第八章 空间解析几何与向量代数

一、向量概念

称既有大小（长度）又有方向的量为**向量**（矢量），如位移、速度、力、加速度和力矩等，向量用$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\ldots$等符号表示。我们只研究**自由向量**，即只考虑大小和方向而不考虑起点的向量，或可自由平移的向量。

大小相等、方向相同的向量，亦即平移后可重合的向量称为**相等向量**，两向量$\vec{a},\vec{b}$相等记为$\vec{a}=\vec{b}$；向量的大小(长度)称为**向量的模**，向量$\vec{a},\overrightarrow{AB}$的模分别记为$|\vec{a}|,|\overrightarrow{AB}|$；模为 1 的向量称为**单位向量**，$\vec{a},\vec{AB}$的单位向量分别记为$\vec{e}_{\vec{a}},\vec{e}_{\overline{AB}}$，它们的长度均为 1，方向分别与$\vec{a},\overrightarrow{AB}$相同；模为 0 的向量称为**零向量**，记为$\vec{0}$，零向量的起点和终点重合，方向任意。

取空间任意一点 O, 平移非零向量$\vec{a},\vec{b}$使得$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 角$\angle AOB$称为**非零向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角**，记为$<\vec{a},\vec{b}>$，$<\vec{a},\vec{b}>\in[0,\pi]$，零向量与任意向量成任意角。

向量平行亦称为**向量共线**（因为可平移到同一直线上）；向量平行于同一平面亦称为**向量共面**（因为可平移到同一平面上）。

二、向量的线性运算

1. **向量加法** 定义两向量$\vec{a},\vec{b}$的和$\vec{a}+\vec{b}$为一向量，其大小和方向由三角形法则确定如下：任取空间一点 O, 平移使得$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, 则$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$，也可由平行四边形法则确定如下:任取空间一点 O, 平移使得$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 以$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$为邻边做出平行四边形 OACB, 则对角线向量$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$.

按加法的三角形法则易得$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$及如下的**运算规律**：（1）交换律$\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$；（2）结合律$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

由于向量加法满足交换和结合律，故n个向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$相加是同一个向量，记为$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$，可由三角形法则确定如下：任取空间一点做为第一个向量$\vec{a}_1$的起点, 以前一向量的终点作为后一向量的起点，依次做出$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$，则$\vec{a}_1$的起点指向$\vec{a}_n$的终点的向量即$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$。

2. <u>**向量减法**</u> 定义与$\vec{a}$大小相等方向相反的向量为<u>$\vec{a}$的负向量</u>，记为$-\vec{a}$。定义两向量$\vec{a},\vec{b}$的差$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$，其大小和方向由三角形法则或如下法则确定：任取空间一点作为$\vec{a},\vec{b}$的共同起点分别做出$\vec{a},\vec{b}$，则$\vec{a},\vec{b}$的终点连线，$\vec{b}$指向$\vec{a}$的向量即差向量$\vec{a}-\vec{b}$.

由上述法则易得$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$。由向量加减法和三角形两边之和大于第三边知识易知，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$（当$\vec{a},\vec{b}$同向时等号成立）；$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$（当$\vec{a},\vec{b}$反向时等号成立）；

3. <u>**向量的数乘**</u> 定义实数λ乘向量$\vec{a}$为一向量，记为$\lambda\vec{a}$，其大小和方向确定如下：$\left|\lambda\vec{a}\right|=\left|\lambda\right|\left|\vec{a}\right|$；当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向；当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向；当$\lambda=0$时，$\lambda\vec{a}=\vec{0},$ 方向任意（因当$\lambda=0$时，$\left|\lambda\vec{a}\right|=\left|\lambda\right|\left|\vec{a}\right|=0$）.

按定义易知，$(-1)\vec{a}=-\vec{a},\ 1\vec{a}=\vec{a},\ 0\vec{a}=\vec{0},\ \lambda\vec{0}=\vec{0},\ \vec{a}=\left|\vec{a}\right|\vec{e}_{\vec{a}},\ \vec{e}_{\vec{a}}=\vec{a}/\left|\vec{a}\right|,(\vec{a}\ne\vec{0}\text{时})$.

按向量加法和数乘向量定义可证得<u>**数乘向量的运算规律**</u>：即对实数λ,μ和向量$\vec{a},\vec{b},$有

(1)结合律$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；(2)分配律$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$，$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

<u>向量平行的数乘等价刻画</u>

定理 设$\vec{a}$是非零向量，则$\vec{b}$平行于$\vec{a}$的充要条件是存在唯一实数λ，使得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$。

证 "$\Rightarrow$" 设$\vec{b}$平行于非零向量$\vec{a}$。 先证存在性，当$\vec{b},\vec{a}$同向时，取$\lambda=\left|\vec{b}\right|/\left|\vec{a}\right|$，当$\vec{b},\vec{a}$反向时，取$\lambda=-\left|\vec{b}\right|/\left|\vec{a}\right|$，则按数乘向量运算得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$；

再证唯一性，设$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，$\vec{b}=\mu\vec{a}$，则$(\lambda-\mu)\vec{a}=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}$，又$\vec{a}\ne\vec{0}$，故$\lambda=\mu$.

