第四章 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分的概念

定义 若 $F'(x)=f(x), x\in$ 区间 I，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

比如，由于 $(\sin x)'=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$；$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数，$\ln|x|$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的原函数。

原函数存在定理 连续函数必有原函数，即连续函数一定是某个函数的导函数。(证明在下一章给出)

注 1）若 $F'(x)=f(x), x\in$ 区间 I，则对任一常数 C，有 $(F(x)+C)'=f(x), x\in$ 区间 I，得 $f(x)$ 在区间 I 上有一个原函数 $F(x)$，则 $f(x)$ 在区间 I 上有无穷多个原函数 $F(x)+C$；

2）若 $F'(x)=\Phi'(x)=f(x), x\in I$，则 $(\Phi(x)-F(x))'=0, x\in I$，故 $\Phi(x)-F(x)=$ 任意常数 C，$x\in I$，从而，$f(x)$ 在区间 I 上的任意两个原函数 $\Phi(x)$ 和 $F(x)$ 相差一个常数，$F(x)+$ 任意常数 C 表示 $f(x)$ 在区间 I 上的任意原函数 $\Phi(x)$，即原函数全体。

定义 在区间 I 上，$f(x)$ 的带任意常数的原函数 $F(x)+C$，亦即 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数全体，称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)dx$，即 $\int f(x)dx=F(x)+C$。

注 (1) 由定义，若 $F'(x)=f(x), x\in I$，则 $\int f(x)dx=F(x)+C, C$ 是任意常数，且 $\dfrac{d}{dx}(\int f(x)dx)=f(x)$。

(2) 因为 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的一个原函数，所以由定义，$\int f'(x)dx=f(x)+C$。

(3) 若 $F'(x)=f(x), x\in I$，则由定义，$\int f(x)dx=F(x)+C, C$ 是任意常数；反过来，若 $\int f(x)dx=F(x)+C, C$ 是任意常数，则 $\dfrac{d}{dx}(\int f(x)dx)=(F(x)+C)'=F'(x)$，得 $F'(x)=f(x), x\in I$，得到 $F'(x)=f(x), x\in I \Leftrightarrow \int f(x)dx=F(x)+C$。

(4) 可见，

$$\int f(x)dx \underset{\text{对}x\text{不定积分}}{\overset{\text{对}x\text{求导}}{\rightleftarrows}} f(x) \underset{\text{对}x\text{不定积分}}{\overset{\text{对}x\text{求导}}{\rightleftarrows}} f'(x)$$

。另外，$\int df(x)=\int f'(x)dx=f(x)+C$

例 (1)对实数 $\mu \neq 1$，$(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1})' = x^{\mu}$，即 $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ 是 x^{μ} 的一个原函数，所以 $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$，

(2)对实数 $a \neq 0$，$(\frac{1}{a}e^{ax})' = e^{ax}$，即 $\frac{1}{a}e^{ax}$ 是 e^{ax} 的一个原函数，所以 $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$。

例 (1)已知 $\int f(x)dx = x^2 + C$，求 $f(x)$；　(2) $f'(x) = x$，求 $f(x)$；

(3)已知 $f'(\ln x) = x$，求 $f(x)$；　　　　(4)已知 $[f(\ln x)]' = x$，求 $f(x)$。

解 (1) $f(x) = \frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = (x^2 + C)' = 2x$；(2) $f(x) = \int f'(x)dx = \int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$；

(3)令 $t = \ln x$，则有 $f'(t) = e^t$，故 $f(t) = \int f'(t)dt = \int e^t dt = e^t + C$；

(4)令 $t = \ln x$，则由 $[f(\ln x)]' = x$ 得，$f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = x$，亦即 $f'(t) \cdot e^{-t} = e^t$，故 $f'(t) = e^{2t}$

故 $f(x) = \int f'(x)dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$。

由于一个求导公式对应一个不定积分公式，故从基本初等函数的求导公式，可得基本初等函数的不定积分公式(p188-189，需要牢记！)，比如，$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$；

$(\frac{a^x}{\ln a})' = a^x \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$，特别地，$\int e^x dx = e^x + C$ 等.

