第二章　Z变换

信号与系统的分析方法有**时域分析法**和**变换域分析法**。

连续时间系统中，其变换域方法是拉普拉斯变换和傅立叶变换；

离散时间系统中，其变换域方法是**Z变换**和**离散傅立叶变换**。对求解离散时间系统而言，Z变换是个极重要的数学工具，它可以将描述离散系统的差分方程转化为简单的代数方程，使其求解大大简化。

2．1　Ｚ变换的定义与收敛域

2．2　Ｚ反变换

2．3　Ｚ变换的基本性质和定理

2．4　序列的Ｚ变换与连续信号的拉普拉斯变换、傅立叶变换的关系

2．5　离散系统的系统函数、系统的频率响应

2．1　Z变换的定义与收敛域

2．1．1　Z变换的定义

对于一个序列x(n)，它的Z变换定义为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

其中Z为一个复变量，上式定义的Z变换称为双边Z变换或标准Z变换，

2．1．2 Z变换的收敛域

由于x(n)的Z变换是一个无穷级数，就必然存在收敛和发散的问题，仅当级数收敛时才可将X(z)表示成一个闭合形式，**按照级数理论，级数收敛的充要条件是满足绝对可和的条件，即**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right| = M < \infty$$

使上式成立的所有Z值的集合称为X(z)的收敛域，不同形式的序列，其收敛域不同.

1、有限长序列

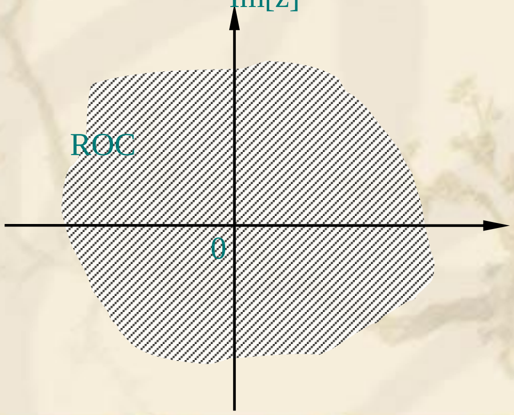
$$x(n)=\begin{cases} x(n) & n_1<n<n_2 \\ 0 & n\text{为其他值} \end{cases}$$

其Z变换为 $$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

因为x(n)是有界序列，由于是有限项求和，显然在0<|z|<∞上都满足收敛条件，收敛域至少是有限Z平面(0，∞)，在n1和n2的特殊取值情况下，收敛域可扩大为

$$0<|z|\le\infty, \qquad n_1\ge 0$$

$$0\le|z|<\infty, \qquad n_2\le 0$$



有限长序列的收敛域

例：矩形序列是一个有限长序列，x(n)=R_N(n)，求其X(z)。

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

收敛域为 $0<|z|\le\infty$ 。

从上式的分母可知在z=1处有一个极点，但是从分子处看出z=1处有一个零点，零极点刚好对消。

2、右边序列

右边序列只有在n≥n_1时，序列值不全为零，其它n值时，序列值全为零，即

$$x(n)=\begin{cases} x(n) & n\ge n_1 \\ 0 & n<n_1 \end{cases}$$

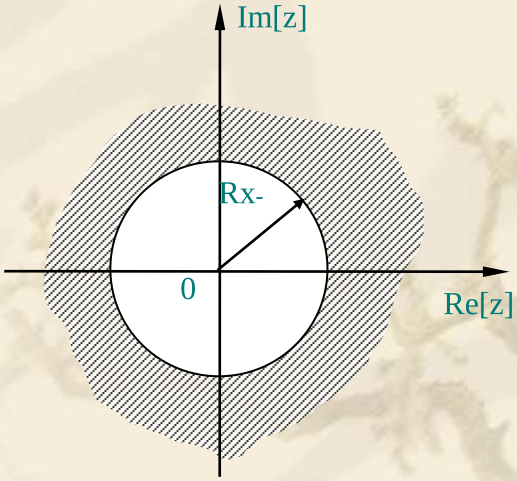
其Z变换为

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=n_1}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

有限长序列，其收敛域为有限Z平面

是Z的负幂级数，其收敛域为R_{X-}<|Z|<∞

若R_{X-}是收敛域的最小半径，则右边序列Z变换的收敛域为 $R_{x-}<|z|<\infty$



右边序列

当n_1 =0时的右边序列称为**因果序列**，其收敛域为

$$R_{x-} < |z| \le \infty$$

因此在|z|=∞处Z变换收敛是因果序列的特征。

例：求指数序列 $x(n) = a^n u(n)$ 的 Z 变换。

解：

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

3、左边序列

左边序列只有在$n\leq n_2$时，序列值有值，$n > n_2$时，序列值全为零，即

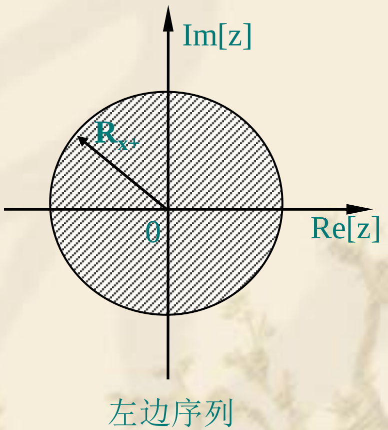
$$x(n)=\begin{cases} x(n) & n\leq n_2 \\ 0 & n>n_2 \end{cases}$$