"$\Leftarrow$" 设存在唯一实数λ，使得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，按数乘向量定义即得$\vec{b}$平行于$\vec{a}$。

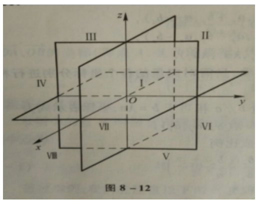

图 8－12

三、空间直角坐标系

在空间取定一点O和三个两两垂直的单位向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$，就确定了以O为原点且两两垂直的三条数轴，依次称为x轴（横轴）、y轴（纵轴）和z轴（竖轴），它们构成了一个<u>**空间直角坐标系**</u>，称为$Oxyz$坐标系或$[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$坐标系，通常我们只研究<u>**右手直角坐标系**</u>。

两两垂直相交于坐标原点O的坐标轴确定了三个坐标平面,依次称为xoy**坐标面**、yoz**坐标面**和xoz**坐标面**，这三个两两垂直相交的坐标面将空间分成了 8 个部分，在xoy坐标面上方按逆时针方向依次称为 1,2,3,4 **卦限**，在xoy坐标面下方按逆时针方向依次称为 5,6,7,8 **卦限**.

点和向量的坐标定义 在右手系$Oxyz$中，对任意给定向量$\vec{r}$，作$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$，以$\overrightarrow{OM}$为对角线、三条坐标轴为棱作长方体，设该长方体与$x$轴、$y$轴和$z$轴的交点分别为$P,Q,R$，且$\overrightarrow{OP}=x\vec{i},\overrightarrow{OQ}=y\vec{j},\overrightarrow{OR}=z\vec{k}$,则$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$；反之，对任意给定的三元数组$(x,y,z)$，可在$x$轴、$y$轴和$z$轴上分别确定三个向量$\overrightarrow{OP}=x\vec{i},\overrightarrow{OQ}=y\vec{j},\overrightarrow{OR}=z\vec{k}$，以这三个向量为棱做长方体，也有该长方体的对角线向量$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，也可令$\overrightarrow{OM}=\vec{r}$。因此，向量

$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$一一对应一个三元数组$(x,y,z)$，我们称$(x,y,z)$**为点**$M$**或向量**$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$**的坐标**，记为**点**$M(x,y,z)$**，向量**$\vec{r}=(x,y,z)$，向量$\overrightarrow{OM}$称为**点**$M$**的向径**。

注 点M的坐标即向径$\overrightarrow{OM}$的的坐标，求向量的坐标需要求向量的$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$分解式。

例 （1）原点和$\vec{0}$的坐标分别是?

因为$\overrightarrow{OO}=\vec{0}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$，所以原点$O(0,0,0)$，$\vec{0}=(0,0,0)$；

（2）x轴上的点的坐标?

对x轴上的点P，设$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$，因$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$，故点$P$的坐标为$P(x,0,0)$；

（3）xoy坐标面上的点的坐标?

对xoy坐标平面上的点M，设$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OP}=x\vec{i},\overrightarrow{OQ}=y\vec{j}$，则$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+0\vec{k}$，故$xoy$坐标面上的点$M$的坐标为$M(x,y,0)$；

（4）点$M(-1,2,-5)$在第几卦限?

由点的坐标定义知$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$,其中$\overrightarrow{OP}=-\vec{i},\overrightarrow{OQ}=2\vec{j},\overrightarrow{OR}=-5\vec{k}$是长方体的三条棱，该长方体在第 6 卦限，点$M$就是该长方体的一个顶点，故点$M$在第 6 卦限。

向量线性运算的坐标表示

设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，λ为实数，则按向量加减法、数乘向量的运算律以及向量坐标的定义得

$\vec{a}+\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})+(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}$；

$\vec{a}-\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})-(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k}$；

$\lambda\vec{a}=\lambda(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}$；于是

$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$，$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$，

$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$，即向量相加减就是对应坐标相加减，数乘向量就是数乘向量的每个坐标

当$\vec{a}\neq\vec{0}$时，$\vec{b}$平行于$\vec{a}\Leftrightarrow$存在唯一实数λ，使得$\vec{b}=\lambda\vec{a}\Leftrightarrow(b_x,b_y,b_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$

或$b_x=\lambda a_x,b_y=\lambda a_y,b_z=\lambda a_z\Leftrightarrow\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$(分母为 0 时分子也为 0).

例 已知两点$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$和实数$\lambda\neq-1$，在直线$AB$上求点$M$，使$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 设点M的坐标为(x,y,z)，由向量运算知，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$,代入

$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$得 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$，于是$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$,即得定比分点$M$的坐标

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)=(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}).$$

当$\lambda=1$时，得点$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$连线的中点坐标为$(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2})$.