三、不定积分的性质

性质 1 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数均存在，则 $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$。

证 由于 $(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x)$，所以

$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ 是函数 $f(x) \pm g(x)$ 的原函数且含有一个任意常数，故是 $f(x) \pm g(x)$ 的不定积分，即 $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int [f(x) \pm g(x)]dx$。

性质 2 设函数 $f(x)$ 的原函数存在，对非零常数 k，有 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$。

证 由于 $(k\int f(x)dx)' = k(\int f(x)dx)' = kf(x)$，所以 $k\int f(x)dx$ 是函数 $kf(x)$ 的原函数且含有一个任意常数，故是 $kf(x)$ 的不定积分，即 $k\int f(x)dx = \int kf(x)dx$。

例 $\int \sqrt{x}(x^2 - 5)dx = \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}})dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx - 5\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 5 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$.

例 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx=\int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}dx=\int (x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})dx=\frac{x^2}{2}-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C$.

例 $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx=\int \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{(x\ln x)^2}=-\frac{1}{x\ln x}+C$. 注意 $d(x\ln x)=(x\ln x)'dx=(1+\ln x)dx$.

例 $\int 2^x e^x dx=\int (2e)^x dx=\frac{(2e)^x}{\ln 2e}+C=\frac{2^x\cdot e^x}{1+\ln 2}+C$. 注 $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$.

例 $\int \tan^2 xdx=\int (\sec^2 x-1)dx=\int \sec^2 xdx-\int 1dx=\tan x-x+C$.

例 $\int \sin^2\frac{x}{2}dx=\int \frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}(\int 1dx-\int \cos xdx)=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$.

例 $\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int \frac{4}{\sin^2 x}dx=4\int \csc^2 xdx=-4\cot x+C$.

例 $\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}dx=\int (2x^2-1+\frac{4}{x^2+1})dx=2\int x^2dx-\int dx+4\int \frac{dx}{x^2+1}$

$=\frac{2}{3}x^3-x+4\arctan x+C$，这里 $2x^4+x^2+3=(x^2+1)(2x^2-1)+4$，运用多项式除法即

得 $x^2+1\overline{\smash{)}2x^4+x^2+3}$.

$$
\begin{array}{r}
2x^2-1 \\
x^2+1\overline{\smash{)}2x^4+x^2+3} \\
\underline{2x^4+2x^2} \\
-x^2+3 \\
\underline{-x^2-1} \\
4
\end{array}
$$

第二节　换元积分法

第一换元法

定理 1 设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$ 可导，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \underset{u=\varphi(x)}{=} \int f(u)du = F(u)+C = F(\varphi(x))+C\text{。}$$

注 运用第一换元法求 $\int g(x)dx$，必须先将不定积分凑成 $\int g(x)dx=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ $=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))$，然后再令 $u=\varphi(x)$ 进行换元，所以第一换元法也称为**凑微法**。

常用的凑微分形式（由微分定义 $df(x)=f'(x)dx$ 易得）

（1）$d\varphi(x)=d(\varphi(x)+b)$；$adx=d(ax)$；$dx=\frac{1}{a}d(ax)=\frac{1}{a}d(ax+b)$；$x^n dx=\frac{1}{n+1}dx^{n+1}$；

（2）$\frac{1}{x}dx=d\ln|x|$；　$\frac{1}{x^2}dx=d(-\frac{1}{x})$；　$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=d(\sqrt{x})$；　$e^x dx=d(e^x)$；

（3）$\sin xdx=d(-\cos x)$；$\cos xdx=d(\sin x)$；$\sec^2 xdx=d(\tan x)$；$\csc^2 xdx=d(-\cot x)$；

$\sec x\tan xdx=d(\sec x)$；$\csc x\cot xdx=d(-\csc x)$；

（4）$\frac{1}{1+x^2}dx=d(\arctan x)$；$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=d(\arcsin x)$；$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

例 $\int 2\cos 2xdx=\int\cos 2xd2x \underset{u=2x}{=} \int\cos udu=\sin u+C=\sin 2x+C$

例 求 $\int 2xe^{x^2}dx$

解　$2xdx=dx^2$，$\int 2xe^{x^2}dx=\int e^{x^2}dx^2 \underset{u=x^2}{=} \int e^u du=e^u+C=e^{x^2}+C$.