其Z变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n}+\sum_{n=1}^{n_2}x(n)z^{-n}$$

是Z的正幂级数，其收敛域为 $0<|Z|<R_{x+}$

有限长序列，其收敛域为有限Z平面



左边序列Z变换的收敛域为 $0<|z|<R_{x+}$

当$n_2>0$时，收敛域不包括z=0，即$0<|z|<R_{x+}$；

当$n_2\leq 0$时，收敛域包括z=0，即$|z|<R_{x+}$。

例：求序列 $x(n)=-b^n u(-n-1)$ 的Z变换.

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}-b^n z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}-b^{-n}z^n=-\frac{b^{-1}z}{1-b^{-1}z}$$

$$=\frac{1}{1-bz^{-1}}=\frac{z}{z-b} \qquad |z|<|b|$$

如果a=b，则此例与上例中右边序列的Z变换表达式完全一样，所以只给出Z变换的闭合表达式是不够的，不能正确得到原序列，**必须同时给出收敛域范围，才能惟一确定一个序列**，这就说明了研究收敛域的重要性。

4、双边序列

一个双边序列可以看做一个左边序列和一个右边序列之和，因此双边序列Z变换的收敛域就应该是这两个序列Z变换的公共收敛区间。

其 Z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

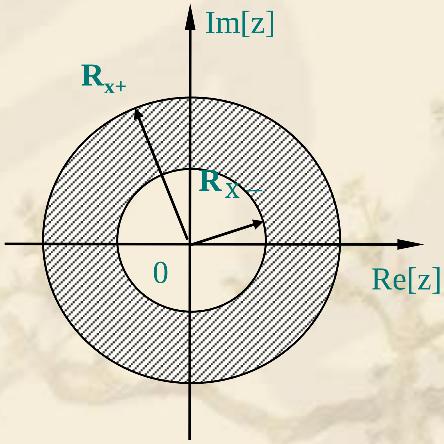
左边序列，其收敛域为 $|Z| < R_{X+}$

右边序列，其收敛域为 $|Z| > R_{X-}$

若满足 $R_{X-} < R_{X+}$，

则双边序列 Z 变换的收敛域为

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$



双边序列

例：求序列 $x(n)=a^{|n|}$ 的Z变换，其中$|a|<1$。

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n|}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

第一部分的收敛域为$|az|<1$，即$|z|<\dfrac{1}{|a|}$；
第二部分的收敛域为$|az^{-1}|<1$，

即$|z|>|a|$。

已知$|a|<1$，所以

$$X(z)=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}\qquad |a|<|z|<\frac{1}{|a|}$$

2．2　Z反变换

求Z反变换的方法通常有：

围线积分法（留数法）、**部分分式展开法、长除法**

1、部分分式法

一般$X(z)$是z的有理分式，可表示$X(z)=B(z)/A(z)$，$B(z)$和$A(z)$都是变量z的实系数多项式，且没有公因式，可以把$X(z)$分解为部分分式的形式，然后求出各部分分式的z反变换（基本Z变换对的公式可查表)，将各反变换相加即得到$x(n)$。

如果X(z)只有一阶极点，则X(z)展成

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{k}\frac{A_m z}{z-z_m}$$

最好写成

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_0}{z}+\sum_{m=1}^{k}\frac{A_m}{z-z_m}$$

A_0、A_m分别为X(z)在z=0、$z=z_m$处极点的留数，即

$$A_0=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},0]=X(0)$$

$$A_m=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},z_m]=[(z-z_m)\frac{X(z)}{z}]_{z=z_m}$$

如果X(z)中含有高阶极点，

设X(z)含有k个一阶极点，一个s阶极点z_i，则X(z)展成

$$X(z)=\sum_{m=1}^{k}\frac{A_m z}{z-z_m}+\sum_{r=1}^{s}\frac{B_r z}{(z-z_i)^r}$$

其中Br用下式确定

$$B_r=\frac{1}{(s-r)!}\left[\frac{d^{s-r}}{dz^{s-r}}(z-z_i)^s\frac{X(z)}{z^r}\right]_{z=z_i}$$

例：设 $$X(z)=\frac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})},\qquad |z|>2$$

