第五章　数字滤波器的基本结构

- 5.1　数字滤波器结构的表示方法
- 5.2　无限长单位冲激响应（IIR）滤波器的基本结构
- 5.3　有限长单位冲激响应（FIR）滤波器的基本结构

5.1　数字滤波器结构的表示方法

数字滤波器的系统函数表示

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

由上式所得系统输入输出关系的常系数线性差分方程

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

- **数字滤波器的功能**就是把输入序列通过一定的运算变换成输出序列

- **实现数字滤波器方法：**

（1）计算机软件

（2）专用数字硬件、数字信号处理器及通用数字信号处理器

- **数字滤波器基本实现单元：**加法器、单位延时和常数加法器

- **基本单元表示法：**方框图法和信号流程图法

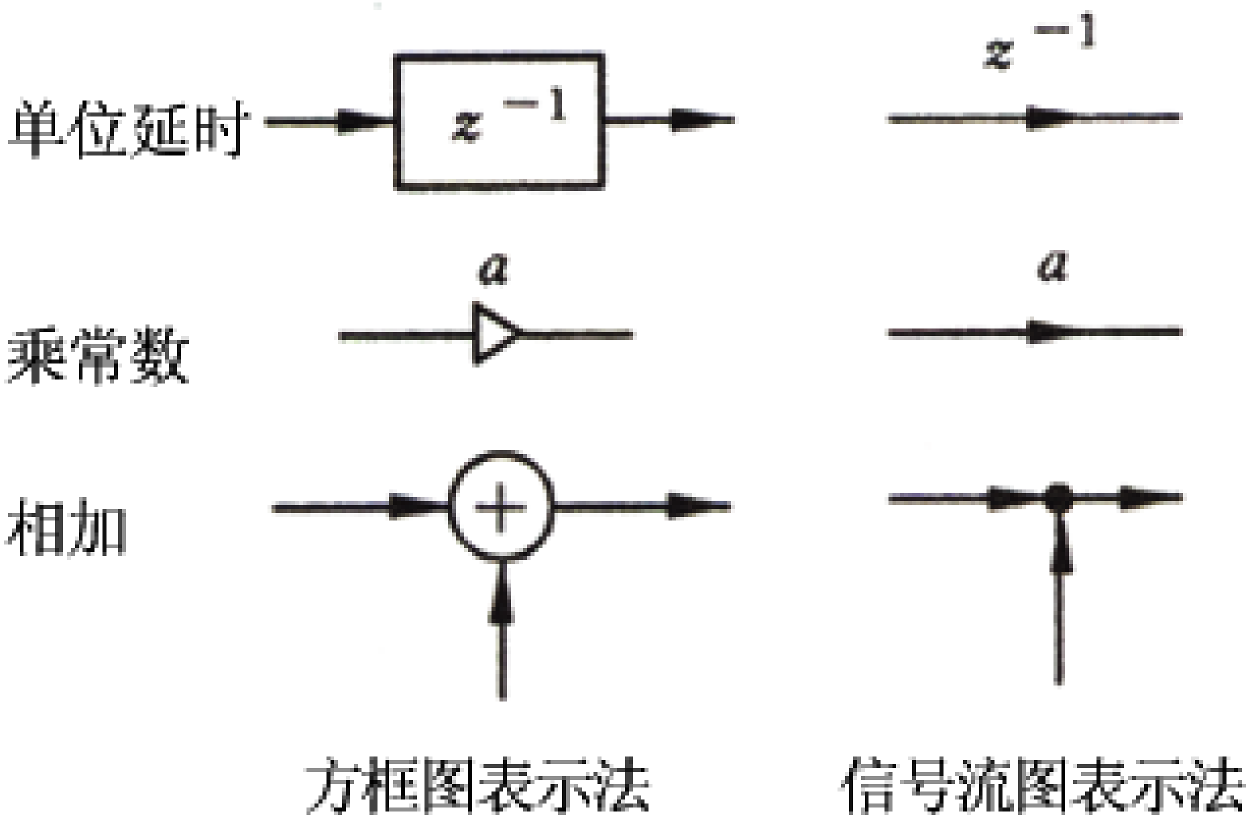
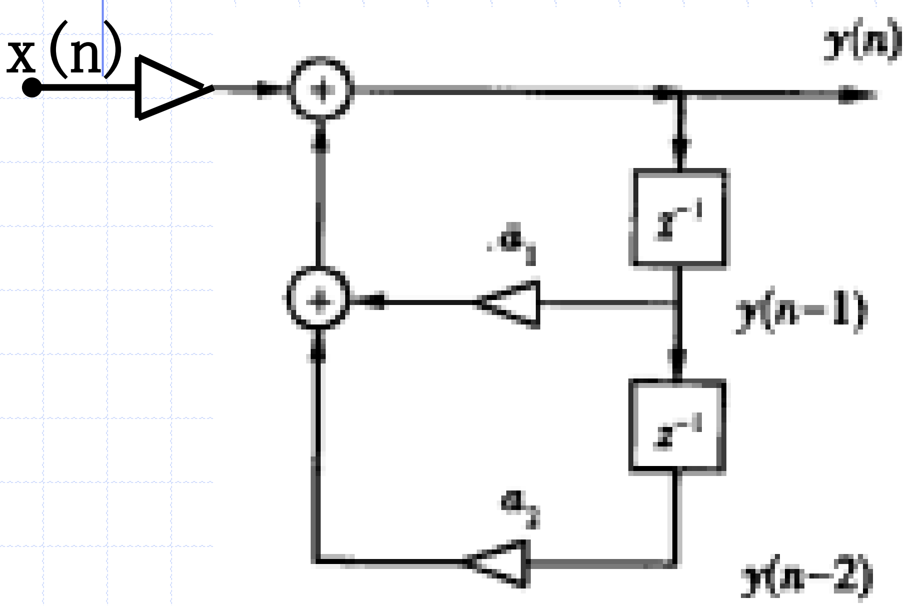
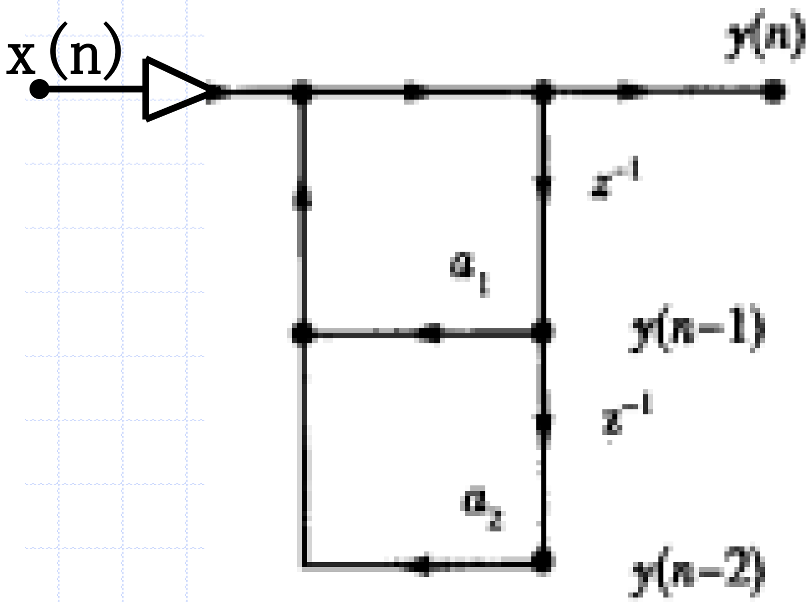


图5-1　基本运算的方框图表示及流图表示

例：二阶数字滤波器表示方法（常系数线性差分方程）

$$y(n)=a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+b_0x(n)$$





注意：

（1）本书都只采用信号流图来分析数字滤波器

（2）运算结构中，不同存储单元影响复杂性，乘法次数影响运算速度。不同运算结构的误差、稳定性是不同的。

5.2　无限长单位冲激响应（IIR）滤波器的基本结构

无限长单位冲激响应（IIR）特点：

（1）系统的单位冲激响应$h(n)$是无限长的。

（2）系统函数$H(z)$在有限z平面上有极点存在。

（3）结构上存在着输出到输入的反馈，即结构是递归的。

*基本结构：*直接I型、直接II型、级联型和并联型

一、直接I型

系统输入输出关系的N阶差分方程

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

构成直接I型特点：

（1）$\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$ 表示将输入及延时后的输入组成M节的延时网络，即横向延时网络，实现零点。

（2）$\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)$ 表示输出及其延时组成N节延时网络，实现极点。

