

第一次课:

自我介绍

课程安排

1.自己考研的一些经历，时间安排，复习重点

复习时间安排：总共复习 100 天，每天半小时——1 个半小时，越到后面花时间越少

每天复习内容：部分公式推导，题 3 道左右，题仅限历年考题，不再做多余的题，重点在于通过做题还有自己推导公式，使自己对公式理解深刻，运用灵活

专业课特点：知识点少，用时少，分数高，是考验取得好成绩的可靠保障

考试要点：考前不用大量训练，但需要全面的回顾知识点及题型；考试时，题量小，所以切记急躁，宁可做慢一点，因为大片大片地做错再去改非常影响考试状态；专业课考试没有难题，考的是细心。

2.基础，基本概念，基本函数（离散的部分比较简略）

2.1 系统：

其实就是一个函数 $h(t)$ ($H(j\omega) \cdots$)。它与输入信号 $x(t)$ 相卷积得到输出信号 $y(t)$ ，

做题时，知道系统就是 $h(t)$ ，就可以了。重点把握：形如 $e^{s_0 t}$, z_0^n 的信号经过系统 $h(t)$ 后的表达式为 $e^{s_0 t} H(s_0)$, $z_0^n H(z_0)$ ，这也是 FS 的意义所在；另外要会列电路频域方程，解电路的部分放在讲题的地方统一讲

2.2 特殊函数： $\delta(t), \delta[n], u(t), u[n], e^{j\omega_0 t}, e^{j\omega_0 n}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$

2.2.1 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$, $\delta(t) = 0 (t \neq 0)$ ，只需记住这个，具体定义不管

$$u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t), u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$
，这两个式子很少考，作为了解

用于移位： $x(t) * \delta(t-t_0) = \int x(t-\tau) \delta(\tau-t_0) d\tau = x(t-t_0)$ ，因为式中 τ 只能为 t_0

时被积函数才不为 0

用于积分： $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ ，式中 $\tau < t$ 时被积函数不为 0

离散情况类似，求导对应差分，积分对应求和，不再重复

2.2.2 $e^{j\omega_0 t}$, $e^{j\omega_0 n}$ 极其常见，用于各种地方，如基本公式，FS，移位等。

$e^{jw_0 t}$ 为周期函数，周期为 $\frac{2\pi}{w_0}$

$e^{jw_0 n}$ 怎样理解它的周期性？若周期为 N ，则 $e^{jw_0 N} = e^{jw_0 0} = 1$ ，则 Nw_0 必须是 2π 的整数（ m ）倍，所以 $w_0 = 2\pi \frac{m}{N}$ ，否则为非周期。离散的情况不是很重要，考的几率很小，但要理解

欧拉公式： $\cos(w_0 t) = \frac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}}{2}$, $\sin(w_0 t) = \frac{e^{jw_0 t} - e^{-jw_0 t}}{2j}$ ，我一般记这个表达式，

因为用得较多，尤其用于信号的调制（时域做乘法，频域向两边移位），反变化较少使用

2.2.4 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$ 冲击串，很重要的函数，后面会细讲

2.3 卷积的性质：

$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ 基本公式一般有两种应用：公式型的证明题；已知图形，求卷

$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]h[n-m]$ 除以上应用，也可能直接求，因为加法比较容易算

运算律同四则运算：分配，交换，结合

卷积最重要的性质：时域卷——频域乘，时域乘—— $\frac{1}{2\pi}$ 频域卷（注意系数），利用这个知识点与奇异函数的性质可以得到移位，微分，积分等性质。估计一半以上的题都多少会用到这个性质。

3. 各种变换，推导过程讲一部分，主要讲公式间的联系以及应用

FT 与 FS 联系，FT 与 LT 联系，DTFT 与 ZT 联系，LT 的收敛域与 ZT 收敛域的联系，单边变换与双边变换的联系，入手点还是最基础的 FT

3.1 FT

3.1.1 基本变换式：
$$X(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jw t} dt$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)e^{jw t} dw$$

这个是最基础的东西，应用非常广，这个记不住就别考了，在一些其他公式记不清的时候，用这个去推，熟练后是非常快的

3.1.2 $e^{-at}u(t) \rightarrow \frac{1}{a+jw}$, $e^{at}u(-t) \rightarrow \frac{1}{a-jw}$, $a > 0$

推导： $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-jw t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+jw)t} dt = \frac{0-1}{-(a+jw)} = \frac{1}{a+jw}$

常用于已知频域函数 $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ 反求时域：先拆成简单因子相加的形式，如

$$\frac{A}{a \pm j\omega} + \frac{B}{b \pm j\omega}, \text{ 再严格套用上面的公式}$$

$$3.1.3 \delta(t) \rightarrow 1, u(t) \rightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega), \text{ 基础, 注意 } u(t) \text{ 的频域表达式}$$

$$\text{sign}(t) = u(t) - u(-t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}, \text{ 看到 } \frac{1}{j\omega} \text{ 就该想到这个, 想要少记一个公式也可以通}$$

过 $u(t)$ 去推导

$\delta(t-t_0) \rightarrow e^{-j\omega t_0}, e^{j\omega t_0} \rightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$, 常用于移位, 之所列出第二个公式, 是由于在题中, 时域往往要乘上 $\cos(\omega_0 t)$, 再用欧拉公式……………

之前已提到: 卷积 $\delta(t-t_0)$ 等效于移位; 通过这些联系, 避免记错移位方向及正负号

3.1.4 应用欧拉公式, $\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)$ 的性质即可得到, 这里有两点需要注意: 一是要注意系数, 欧拉公式本身有系数 $\frac{1}{2}$, 再加上 $e^{j\omega_0 t} \rightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 存在系数 2π , 所以有 $\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0))$, 而这个变换往往应用于信号调制, 即 $x(t)\cos(\omega_0 t)$, 时域乘法对应了 $\frac{1}{2\pi}$ 频域卷积, 所以有 $\cos(\omega_0 t)x(t) \leftrightarrow \frac{(X(\omega+\omega_0) + X(\omega-\omega_0))}{2}$; 第二要注意 \sin 变换中的 j 的位置和 X 正负号的问题, $\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0))}{j}$, 我一般习惯把 j 放在分母, 这样, 正半轴

