# 第七章 MaxMin方法

张炜
计算机科学与工程系



## 参考资料

《算法导论》
第26章
《计算机算法设计与分析》
第7章



## 提纲





## 7.1 Maximum Flow

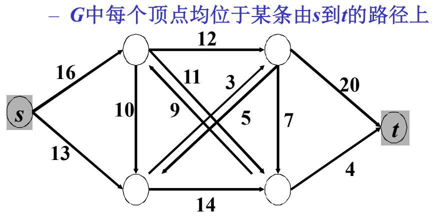




## 7.1.1 流网络与流

流网络

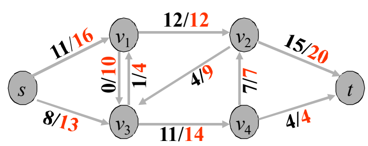
- 是一个有向图G=($V$,$E$)
- $\forall uv\in E$，容量$c(u,v)\geq 0$； 如果$uv\notin E$，则容量$c(u,v)=0$
- 两个特殊顶点$s$和$t$，$s$称为源(source)，$t$称为汇(sink)
- $G$中每个顶点均位于某条由$s$到$t$的路径上， 故$|E|\geq|V|-1$




交通流量网络
物流网络
信息流网络

流网络G=($V$,$E$)上的一个流

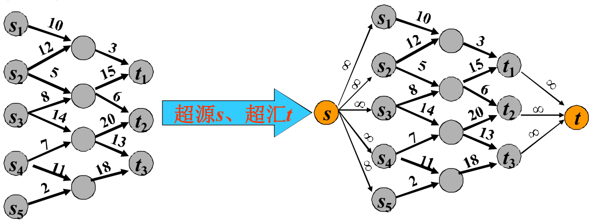
- 是一个实值函数$f$:$V\times V\rightarrow R$, 满足
  - 容量约束: $f(u,v)\leq c(u,v)$ 对$\forall uv\in E$成立
  - 反对称性: $f(u,v) = -f(v,u)$
  - 守恒约束: $\sum_{v\in V} f(u,v)$对任意$u\in V$-{$s$,$t$}成立
- $f(u,v)$称为顶点$u$到顶点$v$的流量,可为正、负、零值
- 流$f$的值定义为$|f| = \sum_{v\in V} f(s,v)$



## 守恒约束的其他表述形式

- 总正流量$\sum_{v\in V\ f(u,v)>0} f(u,v)$
- 总负流量$\sum_{v\in V\ f(u,v)<0} f(u,v)$
- 守恒约束等价于 总正流量＝－总负流量

多源多汇的网络流




只需讨论单源单汇的网络流

## 顶点集之间的流量

- 设$X,Y\subseteq V$　记$f(X,Y)=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} f(x,y)$
- 称$f(X,Y)$顶点集$X$和$Y$之间的流量
- 守恒约束等价于$f(u,V)=0$对$\forall u\in V\text{-}s\text{-}t$
- 上述表示经常用来简化网络流涉及的等式

引理1 设$f$是流网络$G=(V,E)$中的一个流，则

- $f(X,X)=0$　对$\forall X\subseteq V$成立
- $f(X,Y)=-f(Y,X)\ \forall X,Y\subseteq V$成立
- $\forall X,Y,Z\subseteq V$且$X\cap Y=\phi$，有
  - $f(X\cup Y,Z)=f(X,Z)+f(Y,Z)$
  - $f(Z,X\cup Y)=f(Z,X)+f(Z,Y)$

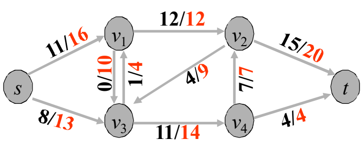
故，$|f|=f(s,V)\quad =f(V,V)-f(V\text{-}s,V)\quad =-f(V\text{-}s,V)\ =f(V,V\text{-}s)$
$=f(V,t)+f(V,V\text{-}s\text{-}t)$
$=f(V,t)$

HIT CS&E

## 最大流问题

给定流网络 $G=(V,E)$,其源为s，汇为$t$，找出从$s$ 到$t$ 的最大流.

- 怎样高效率地找?



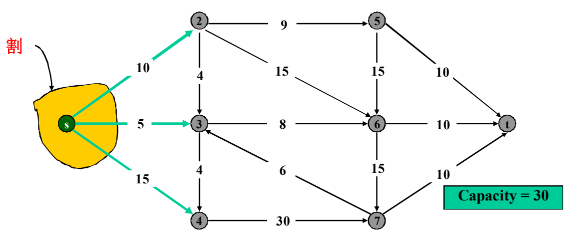

HIT CS&E

HIT CS&E

## 割

给定流网络 $G=(V,E)$,其源为s，汇为$t$

$G$的一个割(cut)是$V$的2-集合划分$S,T\,(T=V\text{-}S)$使得$s\in S, t\in T$



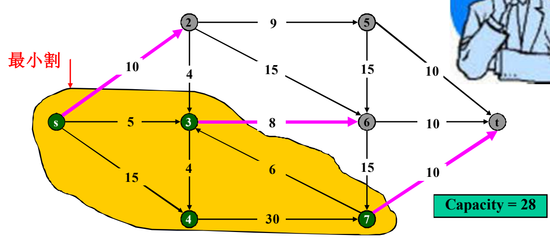

割的容量定义为 $c(S,T)=\sum_{u\in S,v\in T} c(u,v)$

HIT CS&E

## 最小割问题

给定流网络 $G=(V,E)$,其源为s，汇为$t$，找出流网络$G$中容量最小的割.

- 怎样高效率地找?



## 最大流－最小割间弱对偶关系

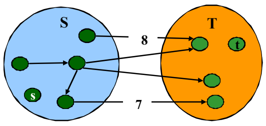
HIT CS&E

**引理2** 给定流网络 $G=(V,E)$，$s$是源，$t$是汇. 设$f$是$G$上的一个流，$S,T$是$G$的一个割，则$f(S,T)=|f|$.

证明: $f(S,T)=f(S,V)-f(S,S)$ 引理1第3部分
$=f(S,V)$ 引理1第1部分
$=f(s,V)+f(S-s,V)$ 引理1第3部分
$=f(s,V)$ $f(S-s,V)=0$
$=|f|$

**引理3** 给定流网络 $G=(V,E)$. 设$f$是$G$上的一个流，$S,T$是$G$的一个割，则$|f| \le c(S,T)$

$$|f| = f(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) \le \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) = c(S,T)$$

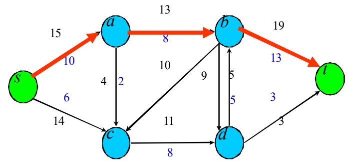



## 7.1.2 Ford-fulkerson方法

HIT CS&E

**算法的基本思想**

- 对于当前的流,…
- …能够找到一条从$s$到$t$的路径$p$ (增广路径)和正实数$a>0$, 使得$p$上的每条边$uv$的流量增加$a$之后仍然满足容量约束，即 $f(u,v)+a \le c(u,v)$
- 则将p上每条边的容量增加$a$，得到一个更大的流
- 你能发现如下网络中的增广路径吗?




$a$=5

## Ford-fulkerson算法概要

HIT CS&E

**算法Ford-Fulkerson($G,s,t$)**
**Input** 流网络$G$，源$s$，汇$t$
**Output** $G$中从$s$到$t$的最大流
1 初始化所有边的流量为0
2 **while** 存在增广路径$p$ **do**
3 沿路径$p$增大流量得到更大的流$f$
4 **return** $f$

- 增广路径如何找?
- 增广路径上可以增加的流量有多大?
- 该方法总能找到最大流吗?

## Residual Network

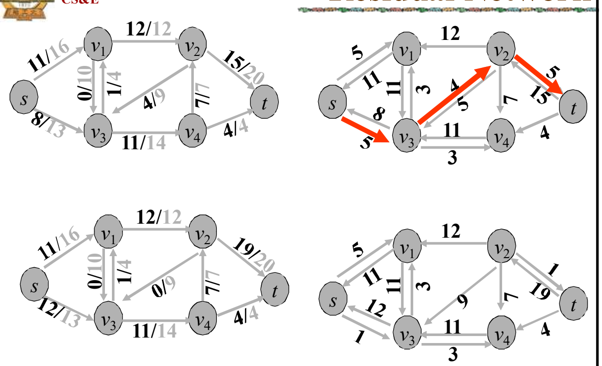
HIT CS&E

**增广路径如何找?**

- 增广路径是Residual network中从$s$到$t$的路径
  - Residual capacities: $c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$
  - Residual network: $G_f=(V,E_f)$, 其中
    $E_f=\{(u,v)\in V\times V \mid c_f(u,v)>0\}$
  - $f(u,v)<c(u,v)$, 则 $c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)>0$, $(u,v)\in E_f$
    $f(u,v)>0$ 则 $c_f(v,u)=c(v,u)-f(v,u)>0$, $(v,u)\in E_f$
    $c(u,v)=c(v,u)=0$, 则$f(u,v)=f(v,u)=0$, 进而 $c_f(u,v)=c_f(v,u)=0$
    注意: $E_f$中的边要么是$E$中的边，要么是$E$中边的反向边: $|E_f|\le 2|E|$
- Residual Network本身也可以看成是流网络

## Residual Network

HIT CS&E




HIT CS&E

**引理4** 给定流网络 $G=(V,E)$，$s$是源，$t$是汇；$f$是$G$上的一个流. $G_f$是流$f$在$G$上导出的Residual Network，$f'$是$G_f$上的一个流. 则$f+f'$是$G$上值为$|f|+|f'|$的流。
其中，$(f+f')(u,v)=f(u,v)+f'(u,v)$

证明: (作业)
(1)验证反对称性
(2)验证容量约束
(3)验证守恒约束
(4)验证$|f+f'|=|f|+|f'|$

HIT CS&E

## 增广路径的剩余容量

**增广路径上可以增大多少流量?**

- P是$G_f$中的一条增广路径
  - 其剩余容量$c_f(p) = \min\{c_f(u,v): (u,v)$ 是路径 $p$上的边$\}$
- 增广过程：对路径$p$上的每条边$uv$
  - 要么在边uv的流量上增加$c_f(p)$,即 $f(u,v)=f(u,v)+c_f(p)$
  - 要么在边vu的流量上减去$c_f(p)$, 即 $f(v,u)=f(v,u)-c_f(p)$
  - 具体属于哪种情况，根据$G$
- 增广过程完成后，得到值更大的流

HIT CS&E

## Ford-fulkerson算法

**算法Ford-Fulkerson($G,s,t$)**

**Input** 流网络$G$，源$s$，汇$t$

**Output** $G$中从$s$到$t$的最大流

1. For $\forall uv\in E[G]$ do
2. $f(u,v)\leftarrow 0$
3. $f(v,u)\leftarrow 0$
4. while $G_f$存在增广路径$p$ do
5. $c_f(p)=\min\{c_f(u,v)|\ uv$是$p$上的边$\}$
6. For $p$上的每条边$uv$ do
7. $f(u,v)\leftarrow f(u,v)+c_f(p)$
8. $f(v,u)\leftarrow -f(u,v)$

HIT CS&E

## Ford-fulkerson算法的正确性

**引理4** (最大流－最小割定理)给定流网络 $G=(V,E)$,$s$是源,$t$是汇;$f$是$G$上的一个流. 则下列论断等价。

(1)$f$是最大流;

(2)$G_f$中不存在增广路径

(3)对$G$的某个割$(S,T)$,$|f|=c(S,T)$

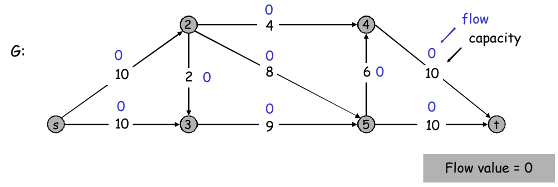
证明: (1)⇒(2) 反证. 设$p$是$G_f$是最大流$f$对应的增广路径，其剩余容量为$f_p$。由引理4知道，$f+f_p$是一个值比$|f|$的流. 这与f是最大流矛盾。

(2)⇒(3) 由于$G_f$中没有从$s$到$t$的路径，定义S={v:$G_f$中存在从$s$到$v$的路径}，$T=V-S$。显然$s\in S$且$t\in T$。$\forall u\in S$且$v\in T$，$f(u,v)=c(u,v)$，否则uv $\in E_f$进而导致v $\in S$。于是$S,T$是G的一个割。由引理3知道$|f| = f(S,T)=c(S,T)$

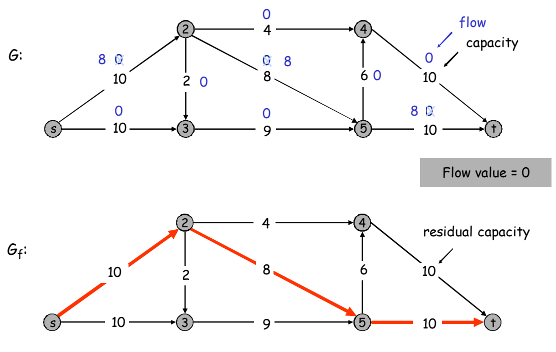
(3)⇒(1) 引理2表明$|f|\le c(S,T)$, 故$|f|=c(S,T)$表明f是最大流。