（3）总的网络由上面两个网络级联而成。

（4）直接I型需要N+M级延时单元。

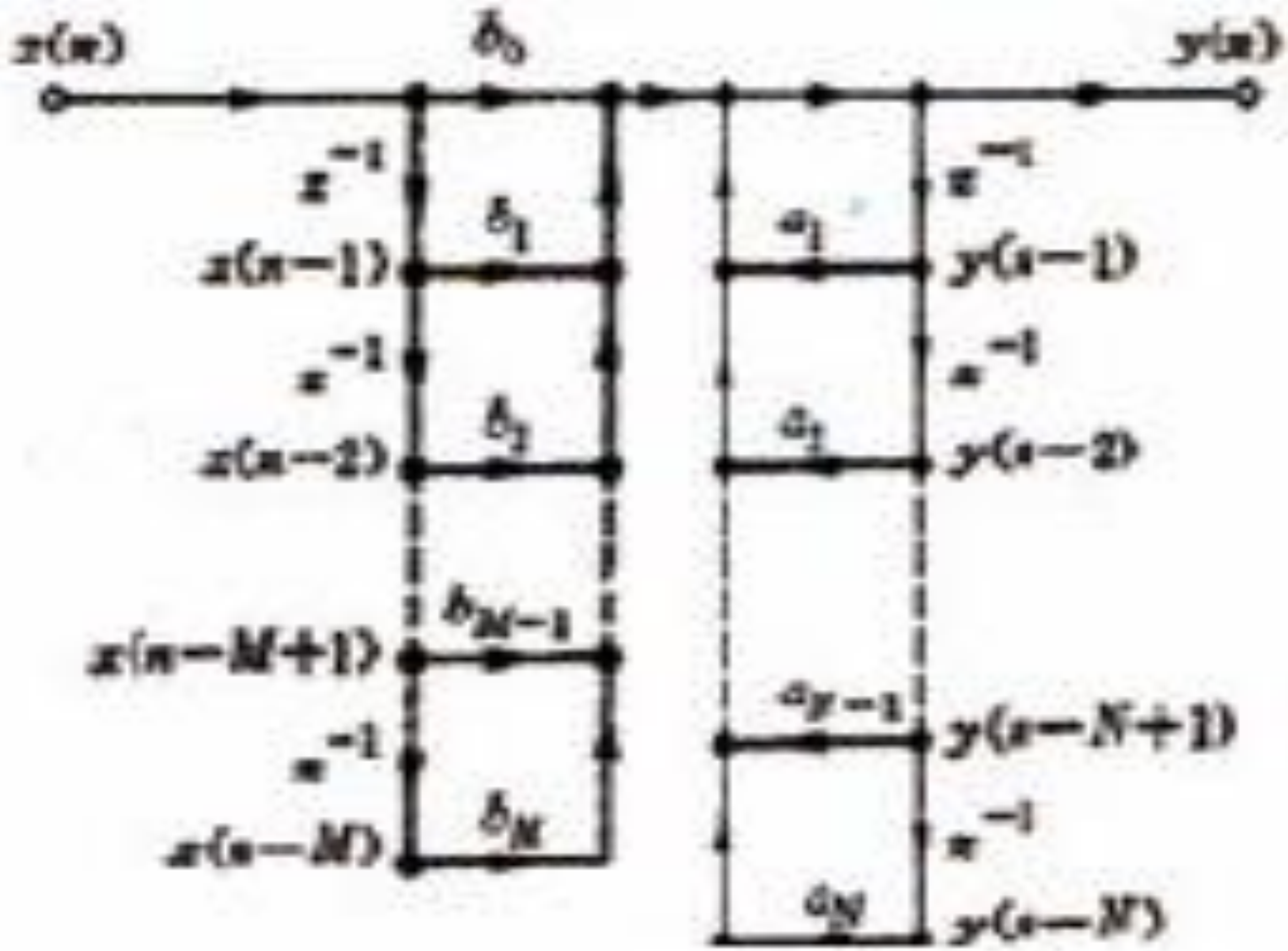


图 5.4　直接 I 型结构 IIR 滤波器

二、直接II型（典范型）

线性移不变系统，交换其级联的子系统的次序，系统函数不变，也就是总的输入输出关系不改变。

特点：

（1） 只需N个延时单元，实现N阶滤波器所需要的最少延时单元。

（2） 系数a_k、b_k对滤波器的性能控制作用不明显。

（3） 极点对系数变化过于灵敏，从而使系统的频率响应对系数的变化敏感，容易出现不稳定或产生较大误差。

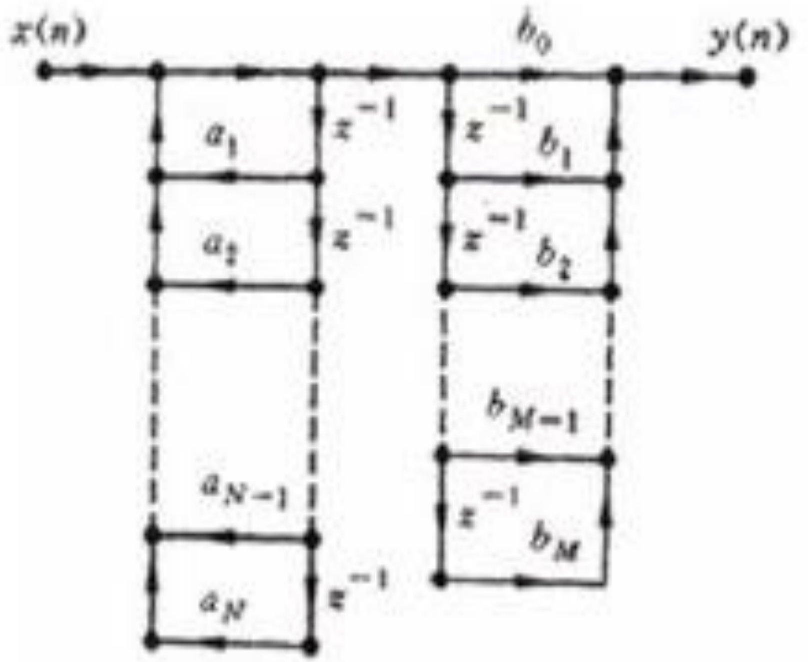


图 5.5　直接 I 型结构滤波器的变型

（网络的零点与极点的级联次序互换）

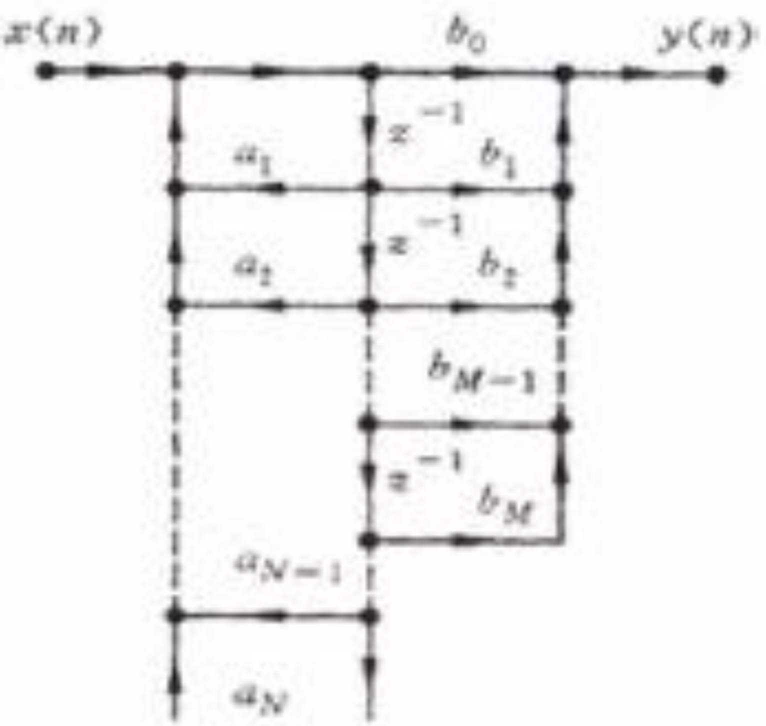


图 5.6　直接 II 型结构典范型结构

三、级联型

系统函数按零极点进行分解得

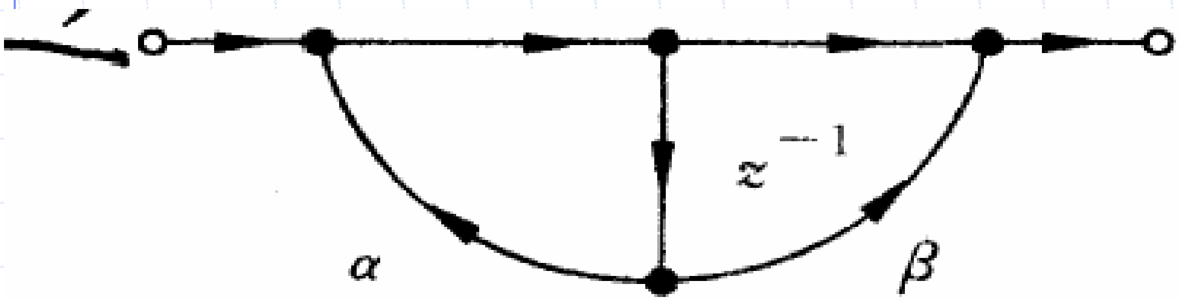
$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-p_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-q_k z^{-1})(1-q_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

把共轭因子组合成实系数的二阶因子

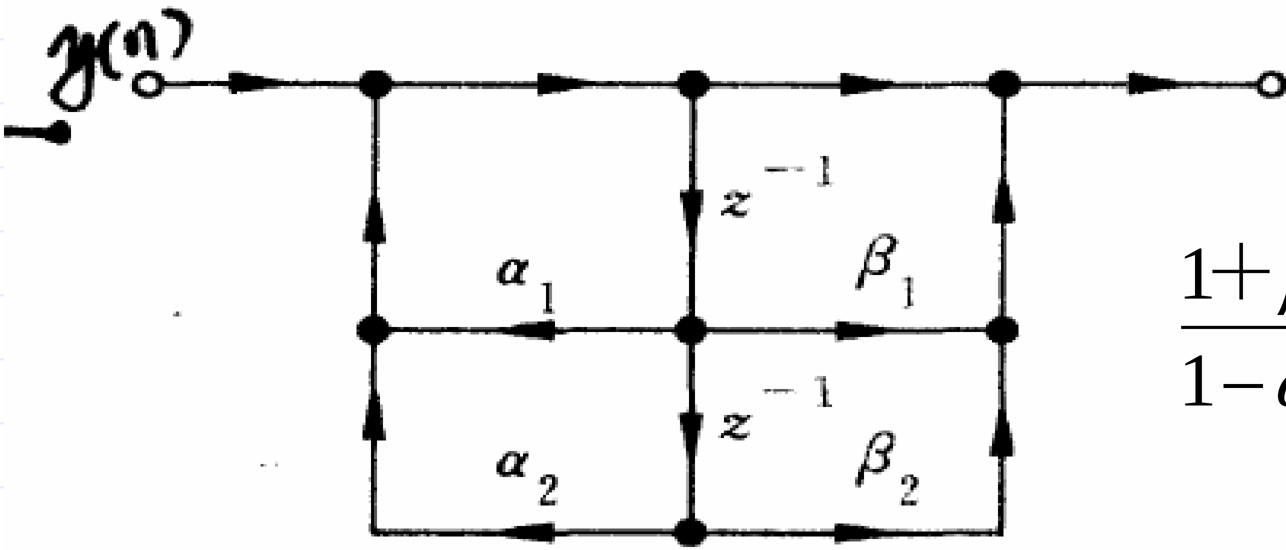
$$H(z)=A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-p_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1+\beta_{1k} z^{-1}+\beta_{2k} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-\alpha_{1k} z^{-1}-\alpha_{2k} z^{-1})}$$

H(z)完全分解成实系数的二阶因子形式

$$H(z)=A\prod_{k}\frac{1+\beta_{1k} z^{-1}+\beta_{2k} z^{-2}}{1-\alpha_{1k} z^{-1}-\alpha_{2k} z^{-2}}=A\prod_{k} H_k(z)$$



$$\frac{1+\beta z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$



$$\frac{1+\beta_1 z^{-1}+\beta_2 z^{-2}}{1-\alpha_1 z^{-1}-\alpha_2 z^{-2}}$$

级联结构的一阶基本节和二阶基本节结构

图 5-8　级联结构($M=N$)

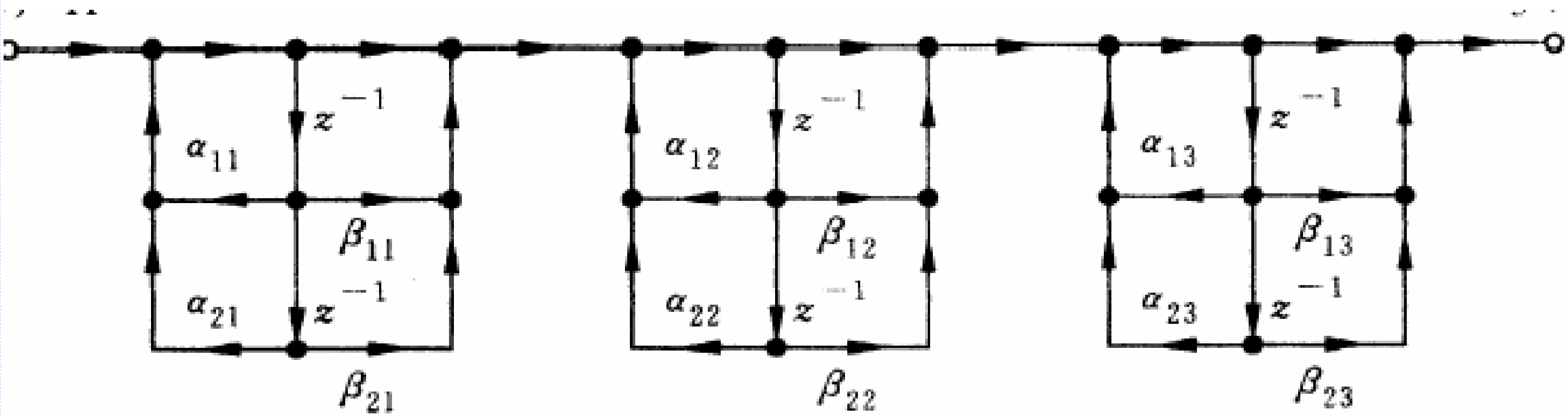


图 5-9　六阶 IIR 滤波器的级联结构

$$\frac{1+\beta_{11}z^{-1}+\beta_{21}z^{-2}}{1-\alpha_{11}z^{-1}-\alpha_{21}z^{-2}}\bullet\frac{1+\beta_{12}z^{-1}+\beta_{22}z^{-2}}{1-\alpha_{12}z^{-1}-\alpha_{22}z^{-2}}\bullet\frac{1+\beta_{13}z^{-1}+\beta_{23}z^{-2}}{1-\alpha_{13}z^{-1}-\alpha_{23}z^{-2}}$$

特点：

（1）调整一阶、二阶基本节的零极点不影响其它基本节，便于调整滤波器频率响应特性。

（2）零、极点有不同的配对方式，因此对于配合与排列次序有最优化问题。

四、并联型

将因式分解的H(Z)展成部分分式的形式，得到并联IIR的基本结构：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{B_k(1-g_k z^{-1})}{(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}+\sum_{k=0}^{M-N} G_k z^{-k}$$

当M=N时，H(z)表示为

$$H(z)=G_0+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{\gamma_{0k}+\gamma_{1k} z^{-1}}{1-\alpha_{1k} z^{-1}-\alpha_{2k} z^{-2}}$$

