2018～ 2019 学年第一学期高等数学[(1)机电]
期中试卷参考答案及评分标准

一、填空题（本大题共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分）

(1) $[0,\tan 1]$	(2) $\frac{1}{1-x},x\neq 1$	(3) 2	(4) 0	(5) $e^{-\frac{1}{2}}$
(6) 1	(7) 高阶	**(8)** 2	**(9)** $x=0$	**(10)** 0
(11) $\cos x f'(1+\sin x)$	**(12)** $\cos(x+\frac{n\pi}{2})$	**(13)** $\frac{1}{f''(t)}$	（**14**）$x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$	（**15**）$\frac{2e}{1+e}dx$
（**16**）$\frac{2}{2-\cos x}$	（**17**）$\frac{1}{\ln 2}-1$	（**18**）$(\frac{2}{3},\frac{2}{3}e^{-2})$	（**19**）$\frac{1}{2}$	（**20**）2

二、求解下列各题（本大题共 6 小题，每小题 8 分，共 48 分）

（**21**）解：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x-x}{x^2}$ （**3** 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^x}{2}$ （**4** 分）

$=\frac{3}{2}$ （**1** 分）

(22) 解:因为 $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 在 $x=1,x=2$ 无定义，所以 $x=1,x=2$ 是该函数的间断点。（**2** 分）

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=-2$，所以 $x=1$ 是可去间断点，属于第一类间断点；（**3** 分）

因为 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$，所以 $x=2$ 是无穷间断点，属于第二类间断点。（**3** 分）

(23) 解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}|\sin x|=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\sin x)=0$， $\lim\limits_{x\to 0^+}|\sin x|=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$，

得 $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0=|\sin 0|$，所以 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 连续。（**4** 分）

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{-\sin x}{x})=-1$， $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{\sin x}{x})=1$，

得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0}$ 不存在，所以 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 不可导。（**4** 分）

（24）解： 在方程$e^y+xy=e$两边同时对x求导，得

$y'e^y+y+xy'=0$， $y'=\dfrac{-y}{x+e^y}$， （**2** 分）

$y''=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{-y}{x+e^y})=\dfrac{-y'(x+e^y)-(-y)(1+e^y\cdot y')}{(x+e^y)^2}$， （**3** 分）

当$x=0$时，由方程$e^y+xy=e$得$y=1$，得$y'(0)=-\dfrac{1}{e},y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$ （**3** 分）

（25）解： 设利润为s，则

$s=(x-40)n=(x-40)[\dfrac{a}{x-40}+b(80-x)]=a+b(40-x)(80-x),x>0$， （**3** 分）

令$\dfrac{ds}{dx}=-b(80-x)-b(40-x)=-b(120-2x)=0$，得唯一驻点$x=60$。 （**3** 分）

由问题的实际意义知存在最大利润，所以最大值点即为$x=60$，因此，

当销售价格为 60 元时，利润最大。 （**2** 分）

（26）解：$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}},y''=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$， （**2** 分）

1）令$y'=0$得$x=0$，由于$y'>0(x<0),y'<0(x>0)$，所以函数的

单增区间为在$(-\infty,0]$，单减区间为$[0,+\infty)$； （**2** 分）

2）$x=0$为极大值点，极大值为$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$； （**1** 分）

3）令$y''=0$得$x=-1,\ 1$，

由于$y''>0(x<-1或x>1),y''<0(-1<x<1)$, 所以函数的

凸区间为在$[-1,1]$，凹区间为$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$； （**2** 分）

4）因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$，所以曲线$y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$有水平渐近线$y=0$。 （**1** 分）

三、证明题（本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

（**27**）证 设 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$,（**1** 分）

则 $f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2=\dfrac{\cos^3 x+1-2\cos^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x(\cos x-1)+1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x-\cos^2 x)}{\cos^2 x}>0,\ \ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$,（**3** 分）

又 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 上连续,（**1** 分）

所以 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 单增, 故当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $f(x)>f(0)=0$。（**1** 分）

（**28**）证 设 $\varphi(x)=e^x f(x)$,（**3** 分）

则由已知 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可导，得 $\varphi(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上连续，在区间 (x_1,x_2) 可导，

再由已知 $f(x_1)=f(x_2)=0$，得 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$，（**2** 分）

根据罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)+f(\xi)=0$。（**1** 分）