例 求 $\int x\sqrt{1-x^2}dx$

解　$xdx=\frac{1}{2}dx^2=-\frac{1}{2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}d(1-x^2)$，

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d(1-x^2) \underset{u=1-x^2}{=} -\frac{1}{2}\int\sqrt{u}du=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

例 求 $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx$　　　解　注意 $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$，

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d\frac{x}{a}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$（熟练后可不写换元过程！）

例 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx, a>0$　　解 注意 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$，

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}d\frac{x}{a} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$（熟练后可不写换元过程!）

例 求 $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$　　解 注意 $\frac{1}{x}dx = d\ln|x| = d\ln x$，

$$\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)} = \int \frac{d\ln x}{1+2\ln x} \underset{u=\ln x}{=} \int \frac{du}{1+2u} = \frac{1}{2}\int \frac{d2u}{1+2u} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+2u)}{1+2u} = \frac{1}{2}\ln|1+2u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x| + C.$$（熟练后可不写换元过程！）

例 求 $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$　　解 注意 $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = d\sqrt{x}$，$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x}$，

$$\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{3\sqrt{x}}d\sqrt{x} \underset{u=\sqrt{x}}{=} 2\int e^{3u}du = \frac{2}{3}\int e^{3u}d3u = \frac{2}{3}e^{3u} + C = \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}} + C.$$（熟练后可不写换元过程!）

例 求 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d\cos x = -\ln|\cos x| + C,$

例 求 $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\sin x}d\sin x = \ln|\sin x| + C.$

一些处理技巧

1. **利用凑微公式** $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax) = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$，

例 $$\int \frac{1}{3+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}d(3+2x) \underset{u=3+2x}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|3+2x| + C.$$

例 $$\int (4x-1)^{20}dx = \frac{1}{4}\int (4x-1)^{20}d4x = \frac{1}{4}\int (4x-1)^{20}d(4x-1) \underset{u=4x-1}{=} \frac{1}{4}\int u^{20}du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{21}}{21} + C = \frac{(4x-1)^{21}}{84} + C.$$

例 $$\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx = \int \frac{x^2}{(x+2)^3}d(x+2) \underset{u=x+2}{=} \int \frac{(u-2)^2}{u^3}du = \int (\frac{1}{u} - \frac{4}{u^2} + \frac{4}{u^3})du$$

$$= \ln|u| + \frac{4}{u} + 4\cdot\frac{u^{-2}}{-2} + C = \ln|x+2| + \frac{4}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} + C.$$

例 $\int\frac{x}{(1+x)^3}dx=\int\frac{x}{(1+x)^3}d(1+x)\underset{=\!=\!=\!=\!=\!=}{t=1+x}\int\frac{t-1}{t^3}dt=\int\frac{1}{t^2}dt-\int t^{-3}dt=\frac{-1}{t}-\frac{t^{-2}}{-2}+C$

$$=-\frac{1}{1+x}-\frac{(1+x)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}+C.$$

例 $\int x(1+x)^{10}dx=\int x(1+x)^{10}d(1+x)\overset{t=1+x}{=}\int(t-1)t^{10}dt=\frac{t^{12}}{12}-\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{(1+x)^{12}}{12}-\frac{(1+x)^{11}}{11}+C$

例 $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx=\int\frac{(t+1)^2}{t^{100}}dt=\int\frac{1}{t^{98}}dt+2\int\frac{1}{t^{99}}dt+\int\frac{1}{t^{100}}dt=\frac{t^{-97}}{-97}+2\frac{t^{-98}}{-98}+\frac{t^{-99}}{-99}+C$

$$=\frac{(x-1)^{-97}}{-97}+\frac{(x-1)^{-98}}{-49}+\frac{(x-1)^{-99}}{-99}+C$$

2. 分母分解因式将被积函数拆项

例 求 $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx$　　　解 注意 $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a})$，

$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}(\int\frac{1}{x-a}dx-\int\frac{1}{x+a}dx)=\frac{1}{2a}[\int\frac{1}{x-a}d(x-a)-\int\frac{1}{x+a}d(x+a)]$

$=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$.（熟练后可不写换元过程！）

例 $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}dx=\frac{-1}{3}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}\right)dx=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$.

