习题一

一、

1. ×　　3. ×　　5. ×　　7. ×

2. √　　4. ×　　6. √

二、

1. A　　2. D　　3. B　　4. A

三、

1. 直线 $y=x$　　2. [-1，3 ）　　3. $[-\frac{1}{2},0]$

4. $y=\log_2\frac{x}{x-1}$　　5. $y=e^u,u=v^3,v=\sin x$

四、

$f(2+x)=\frac{1}{3+x}$，$f(x^2)=\frac{1}{1+x^2}$，

$f(f(x))=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}$，$f(\frac{1}{f(x)})=\frac{1}{2+x}$

习题二

一、

1. ∨　　3. ×　　5. ∨

2. ×　　4. ∨　　6. ×

二、

1. B　　2. B　　3. A　　4. C

三、

（1）$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$

取 $N=[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$ 即可

（3）$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon$

取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$ 即可

四、根据条件，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$\left|x_n y_n - 0\right| \le M\varepsilon$

即证。

习 题 三

一、

1. ×	2. ×	3. ×

二、

1. C	3. C	5.D
2. D	4. C	

四、（1）证明：$\forall \varepsilon > 0$，要$\left|3x+2-8\right| = 3\left|x-2\right| < \varepsilon$

取$\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$即可

（2）$\forall \varepsilon > 0$，要$\left|x+2-4\right| = \left|x-2\right| < \varepsilon$

取$\delta = \varepsilon$即可

（3）$\forall \varepsilon > 0$，要$\left|\dfrac{2x-1}{x+1} - 2\right| = \left|\dfrac{-3}{x+1}\right| < \varepsilon$

只要$\left|x\right| > \dfrac{3}{\varepsilon} + 1$即可

五、

1) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\left|x\right|}{x} = -1$，$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\left|x\right|}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left|x\right|}{x}$不存在

2) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$，$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5,\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

习题四

一、

1. ∨	3. ∨	5. ×	7. ×
2. ×	4. ∨	6. ×	8. ∨

9. $\times$ 10. $\times$ 11. $\vee$ 12. $\times$

二、

1. D 3. B 5. D

2. C 4. D

三、

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+1}{x^2+1}=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{2}{3}$

(3) $I=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2hx+h^2}{h}=2x$

(4) $I=\dfrac{2}{3}$ (5) $I=0$

(6) $I=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{2}{3}$

(7) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{1}{2}$

(9) $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}=-1$

(10) $I=\dfrac{1}{5}$

(11) $I=+\infty$

(12) $I=0$

(13) 由于 $\begin{matrix}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=-1\end{matrix}$ ，故原极限不存在。

(14) $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

四、

$$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$$

$$b=-2a-4$$

$$I=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+a+2)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=2$$

$$a=2,b=-8$$

五、

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x(x^2+1)}=1$$

$$b==\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3+1}{x^2+1}-x)-1=-1$$

习 题 五

一、1、∨ 2、× 3、×4、×5、∨6、×7、×8、×

二、1、D 2、D 3、A 4、B 5、B 6、C 7、A

三、

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=3$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=2$

4. $\lim_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{2x}=e^2$

5. $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 0}[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}]^{-2}(1-2x)=e^{-2}$

6. $\lim_{x\to\infty}(\frac{x-a}{x+a})^x=e^{2a}$

7. $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^2})^{3x}=\lim_{x\to\infty}[(1-\frac{1}{x^2})^{-x^2}]^{\frac{-3}{x}}=1$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{1}{3}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=1$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{2\cos x}=1$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\dfrac{1}{2}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{(1+\cos x)x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}$

$$=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}$$

四、$n\cdot\dfrac{n}{n^2+n}\le n(\dfrac{1}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})\le n\cdot\dfrac{n}{n^2+1}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{n}{n^2+1}=1$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{1}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})=1$

五、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{3}(\cos x-\cos 2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{3}[(\cos x-1)+(1-\cos 2x)]}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{3}[(-\frac{1}{2}x^2)+2x^2]}{x^2}=1$

因此 $\dfrac{2}{3}(\cos x-\cos 2x)\sim x^2$

六、设 $x_1=a>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{2}{x_n})$ $n=1,2,3,\cdots$，利用单调有界准则证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

证明：由 $x_1=a>0$ 知 $x_n>0$

$$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{2}{x_{n-1}})\ge\frac{1}{2}\times 2\sqrt{x_{n-1}\times\frac{2}{x_{n-1}}}=\sqrt{2}$$

又 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{2}{x_n^{\ 2}})=\frac{1}{2}+\frac{1}{x_n^{\ 2}}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，于是 $x_{n+1}\le x_n$，从而数列 $\{x_n\}$ 单调递减，

又 $x_n>0$，于是数列 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，在 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})$ 两边取极限，代入

得 $A=\sqrt{2}$

习题六

一、

1. ∨ 2. × 3. ∨ 4. ∨
5. ×

二、

1. A 3. A 5. A
2. C 4. A 6. C

三、

（1）$\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$， $x=1$ 可去，补充 $y(0)=\frac{1}{2}$

（2）$f(0^-)=0,f(0^+)=0$， $x=0$ 跳跃

四、$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(\frac{b}{x}\sin x+1)=b+1$

$f(x)$ 连续，仅需连续在 $x=0$ 处连续，

于是 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，

这样 $0=b+1=a$，

即 $a=0,b=-1$

五、

$$f(x)=\begin{cases}x,|x|<1\\0,|x|=1\\-x,|x|>1\end{cases}$$

$x=\pm1$ 为跳跃间断点

习 题 七

一、

1. ∨　　2. ×　　3. ×　　5. ∨

4. ∨

二、

1. A　　2. C　　3. A

三、

（1）$-\sin 2a$　（2）$\dfrac{2}{5}$　（3）0　（4）$\dfrac{1}{2}$　（5）1　（6）e^2

第一章　复习题

一、

1. $(e^{-1}-1,+\infty)$　　2. 0　　4. 0　　6. $\dfrac{1}{2}$

3. 高　　5. 2

二、

1. D　　3. A　　5. C

2. B　　4. B

三、

1. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n \cdot \dfrac{x}{2^{n-1}} = 2x$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cot x}{x}=\infty$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=1$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x+1}{2x-1})^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{2x-1})^{3x}=e^3$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2 x-2\cos x-1}{2\cos^2 x+\cos x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{-8\sin 2x+2\sin x}{-2\sin 2x-\sin x}=2$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}]=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}]=1$

