考研真题 > 不定积分与定积分 > 第一个公式

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx \quad (2020\text{数二})$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx$$

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}+\frac{\arcsin\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)x}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\pi/2}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

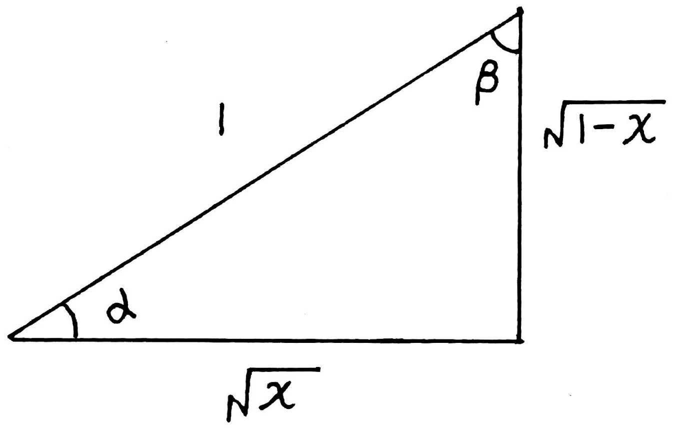
$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}d(2x-1)$$

$$=\frac{\pi}{4}\arcsin(2x-1)\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$x(1-x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\alpha = \arcsin\sqrt{1-x}$$

$$\beta = \arcsin\sqrt{x}$$



考研真题 > 不定积分与定积分 > 第一个公式

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$ (2020数二)

简化

拓展 $$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}+1}dx$$

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}}\cdot 2t\,dt$$

令 $\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2$

$x:0\to 1 \quad t:0\to 1$

$$= \int_0^1 \frac{2\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= \int_0^1 2\arcsin t\, d\arcsin t$$

巧妙

不适用

$$= \arcsin^2 t\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

考研真题 > 不定积分与定积分 > 第一个公式

拓展 $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)+1}}dx$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx$$

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)+1}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)+1}}+\frac{\arcsin\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)x+1}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\pi/2}{\sqrt{x(1-x)+1}}dx$$

$$x(1-x)+1=\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt5}x-\frac{1}{\sqrt5}\right)^2}}d\left(\frac{2}{\sqrt5}x-\frac{1}{\sqrt5}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt5}x-\frac{1}{\sqrt5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx \quad (2019数二)$$

为什么能这样待定？

为什么要这样待定？

$$\begin{cases} P = A \\ Q = B - A \end{cases} \qquad \begin{cases} M = 2C \\ N = C + D \end{cases}$$

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = A\frac{1}{x-1} + B\frac{1}{(x-1)^2} + C\frac{2x+1}{x^2+x+1} + D\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{Px+Q}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} + \frac{C(2x+1)+D}{x^2+x+1}$$

分式分解定理

省去一些中间过程

设$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$为有理真分式，其中$Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$且$Q_1(x)$，$Q_2(x)$互素

则存在唯一一组多项式$P_1(x)$，$P_2(x)$使得$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$

其中$\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$,$\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$为真分式

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx \quad (2019数二)$$

赋值法
对应系数

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=A\frac{1}{x-1}+B\frac{1}{(x-1)^2}+C\frac{2x+1}{x^2+x+1}+D\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$3x+6=(A(x-1)+B)(x^2+x+1)+(C(2x+1)+D)(x-1)^2$$

$$\begin{aligned} x=1 &\quad \Rightarrow 9=3B \\ x=0 &\quad \Rightarrow 6=B-A+C+D \\ x=-1 &\quad \Rightarrow 3=B-2A-4C+4D \\ &\quad\quad 0=A+2C \end{aligned} \qquad \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=0 \end{cases}$$

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=-2\frac{1}{x-1}+3\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx=-2\ln|x-1|-3\frac{1}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx\ (x>0)\quad (2009数二)$$

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx = x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)-\int \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{x}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x dx$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{x}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x dx = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{x\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\sqrt{\frac{1+x}{x}}}dx$$

令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$

有理化

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{1}{t^2-1}(1+t)t}\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt$$

$$= \int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}dt$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx\ (x>0) \quad (2009数二)$$

$$t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}>1$$

$$\int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}dt=\int\left(-\frac{1}{2(t+1)^2}-\frac{1}{4(t+1)}+\frac{1}{4(t-1)}\right)dt=\frac{1}{2(t+1)}-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{4}\ln(t-1)+C$$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-1)}=A\frac{1}{(t+1)^2}+B\frac{1}{t+1}+C\frac{1}{t-1}$$