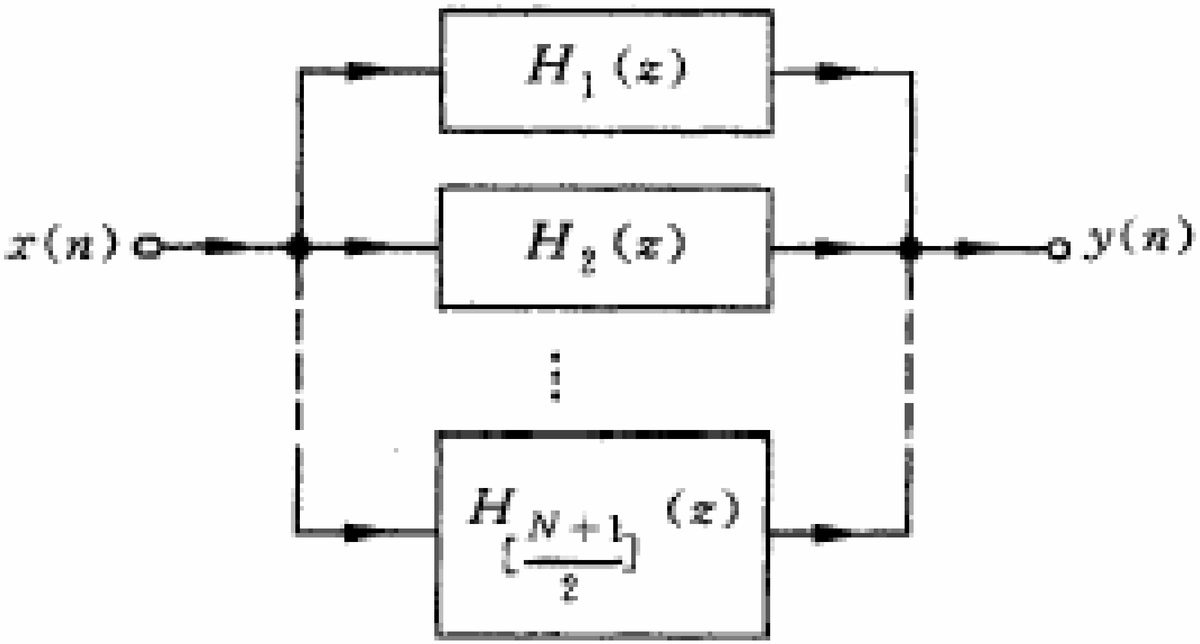
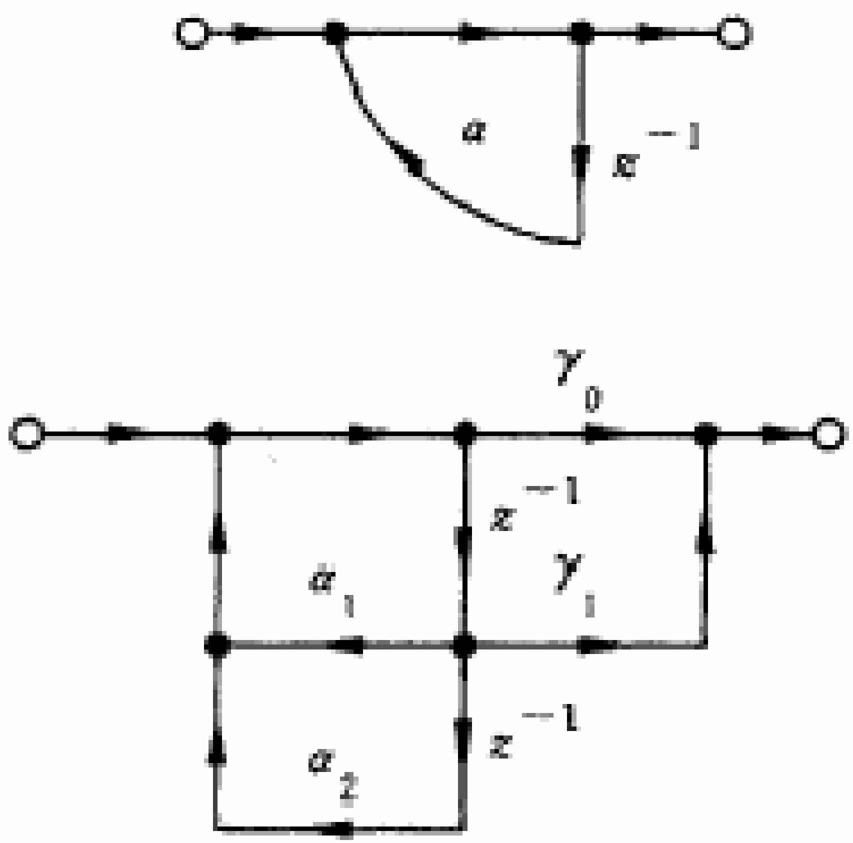


图 5-10　并联结构($M=N$)



$$\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\frac{r_0+r_1z^{-1}}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}}$$

