连续型随机变量 (r.v.)（Continuous Random Variable ）

1. 定义及性质.

2. 几种重要的连续型随机变量

4. 标准正态分布的应用 (Applications of standard normal distribution ）

5. 连续型随机变量函数的分布.

定义: 一个随机变量是连续型的，如果以下两个条件成立:

1. 取值包含在某个区间内所有的点(*有限区间，或无限区间*)，或者不相交区间的并内所有的点.(如 $[0, 10] \cup [20, 30)$)

2. 没有一个任何值的概率为正，即对任意常数 c，$P(X = c) = 0$

注.

1. 连续型随机变量取值连续地充满某个区间、某些区间、甚至整个数轴.

2. X 可以是等待时间、被随机抽取的某个人的高度、元件的寿命等等

离散型 VS 连续型

1. **离散型** 意味着我们可以列举出所有可能的结果（或随机变量的取值，要么是有限个，要么是可数无穷个，可列的）

2. **连续型** 意味着随机变量连续地在某个区间取值，一般只能声明区间的起点和终点，不能一一列举出，$62.8 \le X < 67.0$.

连续型随机变量的概率计算是由概率密度函数（probability density function）得到的，简写为“pdf”，或者仅仅称为密度函数（density function）.

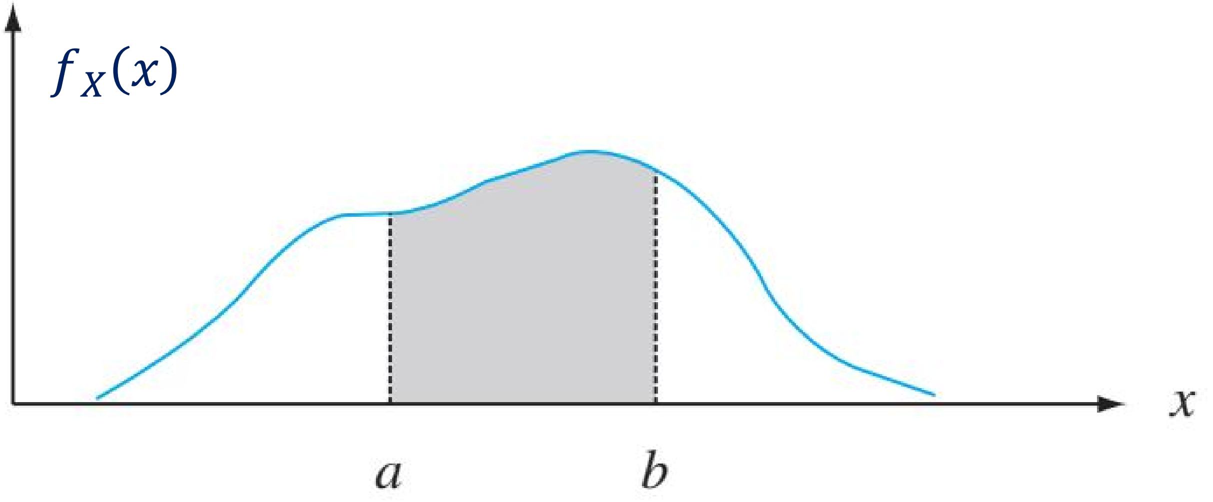
定义: **连续型随机变量X的概率密度**

设 X 是连续型随机变量， $f_X(x)$ 是其概率密度， 如果:

1. 密度函数总是非负的，即 $f_X(x) \geqslant 0$ 对所有的 $x \in R$.

2. $f_X(x)$ 从 a 到 b $(a \leq b)$积分，给出了事件 X 在a 和 b 之间的概率

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$



$P(a \leq X \leq b) =$ 密度曲线下介于 a, b 之间的面积

由密度函数计算概率，我们只需要将密度函数在某个区间或者范围内积分即可

例如，我们计算 X 在 3.2 和 5.82 之间的概率是在区间 [3.2, 5.82]

$$P(3.2 \le X \le 5.82) = \int_{3.2}^{5.82} f_X(x)dx.$$

性质1：密度函数在整个数轴上的积分等于 1

$-\infty < X < \infty$ 是一个 必然事件

故有 $P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

注: 对连续型随机变量 X, 对任意的实数c,　概率 $P(X\ = c)$ 等于 0

$$P(X = c) = P(c \leq X \leq c) = \int_c^c f_X(x)dx = 0$$

事件$X = \mathrm{c}$ 称为几乎不可能事件 (almost impossible), 没有必要是不可能事件（没有必要绝对不会发生）.