为正冲击, 负半轴为负冲击。可以按自己的习惯来, 但这两点一定要注意, 非常容易出错。

$$3.1.5 \text{ 门函数} \rightarrow 2\frac{\sin \omega T}{\omega}, \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} \rightarrow \text{门函数}$$

首先要把系数记牢, 其次要记得门限为 $\pm T, \pm \omega_0$, 而没有 $\frac{1}{2}$

由于图形简单, 有图的题里经常出现, 可以算是必考, 考到注意多用图形

$$3.1.6 \text{ 冲击串-采样函数} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-n\omega_0)$$

最重要的用途: 通过卷积, 将非周期与周期信号联系起来, 通过乘法, 将连续与离散信号联系起来, 不过多一个 δ 的增益。常出现于公式推导型证明题, 画图题

做周期信号的 FT, $x_T(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-n\omega_0) X(j\omega_0)$, 一般能量无限信号的 FT 是没有意义的, 但是周期信号还是可以通过上面这样去求 FT

3.2 FS

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

FS 与 FT 的联系: 设 $x_T(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$, $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则有:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{X(jk\omega_0)}{T}$$

由于 FS 限于周期信号, 所以没什么需要记的变换对, 考试基本也仅限于它的基本变换公式

3.3 LT

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$3.3.1 \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

正变换掌握, 反变换只需了解

3.3.2 注意由时域求频域有唯一表达式, 但需标明收敛域, 而由频域求时域的时候, 根据收敛域不同 (右边、左边、右边+左边或有限信号, 没有无限信号), 会求出不同的时域表达式, 如:

$$\frac{1}{s+a} \quad \text{收敛域为 } \operatorname{Re}\{s\} > -a, \text{ 则为 } e^{-at}u(t), \text{ 若为 } \operatorname{Re}\{s\} < -a, \text{ 则为 } -e^{-at}u(-t),$$

一般考题收敛域以大于为主 (一般都是因果的), 但小于的情况也必须知道。另外, 这个 a 一般为实数, 不需 a>0, 与 FT 区别

$$3.3.3 \quad \delta(t) \leftrightarrow 1, \operatorname{Re}\{s\} : (-\infty, +\infty)$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

推导: 第一个只需记住, 同时注意与 FT 的频域相区别; 第二个推导过程:

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \Rightarrow -tu(t) \leftrightarrow (-1) \frac{1}{s^2} \Rightarrow (-t)^n u(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{1}{s^{n+1}} \Rightarrow \text{由这个推导得到的启示在于,}$$

每当我们在做题时看到如下形式 $t^n h(t), s^n H(s)$, 要求 LT 变换时 (一般 n 比较小, 其中

$h(t), H(s)$ 为已知的, 常用的变换对), 应该想得到用求导的方法。另外, 第二个公式很少会考到, 推导也简单, 可不记。

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

3.3.4

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t)u(t) &= \frac{e^{j\omega_0 t}u(t) + e^{-j\omega_0 t}u(t)}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{j\omega_0 + s} + \frac{1}{-j\omega_0 + s} \right) = \frac{s}{\omega_0^2 + s^2} \\ \sin(\omega_0 t)u(t) &= \frac{e^{j\omega_0 t}u(t) - e^{-j\omega_0 t}u(t)}{2j} \leftrightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{-j\omega_0 + s} - \frac{1}{j\omega_0 + s} \right) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + s^2} \end{aligned}$$

推导, 很容易得到, 熟悉推导过程, 注意区别, 避免记错分子。

考试中可能遇到的变换对, 一定可以根据基本公式和常用变换对再加上移位、求导、积分等性质得到, 注意掌握他们的特点, 下面只列出已知频域求时域的情况: 因子 $s \rightarrow$ 求

$$\text{导; } \frac{1}{s} \rightarrow \text{积分; } e^{-st_0} \rightarrow \text{移位; } \frac{1}{a+s} \rightarrow e^{-at}u(t); \frac{?}{s^2 + \omega_0^2} \rightarrow \cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t$$

3.3.5 收敛域。不包含极点, 一般先求出极点, 然后根据时域信号判断, 右边信号 \rightarrow 极点右边, 左边信号 \rightarrow 极点左边, 双边信号 \rightarrow 两极点之间 (这里举个 3 个极点的例子), 有限信号, 能量有限 \rightarrow 全域; 此外, 注意两个性质, 因果 \rightarrow 右边, 稳定 (有 FT) \rightarrow 包含 $j\omega$ 轴

$$3.3.6 \text{ 画图, 举例 } H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2 + 4(\frac{1}{s}) - 6(\frac{1}{s})^2}{1 + 3(\frac{1}{s}) + 2(\frac{1}{s})^2}, \text{ 我一般习惯将式子化为这}$$

种形式 (分母常数项为 1), 因为画图中要用到积分器 $\frac{1}{s}$ 。分为分子分母画图, 然后结合

$$3.3.7 \text{ 单边 LT } X_I(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)u(t)e^{-st}dt \text{ 可不写收敛域, 凡是求 } X_I(s)$$

都可以通过 $u(t)$ 变为求 $X(s)$, 例求 $e^{-a(t+1)}u(t+1)$ 的单边变换

$$x'(t)u(t) \leftrightarrow sX_I(s) - x(0^-)$$

$$\text{不严密推导: } x(t)u(t) \leftrightarrow X_I(s) \Rightarrow (x(t)u(t))' = x'(t)u(t) + x(t)u'(t) \leftrightarrow sX_I(s)$$

$$\Rightarrow x'(t)u(t) \leftrightarrow sX_I(s) - x(0) \text{ 便于理解, 强化记忆}$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau u(t) \leftrightarrow \frac{X_I(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau}{s}, \text{ 解电路}$$

$$\begin{aligned} \text{推导: } \int_{0^-}^t x(\tau)d\tau u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= x(t)u(t) * u(t) \leftrightarrow \frac{X_I(s)}{s} \end{aligned}$$

单边变换应用较少, 只需记住基本概念和上面两式

3.4 ZT

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad \text{反变换不管}$$

$a^n u[n] \rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|, -a^n u[-n-1] \rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$, 基本公式, 收敛域不同, 推导过程其实就是简单的序列求和, 一般也是右边序列使用较多, 其他可根据这个来推导收敛域, 性质类似于 LT, 但对于有限信号, 可能不包含 0 点和无穷点
画图, 同 LT

$$\text{单边 ZT } X_I(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]u[n]z^{-n}$$

