你数学竞赛

第四讲：中值问题 > 罗尔定理

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，且$f(a)=f(b)=0$

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$(b-a)f'(\xi)=f(\frac{a+b}{2})$

考虑$f(\frac{a+b}{2})\neq 0$的情形

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{b-a}{2}f'(\xi_1) \qquad a<\xi_1<\frac{a+b}{2}$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{a-b}{2}f'(\xi_2) \qquad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b$$

$$f'(\xi_1)=\frac{2}{b-a}f(\frac{a+b}{2}) \qquad f'(\xi_2)=-\frac{2}{b-a}f(\frac{a+b}{2})$$

由达布定理存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得$f'(\xi)=\frac{1}{b-a}f(\frac{a+b}{2})$

更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺“大学生数学竞赛学习交流” 更多视频请在B站或优酷关注UP主“夜雨教你数学竞赛”

第四讲：中值问题 > 柯西中值定理 > 两次利用的情形

设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导

证明：$\exists \xi \in (a, b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)} = \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

$T(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$　　　$T'(x) = f'(x) - f'(a)$

$S(x) = g(x) - g(a) - (x-a)g'(a)$　　　$S'(x) = g'(x) - g'(a)$

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)} = \frac{T(b)}{S(b)} = \frac{T(b)-T(a)}{S(b)-S(a)} = \frac{T'(\delta)}{S'(\delta)} = \frac{f'(\delta)-f'(a)}{g'(\delta)-g'(a)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

$a < \delta < b$　　　$a < \xi < \delta$

夜雨教你数学竞赛

第四讲：中值问题 > 柯西中值定理 > 两次利用的情形

设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导

证明：$\exists\xi\in(a, b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

常数K值法

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=K \xrightarrow{\text{将 b 换成 x}} \frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{g(x)-g(a)-(x-a)g'(a)}=K$$

$$\xrightarrow{\text{式子变形}} f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-K(g(x)-g(a)-(x-a)g'(a))=0$$

构造函数 $R(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-K(g(x)-g(a)-(x-a)g'(a))$

$R(a)=R(b)=0$

由罗尔定理 $\exists\delta\in(a, b)$，使得 $R'(\delta)=0 \Rightarrow f'(\delta)-f'(a)-K(g'(\delta)-g'(a))=0$

$$\Rightarrow \frac{f'(\delta)-f'(a)}{g'(\delta)-g'(a)}=K$$

夜雨教你数学竞赛

更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺“大学生数学竞赛学习交流” 更多视频请在B站或优酷关注UP主“夜雨教你数学竞赛”

第四讲：中值问题 > 柯西中值定理 > 两次利用的情形

设函数 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上三阶可导

证明：$\exists\xi\in(a，b)$，使得 $f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$

$$\frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))}{-\frac{1}{12}(b-a)^3}=f'''(\xi)$$

$$T(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)(f'(a)+f'(x)) \qquad S(x)=-\frac{1}{12}(x-a)^3$$

$$T'(x)=\frac{1}{2}(f'(x)-f'(a))-\frac{1}{2}(x-a)f''(x) \qquad S'(x)=-\frac{1}{4}(x-a)^2$$

$$T''(x)=-\frac{1}{2}(x-a)f'''(x) \qquad S''(x)=-\frac{1}{2}(x-a)$$

$$\frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))}{-\frac{1}{12}(b-a)^3}=\frac{T(b)}{S(b)}=\frac{T(b)-T(a)}{S(b)-S(a)}=\frac{T'(\delta)}{S'(\delta)}=\frac{T'(\delta)-T'(a)}{S'(\delta)-S'(a)}=\frac{T''(\xi)}{S''(\xi)}=f'''(\xi)$$

$a<\delta<b$ $\qquad$ $a<\xi<\delta$

夜雨教你数学竞赛

更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺"大学生数学竞赛学习交流" 更多视频请在B站或优酷关注UP主"夜雨教你数学竞赛"

第四讲：中值问题 > 柯西中值定理 > 两次利用的情形

设函数 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上三阶可导

证明：$\exists\xi\in(a，b)$，使得 $f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))-\frac{1}{12}(b-a)^3K$$

$$\xrightarrow{\text{将}b\text{换成}x\text{移项}} f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)(f'(a)+f'(x))+\frac{1}{12}(x-a)^3K=0$$

构造函数 $R(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)(f'(a)+f'(x))+\frac{1}{12}(x-a)^3K \qquad R(a)=R(b)=0$

由罗尔定理 $\exists\delta\in(a，b)$，使得 $R'(\delta)=0$

$$R'(x)=\frac{1}{2}(f'(x)-f'(a))-\frac{1}{2}(x-a)f''(x)+\frac{1}{4}(x-a)^2K \qquad R'(a)=0$$

由罗尔定理 $\exists\xi\in(a，\delta)$，使得 $R''(\xi)=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(\xi-a)f'''(\xi)+\frac{1}{2}(\xi-a)K=0$

$$\Rightarrow f'''(\xi)=K$$

夜雨教你数学竞赛