事件$X = \mathrm{c}$ 又称为零概率事件, 不是不可能事件.

当我们计算连续型随机变量概率的时候，考虑区间的端点与否是否影响计算结果?

No!!!

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)dx \qquad P(a \le X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f_X(x)dx \qquad P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

可以改变区间内任意有限个点处的函数值

任意一个在整个数轴上积分等于1的非负函数都可以作为某个连续型随机变量的密度函数.

如何构造一个连续型随机变量?

如果 $g(x)$ 是任意一个非负、可积的函数, 且 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$, 那么 $g(x)$ 是某连续型随机变量 X 的概率密度函数, 且

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b g(x)dx$$

思考1: 改变 $g(x)$ 在有限个点处的值(非负), 积分值是否改变? Never!

思考2 : 随机变量 X 的密度函数是否唯一? 不唯一

密度函数& 概率分布函数 Cumulative Distribution Function (CDF)

密度函数的累积函数（分布函数）： $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

密度函数是概率分布函数的导数（如果可导）： $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$

$F_X(x)$ 在哪些点处可导？ $f_X(x)$ 连续的地方可导

连续型随机变量的分布函数是处处连续的.

连续型随机变量的分布函数是几乎处处可导的

连续型随机变量(or 离散型随机变量) 的概率分布函数是唯一的

$F_X(x)$ 依然满足如下性质:

$$P(a < X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$

例: 设某连续型随机变量的分布函数如下

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$$

(1) 计算 A 的值

(2) 计算 X 在 0.3 和 0.7之间的概率

(3) 求 X 的一个密度函数.

解:

(1) 由于 $F_X(x)$ 处处连续, 那么

$$1=F_X(1)=\lim_{x\to 1-}F_X(x)=\lim_{x\to 1-}Ax^2=A$$

(2) $P(0.3\le X\le 0.7)=F_X(0.7)-F_X(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$

(3) $f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ or $=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

例: 假设某连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} kx, & 0 \le x < 3, \\ 2 - \dfrac{x}{2}, & 3 \le x \le 4, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(1) 求 k 的值

(2) 求 X 的分布函数 ,

(3) 计算 $P\left(1 \le X \le \frac{7}{2}\right)$.

解: (1) 由密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$, 我们有

$$\int_0^3 kxdx + \int_3^4 (2-\frac{x}{2})dx = 1,\ \text{得 } k = \frac{1}{6}.$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \le x < 3, \\ 2-\frac{x}{2}, & 3 \le x \le 4, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(2) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x \frac{t}{6}dt = \frac{x^2}{12}, & 0 \le x < 3, \\ \int_0^3 \frac{t}{6}dt + \int_3^x (2-\frac{t}{2})dt = -\frac{x^2}{4} + 2x - 3, & 3 \le x \le 4, \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

注 由于分布函数的连续性，端点处的等号放在哪边都行。可以和题目中的一致。要注意求导后函数是否有意义

(3) $$P\left(1 \le X \le \frac{7}{2}\right) = F_X\left(\frac{7}{2}\right) - F_X(1) = \frac{41}{48}.$$

几种常见的连续型随机变量

1: 均匀分布(Uniform distribution)

如果连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & 其他 \end{cases} \quad 或 \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

称 X 在区间 (a,b) 或 $[a,b]$ 上服从均匀分布。记为 $X \sim U(a,b)$.