图5-11　并联结构的一阶基本节和二阶基本节结构

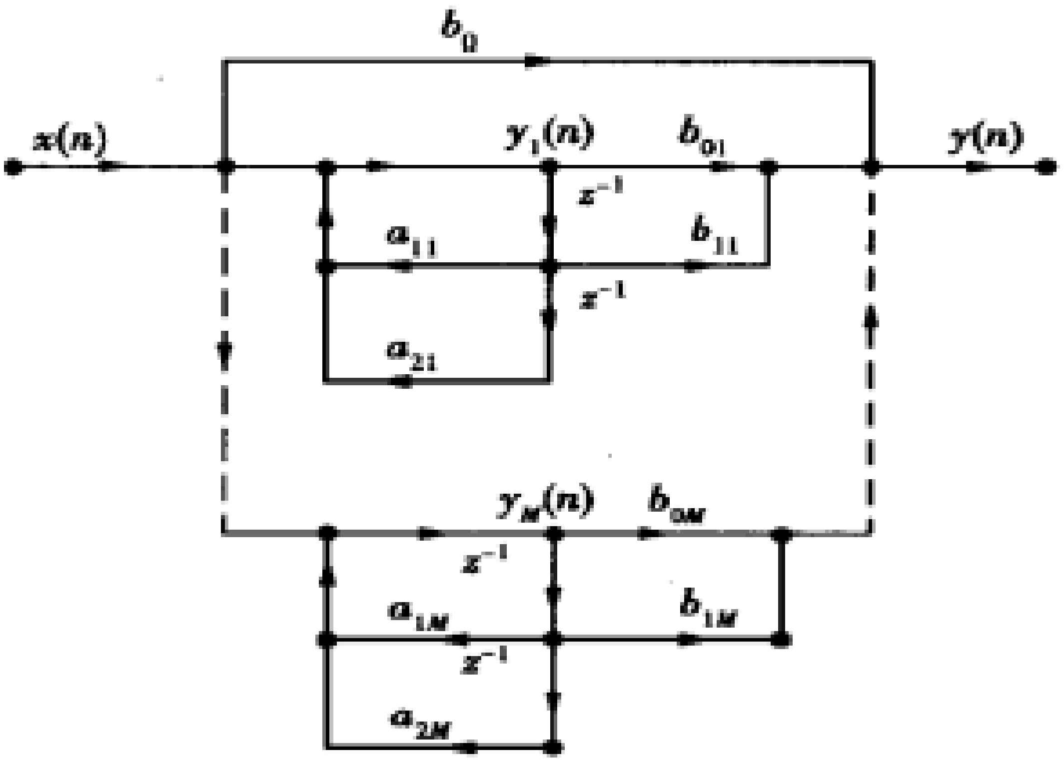


图 5.8　并联型结构 IIR 滤波器

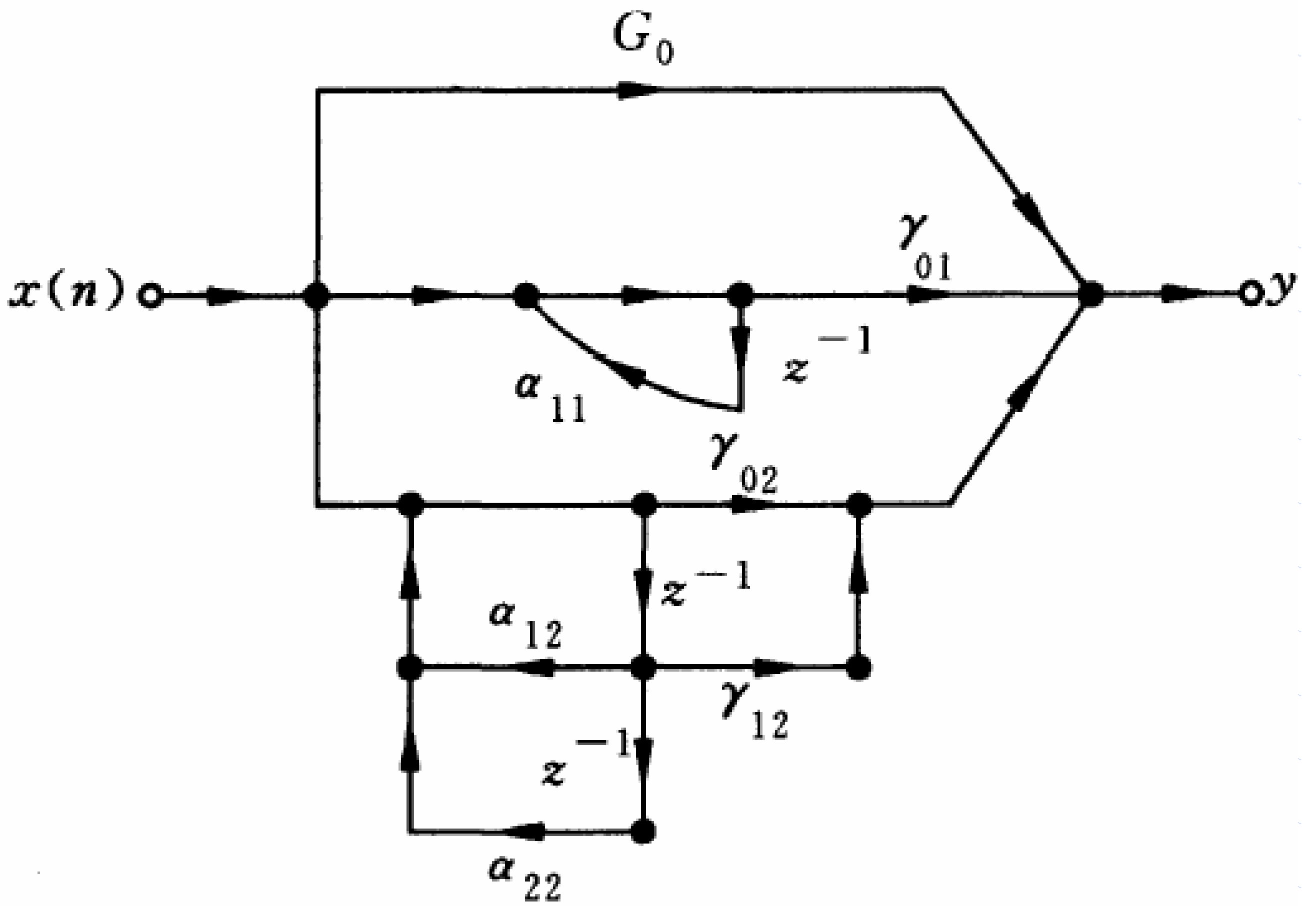


图 5-12　三阶 IIR 滤波器的并联型结构

并联型特点：

各并联基本节间的误差相互没有影响，比级联型的误差稍小。

转置定理：

如果将原网络中所有去路方向倒转，并将输入x(n)和输出y(n)相互交换，则其系统函数H(z)不变。

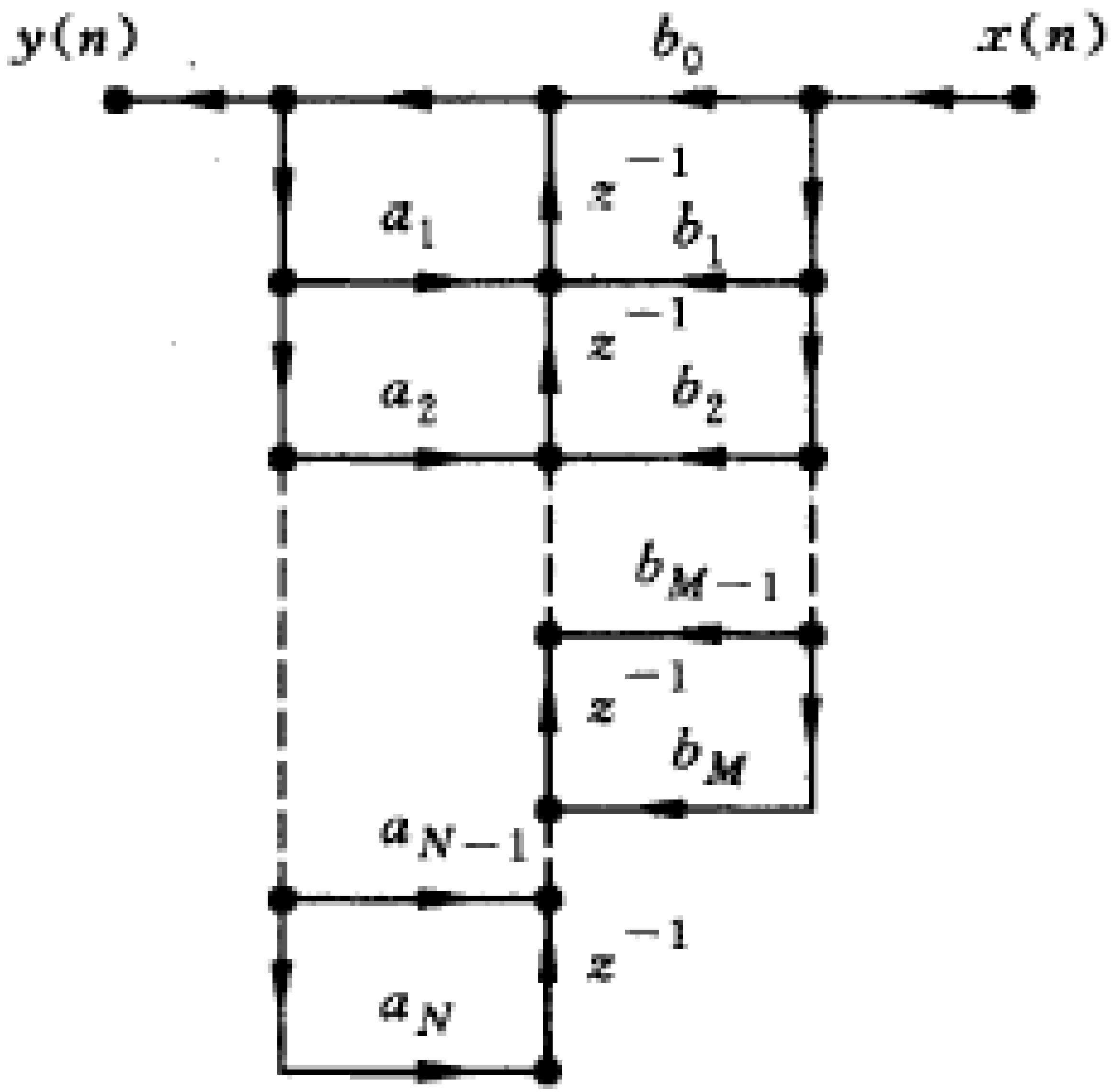


图 5-13　典范型结构的转置

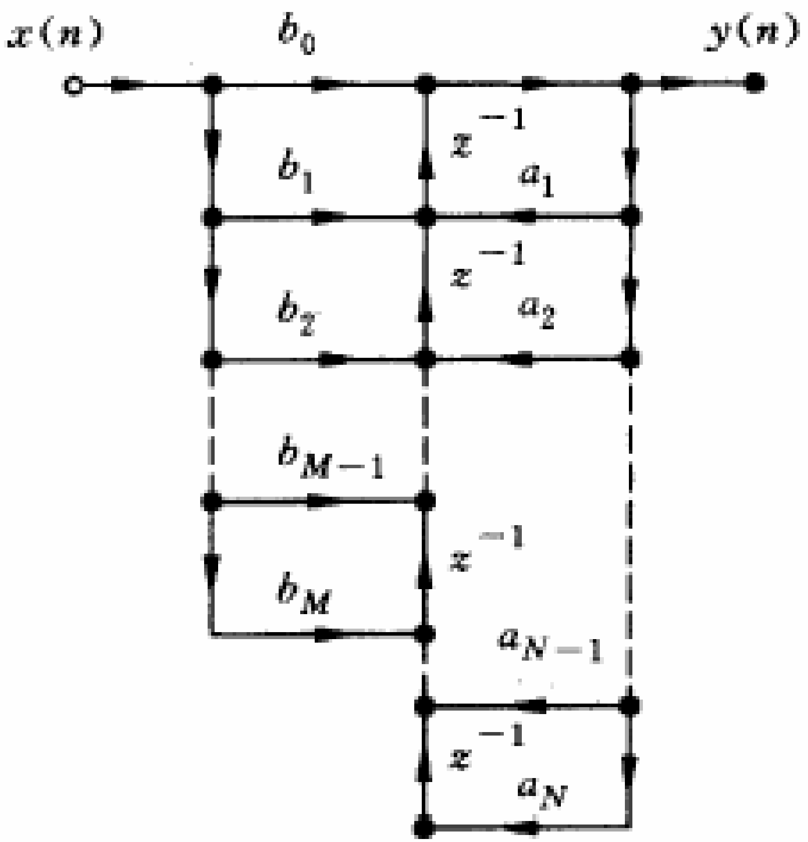


图 5-14　将图 5-13 画成输入在左，输出在右的习惯形式

例：已知一个因果线性移不变滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{1+0.875z^{-1}}{(1+0.2z^{-1}+0.9z^{-2})(1-0.7z^{-1})}$$

画出该系统以下形式的流图。

（1）直接 I 型

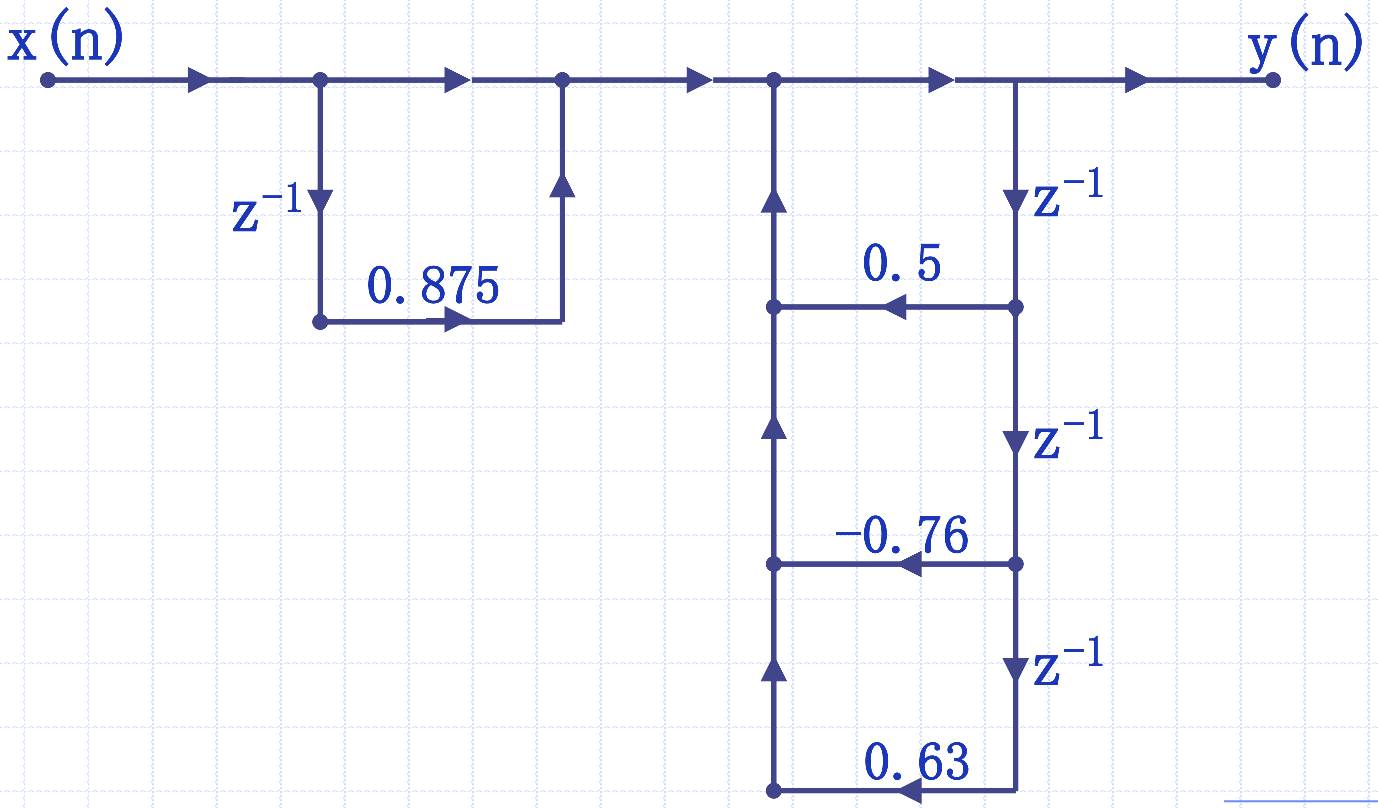
（2）直接 II 型

（3）级联型

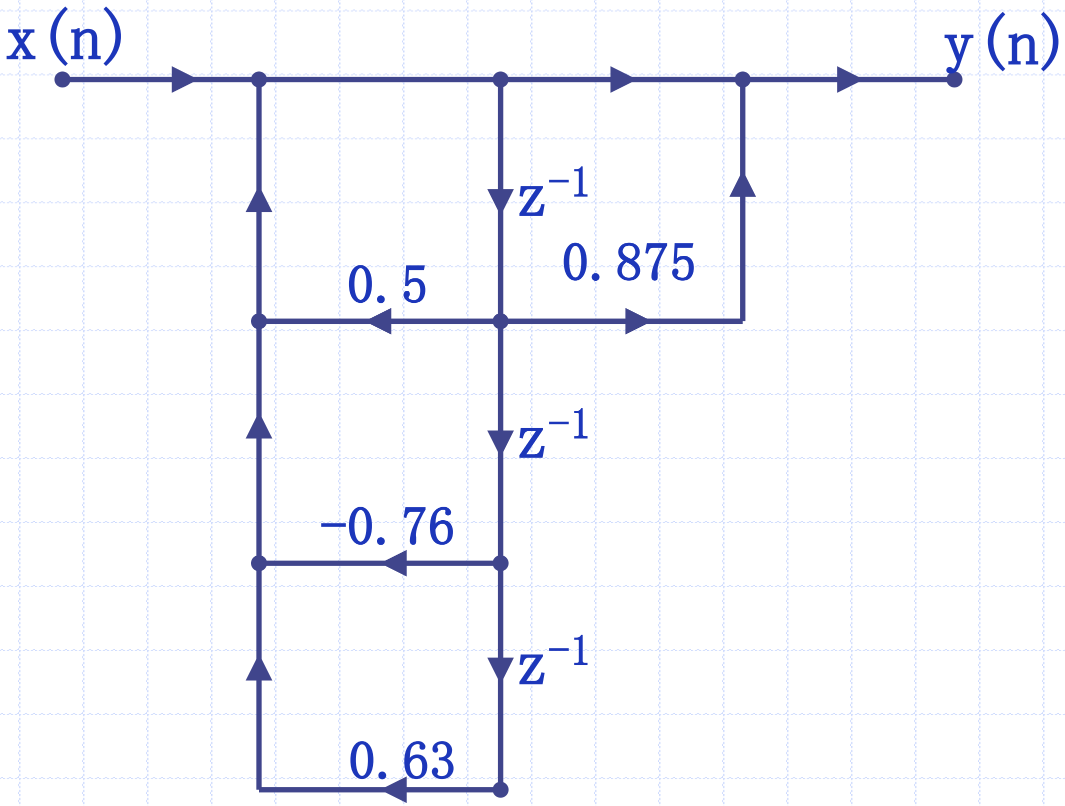
（4）并联型

（1）将系统函数表示为z^{-1}的多项式的形式。

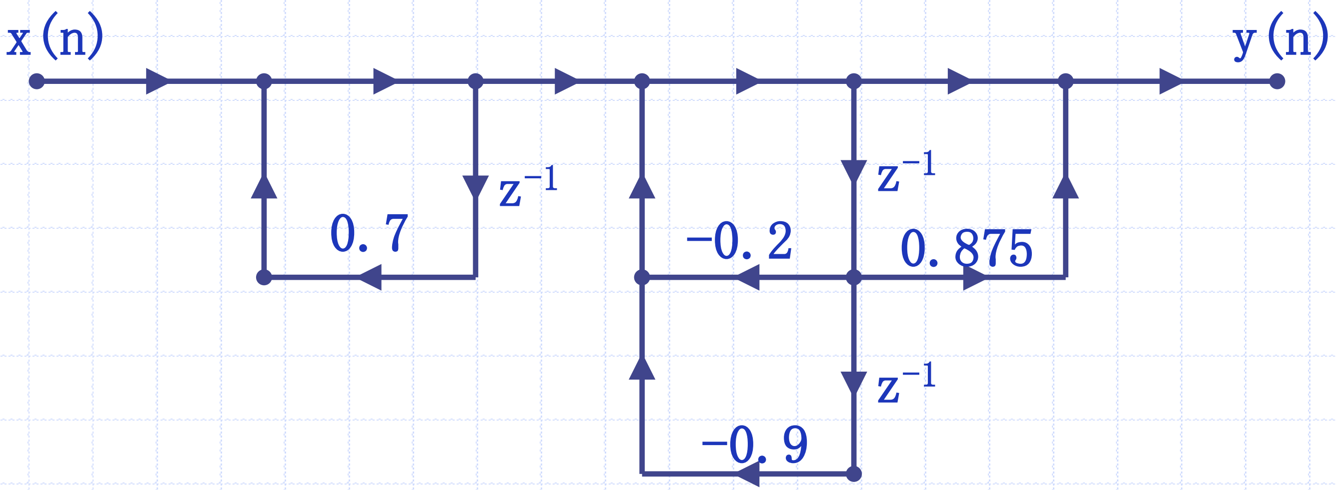
$$H(z)=\frac{1+0.875z^{-1}}{1-0.5z^{-1}+0.76z^{-2}-0.63z^{-3}}$$