向量的模、方向角、投影

设向量$\vec{r}=(x,y,z)$，则由向量坐标定义，$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$，其中

$\overrightarrow{OP}=x\vec{i},\overrightarrow{OQ}=y\vec{j},\overrightarrow{OR}=z\vec{k}$分别是以$\overrightarrow{OM}$为对角线的长方体的棱，在该长方体中，

$|\vec{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，即向量$\vec{r}$的模；

已知两点$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$，由向量加法，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，故两点$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$的距离

$|AB|=|\vec{A}B|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$；

称向量$\vec{r}=(x,y,z)$与x轴正向、y轴正向、z轴正向的夹角α,β,γ为向量$\vec{r}$的方向角，

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$值称为向量$\vec{r}$的方向余弦。在上述长方体中，易知,

$\cos\alpha=\dfrac{x}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}=\dfrac{x}{|\vec r|}$，比如，点 M 在第 1 卦限(长方体在第 1 卦限，$\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴正半轴上)，

则 $x>0$ 且 $x=\left|\overrightarrow{OP}\right|,\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{OP}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$；点 M 在第 2 卦限(长方体在第 2 卦限，$\vec{O}P$ 在 x 轴负半轴上)，则 $x<0$ 且 $x=-\left|\overrightarrow{OP}\right|,\cos(\pi-\alpha)=\dfrac{\left|\overrightarrow{OP}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$；同理，$\cos\beta=\dfrac{y}{|\vec r|},\cos\gamma=\dfrac{z}{|\vec r|}$。

易知，对任意 $\vec r=(x,y,z)$，$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{1}{|\vec r|}(x,y,z)=\dfrac{\vec r}{|\vec r|}=\vec e_{\vec r}$，

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\left|\vec e_{\vec r}\right|^2=1$。

例 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt2),M_2(1,3,0)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标、模、方向余弦、方向角、单位向量。

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,-\sqrt2)$，$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt2)^2}=2$，

$\cos\alpha=\dfrac{-1}{2},\cos\beta=\dfrac12,\cos\gamma=\dfrac{-\sqrt2}{2}$，$\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$，$\gamma=\dfrac{3\pi}{4}$，

$\vec e_{\overrightarrow{M_1M_2}}=\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}=(-\dfrac12,\dfrac12,\dfrac{-\sqrt2}{2})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$。

例 设点 A 位于第 1 卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、y 轴的夹角依次为 $\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{\pi}{4}$，且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=6$，求点 A 的坐标。

解 已知 $\overrightarrow{OA}$ 的方向角 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$，由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 知方向角 $\cos^2\gamma=\dfrac14$；

因 $\overrightarrow{OA}$ 在第 1 卦限，故 $\cos\gamma=\dfrac12,\gamma=\dfrac{\pi}{3}$，$\vec e_{\overrightarrow{OA}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\dfrac12,\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac12)$，于是

$\overrightarrow{OA}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\vec e_{\overrightarrow{OA}}=(3,3\sqrt2,3)$，点 A 的坐标为 $(3,3\sqrt2,3)$.

例 求点 $M(x,y,z)$ 到 x 轴、y 轴和 z 轴的距离以及它到 xoy,yoz,xoz 坐标面的距离。

解 由点的坐标定义知 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$，其中 $\overrightarrow{OP}=x\vec i,\overrightarrow{OQ}=y\vec j,\overrightarrow{OR}=z\vec k$ 是长方体的三条棱，点 M 就是该长方体的一个顶点，

（1）故 $\left|\overrightarrow{MP}\right|,\left|\overrightarrow{MQ}\right|,\left|\overrightarrow{MR}\right|$ 分别是点 M 到 x 轴、y 轴和 z 轴的距离，在相应的直角三角形中，由于 $\left|\overrightarrow{MP}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{OM}\right|^2-\left|\overrightarrow{OP}\right|^2}=\sqrt{y^2+z^2}$，故点 $M(x,y,z)$ 到 x 轴的距离是 $\sqrt{y^2+z^2}$，同

理，$M(x,y,z)$ 到 y 轴的距离是 $\sqrt{x^2+z^2}$，$M(x,y,z)$ 到 z 轴的距离是 $\sqrt{x^2+y^2}$。

（2）设长方体在 xoy 坐标面上的顶点分别为 O,P,Q,N，则 $|\vec{MN}|$ 是点 $M(x,y,z)$ 到 xoy 坐标面的距离，在相应的直角三角形中，

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 - \left|\overrightarrow{ON}\right|^2} = \sqrt{\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 - (\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OQ}\right|^2)} = \sqrt{x^2+y^2+z^2-(x^2+y^2)} = |z|$$

故点 $M(x,y,z)$ 到 xoy 坐标面的距离是 $|z|$，由对称性知，点 $M(x,y,z)$ 到 xoz 坐标面的距离是 $|y|$，点 $M(x,y,z)$ 到 yoz 坐标面的距离是 $|x|$。

向量在轴上的投影

已知数轴 u 及其单位向量 $\vec{e}$,给定一向量 $\vec{r}$,平移使 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$,过点 M 作数轴 u 的垂直平面,交点为 M',设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\vec{e}$，称 $\overrightarrow{OM'}$ 为**向量 $\vec{r}$ 在轴 u 上的投影向量**,λ 称为**向量 $\vec{r}$ 在轴 u 上的投影**,记为 $\mathrm{Pr}\, j_u\vec{r}$。

设向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则按坐标定义，$\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OP}=a_x\vec{i}$，$\overrightarrow{OQ}=a_y\vec{j}$，$\overrightarrow{OR}=a_z\vec{k}$，且 $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}$ 分别是 $\vec{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影向量，a_x,a_y,a_z 分别是 $\vec{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影,即 $a_x=\mathrm{Pr}\, j_x\vec{a}$，$a_y=\mathrm{Pr}\, j_y\vec{a}$，$a_z=\mathrm{Pr}\, j_z\vec{a}$.