下面给一个简单推导便于理解

$$\begin{aligned} \text{举例 } x[n-1]u[n] &\Rightarrow \sum_0^{+\infty} x[n-1]z^{-n} = \sum_{-1}^{+\infty} x[m]z^{-m}z^{-1} = x[-1] + z^{-1} \sum_0^{+\infty} x[m]z^{-m} \\ &= x[-1] + z^{-1}X_I(z) \end{aligned}$$

这个比单边 LT 还冷门, 基本就不会考, 掌握基本概念就够了

3.5 DTFT (不重要)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

一般变换对参照 Z 变换, 将 Z 换成 $e^{j\omega}$ 得到, 如:

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, a < 1,$$

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m)$$

另外注意频域一定为周期信号, 例如

4. 一些性质

4.1 线性, 略

$$x(t-t_0) = x(t) * \delta(t-t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

4.2 时移, 频移

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * 2\pi\delta(\omega - \omega_0) = X(j(\omega - \omega_0))$$

联系 δ 函数, 注意正负号, 考试中会频繁使用

4.3 对偶, 卷积

对偶步骤: ω 变为 t , t 变为 $-\omega$, 变换后的频域乘上 2π , 有时题上要求的东西和我们所记的公式形式相反, 这时用对偶的方法可以快速求出对应的公式。

卷积定理不再重复

4.4 奇偶虚实

由于 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$ ，且对于实信号 $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$ 推出其他公式：

$$\frac{x(t) + x(-t)}{2} \leftrightarrow \frac{X(j\omega) + X^*(j\omega)}{2} = \text{Re}\{X(j\omega)\}$$
$$\frac{x(t) - x(-t)}{2} \leftrightarrow \frac{X(j\omega) - X^*(j\omega)}{2} = j \text{Im}\{X(j\omega)\}$$

看到求实部虚部的题就用这个了

4.5 尺度 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$

考得较少，记一下

4.6 微分，积分

微分通过基本公式可以推导求，例如

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int X(j\omega) e^{j\omega t} j\omega d\omega \leftrightarrow X(j\omega) j\omega, \text{ 应该熟悉这个过程，以免正负号记错}$$

积分通过奇异函数 $u(t)$ 来求，例如

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t) \leftrightarrow X(j\omega) \left(\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j0) \delta(\omega) \text{ 注意与 LS}$$

区别，同时，LS 更常用一些

做题过程中，对于积分微分不能直接求的信号，都是转换为另一域来求

4.7 能量守恒，初值终值

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\frac{1}{T} \int_T |x_T(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

以上三式，注意区别，尤其是 FS，凡是发现对信号的平方求积分，必定会用

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s), x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z), x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

以上两式，只用于 $t, n < 0$ 时，信号为 0 的情况，用得很少，稍微记一下

第二次课：

讲题，详讲一道，其余略讲

给出的解题思路也是，一道详细，其余简略

范围：2009—2010 真题

另外，下面的解题思路都是我在看答案前自己的想法，有些地方和答案不同，大家可以进行对比。

题型 1：推公式证明题，给少量已知条件，（1）证明一个等式；（2）计算一个表达式（2009—4, 2010—7）

常用：基本变换公式： $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(w-nw_0)$ ；积分；求和；卷积

2009-4：已知 $f(t) \leftrightarrow F(w)$

$$(1) \text{ 证: } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(kw_0) e^{jk w_0 t}$$

$$(2) \text{ 求 } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+(2k\pi)^2}$$

思路：（1）等式左边是一个周期信号，等式右边是求和，并注意因子 $e^{jk w_0 t}$ 。由此可以想到

FS 的基本公式。因此只需证明 $a_k = \frac{F(kw_0)}{T}$ ；

（2）证明题两问一般都会联系，考虑用（1）的公式来解。看到都有求和，我们考虑把 $\frac{2}{1+(2k\pi)^2}$ 代入（1）式，观察发现只能代入右边 $F(kw_0)$ 的部分（一个小技巧，求和因子为 k ，而等式右边也为 k ，多半是右边）。另 $w_0 = 2\pi, T = 1$ ，带入后得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+(2k\pi)^2} e^{j2\pi k t}, \text{ 为得到我们要求的式子，需使 } t=0, \text{ 得到}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+(2k\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n), \text{ 因此我们需要得到 } f(n) \text{ 的表达式，考虑到 } F(w) = \frac{2}{1+w^2},$$

通过反变换得到 $e^{-|t|}$ （这个算是比较典型的变换对，可以记住，也可以拆分 $\frac{2}{1+w^2}$ 推导出）

$$\text{最后得到 } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+(2k\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|n|} = \frac{1+e^{-1}}{1-e^{-1}}$$

2010-7: 已知 $z_x(t) = x(t) + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$

(1) 证 $g(t) = x(t) * f(t)$ 时, $z_g(t) = \frac{1}{2} z_x(t) * z_f(t)$

(2) 若 $x(t) = \cos(w_1 t) \cos(w_2 t), 0 < w_1 < w_2$, 算 $z_x(t)$

思路: (1) 首先, 考虑到第一问里有很多卷积, 条件中的积分含因子 $\tau, t-\tau$, 因此也变为

卷积 $z_x(t) = x(t) + \frac{j}{\pi} * x(t)$ 。我发现直接求似乎并不复杂, 于是有了以下的尝试:

$$z_g(t) = x(t) * f(t) + \frac{j}{\pi} * x(t) * f(t)$$

$$z_x(t) * z_f(t) = x(t) * f(t) + \frac{j^2}{\pi^2} x(t) * f(t) + \frac{j}{\pi} * \frac{j}{\pi} * x(t) * f(t)$$

对比以上两式, 发现只需证 $\frac{j}{\pi} * \frac{j}{\pi} = \delta(t)$, 通过频域即可得证 ($\frac{j}{\pi} \leftrightarrow \text{sign}(w)$)

(2) 通过频域, 画图。

题型 2: 关于系统的题, 往往已知关于系统的一些条件以及输入 $x(t)$, 求 $y(t)$ 或某些特殊式子, 如能量 (2009-5, 2009-9)

常用: 基本变换对中的 $\delta(t-t_0)$, 三角函数和门函数; 时频对应关系——卷积和乘法, 往往换一条道路解题会简单很多; 题稍难的时候再反变换时可能用到积分微分相关性质