例 $\int\frac{1+x+x^2}{x+x^3}dx=\int(\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2})dx=\ln|x|+\arctan x+C$.

3. 分子加项减项分成两个积分

例 $\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int(1-\frac{e^x}{1+e^x})dx=\int 1dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=x-\int\frac{1}{1+e^x}de^x$

$$=x-\int\frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)=x-\ln(1+e^x)+C.(=\ln(\frac{e^x}{1+e^x})+C=-\ln(1+e^{-x})+C)$$

例 $\int\frac{x}{(1+x)^3}dx=\int\frac{1+x-1}{(1+x)^3}dx=\int(\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3})d(1+x)=-\frac{1}{1+x}-\frac{(1+x)^{-2}}{-2}+C$

$$=-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}+C.$$

例 $\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \int 1dt - \int \frac{1}{t^2+1}dt = t - \arctan t + C$

4. 利用凑微公式 $\int f(x^n)\frac{1}{x}dx = \frac{1}{n}\int f(x^n)\frac{1}{x^n}dx^n$.

例 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)} = \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10}+1)}{x^{10}(x^{10}+1)} \underset{u=x^{10}+1}{=} \frac{1}{10}\int \frac{du}{(u-1)u} = \frac{1}{10}\int (\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u})du$

$= \frac{1}{10}(\ln|u-1| - \ln|u|) + C = \frac{1}{10}\ln\left|1-\frac{1}{u}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|1-\frac{1}{x^{10}+1}\right| + C.$

例 $\int \frac{dx}{x(x^6+4)} = \frac{1}{6}\int \frac{dx^6}{x^6(x^6+4)} \overset{u=x^6}{=} \frac{1}{6}\int \frac{du}{u(u+4)} = \frac{1}{24}\ln\frac{x^6}{x^6+4} + C$, $C = \frac{1}{6}C_1$，这里

$\int \frac{du}{u(u+4)} = \frac{1}{4}\int (\frac{1}{u}-\frac{1}{u+4})du = \frac{1}{4}(\ln|u| - \ln|u+4|) + C_1 = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u}{u+4}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\frac{x^6}{x^6+4} + C_1$

5. 对非负整数 k,l，有

$\int \sin^{2k+1}x\cos^l xdx = -\int \sin^{2k}x\cos^l xd\cos x = -\int (1-\cos^2 x)^k \cdot \cos^l xd\cos x$；

$\int \sin^l x\cos^{2k+1}xdx = \int \sin^l x\cos^{2k}xd\sin x = \int \sin^l x\cdot(1-\sin^2 x)^k d\sin x$；

$\int \sin^{2k}x\cos^{2l}xdx = \int [\frac{1-\cos 2x}{2}]^k[\frac{1+\cos 2x}{2}]^l dx$.

注 该方法凑微后需统一成同一个三角函数再换元。

例 $\int \cos^2 xdx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}(\int 1dx + \int \cos 2xdx) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\int \cos 2xd2x)$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

例 求 $\int \sin^3 xdx$　　　解 注意 $\sin xdx = -d\cos x$，

$\int \sin^3 xdx = \int \sin^2 x\cdot\sin xdx = -\int (1-\cos^2 x)d\cos x = -[\int 1d\cos x - \int \cos^2 xd\cos x]$.

$= -[\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x] + C$（凑微后统一成同一个三角函数！另 $\int df(x) = f(x) + C$）

例 求 $\int \sin^2 x\cos^5 xdx$　　　解 注意 $\cos xdx = d\sin x$，

$\int \sin^2 x\cos^5 xdx = \int \sin^2 x\cos^4 xd\sin x = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2 d\sin x$.

$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)d\sin x = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$.