因坐标即投影，所以坐标满足的性质投影也应该满足，由于坐标满足 $a_x=|\vec{a}|\cos\alpha$, $\vec{a}+\vec{b}$ 的坐标等于 $\vec{a}$ 的坐标加上 $\vec{b}$ 的坐标，$\lambda\vec{a}$ 的坐标等于 λ 乘以 $\vec{a}$ 的坐标，故 $\mathrm{Pr}\, j_x\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha$，$\mathrm{Pr}\, j_x(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{Pr}\, j_x\vec{a}+\mathrm{Pr}\, j_x\vec{b}$，$\mathrm{Pr}\, j_x\lambda\vec{a}=\lambda\,\mathrm{Pr}\, j_x\vec{a}$。**将上述数轴换成一个向量结论一样成立。**

例 设向量 $\vec{r}$ 的模式 4，它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，求在 u 轴上的投影。

解 $\mathrm{Pr}\, j_u\vec{r}=|\vec{r}|\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$。

例 设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}-8\vec{k}, \vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}, \vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$, 求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量。

解 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}=12\vec{i}+20\vec{j}-32\vec{k}+6\vec{i}-12\vec{j}-21\vec{k}-5\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$

$=13\vec{i}+7\vec{j}-49\vec{k}$，$\mathrm{Pr}\, j_x\vec{a}=13$，$\vec{a}$ 在 y 轴上的分向量为 $7\vec{j}$。

第二节 数量积 向量积

定义 称 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$ 为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的**数量积**，或**内积**，**记为** $\vec{a}\cdot\vec{b}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$。

注 （1）当 $\vec{b}\neq\vec{0}$ 时，因 $\Pr j_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\Pr j_{\vec{b}}\vec{a}$，同理，

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时，因 $\Pr j_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\Pr j_{\vec{a}}\vec{b}$；

（2）$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$；（3）$\vec{a}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{a}=0$；（4）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

运算律 （1）交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；（2）分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$；

（3）结合律 对实数 λ，$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$。

证 （2）当 $\vec{c}=\vec{0}$ 时，等式两端都等于 0，结论成立；

当 $\vec{c}\neq\vec{0}$ 时，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\Pr j_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\Pr j_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\Pr j_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$；

（3）当 $\vec{b}=\vec{0}$ 时，等式两端都是 0，结论成立；当 $\vec{b}\neq\vec{0}$ 时，

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\Pr j_{\vec{b}}(\lambda a)=\lambda|\vec{b}|\Pr j_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \ \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=(\lambda\vec{b})\cdot\vec{a}=\lambda(\vec{b}\cdot\vec{a})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

数量积、两向量夹角余弦的坐标表示式

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则由于 $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$，

得（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$；

因为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$，所以当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 且 $\vec{b}\neq\vec{0}$ 时，两向量夹角余弦的坐标表示式为

（2）$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$。

例 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为单位向量且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$。

解 在等式 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 两端分别点乘 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，得 $\begin{cases}|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0\\ \vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=0\\ \vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{c}|^2=0\end{cases}$，三式相加得

$|a|^2+|b|^2+|c|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=0$，故 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{3}{2}$。

定义 称$\vec{a}\times\vec{b}$为向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的**向量积**，或**外积**，它表示一向量，其大小和方向规定如下：

模$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin<\vec{a},\vec{b}>$，**方向** $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b}$ 即$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b}$确定的平面且$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$成右手系。

注 （1）当$\vec{a},\vec{b}$不平行时(此时$\vec{a}\neq\vec{0}$且$\vec{b}\neq\vec{0}$)，$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=$以$\vec{a}$,$\vec{b}$为邻边的平行四边形面积；

（2）$\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$(因为$\left|\vec{a}\times\vec{0}\right|=\left|\vec{0}\times\vec{a}\right|=0$)；

（3）$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$(因为$\left|\vec{a}\times\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\sin<\vec{a},\vec{a}>=0$)；

（4）$\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow<\vec{a},\vec{b}>=0,\pi$或$\vec{a}=\vec{0}$或$\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=0\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$。

运算律 （1）反交换律 $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$；（2）分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$；

（3）结合律　对实数λ，$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$。

证 （1）当$\vec{a}\,//\,\vec{b}$时，等式两端都是$\vec{0}$，结论成立；当$\vec{a},\vec{b}$不平行时，$\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{a}$的模都等于以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形面积，都垂直于$\vec{a},\vec{b}$确定的平面但方向相反；（2）（3）证明略。

向量积的坐标表示式

设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则由于$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},\ \vec{i}\times\vec{j}=-(\vec{j}\times\vec{i})=\vec{k},$

$\vec{j}\times\vec{k}=-(\vec{k}\times\vec{j})=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=-(\vec{i}\times\vec{k})=\vec{j},$得向量积的坐标表示式为

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)，其中\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=AD-BC.$$

例 已知$\overrightarrow{OA}=\vec{i}+3\vec{k},\overrightarrow{OB}=\vec{j}+3\vec{k}$ 求ΔOAB的面积.