HIT CS&E

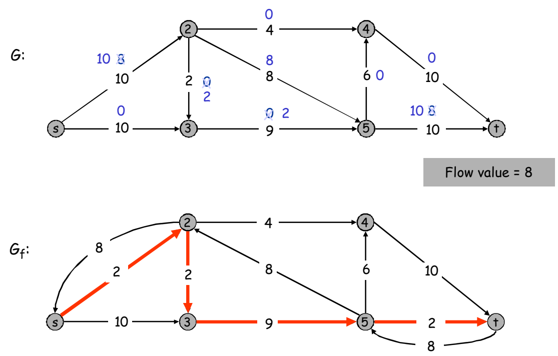
## 例

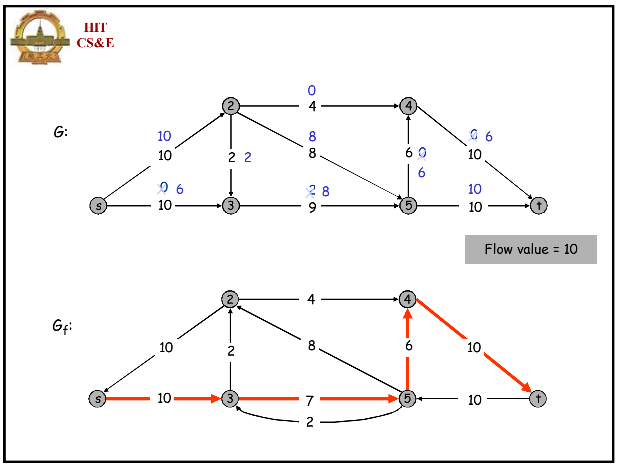


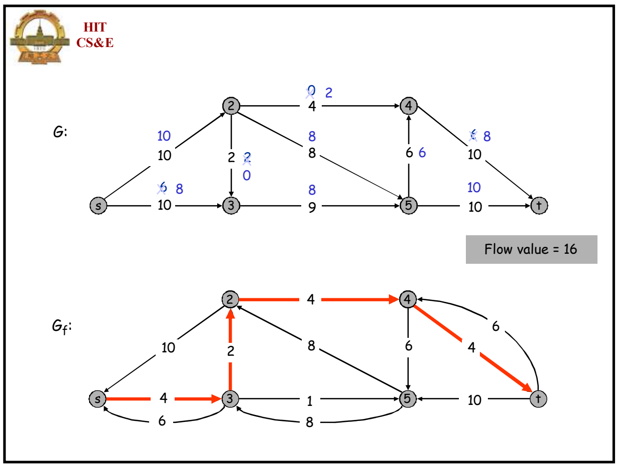

HIT CS&E

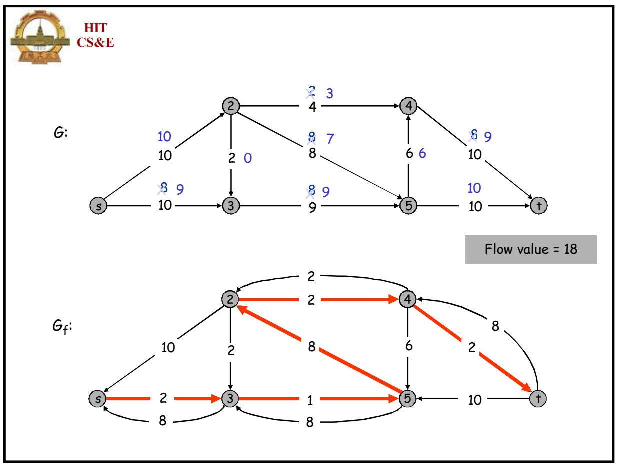


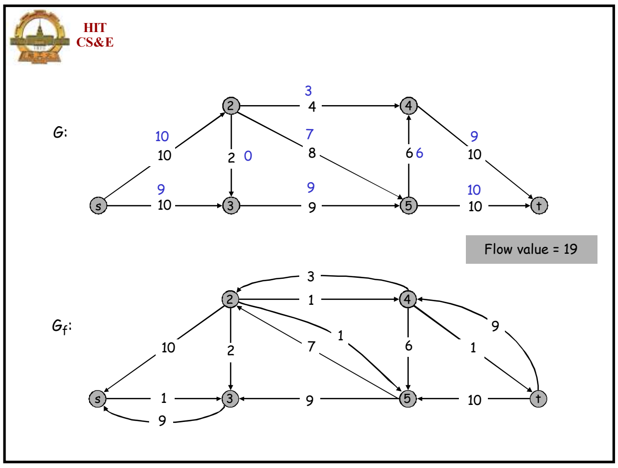

HIT CS&E

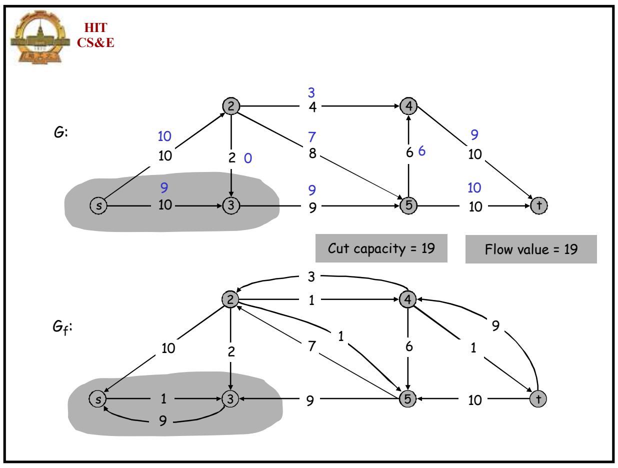





HIT
CS&E

## Ford-fulkerson算法的复杂性

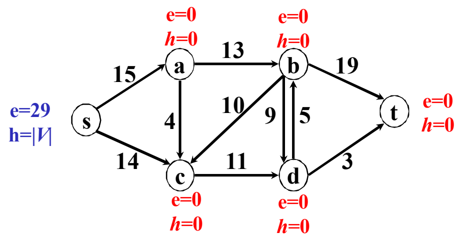
- Ford-Fulkerson算法的时间复杂度取决于增广路径的选择过程?
  - 如果实现方法不当，可能导致算法的长时间不停
  - 如果所有容量限制为整数（有理数可以先变换称整数）
    - While循环至多循环$|f^*|$次，因为每次循环均导致$|f|$增大
    - 维护$G'=(V,E')$, $E'=\{uv|\ uv\in E$或$vu\in E\}$；$G_f$的边为G'中满足c(u,v)-f(u,v)≠0的边
    - 使用BFS或DFS查找增广路径的时间为$O(V+E')=O(E)$
  - 算法的时间复杂度为$O(|f^*|E)$
  - 如果算法用BFS选择增广路径(Edmonds-Karp算法)
    - 可以证明算法的时间复杂度为$O(VE^2)$

## 7.1.4 推送复标算法

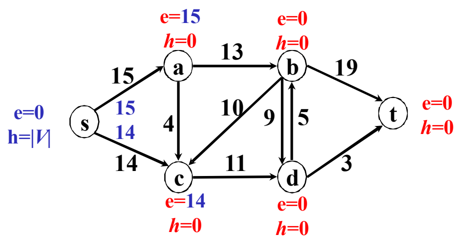
- Ford-Fulkson算法
  - ✓ 构造剩余网络
  - ✓ 选取s-t增广路径来增大流值
  - ✓ 具有全局优化的观点
- 能否只考虑顶点的局部情况
  - ✓ 逐个顶点查看
  - ✓ 仅查看其邻接点
  - ✓ 确定流值的变化

## 基本思想

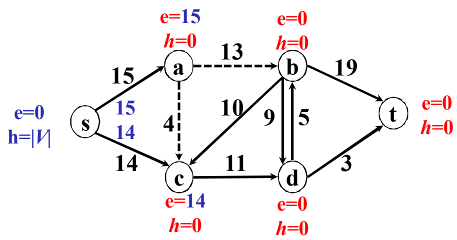
- 将流网络看成管道网络
  - ✓ 顶点具有库存能力，$s.e=\sum_{su\in E}c(uv)$， $u.e=0$
  - ✓ 顶点具有不同高度，$s.h=|V|$，$u.h=0$
  - ✓ 液体将怎么流动？




- 将流网络看成管道网络
  - ✓ 顶点具有库存能力，$s.e=\sum_{su\in E}c(uv)$， $u.e=0$
  - ✓ 顶点具有不同高度，$s.h=|V|$，$u.h=0$
  - ✓ 从高度较高的顶点流向高度较低的顶点




- a有库存，但a的高度可能流动顶点高度一样
  - ✓ 修改高度（复标高度）
  - ✓ 确保流可以继续流动
  - ✓ 如何修改a的高度？

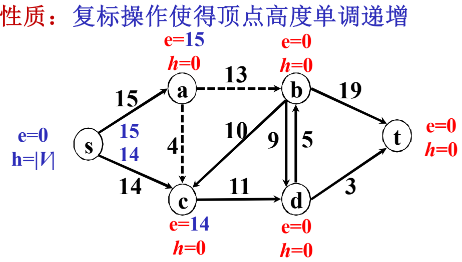



## 复标操作

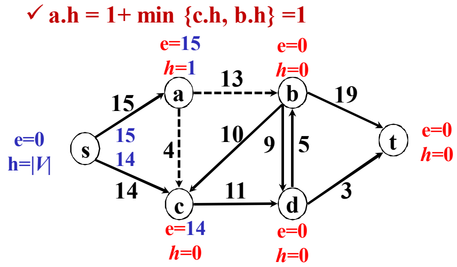
- $u$有库存，但$u$的高度与可能流动顶点高度一样
  - ✓ $u.e>0$
  - ✓ $uv\in E_f$ ($c(uv)-uv.f>0$,剩余网络边), $u.h\le v.h$

操作：$u.h = 1+\min\{v.h: uv\in E_f\}$

性质：复标操作使得顶点高度单调递增

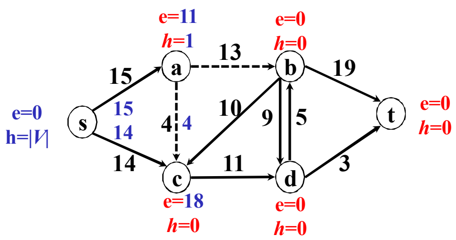



- a有库存，但a的高度与其他顶点高度一样
  - ✓ 修改高度（复标高度）
  - ✓ 确保流可以继续流动
  - ✓ a.h = 1+ min {c.h, b.h} =1



HIT
CS&E

- a有库存可以向c流动4




HIT
CS&E

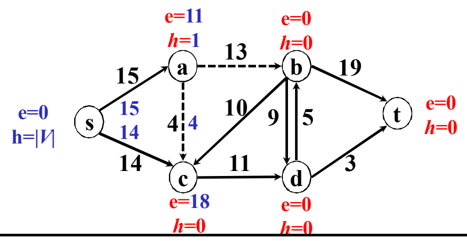
## 推送操作

- u的库存可向其相邻顶点流动，则将库存推送至此
  $u.e$>0, $u.h = v.h + 1$ 且 $c(uv)-uv.f>0$

操作：1.If $uv \in E$ Then $uv.f = uv.f + \min\{u.e, c(uv)-uv.f\}$

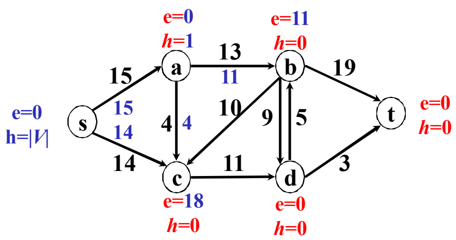
2.Else $vu.f = vu.f - \min\{u.e, c(uv)-uv.f\}$

3.$u.e = u.e - \Delta_f$, $v.e = v.e + \Delta_f$




HIT
CS&E

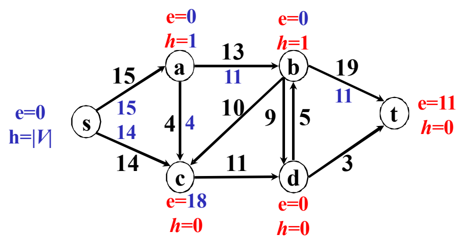
- Push(a,b)还可以将11推送到b
- 推送操作完成后，如果c(uv)-f(uv)=0,则称饱和推送
- 性质：非饱和推送完成后，$u.e$=0




HIT
CS&E

Relabel (b)

Push(b,t)还可以将11推送到t



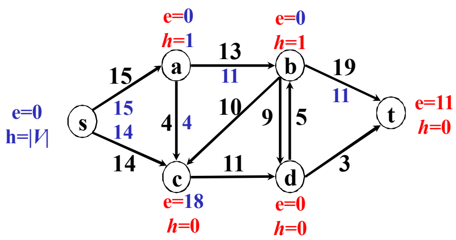

HIT
CS&E

## 推送复标算法

While (推送或复标操作可行)

执行推送或复标操作

/*算法停止吗，怎么办？*/




HIT
CS&E

## 推送复标算法

初始化： u.e=0; u.h=0; uv.f=0 $\forall u \in V, uv \in E$

s.e= - $\sum_{sv \in E} c(sv)$, $s.h=|V|$

$sv.f=c(sv)$, v.e = c(sv) $\forall sv \in E$

While (推送或复标操作可行)

执行推送或复标操作

## 推送复标算法的分析

定义1. 给定$s$-$t$流网络$G=(V,E)$, $c: E\to R^+$,

(1) 映射$f: V\times V\to R^+$称为一个预流，如果

$\sum_{v\in V} f(vu) - \sum_{v\in V} f(uv) \geq 0 \quad u\in V-\{s\}$

(2) $u.e = \sum_{v\in V} f(vu) - \sum_{v\in V} f(uv)$称为u的超额流

(3)如果$u\in V-\{s,t\}$且$u.e>0$,则称u为溢出顶点

(4)如果$c(uv)-f(uv)>0$, 则称$uv$为剩余边，记$uv\in E_f$

定义2. 给定$s$-$t$流网络$G=(V,E)$, $c: E\to R^+$,和一个预流$f$, 函数$h:V\to N_0$称为一个高度函数，如果

$h(s)=|V|,\quad h(t)=0,\quad h(u)\leq h(v)+1 \quad uv\in E_f$

引理1. (1)对于高度函数h和预流f，如果$h(u)>h(v)+1$ ,则uv不是剩余边，即$uv\notin E_f$

(2)推送复标算法初始化得到一个预流和一个高度函数。

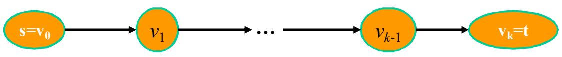
(3)给定在预流f和其上的一个高度函数，则执行推送操作仍得到一个预流f'。复标高度仍得到一个高度函数。

(4)在$uv$上执行非饱和推送后，$u.e=0$;

(5)复标操作使得顶点高度单调递增;

(6)推送复标算法不改变$s$和$t$的高度

引理2.给定$s$-$t$流网络$G=(V,E)$, 对于任意预流$f$及其上的高度函数h，在剩余网络$(V,E_f)$中不存在$s$到$t$的路径。

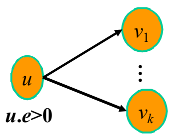



$|V|=h(v_0)\leq h(v_1)+1 \quad h(v_1)\leq h(v_2)+1 \ \ldots \ h(v_{k-1})\leq h(v_k)+1 \quad h(v_k)=0$