例 求$\int \sin^2 x\cos^4 xdx$　　解 注意$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$，

$$\int \sin^2 x\cos^4 xdx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot(\frac{1+\cos 2x}{2})^2 dx=\frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)dx=\frac{1}{8}\int [(\cos 2x-\cos^3 2x)+(1-\cos^2 2x)]dx$$

$$=\frac{1}{8}[\int \cos 2x\cdot\sin^2 2xdx+\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx]=\frac{1}{16}\int \sin^2 2xd\sin 2x+\frac{1}{16}(\int 1dx-\int \cos 4xdx)$$

$$=\frac{1}{48}\sin^3 2x+\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+C\cdot$$

6. 分子分母同时乘以一个函数

例 求$\int \sec xdx$　　解　注意$d(\sec x)=\sec x\tan xdx$，$d(\tan x)=\sec^2 xdx$，

$$\int \sec xdx=\int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx=\int \frac{d(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}=\ln|\sec x+\tan x|+C$$

例 求$\int \csc xdx$　　解　注意$d(\csc x)=-(\csc x\cot x)dx$，$d(\cot x)=-\csc^2 xdx$，

$$\int \csc xdx=\int \frac{\csc x(\csc x-\cot x)}{\csc x-\cot x}dx=\int \frac{d(\csc x-\cot x)}{\csc x-\cot x}=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

例 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}dx=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int \sec^2 xdx+\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x}=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$

例 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}=\int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1+e^{-2x}}}=-\int \frac{de^{-x}}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}=-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+(e^{-x})^2})+C.$

例 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}=\int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}=-\int \frac{de^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}=-\arcsin e^{-x}+C.$

例 $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\int \frac{de^x}{e^{2x}+1}=\arctan(e^x)+C$

例 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx=\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\int \frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1}=-\ln|e^{-x}+1|+C=-\ln(e^{-x}+1)+C$

例 $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2}d(x+\frac{1}{x})\ \underline{\underline{u=x+\frac{1}{x}}}\ \int \frac{1}{u^2-2}du=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|+C$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}\right|+C$$

熟悉 1. $\int \frac{dx}{x+4} = \int \frac{d(x+4)}{x+4}$；

2. $\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(\frac{x}{2})}{1+(\frac{x}{2})^2}$；

3. $\int \frac{xdx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(4+x^2)}{4+x^2}$；

4. $\int \frac{x^2dx}{4+x^2} = \int \frac{(4+x^2-4)dx}{4+x^2} = \int (1-\frac{4}{4+x^2})dx = x - 4\int \frac{1}{4+x^2}dx$；

5. $\int \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int (\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x})dx$；

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x+4)+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$

第二换元法

定理 2 设 $x=\psi(t)$ 是单调、可导函数，且 $\psi'(t)\neq 0$. 又设 $f(\psi(t))\psi'(t)$ 具有原函数 $\Phi(t)$，则 $\int f(x)dx \underset{x=\psi(t)}{=} \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt = \Phi(\psi^{-1}(x)) + C$。

证 已知 $x=\psi(t)$ 是单调、可导函数，故其反函数 $t=\psi^{-1}(x)$ 存在且可导，记 $f(\psi(t))\psi'(t)$ 的原函数为 $\Phi(t)$，则 $[\Phi(\psi^{-1}(x))]' = \frac{d\Phi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = f(\psi(t))\psi'(t)\cdot\frac{1}{\psi'(t)} = f(\psi(t)) = f(x)$，即 $\Phi(\psi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的原函数，故 $\int f(x)dx = \Phi(\psi^{-1}(x)) + C = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$.

