习题一

一、判断题 (1) √；（2） ×

二、单项选择题　　C；　A

三、填空题

1 导数,常;　2 阶 ;　3 初始;　4、xy或$\ln(xy)$

四、计算题：

1、

$$\frac{2x}{1-x^2}dx=\frac{1}{y+y^2}dy$$

$$\int\frac{2x}{1-x^2}dx=\int\frac{1}{y+y^2}dy$$

$$-\ln\left|1-x^2\right|+c'=\ln\left|\frac{y}{1+y}\right|$$

$$\frac{y(1-x^2)}{1+y}=c$$

故通解为：$y(1-x^2)=c(1+y)$　（c为任意常数）

2、

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{y}dy;y\neq 0$$

$$\int-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{y}dy$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+c_1=\ln\left|y\right|,y=0$$

$$y=ce^{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$x=-1,y=2,c=2$$

故特解为：$y=2e^{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

3 、

$$\frac{1}{x}dx=\frac{1}{y\ln y}dy,y\neq 1$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{y\ln y}dy$$

$$\ln\left|x\right|+c_1=\ln\left|\ln y\right|,y=1$$

$$\ln y=cx,$$

故通解为：$y=e^{cx}$（c为任意常数）

习题二

一、判断题 (1) √；（2） √

二 、　　C

三、

1、

$$u=\frac{y}{x}, y=ux, \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$
$$u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u$$
$$\cot u du=\frac{1}{x}dx, \int \cot u du=\int \frac{1}{x}dx$$
$$\ln|\sin u|=\ln|x|+c_1$$
$$\sin u=cx,$$
$$\text{通解为:} \sin(\frac{y}{x})=cx$$

2、

$$y=ux, \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$
$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln u$$
$$\frac{1}{u(\ln u-1)}du=\frac{1}{x}dx, \int \frac{1}{u(\ln u-1)}du=\int \frac{1}{x}dx$$
$$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+c_1$$
$$\ln u-1=cx,$$
$$\text{通解为:} \ln\frac{y}{x}-1=cx$$

3、

$$y=ux, \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$
$$u+x\frac{du}{dx}=u+\frac{2}{u}, udu=\frac{2}{x}dx$$
$$\frac{1}{2}u^2=\ln x^2+c_1$$
$$y^2=2x^2\ln x^2+cx^2, x=1, y=6, c=36$$

特解为：$y^2=2x^2\ln x^2+36x^2$

4、

$$u=\frac{x}{y}, x=uy, \frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$$
$$u+y\frac{du}{dy}=u-\frac{1}{u}, -udu=\frac{1}{y}dy$$

$\int -udu=\int \frac{1}{y}dy$， 则 $-\frac{1}{2}u^2=\ln|y|+c_1$

于是通解为：$x^2+y^2\ln y^2+c=0$

习题三

一 C; C; B

二

1

$$P(x)=2x,Q(x)=e^{-x^2}$$
$$y=e^{-\int 2xdx}(\int e^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx+c)$$
$$=e^{-x^2}(x+c)$$

2

$$P(x)=\tan x,Q(x)=\sin 2x$$
$$y=e^{-\int \tan xdx}(\int \sin 2xe^{\int \tan xdx}dx+c)$$
$$=e^{\ln|\cos x|}(\int \frac{\sin 2x}{}|\cos x|dx+c)$$
$$=-2(\cos x)^2+c\cos x$$

3

$$y=e^{-\int 2xdx}(\int 8xe^{\int 2xdx}dx+c)$$
$$=e^{-x^2}(\int 8xe^{x^2}dx+c)$$
$$=e^{-x^2}(4e^{x^2}+c),x=0,y=2,c=-2$$

特解为：$y=e^{-x^2}(4e^{x^2}-2)$

4、

$$z=y^{-1},\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx},\frac{dy}{dx}=-y^2\frac{dz}{dx}$$
$$-y^2\frac{dz}{dx}+\frac{y}{x}=2y^2\ln x$$
$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-2\ln x$$
$$z=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int -2\ln xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+c)$$
$$=x[-(\ln x)^2+c]$$
$$=-x(\ln x)^2+cx$$

故通解为：（$-x(\ln x)^2+cx$）$y=1$

习题四

1、

$$y'=\int(x+\sin x)dx=\frac{1}{2}x^2-\cos x+c_1$$

通解为：$y=\int(\frac{1}{2}x^2-\cos x+c_1)dx=\frac{1}{6}x^3-\sin x+c_1x+c_2$

2、

$$y' = p, y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x} p = -1$$

$$p = e^{-\int \frac{1}{x} dx} (\int -e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c_1)$$

$$= \frac{1}{x} (-\frac{1}{2} x^2 + c_1') = \frac{c_1}{x} - \frac{1}{2} x$$

通解为：$y = -\frac{1}{4} x^2 + c_1 \ln|x| + c_2$

3、

$$y' = p, y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x}{p}, pdp = xdx$$

$$p^2 = x^2 + c_1$$

$$y' = \pm\sqrt{x^2 + c_1}, y'(1) = 1, c_1 = 0$$

$$y' = x$$

$$y = \frac{1}{2} x^2 + c_2, y(1) = -1, c_2 = -\frac{3}{2}$$

特解为：$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2}$

4、

$$y' = p, y'' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0, p \neq 0 y \neq 0$$

$$\frac{1}{p} dp = \frac{1}{y} dy, \ln|p| = \ln|y| + \ln c_1', p = 0$$

$p = c_1 y,$则$y' = \frac{dy}{dx} = c_1 y,$

这样$\ln|y| = c_1 x + c_2'$

故通解为：$y = c_2 e^{c_1 x}$

习题五

一

D; D;

二

1 $y=c_1e^{x^2}+c_2xe^{x^2}$;

2 $y=c_1e^x+c_2e^{x^2}+x+2+xe^x\ln|x|$

三

1

$$r^2-r-6=0,r_1=-2,r_2=3$$
$$\text{通解为：}y=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}$$