赋值法

对应系数

$$1=A(t-1)+B\left(t^2-1\right)+C(t+1)^2$$

$$t=1 \quad \Rightarrow 1=4C \qquad C=1/4$$

$$t=-1 \quad \Rightarrow 1=-2A \qquad A=-1/2$$

$$0=B+C \qquad B=-1/4$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

设 $\int_0^a xe^{2x}dx=\frac{1}{4}$，则 $a=$ ______ (2014数三)

$$\int xe^{2x}dx=(mx+n)e^{2x}+C$$

$$xe^{2x}=(2mx+2n+m)e^{2x}$$

$$\begin{cases}1=2m\\0=2n+m\end{cases}\qquad\begin{cases}m=\frac{1}{2}\\n=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\int xe^{2x}dx=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{2x}+C\qquad\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right)e^{2a}-\left(-\frac{1}{4}\right)\qquad a=\frac{1}{2}$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，$\lambda>0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=$ ______ (2011数二)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}dx$$

$$\int \lambda x e^{-\lambda x}dx=(mx+n)e^{-\lambda x}+C$$

$$\lambda x e^{-\lambda x}=(-\lambda m x-\lambda n+m)e^{-\lambda x}$$

$$\begin{cases}\lambda=-\lambda m\\ 0=-\lambda n+m\end{cases} \qquad \begin{cases}m=-1\\ n=-\dfrac{1}{\lambda}\end{cases}$$

$$\int \lambda x e^{-\lambda x}dx=\left(-x-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}+C \qquad \int_{0}^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx=$______ (2009数二)

循环

$$\int e^{-x}\sin nx dx=e^{-x}(a\sin nx+b\cos nx)+C$$

$$e^{-x}\sin nx=e^{-x}(-a\sin nx-b\cos nx+an\cos nx-bn\sin nx)$$

$$\begin{cases}1=-a-bn\\0=-b+an\end{cases}\qquad\begin{cases}a=-\dfrac{1}{1+n^2}\\[2ex] b=-\dfrac{n}{1+n^2}\end{cases}$$

$$\int e^{-x}\sin nx dx=e^{-x}\frac{-\sin nx-n\cos nx}{1+n^2}+C$$

$$\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx=e^{-1}\frac{-\sin n-n\cos n}{1+n^2}-\frac{-n}{1+n^2}$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$$\int f(x)g(x)dx=\int f(x)dG(x)=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx$$

$G(x)$是$g(x)$的原函数

$$\int f(x)g(x)dx\to\int f'(x)G(x)dx$$

消去$f(x)$

$f(x)$复杂　$f'(x)$简洁　　简化被积函数

特别地，当$f(x)$是多项式时，可以局部实现降次

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx \quad (2013数一)$$

$$\int f(x)g(x)dx \to \int f'(x)G(x)dx$$

$$\int\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$$

$$\int \ln x\cdot\frac{1}{(1+x)^2}dx \to \int\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{1+x}dx = \int\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \ln|1+x|-\ln|x|+C = \ln\left|\frac{1+x}{x}\right|+C$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx \quad (2017数二)$$

$$\int f(x)g(x)dx \to \int f'(x)G(x)dx$$

$$\int \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx$$

$$\int \ln(1+x)\cdot\frac{1}{(1+x)^2}dx \to \int \frac{1}{1+x}\cdot\frac{-1}{1+x}dx = \frac{1}{1+x}+C$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx \qquad (2006数一)$$

$$\int f(x)g(x)dx \to \int f'(x)G(x)dx$$

令$\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} \qquad x:1 \to 2 \quad t:1 \to \frac{1}{2}$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} t^3 e^t \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int_1^{\frac{1}{2}} te^t dt$$

$$\int t \cdot e^t dt \to \int 1 \cdot e^t dt = e^t + C$$

$$e^t dt = de^t$$

$$\int te^t dt = \int tde^t = te^t - \int 1 \cdot e^t dt$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$ (2011数三)

$\int f(x)g(x)dx \to \int f'(x)G(x)dx$

$$\int\left(\arcsin\sqrt{x}+\ln x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx \to \int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)\cdot 2\sqrt{x}dx$$

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=-2\sqrt{1-x}+4\sqrt{x}+C$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}dx=d\left(2\sqrt{x}\right)$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$ (2018数一)