2009-5: 已知 $h_1(t) = \frac{d}{dt} \delta(t)$, $h_2(t) = \frac{1}{\pi(t-2)}$ (图画黑板上)

(1) 求 $H(jw)$, 画 $|H(jw)|$

(2) 若 $x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$, 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt$

思路: (1) 无需思路, 直接求 $H(jw) = jw \cdot (-je^{-j2w} \text{sign}(w)) = |w| e^{-j2w}$

(2) 看到平方的积分, 且明显频域信号更简单, 用能量公式。根据所记变换对, $X(jw)$

的门限为 π , 幅度为 1, $|Y(jw)| = |w|, w \in (-\pi, \pi)$, 代入能量公式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w^2 dw = \frac{\pi^2}{3}$$

这种属于送分题, 仔细点就可以了, 比如 $h_2(t)$ 的变换,

能量公式的系数, 往往做题做高兴了就容易出错。

2009-9: 已知 $x_1(t) = \cos(t)$, $x_2(t) = \cos(\sqrt{3}t)$, $H(jw) = \frac{1}{1+jw}$ 因果稳定

(1) 求 $y_1(t), y_2(t)$

(2) $y_1(t) = A_1 x_1(t - t_1)$, $y_2(t) = A_2 x_2(t - t_2)$, 比较 A_1, t_1 与 A_2, t_2 大小, 说明原因

思路: (1) 可以通过频域求, 但是考虑到输入为 $e^{jw_0 t}$ 的形式, 求输出的时域, 输出为 $e^{jw_0 t} H(w_0)$, 所以有

$$y_1(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{jt}}{1+j} + \frac{e^{-jt}}{1-j} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} + \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right] = \frac{1}{2} (\cos t + \sin t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - \frac{\pi}{4})$$

同理, $y_2(t) = \frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}(t - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}))$ 。

(2) 要比较的是时域幅度增益与延时, 将 $H(w)$ 变为 $|H(w)|e^{j\angle H(w)}$ 的形式, 得到

$$H(w) = \sqrt{\frac{1}{1+w^2}} e^{-j \operatorname{atg}(w)}, \text{ 同时已知 } w_1 = 1, w_2 = \sqrt{3}, \text{ 带入 } |H(w)| \text{ 得 } A_1 > A_2. \text{ 时延为 } \frac{\operatorname{atg}(w)}{w}, \text{ 单调减函数, 所以 } t_1 > t_2$$

题型 3: 画图求解的题, 一般也必定会涉及系统, 利用图形求 $x(t), h(t), y(t)$ 或某些特殊式子, 一般这种题用画图解会很简单 (2009-7, 2010-4)

常用: 时频——卷积和乘法的转换, 图形求卷积, 图形的移位、尺度变换等, 门函数, 三角

函数, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(w - nw_0)$ 即图形的周期化 (总的来说, 和题型 2 用到的

差不多, 因为都是关于系统的题)

2009-7: $x(t) = \sin(\frac{\pi}{4}t)$, $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2n)$, 且 $h(t), H_1(jw)$ 如图

(1) 画出 $r(t)$ 的频谱

(2) 求 $y_1(t)$ 的表达式

(3) 画出 $y_2(t)$ 的图

思路: (1) 周期化, 三个要点: 正负号, 幅度, 周期

(2) 截取一段, 反变换, $y_1(t) = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{4}t - \sin \frac{3\pi}{4}t)$

(3) $h(t)$ 时域为方波, 频域很复杂, 因此还是用时域, $r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2n) \sin(\frac{\pi}{2}n)$,

$$r(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(t - 2n) \sin(\frac{\pi}{2}n) = (-1)^n \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(t - 2(2n+1)), \text{ 画图}$$

2010-4: 已知 $x(t) = \sin(7.5t) + 2\cos(9t)$, $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \frac{\pi}{2}n)$, $H(j\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| < 2 \\ 0, |\omega| > 2 \end{cases}$

画出 $R(j\omega)$, 求 $y(t)$

思路: 此题画图时有一点比较特殊, 就是在周期化的时候, 周期小于信号宽度, 因此会产生重叠。然后通过 $H(j\omega)$ 截取一个周期, 反变换得到 $y(t)$

题型 4: 电路。实际就是求 $H(s)$, 再进行一些后续运算, 不过通过电路求稍微特殊一点,

所以单独列出 (2009-8 (2010-6 和此题几乎一模一样, 除了求 $H(s)$ 的方式变为微分方程。

由此也可以看出, 电路仅仅是用来求 $H(s)$, 不再涉及更难的运算, 而后续的几问只是单纯的计算问题))

常用: 电路频域图; 基本的解电路方法, 串联分压, 并联分流

2009-8: 如图, 已知 $L=1, C=1$, 电流 $x(t)$ 输入, 电压 $y(t)$ 输出

(1) 求 $H(s)$ 。讨论如何选择 R 取值, 使极点为复数

(2) $R=1$, 求 $|H(j\omega)|$ 最大值 $|H(j\omega_0)|_{\max}$, 指出 $\omega_0 (\omega_0 \geq 0)$

(3) 令 $|H(j\omega_1)| = |H(j\omega_2)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(j\omega_0)|_{\max}$, 且 $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$, R, L, C 不变,

求-3dB 带宽 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

思路: (1) 主要是画频域图与解电路, $R \rightarrow R, L \rightarrow Ls, C \rightarrow \frac{1}{Cs}$ 。对于本题, 则有

$$X(s) \frac{1}{1/R + 1/Ls + Cs} = Y(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Rs}{Rs^2 + s + R}, \text{极点为复数, 则 } 1 - 4R^2 < 0, R > \frac{1}{2}$$

$$(2) H(j\omega) = \frac{j\omega}{- \omega^2 + j\omega + 1}, |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1/\omega^2 - 1 + \omega^2}}, \text{求导求最值, 得 } \omega_0 = 1,$$

$$|H(j\omega_0)| = 1$$

$$(3) \text{要求 } \omega_1, \omega_2, \text{ 令 } \frac{1}{\sqrt{1/\omega^2 - 1 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 解得 } \omega = \frac{\pm\sqrt{5} \pm 1}{2}, \text{ 根据已知条件}$$

$$\omega_1 < \omega_0 < \omega_2, \text{ 取 } \omega_0 \text{ 左右两点, 所以 } \omega_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \omega_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \Delta\omega = 1$$