$|V|=h(s)\leq h(v_k)+k = k$

路径长度大于顶点个数,矛盾

引理3.给定$s$-$t$流网络$G=(V,E)$, 对于任意预流$f$及其上的高度函数h。如果$u.e>0$，则要么推送操作可行，要么复标操作可行。




$h(u)\leq h(v_1)+1$, $c(uv_1)-f(uv)>0$

$h(u)\leq h(v_k)+1$, $c(uv_1)-f(uv)>0$

若推送操作不可行，则$h(u)=h(v_i)+1$对任意$v_i$不成立，即

$h(u)<h(v_i)+1$对任意$v_i$成立，即复标操作可行

引理4.如果推送算法终止，则最后的预流是最大流。

初始化：算法初始化是预流

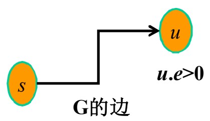
循环 ：每次推送操作或复标操作后，仍是预流

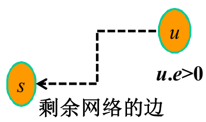
终止 ：算法结束后得到一个预流$f$

由引理3，此时$u.e=0$对任意$u\neq s,t$成立， 故$f$是流

由引理2，剩余网络中不存在s-t路径， 由最大流最小割定理，$f$是最大流

引理5.给定$s$-$t$流网络$G=(V,E)$, 对于任意预流$f$及其上的高度函数h。如果$u.e>0$，则在剩余网络中存在u-s路径。



HIT
CS&E

**引理6.** 给定*s-t*流网络$G=(V,E)$, 则对于任意顶点u，在推送复标算法运行过程的任意时刻，$h(u)\le 2|V|-1$.

若$u=s$, 则$h(s)=|V|$不变，结论成立
若$u=t$, 则$h(t)=0$不变，结论成立
若$u\ne s,t$,初始时，$h(u)=0$
对$u$的每次复标操作时(u.e>0)，由引理5，剩余网络中存在u-s路径$u=u_0,u_1,\dots,u_k=s$

$u \rightarrow u_1 \rightarrow \cdots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow u_k=s$

$h(u)\le h(u_1)+1$ $h(u_1)\le h(u_2)+1$ … $h(u_{k-1})\le h(u_k)+1$ $h(u_k)=|V|$

$h(u)\le h(s)+k\le 2|V|-1$, $k\le |V|-1$

---

HIT
CS&E

**引理7.** 给定*s-t*流网络$G=(V,E)$, 则推送复标算法在G上至多执行$(2|V|-1)(|V|-1)\le 2|V|^2$次复标操作。

若$s,t$上永远不执行复标操作

对于其余每个顶点$u$（共|V|-1个顶点）
$h(u)$的初始值为0
每次复标使得$h(u)$增大，且引理6表明$h(u)\le 2|V|-1$
故在u上至多执行2|V|-1次复标操作

---

HIT
CS&E

**引理8.** 给定*s-t*流网络$G=(V,E)$, 则推送复标算法在G上至多执行$2|V||E|$次饱和推送操作。

$\forall u,v\in V$，考察$u$和$v$之间饱和推送的总次数
- 从$u$到$v$的饱和推送
- 从$v$到$u$的饱和推送
- $uv\in E$或$vu\in E$ 顶点对的个数$\le|E|$

饱和推送: $u \xrightarrow{c(uv)=f(uv)} v$, $h(u)-1=h(v)$

下一次同向推送前: $u \xrightarrow{c(uv)<f(uv)} v$, $h(u)+1=h(v)$

$h(u)$至少增大2
$0\le h(u)\le 2|V|-1$

•从$u$到$v$的饱和推送至多|V|次
•同理，从$v$到$u$的饱和推送至多|V|次

---

**引理9.** 给定*s-t*流网络$G=(V,E)$, 则推送复标算法在G上至多执行$4|V|^2(|V|+|E|)$次非饱和推送操作。

定义$\varphi=\sum_{u.e>0}h(u)$ 初始时，$\varphi=0$且$\varphi\ge 0$恒成立
复标顶点u使得其高度增加，导致φ增大
顶点u上的所有复标操作，导致φ增大总量$\le 2|V|-1$
所有复标操作导致φ的总增量$\le 2|V|^2$

饱和推送: $u \xrightarrow{c(uv)=f(uv)} v$, $h(u)-1=h(v)$
推送前：u.e>0, v.e=0或v.e>0
推送后：u.e=0或u.e>0 v.e>0
每次饱和推送导致φ的增量≤2|V|
所有饱和推送导致φ的增量≤2|V|.2|V||E|

非饱和推送: $u \xrightarrow{c(uv)<f(uv)} v$, $h(u)+1=h(v)$
推送前：u.e>0, v.e=0或v.e>0
推送后：u.e=0 v.e>0
每次非饱和推送导致φ至少减小1

由于φ≥0恒成立，总增量≥总减量

---

HIT
CS&E

**定理10.** 给定*s-t*流网络$G=(V,E)$, 则推送复标算法在G上至多执行$O(|V|^2|E|)$次基本操作后终止。

由引理7，算法至多执行$2|V|^2$次复标操作
由引理8，算法至多执行$2|V||E|$次饱和推送操作
由引理9，算法至多执行$4|V|^2(|V|+|E|)$次非饱和推送操作

---

HIT
CS&E

## 7.1.5前置复标算法

推送复标算法
- 以不确定的顺序选择推送、复标顶点
- 对每个顶点的处理不彻底
  - ✓ 对u的推送或复标操作后，u.e>0
  - ✓ 可能转而处理其他顶点
- 时间复杂性$O(V^2E)$

提高算法性能的着手点
- 如果精细选择推送、复标操作顺序
- 对每个顶点进行彻底处理，处理后u.e=0

HIT CS&E

## DisCharge操作

彻底处理顶点$u$

- $u.e>0$, 则要么推送操作可行，要么复标操作可行
- 重复在$u$顶点处进行推送或复标操作，直到$u.e=0$
- 仅需考察$u$的相邻顶点
- 对$u$维护的邻接链表$L(u)$　　$v\in L(u) \Leftrightarrow uv\in E$或$vu\in E$

*DisCharge*($u$)
　While　$u.e>0$
　　v ← L(u).current　　　/*考察当前处理的顶点*/
　　If　v = Null　Then　ReLabel($u$), L(u).current=L(u).head
　　ElseIf　c(uv)-f(uv)>0　且 u.h=v.h+1　Then　Push(u)
　　Else　L(u).current ← L(u).next

---

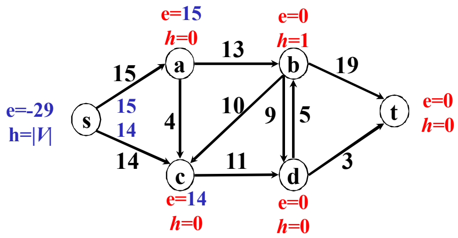
### 考虑初始化操作之后DisCharge($c$)的执行过程

L($c$):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| s | a | b | d | Null |

v=s≠Null，　　　　不执行复标操作

c(cs)-f(cs) = 0-(-14) =14 但c.h≠s.h+1 不执行Push




---

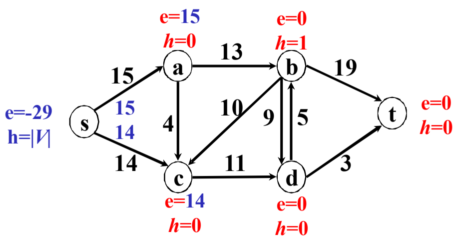
### 考虑初始化操作之后DisCharge($c$)的执行过程

L($c$):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| s | a | b | d | Null |

v=a≠Null，　　　　不执行复标操作

c(ca)-f(ca) = 0-0 =0　不执行推送操作




---

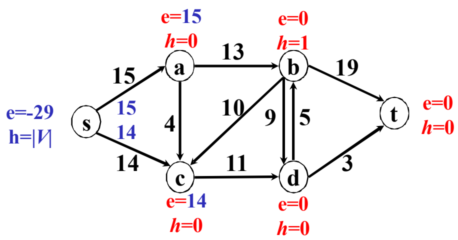
### 考虑初始化操作之后DisCharge($c$)的执行过程

L($c$):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| s | a | b | d | Null |

v=b≠Null，　　　　不执行复标操作

c(cb)-f(cb) = 0-0 =0　不执行推送操作




---

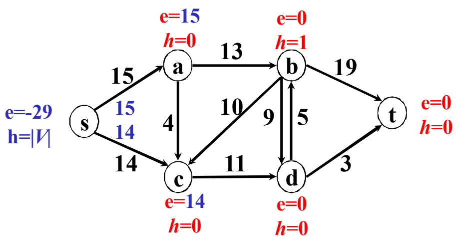
### 考虑初始化操作之后DisCharge($c$)的执行过程

L($c$):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| s | a | b | d | Null |

v=d≠Null，　　　　不执行复标操作

c(cd)-f(cd) =11 但 c.h≠d.h+1　不执行推送操作



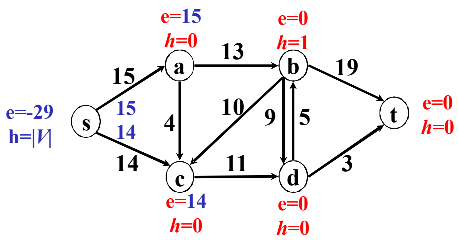

---

### 考虑初始化操作之后DisCharge($c$)的执行过程

L($c$):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| s | a | b | d | Null |

v=Null，　　　　执行复标操作

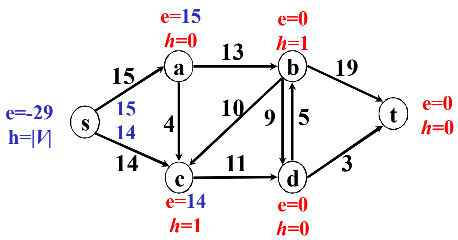


## 考虑初始化操作之后DisCharge(*c*)的执行过程

L(*c*):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| s | a | b | d | Null |

v=Null，　　执行复标操作



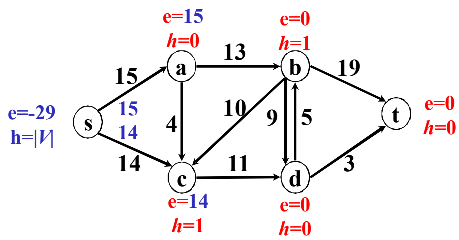

## 考虑初始化操作之后DisCharge(*c*)的执行过程

L(*c*):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| s | a | b | d | Null |

v=s≠Null，　　不执行复标操作

c(cs)-f(cs) = 0-(-14) =14 但c.h≠s.h+1 不执行Push



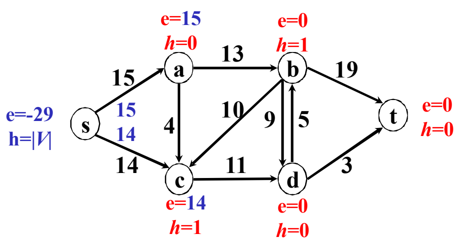

## 考虑初始化操作之后DisCharge(*c*)的执行过程

L(*c*):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| s | a | b | d | Null |

v=a≠Null，　　不执行复标操作

c(ca)-f(ca) = 0-0 =0　不执行推送操作



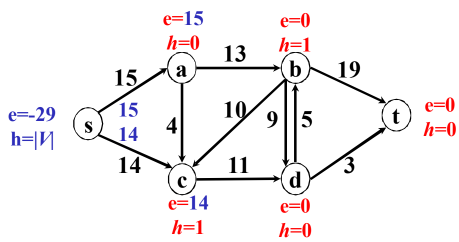

## 考虑初始化操作之后DisCharge(*c*)的执行过程

L(*c*):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| s | a | b | d | Null |

v=b≠Null，　　不执行复标操作

c(cb)-f(cb) = 0-0 =0　不执行推送操作



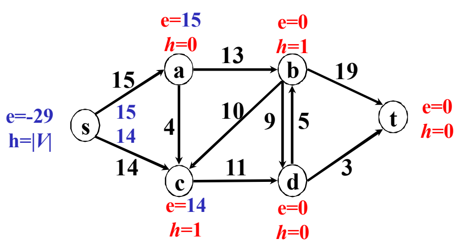

## 考虑初始化操作之后DisCharge(*c*)的执行过程

L(*c*):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| s | a | b | d | Null |

v=d≠Null，　　不执行复标操作

c(cd)-f(cd) =11 且 c.h=d.h+1　执行Push操作



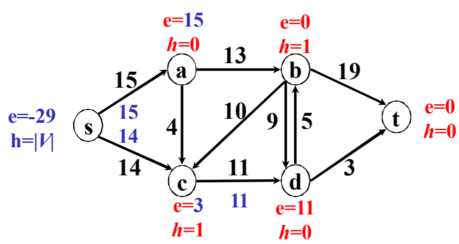

## 考虑初始化操作之后DisCharge(*c*)的执行过程

L(*c*):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| s | a | b | d | Null |