2

$$r^2+12r+36=0$$
$$r_1=r_2=-6$$
$$\text{通解为：}y=(c_1+c_2x)e^{-6x}$$

3

$$r^2+r+5=0$$
$$r_1=-2-i,r_2=-2+i$$
$$\text{通解为：}y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$

四、

$$r^2+4r+4=0,r_1=-2,r_2=-2$$
$$\text{通解为：}y=(c_1+c_2x)e^{-2x},$$
$$x=0\text{时},y=-1,y'=4,$$
$$\text{于是}c_1=-1,c_2=2$$
$$\text{故特解为：}y=(2x-1)e^{-2x}$$

习题六

一、 1 $x(ax^3+bx^2+cx+d)$;

2 $e^{3x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$;

3 $x(ax+b)+cxe^{-x}$

二

1

$$r^2-2r-3=0,r_1=-1,r_2=3$$
$$\text{令y}^*=x(ax+b)e^{3x},$$
$$\text{可解得}a=\frac{1}{8},b=\frac{3}{16}$$
$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}+(\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{16}x)e^{3x}$$

2

$$r^2-6r+9=0, r_1=3, r_2=3$$
$$\text{令y}^*=ax^2e^{3x}, \text{得}a=3$$
$$y=(c_1+c_2x)e^{3x}+3x^2e^{3x}$$

3 、

$$r^2+4=0,$$
$$r_1=2i, r_2=-2i$$
$$\text{令y}^*=x(a\cos 2x+b\sin 2x),$$
$$\text{可解得}a=-\frac{1}{8}, b=0$$
$$y=(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)-\frac{1}{8}x\cos 2x$$

4

$$\varphi'(x)=e^x+x\varphi(x)-\int_0^x\varphi(t)dt-x\varphi(x)$$
$$\varphi''(x)=e^x-\varphi(x), \varphi(0)=1, \varphi'(0)=1$$
$$r^2+1=0, r_1=i, r_2=-i$$
$$\text{令}y^*=c_1e^x, \text{可解得}c_1=\frac{1}{2}$$

$$\text{故}\varphi(x)=c_2\cos x+c_3\sin x+\frac{1}{2}e^x$$
$$\text{又由于}\varphi(0)=1,\ \ \varphi'(0)=1,\ \ \text{可得}$$
$$c_2=\frac{1}{2},\ \ c_2=\frac{1}{2},$$
$$\text{故}\varphi(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}e^x$$

第七章复习题

一、判断题 (1) ×；（2） √

二

C; A; C

三

1 $y=\frac{1}{2}c_1x^2+c_2x-e^{-x}+c_3$;

2 $y^*=x(ax+b)+cxe^{-4x}$

四

1

$$\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{2x}{1+x^2}dx,\arctan y=\ln(1+x^2)+c$$

$$y=0,x=1,c=-\ln 2$$

$$\text{特解:}\arctan y=\ln\frac{1+x^2}{2}$$

2

$$y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u+3\tan u,\cot udu=\frac{3}{x}dx$$

$$\ln|\sin u|=\ln|x^3|+\ln c$$

$$\sin u=cx^3,$$

$$\text{通解为:}\sin\frac{y}{x}=cx^3$$

3

$$z=y^{-1},\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=-y^2\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x$$

$$z=e^{\int 2xdx}(\int -2xe^{-\int 2xdx}dx+c)=e^{x^2}(\int -2xe^{-x^2}dx+c)=1+ce^{x^2}$$

通解为：$y=\dfrac{1}{1+ce^{x^2}}$

4

$$r^2-3r+2=0,r_1=1,r_2=2$$

$$y^*=e^x(a_1\sin x+a_2\cos x),a_1=-1,a_2=-1$$

通解为：$y=c_1e^x+c_2e^{2x}-e^x(\sin x+\cos x)$

习题七

一．×××　√ √ √ √

二．A　D　C

三．xoy 面　　(-2,3,0)　 -2$\vec{a}$　 $\vec{a}+\vec{b}$　 $\vec{a}-\vec{b}$　 $2\sqrt{3}$　 yoz 坐标面

四．$\cos\alpha=\frac{-1}{2},\cos\beta=\frac{-\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2}$　　（$\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}$）

五．（1）（－1，3，3）　（2）$2\sqrt{3}$　（3）$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{3},\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{3},\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$

习题八

一．××××√

二．C　D

三．1．（－4，2，－4）　2.　－10,　2

3.　7　4.　$\frac{\pi}{4}$　5.　$2\sqrt{2}$

四．$S=\frac{15}{2}$

五．$\pm\frac{1}{\sqrt{93}}$（5，－8，2）

习题九

一．×√×

二．CDDCC

三．1．± 2　2.　$x^2+y^2+z^2=3$　3.　$y^2+z^2=5x$　4.　$\frac{\pi}{3}$

四．1．由 xoz 面上的曲线 $z=2x^2$ 绕 z 轴旋转得到的

2．由 xoy 面上的曲线 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 绕 x 轴旋转得到的

习题十

一．×√×

二．BD

三．1．点（$-\frac{4}{3},-\frac{17}{3}$），过点（$-\frac{4}{3},-\frac{17}{3},0$）平行于 z 轴的直线

2．$\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=3\end{cases}$,　$(0,0,3)$,　1

3．$\begin{cases}y=(x-1)^2\\z=2x-1\end{cases}$

四． $\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\alpha \\ y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\alpha \\ z = 3\sin\alpha \end{cases}$

五．在 xoy 平面的投影曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

在 yoz 平面的投影曲线 $\begin{cases} x^2 + (1 - y - z)^2 = z \\ x = 0 \end{cases}$

在 xoz 平面的投影曲线 $\begin{cases} x^2 + (1 - x - z)^2 = z \\ y = 0 \end{cases}$

习题十一

一．DCC

二．1. $3x - 7y + 5z - 14 = 0$　　2.（1，－1,3）

3. $\dfrac{10}{3}$　　4. －4, 3

三． $x + 7y + 8z + 12 = 0$

四． $9x - y + 3z - 16 = 0$

五．面方程： $y = 3x$　或　$x + 3y = 0$

习题十二

一． D B A C

二．1． $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{0}$

2. $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{3}$，参数方程： $x = 1 - 2t, y = 1 + t, z = 1 + 3t$

