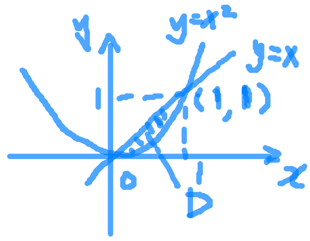
第 8 次 作业

一．填空题

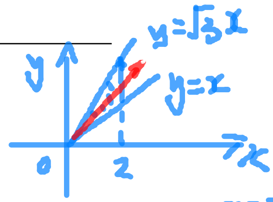
D: $0\le y\le 1$, $y\le x\le\sqrt{y}$



1. （填空）改变积分的积分次序，得 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx =$ ________________

（$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$）

D: $0\le x\le 2$, $x\le y\le\sqrt{3}x$

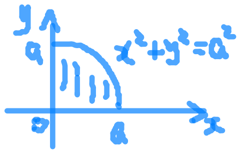


2. （填空）化二次积分为极坐标形式的二次积分，得 $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy =$ ____________

$x=2$ 即 $\rho\cos\theta=2$

（$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{2\sec\theta} f(\rho)\rho d\rho$）

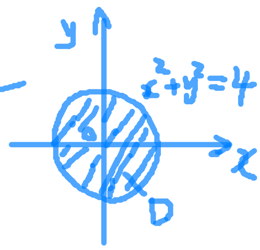
D: $0\le y\le a$, $0\le x\le\sqrt{a^2-y^2}$



3. 设 $a>0$，则积分值 $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx =$ ____________________。

（积分区域 D 可表示为 $D:0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le a$，得

$$\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx=\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{\pi a^4}{8}$$ 。）



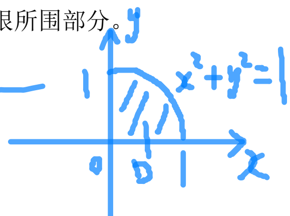
4. 利用二重积分的对称性得 $\iint_{x^2+y^2\le 4}(xy+y^3\cos x)d\sigma =$ ______________。(0)

设 $f(x,y)=xy$
$f(-x,y)=-xy$
$=-f(x,y)$

$= \underbrace{\iint_D xyd\sigma}_{=0} + \underbrace{\iint_D y^3\cos x d\sigma}_{=0}$

二．计算题

1.计算二重积分 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由 x 轴、y 轴和单位圆 $x^2+y^2=1$ 在第一象限所围部分。



解 方法 1. 积分区域 D 可表示为 $D:0\le x\le 1,0\le y\le\sqrt{1-x^2}$，于是

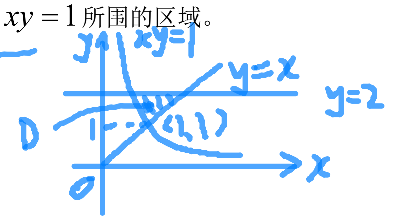
$$\iint_D xydxdy=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}xydy=\int_0^1[\frac{1}{2}xy^2\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}]dx=\int_0^1[\frac{1}{2}x(1-x^2)]dx=\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4})\Big|_0^1=\frac{1}{8}$$ 。

方法 2. 积分区域 D 可表示为 $D:0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le 1$，于是

$$\iint_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho\cos\theta\rho\sin\theta\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1\rho^3d\rho$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta=\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{1}{8}$$ 。

2.计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2, y=x$ 和双曲线 $xy=1$ 所围的区域。



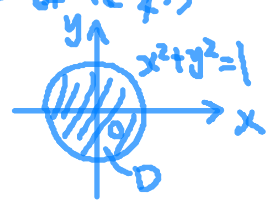
解 积分区域 D 可表示为 $D: 1\le y\le 2, \frac{1}{y}\le x\le y$，于是

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{x^2}{y^2}dx=\int_1^2[\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{y^2}]\Big|_{\frac{1}{y}}^{y}dy=\int_1^2\frac{1}{3}(y-\frac{1}{y^5})dy=\frac{1}{3}[\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4y^4}]_1^2=\cancel{\frac{81}{192}}。=\frac{27}{64}$$

$$=\frac{1}{3}(2-\frac{1}{64}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}))$$