关键是解好第一步, 其余是数学问题。

题型 5: 通过微分、差分方程求系统函数 $H(s), H(z)$, 画方框图, 零、极点图, 判断收敛域, 是否因果, 是否稳定; 一般这些还不够一道题的分量, 所以还要加一点其他运算 (2010-9, 2010-6, 2009-10)

常用: 标准方框图的画法, 零极点图画法; 各种判决准则; 常用变换对

2010-9: 已知线性因果系统 $y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-2] - \frac{1}{4}x[n]$

(1) 画图零极点图, 指出系统是否稳定

(2) 求系统单位阶跃响应

(3) 输入 $x[n] = u[n] - u[n-5]$, 计算 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2[n]$

思路: (1) 求得 $H(z) = \frac{z^{-2} - 1/4}{1 - z^{-2}/4}$, 画图

(2) 显然, 用时域求和方法很复杂, 因此用频域, $u[n] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$, 做乘法后拆分为

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{-15/8}{1 - z^{-1}/2} + \frac{5/8}{1 + z^{-1}/2} \leftrightarrow u[n] - \frac{15}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(3) 用能量公式 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(jw)|^2 dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jw)H(jw)|^2 dw$, 分别

考虑 $|X(jw)|, |H(jw)|$, $|X(jw)|$ 比较复杂, $|H(jw)|$ 为 1, 所以变为 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jw)|^2 dw$,

由于 $|X(jw)|$ 复杂而 $x[n] = u[n] - u[n-5]$ 非常简单, 因此再用能量公式, 得 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2[n] = 5$ 。

这一问很好地考察了频域和时域的灵活转换, 所以做题时, 遇到某一域比较复杂时, 与其耐心地解出来, 不如花一点时间考虑另一域是否简单。

2010-6: 已知因果系统 $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + b \frac{d}{dt} y(t) + w_0^2 y(t) = b \frac{d}{dt} x(t)$

(1) 求 $H(s)$, 画方框图;

后面两问省略, 和前面一样

2009-10: 这个不讲了, 大同小异

题型 6: 纯计算题, 主要都是单纯地根据已知条件去求某些表达式的值, 有些很简单, 有些需要灵活运用所学知识 (2010-5, 2009-6, 2010-8)

常用: 各种性质

2010-5: 已知 $x(t) \leftrightarrow X(jw)$, 如图

(1) 求 $x(t)$

(2) 另 $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = |X(j2\omega)|$, 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cos(\frac{t}{2}) dt$

思路: (1) 这一问显然不需要用图形去求解, 由于已知条件只有 $X(j\omega)$, 先把它转换为表

达式 $X(j\omega) = \begin{cases} \omega e^{j\pi/2} \\ -\omega e^{-j\pi/2} \end{cases} = \begin{cases} j\omega \\ j\omega \end{cases} = j\omega, \omega \in (-2, 2)$, 如果没有 $\omega \in (-2, 2)$, 则时域非常容易

得到, 用一个门函数 $G(j\omega)$, 则 $X(j\omega) = j\omega G(j\omega)$,

$x(t) = \frac{d}{dt} g(t) = \frac{d}{dt} \frac{\sin 2t}{\pi} = \frac{2t \cos(2t) - \sin(2t)}{\pi^2}$ 。这题也可以直接用基本公式去求, 稍微复杂一点。

(2) 看到要求的表达式, 想到用频域 $\omega = 0$ 去求。尺度变换得到 $Y(j\omega)$, 频域做卷积

$\frac{1}{2\pi} Y(j\omega) * \pi(\delta(t + \frac{1}{2}) + \delta(t - \frac{1}{2}))$, 通过图形得到 $\omega = 0$ 时为 1。笔记上用的是奇偶虚实的性质, 难易度差不多, 感觉要难想到一点。

2009-6: 已知离散时间 LTI 系统 (1) 若在 $3 \leq n \leq 7$ 区间外 $x[n] = 0$, 则在 $n < 3, n > 9$ 区间

一定有 $y[n] = 0$; (2) 若 $x[n] = (-1)^n$, 则 $y[n] = 0$; (3) 单位阶跃响应 $s[n]$ 有:

$s[1] = 3, s[7] = 4$

(1) 计算 $h[n]$, 并画图;

(2) 画系统方框图;

(3) 若 $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$, 求 $|H(e^{j\omega})|, \theta(\omega)$

思路: (1) 根据条件 1, 通过画图, 得到 $h[n]$ 从 0 到 2。根据条件 2, 得到 $h[0] - h[1] + h[2] = 0$ 。

根据条件 3, 得到 $h[0] + h[1] = 3, h[0] + h[1] + h[2] = 4$, 所以 $h[0] = 1, h[1] = 2, h[2] = 1$ 。

(2) $H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$, 图略。

(3) $H(z) = 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = e^{-j\omega} (e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2})^2 = 4\cos^2(\omega/2) e^{-j\omega}$

第一问是这道题特别的地方, 后面都已讲过了。

2010-8: 已知 $X(s) = \frac{1}{s(e^s + e^{-s})}, \text{Re}\{s\} > 0$

(1) 求 $x(t)$ 并画图;

(2) 若 $h(t) = u(t) - u(t-2)$, 画出 $y(t) = x(t) * h(t)$ 的图。

思路: (1) 看到因子 e^{-s} , 能想到的变换对只有一个, $\sum_0^{\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-sT}}$, 因此进行

变换 $X(s) = \frac{1}{s(e^s + e^{-s})} = \frac{e^{-s}}{s} \frac{1}{1+e^{-2s}} = \frac{e^{-s}}{s} \frac{1-e^{-2s}}{1-e^{-4s}}$, 通过移位、积分的性质可以得到

$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-1-4n) - \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-3-4n)) ds = \sum_{n=0}^{+\infty} (u(t-1-4n) - u(t-3-4n))$, 到这一

步, 就可以很容易地得到图形, 同时还可以进一步化简为 $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u(t-1-2n)$ 。我在做这

一题时没有想到 $\frac{1}{1+e^{-2s}}$ 也有与其对应的变换 $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \delta(t-2n)$, 而是严格的套用公式, 还