3．－1

三．直线方程： $\dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-5}$

四． $x + 5y + z - 1 = 0$

第八章复习题

一．× √ √ × ×

二．BBB

三．1． 0 2. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$ 3. $(x+y)^2+(z+1)^2=3/2$

4. 2 5. $x=z^2+y^2, z^4=x^2+y^2$

6. $\dfrac{x-2}{12}=\dfrac{y-3}{20}=\dfrac{z-1}{23}$

四． $(-1,6,3)$ $\alpha=\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{19\times 35}}=\arcsin\dfrac{\sqrt{665}}{133}$ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z-3}{2}$

五．$(2,9,6)$

六． $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$

习题十三

一． × √ ×

二、D C

三、

1、 $f(x,y)=xy$

2、 0

3、 $\{(x,y)|\ \sin(x^2+y^2)-1=0\}$

四、

1、 13

2、 6

3、 $\dfrac{1}{2}$

4 五、由于 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+x^2}=0$，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

所以极限不存在

习题十四

一． × ×

二、D　B

三、1、　-8

2、　0

四、

1、$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}\cot\frac{x^2}{y^3}$;　　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3x^2}{y^4}\cot\frac{x^2}{y^3}$

2、　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{15x^2\sqrt{\ln^3(x^3+y^2)}}{2(x^3+y^2)}$;　　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{5y\sqrt{\ln^3(x^3+y^2)}}{x^3+y^2}$

4、$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2}{z^2}x^{\frac{y^2}{z^2}-1}$;　　$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y\ln x}{z^2}x^{\frac{y^2}{z^2}}$;　　$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2y^2\ln x}{z^3}x^{\frac{y^2}{z^2}}$

五、

1、$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$;　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y^{x-1}(1+x\ln y\ )$

2、$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\ln(x^2+y)+\frac{2x^3}{x^2+y}$;　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2xy}{(x^2+y)^2}$

习题十五

一. ×　×

二、D　C

三、1、$\frac{dz}{dt}=\frac{6t-12t^2}{\sqrt{1-(3t^2-4t^3+2)^2}}$

2、$du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln xdy+yx^{yz}\ln xdz$

3、$\frac{dz}{dx}=\frac{3x^2+2e^{2x}}{1+(x^3+e^{2x})^2}$

四、

1、$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=-\frac{5}{42}$;

$dz=-0.125$

2、$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1'+y^2f_2'$;　　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_1'+2xyf_2'$

3、$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'+yg'$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6xy^2f''+g'+yg''$

4、令$u=2x+y,\quad v=3x-2y$则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2vu^{v-1}+3u^{v}\ln u$$
$$=2(3x-2y)(2x+y)^{3x-2y-1}+3(2x+y)^{3x-2y}\ln(2x+y)$$

五、证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x[y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u)]+y[x+F'(u)]$$
$$=xy+xF(u)-yF'(u)+xy+yF'(u)$$
$$=z+xy$$

习题十六

一、 1.×2. ×

二、 D B C

三、 1. 3 2. $\frac{y}{1+e^{u}}$

四、 1. $\frac{6x^2y^2-3e^{3x}}{\cos y-4x^3y}$

a) $z_x=-\frac{y}{x}$ $z_y=\frac{xz}{e^{z}-xy}$

b) $z_x=-\frac{2z+2y^2e^{-2xy^2}}{2x+ye^{-z}}$ $z_y=\frac{e^{-z}-4xye^{-2xy^2}}{2x+ye^{-z}}$

习题十七

一、 × ×

二、C C

三、1． $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 2． $(3,-12.-6)$ 3． $-\frac{1}{18}(1,2,3)$

四、1． $\frac{7\sqrt{5}}{50}$ 2． $\frac{\sqrt{2}}{2}(-6e^{-4}+1)$

3． $\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ 4． 0

习题十八

一、× ×

二、B A

三、1．$x+2y-3z+14=0$

2．$x+6y+10z-17=0$

四、1．$x-\frac{3}{2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-1}{-12}$ $x+4y-12z-\frac{11}{2}=0$

2．$x-\frac{\pi}{2}+1=y-1=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $x+y+\sqrt{2}z-\frac{\pi}{2}-4=0$

3．$12x+18y+z-30=0$ $\frac{x-1}{12}=\frac{y-1}{18}=\frac{z}{1}$

习题十九

一、× ∨

二、B A D

三、1．36 2．18

四、1．$(1,3)$ 为极大值点，极大值为 10

2．$-e^{-1}-4$ 3． 极大值6, 极大小值-2

五、$x=6, y=6, z=3$

复习题

一、∨ ×

二、D C

三、1．xy 2．$\sin(x^2+y^2)-1=0$

3．$\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2<6\text{且}x^2+y^2\ne 5\right\}$ 4．0

四、1．$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3zf_1'+yf_2'+2xf_3'$

2．$\mathrm{d}\,z=\frac{1}{3x^2z^2+4y^2z}[(2x-2xz^3)\,\mathrm{d}\,z-(4yz^2+3y^2)\,\mathrm{d}\,y$

3．$\sqrt{2}(5e^{-5}-16)$

习题二十

一、1．$\frac{2}{3}\pi R^3$ 2．0 3．6π

二、A　　B

三、1．$0 \le I \le \pi^2$

2．$36\pi \le I \le 100\pi$

习题二十一

一、1．$\frac{23}{40}$　　2．$\frac{9}{16}$　　3．$-\frac{243}{20}$　　4．$\frac{8}{3}(1-\cos 1)$

二、1．$\int_0^2 \mathrm{d}\,y \int_y^2 f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

习题二十二

一、1．$\pi(1-e^{-1})$　2．$\frac{2}{3}R^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$

二、1．$14a^4$　　2．$\frac{2\pi}{3}(|b|^3-|a|^3)$

三、$\pi(1-\cos 1)$

四、$\frac{3}{32}\pi a^4$

习题二十三

一、1．$2\pi a^2$　　2．0

二、1．$\int_0^R \mathrm{d}\,x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}\,y \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,z$