3. 计算二重积分 $\iint_D (x+1)dxdy$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$。

$$=\iint_D x\,dy+\iint_D dxdy=0+\pi=\pi$$



$f(x,y)=x$

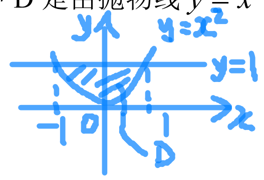
$f(-x,y)=-x$
$=-f(x,y)$

解 积分区域 D 可表示为 $D: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 1$，于是

$$\iint_D (x+1)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho\cos\theta+1)\rho d\rho=\int_0^{2\pi}[\frac{\rho^3}{3}\cos\theta+\frac{\rho^2}{2}]\Big|_{\rho=0}^{\rho=1}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{1}{2})d\theta=[\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{1}{2}\theta]\Big|_0^{2\pi}=\pi。$$

5. 利用二重积分的对称性计算 $\iint\limits_D y[1+xf(x^2+y^2)]d\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成的闭区域，f 在 D 上连续。



解 因为积分区域 D 关于 y 对称，被积函数 $yxf(x^2+y^2)$ 是 x 的奇函数，所以由二重积分的对称性知，$\iint\limits_D yxf(x^2+y^2)d\sigma=0$，得

设 $F(x,y)=yxf(x^2+y^2)$

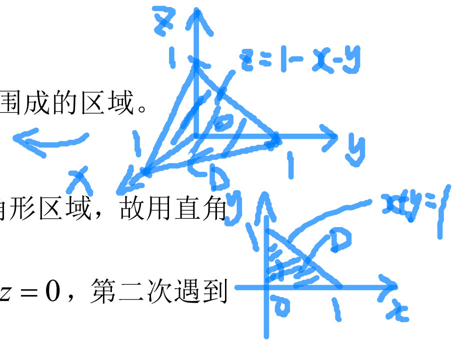
则 $F(-x,y)=-yxf(x^2+y^2)=-F(x,y)$

$$\iint\limits_D y[1+xf(x^2+y^2)]d\sigma=\iint\limits_D yd\sigma=\int_{-1}^1dx\int_{x^2}^1ydy=\frac{1}{2}\int_{-1}^1(1-x^4)dx$$

$$=\frac{1}{2}[x-\frac{x^5}{5}]\Big|_{-1}^1=\frac{1}{2}[1-\frac{1}{5}-(-1+\frac{1}{5})]=\frac{4}{5}$$

第九次作业

1. 计算 $I=\iiint_\Omega xdxdydz$,其中 Ω 是三个坐标平面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的区域。

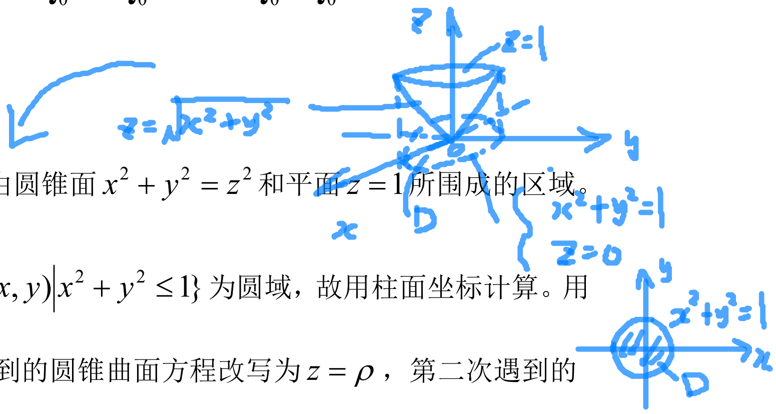


解　Ω 在 xoy 坐标面上的投影区域 $D=\{(x,y)|x+y\le 1, x,y\ge 0\}$ 为三角形区域，故用直角坐标计算。用垂直于 xoy 坐标面的直线去穿 Ω 第一次遇到的曲面方程为 $z=0$，第二次遇到的曲面方程为 $z=1-x-y$。故

$$I=\iiint_\Omega xdxdydz=\iint_D xdxdy\int_0^{1-x-y}dz=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x(1-x-y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{24}。$$

2. 计算 $I=\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}dv$，其中 Ω 是由圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 和平面 $z=1$ 所围成的区域。