$\int f(x)g(x)dx \to \int f'(x)G(x)dx$

$$\to \int \frac{e^{2x}}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

令$\sqrt{e^x-1}=t \Rightarrow e^x=t^2+1 \Rightarrow x=\ln\left(t^2+1\right)$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\left(t^2+1\right)^2}{t}\frac{2t}{t^2+1}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(t^2+1\right)dt=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{6}\left(\sqrt{e^x-1}\right)^3+\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (2008\text{数二})$$

$$\int f(x)g(x)dx \to \int f'(x)G(x)dx$$

消去根号 $\quad x=\sin t \quad x=\cos t$

$$\text{令}x=\sin t \quad t\in(0,\frac{\pi}{2}) \Rightarrow t=\arcsin x \qquad x:0\to 1 \quad t:0\to\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\cdot t}{\cos t}\cdot\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot t dt$$

降次 $\quad \int \sin^2 t\cdot t dt \to \int \frac{2t-\sin 2t}{4}\cdot 1 dt$

$$\int \sin^2 t dt=\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{2t-\sin 2t}{4}+C$$

$$=\frac{2t^2+\cos 2t}{8}+C$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$ (2010数一)

$\int f(x)g(x)dx \to \int f'(x)G(x)dx$

令$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2$ $x:0\to\pi^2$ $t:0\to\pi$

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx = \int_0^{\pi} t\cos t\cdot 2tdt = 2\int_0^{\pi} t^2\cos tdt$$

$$\int t^2\cdot\cos tdt \to \int 2t\cdot\sin tdt \to \int 2\cdot(-\cos t)dt = -2\sin t + C$$

降次

$$\int t^3\cdot\cos tdt$$

$$\int t^4\cdot\cos tdt \qquad \int t^n\cdot\cos tdt$$

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$

(1)证明：数列$\{a_n\}$单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=0,1,2,\cdots)$ (2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$a_n-a_{n-1}=\int_0^1 (x^n-x^{n-1})\sqrt{1-x^2}\,dx\le 0$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$ 消去根号 分部积分公式 方法一

(1)证明：数列$\{a_n\}$单调减少，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=0,1,2,\cdots)$ (2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

令$x=\sin\theta\quad \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\qquad x:0\to1\quad \theta:0\to\frac{\pi}{2}\qquad \sin^n\theta d\theta=dF(\theta)$

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\cos\theta\cdot\cos\theta d\theta=\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\sin^{n+1}\theta$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\cos\theta\sin^{n+1}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta(-\sin\theta)d\theta\right)=\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}\theta d\theta$$

$$(n+1)a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}\theta d\theta\qquad (n-1)a_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta$$

$$(n-1)a_{n-2}-(n+1)a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^n\theta-\sin^{n+2}\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\cos^2\theta d\theta=a_n$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

方法二

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=0,1,2,\cdots)$ (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\cos\theta\cdot\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\cos\theta d\sin\theta$$

$$=\sin^{n+1}\theta\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left(n\sin^{n-1}\theta\cos^2\theta-\sin^{n+1}\theta\right)d\theta$$

$$=-n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\cos^2\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}\theta d\theta$$

$$=-na_n+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}\theta d\theta \qquad (n+1)a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}\theta d\theta$$

$$(n-1)a_{n-2}-(n+1)a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^n\theta-\sin^{n+2}\theta\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\cos^2\theta d\theta=a_n$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

方法三

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=0,1,2,\cdots)$ (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}\theta d\theta$$

$$=I_n-I_{n+2}$$

$$=I_n-\frac{n+1}{n+2}I_n$$

$$a_n=\frac{1}{n+2}I_n \qquad a_{n-2}=\frac{1}{n}I_{n-2}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-2}}=\frac{n}{n+2}\cdot\frac{I_n}{I_{n-2}}=\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{n+2}$$

华里士公式

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$I_n=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{是正偶数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{是正奇数}\end{cases}$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$

方法四

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=0,1,2,\cdots)$ (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,d\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{1-x^2}\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

形式上接近

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+2}\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx \qquad (n+1)a_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx$$

$$(n-1)a_{n-2}-(n+1)a_n=\int_0^1\frac{(x^n-x^{n+2})\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx=a_n$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\ (n=0,1,2,\cdots)$

方法五

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=0,1,2,\cdots)$ (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1 x^{n-1}\cdot x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot(n-1)x^{n-2}dx\right)$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx$$