2．$\int_{-1}^1 \mathrm{d}\,x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}\,y \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,z$

三、1．$\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$　　2．$\frac{14}{45}$

四、64π

习题二十四

一、1、$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 (\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)\rho dz$　2、$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^3 \sin\varphi dr$

二、1、原式=$\iiint\limits_{\Omega} z\rho^2 d\rho d\theta dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}d\rho\int_0^1 z\rho^2dz=\frac{16}{9}$

2、原式=$\iiint\limits_{\Omega}\rho^3 d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{2}\rho^3dz=\frac{16\pi}{3}$

三、原式=$\iiint\limits_{\Omega} r^3\sin\varphi dr d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^3\sin\varphi dr=\frac{8\pi a^4}{5}(1-\frac{\sqrt{2}}{8})$

四、1、原式=$\iiint\limits_{\Omega} r^3\sin\varphi dr d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3\sin\varphi dr=\frac{\pi}{10}$

2、原式=$\iiint\limits_{\Omega} z\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{\sqrt{8-\rho^2}}z\rho dz=\frac{28\pi}{3}$

习题二十五

一、$A=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)$$

二、

$M=\iint\limits_D x|y|dxdy=2\iint\limits_{D_1}xydxdy=2\iint\limits_{D_1}\rho^3\cos\theta\sin\theta d\rho d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}\rho^3\cos\theta\sin\theta d\rho=\frac{9}{8}$ 三、将扇形顶点放在坐标原点，取 y 轴为中心轴，则质心为 $(0,\bar{y})$

$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D ydxdy, A=\frac{1}{2}a^2\times 2\alpha=\alpha a^2$

$\iint\limits_D ydxdy=\iint\limits_D\rho^2\sin\theta d\rho d\theta=\iiint\limits_{\Omega} z\rho d\rho d\theta dz=\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}d\theta\int_0^a\rho^2\sin\theta d\rho=\frac{2a^3}{3}\sin\alpha$

$\bar{y}=\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$，　　质心为 $(0,\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha})$

四、$I_y=\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_D\rho^3\cos^2\theta d\rho d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}\rho^3\cos^2\theta d\rho=\frac{5\pi R^4}{4}$

五、（1）$V=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\int_{-a}^a dx\int_{-a}^a(x^2+y^2)dy=\frac{8a^4}{3}$

（2）$\bar{x}=0,\bar{y}=0,\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} zdv=\frac{1}{V}\int_{-a}^a dx\int_{-a}^a dy\int_0^{x^2+y^2}zdz=\frac{7a^2}{15}$

质心为 $(0,0,\frac{7a^2}{15})$

（3）$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho dv=\int_{-a}^{a}dx\int_{-a}^{a}dy\int_{0}^{x^2+y^2}(x^2+y^2)\rho dz=\frac{112}{45}a^6\rho$

第十章 复习题

一、

1、$\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　　2、$e+e^{-1}-2$　　3、$\frac{4\pi R^5}{15}$　　4、$4\pi R^3$

二、B　　C　　A

三、原式=$\iint\limits_{D}\theta d\rho d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^3\theta d\rho=\frac{\pi^2}{16}$

四、原式=$\iiint\limits_{\Omega}\rho^3 d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{8}\rho^3 dz=\frac{4^5}{3}\pi$

五、$A=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}dxdy=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$

六、原式=$\iiint\limits_{\Omega}r^4\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta drd\varphi d\theta=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^4\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta dr=\frac{4}{15}$

习题二十六

一、1、$\int_0^{2\pi}a^3t(1+t^2)dt$　　2、$\sqrt{2}$

二、B　　A

三、1、原式=$\sqrt{2}+1+1=\sqrt{2}+2$

2、

原式=$\int_0^2\frac{1}{(e^t\cos t)^2+(e^t\sin t)^2+(e^t)^2}\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}dt=\int_0^2\frac{\sqrt{3}e^t}{2e^{2t}}dt=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\frac{1}{e^2})$

3、原式=$\int_{\overline{OA}}(x+y)ds+\int_{\overline{AB}}(x+y)ds+\int_{\overline{OB}}(x+y)ds=\int_0^1 xdx+\sqrt{2}+\int_0^1 ydy=1+\sqrt{2}$

4、原式=$\oint_L R^{2n}ds=R^{2n}\cdot s=2\pi R^{2n+1}$

5、AB 的方程为 $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$，即参数方程为 $x=0,y=0,z=t$

同理可得 BC,CD 的参数方程分别为

$x=t,y=0,z=2$　　$x=1,y=t,z=2$

$I=\int_{AB}x^2yzds+\int_{BC}x^2yzds+\int_{CD}x^2yzds=0+0+\int_0^3 2tdt=9$

习题二十七

一、1、$-\dfrac{39}{4}$

2、$\int_0^1(10t^3+5t^2+9t+2)dt$， $\dfrac{32}{3}$

二、B　　　C

三、1、（1）原式=$\int_0^1 2xdx=1$　　　　（2）原式=$\int_0^1\left[(x+x^2)+(x-x^2)\cdot 2x\right]dx=1$

（3）原式=$\int_0^1(0-y)dy+\int_0^1(x+1)dx=1$

2、圆弧的参数方程为： $x=\cos t, y=\sin t$

原式=$\int_0^{\pi}\left[\cos t\sin^2 t\cos t-\cos^2 t\sin t(-\sin t)\right]dt=\dfrac{\pi}{4}$

3、圆的参数方程为： $x=a+a\cos t, y=a\sin t$

原式=$-\int_0^{2\pi}a(1+\cos t)a\sin t(-a\sin t)dt=\pi a^3$

习题二十八

一、1、$\oint_L(3x+y)dx+(2y-x)dy$　　　$\iint\limits_D -2dxdy$　　　-4π

2、$x\dfrac{\partial F}{\partial y}=y\dfrac{\partial F}{\partial x}$

二、D　　　D

三、1、$P=x^2y, Q=y^2x$

$$I=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=\iint\limits_D(y^2-x^2)d\sigma=\iint\limits_D\rho^3(\sin^2\theta-\cos^2\theta)d\rho d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3(\sin^2\theta-\cos^2\theta)d\rho=-\pi$$

