2021-2022（2）机电高数期末考题解析

一、选择题（每题 2 分，共 10 分）

1.微分方程 $xy'+y=1$ **满足初始条件** $y\big|_{x=1}=0$ **的特解为（　　）**

A. $y=x-\dfrac{1}{x}$　　**B.** $y=1-\dfrac{1}{x}$　　**C.** $y=x-\dfrac{1}{x^2}$　　**D.** $y=1-\dfrac{1}{x^2}$

解析: 法 1：$xy'+y=1$ 即 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x}$ 是一阶线性非齐次微分方程，通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{1}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right)=\frac{1}{|x|}\left(\int\frac{1}{x}|x|dx+C_1\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\left(x+C_1\right),x>0\\-\dfrac{1}{x}\left(-x+C_1\right),x<0\end{cases}=1\pm\frac{C_1}{x}=1+\frac{C}{x}$$

代入初始条件得 $C=-1$，选 **B.**

法 2. 挨个选项进行验证。

2.在空间，方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\\z=1\end{cases}$ **表示的图形为（　　）**

A. 椭圆柱面　　**B.**椭圆曲线　　**C.** 抛物柱面　　**D.**抛物线

解析： 椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 被平面于 xoy 面的平面 $z=1$ 去截，得到椭圆曲线，选 **B.**

3.直线 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-8}{1}$ **与** $L_2:\begin{cases}x-y=-2\\2x+z=1\end{cases}$ **的夹角为（　　）**

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　**B.** $\dfrac{\pi}{4}$　　**C.** $\dfrac{\pi}{3}$　　**D.** $\dfrac{\pi}{2}$

解析： 直线 L1 的方向向量 $S_1=(1,-2,1)$，直线 L2 的方向向量

$$S_2=(1,-1,0)\times(2,0,1)=(\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\2&0\end{vmatrix})=(-1,-1,2)$$，两直线夹角余弦

$$\cos\theta=\left|\cos<S_1,S_2>\right|=\left|\frac{S_1\cdot S_2}{|S_1||S_2|}\right|=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$。选 **C.**

4.设 Σ 是平面 $x+y+z=2$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=$

（　　）

A. $2\sqrt{3}\pi$　　**B.** 2π　　**C.** π　　**D.** 0

解析：曲面Σ的方程改写为$z=2-x-y$，它的曲面面积微元

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy$，截出部分在 XOY 面的投影区域为圆域$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$，

$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=2\iint\limits_{\Sigma}dS=2\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}1dxdy=2\sqrt{3}\pi$，　**选 A.**、

5.下列级数收敛的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+n}$　**B.** $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3^n}{2^n}-\frac{1}{2^n})$　**C.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n^2}{2+n^3}$　**D.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{2+n^3}$

解析：对充分大的n，$\frac{1}{2+n}\sim\frac{1}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+n}$发散；

对充分大的n，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛；故$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3^n}{2^n}-\frac{1}{2^n})$发散；

对充分大的n，$\frac{2+n^2}{2+n^3}\sim\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n^2}{2+n^3}$发散；

对充分大的n，$\frac{2+n}{2+n^3}\sim\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{2+n^3}$收敛。**选 D.**

二、**填空题（每题 2 分，共 20 分）**

6.微分方程$y'''=\sin x$的通解为______________。

解析：　$y''=\int y'''dx=\int\sin xdx=-\cos x+C_1$，

$y'=\int y''dx=\int(-\cos x+C_1)dx=-\sin x+C_1x+C_2$，

$y=\int y'dx=\int(-\sin x+C_1x+C_2)dx=\cos x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$。

7.已知某二阶常系数齐次线性微分方程的通解为$y=C_1+Ce^x$，则该方程是

______________。

解析：从通解$y=C_1e^{0x}+Ce^x$知：方程的特征根为$r_1=0,r_2=1$，得特征方程为$r^2-r=0$，从而方程为$y''-y'=0$。

8，微分方程 $y''+y'-2y=2xe^{x}$ 的一特解可设为 $y^{*}=$______________。

解析：方程的特征方程为 $r^{2}+r-2=0$，特征根为 $r_1=-2,r_2=1$，由 $P_m(x)e^{x}=2xe^{x}$ 知，$\lambda=1$ 为一重特征根，故特解可设为 $y=x^{k}Q_m(x)e^{x}=x^{1}(ax+b)e^{x},a,b$ 是待定实常数。

9.将 XOZ 面上的抛物线 $z=2x^{2}$ 绕 Z 轴旋转而成的曲面方程为____________________。

解析：在 XOZ 面上的抛物线方程 $z=2x^{2}$ 中用 $\pm\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ 代替 x， 得旋转曲面方程为 $z=2(\pm\sqrt{x^{2}+y^{2}})^{2}=2(x^{2}+y^{2})$。

10.设 $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$，则 $\mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}=$_____________。

解析：由投影定理，$\mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=|\vec{a}|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{4\times1+3\times(-2)+2\times2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{2}{3}$.