试利用部分分式法求Z反变换。

$$X(z)=\frac{z^2}{(z-2)(z-0.5)},\qquad |z|>2$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(z-2)(z-0.5)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(z-2)(z-0.5)}=\frac{A_1}{z-2}+\frac{A_2}{z-0.5}$$

$$A_1=\left[(z-2)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2}=\left[\frac{z}{z-0.5}\right]_{z=2}=\frac{4}{3}$$

$$A_2=\left[(z-0.5)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0.5}=\left[\frac{z}{z-2}\right]_{z=0.5}=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-0.5}$$

$$X(z)=\frac{4}{3}\cdot\frac{z}{z-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-0.5}$$

由已知的收敛域知道是因果序列

因此：

$$x(n)=\begin{cases}\frac{4}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{3}\cdot(0.5)^n, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

$$x(n)=\left[\frac{4}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{3}\cdot(0.5)^n\right]u(n)$$

2、长除法

x(n)的z变换定义为z^{-1}的幂级数，即

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\cdots+x(-1)z+x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

因此只要在给定的收敛域内将X(z)展成幂级数，则级数的系数就是序列x(n)。一般情况下，X(z)是一个有理分式，分子分母都是z的多项式，则可直接用分子多项式除以分母多项式，得到幂级数展开式，从而得到x(n)。

如果用收敛域判定x(n)是右边序列，则展开成负幂级数，为此X(z)的分子分母按z的降幂（或z^{-1}的升幂）排列；

如果是左边序列，则展开成正幂级数，为此X(z)的分子分母按z的升幂（或z^{-1}的降幂）排列。

例：用两种方法求$X(z)=\dfrac{z-a}{1-az}, \qquad |z|>|\dfrac{1}{a}|$的Z反变换.

解：①部分分式法：

$$X(z)=\frac{z-a}{1-az}=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}$$

$$x(n)=-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\right)^{n}u(n)+\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}u(n-1)=\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}u(n-1)-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}u(n)$$

②长除法

由收敛域知x(n)是右边序列，所以X(z)按z的降幂排列

$$
\begin{array}{r|l}
 & -\frac{1}{a}+\frac{a^2-1}{a^2}z^{-1}+\frac{a^2-1}{a^3}z^{-2}+\cdots \\
\hline
-az+1 & z-a \\
 & \underline{z-1/a} \\
 & (1-a^2)/a \\
 & \underline{(1-a^2)/a-[(1-a^2)/a^2]z^{-1}} \\
 & \qquad [(1-a^2)/a^2]z^{-1} \\
 & \qquad \underline{[(1-a^2)/a^2]z^{-1}-[(1-a^2)/a^3]z^{-2}} \\
 & \qquad\qquad [(1-a^2)/a^3]z^{-2} \\
 & \qquad \cdots\cdots
\end{array}
$$

因此得出

$$x(n)=-\frac{1}{a}+\frac{a^2-1}{a^2}+\frac{a^2-1}{a^3}+\cdots=-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} u(n-1)$$

2．3　Z变换的性质和定理

1、线性

线性就是要满足比例性和可加性，若

$$Z[x(n)] = X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[y(n)] = Y(z) \qquad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

则 $Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z) \qquad R_{-} < |z| < R_{+}$

其中$R_{-} = \max[R_{x-}, R_{y-}]$，$R_{+} = \min[R_{x+}, R_{y+}]$，即线性组合后的收敛域为各个序列z变换的公共收敛域，如果这些组合中某些零点和极点相互抵消，则收敛域可能扩大。

❖ 例：已知$x(n)=\cos(\omega_0 n)u(n)$，求它的z变换。

解：

$$Z[\cos(\omega_0 n)u(n)]=Z\left[\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}u(n)\right]=\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n}u(n)\right]+\frac{1}{2}\left[e^{-j\omega_0 n}u(n)\right]$$

因为已知: $Z\left[a^n u(n)\right]=\dfrac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z|>|a|$

所以得到：$Z\left[e^{j\omega_0 n}u(n)\right]=\dfrac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}, \qquad |z|>|e^{j\omega_0}|=1$

$$Z\left[e^{-j\omega_0 n}u(n)\right]=\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}, \qquad |z|>|e^{-j\omega_0}|=1$$

因此，$Z[\cos(\omega_0 n)u(n)]=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$

$$=\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$$

❖ 例：求序列x(n)=u(n)-u(n-3)的z变换。

$$Z[u(n)]=\frac{z}{z-1},\qquad |z|>1$$

$$Z[u(n-3)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n-3)z^{-n}=\sum_{n=3}^{\infty}z^{-n}$$

$$=\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}=\frac{z^{-2}}{z-1},\qquad |z|>1$$

$$Z[x(n)]=X(z)=Z[u(n)]+Z[u(n-3)]$$

$$=\frac{z}{z-1}+\frac{z^{-2}}{z-1}=\frac{z^{2}+z+1}{z^{2}}\qquad |z|>0$$

2、序列的移位

若序列x(n)的z变换为

$$Z[x(n)]=X(z) \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

则有 $Z[x(n-m)]=z^{-m}X(z) \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

其中m为任意整数，m为正，则为延迟，m为负则为超前。

证：$Z[x(n-m)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-m)z^{-n}=z^{-m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-k}=z^{-m}X(z)$

对双边序列，移位后收敛域不会发生变化；但是单边序列在z=0或z=∞处收敛域可能有变化.