2、$I=\dfrac{1}{R^2}\oint_L xdy-ydx=\dfrac{1}{R^2}\iint\limits_D 2d\sigma=\dfrac{2}{R^2}\times\pi R^2=2\pi$

3、$P=2x-y+4, Q=3x+5y-6$

$$I=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=\iint\limits_D 4d\sigma=4\sigma=12$$

四、 $P=2x\cos y-y^2\sin x, Q=2y\cos x-x^2\sin y$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-2y\sin x, \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin x-2x\sin y$$

$\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$， $\therefore$ 积分与路径无关

原式=$\int_0^2 2xdx+\int_0^3(2y\cos 2-4\sin y)dy=9\cos 2+4\cos 3$

习题二十九

三、1、

2、Σ 的方程为： $z=4-x^2-y^2$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

原式=$\iint\limits_{D_{xy}}(2-x^2-y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=\frac{37\pi}{10}$

3、Σ 的方程为： $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\frac{2}{\sqrt{3}}dxdy$$

原式=$\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{2}{\sqrt{3}}dxdy=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D_{xy}}\rho^3 d\rho d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3 d\rho=3\sqrt{3}\pi$

3、$\Sigma: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

原式=

$$\iint\limits_{D_{xy}}(x+y-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{ay}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}adxdy$$

$$=-a\sigma=-\pi a^3$$

习题三十

一、1、 $\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos r)ds$　　2、 0

二、1、C　　2、C

三、1、原式=$2\iint\limits_{D_{xy}}(2-x-y)dxdy=2\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(2-x-y)dy=\dfrac{8}{3}$

2、$\Sigma: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

原式=$-\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2(-\sqrt{a^2-x^2-y^2})dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{a^2-\rho^2}d\rho d\theta$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{a^2-\rho^2}d\rho=\dfrac{2\pi a^7}{105}$

3、

原式=$\dfrac{1}{8}$

四、（1）$\vec{n}=(3,2,2\sqrt{3})$ $\vec{e}_{\vec{n}}=\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=(\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5},\dfrac{2\sqrt{3}}{5})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

原式=$\iint\limits_{\Sigma}\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{5}R+\dfrac{3}{5}P+\dfrac{2}{5}Q\right]ds$

（2）$\vec{n}'=(-2x,-2y,-1)$ 外侧法向量$\vec{n}=(2x,2y,1)$

$\vec{e}_{\vec{n}}=\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=(\dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\dfrac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

原式=$\iint\limits_{\Sigma}\left[\dfrac{R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}+\dfrac{2xP}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}+\dfrac{2yQ}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right]ds$

习题三十一

一、1、108π 2、$ye^{xy}-x\sin xy-2z\cos(xz^2)$

3、$(2,4,6)$

二、1、原式=$\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}r^4\sin\varphi drd\theta d\varphi$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi dr=\dfrac{2\pi a^5}{5}$

2、原式=$\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dv=3V=81\pi$

3、原式=$\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)dv=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1(4z-y)dz=\dfrac{3}{2}$

三、1、-20π

2、0

3、9π

第十一章 复习题

一、 **1**、$\frac{3}{2}$ **2**、$-\pi$ **3**、$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}dv$ **4**、$\frac{4\pi a^3}{3}$

二、 **B**

三、 **1**、 π **2**、 $-3\pi ab$ **3**、 288π

四、$I=\sqrt{3}\pi R^2$

五、$I=\frac{15}{2}$

习题 三十二常数项级数的概念与性质

一、× × √ ×

二 D B A

三 1、 1

2、u_1-u_{n+1} u_1;

3、 $\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$

4、 2

四 发散; 发散; 发散; 发散; 发散

五 $\because$级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$收敛

$$\because \begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_n &= 2(u_2-u_1)+3(u_3-u_2)+\cdots+(n+1)(u_{n+1}-u_n) \\ &= -(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)+(n+1)u_{n+1}-u_1\end{aligned} \text{存在}$$

而$\lim_{n\to\infty} nu_n=0$,得到级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和收敛,得到此级数收敛.

习题三十三 正项级数及审敛法

一 × √ √

二 1、p<-2;

2、$+\infty$

3、$\alpha>\frac{1}{2}$

三 1、 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n^2}{1+n^3}}{\frac{1}{n}}=1$,此级数发散;

2 、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{\pi}{2^n}}=1$,此级数收敛;

3、 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{\sqrt{n^3+n+1}}}{\dfrac{\pi}{\sqrt{n^3+n+1}}}=1$,此级数收敛;

4、 $\alpha>1$时收敛, $\alpha\le 1$时发散

四、 1 发散; 2 收敛; 3 收敛

五、 收敛

六 、级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}2[(1-\dfrac{1}{n+1})^{-(n+1)}]^{-1}(1-\dfrac{1}{n+1})^{-1}=\dfrac{2}{e}$

此级数收敛,得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}=0$

习题 三十四 交错级数,绝对收敛与条件收敛

一 C D C C

二 1 绝对收敛; 2 发散;

3 $|a|\le 1$时绝对收敛,$|a|>1$发散;

4 绝对收敛; 5 条件收敛;

6 条件收敛

三 $|u_n v_n|\le\dfrac{u_n{}^2+v_n{}^2}{2}$,$(u_n+v_n)^2\le 2(u_n{}^2+v_n{}^2)$,即可得到级数收敛.