(2) 直接II型



（3）级联型



（4）并联型

对于并联结构，必须用部分分式展开。

$$H(z)=\frac{1+0.875z^{-1}}{(1+0.2z^{-1}+0.9z^{-2})(1-0.7z^{-1})}$$

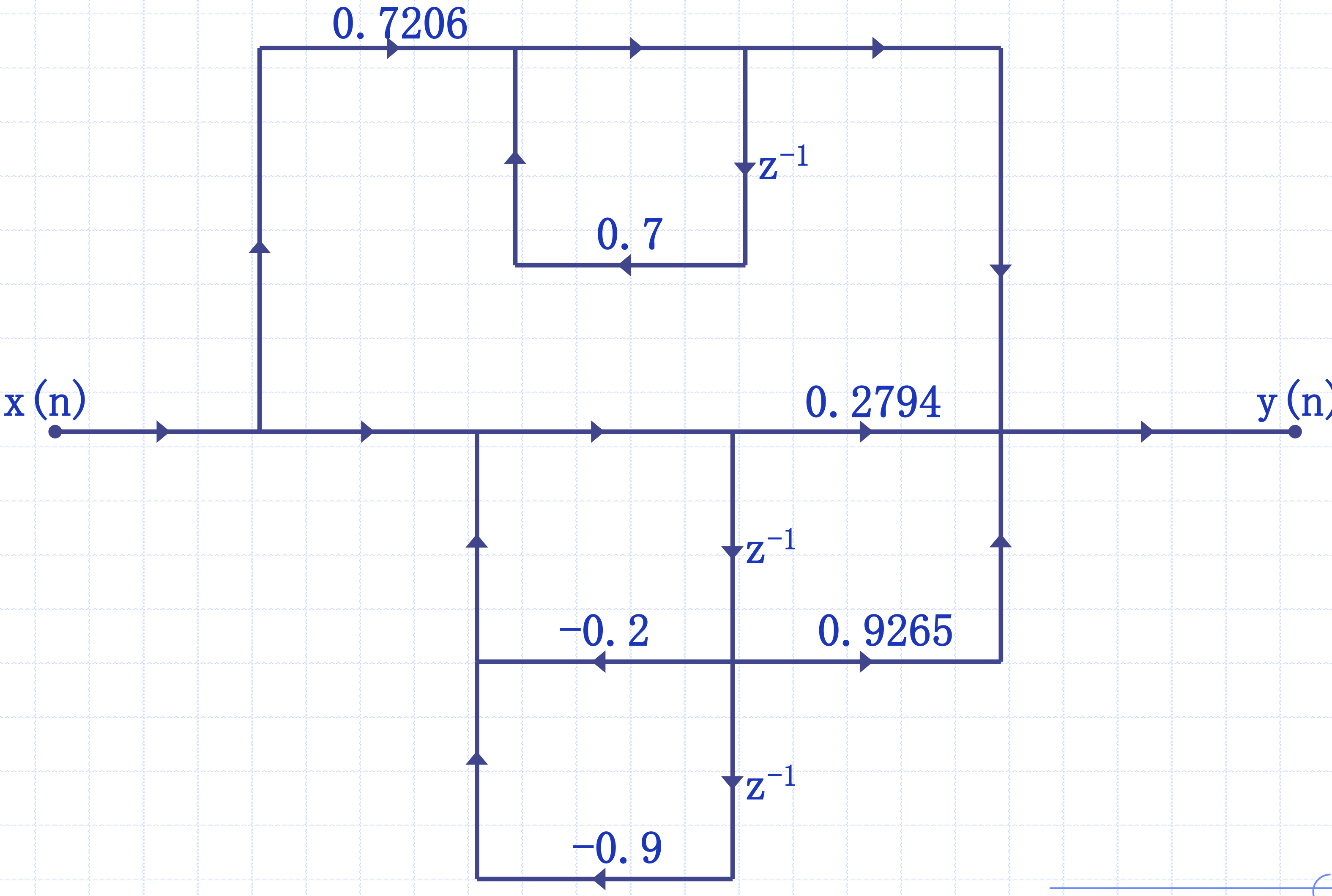
$$=\frac{A+Bz^{-1}}{1+0.2z^{-1}+0.9z^{-2}}+\frac{C}{1-0.7z^{-1}}$$

$$=\frac{(A+C)+(B+0.2C-0.7A)z^{-1}+(0.9C-0.7B)z^{-2}}{(1+0.2z^{-1}+0.9z^{-2})(1-0.7z^{-1})}$$

$$\begin{cases} A+C=1 \\ B+0.2C-0.7A=0.875 \\ 0.9C-0.7B=0 \end{cases}$$

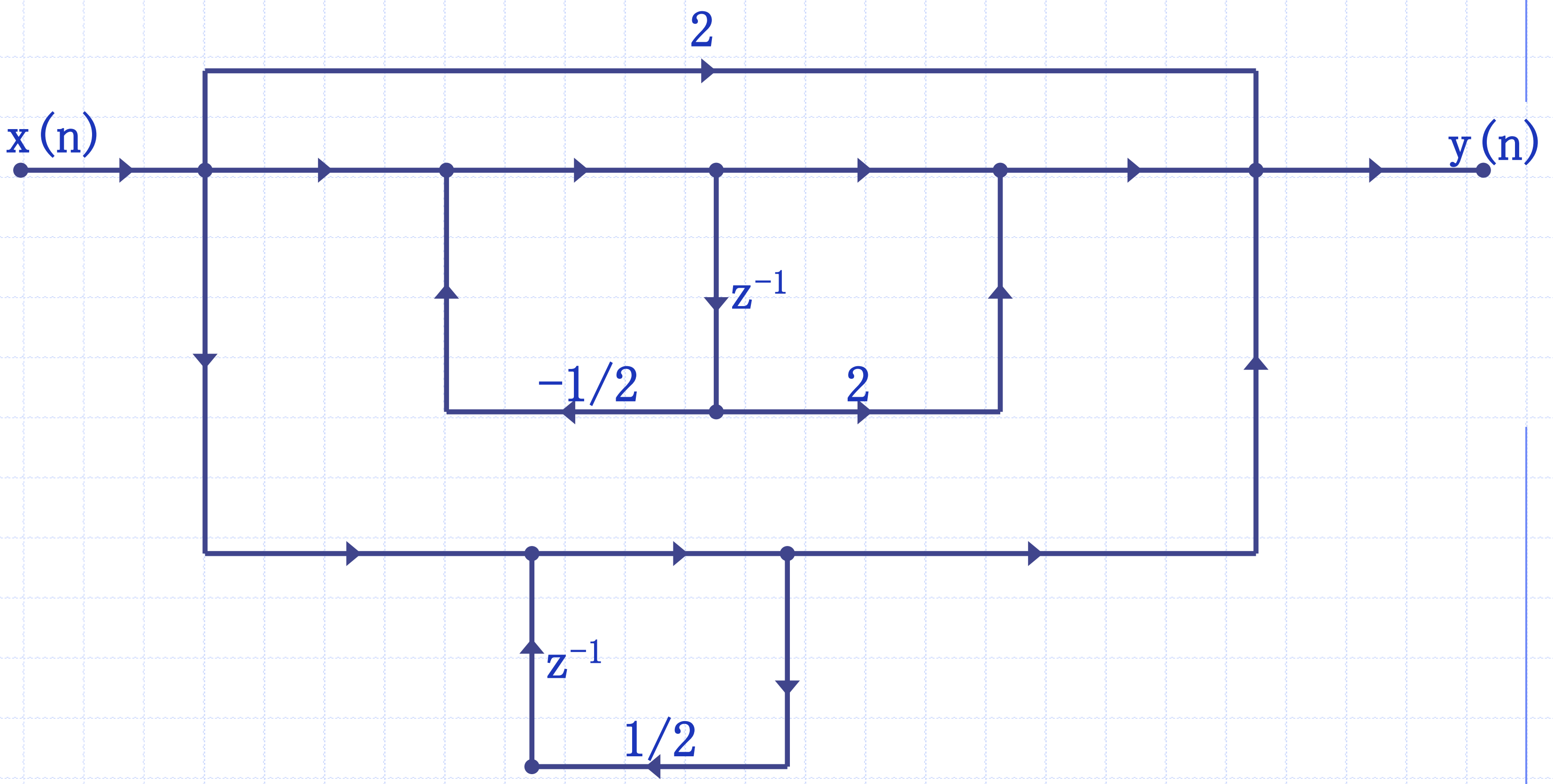
$$A=0.2794 \qquad B=0.9265 \qquad C=0.7206$$

$$H(z)=\frac{0.2794+0.9265z^{-1}}{1+0.2z^{-1}+0.9z^{-2}}+\frac{0.7206}{1-0.7z^{-1}}$$



0. 7206
z^{-1}
0. 7
x(n)
0. 2794
y(n)
z^{-1}
−0. 2
0. 9265
z^{-1}
−0. 9

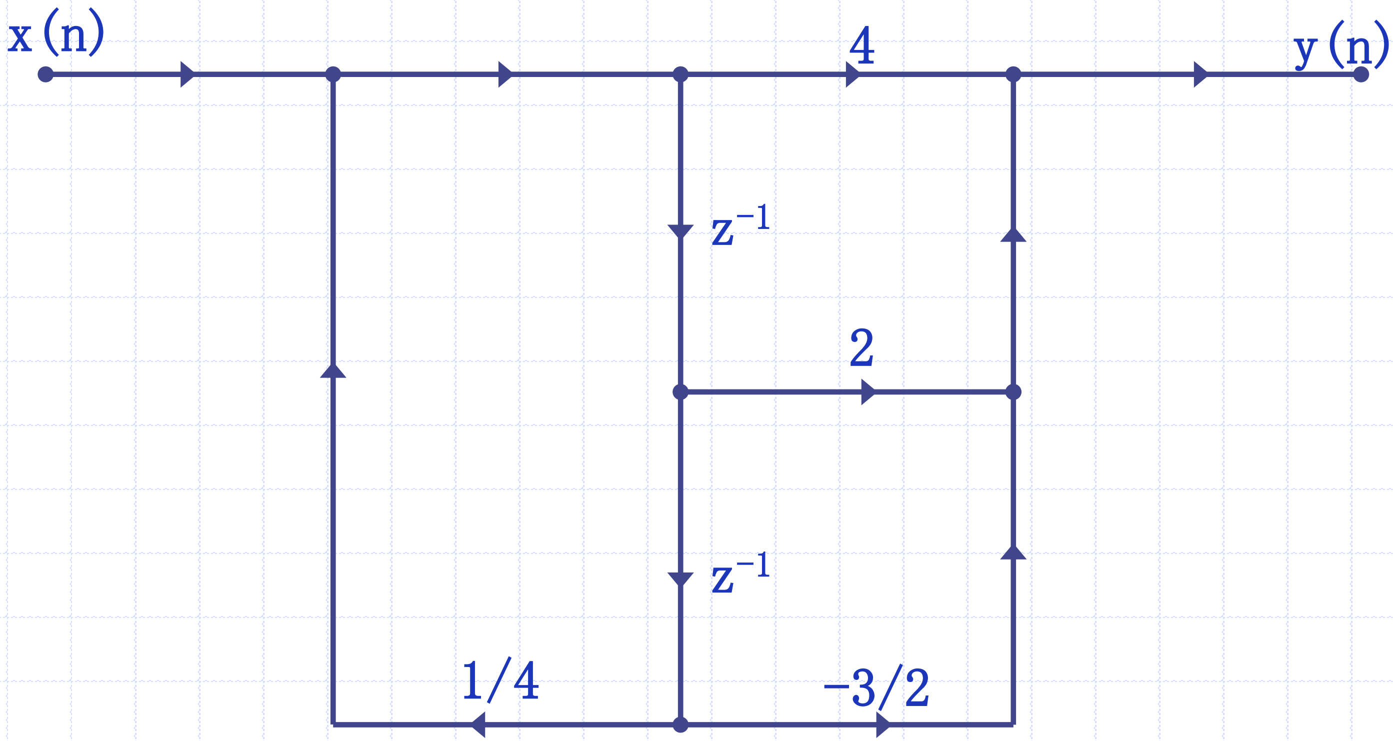
例：求下列网络的系统函数，并画出等价的直接II型。



$$H(z)=2+\frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{2\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)+\left(1+2z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)+1+\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{4+2z^{-1}-\frac{3}{2}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$$



x(n)
4
y(n)
z⁻¹
2
z⁻¹
1/4
−3/2

5.3　有限长单位冲激响应（FIR）滤波器的基本结构

有限长单位冲激响应h(n)的特点：

（1）系统的单位冲激响应h(n)有有限个n值处不为零。

（2）系统函数H(Z)在|z|>0处收敛，在|z|>0处只有零点，全部极点都在z=0处。

（3）主要是非递归结构，没有输出到输入的反馈。

系统函数为

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

$$=h(0)+h(1)z^{-1}+\cdots+h(N-1)z^{-(N-1)}$$

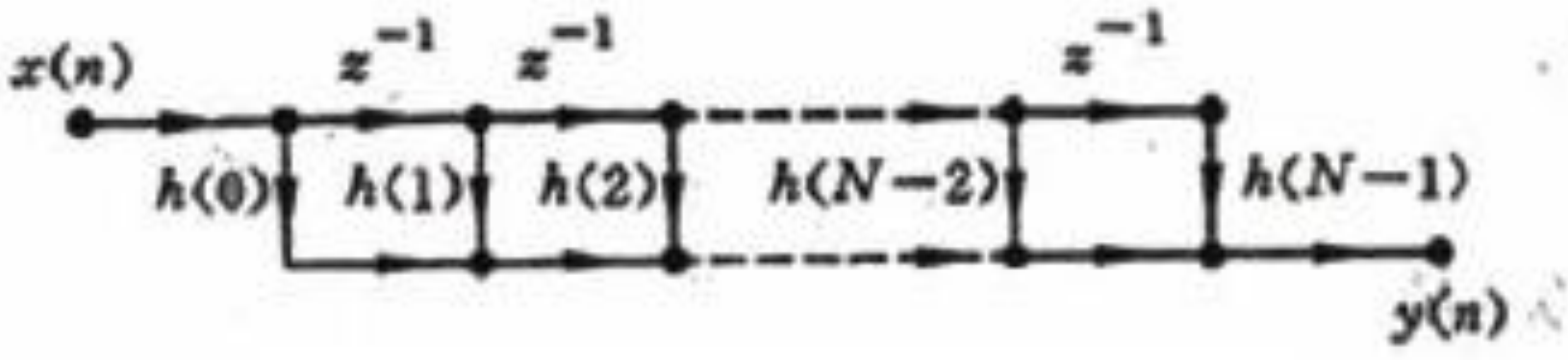
一、横截型（卷积型、直接型）

系统差分方程为

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n-m)$$

$$=h(0)x(n)+h(1)x(n-1)+\cdots+h(N-1)x[n-(N-1)]$$

是线性移不变系统的卷积和公式，是x(n)延时链的横向结构，称为横截型结构或卷积型结构，也可称直接型结构。



二、级联型

将H(z)分解成实二阶因子的乘积形式：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-1}=\prod_{k=1}^{[\frac{N}{2}]}(\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})$$