例如，Z[δ(n)=1]=1，在z平面处处收敛，但是Z[δ(n-1)]=z-1，在z=0处不收敛，而Z[δ(n+1)]=z，在z=∞处不收敛。

3、乘以指数序列（Z域的尺度变换）

若 $Z[x(n)] = X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则 $Z\left[a^n x(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^n = X(a^{-1}z)$

收敛域为$R_{x-} < |a^{-1}z| < R_{x+}$或$|a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$，$a$可是复数。

此性质表明X(z)如果在$z=z_1$处为极点，则$X(a^{-1}z)$将在$a^{-1}z=z_1$，即$z=az_1$处为极点。如果a为正实数，则表示z平面缩小或扩大，零极点在z平面沿径向移动；若a为复数，则在z平面上，零极点既有幅度伸缩，又有角度旋转，因此此性质是一种z域尺度变换。

4、序列的线性加权

若序列x(n)的z变换为 $Z[x(n)]=X(z) \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则 $$Z[nx(n)]=-z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

证明：由于z变换在其收敛域中处处解析

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d}{dz}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{dz^{-n}}{dz}$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n-1}=-z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n}=-z^{-1}Z[nx(n)]$$

所以 $$Z[nx(n)]=-z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

通过递推可以证明：

$$Z[n^m x(n)]=(-z\frac{d}{dz})^m X(z)$$

式中

$$(-z\frac{d}{dz})^m=-z\frac{d}{dz}\left\{-z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}\cdots-z\frac{d}{dz}X(z)\right]\right\}$$

5、共轭序列

若 $Z[x(n)] = X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则 $Z[x^*(n)] = X^*(z^*) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

6、翻摺序列

若 $Z[x(n)] = X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则 $Z[x(-n)] = X(z^{-1}) \qquad R_{x-} < |z^{-1}| < R_{x+}$

证：$$Z[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^{-n} = X(z^{-1})$$

$$R_{x-} < |z^{-1}| < R_{x+}$$

7、初值定理

如果x(n)是因果序列，则有

$$x(0)=\lim_{n\to\infty}X(z)$$

证明：因为x(n)是因果序列，有

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

所以$\lim_{n\to\infty}X(z)=x(0)$

8、终值定理

如果x(n)是因果序列，且其z变换的极点除在z=1处可以有一阶极点，其它极点均在单位圆内，则有

$$\lim_{n\to\infty}x(n)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

证明：

$$(z-1)X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x(n+1)-x(n)\right]z^{-n}$$

x(n)是因果序列，则

$$(z-1)X(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=-1}^{n}\left[x(m+1)-x(m)\right]z^{-m}$$

因为 $(z-1)X(z)$ 在单位圆上无极点，上式两端对z=1取极限，有

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=-1}^{n}[x(m+1)-x(m)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[x(0)-0\right]+\left[x(1)-x(0)\right]+\left[x(2)-x(1)\right]+\cdots+\left[x(n+1)-x(n)\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[x(n+1)\right]=\lim_{n\to\infty}x(n)$$

9、有限项累加特性

设x(n)为因果序列，即x(n)=0,n<0,若

$$X(z)=Z[x(n)] \qquad |z|>R_{x-}$$

则 $$Z[\sum_{m=0}^{n}x(m)]=\frac{z}{z-1}X(z) \qquad |z|>\max[R_{x-},1]$$

１０、序列的卷积和（时域卷积和定理）

若 $Z[x(n)]=X(z) \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

$Z[h(n)]=H(z) \qquad R_{h-}<|z|<R_{h+}$

则

$$Z\left[x(n)*h(n)\right]=X(z)H(z) \qquad \max\left[R_{x-},R_{h-}\right]<|z|<\min\left[R_{x+},R_{h+}\right]$$

证明：

$$Z\left[x(n)*h(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x(n)*h(n)\right]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[x(m)h(n-m)\right]\right\}z^{-n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-m)z^{-(n-m)}\right\}z^{-m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-m}H(z)$$

$$=X(z)H(z)$$

例：已知x(n)=$a^n u(n)$，h(n)=$b^n u(-n)$，|a|<|b|，求y(n)=x(n)*h(n)。

解：$X(z)=\dfrac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$ $\qquad H(z)=\dfrac{-b}{z-b} \qquad |z|<|b|$

由时域卷积定理，得到

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{-bz}{(z-a)(z-b)}$$

$$=\frac{b}{b-a}\cdot\frac{z}{z-a}-\frac{b}{b-a}\cdot\frac{z}{z-b} \qquad |a|<|z|<|b|$$

因为Y(z)的收敛域为环形区域，故y(n)是双边序列，

$$y(n)=Z^{-1}[Y(z)]=\frac{b}{b-a}a^n u(n)+\frac{b}{b-a}b^n u(-n-1)$$

１１、序列相乘（Z域复卷积定理）

若 $Z[x(n)] = X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$Z[h(n)] = H(z) \qquad R_{h-} < |z| < R_{h+}$