四、

$a=-1$

$b=-\frac{3}{2}$

五、

1． $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n})=\frac{1}{2}$

2．由 $x_1>a>0,x_{n+1}=\sqrt{ax_n}$

易知 $x_n>a>0,x_{n+1}<x_n$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=k$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{ax_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

六、设 $g(x)=f(x)-f(a+x)$

在 $[0,a]$ 上， $g(x)$ 连续， $g(0)=f(0)-f(a)$， $g(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$

若 $f(a)=f(0)$，取 $\xi=0$

若 $f(a)\ne f(0)$，由零点介质定理有 $\xi\in(0,a)$， $g(\xi)=0$，即证。

习 题 八

一、判断题（请在正确说法后面画√，错误说法后面画×）

×， √，×，×， √， ×

二、单项选择题

A、A、B 、C、

三、

（1）$5f'(0)$　　（2）$n!$

四、$4x-y-6=0;x+4y+7=0$

五、$a=2,b=-1$

六、$\varphi(a)$

习 题 九

一、判断题（请在正确说法后面画√，错误说法后面画×）

√，×，×，×，√，　√，　×

二、单项选择题

C、B、D、D、D

三、

（1）$y'=15x^2-2^x\ln 2+3e^x$　　（2）$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

(3) $y'=\dfrac{2x^2\cos 2x-2x\sin 2x}{x^4}$

(4) $y'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\sin x+\sqrt[3]{x}\cos x+a^x 2^{x-3}\ln a+a^x 2^{x-3}\ln 2$

(5) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　　(6) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\dfrac{1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}\right)$

(7) $y'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$　　(8) $y'=-2x\sin x^2\sin^2\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}\cos x^2$

四、(1) $\dfrac{dy}{dx}=f'(\tan x)\sec^2 x$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=2xf'(x^2)+\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

习 题 十

一、判断题（请在正确说法后面画√，错误说法后面画×）

×，×

二、单项选择题

B、A、B、D

三、

（1） $y''=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ （2） $y''=e^{2x-1}(3\sin x+4\cos x)$

(3) $y''=-\dfrac{2\sin(\ln x)}{x}$ (4) $y''=-\dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

四、$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x-3)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$

五、$\dfrac{d^2y}{dx^2}=2f'(x^2)\sin\left[2f(x^2)\right]+4x^2f''(x^2)\sin\left[2f(x^2)\right]+8x^2[f'(x^2)]^2\cos\left[2f(x^2)\right]$

习 题 十一

一、单项选择题

D，B、A

二、

1、$y'=\dfrac{2}{2-\cos\dfrac{y}{2}}$ 2、$y'=-\csc^2(x+y)$

3、$y'=\dfrac{y\cos(x+y)+y\sin x\ln y}{\cos x-y\cos(x+y)}$ 4、$y'=\dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$

三、

1、$y'=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left[\ln x-\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}\right]$

2、$y'=(\sin x)^{\tan x}\left(\sec^2 x\ln\sin x+1\right)$

3、$y'=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{4}{3-x}-\dfrac{5}{x+1}\right]$

4、$y'=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\cos x}{2\sin x}-\dfrac{e^x}{4(1-e^x)}\right)$

四、

1、$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2}{3}e^{2t}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4}{9}e^{3t}$

2、$\frac{dy}{dx}=2t^2-te^t$；　$\frac{d^2y}{dx^2}=4t^2-te^t-t^2e^t$

习 题 十二

一、判断题（请在正确说法后面画√，错误说法后面画×）

√，√，×，×

二、

D、A、B、C、D

三、

1、x^3+C　2、$\arctan x+C$　3、$\sin 2x+C$

4、$\sec x+C$　5、$\frac{2}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}}+C$　6、$\frac{1}{2}\ln^2 x+C$

四、

1、$dy=-\frac{2x}{1-x^2}dx$　2、$dy=2e^{x^2}(x\cos 2x-\sin 2x)dx$　3、$dy\big|_{x=0}=\frac{1}{2}dx$

五、

（1）≈ 0.76　（2）≈ 1.0067

第二章　复习题

一、

1. -1
2. $f'(0)$
3. n
4. $f'(1+\sin x)\cos x$、$f''\cos x-f'\sin x$
5. $\ln(e-1)$
6. $\frac{1}{\arctan(1-x)}\cdot\frac{-1}{1+(1-x)^2}$
7. $4x^3\sin(2x^4)$、$12x^2\sin(2x^4)+32x^6\cos(2x^4)$、$2x^2\sin(2x^4)$

二、

1. D
2. D

3. A

4. D

5. B

三、

1. $\mathrm{d}\,y = -\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{x^2} e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$

2. $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{3t^2}{\dfrac{1}{t}} = 3t^3$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} = \frac{9t^2}{\dfrac{1}{t}} = 9t^3$$

3. $1 + \dfrac{y'}{1+y^2} = y'$

$$y' = \frac{1+y^2}{y^2}$$

$$y'' = -\frac{2}{y^3} y' = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}$$

4. $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$y^{(50)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{50} \sin(2x + 50 \cdot \frac{\pi}{2})$$
$$= -2^{49} \sin 2x$$

5. $\ln y = x[\ln x - \ln(1+x)]$

$$y' = y[\ln x - \ln(1+x) + x(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x})]$$
$$= (\frac{x}{1+x})^x [\ln x - \ln(1+x) + \frac{1}{1+x}]$$