11.极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^{2}+y^{2}}{1-\sqrt{x^{2}+y^{2}+1}}=$_____________。

解析： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^{2}+y^{2}}{1-\sqrt{x^{2}+y^{2}+1}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^{2}+y^{2})(1+\sqrt{x^{2}+y^{2}+1})}{-(x^{2}+y^{2})}=-2$，

12.函数 $u=xy^{2}z^{2}$ 在点 $P(1,-1,1)$ 处方向导数的最大值为_____________。

解析： 函数 $u=xy^{2}z^{2}$ 在点 $P(1,-1,1)$ 处方向导数的最大值为该函数在此点的梯度 $gradu\,|_{(1,-1,1)}=(u_x,u_y,u_z)|_{(1,-1,1)}=(1,-2,2)$ 的模，即 $\left|gradu\,|_{(1,-1,1)}\right|=\sqrt{1^{2}+(-2)^{2}+2^{2}}=3$。

13.交换二重积分的积分顺序： $\int_{1}^{2}dy\int_{y}^{2}f(x,y)dx=$_____________。

解析：二重积分区域 $D:1\le y\le 2,y\le x\le 2$ 可改写为 $D:1\le x\le 2,1\le y\le x$，得 $\int_{1}^{2}dy\int_{y}^{2}f(x,y)dx=\int_{1}^{2}dx\int_{1}^{x}f(x,y)dy$。

14.函数 $\dfrac{1}{2+x}$ 关于 $x-1$ 的幂级数为 $\dfrac{1}{2+x}=$_____________ $(-2<x<4)$。

解析： $\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1}{3+x-1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{3}}=\dfrac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(\dfrac{x-1}{3})^{n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{3^{n+1}}(x-1)^{n}$

15.设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上有 $f(x)=\begin{cases}1-x, -\pi\le x<0\\ 1+x, 0\le x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于______________。

解析：法一 根据收敛定理，$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(1^-)+f(1^+)]=\frac{1}{2}[\lim_{x\to1^-}f(x)+\lim_{x\to1^+}f(x)]=\frac{1}{2}[\lim_{x\to1^-}(1+x)+\lim_{x\to1^+}(1+x)]=\frac{1}{2}[2+2]=2$$

法二 因 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的连续点，故根据收敛定理得傅里叶级数收敛于 $f(1)=2$。

三、解答题（每题 12 分，共 60 分）

16（1）设函数 $z=xy+f(x^2-y^2)$，$f(x)$ 为可导函数，求 $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}$；

（2）设二元函数 $z=\arctan\sqrt{x^2+1}+xe^{xy}$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$。

解析：（1） $\frac{\partial z}{\partial x}=y+f'(x^2-y^2)\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}=y+2xf'(x^2-y^2),$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+f'(x^2-y^2)\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}=x-2yf'(x^2-y^2),$$

这里 $f'(x^2-y^2)$ 表示 $f(x^2-y^2)$ 对 x^2-y^2 求导。

得 $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2$。

（2） $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d}{dx}(\arctan\sqrt{x^2+1})+e^{xy}+xe^{xy}\frac{\partial(xy)}{\partial x}=\frac{d}{dx}(\arctan\sqrt{x^2+1})+e^{xy}+xye^{xy}$，

注意到导函数 $\frac{d}{dx}(\arctan\sqrt{x^2+1})$ 仍是 x 的函数，它对 y 的导数为 0，得

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial(e^{xy}+xye^{xy})}{\partial y}=xe^{xy}+xe^{xy}+xye^{xy}x$，得 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=2$.

17. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $e^z-xyz+2x-y=1$ 确定，

（1）设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 dz；

（2）求曲面 $e^z-xyz+2x-y=1$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程。

解析：（1）法一　在方程$e^z-xyz+2x-y=1$两边分别对x,y求导得

$$\begin{cases} e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}-(yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x})+2=0 \\ e^z\dfrac{\partial z}{\partial y}-(xz+xy\dfrac{\partial z}{\partial y})-1=0 \end{cases}，得\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz-2}{e^z-xy} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1+xz}{e^z-xy} \end{cases}，得 dz=\dfrac{yz-2}{e^z-xy}dx+\dfrac{1+xz}{e^z-xy}dy；$$

法二　设$F=e^z-xyz+2x-y-1,$，则$F_x=-yz+2,F_y=-xz-1,F_z=e^z-xy$，

由隐函数求导结论，得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{yz-2}{e^z-xy},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{xz+1}{e^z-xy},$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{yz-2}{e^z-xy}dx+\frac{1+xz}{e^z-xy}dy。$$