是能够得到正确结果。

(2) 图形都很简单, 因此直接用图形求积分, 题上不要求 $h(t)$ 的表达式, 因此没必要写出。

2010-10: 已知 $\phi_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[k+n]$

(1) 求 $\Phi_{xx}(z)$ 与 $X(z)$ 的关系;

(2) 证明 $\phi_{xx}[n]$ 最大值为 $\phi_{xx}[0]$;

(3) 若 $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$, 求 $\Phi_{xx}(e^{jw})$ 表达式以及 $\phi_{xx}[1]$ 。

思路: (1) 形式像卷积, 但差个负号, 因此做变换 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[k+n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[-k]x[n-k]$,

相当于 $x[-n] * x[n]$, 因此 $\Phi_{xx}(z) = X(z^{-1})X(z)$ 。

(2) 完全是个数学问题。几乎没有任何已知条件, 我们需要构造一个显然成立的不等式, 往往考虑“平方>0”的形式, 结合本题, 考虑 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x[k] - x[k+n])^2 > 0$, 展开后得到

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x^2[k] + x^2[k+n] - 2x[k]x[k+n]) = 2\phi_{xx}(0) - 2\phi_{xx}(n) > 0$, 得证。

(3) 时域卷积明显不好算, 用频域, 用到第一问的结论, 则 $\Phi_{xx}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}/2} \frac{1}{1-z/2}$
 $= \frac{1}{5/4 - z^{-1}/2 - z/2}$, 因此 $\Phi_{xx}(e^{jw}) = \frac{1}{5/4 - 1/2(e^{-jw} + e^{jw})} = \frac{1}{5/4 - \cos(w)}$ 。由于 Z 变

换反变换不要求，不可能通过频域来求 $\phi_{xx}[1]$ ，因此直接用时域求，因此有

$$\phi_{xx}[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k] \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} u[k+1] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \frac{2}{3}$$

第三次课：

题型 1：证明题。

2008-4： 设 $y(t) = x(t) * h(t)$ ，且 $S_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt$ ， $S_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$ ， $S_h = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$ 。

(1) 试证明： $S_y = S_x \times S_h$ ；

(2) 设 $x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{t}$ ， $h(t) = (2-|t|)[u(t+1)-u(t-1)]$ ，计算 S_y 的值。

思路：(1) 令他们的 FT 为 $X(j\omega), Y(j\omega), H(j\omega)$ ，则有 $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$ ，同时，

看到没有平方的一个简单积分如 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$ 的形式，应该立即想到想到 $X(j0)$ ，因此我们得

到 $X(j0) = S_x, Y(j0) = S_y, H(j0) = S_h$ ，所以 $Y(j0) = X(j0)H(j0)$ ，所以 $S_y = S_x \times S_h$ 。

注：笔记上用基本公式求，显然比较复杂。

(2) 用到上一问的结论，由于 $S_x = X(j0) = \pi$ ，

$$S_h = \int_{-\infty}^{+\infty} (2-|t|)[u(t+1)-u(t-1)]dt = 2 \int_0^1 (2-t)dt = 3$$

$$\text{所以 } S_y = S_x \times S_h = 3\pi$$

注：证明题中，后面的小问最容易用到前面的结论，使得解答过程变得很简单。否则，以此题为例，若想先求出 $Y(j\omega)$ ，再利用 $S_y = Y(j0)$ 来解，求 $H(j\omega)$ 的步骤会比较复杂。

题型 2：关于系统。

2007-5： 已知系统如图。

(1) 当 $x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{t}$ 时，求 $y(t)$ ；

(2) 当 $x(t) = 1 + \cos(\frac{3}{2}\pi t) + \sin(3\pi t)$ ，求 $y(t)$ 并画粗略图形。

思路：(1) 此题唯一需要注意的就是系统的相位问题，在明白这一点的前提下，先求出

$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \pi e^{-j\frac{\omega}{2}}, \omega \in (-\pi, \pi)$ ， $e^{-j\frac{\omega}{2}}$ 相当于时域右移 $\frac{1}{2}$ ，因此得到

$$y(t) = \frac{\sin(\pi(t-1/2))}{t-1/2}$$

(2) $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi[\delta(t - \frac{3}{2}\pi) + \delta(t + \frac{3}{2}\pi)] + \dots$ ，由于 $\sin(3\pi)$ 得部分在

门限以外，所以可以忽略。因此 $Y(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi[\delta(t - \frac{3}{2}\pi)e^{-j\frac{\pi}{2}} + \delta(t + \frac{3}{2}\pi)e^{j\frac{\pi}{2}}]$ ，

化简 $Y(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi[-j\delta(t - \frac{3}{2}\pi) + j\delta(t + \frac{3}{2}\pi)] \leftrightarrow 1 + \sin(\frac{3}{2}\pi)$

2008-9: 系统如图。

(1) 求单位阶跃响应 $s(t)$ ，并画图。

(2) 若输入 $x(t) = u(t) - u(t - 2T)$ ，画出 $y(t)$ 的波形。

(3) 若 $y(t) = u(t) - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u(t - nT)$ ，求输入因果信号 $x(t)$ 。

思路：(1) 直接把 $u(t)$ 代入系统，则 $f(t) = u(t) - u(t - T)$ ，为一方波，积分后明显要分段，

$$s(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < T \\ T, & t \geq T \end{cases} \text{ 图略。}$$

(2) 由线性， $y(t) = s(t) - s(t - 2T)$ ，不用求表达式，直接画图。

(3) 需要求到系统单位冲击响应，输入 $\delta(t)$ ，得到 $h(t) = \frac{1}{T}[u(t) - u(t - T)]$ ，所以

$$H(s) = \frac{1}{Ts}(1 - e^{-sT})，同时求出 Y(s) = \frac{1}{s}(1 - 2\frac{-e^{-sT}}{1 + e^{-sT}})，所以得到$$

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = T \frac{1 + 2\frac{e^{-sT}}{1 + e^{-sT}}}{1 - e^{-sT}} = T \frac{1 + 3e^{-sT}}{1 - e^{-s2T}} \longleftrightarrow T \sum_{n=0}^{+\infty} [\delta(t - 2nT) + \delta(t - 2nT - T)]，其$$

中用到了条件“输入因果信号”。

注 1：开始做第 (3) 问时也考虑过直接用时域，但是发现 $f(t)$ 得到以后，由于其波形并不特殊， $x(t) - x(t - T) = f(t)$ ， $x(t)$ 并不好求，观察法既不容易看出结果，也不够严谨，所以才考虑用频域。