注 1)第二换元法是先换元再变量还原，其中变量代换 $x=\psi(t)$ 中 x 是中间变量；第一换元法是先凑微再换元最后变量还原，其中变量代换 $u=\varphi(x)$ 中 x 是自变量；

2) 第二换元法主要用来通过换元(即变量代换)去掉不定积分被积函数中的根号，具体来说，当被积函数中含 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}), \sqrt[n]{ax+b}$ 等时可令 $t=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, t=\sqrt[n]{ax+b}$ 换元去掉根号；当被积函数中含 $\sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{x^2-a^2}$ 等时可令 $x=a\tan t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), x=a\sin t, t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $x=a\sec t, t\in(0,\frac{\pi}{2})$ 换元去掉根号, 此时 $\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$。最后变量还原时，常借助直角三角形还原 x。

例 对 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}} \underset{t=\sqrt{2x},x=\frac{1}{2}t^2}{=} \int \frac{tdt}{1+t} = \int \frac{(1+t-1)dt}{1+t} = \int (1-\frac{1}{1+t})dt = t - \ln|1+t| + C$

$$= \sqrt{2x} - \ln\left|1+\sqrt{2x}\right| + C = \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C$$

例 对 $a>0,\ \int \sqrt{a^2-x^2}dx \underset{x=a\sin t, t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}{=} \int a\cos t \cdot a\cos t dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt$

$$= \frac{a^2}{2}[t+\frac{1}{2}\sin 2t] + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

例 对 $a>0,\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \underset{x=a\tan t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{=} \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt = \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + C$

$= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1 \underset{C=C_1-\ln a}{=} \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C,$ 这里

$\because \sqrt{a^2+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|,\quad \therefore x+\sqrt{a^2+x^2} > 0.$

例 对 $a>0$，求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$。

解 此不定积分表示的函数的定义域为 $x>a$ 或 $x<-a$.

（1）当 $x>a$ 时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \underset{x=a\sec t, t\in(0,\frac{\pi}{2})}{=} \int \frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}dt = \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + C_1 = \ln(\sec t + \tan t) + C_1$$

$$= \ln(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}) + C_1 \underset{C_2=C_1-\ln a}{=} \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C_2;$$

（2）当 $x<-a$ 时，令 $x=-t$，则 $t>a$，从而

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = -\ln(t+\sqrt{t^2-a^2}) - C_2 = -\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2}) - C_2$$

$$= \ln(\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}) - C_2 = \ln(\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}) - C_2 \underset{C_3=-C_2-\ln a^2}{=} \ln(-x-\sqrt{x^2-a^2}) + C_3$$

从而两种情形结果合起来可写为 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

例 运用第一、第二换元法求（1）$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$；（2）$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$；（3）$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$。

解（1）令 $t=\sqrt{e^x+1},\ \ x=\ln(t^2-1),\ \ dx=\frac{1}{t^2-1}2tdt$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\int \frac{2tdt}{t(t^2-1)}=2\int \frac{dt}{t^2-1}=2[\frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}]dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C.$$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}=\int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1+e^{-2x}}}=-\int \frac{de^{-x}}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}=-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+(e^{-x})^2})+C.$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}=\int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}=-\int \frac{de^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}=-\arcsin e^{-x}+C.$

第三节 分部积分法

因为 $(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$，移项得 $u(x)v'(x)=(u(x)v(x))'-u'(x)v(x)$，注意到 $u(x)v(x)$ 是 $(u(x)v(x))'$ 的原函数，上式两端对 x 不定积分得

$\int u(x)v'(x)dx=\int (u(x)v(x))'dx-\int u'(x)v(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$，这里由于等式两端的 $\int u(x)v'(x)dx$ 和 $\int u'(x)v(x)dx$ 均含一个任意常数，故等式右端 $u(x)v(x)$ 不带任意常数了。再由微分定义得

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x).$$

，**称为分部积分公式**。

注 1）该公式说明难求 $\int u(x)dv(x)$ 但易求 $\int v(x)du(x)$ 时，可用该公式求得 $\int u(x)dv(x)$。

2）在四级 $\begin{cases}\ln x,\arctan x,\arcsin x,\arccos x,\\ x^n,\\ \sin bx,\cos bx,\\ e^{ax}\end{cases}$ 函数中，任两级函数的任两个函数相乘做被积函数，只需将较低级函数凑微成 $dv(x)$，即可用分部积分公式求出不定积分。