四、$f(0^-) = 0 = f(0^+) = b + a + 2$

$$f'(0^-) = a = f'(0^+) = b$$

$a=b=-1$

五、$\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=-2$

习 题 十三

一、判断题（请在正确说法后面画√，错误说法后面画×）

√，√，√，√

二、

C、C、C、C、D

三、令 $f(x)=\ln x$，利用拉格朗日中值定理

证明：令 $f(x)=\ln x$ ，则存在 $b<\xi<a$，使得

$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=\dfrac{1}{\xi}$，而 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$，于是 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{b}$，即 $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$

四、令 $F(x)=xf(x)$，利用罗尔中值定理

习 题 十四

一、判断题（请在正确说法后面画√，错误说法后面画×）

×，√，√，×

二、

B、C

三、

1、-2　　2、1　　3、$-\dfrac{1}{4}$　　4、$\dfrac{1}{2}$　　5、2

6、$e^{-\frac{1}{2}}$　　7、e^{6}　　8、e　　9、1

习 题 十五

一、单项选择题

B、C、C

二、

$$f(x)=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\bullet 2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3\bullet 2^3}(x-2)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n\bullet 2^n}(x-2)^n+o\left[(x-2)^n\right]$$

三、

$$f(x)=1-2x+2x^2-2x^3+\cdots+2(-1)^n x^n+\frac{2(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}x^{n+1}(0<\theta<1)$$

四、$\frac{1}{3}$

习 题 十六

一、判断题（请在正确说法后面画√，错误说法后面画×）

×，×，×，×，√

二、

A、D、B、D、A

四、

1、在$(0,1),\quad(1,e)$上单调减少；在$\left[e,+\infty\right)$上单调增加

2、在$\left(-\infty,1\right]$上单调增加；在$\left[1,2\right]$上单调减少；在$\left[2,+\infty\right)$上单调增加

五、

1、在$\left(-\infty,\frac{5}{3}\right]$上是凸的；在$\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$上是凹的；拐点是$\left(\frac{5}{3},\frac{20}{27}\right)$

2、在$\left(-\infty,-1\right],\left[1,+\infty\right)$上是凸的；在$\left[-1,1\right]$上是凹的；拐点是$\left(\pm 1,\ln 2\right)$

六、

$a=\frac{3}{2},b=\frac{1}{2}$

习 题 十七

一、判断题（请在正确说法后面画√，错误说法后面画×）

×，×，√，×，√

二、

A、B、B、B

三、

1、极大值$y(\frac{12}{5})=\frac{\sqrt{205}}{10}$

2、单调减少，无极值

四、 $p = 6.5$

五、 $t = 5$

习 题 十八

一、判断题（请在正确说法后面画√，错误说法后面画×）

×，√，×，√，√

二、

C、C、D、B

三、$(x-3)^2+(y+2)^2=8$

第三章 复习题

一、填空题

1. 0　　2. $(-\infty,+\infty)$

3. 20　　4. [-1，1]

5. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{\cos[\theta x+(m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m+2},(0<\theta<1)$

6. $(\frac{2}{3},\frac{2}{3}e^{-2})$。

二、选择题

1. C　2. D　3. D　4 C

三、求下列函数极限

1. $\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

2. $\lim\limits_{x\to0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}}=\sqrt{ab}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^2\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x(1-e^{\sin x-x})}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{\sin x-x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$

4. $\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln(1-x)]=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}=-\frac{1}{2}$

四、证明下列不等式

1　　证明：令$F(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，得$x=e$为驻点，于是当$x>e$时递减，故

$\dfrac{\ln a}{a}>\dfrac{\ln b}{b}$，即有$a^b>b^a$

2　证明：令$f(x)=tgx+2\sin x-3x$，由$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$f''(x)>0$，得$f'(x)$递增，于是

$f'(x)>f'(0)=0$，则当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$f(x)$递增，于是

$f(x)>f(0)=0$，得证。

五、$y^{(6)}(0)=-120$。

六、解：由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^3)+x^3}{ax^n}=1$，得$a=-\dfrac{1}{2},n=6$

七、证明：令$F(x)=a_1\sin x+\dfrac{1}{3}a_2\sin 3x+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}a_n\sin(2n-1)x$，由罗尔定理可得证。

八、证明：令$F(x)=f(x)e^{g(x)}$，由罗尔定理可得证。

九、当高$h=4r$时，$V_{\min}=\dfrac{8}{3}\pi r^3$。

习 题 十九

一、判断题（请在正确说法后面画√，错误说法后面画×）

√，×，√，√ ，√，

二、

A、C、D、D

三、

1、$\frac{1-\ln x}{x^2}+C$　　2、$y=-\frac{4}{\sqrt{x}}+4$　　3、$y=-\sin x+C_1x+C_2$

4、$F(x)=\begin{cases} e^x+C, & x\geq 0 \\ -e^{-x}+2+C & x<0 \end{cases}$

四、

1、$\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$　　2、$-\frac{1}{x}-\arcsin x+\frac{1}{2}e^{2x}+5x+C$

3、$\ln|x|+\arctan x+C$　　4、$\tan x-\cot x+C$

5、$-\cos x+\sin x+C$　　6、$-\cot x-x+C$

7、$\frac{1}{3}x^3-2x+2\arctan x+C$　　8、$\tan x-\sec x+C$

五、$t=\sqrt[3]{360}\approx 7.1$

习 题 二十

一、

A、D

二、

1、$-F(e^{-x})+C$　　2、$2\sqrt{f(x)}+C$

3、$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$　　4、$-\cos\frac{1}{x}+C$

三、

1、$\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$　　2、$2\arctan\sqrt{x}+C$

3、$\arctan e^x+C$　　4、$-\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arccos x+C$

5、$\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}\arctan\frac{2x}{3}+C$

6、$\frac{1}{3}(3+2\tan x)^2+C$　　7、$-\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right)+C$　　8、$\frac{1}{24}\ln\frac{x^6}{x^6+4}+C$

9、$\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$　　10、$\frac{1}{101}(x^2-3x+1)^{101}+C$