解 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\left(\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)=(-3,-3,1)$，故

$S_{\Delta OAB}=$以$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形面积的一半

$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1^2}=\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

第三节 空间曲面及其方程

一、空间曲面方程的概念

如果空间曲面 S 上任意一点的坐标都满足三元方程 $F(x,y,z)=0$；不在曲面 S 上的点的坐标都不满足三元方程 $F(x,y,z)=0$，则**称三元方程 $F(x,y,z)=0$ 为空间曲面 S 的方程**，**空间曲面 S 称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形**。

注 由定义知，三元方程 $F(x,y,z)=0$ 若表示图形则为空间曲面，如 $xy=1, z=3,$ $x^2+y^2+z^2=1$ 等均表示空间曲面。

例 求在 xoy 坐标面的上方且与 xoy 坐标面距离为常数 $a(>0)$ 的平面方程。

解 设点 $P(x,y,z)$ 为所求平面上任一点，它到 xoy 坐标面的距离为 $|z|=a$，故所求平面方程为 $z=a$。

例 求球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面方程。

解 设点 $M(x,y,z)$ 为所求球面上任一点，则 $\left|\overrightarrow{M_0M}\right|=R$，即

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$ 故所求球面方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$。

二、旋转曲面

定义 一条平面曲线绕所在平面的一条定直线旋转一周得到的曲面称为**旋转曲面**，旋转曲线和定直线分别称为**旋转曲面的母线和旋转轴**。球面和圆柱面都是旋转曲面。

例 证明 yoz 坐标面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$。

解 设点 $M(x,y,z)$ 为所求旋转曲面上任一点，则它是 yoz 坐标面上的曲线 $f(y,z)=0$ 上某点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕 z 轴旋转一周得到的，且有（1） $f(y_1,z_1)=0$（点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 在曲线 $f(y,z)=0$ 上），（2） $z=z_1$（点 $M(x,y,z)$ 和点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 都在平行于 xoy 坐标面的同一平面上），（3） $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0^2+y_1^2}=|y_1|$（点 $M(x,y,z)$ 和点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 到 z 轴的距离相等），由（1）、（2）、（3）消去 y_1,z_1 即得结论。

结论 坐标面上的曲线绕其所在平面的一条坐标轴旋转一周得到的旋转曲面方程：可在曲线方程中保留与旋转轴同名的坐标，以另两个坐标平方和的平方根代替曲线方程中的另一坐标得到。

例 旋转曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$可看成$xoy$坐标面上的曲线$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$绕$x$轴旋转一周得到，或可看成$xoz$坐标面上的曲线$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$绕$x$轴旋转一周得到。

特殊的旋转曲面---圆锥面：直线 L 绕与它相交的定直线旋转一周得到的旋转曲面称为**圆锥面**，两直线的夹角称为**半顶角（取锐角）**，两直线的交点称为圆锥面的**顶点**，定直线称为**旋转轴**。

例 求顶点在坐标原点，旋转轴为z轴，半顶角为α的圆锥面方程。

解 该圆锥面可看成yoz坐标面上的直线$\tan\alpha\cdot z=y$绕z轴旋转一周得到的旋转曲面，由上题知，圆锥面方程为$\tan\alpha\cdot z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$，其中$\tan\alpha\cdot z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\tan\alpha\cdot z=-\sqrt{x^2+y^2}$分别表示$xoy$坐标面上、下方的圆锥面部分。

三、柱面

例 方程$x^2+y^2=R^2$表示怎样的曲面？

解 （1）xoy坐标面上的圆周$x^2+y^2=R^2$上的点$(x,y,0)$在所求曲面上，从而该圆周在曲面上；

（2）过上述圆周上的点$(x,y,0)$且平行于z轴的直线上的点(x,y,z)都在所求曲面上，从而这种直线都在曲面上；故所求曲面为圆柱面，且可看成平行于z轴的直线沿xoy面上的圆周$x^2+y^2=R^2$移动得到的。xoy面上的圆周$x^2+y^2=R^2$称为**圆柱面的准线**，过该圆周且平行于z轴的直线称为**圆柱面的母线**。

一般，$F(x,y)=0$表示母线平行于z轴，准线为xoy面上的曲线$F(x,y)=0$的柱面，类似地，$F(x,z)=0,F(y,z)=0$均表示柱面，如，方程$y^2=2x$表示母线平行于z轴，准线为xoy面上的抛物线$y^2=2x$的柱面，方程$y=z$表示母线平行于x轴，准线为yoz面上的直线$y=z$的柱面。

四、二次曲面（三元二次方程表示的曲面）

椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

（1）用$-x$代替x方程不变说明该椭球面关于yoz面对称，同理知该椭球面关于xoz,xoy面也对称，也关于坐标轴及原点对称；

（2）用yoz面$x=0$去截椭球面得到yoz面上的椭圆$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；

用xoz面$y=0$去截椭球面得到xoz面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；

用xoy面$z=0$去截椭球面得到xoy面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

于是可画出椭球面的大致图形。

椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

（1）用$-x$代替x方程不变说明该椭球面关于yoz面对称，同理知该椭球面关于xoz面也对称，用$-x$和$-y$同时代替x和y方程不变说明该椭球面关于z轴对称；

（2）用yoz面$x=0$去截曲面得到yoz面上的抛物线$y^2=b^2z$；

用xoz面$y=0$去截曲面得到xoz面上的抛物线$x^2=b^2z$；

用平行于xoy面的平面$z=t(>0)$去截曲面得到平面$z=t(>0)$上的椭圆$\frac{x^2}{a^2t}+\frac{y^2}{b^2t}=1$；

于是可画出椭球面的大致图形。

第四节 空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

设两个空间曲面$F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$的交线为C，因交线C上任一点的坐标满足方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，不在交线$C$上点，其坐标就不满足该方程组，故用该方程组表示交线C不会产生混淆，**称方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$为空间曲线$C$的一般方程**。