3）求解中可能多次运用分部积分公式，并经常运用第一、第二换元法等。

例 $\int x\cos xdx=\int xd\sin x=x\sin x-\int \sin xdx=x\sin x+\cos x+C$。

例 $\int x^2e^xdx=\int x^2de^x \xlongequal[\text{第一次分部积分}]{} x^2e^x-\int e^xdx^2=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2\int xde^x$

$$\xlongequal[\text{第二次分部积分}]{} x^2e^x-2(xe^x-\int e^xdx)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C。$$

例 $\int x\ln xdx=\int \ln xd\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}d\ln x=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$。

例 $\int \arccos xdx=x\arccos x-\int xd\arccos x=x\arccos x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=x\arccos x-\int\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C。$$

例 $\int x\arctan xdx=\int\arctan xd\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}d\arctan x$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

例 $\int e^x\sin xdx=\int\sin xde^x \xlongequal[\text{第一次分部积分}]{} e^x\sin x-\int e^xd\sin x=e^x\sin x-\int e^x\cos xdx$

$$=e^x\sin x-\int\cos xde^x \xlongequal[\text{第二次分部积分}]{} e^x\sin x-(e^x\cos x-\int e^xd\cos x)$$

$$=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin xdx,(\text{再次出现要求的不定积分})$$

所以，$\int e^x\sin xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$

类似地，$\int e^x\cos xdx$ 同样处理。

例 $\int\sec^3xdx=\int\sec xd\tan x \xlongequal[\text{第一次分部积分}]{} \sec x\tan x-\int\tan xd\sec x=\sec x\tan x-\int\sec x\tan^2xdx$

$$=\sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2x-1)dx=\sec x\tan x-\int\sec^3xdx+\int\sec xdx$$

$$=\sec x\tan x-\int\sec^3xdx+\ln|\sec x+\tan x|),\text{再次出现要求的不定积分，}$$

所以，$\int\sec^3xdx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C.$

第四节 有理函数积分法

一、有理函数的积分

定义 称 x 的两个多项式函数 $P(x),Q(x)$ 的比值函数 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理函数，其中，若 $P(x)$ 的幂次比 $Q(x)$ 低(高)，则称 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理真(假)分式。

注 1）有理假分式=多项式+有理真分式，只需运用多项式除法即得。 比如

$\dfrac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}=2x^2-1+\dfrac{4}{x^2+1}$，事实上，运用多项式除法，有

$$
\begin{array}{r}
2x^2-1 \\
x^2+1\,\overline{)\,2x^4+x^2+3} \\
\underline{2x^4+2x^2} \\
-x^2+3 \\
\underline{-x^2-1} \\
4
\end{array}
$$

于是得到 $2x^4+x^2+3=(x^2+1)(2x^2-1)+4$. 由于多项式的不定积分易求，因此，有理函数的不定积分归结为有理真分式的不定积分。

2）有理真分式=部分分式之和, 即当分母 $Q(x)$ 中含有因子 $(ax+b)^m$，$(px^2+qx+r)^n$, 这里 px^2+qx+r 不能再分解（a,b,p,q,r 均为常数, $q^2-4pr<0$，m,n 为正整数), 则由代数学有关理论, 有理真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\cdots\frac{A_1}{ax+b}+\cdots+\frac{A_m}{(ax+b)^m}+\frac{B_1x+C_1}{px^2+qx+r}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(px^2+qx+r)^n}+\cdots$$

, 等式右端的分式均称为部分分式，A_i,B_i,C_i 均为待定常数，可通过等式右端通分，等式两端比较 x 的同次幂系数建立代数方程组求解确定。比如，

$\dfrac{x^2+5x+6}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+3}$, 等式右端通分，再由等式两端分子相等，即

$x^2+5x+6=A(x^2+2x+3)+(Bx+C)(x-1)$；比较同次幂系数得 $\begin{cases}A+B=1\\2A-B+C=5\\3A-C=6\end{cases}$, 解得

$A=2,B=-1,C=0$，故 $\dfrac{x^2+5x+6}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{-x}{x^2+2x+3}$。再比如，

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+x+2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2};\quad \frac{x^3-x}{(x+1)^2(x^2+x+2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2};$$