v=d≠Null，　　不执行复标操作

c(cd)-f(cd) =11 且 c.h=d.h+1　执行Push操作

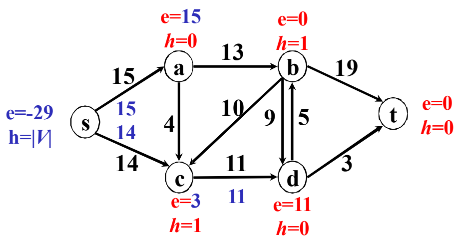


## 考虑初始化操作之后DisCharge(*c*)的执行过程

L(*c*): | s | a | b | d | Null |

v=Null， 执行复标操作

c.h = 1+ min {v.h | c(cv)-f(cv)>0 } = |V|+1

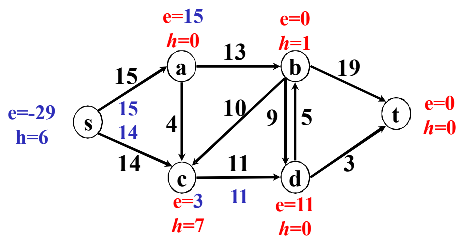



## 考虑初始化操作之后DisCharge(*c*)的执行过程

L(*c*): | s | a | b | d | Null |

v=Null， 执行复标操作

c.h = 1+ min {v.h | c(cv)-f(cv)>0 } = |V|+1

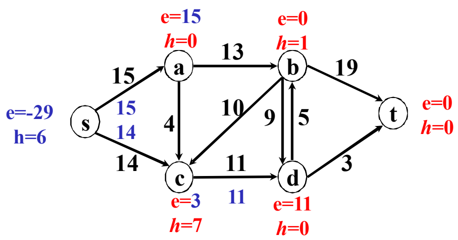



## 考虑初始化操作之后DisCharge(*c*)的执行过程

L(*c*): | s | a | b | d | Null |

v=s≠Null， 不执行复标操作

c(cs)-f(cs)=14且 c.h = c.s+ 1 执行Push

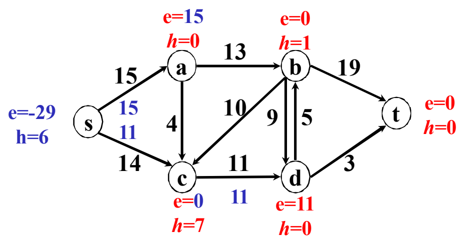



## 考虑初始化操作之后DisCharge(*c*)的执行过程

L(*c*): | s | a | b | d | Null |

v=s≠Null， 不执行复标操作

c(cs)-f(cs)=14且 c.h = c.s+ 1 执行Push




HIT CS&E

## 前置复标算法

顶点链表B $u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_{n-2} \to$ *Null*

邻接链表L $L(u_1)$ $L(u_2)$ $L(u_{n-2})$

依次处理*B*中的每个顶点*u*

- 处理过程即调用DisCharge操作使得*u.e*=0
- 处理后将*u*前置于*B*的开始位置
- 然后顺序处理下一个顶点

到达B的结束位置，则u.e=0对所有顶点成立

即得到最大流

$u_1.e=0$ $u_2.e=0$ $u_{n-2}.e=0$

$u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_{n-2} \to$ *Null*

$L(u_1)$ $L(u_2)$ $L(u_{n-2})$

HIT CS&E

## 前置复标算法

初始化： u.e=0; u.h=0; uv.f=0 ∀u∈V, uv ∈E

s.e= - $\sum_{sv\in E} c(sv)$， *s.h*=|*V*|

*sv.f*=*c*(*sv*), v.e = c(sv) ∀*sv*∈*E*

创建链表B管理V-{s,t}的所有顶点

L(v)←v的相邻顶点链表

L(v).current ← L(v).head

1. *u* ←*B*.head
2. While *u*≠NULL
3. oldHeight ←u.h
- DisCharge(u);
- If u.h>oldHeight then 将*u*前置到*B*的前端

6. u ←u.next

## 前置复标算法分析

引理1.前置复标算法终止后，则最后的预流是最大流。

初始化：算法初始化是预流
循环 ：每次推送操作或复标操作后，仍是预流
终止 ：算法结束后得到一个预流$f$

算法结束后$u.e$=0对任意u≠s,t成立， 故$f$是流

类似与推送复标算法，可以证明剩余网络中不存在s-t路径， 由最大流最小割定理，$f$是最大流

## 前置复标算法分析

引理2.前置复标算法在$O(V^3)$个基本操作之后必然终止。

前置复标算法是推送复标操作的特例
- 至多执行$2V^2$个复标操作
- 至多执行$2VE$个饱和推送操作
- 只需限定非饱和推送的个数

非饱和推送操作个数 ≤ DisCharge执行次数
每次非饱和推送执行后，u.e=0, DisCharge操作结束

考察执行复标操作的两个DisCharge操作之间
- 算法不改变任意顶点的高度,故算法顺序扫描B中顶点
- 算法顺序处理链表B中的一个连续区段
- 该区段的长度不超过B的总长度V-2

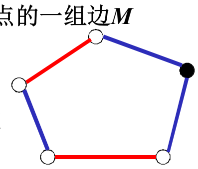
非饱和推送至多执行$2V^2 \cdot (V\text{-}2) < V^3$个

## 7.2 匹配算法

7.2.1 匹配与覆盖
7.2.2 最大二分匹配算法
7.2.3 最大权值二分匹配

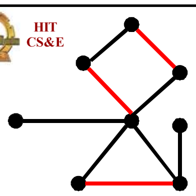
## 7.2.1 覆盖与匹配

匹配——图$G=(V,E)$中没有公共端点的一组边$M$
- 匹配边——$M$中的边
- 自由边——$E/M$中的边
- 被浸润的顶点——$M$中边的端点
- 未被浸润的顶点——其他顶点

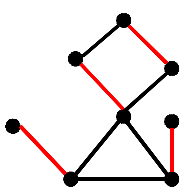


完美匹配——浸润$G$的每个顶点的匹配
最大匹配——边的条数达到最大值的匹配
性质：完美匹配是最大匹配，反之不然

最大匹配问题
输入：图$G=(V,E)$
输出：$G$的最大匹配$M$

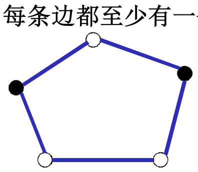


最大匹配
非完美匹配



最大匹配
完美匹配

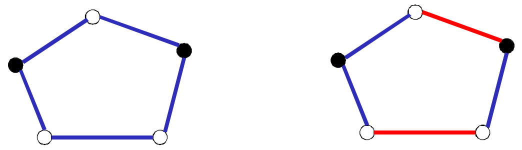
顶点覆盖——图$G=(V,E)$中的一个顶点子集C
$E$中每条边都至少有一个端点在$C$中



最小顶点覆盖——$G$的顶点个数最少的覆盖

最小顶点覆盖问题
输入：图$G=(V,E)$
输出：G的最小顶点覆盖

## 弱对偶性



若$C$是图$G$的任意顶点覆盖，$M$是图$G$的任意匹配

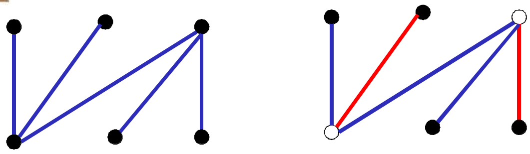
- ◆$M$中每条边都至少有一个端点在$C$中
- ◆$M$中任意两条边不存在公共端点

故$|M|\le|C|$

定理:图$G$的最小顶点覆盖$C$和最大匹配$M$满足$|M|\le|C|$

在二分图$G$中,$|M|=|C|$





若$C$是图$G$的任意顶点覆盖，$M$是图$G$的任意匹配

- ◆$M$中每条边都至少有一个端点在$C$中
- ◆$M$中任意两条边不存在公共端点

故$|M|\le|C|$

定理:图$G$的最小顶点覆盖$C$和最大匹配$M$满足$|M|\le|C|$

在二分图$G$中,$|M|=|C|$

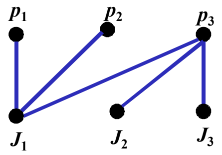


## 研究匹配算法的意义

工作分配

输入：$n$个人$p_1,\ldots,p_n$, $n$项工作$J_1,\ldots,J_n$, 第$i$个人胜任其中$k$项工作

输出：是否存在工作分配方案使得每个人完成1项自己胜任的工作




计算节点　　实习单位

计算任务　　实习人员

目前，大规模图数据管理已经非常盛行

很多高效算法都以匹配算法或覆盖算法为基础!



## 7.2.2 最大二分匹配算法

定理:图$G$的最小顶点覆盖$C$和最大匹配$M$满足$|M|\le|C|$

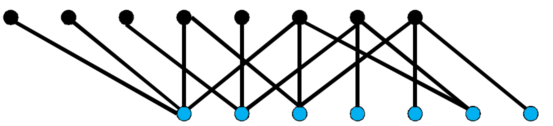
在二分图$G$中,$|M|=|C|$

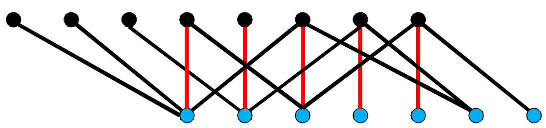
这意味着二分图上的最大匹配可以这样求解

- ◆初始化一个匹配$M$
- ◆不断地增大$M$
- ◆$M$无法增大时，找出一个顶点覆盖$C$使得$|M|=|C|$
- ◆$M$是最大匹配，$C$是最小覆盖