习题三十五 幂级数

一 B D D A B

二 1、 $[-3,3)$;

2 、$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$;

3、 $[4,6)$

三 1 $(-1,1), s(x)=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$;

2 、

$(-1,1), \quad s(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|,$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

习题三十六　函数展开成泰勒级数

一 1、 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!x^{n-1}$；

2、 $a_n=\frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}$；

3 、$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$；

4、 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n$

5 、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$ ， 1

二 1、 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}4^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, x\in R$；

2、 $x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}, x\in(-1,1]$

三 、$\frac{1}{x}=\frac{1}{3(1+\frac{x-3}{3})}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}(x-3)^n, x\in(-10,6)$

四 、

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}=-\frac{1}{3(1-\frac{x+4}{3})}+\frac{1}{2(1-\frac{x+4}{2})}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n, x\in(-6,-2)$$

五 $\left.\frac{(\ln x)^{(n)}}{n!}\right|_{x=2}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n2^n}, \ln x=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n2^n}(x-2)^n, x=1, \ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$

习题三十七傅里叶级数

一、 B B A

二 、$s(-\frac{3}{2}\pi)=1+\frac{\pi}{2}, s(\pi)=1, s(2\pi)=1, s(\frac{197}{2}\pi)=1+\frac{\pi}{2}$

三、

$x=2k\pi,\ f(x)=\frac{1}{2},x=(2k+1)\pi,\ f(x)=\frac{1}{2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx+\int_0^{\pi}(x+1)\sin nxdx]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx$

$=\frac{-2}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}=\begin{cases}\frac{2\pi+2}{n\pi},n=1,3\ldots\\ \frac{-2}{n},n=2,4\ldots\end{cases}$

$a_0=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}xdx+\int_0^{\pi}(x+1)dx]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}dx=1$

$a_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx+\int_0^{\pi}(x+1)\cos nxdx]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx$

$=\frac{2}{\pi n}x\sin nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}=(-1)^n\frac{4}{n^2\pi},$

$f(x)=\frac{1}{2}+(\frac{2\pi+2}{\pi}\cos x-\frac{4}{n^2\pi}\sin x)+\cdots(x\in R,x\neq k\pi)$

四、

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}[\frac{\sin nx}{n}]_0^{\pi}-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$

$=(-1)^n\frac{4}{n^2}$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$

$b_n=0$

$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx,x\in[-\pi,\pi]$ $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx,x\in[-\pi,\pi]$

$x=0,\frac{\pi^2}{3}+4(-1+\frac{1}{2^2}+\cdots)=0$

$x=\pi,\frac{\pi^2}{3}+4(1+\frac{1}{2^2}+\cdots)=\pi^2$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

复习题

一 √ √ × × ×

二 C C D

三 1、 $[-1,1)$;

2 、a>1;

3 、 2;

4、 1 2;

5、 $x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots),x\in[0,\pi]$;

6、 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+2}}x^{2n+1}$

四、 1 发散; 2 收敛; 3 收敛; 4 发散

五、 1 条件收敛;2 条件收敛

六、 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}\frac{n}{n+1}=5, R=\frac{1}{5},[-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$

七、 $s(x)=\arctan x, x\in(-1,1]$

八、 2e

自测题一

一、单项选择题

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
D	C	B	A	A

二、填空题

(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$y=\frac{1}{3}x^3+\sin x+C_1x+C_2$	$2dx+2dy$	10	$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$	$\underline{2\pi}$

三、计算题 (每小题 6 分，共 48 分)

11、解：
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2(\sqrt{4-x^2-y^2}+2)}{4-x^2-y^2-4}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}-(\sqrt{4-x^2-y^2}+2)$$
$$=-4$$

12、设 $z=x^3y^2-y^{\sin y}-x^2\sin x$ ，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-2x\sin x-x^2\cos x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y$ $\qquad$ $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=6$

13、求通过点 $P(-1,-2,1)$ 、 $Q(1,-2,-3)$ 且垂直于平面 $x-2y+3z-4=0$ 平面方程

解： $\overrightarrow{PQ}=(2,0,-4)$,

于是所求平面的法向量为： $\vec{n}=(2,0,-4)\times(1,-2,3)=(-8,-10,-4)=-2(4,5,2)$

故所求平面方程为：$4(x+1)+5(y+2)+2(z-1)=0$，

即 $4x+5y+2z+12=0$

14、计算 $I=\int_L(x+y+z)ds$，其中 L 为折线 ABC，这里 $A(0,0,0),B(0,0,2),C(1,0,2)$

解：$AB:\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1}$，　即 $AB:\begin{cases}x=0\\y=0,\ t:0\to 2\\z=t\end{cases}$

$BC:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{0}$，　即 $BC:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{0}:\begin{cases}x=t\\y=0,\ t:0\to 1\\z=2\end{cases}$

$$
\begin{aligned}
I&=\int_{AB}(x+y+z)ds+\int_{BC}(x+y+z)ds\\
&=\int_0^2 t\sqrt{0+0+1}dt+\int_0^1(t+2)\sqrt{1+0+0}dt\\
&=\frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

15、计算 $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{\frac{x}{y}}dy$

解：
$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dx\int_x^1 e^{\frac{x}{y}}dy&=\int_0^1 dy\int_0^{y} e^{\frac{x}{y}}dx\\
&=\int_0^1 y(e-1)dy,\\
&=\frac{e-1}{2}
\end{aligned}
$$

16、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，$\Omega$ 为平面曲线 $\begin{cases}x^2=2z\\y=0\end{cases}$ 绕 Z 轴旋转一周形成的曲面 Σ 与平面 $z=2$ 围成的区域

解：（1）　旋转曲面 Σ 为 $2z=x^2+y^2$

（2）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}\rho^3 d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2\rho^3dz=\dfrac{16\pi}{3}$

17、计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}(x-y+1)dydz+(y-z+2)dzdx+(z-x+3)dxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 的外侧

解：令 $P=x-y+1,\ Q=y-z+2,\ R=z-x+3$ ，Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 围成的闭区域，

由高斯公式， (2 分)

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dv=\iiint\limits_{\Omega}3dv=4\pi$$

18、判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{2^n}$ 的敛散性

解：令 $u_n=\frac{n^3-1}{2^n}$ (1 分)

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3-1}{2^{n+1}}}{\frac{n^3-1}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$

故 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{2^n}$ 收敛。

四、综合应用题

19、**设曲线积分** $\int_L 2xe^y dx+e^y f(x)dy$ **与路径无关，其中** $f(x)$ **具有连续的导数，且** $f(0)=0$ **.**