则

$$Z\left[x(n)\cdot h(n)\right] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv \qquad R_{x-}R_{h-} < |z| < R_{x+}R_{h+}$$

其中C是哑变量v平面上，$X(v)$与$H(\frac{z}{v})$的公共收敛域内环绕原点的一条反时针旋转的单闭合围线。

１２、帕塞瓦定理

若 $R_{x-}R_{h-} < 1 < R_{x+}R_{h+}$

则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)H^*\left(\frac{z}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

其中C是在 $\max[R_{x-}, \frac{1}{R_{h+}}] < |v| < \min[R_{x+}, \frac{1}{R_{h-}}]$ 公共收敛域内的一条闭合围线。

例：已知$x(n)=a^n u(n)$, $h(n)=\delta(n)-a\delta(n-1)$

求$y(n)$.

解：

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>a$$

$$H(z)=1-az^{-1} \qquad |z|>0$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\cdot 1-az^{-1}=1$$

由于零极点对消，收敛域变成了整个Z平面。

因此由公式进行反变换，得到

$$y(n)=\delta(n)$$

例：求x(n)=na^{n}u(−n)的Z变换。

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>a$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{a}$$

$$a^n u(-n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-a^{-1}z} \qquad |z|<a$$

$$na^n u(-n) \xleftrightarrow{z} -z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-a^{-1}z} = -\frac{a^{-1}z}{(1-a^{-1}z)^2} \qquad |z|<a$$

❖ 例：用Z变换的性质求下列两个序列的卷积：

$$h(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & 0\le n\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+4\delta(n-2)$$

解：

$$H(z)=1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}$$

$$X(z)=1+z^{-1}+4z^{-2}$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1+z^{-1}+4z^{-2}\right)$$

$$=1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{19}{4}z^{-2}+\frac{9}{4}z^{-3}+z^{-4}$$

$$y(n)=\delta(n)+\frac{3}{2}\delta(n-1)+\frac{19}{4}\delta(n-2)+\frac{9}{4}\delta(n-3)+\delta(n-4)$$

❖ 例：计算两个序列x(n)=$3^n u(-n)$, h(n)=$0.5^n u(n)$的卷积y(n).

解：

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}3^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z\right)^n=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z}=-\frac{3z^{-1}}{1-3z^{-1}} \qquad |z|<3$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=-\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{3z^{-1}}{1-3z^{-1}} \qquad \frac{1}{2}<|z|<3$$

$$Y(z)=\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{1-3z^{-1}}$$

$$A=\left[\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)Y(z)\right]_{z=\frac{1}{2}}=\frac{6}{5}$$

$$B=\left[\left(1-3z^{-1}\right)Y(z)\right]_{z=3}=-\frac{6}{5}$$

$$y(n)=\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)+\frac{6}{5}\cdot\left(3\right)^{n}u(-n-1)$$

2．4　Z变换与连续信号的拉普拉斯变换、傅立叶变换的关系

2．4．1　Z变换与拉普拉斯变换的关系

1、Z平面与S平面

设连续信号为$x_a(t)$，其抽样信号为$\hat{x}_a(t)$, 它们的拉普拉斯变换分别为

$$X_a(s)=£\left[x_a(t)\right]$$

$$\hat{X}_a(s)=£\left[\hat{x}_a(t)\right]$$

应用理想抽样表达式，有

$$\hat{X}_a(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_a(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)e^{-snT}$$

而抽样序列 $x(n)=x_a(nT)$的z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

比较上面两式，当 $z=e^{sT}$时，抽样序列的z变换就等于抽样信号的拉普拉斯变换，即

$$X(z)\big|_{z=e^{sT}}=\hat{X}_a(s)$$

即由s**平面到z平面的映射关系为**

$$z=e^{sT},s=\frac{1}{T}\ln z$$

将s平面用直角坐标表示为：$s = \sigma + j\Omega$

将z平面用极坐标表示为：$z = re^{j\omega}$

$$z = re^{j\omega} = e^{st} = e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

因此 $r = e^{\sigma T}$ $\omega = \Omega T$

结论：**1）r与σ的关系，** $r = e^{\sigma T}$

σ=0(s平面的虚轴)对应于r=1(z平面的单位圆上)；

σ<0(s平面的左半平面)对应于r<1(z平面的单位圆内部)；

σ>0(s平面的右半平面)对应于r>1(z平面的单位圆外部)。

2）ω和Ω的关系， $\omega = \Omega T$

Ω=0(s平面实轴)对应于ω=0(z平面正实轴)；

$\Omega=\Omega_0$(常数)(s平面平行于实轴的直线)对应于$\omega=\Omega_0 T$(z平面始于原点，幅角为ω=Ω0T的辐射线)。

注意: s平面与z平面的映射关系不是单值映射，Ω每增加一个抽样角频率 $\Omega_s = 2\pi/T$ ，则ω相应增加一个2π，即重复旋转一周，z平面重叠一次。