若其中[N/2]是取N/2的整数部分。

特点：

（1）这种结构的每一节控制一对零点，因而在需要控制传输零点时采用。

（2）其系数及需要的乘法次数比卷积型多。

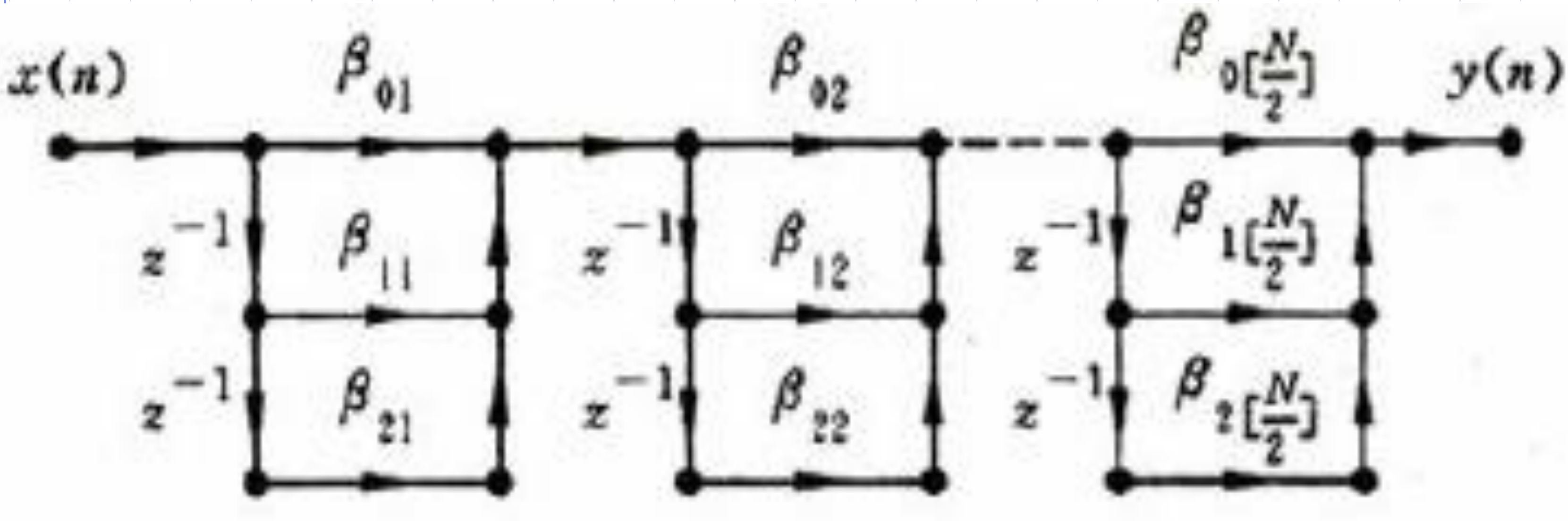


图 5.10　FIR 滤波器的级联型结构（N 为奇数）

例：一个FIR滤波器的单位采样响应为

$$h(n)=\begin{cases} a^n & 0\le n\le 6 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

（1）画出该系统的直接型实现结构

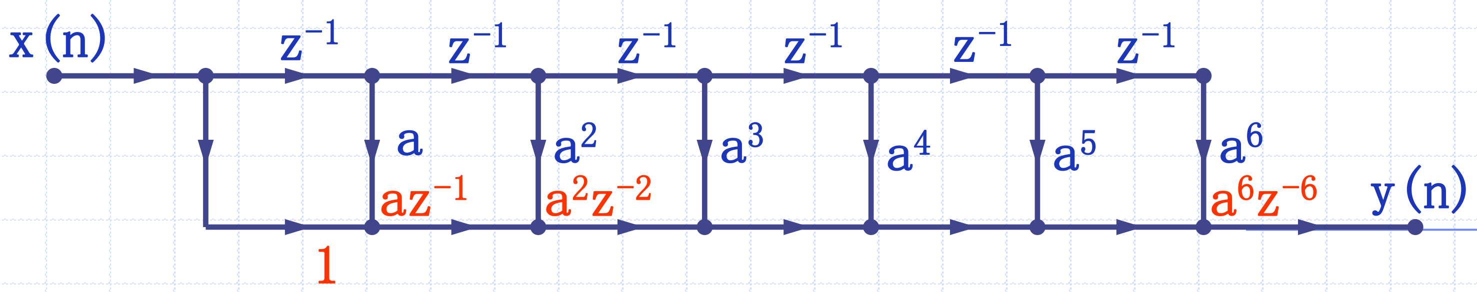
（2）计算系统函数H(z)，并利用系统函数画出FIR系统与一个IIR系统级联的结构图。

解：（1）

$$H(z)=\sum_{n=0}^{6}h(n)z^{-n}$$

$$=1+az^{-1}+\cdots+a^6z^{-6}$$

直接型实现结构图如下所示：



（2）系统函数为

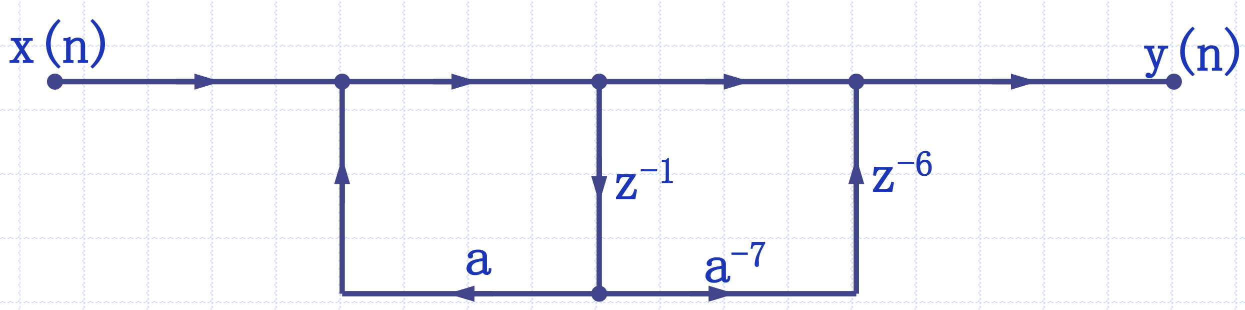
$$H(z)=\sum_{n=0}^{6}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{6}a^{n}z^{-n}=\frac{1-(az^{-1})^{7}}{1-az^{-1}}$$

收敛域为|z|>0，H(z)可以用一个IIR系统与一个FIR系统级联来实现

IIR系统为 $H_1(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$

FIR系统为 $H_2(z)=1-a^{7}z^{-7}$

因此该系统的另一种实现结构如下：



三、频率抽样型

由H(k)表示H(z)的内插公式（书P112）

$$H(z)=(1-z^{-N})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

上述公式提供了两部分级联组成的滤波器结构

$$H(z)=\frac{1}{N}H_c(z)\sum_{k=0}^{N-1}H_k'(z)$$

其中第一部分为

$$H_c(z)=1-z^{-N}$$

这是一个FIR子系统，由N节延时单元构成的梳状滤波器。

令 $H_c(z) = 1 - z^{-N} = 0$

则有 $z_i = e^{j\frac{2\pi}{N}i} \quad i = 0, 1, \cdots, N-1$

它的频率响应为

$$H_c(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega N} = 2je^{-j\frac{\omega N}{2}} \sin(\frac{\omega N}{2})$$

$$1 - e^{-j\omega N} = e^{-\frac{j\omega N}{2}} \cdot e^{\frac{j\omega N}{2}} - e^{-\frac{j\omega N}{2}} \cdot e^{-\frac{j\omega N}{2}}$$

$$= e^{-\frac{j\omega N}{2}} \left[e^{\frac{j\omega N}{2}} - e^{-\frac{j\omega N}{2}} \right] = 2je^{-\frac{j\omega N}{2}} \left[\frac{e^{\frac{j\omega N}{2}} - e^{-\frac{j\omega N}{2}}}{2j} \right]$$

$$= 2je^{-\frac{j\omega N}{2}} \sin[\frac{\omega N}{2}]$$

因而幅度响应为

$$|H_c(e^{j\omega})| = 2\left|\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)\right|$$

相角为

$$\arg[H_c(e^{j\omega})] = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega N}{2} + m\pi, \begin{cases} m = 0, \omega = 0 \quad to \quad \dfrac{2\pi}{N} \\ m = 1, \omega = \dfrac{2\pi}{N} \quad to \quad \dfrac{4\pi}{N} \\ m = m, \omega = \dfrac{2m\pi}{N} \quad to \quad \dfrac{2(m+1)\pi}{N} \end{cases}$$

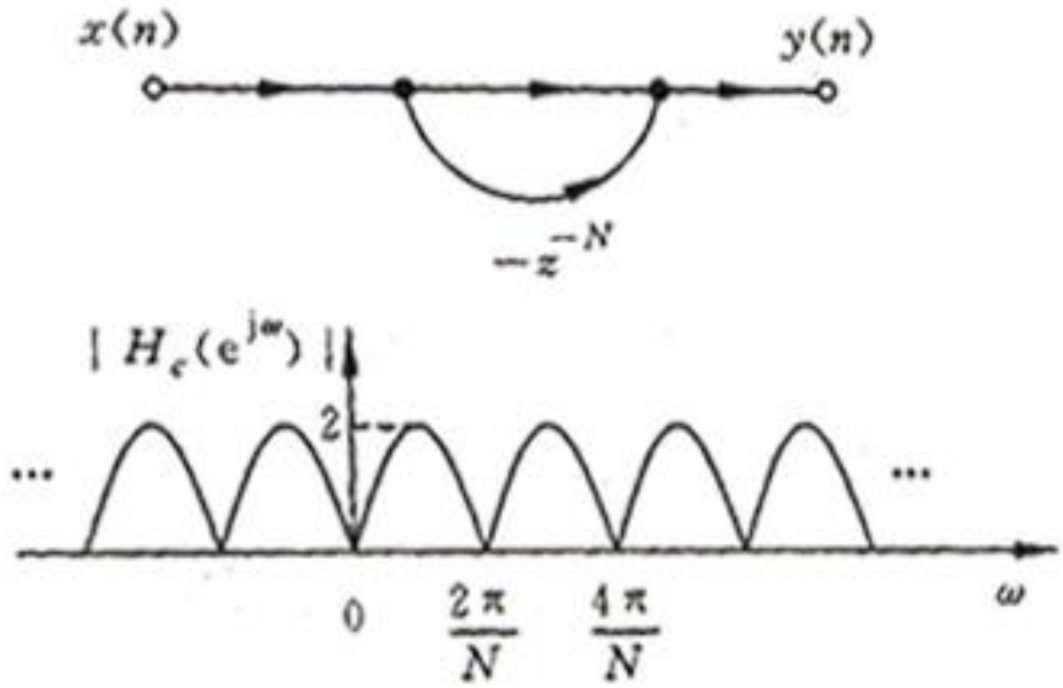


图5-9　梳状滤波器结构及频率响应幅度

级联的第二部分为 $\sum_{k=0}^{N-1} H_k^{'}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$