若 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$

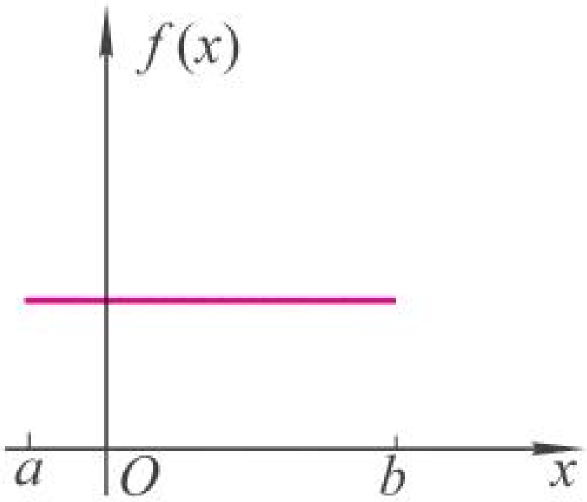
$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b,\\ 1, & x\ge b,\end{cases}$$

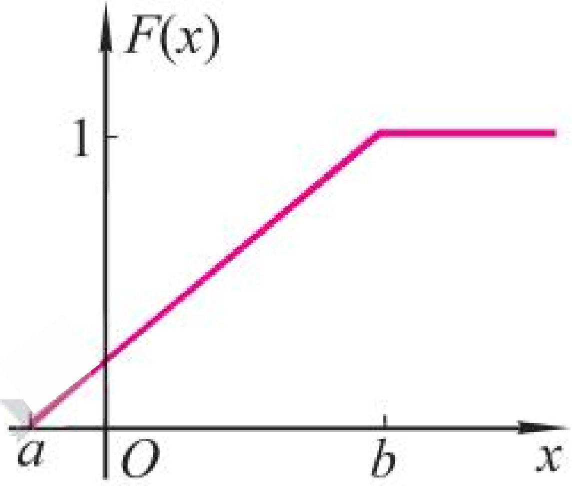
易知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=1$

$P(X\ge b)=0,\ P(X\le a)=0$

$P(a<X<b)=\ 1$

$$P(c<X<d)=\frac{d-c}{b-a}$$





因此，在区间(a,b)上服从均匀分布的随机变量 X 的物理意义是：X 以概率 1 在区间(a,b)内取值，而以概率 0 在区间(a,b)以外取值，并且 X 值落入(a,b)中任一子区间(c,d)中的概率与子区间的长度成正比，而与子区间的位置无关.

在数值计算中，由于四舍五入，小数点后第一位小数所引起的误差 X 一般可以看做是一个在 $[-0.5,0.5]$ 上服从均匀分布的随机变量；又如在 (a,b) 中随机掷质点，则该质点的坐标 X 一般也可看做是一个在 (a,b) 上服从均匀分布的随机变量.

例: 某公共汽车站早上 7:00 开始, 每15分钟来一辆汽车. 如果某乘客到达汽车站的时间是 7:00—7:30 之间服从均匀分布的随机变量。试求乘客等车少于5分钟的概率。

解: X 得密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{30}, & 0\le x\le 30\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

乘客恰在7:00,7:10-7:15或7:25-7:30赶到，等车时间少于5分钟

$$P(X=0)+P(10<X\le 15)+P(25<X\le 30)=\frac{1}{3}$$

2.指数分布 (Exponential distribution)

若随机变量 X 的密度函数为 $$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$，则称 X 服从参数为λ 的指数分布, 记作 $X\sim E(\lambda)$.

注: 不同于泊松分布 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots$

其中 $\lambda>0$ 通常指单位时间或面积上平均数.

显然, $f_X(x)$ 是非负的，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}=1.$$

分布函数: $$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

注: 指数分布的无记忆性. (memoryless property).

指数分布的一个重要应用就是可以对元件的寿命分布进行建模

假设某元件的寿命服从参数为�的指数分布. 当元件投入使用后,
我们离开s 小时后在回来发现元件依然在工作，那么，该元件还能
再工作t小时的概率是多少?

$$P(X>s+t|X>s)=\frac{P(X>s+t,\,X>s)}{P(X>s)}=\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}$$

$$=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P(X>t)$$

该条件概率等于无条件的概率：工作 s小时后能继续工作 小时，
和一开始就工作 t 小时，概率是一样的。
使用寿命长的元件，初期阶段老化现象小：剩余寿命分布和初始
寿命分布是一样的。

正态分布（Normal distribution）or 高斯分布

正态分布式概率论和数理统计中最重要的分布之一，在实际问题中，大量的随机变量服从或近似服从正态分布

例如：人的身高、体重、科技试验中测量误差、反应时间、考试成绩、以及其他大量的经济指标等。

定义：若连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

其中 $\mu, \sigma(\sigma > 0)$ 为常数, 称 X 服从参数为 μ, σ 正态分布

记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

注：用密度函数定义随机变量。

显然，密度函数是非负的，即 $f_X(x) \geq 0$.