例 方程组$\begin{cases}x^2+y^2=1\\2x+3z=6\end{cases}$表示怎样的曲线？（平面和圆柱面的交线）

例 方程组$\begin{cases}z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\\(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2\end{cases}$表示怎样的曲线？（半球面和圆柱面的交线）

二、空间曲线的参数方程

将空间曲线C上动点的坐标x,y,z表示为某参数t的函数$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t).\end{cases}$易见，给定$t$的一个值$t=t_1$，得到$C$上一个点$(x(t_1),y(t_1),z(t_1))$，随$t$的变动可得到$C$上全部点， 称**方程组**

$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t).\end{cases}$**为空间曲线$C$的参数方程**。

例 动点在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度w绕z轴旋转，同时以线速度v沿平行于z轴的正方向上升，w,v为常数，动点的轨迹称为**螺旋线**，求该螺旋线方程。

解 设$t=0$时动点位于点$A(a,0,0)$，点$M(x,y,z)$为螺旋线上任一点，且是动点从点A出发经时间t得到。因圆柱面$x^2+y^2=a^2$的任一母线都平行于z轴且与准线$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}$相交，故设过点$M(x,y,z)$的母线与准线相交于点$M'(x',y',0)$，则$x=x'=a\cos wt,\quad y=y'=a\sin wt$，$\left|MM'\right|=z=vt,t>0$，故得**螺旋线的参数方程为**$\begin{cases}x=a\cos wt,\\ y=a\sin wt,\\ z=vt,t>0\end{cases}$或$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\ b=\dfrac{v}{w}\\ z=b\theta,\theta>0\end{cases}$。

三、空间曲线在坐标面上的投影

将空间曲线C $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$消去$z$，得方程$H(x,y)=0$，显然，空间曲线$C$在柱面$H(x,y)=0$上, 所以方程$H(x,y)=0$表示母线平行于$z$轴且过空间曲线$C$的柱面，它与$xoy$面的交线$\begin{cases}H(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$就是空间曲线$C$ $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$在$xoy$坐标面上的投影;

同理，将空间曲线C $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$消去$x,y$分别得到方程$R(y,z)=0,T(x,z)=0$，则方程组$\begin{cases}R(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$和$\begin{cases}T(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$分别表示空间曲线$C$ $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$在$yoz$坐标面和$xoz$坐标面上的投影。

例 求两球面$x^2+y^2+z^2=1$和$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$的交线C在xoy坐标面上的投影方程

解 方程$x^2+y^2+z^2=1$减去$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$得$y+z=1$，再代入前一个方程消去z得$x^2+2y^2-2y=0$，于是所求投影为$\begin{cases}x^2+2y^2-2y=0\\ z=0\end{cases}$。

例 求上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$和锥面$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$围成的立体在xoy坐标面上的投影。

解 所求投影即空间曲线C $\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2}\\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}\end{cases}$在$xoy$面上的投影曲线$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$围成的平面区域。

第五节 平面及其方程

一、平面的方程

定义 称垂直于一个平面的非零向量为该**平面的法向量**。

例 求过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$ 的平面方程。

解 设点 $M(x,y,z)$ 为所求平面上任一点，则 $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$，得 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 即为所求平面，称为**平面的点法式方程**。

将平面的点法式方程整理得 $Ax+By+Cz+D=0$，其中 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ 为常数项，称为**平面的一般式方程**，这里向量 (A,B,C) 为平面的一个法向量。可见，三元一次方程表示平面。

特殊三元一次方程表示的平面：

（1） $Ax+By+Cz=0$ 表示过原点的平面（因 $O(0,0,0)$ 的坐标满足方程）；

（2） $By+Cz+D=0$ 表示平行于 x 轴的平面（因 $\vec{n}=(0,B,C)\perp\vec{i}=(1,0,0)$）；

$Ax+Cz+D=0$ 表示平行于 y 轴的平面； $Ax+By+D=0$ 表示平行于 z 轴的平面；

(3) $By+Cz=0$ 表示过 x 轴的平面（因 $\vec{n}=(0,B,C)\perp\vec{i}=(1,0,0)$ 且通过原点）；

$Ax+Cz=0$ 表示通过 y 轴的平面； $Ax+By=0$ 表示通过 z 轴的平面；

(4) $By+D=0$ 表示平行于 xoz 坐标面的平面（因 $\vec{n}=(0,B,0)\perp\vec{i}=(1,0,0),k=(0,0,1)$）；

$Ax+D=0$ 表示平行于 yoz 坐标面的平面；$Cz+D=0$ 表示平行于 xoy 坐标面的平面。

例 求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面方程。

解 设所求平面为 $By+Cz=0$，代入 $x=4,y=-3,z=-1$ 得 $\dfrac{B}{C}=\dfrac{-1}{3}$，故平面为 $y-3z=0$。

例 设一平面与 x,y,z 轴的交点分别为 $P(a,0,0),Q(0,b,0),R(0,0,c)$，求平面方程.(a,b,c 均不为0)

解 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$ 代入 P,Q,R 三点的坐标得 $\begin{cases}aA+D=0\\ bB+D=0\\ cC+D=0\end{cases}$，解得