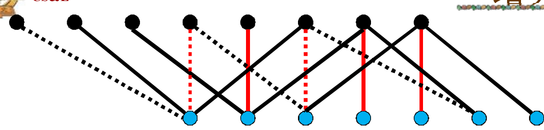
## 初始化





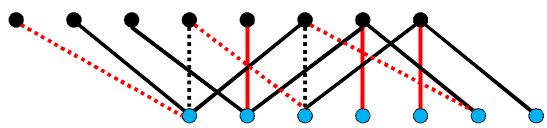


## 增大



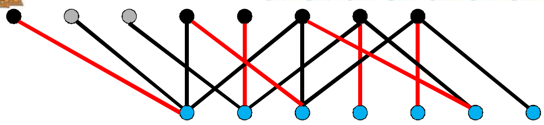
$M$交错路径：边交替出现在$M$和$E$-$M$的路径

$M$增广路径：端点未被$M$浸润的交错路径



找出增广路径，就能增大$M$！怎么找呢？

## 通过BFS找增广路径

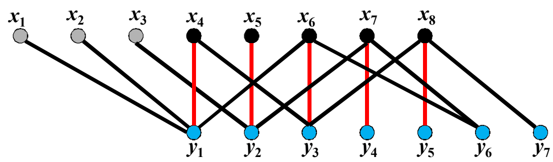


**1.*U*←*X*中未被*M*浸润的所有顶点**
**2.For ∀*x*∈*U* do**
**如果存在从*x*出发的*M*增广路径，则增大*M***
**Goto 1**
**3.*M*是最大匹配**

能够以更高效的方式进行广度优先搜索呢？

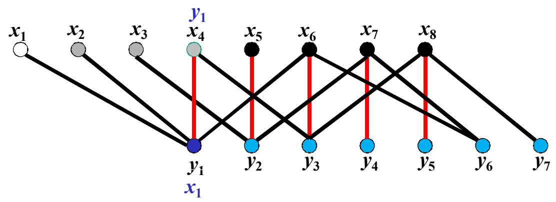
HIT CS&E

## 同时进行BFS



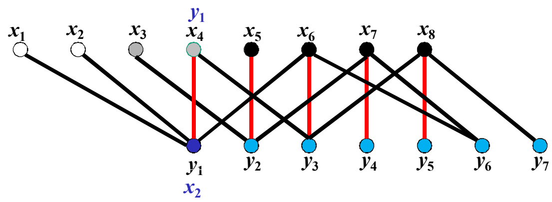

HIT CS&E

## 同时进行BFS



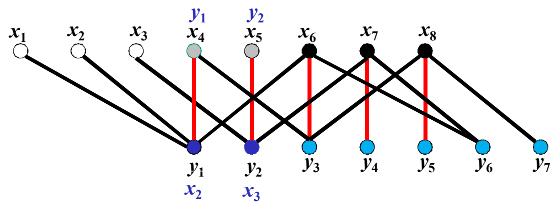

HIT CS&E

## 同时进行BFS



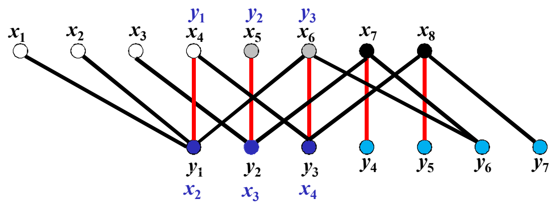

HIT CS&E

## 同时进行BFS



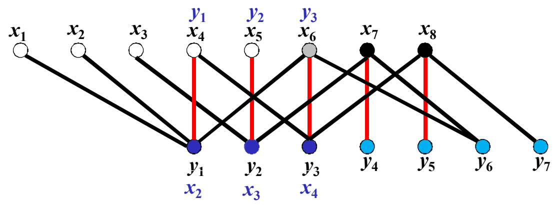

HIT CS&E

## 同时进行BFS



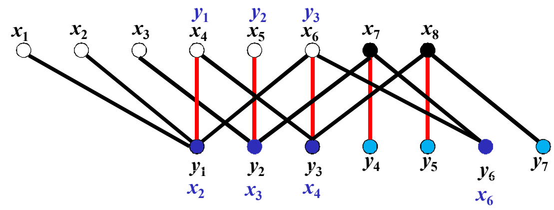
HIT CS&E

## 同时进行BFS



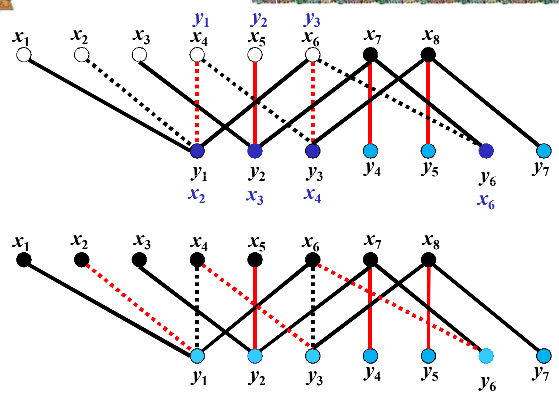

HIT CS&E

## 同时进行BFS



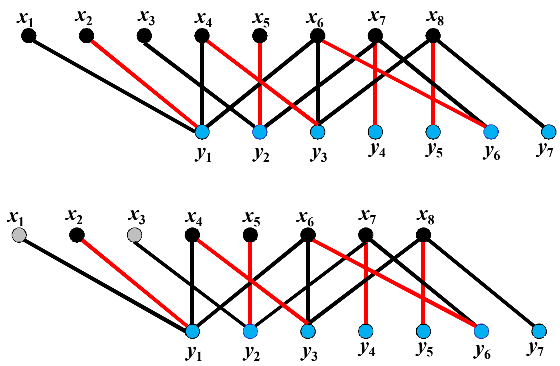

HIT CS&E

## 同时进行BFS



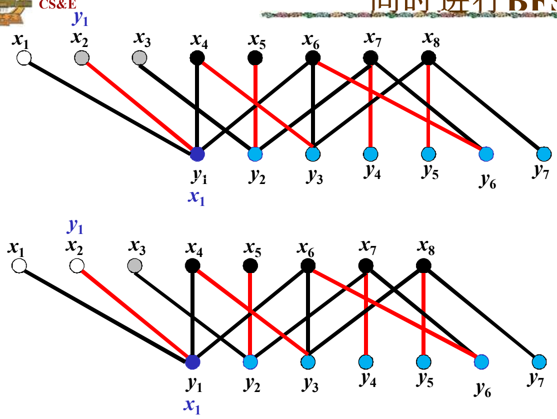

HIT CS&E

## 同时进行BFS



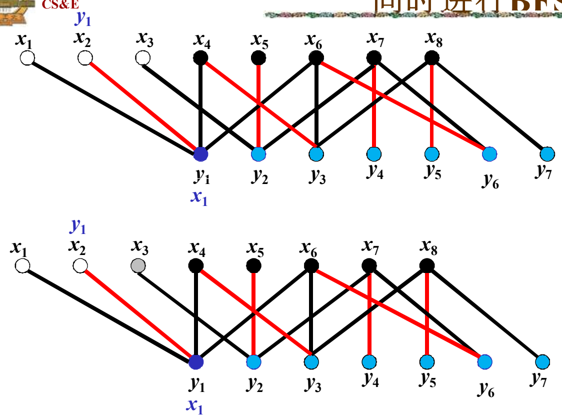

HIT CS&E

## 同时进行BFS

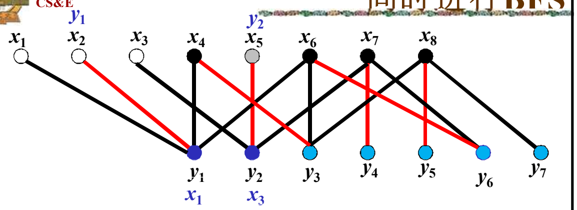


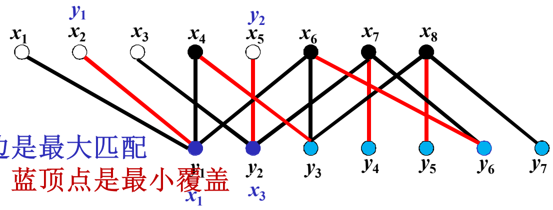

HIT CS&E

## 同时进行BFS



## 同时进行BFS




红边是最大匹配

黑、蓝顶点是最小覆盖

## 二分匹配的增广路径算法

输入：二分图$G=(X\cup Y,E)$

输出：$G$的最大匹配和最小覆盖

时间复杂度$O(|V||E|)$

1.$M\leftarrow\varnothing$;　IsInc←true

2.While　IsInc　do

3.　U←未被$M$浸润的所有顶点；IsInc←false;

4.　S←$U$，$T\leftarrow\varnothing$；　　//$S$记录灰、白顶点，$T$记录蓝顶点

5.　While　$S$中存在灰顶点$x$　do

6.　　For　$\forall(x,y)\in E-M$　do

7.　　　If　$\exists(w,y)\in M$　Then

8.　　　　$T\leftarrow T\cup\{y\}$,记录$y$由$x$到达

9.　　　　$S\leftarrow S\cup\{w\}$，记录$w$由$y$到达

10.　　　else

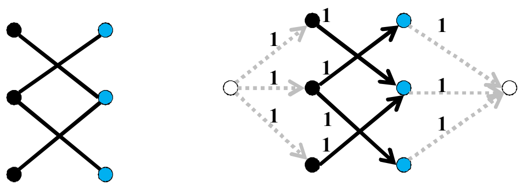
11.　　　　由$y$回溯得到一条增广路径，并用它增大$M$

12.　　　　IsInc ←true; Goto第2步；

13.　　标记$x$为白色；　　//从$x$的BFS结束

14. 输出M为最大匹配，输出T∪(X-S)为最小覆盖

## 最大二分匹配的另一种算法

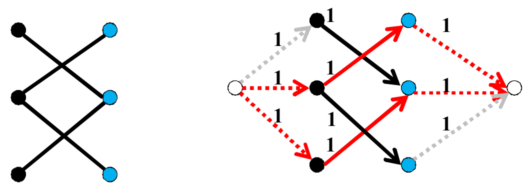



将$G=(V,E)$中每条边定向为从$X$到$Y$并定义容量1

添加虚拟源s,和s到X中各个顶点的有向边，容量为1

添加虚拟汇t,和Y中各顶点到t的有向边，容量为1

## 基于最大流的最大二分匹配算法

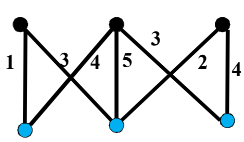



$f$是新图上的最大流

当且仅当

$E$中流量大于0的边构成$G$的最大匹配$M$

## 7.2.3最大权值二分匹配




计算结点

◆边上的权值表示计算效率

◆最大匹配就是计算效率最高的计算任务分配方案

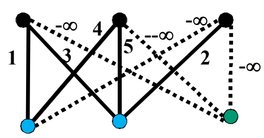
计算任务

匹配$M$的权值c($M$):$M$中各条边的权值之和

最大权值二分匹配问题

输入：加权二分图$G=(X\cup Y,E)$，$w:E\to R$

输出：$G$上的最大权值二分匹配$M$

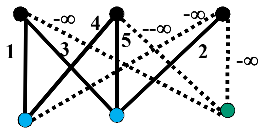



最大权值二分匹配问题

输入：加权完全二分图$G=(X\cup Y,E)$，$w:E\to R$

输出：$G$上的最大权值二分匹配$M$

HIT CS&E

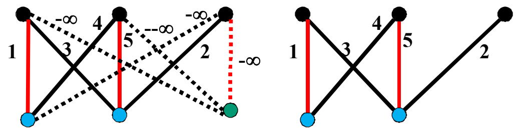



最大权值二分匹配问题

输入：加权完全二分图$K_{n,n}$, $w:E\to R$

输出：$G$上的最大权值二分匹配$M$

HIT CS&E



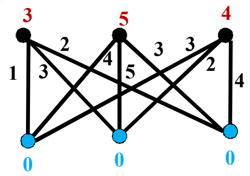

最大权值二分匹配问题

输入：加权完全二分图$K_{n,n}$, $w:E\to R$

输出：$G$上的最大权值二分匹配$M$

HIT CS&E

## 最大权值顶点覆盖




加权$K_{n,n}$的顶点覆盖

- ◆两个$n$维实值向量$u,v$
- ◆$u_i+v_j \geq w_{ij}$

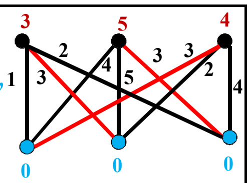
最大权值顶点覆盖问题

输入：加权二分图$K_{n,n}$, $w:E\to R$

输出：分量之和达到最小值的顶点覆盖

## 对偶关系

任意完美匹配$M$，任意覆盖$u,v$




$$u_i+v_j\geq w_{ij}$$

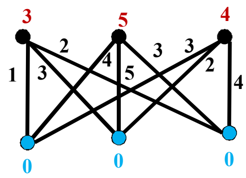
$$\Sigma u_i+\Sigma v_j\geq \Sigma w_{ij}$$

$$c(u,v)\geq c(M)$$

定理：在加权$K_{n,n}$上，任意完美匹配$M$和任意顶点覆盖$u,v$比满足$c(M)\leq c(u,v)$，并且$M$是最大权值匹配当且仅当$c(M)=c(u,v)$，此时$M$中的每条边$ij$均满足$u_i+v_j=w_{ij}$

## 对偶关系给出了问题的求解思路

初始化顶点覆盖$u,v$



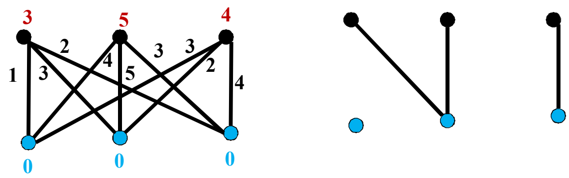

判断$\{ij: u_i+v_j=w_{ij}\}$中能否找出完美匹配$M$

若是，则$M$是最大匹配，$u,v$是最小覆盖

否则，调整$u,v$

HIT CS&E

## 初始化




$u_i\leftarrow\max\{w_{ij}\}$

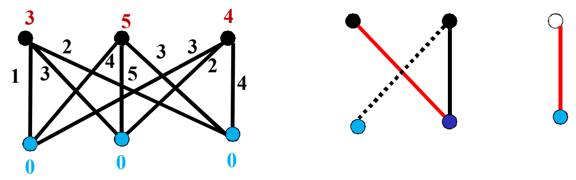
$v_j \leftarrow 0$

相等子图

仅含$u_i+v_j= w_{ij}$的所有边

HIT CS&E

## 初始化



$u_i \leftarrow \max\{w_{ij}\}$

$v_j \leftarrow 0$

红边：最大匹配

蓝、白顶点：最小覆盖

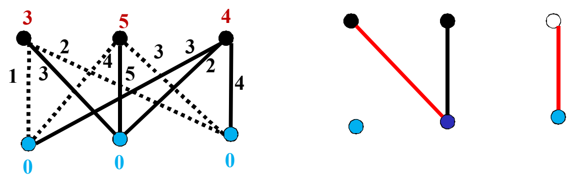
调整端点不在最小覆盖中的边，让它出现在相等子图中

---

HIT CS&E

## 调整覆盖u,v

ε=2



$\varepsilon \leftarrow u_i+v_j-w_{ij}$ $i,j$不在当前最小覆盖中

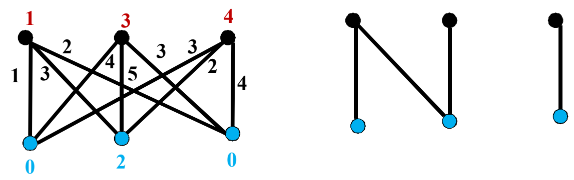
$u_i \leftarrow u_i-\varepsilon$ $i$不在当前最小覆盖中

$v_j \leftarrow v_j+\varepsilon$ $j$在当前最小覆盖中

---

HIT CS&E

ε=2



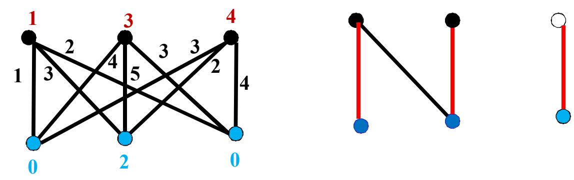
$\varepsilon \leftarrow u_i+v_j-w_{ij}$ $i,j$不在当前最小覆盖中

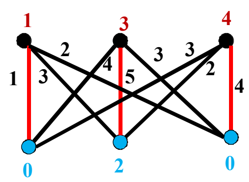
$u_i \leftarrow u_i-\varepsilon$ $i$不在当前最小覆盖中

$v_j \leftarrow v_j+\varepsilon$ $j$在当前最小覆盖中

---

HIT CS&E





---

HIT CS&E

## 加权最大二分匹配算法

输入：加权完全二分图$K_{n,n}$，边$ij$的权值为$w_{ij}$

输出：$K_{n,n}$加权最大匹配和最小覆盖

时间复杂度$O(n^5)$

1.For $i \leftarrow 1$ To $n$

2. $u_i \leftarrow \max\{w_{ij}\}$; $v_i \leftarrow 0$;

3.While true do

至多循环$n^2$次

4. 构建由$\{ij: u_i+v_j=w_{ij}\}$构成的相等子图$G_{u,v}$;

5. 找到的最大匹配$M$和最小顶点覆盖$C$;

6. If $|M|=n$ Then 输出$M$，算法结束

7. Else

8. $\varepsilon \leftarrow \min\{u_i+v_j-w_{ij}$: $x_i,y_j$不属于C}

9. $u_i \leftarrow u_i-\varepsilon$ 任意$x_i$不属于C

10. $v_j \leftarrow v_j+\varepsilon$ 任意$y_j$属于C

$O(n^3)$

循环不变量：u,v是加权顶点覆盖

第3-10步每执行$n$遍，$|M|$至少增大1

---

HIT CS&E

补充阅读材料

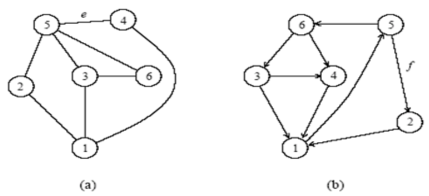
HIT CS&E

## 7.1 图及其表示法

– 无向图$G$是二元组$(V,E)$，其中$V$是顶点集合，$E$是边集
– 边$e \in E$是一个无序顶点对$(u,v)$,其中$u,v \in V$
– 在有向图中，边$e \in E$是一个有序顶点对$(u,v)$，并称边$(u,v)$是由顶点$u$指向顶点
– 顶点u到顶点v的一条路径是一个顶点序列 $<v_0,v_1,v_2,\ldots,v_k>$ ,其中$v_0 = v$, $v_k = u$且 $(v_i, v_{i+1}) \in E$ 对 $i = 0, 1,\ldots, k\text{-}1$成立
– 路径的长度定义为路径中边的条数

HIT CS&E

## 例




a) 无向图　　(b) 有向图

HIT CS&E

• 无向图是连通的，如果其任意两个顶点之间均有一条路径

• 森林指的是无环图，树是连通的森林.

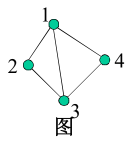
• 如果图的每条边均有一个权值与之关联，则称该图为加权图.

HIT CS&E

## 图的表示

给定图 $G = (V,E)$ 如何在计算机内存储它?

1. 邻接矩阵:顶点$i$表示为矩阵的第$i$行和第$i$列; 矩阵第$i$行第$j$列的元素被置为1(或者相应边的权值)，如果$(i,j) \in E$;否则置为0
2. 邻接表: 顶点作为数组的索引，每个顶点用一个链表存储与之邻接的所有顶点




图

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 0 |

图的邻接矩阵

1 → 2 3 4
2 → 1 3
3 → 1 2 4
4 → 1 3

图的邻接表

HIT CS&E

## 表示方法的比较

给定图 $G = (V,E)$, $|V|=n$,$|E|=m$?