（2）曲面$e^z-xyz+2x-y=1$在点$(1,2,0)$处的切平面法向量为

$(F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,2,0)}=(2,-1,-1)$，得切平面方程为$2(x-1)-1(y-2)-1(z-0)=0$，

即$2x-y-z=0$。

18.（1）计算$\int_L(x-2y-z)ds$，其中L为连接点$(1,0,2)$与点$(1,3,-2)$的直线段。

（2）计算$I=\oint_L(2x^2-y)dx+(xy-1)dy$,其中$L$为正向圆周$x^2+y^2=2x$。

解析：（1）两点$(1,0,2)$、$(1,3,-2)$连线的方向向量取为$(0,3,-4)$，两点$(1,0,2)$、$(1,3,-2)$连线段的参数方程为$x=1+0t,y=0+3t,z=2+(-4)t$，起点对应参数$t=0$，终点对应参数$t=1$，连线段上点对应的参数范围为　$0\le t\le 1$，

弧微元$ds=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}dt=5dt$，原题积分转化为定积分得

$$\int_L(x-2y-z)ds=5\int_0^1(1-6t-2+4t)dt=-5\int_0^1(1+2t)dt=-10；$$

（3）由格林公式，　得

$$I=\oint_L(2x^2-y)dx+(xy-1)dy=\iint_D(\frac{\partial(xy-1)}{\partial x}-\frac{\partial(2x^2-y)}{\partial y})dxdy=\iint_D(y-(-1))dxdy$$

$=\iint_D ydxdy+\iint_D dxdy=0+\pi=\pi$。　这里$D$是$L$围成的 XOY 平面上的平面闭区域。由对称性可得$\iint_D ydxdy=0$；

或由极坐标计算二重积分得 $I=\iint_D (y+1)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(\rho\sin\theta+1)\rho d\rho=\pi$ 。

19.计算曲面积分 $I=\oiint_\Sigma (2+xy^2)dydz+zx^2dxdy$，其中 Σ 为介于 $z=0$ 与 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\le 4$ 的整个表面的外侧。

解析：根据高斯公式，得

$$I=\oiint_\Sigma (2+xy^2)dydz+zx^2dxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial(2+xy^2)}{\partial x}+\frac{\partial(zx^2)}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint_\Omega(y^2+x^2)dxdydz$$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_0^3\rho^2dz=24\pi$. 这里 Ω 表示封闭曲面 Σ 围成的立体区域，计算三重积分用到了柱面坐标变换。

20.给定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n$，求收敛域和和函数。

解析：由 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}\Big/\frac{n}{3^n}=\frac{1}{3}$ 得幂级数的收敛区间为（-3，3）。

当 $x=3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 的通项极限不等于 0，此级数发散；

当 $x=-3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n$ 的通项极限不等于 0，此级数发散；

得幂级数的收敛域为（-3，3）。

（2）设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n,-3<x<3$，在 $\frac{s(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^{n-1}$ 两边从 0 到 x 积分得

$$\int_0^x\frac{s(t)}{t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\int_0^x t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=\frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}=\frac{x}{3-x}$$，再求导得

$$\frac{s(x)}{x}=\frac{d}{dx}\left(\int_0^x\frac{s(t)}{t}dt\right)=\left(\frac{x}{3-x}\right)'=\frac{3}{(3-x)^2}$$，得 $s(x)=\frac{3x}{(3-x)^2},-3<x<3$ 。

21.设有一正方形铁板占有平面闭区域 $\{(x,y)|0\le x\le 5,0\le y\le 5\}$，该铁板被加热，在点 (x,y) 处的温度为 $T(x,y)=2(x+2y)-x^2-2y^2$，在铁板内，即 $\{(x,y)|0<x<5,0<y<5\}$ 内求一点，其温度最高。

解析： **法一** 该题即求二元函数$T(x,y)=2(x+2y)-x^2-2y^2$在平面区域$\{(x,y)|0\le x\le 5,0\le y\le 5\}$内部的最大值，因为区域内部的最大值即极大值，而极值只能在驻点或偏导数不存在的点取到。注意到

$\frac{\partial T}{\partial x}=2-2x,\frac{\partial T}{\partial y}=4-4y$在区域$\{(x,y)|0\le x\le 5,0\le y\le 5\}$内部都能取函数值，故偏导数不存在的点没有，于是最大值（最高温度）只能在驻点（1，1）取到。

法二 配方得$T(x,y)=2(x+2y)-x^2-2y^2=-(1-x)^2-2(y-1)^2+3$，于是得到平面闭区域$\{(x,y)|0\le x\le 5,0\le y\le 5\}$内点（1，1）处有最高温度。