注 2：第 (3) 问结果与笔记不同，笔记上的解答似乎看错一个正负号，其结果对应于

$$y(t) = u(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u(t - nT)，同学们可以下来仔细看看。$$

题型 3：画图题。

2008-7：已知条件如图

(1) 画出 $r(t)$ 的频谱 $R(\omega)$ 。并求 $w(t)$ 表达式。

(2) 画出 $g(t)$ 的频谱 $G(j\omega)$ 。

(3) 设计理想低通滤波器 $H_3(\omega)$ ，使 $y(t) = x(t)$ 。给出 $H_3(\omega)$ 的图形和截止频率的可选范围。

思路：按照系统由输入到输出的顺序，依次画图，由于题中用到 \sin ，注意符号的问题。

题型 4： 电路。

2006-6： LTI 电路如图

(1) 求 $H(s)$ ，如何选择 R 、 L 、 C 的关系才能使阶跃响应不产生振荡信号？

(2) 若 $R=2$ ， $L=1$ ， $C=1$ ，求单位冲击响应。

(3) 求阶跃响应 $s(t)$ 的初值 $s(0^+)$ 和终值 $s(\infty)$ 。

思路：(1) 画出频域图，根据串联分压， $H(s) = \frac{1/Cs}{R + Ls + 1/Cs} = \frac{1}{1 + CRs + CLs^2}$ 。要使阶跃响应不产生振荡信号，则极点为实数（我也没管为什么，当时就这样记了）。容易得到 $C^2R^2 - 4CL \geq 0 \Rightarrow R^2 \geq \frac{4L}{C}$ 。

(2) $H(s) = \frac{1}{1 + 2s + s^2} = \frac{1}{(1+s)^2}$ ，实际的系统肯定是因果系统，这相当于一个隐藏

的条件。 $\frac{1}{1+s} \leftrightarrow e^{-t}u(t) \Rightarrow -\frac{1}{(1+s)^2} \leftrightarrow -te^{-t}u(t)$ ， $h(t) = te^{-t}u(t)$ 。

(3) 根据初值终值定理，需要得到 $S(s) = \frac{1}{s(1+s)^2}$ ， $s(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \times \frac{1}{s(1+s)^2}) = 0$ ，

$s(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \times \frac{1}{s(1+s)^2}) = 1$

题型 5： 微分、差分方程，零极点，收敛域，方框图相关问题。

2008-8： 已知双边信号 $x(t) \xrightarrow{LT} X(s), \text{Re}[s]: (\alpha, \beta)$ ， $X(s)$ 为有理分式并仅有两个极点和一个零点，分布如图，且 $X(0) = 1$ 。

(1) 求 $x(t)$ 的表达式。

(2) 若另一因果信号 $g(t)$ ， $|G(j\omega)| = |X(j\omega)|$ ，画出 $G(s)$ 的零、极点图，求 $g(t)$ 。

思路：(1) 由条件 $X(s) = \frac{a(s-b)}{(s-c)(s-d)}$ ，根据图与 $X(0) = 1$ ，得到

$$X(s) = -\frac{(s+4)}{2(s+2)(s-1)} = \frac{1/3}{s+2} + \frac{-5/6}{s-1} \text{ 根据收敛域, 得 } x(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{5}{6}e^t u(-t)。$$

注 1: 答案与笔记不同。

(2) 根据性质, 因果信号 \rightarrow 右边信号, 有频谱说明包含 jw 轴。考虑前面用到过的

$$\text{式子 } X(s) = \frac{a(s-b)}{(s-c)(s-d)}, \quad |X(jw)| = \left| a \sqrt{\frac{w^2+b^2}{(w^2+c^2)(w^2+d^2)}} \right|, \text{ 可以看出在零、极点以及}$$

幅度 a 绝对值相等时, 频谱幅度相等。所以 $G(s) = \pm \frac{(s \pm 4)}{2(s+2)(s+1)}$, 再求反变换。

注 2: 笔记上采用全通函数 $A(s) = \frac{s-1}{s+1}, \text{Re}[s]: (-1, \infty), G(s) = X(s)A(s)$

注 3: 笔记上的答案只有 $G(s) = \pm \frac{(s+4)}{2(s+2)(s+1)}$, 并且注明只有这种情况才给分。但是若

给出全通函数 $A(s) = \frac{(s-1)(s-4)}{(s+1)(s+4)}, \text{Re}[s]: (-1, \infty)$, 就可以得到另外一种结果。

2008-10: 已知因果离散序列 $x[n] = [\frac{1}{8} \sum_{l=0}^7 e^{j\frac{2\pi}{8}nl}]u[n]$

(1) 求 $x[n]$ 的 Z 变换 $X(z)$, 画出收敛域, 零极点图。

(2) 将 $x[n]$ 输入差分方程如下的因果系统: $y[n] + 0.5y[n-1] = x[n]$, 计算系统零状态响应在 $n=10$ 处的数值。

思路: (1) 我们记的常用变换对只有 $a^n u[n]$, 其他的都是直接用基本公式求。看到题中的

表达式, 需要先化简: $\frac{1}{8} \sum_{l=0}^7 e^{j\frac{2\pi}{8}nl} = \frac{1}{8} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{8}n \times 8}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{8}n}} = \begin{cases} 1, n=8r \\ 0, n \neq 8r \end{cases} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n-8r]$ 。由此, 我们

得到 $x[n] = \sum_{r=0}^{+\infty} \delta[n-8r]$ 。 $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \delta[n-8r] z^{-n} = \sum_{r=0}^{+\infty} z^{-8r} = \frac{1}{1-z^{-8}}$ 。

零点: z^{-8} 无穷大, 则 $z=0$, 注意是 8 阶的;

极点: $z^8 = 1, |z|=1$, 所以 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{8}k}, k=0,1,\dots,7$ 图略。

注 1: 我们往往习惯于 $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT)$ 的形式, 即连续的形式, 遇到离散 $\sum_{r=0}^{+\infty} \delta[n-rT]$ 往往做

起来会觉得比较别扭, 应该要通过练习来习惯。

注 2: $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{1-e^{-sT}}$, $\sum_{r=0}^{+\infty} \delta[n-rT] \xleftrightarrow{ZT} \frac{1}{1-z^{-T}}$, 一般从左向右大家会