1. 存储空间
   邻接矩阵:$\Theta(n^2)$　　邻接表: $\Theta(m+n)$
2. 查看给定顶点的所有相邻顶点
   邻接矩阵:$\Theta(n)$　　邻接表: $\Theta(m/n)$
• 检查给定的顶点对是否是$G$的一条边
   邻接矩阵:$\Theta(1)$　　邻接表: $\Theta(m/n)$

–具体采用何种数据结构，看具体的任务主要涉及何种操作
–稀疏图往往采用邻接表存储

HIT CS&E

## 7.2 基本图论算法

7.2.1 广度优先搜索
7.2.2 深度优先搜索
7.2.3 拓扑排序
7.2.4 连通分支

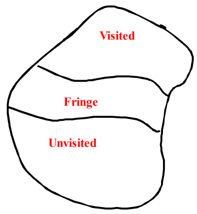
HIT CS&E

## 搜索算法

- 访问图中边访问所有顶点的系统化方法
- 可以发现图的很多结构信息
- 很多其他图论算法均是这些基本搜索算法的精细化结果
- 图的搜索算法是图论算法的核心

HIT CS&E

## 图搜索算法中的三类顶点



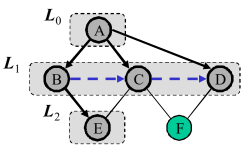

搜索过程中，顶点集可以看成如下3个部分的并集

- 已访问顶点：已被算法处理过的顶点.
- 边缘顶点　：马上将被访问的顶点.
- 未访问顶点：仍未被算法处理过的顶点

❖DFS算法用栈存储边缘顶点，而BFS算法用队列存储边缘顶点

HIT CS&E

## 6.2.1 广度优先搜索BFS




HIT CS&E

- Breadth-first search (BFS)是遍历图的一个一般技术
- BFS遍历图 $G$，可以
  - 访问 $G$ 的所有边和顶点
  - 确定 $G$ 是否连通
  - 计算 $G$ 的所有连通分支
  - 计算 $G$ 的生成森林
- BFS遍历具有 $n$ 个顶点和 $m$ 条边的图 $G$ 的时间复杂性为 $O(n+m)$
- BFS可以扩展以解决其他图论问题
  - 找出两个顶点间具有最少边数的路径
  - 找出图中的简单环，如果存在的话

HIT

## BFS算法

- 该算法通过不断标记顶点和边，访问所有顶点和边，并划分边集合

**算法 $BFS(G)$**

**Input** 图 $G$

**Output** 标记并划分G的边

1. for each $u \in V_G$
   将 $u$ 标记为 *unvisited*
2. for each $e \in E_G$
   将 $e$ 标记为 *UNEXPLORED*
3. for each $v \in V_G$
   if $v$ 的标签是 *unvisited*
   $BFS(G, v)$

**算法 $BFS(G, s)$**

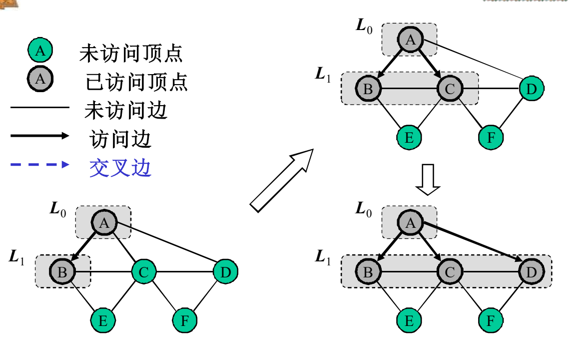
**Input** 图 $G$，出发顶点 $s$

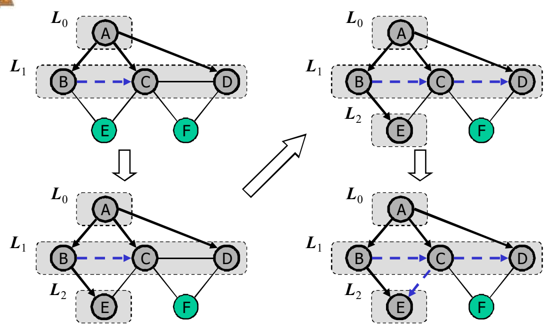
**Output** 将 $s$ 所在连通分支的边标记为三类

$L_0 \leftarrow$ 空队列
将 $s$ 插入 $L_0$
将 $s$ 标记为 *VISITED*
$i \leftarrow 0$
while $L_i$ 不空
  $L_{i+1} \leftarrow$ 空队列
  for each $v \in L_i$
    for each $(v,u) \in E_G$
      if $(v,u)$ 的标签是 *UNEXPLORED*
        if $u$ 的标签是 *unvisited*
          将 $(v,u)$ 标记是 *DISCOVERY*
          将 $u$ 标记为 *visited*
          将u插入 $L_{i+1}$
        else
          将 $(v,u)$ 标记为 *CROSS*
  $i \leftarrow i+1$

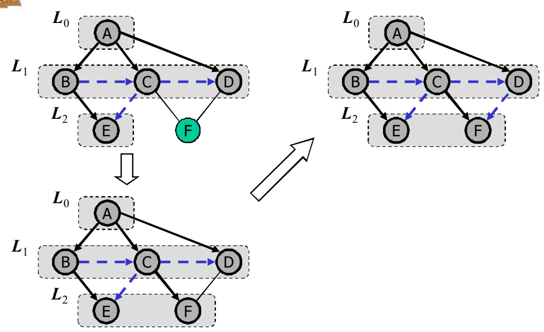
HIT CS&E

## 例










## BFS算法的性质

记号

$G_s$: 顶点$s$所在的连通分支

**Property 1**

$BFS(G, s)$ 访问 $G_s$中的所有边和顶点

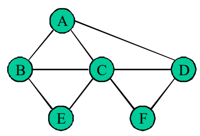
**Property 2**

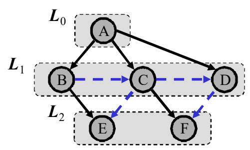
$BFS(G, s)$ 找出的所有发现边构成$G_s$的一棵生成树$T_s$

**Property 3**

对任意 $v \in L_i$

- 在$T_s$ 中，$s$到 $v$的路径有 $i$条边
- 在$G_s$中， $s$ 到 $v$的任意路径至少有 $i$ 条边



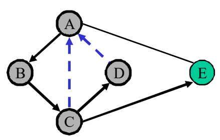



## BFS算法分析

- 标记和获取顶点或边的时间开销为$O(1)$
- 每个顶点被标记两次
  - 一次将其标记为unvisited
  - 一次将其标记为visited
- 每条边被标记两次
  - 一次将其标记为UNEXPLORED
  - 一次将其标记为DISCOVERY 或 CROSS
- 每个顶点仅被唯一地插入某个$L_i$
- 查找顶点的邻边仅被每个顶点调用一次　第8步
- 只要图是以邻接表存储的，BFS的运行时间为$O(n + m)$
  - 注意 $\sum_v \deg(v) = 2m$



## 6.2.2 深度优先搜索DFS






- **Depth-first search (DFS)是遍历图的一个一般技术**
- **DFS遍历图 $G$，可以**
  - 访问$G$的所有边和顶点
  - 确定$G$是否连通
  - 计算$G$的所有连通分支
  - 计算$G$的生成森林
- **DFS遍历具有$n$个顶点和$m$条边的图$G$的时间复杂性为O($n$+$m$)**
- **DFS可以扩展以解决其他图论问题**
  - 找出两个顶点间的路径
  - 找出图中的简单环，如果存在的话

HIT

DFS算法

• 该算法通过不断标记顶点和边，访问所有顶点和边，并划分边集合

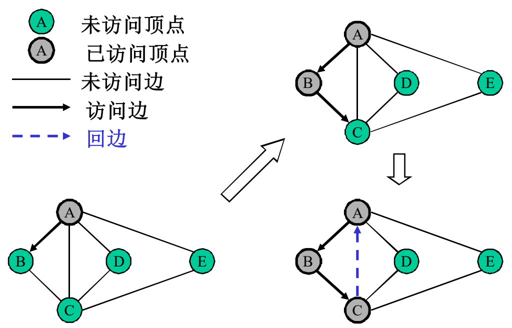
**算法** $DFS(G)$
**Input** 图 $G$
**Output** 标记并划分G的边
1.for each $u \in V_G$
  将$u$标记为*unvisited*
2. for each $e \in E_G$
  将$e$标记为*UNEXPLORED*
3. for each $v \in V_G$
  if $v$的标签是*unvisited*
    *Recursive_DFS*$(G, v)$

**算法***Recursive_DFS*$(G, s)$
**Input** 图$G$，出发顶点$s$
**Output** 将$s$所在连通分支的边标记为两类
1. 将$s$标记为 *VISITED*
2. for each $(s,u) \in E_G$
3.   if $(s,u)$ 的标签是*UNEXPLORED*
4.     if $u$的标签是 *unvisited*
5.       将$(s,u)$标记是*DISCOVERY*
6.       将$u$标记为 *visited*
7.       *Recursive_DFS*$(G, u)$
8.     else
9.       将$(s,u)$标记为*Back*

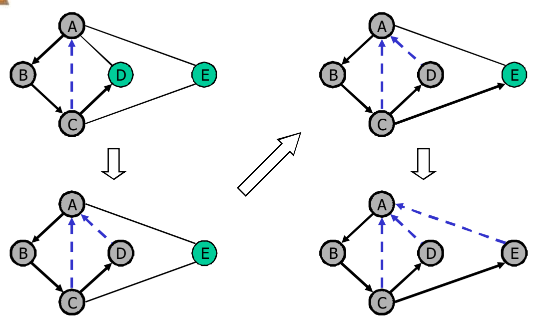
很容易将上述算法改为栈的形式

HIT
CS&E

例

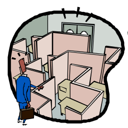



HIT
CS&E

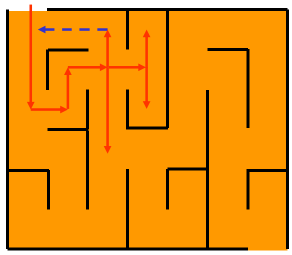



HIT
CS&E

DFS与迷宫



• DFS算法很像走迷宫的经典策略
  – We mark each intersection, corner and dead end (vertex) visited
  – We mark each corridor (edge ) traversed
  – We keep track of the path back to the entrance (start vertex) by means of a rope (recursion stack)



HIT
CS&E

DFS算法的性质

**Property 1**

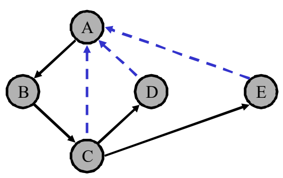
*DFS*$(G, v)$ 访问 $v$所在连通分支的所有顶点和边

**Property 2**

*DFS*$(G, v)$找出的所有发现边构成$v$所在连通分支的生成树

**Property 3**

有向图$G$是一个无环图当且仅当$G$上的DFS过程没有回边




HIT
CS&E

DFS算法分析

• 标记和获取顶点或边的时间开销为$O(1)$
• 每个顶点被标记两次
  – 一次将其标记为unvisited
  – 一次将其标记为visited
• 每条边被标记两次
  – 一次将其标记为UNEXPLORED
  – 一次将其标记为DISCOVERY 或 BACK
• 查找顶点的邻边仅被每个顶点调用一次 第2步
• 只要图是以邻接表存储的，BFS的运行时间为$O(n + m)$
  – 注意 $\sum_v \deg(v) = 2m$

## 作业

分别修改BFS和DFS以完成以下任务

1. 确定$G$是否连通
2. 计算$G$的所有连通分支
3. 计算$G$的生成森林
4. 找出两个顶点间的路径
5. 找出图中的简单环，如果存在的话

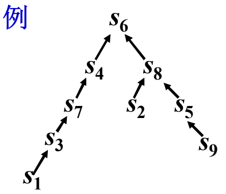


## 7.2.3 拓扑排序



## 偏序集合的拓扑排序

- 拓扑排序
  - 输入: 偏序集合$(S, \leq)$
  - 输出: $S$的拓扑序列是$<s_1, s_2, \ldots, s_n>$,
    满足: 如果$s_i \leq s_j$, 则$s_i$排在$s_j$的前面.
  - 例



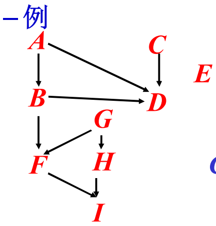

拓朴排序:

$s_1$ $s_3$ $s_7$ $s_4$ $s_9$ $s_5$ $s_2$ $s_8$ $s_6$

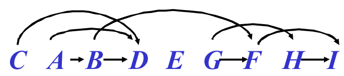


## 有向图的拓扑排序

- 拓朴排序
  - 输入: 无环有向图$G=(V,E)$
  - 输出:$G$的所有顶点的一个拓扑排序
    即,如果$uv \in E$,则u在该排序中位于v之前
  - 例




拓朴排序:



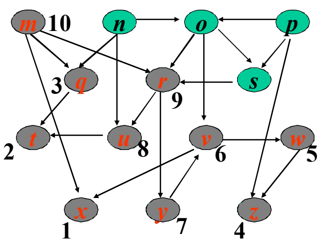



## 有向图的拓扑排序算法

算法 TOPOLOGICAL_SORT($G$)
**Input** 无环有向图$G=(V,E)$
**Output** G的s所有顶点的拓扑排序
1.初始化空链表$L$
2.调用DFS算法计算每个顶点$v$的结束时间$f(v)$
3. 当$v$的结束时间$f(v)$被计算出来时，将$v$插入$L$的最前端
3. 链表L中的顶点顺序即为一个拓朴序



## 例




m r u y v w z q t x

## 算法分析

**定理** 对无环有向图G, TOPOLOGICAL_SORT(G) 得到G的一个拓朴排序

证明：仅需证明，如果$uv\in E$则$f(v)<f(u)$。

考虑$uv$被DFS访问的时刻，$v$要么已被访问完（$f(v)$已被计算出来），要么$v$仍未被访问过，否则将出现环。

对于第一种情况，显然有$f(v)<f(u)$。

对于第二种情况，v是u的后代，DFS算法必然会先结束对v的访问，故$f(v)<f(u)$。

时间复杂度分析

即DFS的时间复杂度，O(|V|+|E|)