2、$X(z)$与 $X_a(s)$ 的关系

由时域抽样定理有

$$\hat{X}_a(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\Omega_s)$$

因此$X(z)\big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\frac{2\pi}{T})$

2．4．2 z变换与傅立叶变换的关系

傅立叶变换是拉普拉斯变换在s平面虚轴上的特例，即s=jΩ，因此有

$$X(z)\big|_{z=e^{j\Omega T}} = X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}(e^{j\Omega T})$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}k)$$

抽样序列在单位圆上的z变换等于其抽样信号的傅立叶变换。

数字频率ω表示z平面的幅角，和模拟频率的关系为$\omega = \Omega T$。

用数字频率ω作为z平面上单位圆的参数，即$z = e^{j\omega}$，

可得

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T})$$

因而单位圆上的z变换就是序列的傅立叶变换。

2．5　离散系统的系统函数，系统的频率响应

2．5．1　系统函数的定义

一个线性移不变离散系统可以用它的单位抽样响应h(n)来表示其输入输出关系，即

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

对等式两边取Z变换得

$$Y(z)=X(z)\cdot H(z)$$

则

$$H(z)=Y(z)/X(z)$$

将H(z)定义为线性移不变系统的系统函数，是单位抽样响应h(n)的z变换，即

$$H(z)=Z[h(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

2．5．2　因果稳定系统

因果系统的单位抽样响应为因果序列，其收敛域为

$$R_{x-} < |z| \le \infty$$

一个线性移不变系统稳定的充要条件是h(n)必须满足绝对可和条件，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

而z变换的收敛域由满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) z^{-n} \right| < \infty$ 的那些z值确定，所以如果系统函数的收敛域包含单位圆|z|=1，则系统是稳定的。

因此，一个因果稳定的线性移不变系统的系统函数H(z)必须在从单位圆到∞的整个z域内收敛，即

$$1 \le |z| \le \infty$$

也就是说系统函数的全部极点必须在单位圆内。

2．5．3 系统函数和差分方程的关系

一个线性移不变系统可以用差分方程来描述，其一般形式为

$$y(n)+\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)=\sum_{m=0}^{M}b_m x(n-m)$$

若系统的起始状态为零，直接对上式取z 变换（利用移位特性），得

$$Y(z)+\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}Y(z)=\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{1+\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}$$

将两个多项式分别进行因式分解，得

$$H(z)=K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

$z=c_m$是H(z)的零点，$z=d_k$是H(z)的极点，是由差分方程的系数a_k和b_k决定，除了比例常数K，系统函数完全由它的零点和极点来确定。

要根据H(z) 唯一确定h(n)，必须同时确定系统的收敛域。例如对于稳定系统，其收敛域必须包含单位圆。

例：已知一线性移不变的因果系统差分方程为，

$$y(n-1)-\frac{5}{2}y(n)+y(n+1)=x(n)$$

求系统的单位抽样响应h(n)，该系统是否稳定？

解：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}=\frac{z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}\left[\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right]$$

由题意知，系统是因果系统，因此h(n)为因果序列，H(z)的收敛域为圆外部区域，　即

$$|z|>2$$

所以

$$h(n)=\frac{2}{3}[2^{n}-2^{-n}]u(n)$$

因为系统是因果的，收敛域为$|z|>2$，不包含单位圆|z|=1，因此系统是不稳定的。

2．5．4 系统的频率响应

设系统的输入序列是频率为ω的复指数序列，即

$$x(n)=e^{j\omega n},-\infty<n<\infty$$

线性移不变系统的单位抽样响应为h(n)，利用卷积和，得到输出为

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{j\omega(n-m)}=e^{j\omega n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-j\omega m}=e^{j\omega n}H(e^{j\omega})$$

其中 $H(e^{j\omega})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-j\omega m}$

$H(e^{j\omega})$是h(n)的傅立叶变换，称为**系统的频率响应**，描述的是复指数序列经过线性移不变系统后，复振幅（包括幅度和相位）的变化。

系统的频率响应正是系统函数H(z)在单位圆上的值，即

$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

当系统输入为正弦序列时，则输出为同频的正弦序列，其幅度受频率响应幅度$|H(e^{j\omega})|$加权，而输出的相位为输入相位与系统相位之和.