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$$ 等。

注 真分式的分母相同、分子不同时，右端部分分式的表达式完全一样，只是待定系数取值不同。

例 $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$

解 设 $\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{x+1}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$，通分得到 $x+1=A(x-2)+B(x-3)$，

比较同次幂系数得 $\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-3B=1 \end{cases}$，解得 $A=4, B=-3$，因此，

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx=\int \frac{4dx}{x-3}+\int \frac{-3dx}{x-2}=4\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C.$$

例 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$

解 设 $\frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}=\frac{x+1}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x+1}$，通分得到

$$x-3=A_1(x-1)(x+1)+A_2(x+1)+B_1(x-1)^2=(A_1+B_1)x^2+(A_2-2B_1)x-A_1+A_2+B_1,$$

比较同次幂系数得 $\begin{cases} A_1+B_1=1 \\ A_2-2B_1=1 \\ -A_1+A_2+B_1=-3 \end{cases}$，解得 $A_1=1, A_2=B_1=-1$，因此，

$$\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}dx=\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{-dx}{(x-1)^2}+\int \frac{-dx}{x+1}=\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\ln|x+1|+C.$$

二、可化为有理函数的积分举例

1. $\int f(\sin x,\cos x)dx$ 类型 令 $t=\tan\frac{x}{2}$（万能代换），代入

$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ 转化为有理函数积分；

2. $\int f(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx, \frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ 类型，令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，代入转化为有理函数积分；

3. $\int f(x,\sqrt[n]{ax+b})dx, \int f(\sqrt[n]{ax+b})dx$ 类型，令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$，代入转化为有理函数积分；

4. $\int f(\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b})dx$ 类型，令 $t=\sqrt[k]{ax+b}$，k 为 n 和 m 的的最小公倍数，代入转化为有理函数积分；

例 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$ （$\int f(\sin x, \cos x)dx$ 类型）

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$（万能代换），代入

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$ 转化为有理函数积分，

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int \frac{(t+1)^2}{2t}dt=\frac{1}{2}\int (t+2+\frac{1}{t})dt$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|)+C=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

例 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ （$\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ 类型）

解 令 $t=\sqrt{x-1}$，则 $x=(t+1)^2, dx=2(t+1)dt$，代入转化为有理函数积分，

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\int \frac{t}{(t+1)^2}2(t+1)dt=2\int \frac{t}{t+1}dt=2\int (1-\frac{1}{t+1})dt=2(t-\ln|1+t|)+C$$
$$=2\sqrt{x-1}-2\ln(1+\sqrt{x-1})+C.$$

例 $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$ （$\int f(\sqrt[n]{ax+b})dx$ 类型）

解 令 $t=\sqrt[3]{x+2}$，则 $x=t^3-2, dx=3t^2dt$，代入转化为有理函数积分，

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}=\int \frac{3t^2dt}{1+t}=3\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt=3\int [(t-1)+\frac{1}{1+t}]dt=3(\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|)+C$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C.$$

例 $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$ （$\int f(\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})dx$ 类型）

解 令 $t=\sqrt[6]{x}$，则 $\sqrt[3]{x}=t^2, \sqrt{x}=t^3, dx=6t^5dt$，代入转化为有理函数积分，

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int \frac{6t^5dt}{(1+t^2)t^3}=6\int \frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int (1-\frac{1}{1+t^2})dt=6(t-\arctan t)+C$$
$$=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C.$$

例 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$ （$\int f(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx, \frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ 类型）

解 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}, dx=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt$，代入转化为有理函数积分,

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\int (t^2-1)t\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=-2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt=-2\int (1+\frac{1}{t^2-1})dt$$
$$=-2\int 1dt-2\cdot\frac{1}{2}\int (\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-2t+\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C$$
$$=-2t+\ln(t+1)^2-\ln\left|t^2-1\right|+C=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1)+\ln|x|+C$$

注意 连续函数必有原函数，但有些连续函数的原函数无法求出（不能用初等函数表示出来），

比如，$e^{-x^2},\frac{\sin x}{x},\frac{1}{\ln x},\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ 等函数，它们均是初等函数，在各自的定义区间上连续，

从而在各自的定义区间上有原函数，但无法求出这些原函数。