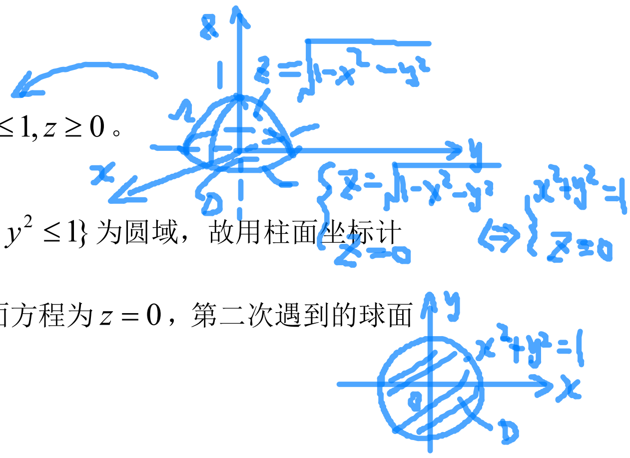


解　Ω 在 xoy 坐标面上的投影区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 为圆域，故用柱面坐标计算。用垂直于 xoy 坐标面的直线去穿 Ω 第一次遇到的圆锥曲面方程改写为 $z=\rho$，第二次遇到的曲面方程为 $z=1$。故

$$I=\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}dv=\iint_D \rho d\rho d\theta\int_\rho^1 z\cdot\rho dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 z\rho dz=\frac{2\pi}{2}\int_0^1\rho^2(z^2\big|_{z=\rho}^{z=1})d\rho$$

$$=\pi\int_0^1\rho^2(1-\rho^2)d\rho=\frac{2\pi}{15}。$$

3. 计算 $I=\iiint_\Omega zdxdydz$，其中 Ω 是半球体 $x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0$。

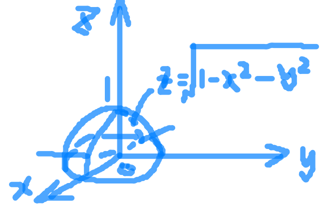


解　法 1　Ω 在 xoy 坐标面上的投影区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 为圆域，故用柱面坐标计算。用垂直于 xoy 坐标面的直线去穿 Ω 第一次遇到的曲面方程为 $z=0$，第二次遇到的球面方程改写为 $z=\sqrt{1-\rho^2}$。故

$$I=\iiint_\Omega zdxdydz=\iint_D \rho d\rho d\theta\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}}zdz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}}zdz=\frac{2\pi}{2}\int_0^1\rho(z^2\big|_{z=0}^{z=\sqrt{1-\rho^2}})d\rho$$

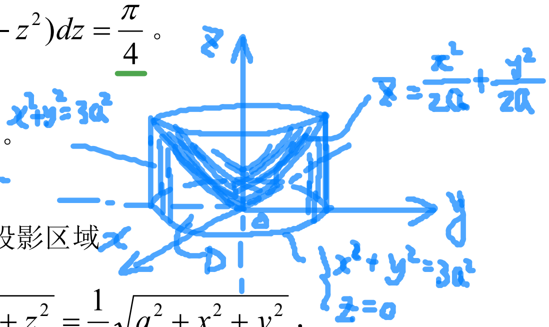
$$=\pi\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=\frac{\pi}{4}。$$

法 2　因为被积函数只是 z 的函数，故考虑 $I=\iiint_\Omega zdxdydz=\int_0^1 dz\iint_{D_z}d\sigma$，这里 D_z 是平面



$z=z, 0\le z\le 1$ 去截 Ω 得到的平面 $z=z, 0\le z\le 1$ 上的闭区域，且 $D_z=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1-z^2\}$，

面积为 $\pi(1-z^2)$。故 $I=\iiint_\Omega zdxdydz=\int_0^1 zdz\iint_{D_z}d\sigma=\int_0^1 z\pi(1-z^2)dz=\frac{\pi}{4}$。

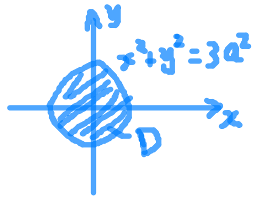


4.求曲面 $x^2+y^2=2az$ 在柱面 $x^2+y^2=3a^2$ 内那部分的面积 S。

解 要求面积的曲面方程为 $z=\frac{1}{2a}(x^2+y^2)$，它在 xoy 面上的投影区域

$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 3a^2\}$ 为圆域。由 $z_x=\frac{x}{a}, z_y=\frac{y}{a}, \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2+y^2}$，

得 $S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}d\sigma=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}a}\sqrt{a^2+\rho^2}\rho d\rho=\frac{2\pi}{2a}\int_0^{\sqrt{3}a}\sqrt{a^2+\rho^2}d(a^2+\rho^2)$



$=\frac{2\pi}{3a}(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{3}a}d\theta=\frac{14\pi a^2}{3}$。