它是由N个一阶网络并联组成，而这每一个一阶网络都是一个谐振器

$$H_k^{'}(z) = \frac{H(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

令 $H_k^{'}(z)$ 的分母为零，即令

$$1-W_N^{-k} z^{-1} = 0$$

得到一阶网络在单位圆上有一个极点

$$z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$$

也就是说，此一阶网络在频率为 $\omega = \frac{2\pi}{N} k$ 处响应为无穷大。

缺点：极点在单位圆上，由系数W_N^{-k}决定，当系数量化时，极点会移动，若极点移到Z平面的单位圆外，系统就不稳定了。

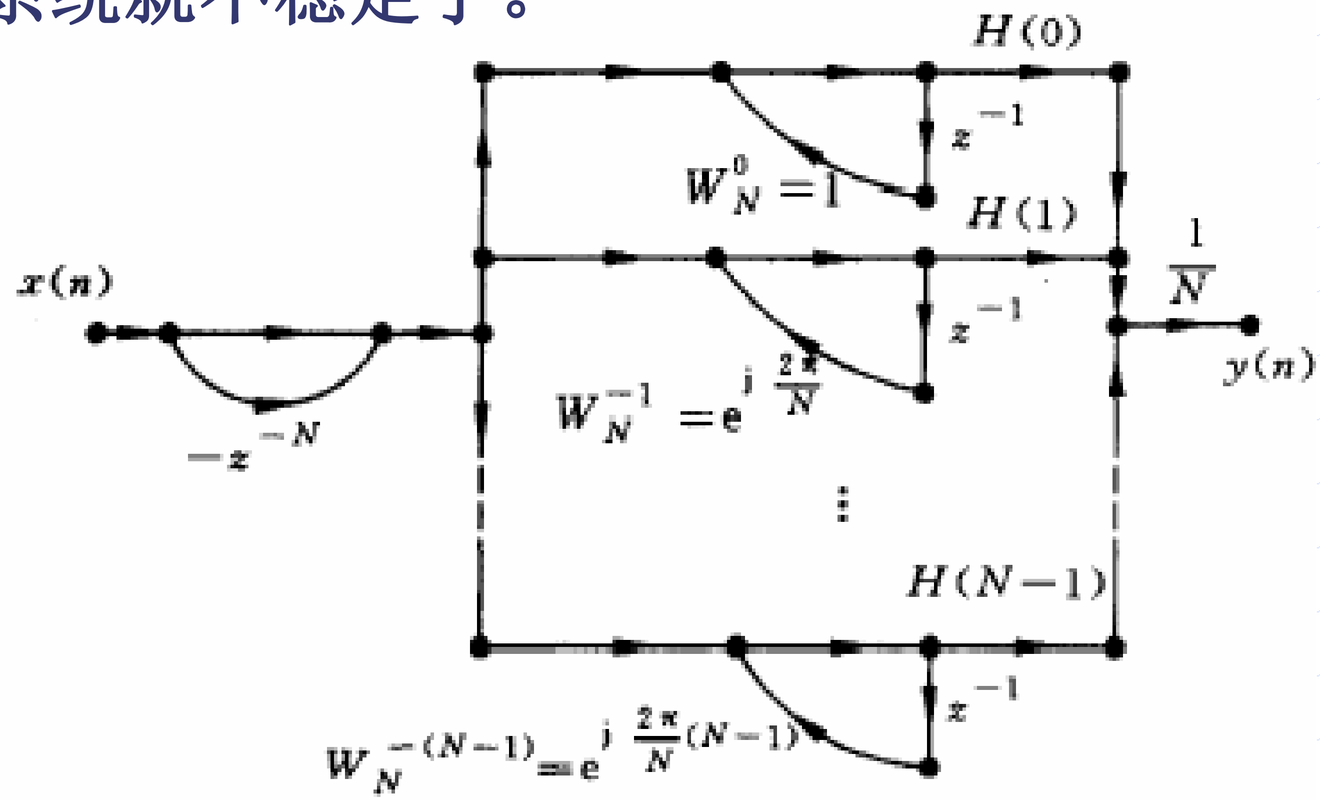


图 5-19　FIR 滤波器的频率抽样型结构

频率抽样结构修正：即将所有零极点都移动到单位圆内某一靠近单位圆、半径为r的圆上。

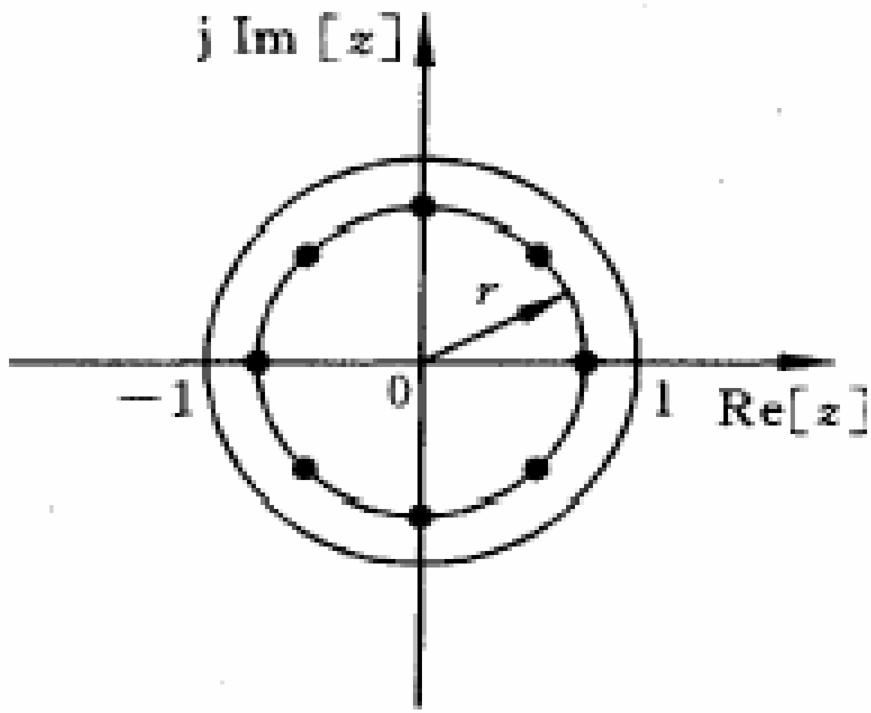
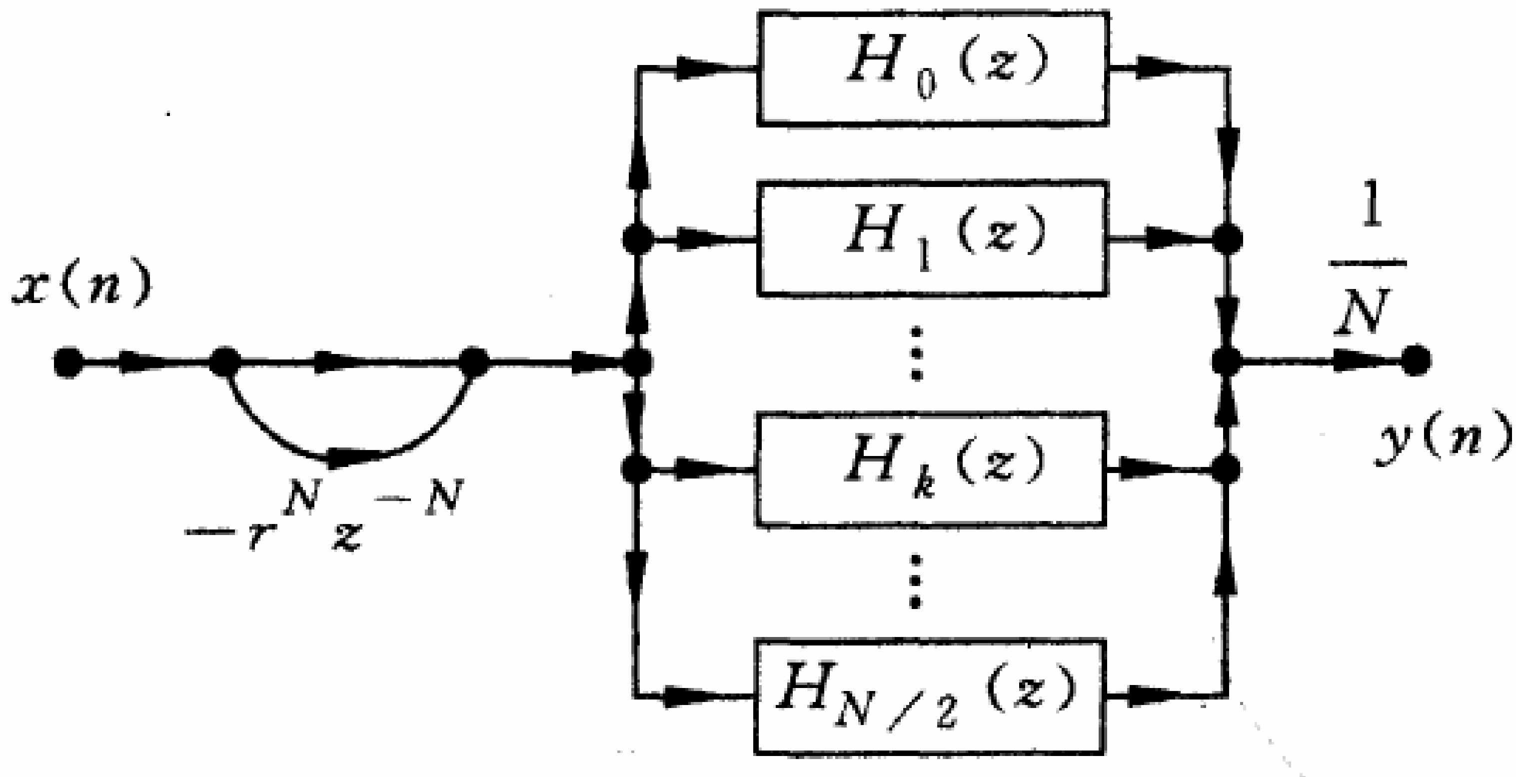


图 5-20 抽样点改到 $r\lesssim1$ 的圆上



x(n)
-r^N z^-N
H_0(z)
H_1(z)
H_k(z)
H_N/2(z)
1/N
y(n)

四、快速卷积结构

利用"时域序列的圆周卷积等效于频域的离散频谱的乘积"这一性质。具体方法如下：

1、将x(n)和h(n)变成L点序列，

$$x(n)=\begin{cases} x(n), & 0\le n\le N_1-1 \\ 0 & N_1\le n\le L-1 \end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases} h(n), & 0\le n\le N_2-1 \\ 0 & N_2\le n\le L-1 \end{cases}$$

2、求x(n)和h(n)各自的L点DET

X(k)=DET[x(n)]，　L点

H(k)=DET[h(n)]，　L点

3. 将X(k)与H(k)相乘得Y(k)

4. 求Y(k)的L点IDET，得y(n)

$$y(n) = IDET[y(k)] = IDET[X(k)H(k)] = x(n) \otimes h(n)$$

则L点的圆周卷积就能代表线性卷积

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = x(n) * h(n) \quad 0 \le n \le N_1 + N_2 - 2$$

这就得到图5.25的快速卷积结构。

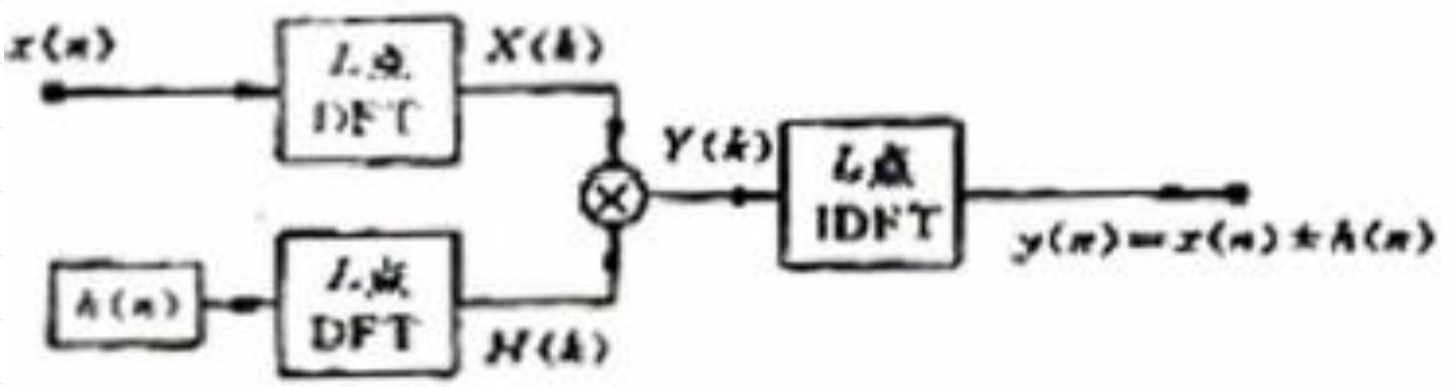


图 5.13 FIR 滤波器的快速卷积结构

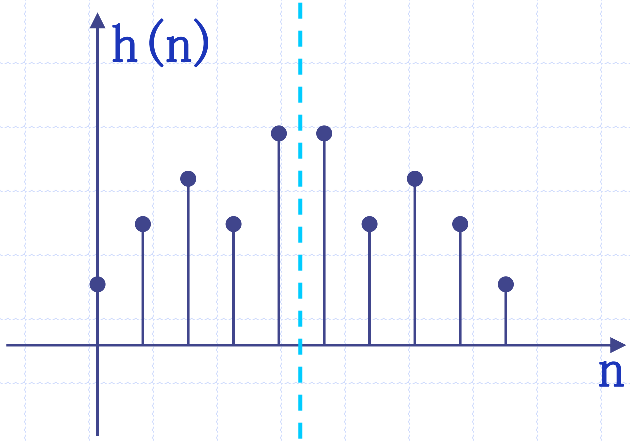
五、线性相位FIR滤波器的结构

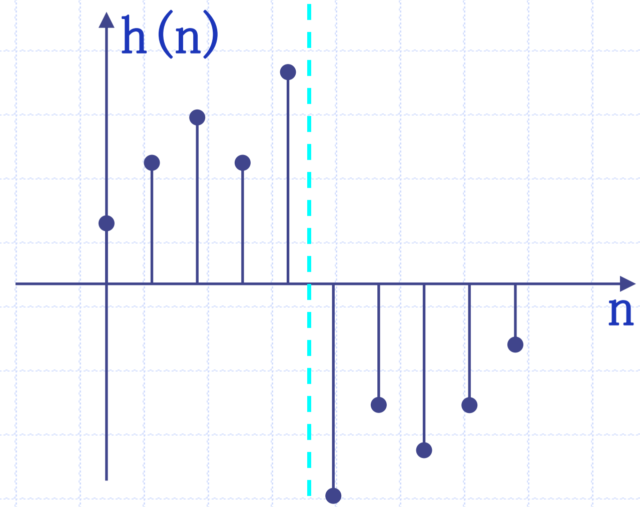
如果FIR滤波器单位冲激响应h(n)为实数，$0 \le n \le N-1$
且满足下列条件