下面证明 $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

令 $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ 则 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} d(\sigma t + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

令 $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$，

则 $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} dtds$

做极坐标变换 $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$, 则

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = 2\pi$$ 即有 $I = \sqrt{2\pi}$,

故有 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$

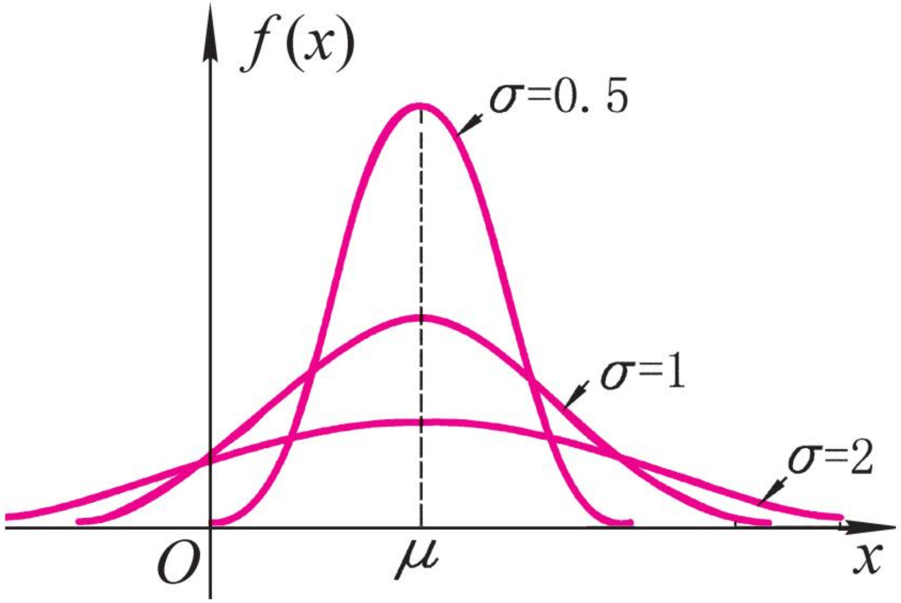
密度函数的性质

1. 正态分布的密度曲线 $f_X(x)$ 关于直线 $x=\mu$ 对称，像一个钟型.
2. $\boldsymbol{f_X(x)}$ 在 $x=\mu$ 处取得最大值，分别向两侧递减到0，渐近线x轴
3. 曲线在$\mu\pm\sigma$ 处有拐点：凹凸分界点；二阶导数变号；切线穿越曲线
4. σ 越小，曲线越窄，越高，越尖陡 σ 趋近于零时，会发生什么？
5. σ 越大，曲线越宽，越矮，越平坦

σ 趋近于零时，极限为狄拉克函数 $\delta(x)$

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx=f(x_0)$$



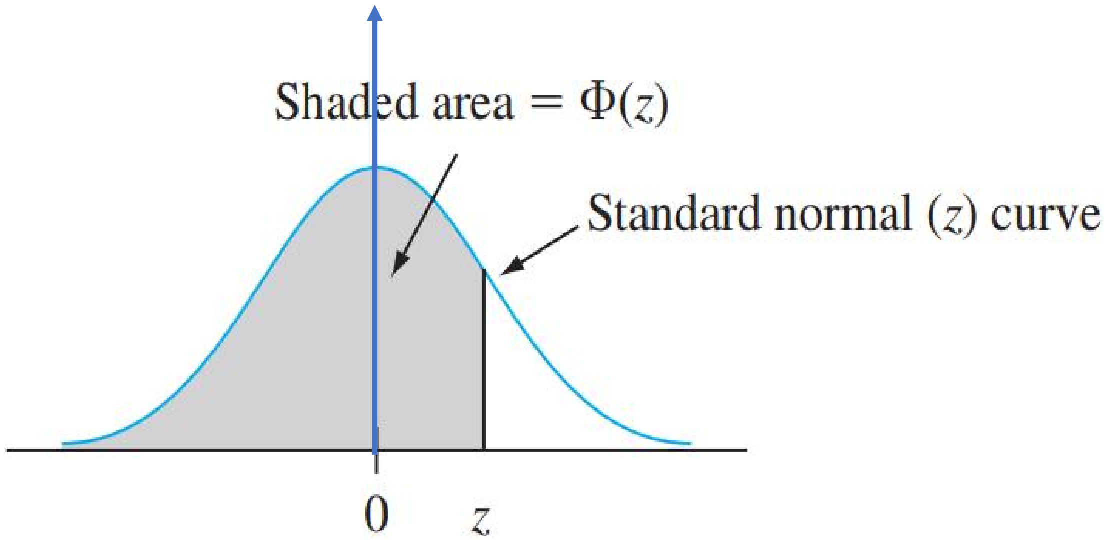
标准正态分布(The Standard Normal distribution)