$\begin{cases}A=\dfrac{D}{-a}\\ B=\dfrac{D}{-b}\\ C=\dfrac{D}{-c}\end{cases}$，代入所设方程并消去 D 得平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，称为**平面的截距式方程**。

二、两平面的夹角θ（即两平面法向量的夹角，取锐角或直角）

设两平面的法向量分别是$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，则两平面的夹角$\theta=<\vec{n}_1,\vec{n}_2>$（当$<\vec{n}_1,\vec{n}_2>$为锐角时）或$\theta=\pi-<\vec{n}_1,\vec{n}_2>$（当$<\vec{n}_1,\vec{n}_2>$为钝角时），故

$$\cos\theta=\left|\cos<\vec{n}_1,\vec{n}_2>\right|=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

例 (1) 求平面$Ax+By+Cz+D=0$外一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到该平面的距离d;

(2) 求两平行平面$Ax+By+Cz+D_1=0$和$Ax+By+Cz+D_2=0$的距离$\widetilde{d}$。

解 （1）设$P_1(x_1,y_1,z_1)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$上一点，过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$作该平面的垂线且垂足为N，$\vec{n}=(A,B,C)$，则$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$，在直角三角形P_0P_1N中，

$$d=|P_0N|=\left|\cos<\vec{P_1P_0},\vec{n}>\right|\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}\right|}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|}\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{P_1P_0}\right|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(2)设$P_1(x_1,y_1,z_1)$是平面$Ax+By+Cz+D_1=0$上一点，则$Ax_1+By_1+Cz_1+D_1=0$，且$P_1(x_1,y_1,z_1)$到平面$Ax+By+Cz+D_2=0$的距离即两平行平面的距离$\widetilde{d}$，

$$\widetilde{d}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

例 求过点$A(3,0,0)$和$B(0,0,1)$且与xoy面成$\frac{\pi}{3}$角的平面方程。

解 设平面方程为$\frac{x}{3}+\frac{y}{b}+\frac{z}{1}=1$，则该平面的法向量为$\vec{n}=(\frac{1}{3},\frac{1}{b},1)$。取$xoy$面的法向量为$\vec{k}=(0,0,1)$。因为所求平面与$xoy$面成$\frac{\pi}{3}$角，故得

$$\cos\frac{\pi}{3}=\left|\cos<\vec{n}\cdot\vec{k}>\right|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}{|\vec{n}||\vec{k}|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{b^2}+1}}$$，得$b=\pm\frac{3}{\sqrt{26}}$，故所求平面方程为

$x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$。

第六节 空间直线及其方程

一、空间直线的对称式和参数方程

定义 称平行于一条直线的非零向量为该直线的方向向量。

例 求过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且方向向量 $\vec{S}=(m,n,p)$ 的空间直线 L 的方程。

解 设点 $M(x,y,z)$ 为所求直线上任一点，则 $\overrightarrow{M_0M}\,//\,\vec{S}$，得 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，即为所求直线方程，称为**直线 L 的对称式方程**或**点向式方程**。令 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，空间直线 L 的方程变为 $x=x_0+mt,\ \ y=y_0+nt,\ \ z=z_0+pt$，称为**空间直线 L 的参数式方程**。

二、空间直线的一般方程

前面讲过，两个空间曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的交线 C 可以用两个曲面方程的联立方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 来表示，称为空间曲线 C 的一般方程，特别地，作为曲面的特殊情形，两个空间平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的交线 L 也可以用两个平面方程的联立方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 来表示，我们称之为**空间直线 L 的一般方程**。

注 向量 $(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$ 是空间直线 L $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的一个方向向量。

三、空间直线 L 的三种方程之间的互化

例 将直线 L $\begin{cases}x+y+z+1=0\\2x-y+3z+4=0\end{cases}$ 化为对称式或参数式方程。

解 先在直线 L 上任取一点，可令 $x_0=1$，代入方程组得 $\begin{cases}y_0+z_0=-2\\3z_0-y_0-6\end{cases}$ 得直线 L 上一点 $(1,0,-2)$，又该直线 L 的一个方向向量为 $(1,1,1)\times(2,-1,3)=(\begin{vmatrix}1&1\\-1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix})=(4,-1,-3)$，故直线 L 的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$，参数式方程为 $x=1+4t,y=-t,z=-2-3t$。

注 （1）直线 L 上定点坐标取得不同，直线的对称式和参数式方程表达式不同，但都表示同一直线；

（2）由直线 L 的对称式方程 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$ 也可得直线 L 的一般方程的另一种形式为 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}\\\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{z+2}{-3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}\\\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{z+2}{-3}\\\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}\end{cases}$（因直线 L 可看成不同平面的交线）；

（3）易见，知道直线 L 三种方程中的一种，可写出其余两种方程。

三、两直线的夹角 θ（即两直线方向向量的夹角，取锐角或直角）

设两直线的方向向量分别是 $\vec{S}_1=(m_1,n_1,p_1),\vec{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$，则两直线的夹角 $\theta=<\vec{S}_1,\vec{S}_2>$（当 $<\vec{S}_1,\vec{S}_2>$ 为锐角时）或 $\theta=\pi-<\vec{S}_1,\vec{S}_2>$（当 $<\vec{S}_1,\vec{S}_2>$ 为钝角时），故

$$\cos\theta=\left|\cos<\vec{S}_1,\vec{S}_2>\right|=\frac{\left|\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\right|}{\left|\vec{S}_1\right|\left|\vec{S}_2\right|}=\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