11、$\frac{3}{2}\left(\sin x-\cos x\right)^{\frac{2}{3}}+C$　　12、$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-(x+\frac{1}{x})}{\sqrt{2}+(x+\frac{1}{x})}\right|+C$

习 题 二十一

1、$\frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2})+C$　　2、$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$

3、$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C$　　4、$\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$

5、$-8\sqrt{2-x}+\frac{8}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}}+C$　　6、$\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$

7、$\arccos\frac{1}{|x|}+C$　　8、$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2(1-x^2)}}+C$

9、$\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+x^4)^2}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{1+x^4}+\frac{3}{4}\ln(1+\sqrt[3]{1+x^4})+C$

10、$\frac{1}{3}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x-1}\right|+C$　　11、$\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right|+C$

习 题 二十二

一、

C、C、B

二、

1、$-2x\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}+C$　　2、$x\ln x-x+C$　　3、$-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

三

1、$\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$　　2、$\frac{1}{2}x^2\arccos x-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\arcsin x+C$

3、$-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$　　4、$x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C$

5、$e^x\ln x+C$　　6、$-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$

7、$\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+C$　　8、$2\sqrt{x}\ln(1+x)-2\sqrt{x}+2\arctan\sqrt{x}+C$

习 题 二十三

1、$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$　　2、$\ln\left|x^2+3x-10\right|+C$

3、$\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

4、$-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

5、$\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$　　6、$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$

7、$\ln|\tan x|-\frac{1}{2}\csc^2 x+C$　　8、$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C$

9、$2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$

10、$-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$

第四章　复习题

一、判断题

√　√　√　×　×

二、单项选择题

C　D　B　D

三、填空题

1、$\frac{1}{12}(1+x)^{12}-\frac{1}{11}(1+x)^{11}+c$

2、$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+c$

3　$x-\ln(1+e^x)-e^{-x}\ln(1+e^x)+c$

4　$\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+c$

5　$\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$

四、求下列积分

1、原式 $=\frac{1}{12}(2x+3)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C$

2、原式$=\int\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx=\int\frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx=\frac{1}{2}\ln\sin(x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}x+c$

3、原式 $=-\frac{1}{97}(x-1)^{-97}-\frac{1}{49}(x-1)^{-98}-\frac{1}{99}(x-1)^{-99}+c$

4、原式$=\ln\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{e^x}{1+e^x}+c$

5、原式$=x\arctan(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln[1+(1+\sqrt{x})^2]+c$

6、原式

$$=\int\frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\frac{1}{4}\int\frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

7、原式$=\arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c$

8、原式$=\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx+2\int\sqrt{\sin x}de^{-\frac{x}{2}}=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}+c$

五、$f(x)=\begin{cases}x+\mathrm{C} & x\le 0\\ e^x+\mathrm{C}-1 & x>0\end{cases}$

六、证明：由 $(\int f^{-1}(x)dx-xf^{-1}(x)+F[f^{-1}(x)])'=0$ 即可证

习题二十四

一．　1－5. √ × √ √ √

二．D A C B

三．1. $\dfrac{\pi}{4}$　　2.　<　　>

四．解：令 $f(x)=e^{x^2-x}$，在区间 $[0,2]$ 上，有 $f(x)_{\max}=e^2, f(x)_{\min}=e^{-\frac{1}{4}}$，所以有

$$-e^2(2-0)\le\int_2^0 e^{x^2-x}dx\le -e^{\frac{-1}{4}}(2-0)$$

$$-2e^2\le\int_2^0 e^{x^2-x}dx\le -2e^{\frac{-1}{4}}$$

五．解：令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$f(x)$ 在区间 $[n,n+p],(n\to\infty)$ 上为连续函数，帮必存在一点 ξ，使得：$\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}dx=f(\xi)p$，因为 $n\to\infty$,所以 $\xi\to\infty$，故有：

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\xi\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}p=0$$

习题二十五 微积分基本公式

一 1. √　　2. √　　3. ×,　　4. √

二 1. D　2. D　3.. B

三 1. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　2. $-\dfrac{1}{2}$　　3.　1

4. $\dfrac{1}{4}$　　5. $\dfrac{1}{6}$

四、1.解:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx &=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^x}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}=(\sec^2 x-1)dx=(\tan x-1)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=1-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

2.解:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

3.解:

$$\begin{aligned}\int_1^4 (\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}})^2 dx &= \int_1^2 (\frac{u-1}{u})^2 2udu = 2\int_1^2 (u-2+\frac{1}{u})du \\ &= (u^2-4u+2\ln u)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1\end{aligned}$$

4.解:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)dx \\ &= 2(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

5.解:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (x+1)dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2}dx = (\frac{x^2}{2}+x)\Big|_0^1 + (\frac{x^3}{6})\Big|_1^2 = \frac{8}{3}$$

五.解:

$$\begin{aligned}&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

六.证明:

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{(x-a)f(x) - \int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2} \\ &= \frac{(x-a)f(x) - (x-a)f(\xi)}{(x-a)^2} \\ &= \frac{f(x)-f(\xi)}{x-a} \le 0 \qquad (\xi \in (a,x))\end{aligned}$$

3、 习题二十六 定积分的换元法

一、1. $\times$，　　2 $\surd$，　　3. $\surd$

二 1.C　　2.B　　3.B　　4.D

三 1. π　　2. $f(b+x)-f(a+x)$

四、1.解:

$$\int_{D}^{1} te^{-\frac{t^2}{2}dt} = \int_{D}^{1} e^{-\frac{t^2}{2}} d(t^2) = e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{D}^{1} = 1-e^{-\frac{1}{2}}$$

2.解:

$$\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_{D}^{2} \frac{du}{\sqrt{1+u}} du = 2(1+u)^{\frac{1}{2}}\Big|_{D}^{2} = 2(\sqrt{3}-1)$$

3.解:

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^u du}{\tan^2 u\cdot \sec u} \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot u \csc u du = -\csc u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4.解:

$$\begin{aligned}\int_{D}^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx &= \int_{D}^{\pi} \sqrt{\sin x \cos^2 x} dx \\ &= \int_{D}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x}\cos x dx \\ &= 2\int_{D}^{1} \sqrt{u} du = \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{D}^{1} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

5.解:

$$\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3} = \int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3}\cdot\frac{1}{5}d(11+5x)$$
$$= -\frac{1}{10}(11+5x)^{-2}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{16^2}\right)$$

$$=\frac{51}{512}$$

6.解:

$$\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx = \int_{0}^{2}\frac{u}{1+u^3}2udu$$

$$=\frac{4}{3}\ln 3$$

五.3、证明:

$$\frac{\pi}{2} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-u)}{\sin(\frac{\pi}{2}-u)+\cos(\frac{\pi}{2}-u)}d(-u)$$
$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos}dx$$

所以,

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{\pi}{4}$$

习题二十七 定积分的分部积分法

一、1. $\frac{8}{35}$, $\frac{35}{128}\pi$ 2. $e+1$ 3. 0

二、1.解: $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

2.解:

$$\int_{0}^{1} xe^{-x}dx \quad = (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_{0}^{1} = 1 - 2e^{-1}$$

3.解: $8\ln 2 - 4$

4.解:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x + x\sin x)dx \quad &= \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx \\ &= \frac{\pi^2}{8} + (-x\cos x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + 1\end{aligned}$$

5.解: $2 - \frac{2}{e}$

6.解:

$$\begin{aligned}\int_{1}^{e} \sin(\ln x)dx \quad &= \int_{0}^{1} \sin u e^{u} du = \frac{1}{2}(e^{u}\sin u - e^{u}\cos u)\Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{2}(1 + e\sin 1 - e\cos 1)\end{aligned}$$

7.解:

$$\int_{1}^{9} e^{\sqrt{x}}dx = \int_{1}^{3} e^{u}2udu = (2ue^{u} - 2e^{u})\Big|_{1}^{3} = 4e^{3}$$

三　证明:

$$\int_0^x \left[\int_0^t f(u)du\right] dt = \left[t\int_0^t f(u)du\right]_0^x - \int_0^x tf(t)dt$$
$$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x tf(t)dt$$
$$= \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

四、$\frac{1}{2}(\cos 1 - 1)$

习题二十八 反常积分

一、1. × 2. × 3. √

二、1.B 2.D 3.A 4.C 5.D

三、1. $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ 2. $\ln 3$

四、1.解：

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}dx = \int_0^1 \frac{e^u}{e^u\sqrt{1-u^2}}du = \left[\arcsin u\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

2.解：积分发散。

3.解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4(1+(\frac{x+1}{2})^2)}$$
$$= \frac{1}{2}\arctan(\frac{x+1}{2})\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

4.解：

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec u \tan u}{\sec u \tan u}du = u\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

5.解：

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 u}{(1+\tan^2 u)^{\frac{3}{2}}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 1$$

6.解：

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+3)}} dx = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u\Big|_{-1}^1 = \pi$$

7.解：令 $u = \sqrt{x-1}$ ，则

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2udu}{(1+u^2)u} = 2\arctan x\Big|_0^{+\infty} = \pi$$

第三章　复习题（二）

一、单项选择题

B　B　B　A　A

二、填空题

1、$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \dfrac{\pi}{4}$。

2、$\int_{-1}^1 (x+\sqrt{1-x^2})^2 dx =$ ______2______。

3、设 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + x^3 \int_0^1 f(x)dx$，则 $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{\pi}{3}$。

4、函数 $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{6(\sqrt{3}-1)}。$$

5、设函数 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）上连续，

则 $\frac{d}{dx}\int_{3x}^{\sin x^2} f(t)dt = \underline{2x\cos x^2 f(\sin x^2)-3f(3x)}$。

*6、$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sin(x^2-t)dt = \underline{=2x\sin x^2}$。

三、计算下列各题

1、$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{2\sin x\cdot(x^4+3x^2+1)}{1+x^2}+\cos x\right]dx = 0+\int_{-\pi}^{\pi}\cos xdx = 0$

2、$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^{2x}-1}dx = \left[\sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}\right]_0^{\ln 2}$

$= \sqrt{3}-\arctan\sqrt{3}$

3、$\int_0^{\sqrt{\ln 3}} x^3 e^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} --\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\sqrt{\ln 3}} = \frac{1}{3}-\frac{1}{6}\ln 3$

4、$\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = \left[-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}\right]_1^e = 2-\frac{5}{e}$

四、设 $f(x)=\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$，求 $\int_0^1 x^2 f(x)dx$

解：$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1-\sqrt{2}}{6}$

五、设 $f(x)=\begin{cases}1/(x+1), & x\ge 0\\ 1/(1+e^x), & x<0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

解：令 $x-1=t$，则

$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(t)dt = \ln(1+e)$

习题二十八　定积分元素法 定积分在几何学上的应用

一、 1、解：积分区域 $D=\{1\le x\le 4, 1\le y\le\sqrt{x}\}$，所求面积为

$$S=\int_{1}^{1}(\sqrt{x}-1)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_{1}^{1}=\frac{5}{3}$$

2、解：积分区域 $D=\{0\le x\le 1,\sqrt{x}\le y\le \frac{1}{2}(3-x)\}$，所求面积为

$$S=\int_{0}^{1}(\frac{1}{2}(3-x)-\sqrt{x})dx=\frac{7}{12}$$

3、解：

$D=\{0\le y\le \frac{1}{2},\frac{1}{y}\le x\le y^2+1\}$

$S=\frac{2}{3}$

4、解：所求面积为

$$S=\int_{1}^{2}(\ln y-\frac{1}{2}\ln y)dy=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\ln y dy=\ln 2-\frac{1}{2}$$

5、解：所求面积为$S=21-2\ln 2$

6、解：

$$S=\int_{0}^{2\pi a}ydx=\int_{0}^{2a}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt=3\pi a^2$$