证：设输入为 $x(n)=A\cos(\omega_0 n+\phi)=\frac{A}{2}[e^{j(\omega_0 n+\phi)}+e^{-j(\omega_0 n+\phi)}]$

$$=\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}+\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

则输出为$y(n)=\frac{A}{2}[H(e^{j\omega_0})e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}+H(e^{-j\omega_0})e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}]$

由于h(n)是实序列，因此$H(e^{j\omega})$满足共轭对称条件，也就是幅度为偶对称，相角为奇对称，即

$$|H(e^{j\omega})|=|H(e^{-j\omega})| \qquad \arg|H(e^{j\omega})|=-\arg|H(e^{-j\omega})|$$

$$y(n)=\frac{A}{2}[|H(e^{j\omega_0})|e^{j\arg[H(e^{j\omega_0})]}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n})+|H(e^{-j\omega_0})|e^{j\arg[H(e^{-j\omega_0})]}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n})]$$

$$=\frac{A}{2}|H(e^{j\omega_0})|[e^{j(\omega_0 n+\phi+\arg[H(e^{j\omega_0})])}+e^{-j(\omega_0 n+\phi+\arg[H(e^{j\omega_0})])}]$$

$$=A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n+\phi+\arg[H(e^{j\omega_0})])$$

- 例：设一阶系统的差分方程为

$$y(n)=x(n)+ay(n-1),\qquad |a|<1, a\text{为实数}$$

求系统的频率响应.

解：将差分方程等式两端Z变换，得：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}\qquad |z|>a$$

这是因果系统，求出单位抽样响应为

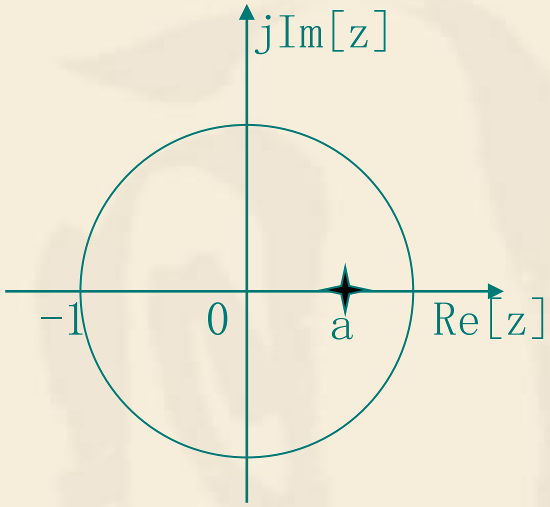
$$h(n)=a^n u(n)$$

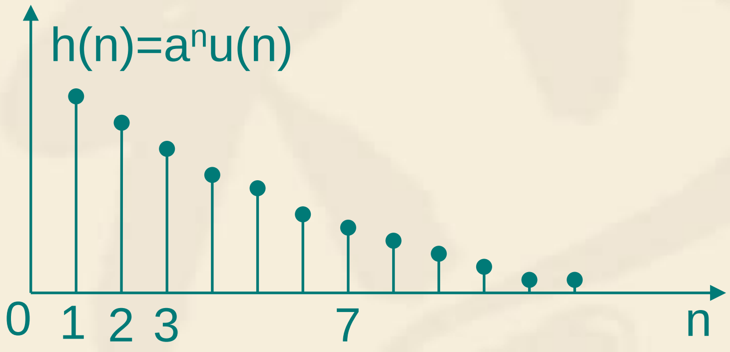
则 $H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}=\dfrac{1}{1-ae^{j\omega}}=\dfrac{1}{(1-a\cos\omega)+ja\sin\omega}$

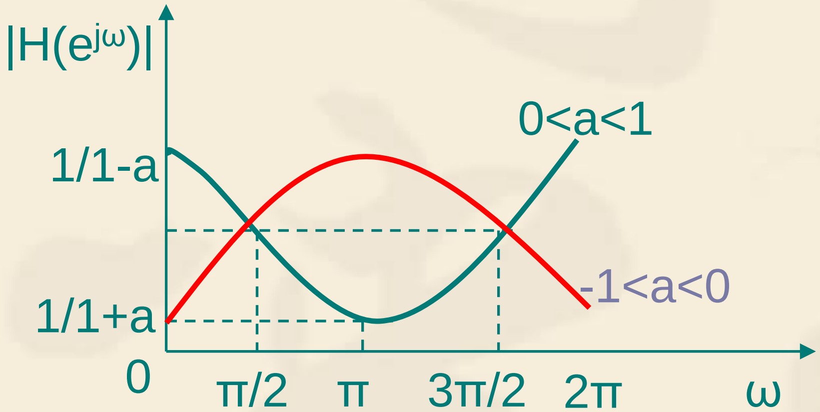
幅度响应为 $|H(e^{j\omega})|=(1+a^2-2a\cos\omega)^{-1/2}$

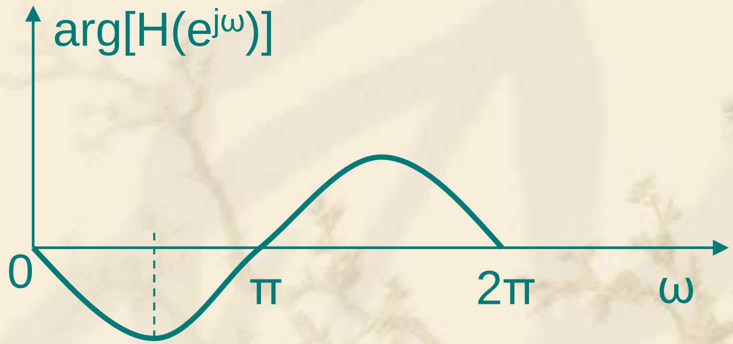
相位响应为 $\arg[H(e^{j\omega})]=-\arctan\left(\dfrac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right)$