当$\mu = 0, \sigma = 1$ 时，称该正态随机变量服从标准正态分布 .
记为 $Z \sim N(0, 1)$， 密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \ -\infty < z < \infty.$$

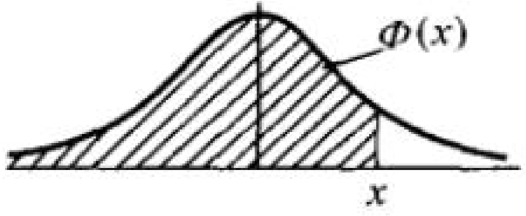
分布函数为:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$



$\Phi(0) = \ 0.5$ $\qquad \Phi(-z) = \ 1 - \Phi(z)$

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$



$\Phi(0.25) = 0.5987$

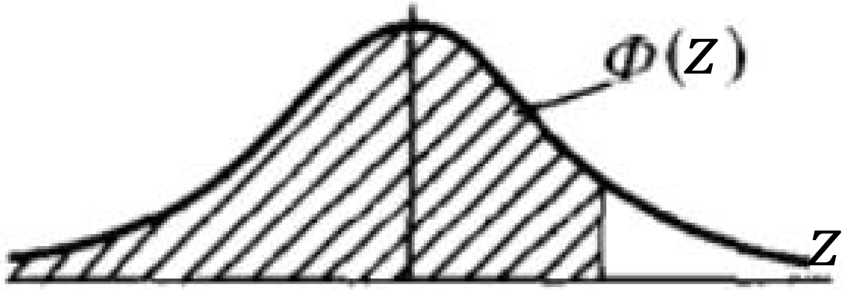
$\Phi(-0.25) = 0.4013$

$P(Z \le 1.05) = 0.8531$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$



$$P(-0.52 \leq Z < 1.04)$$
$$= \Phi(1.04) - \Phi(-0.52)$$
$$= \Phi(1.04) - 1 + \Phi(0.52)$$
$$= 0.8508 - 1 + 0.6985$$
$$= 0.5493$$

$$P(Z > 1.12)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.12)$$
$$= 1 - 0.8686$$
$$= 0.1314$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

一般地，如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 那么 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,\ 1)$

令 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(Z\le z)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le z\right)=P(X\le \sigma z+\mu)$$

$$=\int_{-\infty}^{\sigma z+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=}\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\quad=\Phi(z)$$

所以 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,\ 1)$, （称为对 X 的标准化）

如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 那么

$$P(a\le X\le b)=P(a-\mu\le X-\mu\le b-\mu)$$

$$=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\quad=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

例 若 $X\sim N(1.5,\ 4)$, 求 $P(-1\le X\le 2)$. (其中, $\Phi(0.25)=0.5987$, $\Phi(1.25)=0.8944$, $\Phi(0.625)=0.7341$, $\Phi(0.125)=0.5498$).

解 $P(-1\le X\le 2)\ =P(-1-1.5\le X-1.5\le 2-1.5)$

$$=P\left(\frac{-1-1.5}{2}\le\frac{X-1.5}{2}\le\frac{2-1.5}{2}\right)=P\left(-1.25\le\frac{X-1.5}{2}\le 0.25\right)$$

$$=\Phi(0.25)-\Phi(-1.25)\ =\Phi(0.25)-\big(1-\Phi(1.25)\big)$$

$$=\Phi(0.25)+\Phi(1.25)-1\ \ =0.4931$$

例 若 $X\sim N(5,\ 4^2)$，求 $P(4 \le X \le 8)$，$P(|X| > 3)$，

其中，$\Phi(0.75) = 0.7734, \Phi(0.25) = 0.5987, \Phi(0.50) = 0.6915, \Phi(2) = 0.9772.$