习题三十 定积分在几何学上的应用（续）

一、1.D　　2.B

二、解：交点为 $\theta=\frac{\pi}{2}$，所以所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{5}{4}\pi a^2-2a^2$$

三、解：　（1）绕 x 轴

$$V=\int_0^2 \pi y^2 dx=\int_0^2 \pi x^6 dx=\frac{\pi}{7}x^7\Big|_0^2=\frac{128}{7}\pi$$

（2）绕 y 轴　　$V=\frac{64}{5}\pi$

四、解：

$$V=2\int_0^a \pi x^2 dy=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 t)^2 d(a\sin^3 t)=\frac{32}{105}\pi a^3$$

五、解：

$$\begin{aligned} V &=\int_{-1}^{1}\pi\left[(2+\sqrt{1-y^2})^2-(2-\sqrt{1-y^2})^2\right]dy \\ &=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy=8\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt \\ &=4\pi(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}=4\pi^2 \end{aligned}$$

六、解：

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

所以

$$1+(y')^2=\sqrt{1+(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})$$

曲线的弧长为

$$s=\int_1^3\frac{1}{2}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$$

七、解：

$$
\begin{aligned}
s &= 2\int_{D}^{\pi}\sqrt{\rho^2+[(\rho'(\theta)]^2}d\theta \\
&= 2\int_{D}^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2}d\theta \\
&= 2\int_{D}^{\pi}2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{D}^{\pi} = 8a
\end{aligned}
$$

习题三十一　定积分的物理应用举例

一 解:设锤击第二次时，锤钉又击入 $h(cm)$，木板对铁钉的阻力 f 与铁钉击入木板的深度 $x(cm)$成正比，则

$$f = kx,$$

功元素

$$dW = fdx = kxdx,$$

第一次做功

$$W_1 = \int_{D}^{1} kxdx = \frac{1}{2}k$$

第二次做功

$$W_2 = \int_{1}^{1+h} kxdx = \frac{1}{2}k(h^2+2h),$$

因为

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}k(h^2+2h,$$

解之得 $h = \sqrt{2}-1(cm)$

二、解：如图，直线 AB 的斜率为$\frac{2}{3}$，在水深x经处，水面的截面半径

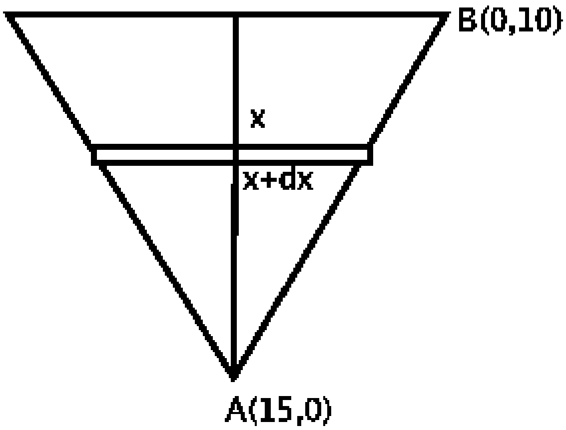
$r=\frac{2}{3}(15-x)$

所以，功元素

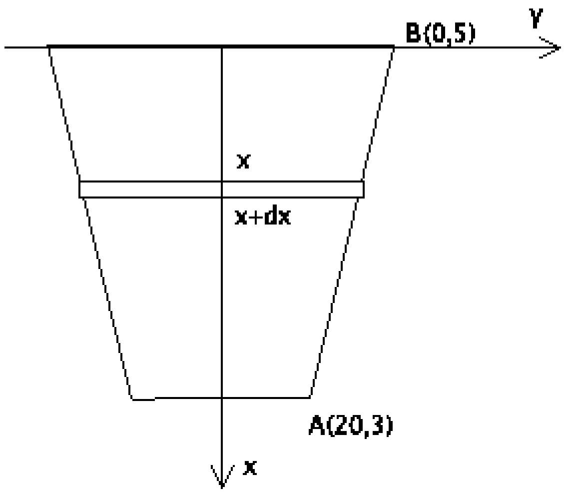
$$dW=9.8\pi x(10-\frac{2}{3}x)^2dx$$

所做的功为

$$W=\int_0^{15}9.8\pi x(10-\frac{2}{3}x)^2dx$$
$$=57697.5(kj)$$



三、解：如图，



直线 AB 的方程为$5-\frac{x}{10}$,压力微元

$$dP = 2xg(5-\frac{x}{10})dx$$

压力为

$$P=\int_0^2 2xg(5-\frac{x}{10})dx=\frac{4400}{3}g(kN)$$

自测题（一）

一、单项选择题

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
C	A	A	A	C	B	D	D	D	D

二、填空题

（11）	（12）	（13）	（14）	（15）
-3	$-\frac{1}{1+x^2}dx$	0	$\frac{x\cos 2x-\sin 2x}{4x}+C$	$[-3,-1]$

三、求解下列各题

（16）解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^t-\cos t)dt}{(\arcsin x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^t-\cos t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{2} \qquad =\frac{1}{2}$$

(17）解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{3e^{3t}f'(e^{3t}-1)}{f'(t)}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\frac{3f'(0)}{f'(0)}=3$$

(18）解：方程两边对x求导得

$e^{2x+y}(2+y')+(y+xy')\sin(xy)=0$ 把(0,1)代入上式得 $y'\big|_{(0,1)}=-2$

过点(0,1)的法线的斜率为$k=\dfrac{1}{2}$

故所求法线方程为：$y-1=\dfrac{1}{2}(x-0)$，即 $x-2y+2=0$

或 解：方程两边对x求导得

$e^{2x+y}(2+y')+(y+xy')\sin(xy)=0$ 得 $y'=-\dfrac{2e^{2x+y}+y\sin(xy)}{e^{2x+y}+x\sin(xy)}$