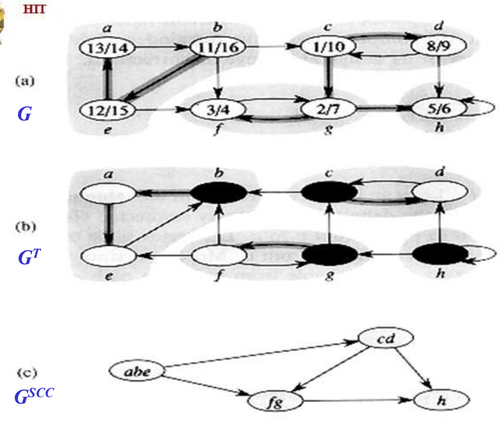
## 7.2.4 有向图的强连通分枝分解

- 将有向图分解为强连通分枝是DFS的一个经典应用
- 许多应用需要将有向图分解为强连通分枝，然后再对每个强连通分枝应用某种操作或算法
- 给定有向图$G=(V,E)$, G的一个强连通分枝指的是一个极大集$C\subseteq V$使得$\forall u,v\in E$均有$u\leftrightarrow v$。
- 将有向图$G=(V,E)$的所有边反向后得到的图成为$G$的转置，记为$G^T$
  - 若G以邻接矩阵$A$给出，$G^T$的邻接矩阵即为$A^T$
  - 若G以邻接表给出，请给出一个算法计算$G^T$的邻接表

---

- 注意，G的转置和G具有相同的连通分枝
- G的连通分枝图$G^{SCC}=(V^{SCC},E^{SCC})$定义如下:
  - G的每个连通分枝对应$V^{SCC}$中的一个顶点
  - $x,y\in V^{SCC}$, 如果x对应连通分枝到y对应的连通分枝在G中有一条有向边，则$(x,y)\in E^{SCC}$
- 连通分枝分解算法的分析依赖于$G^{SCC}$的一些性质

## 例




## 强连通分枝分解算法

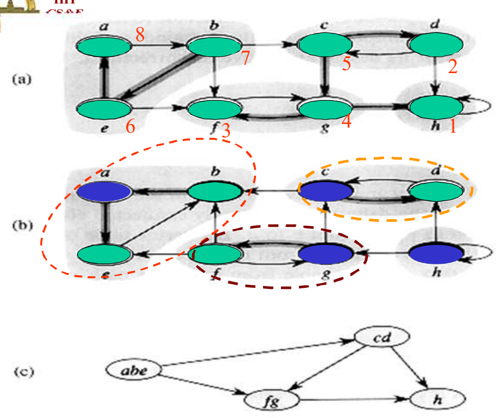
**算法** STONGLY_CONNECT_COMPONENTS($G$)

**Input** 无环有向图$G=(V,E)$

**Output** G的强连通分枝分解

1. 在$G$上调用DFS计算每个顶点$v$的结束时间$f(v)$
2. 计算$G^T$
3. do
4. 在$G^T$的剩余顶点中，从最大$f(v)$对应的顶点开始进行DFS访问
5. 如果当前访问顶点没有未被访问过的边，则输出当前访问过的顶点作为一个连通分枝
6. while($G^T$仍有顶点未被访问)

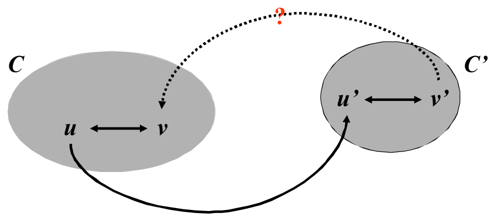
## 例



HIT
CS&E

## 算法分析

引理1　设 $C$和 $C'$是有向图$G=(V, E)$中两个不同的连通分枝，且 $u, v\in C$, $u', v'\in C'$。如果$u\rightarrow u'$ 则$v'\rightarrow v$不成立




HIT
CS&E

- 将DFS算法首次进入顶点$u$的时间的$d(u)$和结束对$u$的访问的时间$f(u)$扩展到集合上，有

$$d[U]=\min_{u\in U}\{d[u]\} \qquad f[U]=\max_{u\in U}\{f[u]\}$$

- 引理2　设 $C$和 $C'$是有向图 $G=(V, E)$的两个不同连通分枝且存在$(u, v)\in E$,其中 $u\in C$ 且$v\in C'$. 则 $f(C)>f(C')$.

证明：分两种情况讨论

(1)$d(C)<d(C')$。设$x\in C$为第一个被发现的顶点，则$d[x]=d(C)$。$d[x]$时，$C$中其他顶点和$C'$中所有顶点都是白色的。对任意的$w\in C'$，由$x\rightarrow u\rightarrow v\rightarrow w$，知$f(x)>f(w)$。所以，$f(C)>f(C')$。

(2)$d(C)>d(C')$。设$y\in C'$为第一个被发现的顶点，则$d[y]=d(C')$。$d[y]$时，$C'$中其他顶点都是白色的，因此$f(C')=f[y]$。由于$C'$中任一点都不可达$C$（否则的话$C\cup C'$强连通）。故$f(C)>f(C')$。

推论3 设 $C$ 和$C'$是有向图 $G=(V, E)$中的两个不同的连通分枝. 如

果$(u, v)\in E^T$,其中$u\in C$且 $v\in C'$.则 $f(C)<f(C')$.

证明: $(u, v)\in E^T \Leftrightarrow (v, u)\in E$; 由引理2即可得到结论。

推论3意味着什么？

如果u的f(u)最大且u∈C 则从u出发DFS不能访问到其他分枝

除非结束对C的访问后再重新指定DFS的出发点

定理 算法STONGLY_CONNECTED_COMPONENTS(G)能够正确计算有向图$G=(V, E)$ 所有连通分枝.

证明: 根据推论3对连通分枝数量做数学归纳法。自己下来书写!

时间复杂度 $O(|V|+|E|)$

两遍DFS，外加一个计算$G^T$的时间开销

HIT
CS&E

## 7.3 最小生成树算法

参见第五章，贪心算法

HIT
CS&E

## 7.3 单源最短路径算法

- 问题的定义
- 单源最短路径的子结构性质
- Bellman-Ford算法
- Dijkstra算法

HIT
CS&E

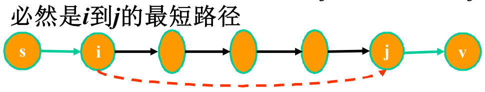
## 单源最短路径问题

- 给定加权图或不加权的图 G, 找出给定的源顶点s到目标顶点v的最短路径
  - 在给定的网络拓扑下，最小化路由代价.
  - 最小化基因-基因反应中的能量开销.
  - 最小化代价是许多实际问题中的基本要素
- 在加权图中
  - “最短路径” = 权值最小的路径
  - 路径的权值等于路径上所有边的权值之和
  - 不能用BFS来求解该问题
- 在不加权图中
  - “最短路径” = 边数最少的路径
  - 可以用BFS在O(V+E)的时间内找出源顶点到目标顶点的最短路径.

## 最短路径的特征-优化子结构

**优化子结构:最短路径包含了最短子路径**

设$s$到$v$的最短路径$P$经过顶点$i$和$j$，则$P$上从$i$到$j$的部分必然是$i$到$j$的最短路径



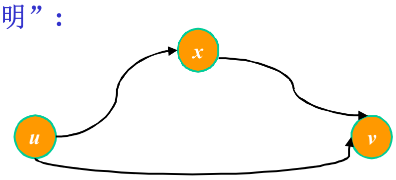

证明: 如果子路径 $(i, j)$ 不是顶点$i$到顶点$j$的最短路径，则

- 在$i$和$j$之间必然存在一条更短的路径(红色路径)
- 用这条更短的子路径替换原来的子路径
- 得到一条比原路径更短的路径.
- 矛盾.

## 最短路径的特征-三角不等式

- 定义$\delta(u,v)$为从$u$到$v$的最短路径的代价(长度)
- 最短路径代价满足三角不等式

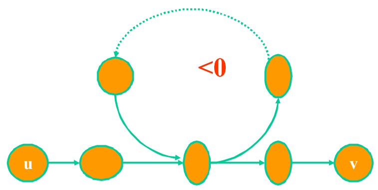
  $\delta(u,v) \le \delta(u,x) + \delta(x,v)$
- "证明"：




最短路径不比其他任何路径长

## 最短路径的特征-环

- $u$到$v$的最短路径上能存在环吗?



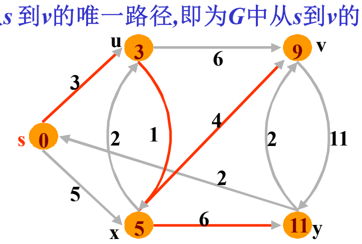

- 负环

  如果$u$到$v$的最短路径上能存在负环，则定义$\delta(u,v)=-\infty$

## 最短路径的特征-最短路径树

最短路径树包含图G中从s出发可达的所有顶点

- 形成一棵以 $s$为根的树.
- 在这棵树中从$s$ 到$v$的唯一路径,即为$G$中从$s$到$v$的最短路径.




最短路径的存储

$\pi[v]$存储从s到v的最短路径中顶点v的前驱

## 最短路径的特征-松弛技术

**松弛技术是最短路径算法的关键技术**

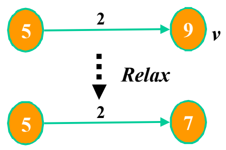
- 对所有 $v$, 维护 $\delta(s,v)$的一个上界 $d[v]$

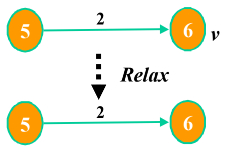
**算法Relax($u,v,w$)**

**Input** 顶点$u$和$v$，图的加权函数$w$

**Output** 松弛后的$d[v]$

```
if (d[v] > d[u]+w(u,v)) then
    d[v]=d[u]+w(u,v);
    π[v]=u;
```




## Bellman-Ford算法

**算法 Bellman-Ford($G,w,s$)**

**Input** 图$G=(V,E)$,边加权函数$w$,源顶点$s$

**Output** $s$到其所有可达顶点的最短路径

```
For ∀v∈V do                       } 初始化
    d[v]←∞;
    π[v]←null;
d[s] ←0;
For i ←1 to |V|-1 do              } 求解
    For ∀uv ∈E do                   执行|V|-1遍，松弛每条边
        Relax(u,v,w);
For ∀uv ∈E do                     } 检查解的合理性，环，负环
    If d(v)>d(u)+w(u,v) then
        return FALSE
Return TRUE
```

请你确定Bellman-Ford算法的时间复杂性？$O(VE)$

## Bellman-Ford算法的分析



```
算法 Bellman-Ford(G,w,s)
Input   图G=(V,E),边加权函数w,源顶点s
Output  s到其所有可达顶点的最短路径
  For ∀v∈V do
      d[v]←∞;
      π[v]←null;
  d[s] ←0;
  For  i ←1 to |V|-1  do
      For ∀uv ∈E  do
          Relax(u,v,w);
  For ∀uv ∈E   do
      If  d(v)>d(u)+w(u,v)  then
          return FALSE
  Return TRUE
```

为什么算法运行|V|-1遍就足够了？



- $d[v] = \delta(s,v)$必然在|V|-1遍运行后成立
  - 设$P = (v_0, \ldots, v_k)$是的从s到 $v$最短路径，其中$v_0 = s$ 且 $v_k = v$.
  - 由于 $P$简单路径, 故 $k < |V|-1$.
- 下面通过对最短路径的长度做归纳，证明 $d[v_k] = \delta(s,v_k)$ 在 $k$遍之后成立, 其中$k$是 $(v_0, v_1 \ldots, v_k)$，即s到$v_k$的最短路径的长度
  - 注意到最短k-路径可以通过最短 $(k-1)$-路径来构造



证明：考虑从s到v的最短路径

$s=v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_{k-1} \to v_k=v$

- 最初, $d[v_0]=d[s]=0=\delta(s,s)$且以后不再变化.
- 一遍之后, $d[v_1]=\delta(s,v_1)$ 是s到$v_1$的最短路径，且$d[v_1]$以后不再变化.
- 设$k$-1边后有$d[v_{k-1}]=\delta(s,v_{k-1})$，则第$k$遍过程中,
  - 如果$(d[v_k] > d[v_{k-1}]+w)$ 则$d[v_k]=d[v_{k-1}]+w$
  - $d[v_k] =\delta(s,v_k)$, 因为每条最短$(k-1)$-路径均会被松弛过程检查和扩展.
- $d[v] =\delta(s,v)$在$|V|$-1遍后成立.

## Bellman-Ford算法具有负环检测能力



```
算法 Bellman-Ford(G,w,s)
Input   图G=(V,E),边加权函数w,源顶点s
Output  s到其所有可达顶点的最短路径
  For ∀v∈V do
      d[v]←∞;
      π[v]←null;
  d[s] ←0;
  For  i ←1 to |V|-1  do
      For ∀uv ∈E  do
          Relax(u,v,w);
  For ∀uv ∈E   do
      If  d(v)>d(u)+w(u,v)  then
          return FALSE
  Return TRUE
```

为什么算法能够发现负环？

- 在$G$中,如果从s出发不能到达任何负环，则
  - Bellman-Ford算法返回 TRUE,
  - $d[v]=\delta(s,v)$ 对任意顶点$v$成立.
- 在 $G$中如果从$s$出发能够到达某个负环, 则
  - 算法返回 FALSE.
  - Bellman-Ford 能够检测负环的存在性.

证明:(1)设$G$中没有负环.
- |V|-1遍后, 我们有$d[v]=\delta(s,v)$对任意顶点$v$成立.
- 由三角不等式,

  $d[v]=\delta(s,v) \leq \delta(s,u)+w(u,v)=d[u]+w(u,v)$,对任意$(u,v) \in E$成立.