解 $P(4 \le X \le 8) \quad = P(4-5 \le X-5 \le 8-5)$

$$= P\left(\frac{4-5}{4} \le \frac{X-5}{4} \le \frac{8-5}{4}\right) = P\left(-0.25 \le \frac{X-5}{4} \le 0.75\right)$$

$$= \Phi(0.75) - \Phi(-0.25)$$

$$= \Phi(0.75) - \left(1 - \Phi(0.25)\right)$$

$$= \Phi(0.75) + \Phi(0.25) - 1$$

$$= 0.7734 + 0.5987 - 1$$
$$= 0.3721$$

$$P(|X| > 3)$$

$$= P(X > 3 \cup X < -3)$$

$$= P(X > 3) + P(X < -3)$$

$$= 1 - P(X \leq 3) + P(X < -3)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X-5}{4} \leq \frac{3-5}{4}\right) + P\left(\frac{X-5}{4} \leq \frac{-3-5}{4}\right)$$

$$= 1 - \Phi(-0.5) + \Phi(-2)$$

$$= 1 - \left(1 - \Phi(0.5)\right) + \left(1 - \Phi(2)\right)$$

$$= \Phi(0.5) + 1 - \Phi(2) = 0.6915 + 1 - 0.9772 = 0.7143$$

例 如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求:

$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$,　　$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma)$,

$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma)$,　($\Phi(1) = 0.8413, \Phi(2) = 0.9772, \Phi(3) = 0.9987$).

解 $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P\left(\frac{-\sigma}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\sigma}{\sigma}\right)$

$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$

$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$

$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$

3σ 原则

注 尽管 X 的取值范围是 $(-\infty, \infty)$，但是它的值落在$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$的概率为0.9974，几乎是肯定的。

例 2.12 公共汽车车门的高度是按成年男子与车门顶碰头的机会在 1% 以下来设计的. 设男子身高 X 服从 $\mu = 170(\mathrm{cm})$, $\sigma = 6(\mathrm{cm})$ 的正态分布, 即 $X \sim N(170, 6^2)$, 问车门高度应如何确定?

解 设车门高度为 $h(\mathrm{cm})$, 按设计要求 $P\{X \geqslant h\} \leqslant 0.01$ 或 $P\{X < h\} \geqslant 0.99$, 因为 $X \sim N(170, 6^2)$, 所以

$$P\{X < h\} = P\left\{\frac{X-170}{6} < \frac{h-170}{6}\right\} = \Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) \geqslant 0.99,$$

查表得

$$\Phi(2.33) = 0.9901 > 0.99.$$

故取 $\frac{h-170}{6} = 2.33$, 则 $h \approx 184$,

即设计车门高度为 184 cm 时, 可使成年男子与车门碰头的机会不超过 1%.

例 2.13 测量到某一目标的距离时发生的随机误差 X(单位:m) 具有密度函数

$$f(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-20)^2}{3\,200}}.$$

试求在 3 次测量中至少有一次误差的绝对值不超过 30 m 的概率.

解 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-20)^2}{3\,200}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times 40}e^{-\frac{(x-20)^2}{2\times 40^2}}\qquad \text{即 } X\sim N(20,40^2)$$

一次测量中随机误差的绝对值不超过 30 m 的概率为

$$P\{|X|\leqslant 30\}=P\{-30\leqslant X\leqslant 30\}=\Phi\left(\frac{30-20}{40}\right)-\Phi\left(\frac{-30-20}{40}\right)$$