得 $y'\big|_{(0,1)}=-2$ 于是过点(0,1)的法线的斜率为$k=\dfrac{1}{2}$

故所求法线方程为：$y-1=\dfrac{1}{2}(x-0)$,即 $x-2y+2=0$

(19）解：令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2,dx=2tdt$

故 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx=\int\frac{t}{1+t^3}\cdot 2tdt=\int\frac{2t^2}{1+t^3}dt = \frac{2}{3}\int\frac{1}{1+t^3}d(1+t^3)$

$$=\frac{2}{3}\ln\left|1+t^3\right|+\mathrm{C} = \frac{2}{3}\ln(1+x\sqrt{x})+\mathrm{C}$$

（20）解:$\int_1^2 x^2\ln x dx=\int_1^2 \ln x d\frac{x^3}{3}=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{3}dx$

$$=\frac{8}{3}\ln 2-\left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$$

（21）解：令$x=\sec t$，则$dx=\sec t\tan t dt$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec t\sqrt{\sec^2 t-1}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt=\left[t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

（22） 解：由于点$(1,3)$在曲线上，

故$3=a+b$

又点$(1,3)$为曲线的拐点，故$12a+6b=0$

解得　　$a=-3,b=6$

此时　$y''=-36x^2+36x=36x(1-x)$,

因此$(0,0),(1,3)$为曲线的拐点，

曲线在区间$[0,\ 1]$上是凹的，

在区间$(-\infty,0]$及$[1,\ +\infty)$上是凸的。

（23）解：因为$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)，$$

故由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\frac{1}{2}$有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+f(0)x+f'(0)x^2+\frac{1}{2!}f''(0)x^3+xo(x^2)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[(1+f(0))x+f'(0)x^2+(\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)\right]=\frac{1}{2}，$$

所以$1+f(0)=0$，　$f'(0)=0$，　$\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，

这样 $f(0)=-1$， $f'(0)=0$， $f''(0)=\frac{4}{3}$

（24）解：由$f(x)=x^n$得$f'(1)=n,$

于是过点(1,1)的切线为 $y=nx-n+1$

故切线与x轴的交点为：$(\xi_n,0)$=（$\frac{n-1}{n},0$）

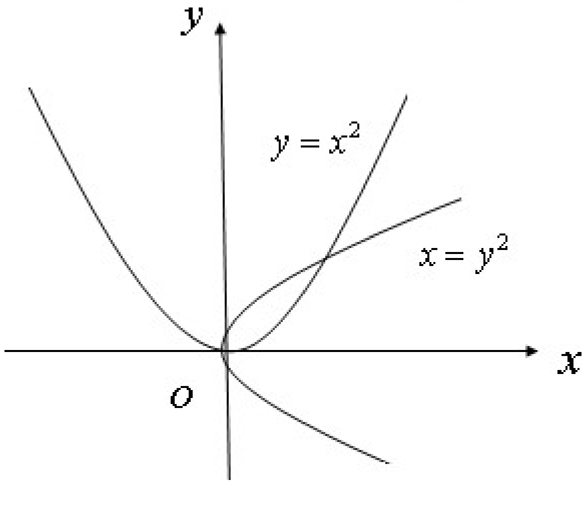
故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{n-1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$

（25）解：如图示两曲线的交点坐标为(1,1)

所求面积：A＝$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

所求体积为：

V＝$\int_0^1(\pi(\sqrt{y})^2-\pi(y^2)^2)dy=\left[\frac{1}{2}\pi y^2-\frac{1}{5}\pi y^5\right]_0^1=\frac{3}{10}\pi$



四、证明题

证：设$F(x)=f(x)-g(x)$

由于函数 $f(x)$， $g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则

$F(x)=f(x)-g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，

又 $f(b)-f(a)=g(b)-g(a)$，则

$f(b)-g(b)=f(a)-g(a)$，

即 $F(b)=F(a)$

于是由罗尔定理知，在(a,b)内至少存在一点ξ，

使 $F'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=g'(\xi)$。

自测题（二）

一、单项选择题

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
D	C	B	A	A

二、填空题

（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
$y=1$	$(\sec^2 x-1)f'$	2	$-xe^x$	0

三、求解下列各题

11、解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}\bullet\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=e^2$

12、解： $\lim\limits_{x\to 0}\arccos\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}=\arccos(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x})$

$=\arccos(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2\sin x})=\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$

13、解：由 $y=e^{xy}+xy$,得 $y'=e^{xy}(y+xy')+y+xy'$

而当 $x=0$ 时， $y=1$，这样 $y'\big|_{x=0}=2$

于是 $dy\big|_{x=0}=2dx$

14、解： 令 $t=-\dfrac{1}{x}$，代入方程得： $3f(-\dfrac{1}{t})+\dfrac{4}{t^2}f(t)-7t=0$，

所以有 $\begin{cases}3f(x)+4x^2f(-\dfrac{1}{x})+\dfrac{7}{x}=0\\4f(x)+3x^2f(-\dfrac{1}{x})-7x^3=0\end{cases}$，解得 $f(x)=4x^3+\dfrac{3}{x}$

令 $f'(x)=12x^2-\dfrac{3}{x^2}=0$ 得驻点： $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

而 $f''(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=24\sqrt{2}>0$， $f''(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-24\sqrt{2}<0$，

所以， $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 取极小值 $f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=4\sqrt{2}$；

$f(x)$ 在 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 取极大值 $f(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-4\sqrt{2}$。

15、解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\tan t$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\sec^2 t}{\cos t}=\sec^3 t$，

故 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}$

16、解： $\int \ln(1+\sqrt{x})dx \overset{\sqrt{x}=t}{=} \int \ln(1+t)dt^2$

$$= t^2\ln(1+t) - \int \frac{t^2}{1+t}dt = t^2\ln(1+t) - \int (t-1+\frac{1}{1+t})dt$$

$$= t^2\ln(1+t) - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln|1+t| + C$$

$$= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}) + C$$

17、解： $\int_0^k xe^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^k - \int_0^k \frac{1}{2}e^{2x}dx$

$$= \frac{1}{2}ke^{2k} - \frac{1}{4}e^k + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