系统的极点在单位圆内，因此系统稳定.


jIm[z]
-1
0
a
Re[z]


h(n)=aⁿu(n)
0
1
2
3
7
n


|H(e^jω)|
1/1-a
1/1+a
0
0<a<1
-1<a<0
π/2
π
3π/2
2π
ω


arg[H(e^jω)]
0
π
2π
ω

❖ 例：已知x(n)=sinωn，h(n)=a^nu(n)，|a|<1，

求：y(n)=x(n)*h(n).

解：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-k)h(k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{j\omega(n-k)}-e^{-j\omega(n-k)}}{2j}\right]h(k)$$

$$=\frac{e^{j\omega n}}{2j}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega k}h(k)-\frac{e^{-j\omega n}}{2j}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\omega k}h(k)$$

$$=\frac{e^{j\omega n}}{2j}\cdot H(e^{j\omega})-\frac{e^{-j\omega n}}{2j}\cdot H(e^{-j\omega})$$

$$=\frac{e^{j\omega n}}{2j}\cdot|H(e^{j\omega})|\cdot\arg[H(e^{j\omega})]-\frac{e^{-j\omega n}}{2j}\cdot|H(e^{j\omega})|\cdot\arg[H(e^{-j\omega})]$$

$$=|H(e^{j\omega})|\cdot\left[\frac{e^{j\omega n}\arg[H(e^{j\omega})]-e^{-j\omega n}\arg[H(e^{-j\omega})]}{2j}\right]$$

$$=|H(e^{j\omega})|\cdot\sin\left\{\omega n+\arg[H(e^{j\omega})]\right\}$$

❖ 例：已知一个差分方程

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

1、求系统函数H(Z)；

2、零、极点分布图，可能存在的几种收敛域；

3、若系统稳定且因果，求相应的h(n)；

解：1、

$$Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$=\frac{z(z+\frac{1}{3})}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})}$$

2、 零点：$c_1=0$，$c_2=-1/3$

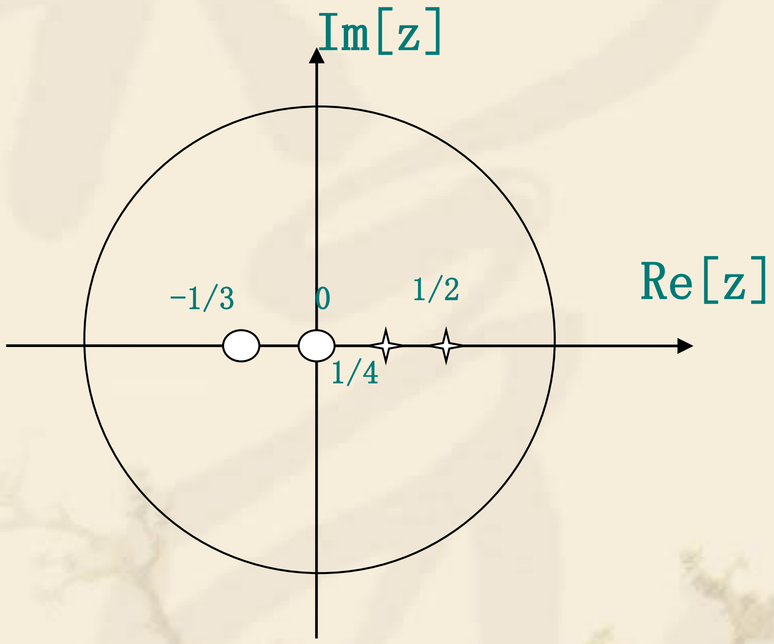
极点： $d_1=1/4$，$d_2=1/2$

可能存在的几种收敛域：

$$|z|<\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{2}$$

$$|z|>\frac{1}{2}$$



3、若已知系统稳定且因果，则收敛域包含有单位圆, 因此收敛域为|z|>1/2, h(n)应为右边序列。

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z+\frac{1}{3}}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})}=\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+(-\frac{7}{3})\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{4}}$$

$$H(z)=\frac{10}{3}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{7}{3}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$h(n)=\left[\frac{10}{3}\cdot(\frac{1}{2})^{n}-\frac{7}{3}\cdot(\frac{1}{4})^{n}\right]u(n)$$

2．5．5　IIR与FIR

IIR:从离散时域来看,若系统的单位抽样(冲激)响应h(n)延伸到无穷长,称为**无限长单位冲激响应系统**.

FIR:若系统的单位抽样(冲激)响应h(n)是一个有限长序列，称为**有限长单位冲激响应系统**.

作业：

- 1（1）
- 4：直接求X(z)的反变换x(n)
- 13
- 14