觉得很简单, 并且根本不需要记。而由于 LT 和 ZT 反变换基本式是不要求的, 所以在做反向运算的时候, 没有记住这个公式会比较恼火, 这里建议还是背下来。

$$(2) H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}}, h[n] = (-0.5)^n u[n], \text{零状态响应 } y[n] = \sum_{m=0}^{+\infty} x[m]h[n-m],$$

$$\text{所以 } y[10] = (-0.5)^{10} + (-0.5)^2 = \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^2} = \frac{257}{1024}。$$

题型 6: 计算。

2008-5: 已知实偶信号 $f(t) \xleftrightarrow{FT} F(w) = e^{-|w|}$ 。

(1) 计算 $f(t)$ 的能量。

(2) 令 $y(t) = \frac{d}{dt} f(t)$, 求 $y(t)$ 表达式, 画出频谱相位图。

(3) 令 $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-2\pi n)$, 计算 $g(0)$ 。

思路: (1) 算能量用能量公式: $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2 dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-2w} dw = \frac{1}{2\pi}$

(2) 由 $e^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} \frac{2}{1+w^2}$, 得到 $\frac{1}{2\pi} \frac{2}{1+t^2} \xleftrightarrow{FT} e^{-|w|}$, $y(t) = \frac{-2t}{\pi(1+t^2)^2}$ 。

$\frac{d}{dt} f(t) \xleftrightarrow{FT} jwF(w) = jwe^{-|w|}$, 因此相位只有两个值, 当 $w > 0$ 时, 相位为 $\frac{\pi}{2}$, 当 $w < 0$

时, 相位为 $-\frac{\pi}{2}$, 图略。

(3) 由 $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-2\pi n) = f(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2\pi n) \xleftrightarrow{FT} F(w) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(w-n)$

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(jw)dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|w|} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(w-n)dw = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|n|} = \frac{1}{2\pi} \frac{1+e^{-1}}{1-e^{-1}}。若不用$$

此方法, 直接进行计算, 则有 $g(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+(2\pi n)^2}$, 不好算。

2007-8: 某连续时间稳定实系统单位冲击响应 $h(t)$ 满足如下条件:

(a) $h(t)$ 为偶函数;

(b) $H(s)$ 有四个极点, 没有零点;

(c) $H(s)$ 的一个极点在 $s_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$

(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = 4$ 。

试求 $H(s)$ ，并说明该系统是哪一类滤波器。

思路：由于我们所熟悉的奇偶虚实性质都是对于 FT 而非 LT，所以可以自己推导 LT 的性质。

首先， $h(t)$ 为实，则有 $H^*(s^*) = H(s)$ 。

根据条件 (a)， $H(s) = H(-s)$

根据条件 (b)，有 $H(s) = \frac{A}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$ 。

根据条件 (c)，有 $s_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ 。

根据以上条件，已经可以确定四个极点的值，由于

$$H^*(s^*) = \frac{A}{(s-s_1^*)(s-s_2^*)(s-s_3^*)(s-s_4^*)} = H(s), \quad s_2 = s_1^* = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \text{ 也是系统的极点。再由}$$

$$H(s) = H(-s), \text{ 得到 } s_3 = -\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad s_4 = -\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \text{ 也是极点。}$$

最后，根据条件 (d)， $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = H(0) = 16A = 4, \quad A = \frac{1}{4}$ 。

为了得到滤波器类型，求出 $H(jw) = \frac{1}{4(w^4 + 1/16)}$ ，低通。

注 1：结果与笔记不同。

总结：

1.求能量： $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$ ，几乎是必用能量公式，甚至用两次。用了之后会发现积分非常容易得到。如 2010-9,2009-5

2.求积分： $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$ ，复杂一点可能是 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(t)dt$ 。也不会让大家直接求，一般是通过 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = X(j0)$ 这种变换来求（当然也可能有其他方法，但是推荐此方法），如 2010-5。

反之，求 $x(0)$, $X(j0)$ 也应懂得变换，而不是直接算。

3.求幅度，相位， $|H(jw)|e^{j\theta(w)}$ 。一般 $H(jw)$ 形式都比较特殊，如实数、纯虚、 $1+2e^{jw}+e^{j2w}$ 。

若 $H(jw)$ 很复杂，往往只要求 $|H(jw)|$ 而不要求相位，直接用定义求即可。如

2010-6,2009-5,2009-8

4.已知微分、差分方程、电路图，求 $H(s), H(z)$ ，并画方框图、零极点图、收敛域。此类题非常死板，记住方法即可。如 2010-9

5.已知 $x(t), p(t)$ ，求一个中间信号 $r(t) = x(t)p(t)$ ，并且往往是求频谱并画图。这种问题中

$p(t)$ 只可能是 $\cos(w_0 t), \sin(w_0 t), \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$ ，偶尔也可能是 $e^{jw_0 t}$ 。这些都是对频域的移位，应重点把握，注意移位后幅度，对于 $\sin(w_0 t)$ 时尤其注意。比较难的情况在于移位的幅

度小于 $X(jw)$ 的宽度，这种时候要画清楚坐标，以免出错。如 2010-4,2009-7

6.根据已知条件求离散信号 $x[n]$ （或信道冲击响应）。由于离散图形比较直观，最好结合图形来分析。如 2009-6

7.证明题第一问，几乎都和卷积有关，所以往往需要灵活变换时域与频域；证明题的第二问，几乎必用第一问结论，而且不用就会很难做。

8.方波（低通滤波器）。无论时域还是频域，方波出现在哪边就通过哪边进行计算。

9.反变换时，LT 常出现，因此以 LT 为例： $s \rightarrow$ 求导； $\frac{1}{s} \rightarrow$ 积分； $e^{-st_0} \rightarrow$ 移位；

$\frac{1}{a+s} \rightarrow e^{-at}u(t)$ ； $\frac{?}{s^2 + w_0^2} \rightarrow \cos w_0 t, \sin w_0 t$ ； $\frac{1}{1-e^{-sT}} \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT)$ 。不仅如此，我

们还需要知道如 $\frac{1}{(a+s)^2}$ 。总之，通过拆分、积分、求导、移位和已知变换对灵活解题。

10.所有知识都应该牢记并能推导，仔细做题。