例 求直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 和直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ 的夹角。

解 $\vec{S}_1=(1,-4,1)$，$\vec{S}_2=(2,-2,1)$，两直线夹角 θ 的余弦

$$\cos\theta=\left|\cos<\vec{S}_1,\vec{S}_2>\right|=\frac{\left|1\times2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)\right|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$，故夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$。

四、直线和平面的夹角 θ（即直线与它在平面上的投影直线的夹角，取锐角或直角）

设直线方向向量为 $\vec{S}=(m,n,p)$ 和平面法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，则直线与平面的夹角

$\theta=\dfrac{\pi}{2}-<\vec{S},\vec{n}>$（当 $<\vec{S},\vec{n}>$ 为锐角时）；或 $\theta=<\vec{S},\vec{n}>-\dfrac{\pi}{2}$（当 $<\vec{S},\vec{n}>$ 为钝角时），故

$$\sin\theta=\pm\cos<\vec{S},\vec{n}>=\left|\cos<\vec{S},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\vec{S}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{S}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|Am+Bm+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}。$$

例 求直线 $\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角。

解 直线方向向量 $\vec{S}=(1,1,3)\times(1,-1,-1)=(\begin{vmatrix}1&3\\-1&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix})=(2,4,-2)$，平面法向量为 $\vec{n}=(1,-1,-1)$，故所求直线和平面的夹角 θ 的正弦

$$\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\vec{S}>\right|=\frac{\left|2\times1-4\times1+(-2)\times(-1)\right|}{\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=0$$，得 $\theta=0$。

五、杂例

例 1 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程。

解 可取 $(1,0,-4)\times(2,-1,-5)=(\begin{vmatrix}0&-4\\-1&-5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4&1\\-5&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix})=(-4,-3,-1)//(4,3,1)$ 为所求直线

的方向向量，故所求直线为$\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$。

例 2 求直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$与平面$2x+y+z-6=0$的交点。

解 将直线的参数方程为$x=2+t, y=3+t, z=4+2t$代入平面方程$2x+y+z-6=0$，得交点对应参数t满足的等式$2(2+t)+3+t+4+2t-6=0$，解得$t=-1$，故交点为$(1,2,2)$。

例 3 求过点$(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程。

解 （1）所求直线在过点$(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直的平面上，

（2）过点$(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直的平面方程为$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$，将直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$的参数方程$x=-1+3t, y=1+2t, z=-t$代入平面方程$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$得交点对应参数$t=\dfrac{3}{7}$，得交点为$(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},\dfrac{-3}{7})$；

（3）所求直线的方向向量可取为$S=(\dfrac{2}{7}-2,\dfrac{13}{7}-1,\dfrac{-3}{7}-3)=\dfrac{-6}{7}(2,-1,4)//(2,-1,4)$，故所求直线为$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$。

通过直线的平面束方程

通过直线$L\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$的所有平面方程(不包括$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$)为$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$($\lambda$为实数)，称为通过直线$L$的平面束方程。这是因为直线$L$上任一点的坐标满足方程组$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$，从而满足方程$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$，故直线$L$在平面束方程表示的平面上。

例 4 求直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影直线的方程。

解 设通过直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$的平面束方程为$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$，其法向量为$(1+\lambda,1-\lambda,-1+\lambda)$。由$(1+\lambda,1-\lambda,-1+\lambda)\cdot(1,1,1)=0$得$\lambda=-1$，于是所求投影直线方程为

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y-2z-2=0 \end{cases}。$$

例 5 求过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的平面方程。

解 直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的一般方程为 $\begin{cases} \frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2} \\ \frac{x-4}{5}=\frac{z}{1} \end{cases}$，故设通过直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的平面束方程为 $\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\lambda(\frac{x-4}{5}-\frac{z}{1})=0$，将点 $(3,1,-2)$ 代入平面束方程得 $\lambda=\frac{11}{9}$，于是所求平面方程为 $(1+\frac{11}{9})\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}-\frac{11}{9}z=0$，即 $8x-9y-22z-59=0$。

点到直线的距离

例 设点 M_0 是空间直线 L 外一点，M 是直线 L 上一点，且直线的方向向量为 $\vec{S}$，则点 M_0 到直线 L 的距离 $d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{S}\right|}{\left|\vec{S}\right|}$。

证 以 $\overrightarrow{M_0M},\vec{S}$ 为邻边的平行四边形面积等于 $\left|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{S}\right|$，也等于 $\left|\vec{S}\right|d$，故结论成立。

例 求点 $M_0(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离。

解 先求直线上一定点 $M(x_1,y_1,z_1)$，令 $y_1=-1$，得 $\begin{cases} x_1-z_1=0 \\ 2x_1+z_1=3 \end{cases}$ 得 $M(1,-1,1)$，直线的方向向量

$$\vec{S}=(1,1,-1)\times(2,-1,1)=(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix})=(0,-3,-3);$$

$$\overrightarrow{M_0M}\times\vec{S}=(-2,0,-1)\times(0,-3,-3)=(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix})=(-3,-6,6);$$

故所求距离为 $d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{S}\right|}{\left|\vec{S}\right|}=\frac{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}}{\sqrt{0^2+(-3)^2+(-3)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$.