故 $k = \frac{1}{2}$

18、解：方法一： $\int_{-1}^{1} f(x+1)dx \overset{令u=x+1}{=} \int_0^2 f(u)du = \int_0^1 udu + \int_1^2 \frac{1}{1+(u-1)^2}du$

$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 + \left[\arctan(u-1)\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

方法二： $f(x+1) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{1} f(x+1)dx = \int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} + \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

四、综合应用题

19、解：（1）由于 $\frac{dy}{dx} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2}{t} - 1$， $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{t^3}$，

当$t>0$时，$\frac{d^2y}{dx^2}<0$，故L为凸的。

（2）因为当$t=0$时，L在对应点处的切线方程为$x=1$，此切线不经过点$(-1,0)$，不合题意，故设切点(x_0,y_0)对应的参数为$t_0>0$，则L在(x_0,y_0)处的切线方程为

$$y-(4t_0-t_0^2)=(\frac{2}{t_0}-1)(x-t_0^2-1)，$$

令$x=-1,\quad y=0$得$0-(4t_0-t_0^2)=(\frac{2}{t_0}-1)(-1-t_0^2-1)$，即$t_0^2+t_0-2=0$，

于是$t_0=1$，或$t_0=-2$（舍去）。

由$t_0=1$，知切点为$(2,3)$，且切线方程为$y=x+1$。

20、解：（1）$f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$，则 $f'(x)=e^{-x^2}>0$

故 函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加函数

（2）$f'(x)=e^{-x^2}$ 故 $f'(0)=1$，$f'(1)=\frac{1}{e}$

由于$f(1)=\int_1^1 e^{-t^2}dt=0$，故$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=e$

21、

解：

（1） $f_1(x)=\dfrac{x}{1+x},f_2(x)=\dfrac{x}{1+2x},f_3(x)=\dfrac{x}{1+3x},\cdots,f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$

（2） $S_n=\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\dfrac{x}{1+nx}dx=\int_0^1\dfrac{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{1+nx}dx$

$=\dfrac{1}{n}\int_0^1 1dx-\dfrac{1}{n}\int_0^1\dfrac{1}{1+nx}dx=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\ln(1+nx)\Big|_0^1$

$=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\ln(1+n)$

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n=1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{n}=1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x}=1-0=1$

自测题（三）

一、单项选择题

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
D	D	C	A	A

二、填空题

（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
0	$(e^x-1)f'$	$(-\infty,+\infty)$	$\ln x+1-\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$

三、求解下列各题

11、解：$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{1}{2x}\times(-2)}=e^{-2}$

12、解：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}-1)=0$

有 $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1)=0$ ， $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\sin 2x=0$

从而 $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$，

这样 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$

13、解： $y'=2\cos 2x-e^{x}$,

$dy\big|_{x=0}=y'\big|_{x=0}dx=dx$

14、解：方程两边对 x 求导得 $3x^2+3y^2y'-3\cos 3x+6y'=0$，

把 $x=0,\mathrm{y}=0$ 代入得 $y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$

故曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$

15、解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{-t}}{e^{t}}=e^{-2t}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2e^{-2t}}{e^{t}}=-2e^{-3t}$，

故 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=-2$

16、解： $\int e^{\sqrt{x}}dx\overset{\sqrt{x}=t}{=}\int 2te^{t}dt=2te^{t}-2\int e^{t}dt$

$=2te^{t}-2e^{t}+C=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$

17、解：$\int_0^A\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\left[\arcsin\dfrac{x}{2}\right]_0^A=\arcsin\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{6}$

故 $A=1$

18、解：$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} 2xdx+\int_{0}^{1}(3x-1)dx$

$$=\left[x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_{0}^{1}=-\frac{1}{2}$$

四、综合应用题

19、解 ：令 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{e}^{\frac{t}{n}}dt=-\int_x^0 f(u)\mathrm{e}^{\frac{x-u}{n}}du=\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\int_0^x f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}du$，

故 $\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\int_0^x f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}du=\cos x$，即 $\int_0^x f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}du=\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\cos x$，

上式两边对 x 求导，得 $f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}=-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\sin x$，

即 $f(x)=-\frac{1}{n}\cos x-\sin x$.

20、证明　因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且在 $[0,2]$ 必有最大值 M 和最小值 m，于是

$$m\le f(0)\le M，\quad m\le f(1)\le M，\quad m\le f(2)\le M$$

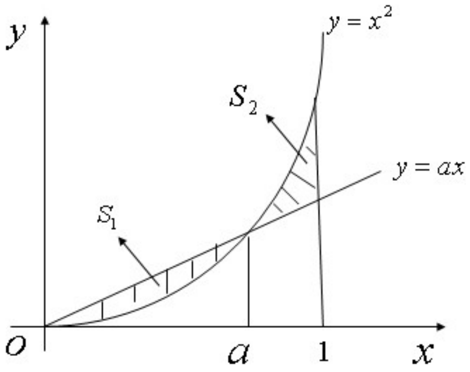
则
$$m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

这样，至少存在一点 $c\in[0,2]$，使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

因为 $f(c)=f(3)=1$，$f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续，在 $(c,3)$ 内可导，所以由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

21、解 ：（**1**）如图，



$$S = S_1 + S_2$$

$$= \int_0^a (ax - x^2)dx + \int_a^1 (x^2 - ax)dx$$

$$= \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$$

令 $S' = a^2 - \frac{1}{2} = 0$

得 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $S''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} > 0$，则 $S(\frac{\sqrt{2}}{2})$ 是极小值，即为最小值。其值为

$$S(\frac{\sqrt{2}}{2}) == \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

于是当 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$，使 $S_1 + S_2$ 达到最小，最小值为 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$。

（**2**）$V_x = \pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right]dx + \pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left[\left(x^2\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2\right]dx$

$$= \pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\frac{1}{2}x^2 - x^4)dx + \pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (x^4 - \frac{1}{2}x^2)dx = \frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$$