（1）求函数 $f(x)$ **的表达式；** **（2）求** $\int_{(0,0)}^{(1,1)}2xe^y dx+e^y f(x)dy$ **.**

解：（1） 令 $P=2xe^y$，$Q=e^y f(x)$，由于曲线积分 $\int_L 2xe^y dx+e^y f(x)dy$ 与路径无关 ，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，于是， $2xe^y=e^y f'(x)$，即 $f'(x)=2x$

则 $f(x)=x^2+C$，由于 $f(0)=0$，于是 $C=0$，故 $f(x)=x^2$

（2）

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}2xe^y dx+e^y f(x)dy=\int_{(0,0)}^{(1,1)}2xe^y dx+e^y x^2 dy=\int_0^1 2xdx+\int_0^1 e^y dy$$

$$=e \qquad (10\text{ 分})$$

20、**解** （1）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{x^{2n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}\right|=0$，故收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

（2） $y'(x)=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$$y''(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!})'=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

于是 $y''-y=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1$

（3）由 $r^2-1=0$ 得 $r=\pm1$ ，于是微分方程的对应齐次方程的通解为

$$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

又显然 $y^*=-1$ 是微分方程的的一个特解，于是微分方程的通解为

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-1$$

由于 $y(0)=0,\ y'(0)=0$，于是 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，

所以 $y(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-1$

自测题二

一、单项选择题

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
B	B	A	C	**A**	**B**	D	C	C	B

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

（11）	（12）	（13）	（14）	（15）
-2	$\int_0^2 dy\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx$	0	$(-3,3)$	0

三、求解下列各题

（16）解： 平面 $3x-y+z-2=0$ 的法向量 $\vec{n_1}=(3,-1,1)$， $\overrightarrow{PQ}=(-2,2,4)$，

由题意得所求平面的法向量

$$\vec{n}=\vec{n_1}\times\overrightarrow{PQ}=(3,-1,1)\times(-2,2,4)=(-6,-14,4)=-2(3,7,-2)，$$

故所求平面方程为 $3(x-1)+7(y+2)-2(z+1)=0$，

即 $3x+7y-2z+9=0$

（17）解： 设 $F(x,y,z)=x+2y+z-ye^{xyz}$，则 $F_x=1-y^2ze^{xyz}$，

$F_y=2-e^{xyz}-xyze^{xyz}$， $F_z=1-xy^2e^{xyz}$

于是 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=-\left.\dfrac{F_x}{F_z}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=-1$， $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=-\left.\dfrac{F_y}{F_z}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=-1$

故 $$dz\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=-dx-dy$$

（18）解：令 $u(x,y)=2x-y,\quad v(x,y)=3x-2y$ 则 $u(1,1)=1,\quad v(1,1)=1$，

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=(2vu^{v-1}+3u^{v}\ln u)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=(-vu^{v-1}-2u^{v}\ln u)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-1$$

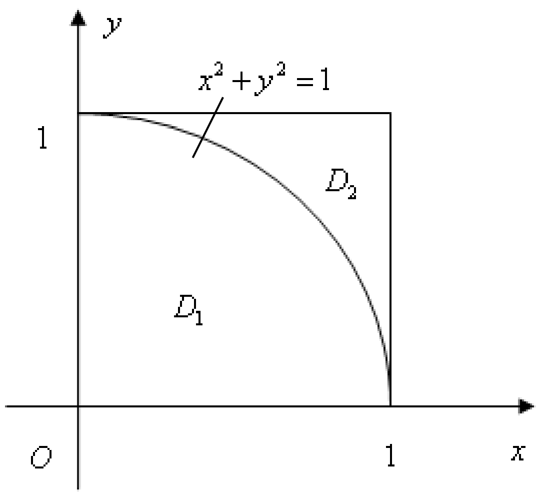
（19）解：解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=6-6x=0\\ f_y(x,y)=-2-2y=0\end{cases}$ 得驻点 $(1,-1)$

又 $A=f_{xx}(1,-1)=-6<0$， $B=f_{xy}(1,-1)=0$， $C=f_{yy}(1,-1)=-2$，

则 $AC-B^2>0$， 于是函数在 $(1,-1)$ 处有极大值 $f(1,-1)=4$

（20）计算二重积分 $\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$.

解 如图所示，把 D 分成 D_1 与 D_2 两部分，



$$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\iint\limits_{D_1}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma+\iint\limits_{D_2}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma，$$

由于 $\iint\limits_{D_1}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho d\rho=\frac{\pi}{8}$

$$\iint\limits_{D_2}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\int_0^1dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)dy=\int_0^1(x^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}})dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}$$

因此，$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$

（21）解：$$\iiint\limits_\Omega zdv=\iiint\limits_\Omega z\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^1 z\rho dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\rho(1-\frac{1}{4}\rho^4)d\rho=\frac{2}{3}\pi$$

或：$$\iiint\limits_\Omega zdv=\int_0^1zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}dxdy=\int_0^1 2\pi z^2dz=\frac{2}{3}\pi$$

（22）解：L 的方程为 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+2}{-4}$，

即 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2 \\ z = -4t-2 \end{cases} \quad (0 \le t \le 1)$

$$\int_L (x+y+z)ds = \int_0^1 (3t+1+2-4t-2)\sqrt{9+0+16}dt$$

$$= \frac{5}{2}$$

（23）解： 令 $P = x^3 - y$，$Q = x - y^3$，由格林公式得

$$\oint_L (x^3-y)dx + (x-y^3)dy$$

$$= \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})d\sigma = \iint_D 2d\sigma$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

或：

AB 的方程为 $y=0$, x 从 0 变到 1，BC 的方程为 $x=1$, y 从 0 变到 1，

CA 的方程为 $y=x$, x 从 1 变到 0，

$$\oint_L (x^3-y)dx + (x-y^3)dy$$
$$= \int_{AB} (x^3-y)dx + (x-y^3)dy + \int_{BC} (x^3-y)dx + (x-y^3)dy + \int_{CA} (x^3-y)dx + (x-y^3)dy$$

$$= \int_0^1 x^3dx + \int_0^1 (1-y^3)dx + \int_1^0 (x^3-x+x-x^3)dx = 1$$

（24）解： 设 $\Sigma_1 : \begin{cases} z = 1 \\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$ 取下侧，记由 Σ, Σ_1 所围立体为 Ω，则高斯公式可得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} (x-1)^3dydz + (y-1)^3dzdx + (z-1)dxdy = -\iiint_\Omega (3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 1)dxdydz$$
$$= -\iiint_\Omega (3x^2 + 3y^2 + 7 - 6x - 6y)dxdydz$$
$$= -\iiint_\Omega (3x^2+3y^2+7)dxdydz$$
$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_{r^2}^1 (3r^2+7)dz = -4\pi$$