偶对称 $h(n) = h(N-1-n)$

奇对称 $h(n) = -h(N-1-n)$

则其对称中心在 $n = (N-1)/2$，则其具有严格线性相位。

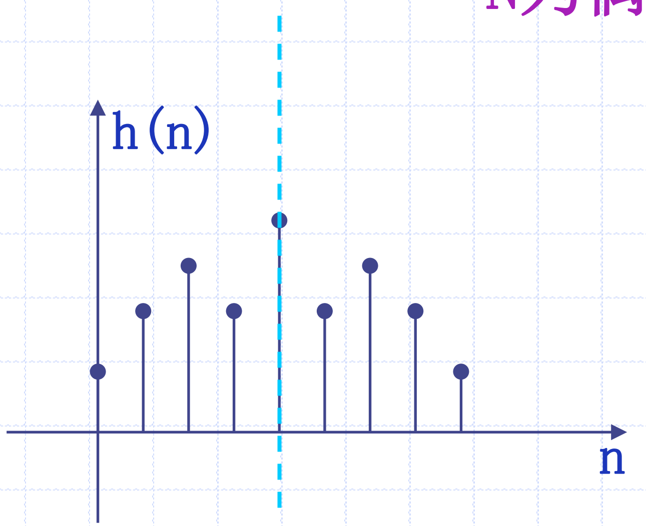


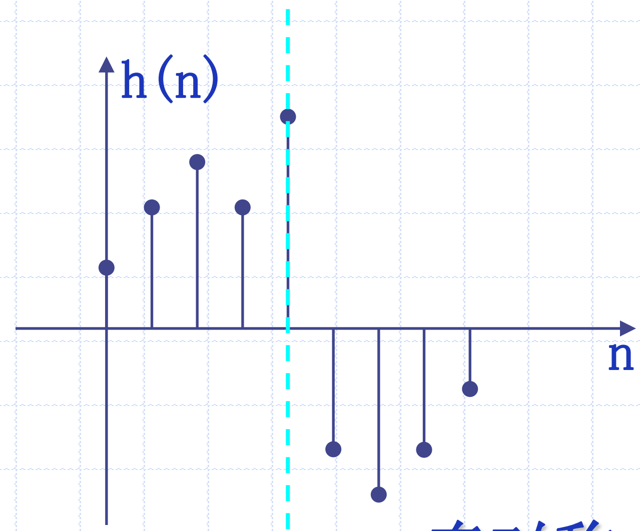


偶对称

N为偶数，如图中N＝10

奇对称





偶对称

N为奇数，如图中N＝9

奇对称

该滤波器结构讨论：

其冲激响应为h(n)，$0\le n\le N-1$ ，满足上述对称条件，其系统函数为

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

当N为奇数时

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)z^{-n}+h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}}+\sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

在第二个和式中令n=N-1-m, 再将m换成n，可得

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)z^{-n}+h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}}+\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(N-1-n)z^{-(N-1-n)}$$

代入线性相位奇偶对称条件 $h(N-1-n)=\pm h(n)$, 可得

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)\left[z^{-n}\pm z^{-(N-1-n)}\right]+h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}}$$

可画出N为奇数，线性相位FIR滤波器的直接结构的流图。

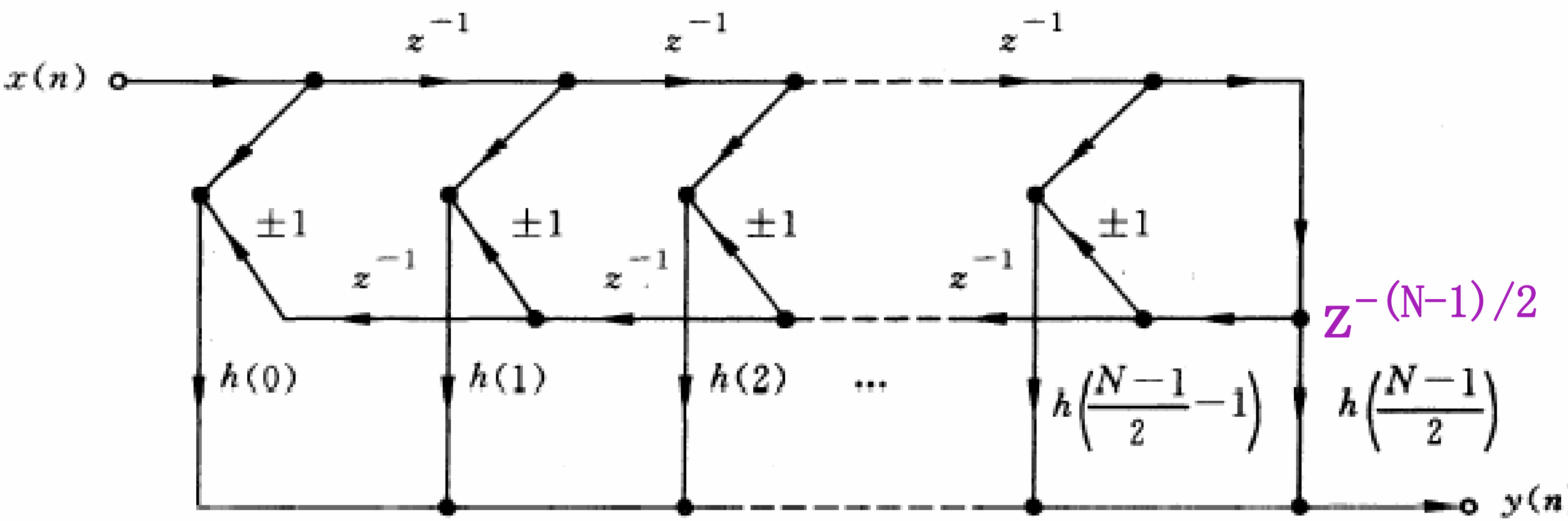


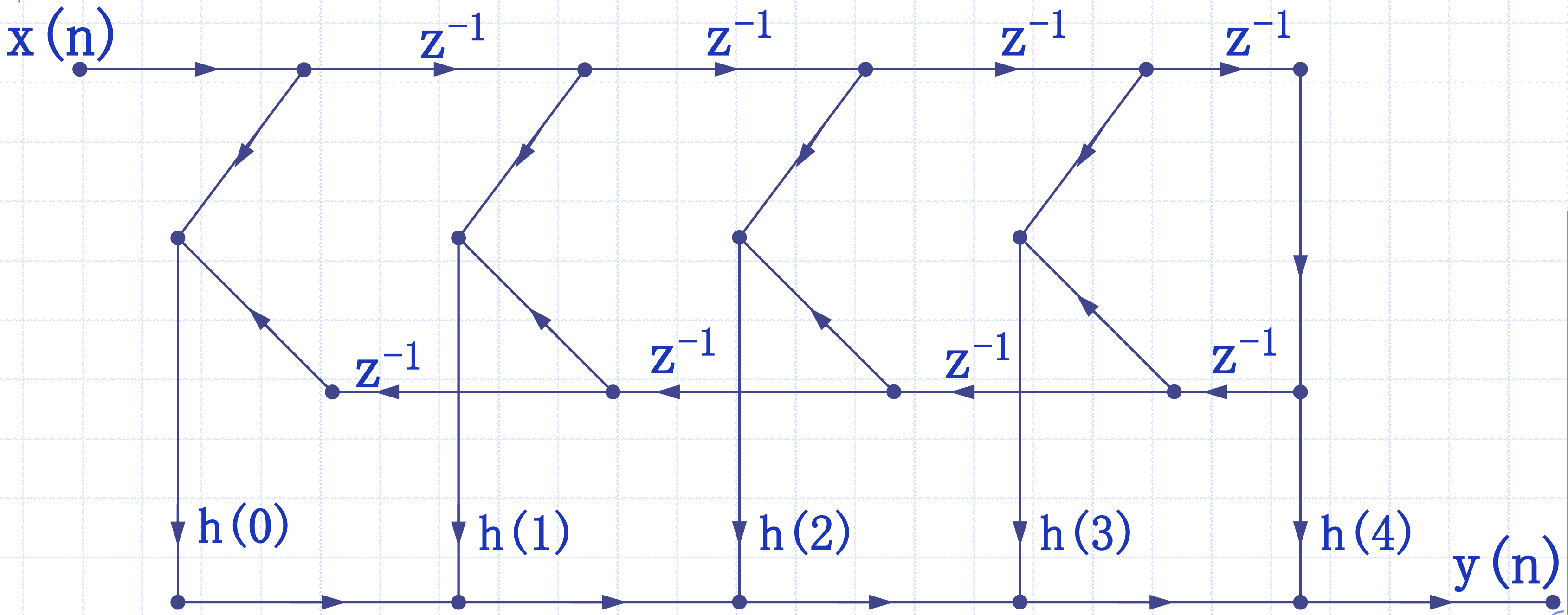
图 5-26　N 为奇数时线性相位 FIR 滤波器的直接型结构

$h(n)$偶对称时±1 取+1，

$h(n)$奇对称时±1 取−1，且 $h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$ 即 $h\left(\frac{N-1}{2}\right)$处的连线断开

N=9, 偶对称

$$H(z)=\sum_{n=0}^{3} h(n)\left[z^{-n}+z^{-(8-n)}\right]+h(4)z^{-4}$$



当N为偶数时

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}h(n)z^{-n}+\sum_{n=N/2}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

在第二个和式中，令n=N-1-m, 再将m换成n可得

$$H(z)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}h(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{(N/2)-1}h(N-1-n)z^{-(N-1-n)}$$

代入线性相位奇偶对称条件可得

$$H(z)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}h(n)\left[\,z^{-n}\pm z^{-(N-1-n)}\,\right]$$

该滤波器结构流图如图5.27所示。

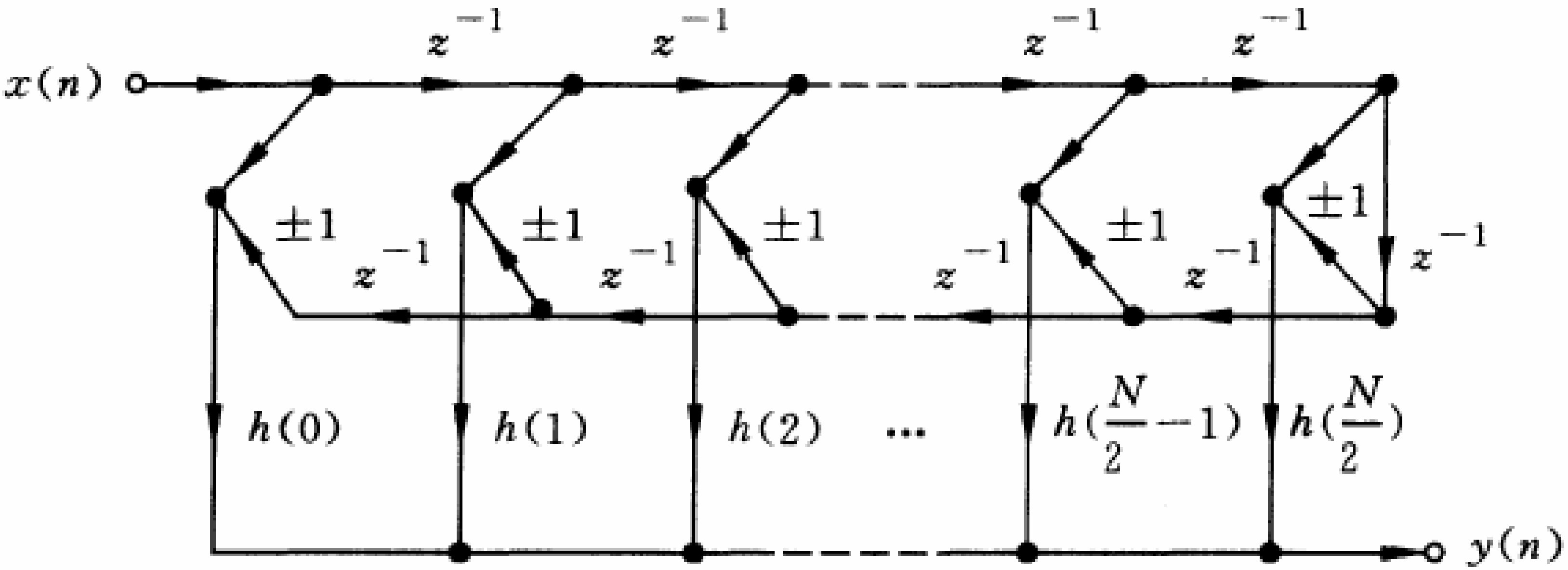


图 5-27　N 为偶数时，线性相位 FIR 滤波器的直接型结构

($h(n)$偶对称时±1取$+1$，$h(n)$奇对称时±1取-1)

N=10, 偶对称

$$H(z)=\sum_{n=0}^{4}h(n)\left[\ z^{-n}+z^{-(9-n)}\ \right]$$