形式上接近

$$=\frac{n-1}{3}\left(\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\right)=\frac{n-1}{3}(a_{n-2}-a_n)$$

$$\sqrt{1-x^2}dx=d\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

方法五

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\ (n=0,1,2,\cdots)$

(1)证明：数列$\{a_n\}$单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=0,1,2,\cdots)$ (2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$$a_n-a_{n-1}=\int_0^1(x^n-x^{n-1})\sqrt{1-x^2}dx\le 0$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{a_n}{a_{n-2}}=\frac{n-1}{n+2}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=a$$

分析

$$a^2=1\Rightarrow a=1$$

$$\frac{n}{n+3}=\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\le\frac{a_n}{a_{n-1}}\le 1$$

$$\frac{n-1}{n+2}=\frac{a_n}{a_{n-2}}\le$$

求曲线 $y=e^{-x}\sin x\ (x\geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积　　(2019数一数三)

$0\leq e^{-x}|\sin x|\leq e^{-x}$　$\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$ 收敛 $\Rightarrow\int_0^{+\infty}e^{-x}|\sin x|dx$ 收敛　　比较审敛原理

$\int_0^{+\infty}e^{-x}|\sin x|dx=\lim\limits_{z\to+\infty}\int_0^{z}e^{-x}|\sin x|dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|dx$　　归结原理

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

求曲线 $y=e^{-x}\sin x\ (x\ge 0)$ 与 x 轴之间图形的面积　(2019数一数三)

$$\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|dx=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin xdx=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}(e^{-k\pi}+e^{-(k+1)\pi})$$

$$x\in[k\pi,(k+1)\pi]\qquad |\sin x|=(-1)^k\sin x$$

$$\sin x=-\sin(x-\pi)\Rightarrow \sin x=(-1)^k\sin(x-k\pi)=(-1)^k|\sin x|$$

$$\int e^{-x}\sin xdx=-\frac{\sin x+\cos x}{2}e^{-x}+C$$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin xdx=\frac{\cos k\pi}{2}e^{-k\pi}-\frac{\cos(k+1)\pi}{2}e^{-(k+1)\pi}=\frac{(-1)^k}{2}(e^{-k\pi}+e^{-(k+1)\pi})$$

$$\cos x=-\cos(x-\pi)\quad\Rightarrow \cos k\pi=(-1)^k\cos 0\qquad \cos(k+1)\pi=(-1)^{k+1}\cos 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}(e^{-k\pi}+e^{-(k+1)\pi})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-\pi}}+\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\right)$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

求曲线 $y=e^{-x}\sin x\ (x\geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积　(2019数一数三)

$$\int e^{-x}\sin x dx=-\int \sin x de^{-x}$$

两次拿指数函数凑微分　分部积分法产生循环

$$=-\left(\sin xe^{-x}-\int -e^{-x}\sin x dx\right)=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x dx$$

$$=-e^{-x}\sin x-\int \cos x de^{-x}$$

$$=-e^{-x}\sin x-\left(\cos xe^{-x}-\int -e^{-x}\sin x dx\right)=-e^{-x}\sin x-\cos xe^{-x}-\int e^{-x}\sin x dx$$

$$\int e^{-x}\sin x dx=-\int e^{-x} d\cos x$$

两次拿三角函数凑微分

$$=-\left(e^{-x}\cos x-\int -e^{-x}\cos x dx\right)=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x dx$$

$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x} d\sin x$$

$$=-e^{-x}\cos x-\left(e^{-x}\sin x-\int -e^{-x}\sin x dx\right)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x-\int e^{-x}\sin x dx$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

求曲线 $y=e^{-x}\sin x\ (x\geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积 (2019数一数三)

$$\int e^{-x}\sin x dx=(A\sin x+B\cos x)e^{-x}+C$$

待定系数法

$$e^{-x}\sin x=(-A\sin x-B\cos x+A\cos x-B\sin x)e^{-x}$$

最直接

$$\begin{cases}1=-A-B\\0=-B+A\end{cases}\qquad A=B=-\frac{1}{2}$$

$$I=\int e^{-x}\sin x dx\quad J=\int e^{-x}\cos x dx$$

组合法

$$(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\quad\Rightarrow e^{-x}\sin x+C=-I+J$$

$$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x\quad\Rightarrow e^{-x}\cos x+C=-I-J$$

第六讲：考研真题 > 不定积分与定积分

求曲线 $y=e^{-x}\sin x\ (x\geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积　　(2019数一数三)

计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x}|\sin x|dx$　　(2012年第四届初赛)