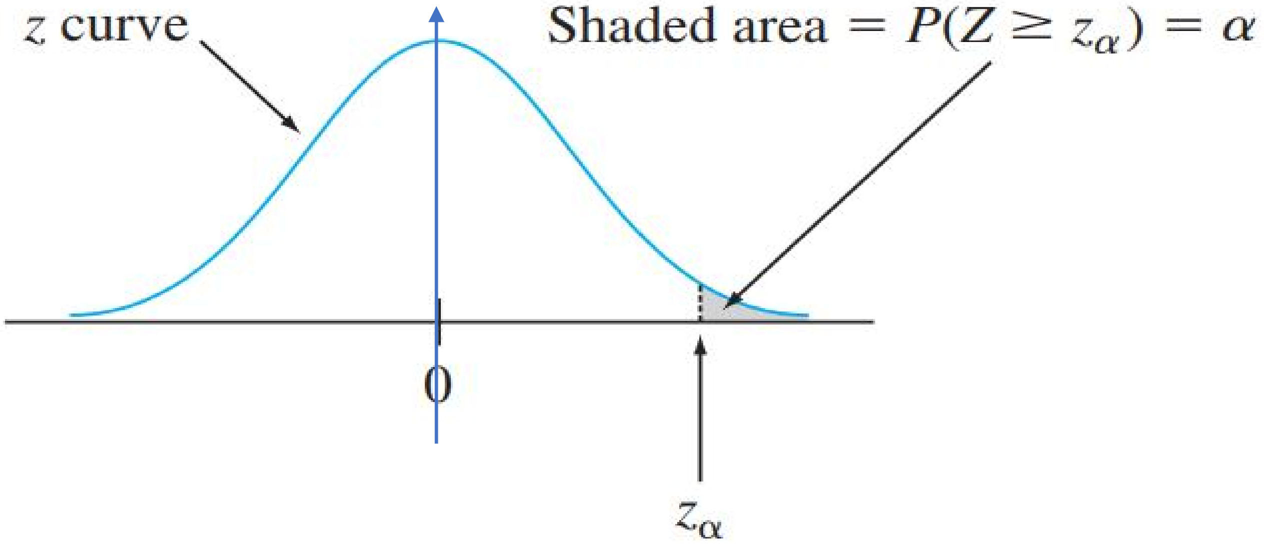
$$=\Phi(0.25)-\Phi(-1.25)=0.598\,7-(1-0.894\,4)$$

$$=0.493\,1.$$

设 Y 为 3 次测量中误差的绝对值不超过 30 m 的次数，则 Y 服从二项分布 $b(3,0.493\,1)$，故 $P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-0.5069^3\approx 0.8698$

定义： 标准正态分布的分位点 z_α 满足，$Z \sim N(0,1)$

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha,\ 0 < \alpha < 1$$



z_α 表示 z 轴上这样一个点，该点右侧、密度曲线下方的阴影部分面积为α;

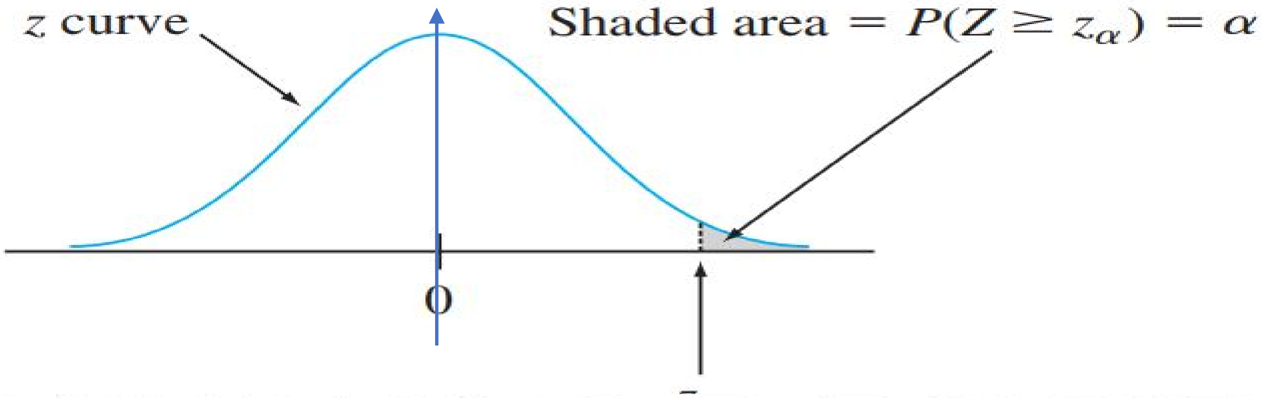
该点左侧、密度曲线下方的面积为$1-\alpha$

$$z_{0.01} \approx 2.33$$

$$z_{0.02} = 2.055$$

$$z_{0.05} = 1.645$$

$$z_{0.003} = 2.750$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916