在 $\Sigma_1 : \begin{cases} z = 1 \\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$ 取下侧上，$\iint_{\Sigma_1} (x-1)^3dydz + (y-1)^3dzdx + (z-1)dxdy = \iint_{\Sigma_1} (1-1)dxdy = 0$，

所以 $\iint_\Sigma (x-1)^3dydz + (y-1)^3dzdx + (z-1)dxdy = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} (x-1)^3dydz + (y-1)^3dzdx + (z-1)dxdy = -4\pi$

（25）解：由于 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$， $-1<x<1$

故 $\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$， $0<x<2$

四、证明题

（26）已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi\right\}$，$L$ 为 D 的正向边界. 证明：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$；　　（2）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.

证明　**（1）**左边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$，

右边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$

故 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$

（2）由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2$，

所以 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge 2\pi^2$

自测题三

一、单项选择题

（1）	**（2）**	**（3）**	**（4）**	**（5）**
D	**D**	**C**	**A**	**C**

二、填空题

（6）	**（7）**	**（8）**	**（9）**	**（10）**
2	$-\sqrt{2}$	$x-y-3z+16=0$	1	0

三、计算题

11、解：$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{3-(xy)^2-e^{xy}}{x^3+y^3}=\frac{3-0-e^0}{1^3+0^3}=2$

12、设 $z=x^2y^2-3y^3-x^2\cos x$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$；

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2-2x\cos x+x^2\sin x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=4$

13、解： $\overrightarrow{PQ}=(-1,3,4)$，

于是所求平面的法向量为： $\vec{n}=(2,3,-5)\times(-1,3,4)=(27,-3,9)=3(9,-1,3)$

故所求平面方程为：$9(x+1)-(y+1)+3(z+7)=0$，

即 $9x-y+3z+29=0$

14、解：令 O（0,0）、 A（1,1）、 B（1,0）

$OA: y=x(0\le x\le 1)$， $AB: x=1(0\le y\le 1)$ ， $BO: y=0(0\le x\le 1)$

$$\int_L (x-y)ds=\int_{OA}(x-y)ds+\int_{AB}(x-y)ds+\int_{BO}(x-y)ds$$
$$=\int_0^1 (x-x)\sqrt{1+1}dx+\int_0^1 (1-y)\sqrt{1+0}dy+\int_0^1 (x-0)\sqrt{1+0}dx$$
$$=1$$

15、解： $\int_{-1}^{1}dx\int_0^1 ye^{xy}dy=\int_0^1 dy\int_{-1}^{1} ye^{xy}dx$，

$$=\int_0^1 (e^y-e^{-y})dy=e+\frac{1}{e}-2$$

16、解： $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega} z^2\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\rho^2}^4 z^2\rho dz=64\pi$

17、解：令 $P=x+2y+1,\ Q=y+3z+2,\ R=z+4x+3$ ，Ω 是平面 $|x|=1$，$|y|=1$，

$|z|=1$ 围成的闭区域，

由高斯公式，

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dv=\iiint\limits_{\Omega}3dv=24$$

18、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3^n}$ 是否收敛？若收敛，是条件收敛，还是绝对收敛？

解：令 $u_n=(-1)^n\frac{n^2}{3^n}$ (1 分)

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}=\frac{1}{3}<1$

故 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3^n}$ 收敛且绝对收敛。

四、综合应用题

19、解：（1）方程两边**求导得**

$$f(x)+\frac{1}{2}f'(x)=2x$$

（**2**） 令 $y=f(x)$

$y'+2y=4x$ **为一阶线性微分方程，其中** $P(x)=2,Q(x)=4x$

代入公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)=e^{-\int 2dx}(\int 4xe^{\int 2dx}dx+C)=2x-1+Ce^{-2x}$$

由 $f(0)=0$ **得** $C=1$**．原方程的解为**

$$y=2x-1+e^{-2x}$$

20、设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，函数 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(z+1)e^{2x}$，若 $f(0)=0$， $f'(0)=0$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

解 令 $u=e^x\sin y$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y$， $\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\sin^2 y$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\cos^2 y$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(z+1)e^{2x}$ 得 $f''(u)-f(u)=1$

齐次方程 $f''(u)-f(u)=0$ 的通解为 $f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$ ，方程 $f''(u)-f(u)=1$ 的一个特解为 $f^*(u)=-1$，故方程 $f''(u)-f(u)=1$ 的通解为

$$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}-1.$$

由 $f(0)=0$， $f'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，从而函数 $f(u)$ 的表达式为 $f(u)=\frac{e^u+e^{-u}}{2}-1$

21、设 $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|dx$，（$n=1,2,\cdots$），分别求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4a_n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4a_n-1}$ 的和.

解 令 $x=n\pi-t$，则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}(n\pi-t)\left|\sin t\right|dt=n\int_0^{n\pi}\left|\sin t\right|dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}t\left|\sin t\right|dt$$

所以 $a_n=\dfrac{n}{2}\int_0^{n\pi}\left|\sin t\right|dt=n^2$（$n=1,2,\cdots$）

（1）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4a_n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$ 的部分和数列为

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4a_n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}$

（2）$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4a_n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n-1}-\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}+\frac{1}{2}$$

考虑幂级数 $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}$，$-1\le x\le 1$，则逐项求导，得

$$\varphi'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2}=\frac{-1}{1+x^2},\qquad -1<x<1$$

于是 $\varphi(x)=\varphi(0)+\int_0^x\varphi'(x)dx=\int_0^x\dfrac{-1}{1+x^2}dx=-\arctan x\quad -1\le x\le 1$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}=-\dfrac{\pi}{4}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4a_n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$