证明:(2)反证法
- 设$G$中从s可以到达负环 $(v_0,v_1, \ldots,v_k)$其中$v_k =v_0$.

$$\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1},v_i) < 0$$

- 但，算法返回TRUE
  - 没有负环被检测到
  - 检测负环$(v_0,v_1,\ldots,v_k)$上的任意一条边时，均有

$$d[v_i] \le d[v_{i-1}] + w(v_{i-1},v_i) \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, k.$$

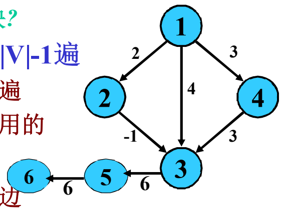
$$\sum_{i=1}^{k} d[v_i] \le \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1},v_i).$$

$$\text{Since } \sum_{i=1}^{k} d[v_i] = \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}], \quad \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1},v_i) \ge 0$$

  - 矛盾

## DAG上的单源最短路径

- 问题: 在无环有向图(Directed Acyclic Graph-DAG中如何高效地解决单源最短路径问题
  - Bellman-Ford算法的时间开销为$O(VE)$
  - 在*DAG*中我们能否更快?
- Bellman-Ford算法执行|V|-1遍
  - 每遍均需扫描所有边一遍
  - 对许多边的扫描均是无用的
- 事实上
  - 无需扫描不影响结果的边
  - 对于已经找到的最短路径，其上的边无需再扫描




## DAG上的单源最短路径

- 问题: 在无环有向图(Directed Acyclic Graph-DAG中如何高效地解决单源最短路径问题
  - Bellman-Ford算法的时间开销为$O(VE)$
  - 在*DAG*中我们能否更快?
  - 基本想法—利用拓扑排序
    - DAG中每条路径均是拓扑序顶点序列的子序列
    - 能够容易识别从s可达的顶点，避免无用边扫描
    - 按照拓扑序处理顶点，将始终是前向地处理每条路径，避免重复扫描已知最短路径上的边
    - 仅需要一遍扫描

## DAG单源最短路径算法

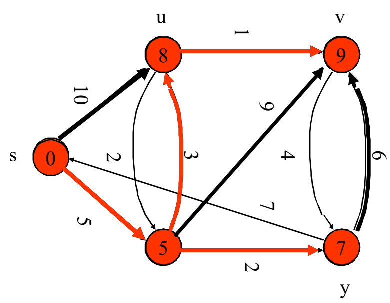
```
算法 DAG-Shortest-Paths(G,w,s)
Input   无环有向图G=(V,E),边加权函数w,源顶点s
Output s到其所有可达顶点的最短路径
   将V中顶点进行拓扑排序
   For ∀v∈V do
       d[v]←∞;
       π[v]←null;
   d[s] ←0;
   For each u ∈V (按拓扑序考虑) do
       For ∀v ∈Adj[u]  do
           Relax(u,v,w);
```

大家尝试自己去分析该算法

## Dijkstra算法

- Dijkstra算法假设$w(uv)\geq 0$ 对$\forall uv\in E$成立
- 始终维护顶点集$S$ 使得
  - $\forall v\in S, d[v]=\delta(s, v)$,即, $s$到$v$的最短路径已经找到.
  - 初始值: $S=\varnothing$, $d[s]=0$ 且$d[v]=+\infty$
- 算法运行过程中
  - (a) 选择 $u\in V\text{-}S$ 使得
    $d[u]=min\ \{d[x]|x\in V\text{-}S\}$. 令$S=S\cup\{u\}$
    此时$d[u]=\delta(s, u)$!为什么?
  - (b)对于u的每个相邻顶点$v$执行 RELAX($u$, $v$, $w$)
- 重复上述步骤(a)和(b) 直到 $S=V$.
- 该算法类似与Prim算法，属于贪心算法

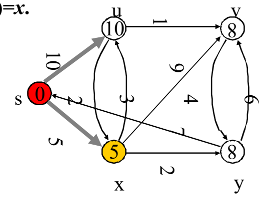
```
算法 Dijkstra(G,w,s)
Input   图G=(V,E),边加权函数w,源顶点s
Output s到其所有可达顶点的最短路径
   For ∀v∈V do
       d[v]←∞;
       π[v]←null;
   d[s] ←0;
   S ←∅
   Q ←V
   while Q≠∅ do
       u ← EXTRACT -MIN(Q);
       S ←S∪{u}
       For ∀v ∈Adj[u]  do
           Relax(u,v,w);
```



HIT CS&E

**第一步**：假设EXTRACT -MIN($Q$)=$x$.

- $sx$是仅含一条边的最短路径
  - 为什么?
  - 因为$sx$是从s出发的最短的边.
- 它也是s到x的最短路径




证明:

(1) 设$P$: $s \to u \ldots \to x$ 是s到x的最短路径，则$w(s,u) \geq w(s,x)$.

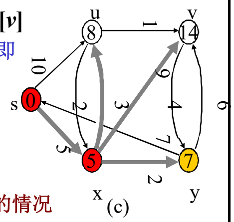
(2) 由于图中没有负权值边,路径$P$的总权值至少为

$w(s,u) \geq w(s,x)$.

(3) 故,边sx是s到x的最短路径.

**第二步**：S={$s,x$}　　$d[y]=\min_{v \in V-S} d[v]$

- 论断:$d[y]$是从$s$到$y$的最短路径代价，即
  - 要么sy是最短路径
  - 要么$s \to x \to y$是最短路径.
- 为什么?
  - 如果$sy$是最短路径，论断成立
  - 考察$s \to x \to y$是从s到y的最短路径的情况




证明: (反证法)设$s \to x \to y$不是从s到y的最短路径

(1) 设$P_1$: $s \to y' \to \ldots \to x$ 是s到y的最短路径，其中$y' \notin S$. (注意此时，我们已经考察了y'=x和y'=s的情形).

(2) 因此，$w(P_1)<w(s \to x \to y)$.

(3) 由于$w(uv) \geq 0$对任意边成立，故$w(sy')<w(P_1)<w(s \to x \to y)$.

进而$d[y']<d[y]$,这样算法第二步不可能选中$y$，矛盾!

**后续步骤**：设S是算法维护的集合,令$d[y]=\min_{v \in V-S} d[v]$

- 定理:$d[y]$是从$s$到$y$的最短路径代价(正确性分析中最难的部分)

证明: (归纳法+反证)

归纳假设:设对$\forall v \in S$, $d[v]$是从$s$到$v$的最短路径的代价，往证本次操作完成后$d[y]$将是s到y的最短路径的代价

若不然, $d[y]$ 不是从$s$到$y$的最短路径的代价。设$P_1$: $s \to \ldots \to y' \to \ldots \to y$是从$s$到$y$的最短路径，其中$y' \notin S$是$P_1$上第一个不属于S的顶点. 这意味着y≠y'且$w(P_1)<d[y]$.

因此,$w(s \to \ldots \to y')<w(P_1)$. (每条边的权值均非负)

进而$w(s \to \ldots \to y')<w(P_1)<d[y]$.

据此, $d[y'] \leq w(s \to \ldots \to y')<w(P_1)<d[y]$.

因此，算法在本次操作中不会选中y，矛盾!

HIT CS&E

## Dijkstra算法的时间复杂度

- 时间复杂度依赖于优先队列$Q$的实现
- 模型1: 利用数组存储$Q$
  - EXTRACT -MIN($Q$) —需要 $O(|V|)$ 时间.
    - 总共需要执行$|V|$次 EXTRACT -MIN($Q$).
    - $|V|$次 EXTRACT -MIN($Q$)操作的总时间为$O(|V|^2)$.
  - RELAX($u,v,w$) —需要 $O(1)$时间.
    - 总共需要执行$|E|$次 RELAX(u, v, w)操作.
    - $|E|$次 RELAX($u,v,w$)操作的总时间为 $O(|E|)$.
  - 总时间开销为$O(|V|^2+|E|)=O(|V|^2)$
- 模型2:$Q$用堆实现.
  - 需要$O(\log|V|)$时间.
  - 总时间开销为 $O(|V|\log |V|+E)$.

HIT CS&E

## 7.4 all-pairs shortest paths

- 问题的定义
- 单源最短路径的子结构性质
- Bellman-Ford算法
- Dijkstra算法

HIT CS&E

## 7.4.1问题定义及求解方法

- 给定加权图或不加权的图 $G=(V,E)$, 我们希望对任意$u,v \in V$计算出从u到v的最短路径
- 用Bellman-Ford算法或Dijkstra算法解决
  - 直接调用Bellman-Ford或Dijkstra算法$|V|$遍
  - Dijkstra算法$O(V\log V+E) \Rightarrow O(V^3)$
  - Bellman-Ford算法$O(VE) \Rightarrow O(V^4)$
- Faster-All-Pairs-Shortest-Paths
  - $O(V^3\lg V)$

HIT

## 6.4.2 基于矩阵乘法的算法

最短路径的结构

- 设$p$是顶点$i$到顶点$j$的最短路径
- 如果$i=j$, 则$p$中不含任何边，路径的权值为0
- 如果$i\neq j$, 设$j$在路径$p$中的前驱为$k$，则$p$可以分解为 $i \xrightarrow{p'} k \to j$
  - 由最短路径的优化子结构知道$i \xrightarrow{p'} k$是$i$到$k$的最短路径
  - 从而 $\delta(i,j)=\delta(i,k)+w(k,j)$
  - 如果$p$有$m$条边，则$p'$有$m$-1条边
  - 提示我们，最短路径可以存为前驱矩阵$\pi[i,j]$
  - $\pi(i,j)$表示从$i$到$j$的最短路径中$j$的前驱
  - 根据前驱矩阵，可以打印所有的最短路径(自己写个算法)
- 如果从路径的长度入手可能建立递归过程

HIT CS&E

## 递归计算

- 定义$l_{ij}^{(m)}$= 从$i$到$j$的至多仅含$m$条边的最短路径的代价

当前无法显示此图像。

- 显然 $l_{ij}^{(0)}=0$ if $i=j$ 或 $l_{ij}^{(0)}=\infty$ if $i\neq j$
- 因此 $l_{ij}^{(m)}=\min\{l_{ij}^{(m-1)}, \min_{1\le k\le n}\{l_{ik}^{(m-1)}+w(k,j)\}\}$

  $= \min_{1\le k\le n}\{l_{ik}^{(m-1)}+w(k,j)\}$ 因为$w(j,j)=0$
- 由于从$i$到$j$的最短路径最多含有$n$-1条边，故

  $\delta(i,j)=l_{ij}^{(n-1)}=l_{ij}^{(n)}=l_{ij}^{(n+1)}=\ldots$
- 自底向上计算
  - $L^{(1)}, L^{(2)},\ldots, L^{(n-1)}$, 其中 $L^{(m)}=(l_{ij}^{(m)})_{n\times n}$
  - 注意 $L^{(1)}=W$是权值矩阵

HIT CS&E

算法 Extened_Shortest_path($L,w$)

Input 当前代价矩阵$L$,边加权函数$w$

Output 经一步扩展后的代价矩阵

1. $n\leftarrow row[L]$;
2. $L'\leftarrow(l'_{ij})_{n\times n}$
3. For $i\leftarrow$1 to $n$ do
4. For $j\leftarrow$1 to $n$ do
5. $l'_{ij}\leftarrow\infty$
6. For $k\leftarrow$1 to $n$ do
7. $l'_{ij}\leftarrow\min(l_{ij}, l_{ik}+w(k,j))$
8. Return $L'$

矩阵乘法LW ⇨ 替换 +→min *→+ ⇨ Extened_Shortest_Patth(L,W)

$$L^{(1)}=L^{(0)}\cdot W=W$$
$$L^{(2)}=L^{(1)}\cdot W=W^2$$
$$L^{(3)}=L^{(2)}\cdot W=W^3$$
$$\vdots$$
$$L^{(n-1)}=L^{(n-2)}\cdot W=W^{n-1}$$

时间复杂性$O(n^4)$

修改算法完成对前驱矩阵的计算?

算法 Slow_All_Pairs_Shortest_path($W$)

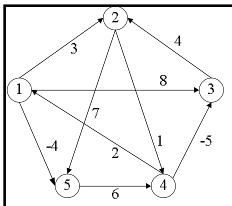
Input 图的边加权函数矩阵$w$

Output all_pair_Shortest_Paths代价

1. $n\leftarrow row[L]$;
2. $L^{(1)}\leftarrow W$
3. For $m\leftarrow$2 to $n$-1 do
4. $L^{(m)}\leftarrow$Extened_Shortest_path($L^{(m)}$,$W$)
5. Return $L^{(n-1)}$

- 该算法能否检测到图中的负环?
- 如何降低该算法的时间复杂性?

## 例




$$L^{(1)}=\begin{pmatrix}0&3&8&\infty&-4\\ \infty&0&\infty&1&7\\ \infty&4&0&\infty&\infty\\ 2&\infty&-5&0&\infty\\ \infty&\infty&\infty&6&0\end{pmatrix}$$

$$L^{(2)}=\begin{pmatrix}0&3&8&2&-4\\ 3&0&-4&1&7\\ \infty&4&0&5&11\\ 2&-1&-5&0&-2\\ 8&\infty&1&6&0\end{pmatrix}$$

$$L^{(3)}=\begin{pmatrix}0&3&-3&2&-4\\ 3&0&-4&1&-1\\ 7&4&0&5&11\\ 2&-1&-5&0&-2\\ 8&5&1&6&0\end{pmatrix}$$

$$L^{(4)}=\begin{pmatrix}0&1&-3&2&-4\\ 3&0&-4&1&-1\\ 7&4&0&5&3\\ 2&-1&-5&0&-2\\ 8&5&1&6&0\end{pmatrix}$$



HIT CS&E

## 降低算法的时间复杂性

Improving the running time:

$$L^{(1)}=W$$
$$L^{(2)}=W^2=W\cdot W$$
$$L^{(4)}=W^4=W^2\cdot W^2$$
$$\vdots$$
$$L^{(2^{\lceil\log(n-1)\rceil})}=W^{2^{\lceil\log(n-1)\rceil}}$$

i.e., using repeating squaring!

Time complexity: $O(n^3\log n)$.

HIT CS&E

算法 Faster_All_Pairs_Shortest_path($W$)

Input　图的边加权函数矩阵$w$

Output all_pair_Shortest_Paths代价

$n \leftarrow row[L]$;

$L^{(1)} \leftarrow W$

while $m < n$-1 do

　$L^{(m)} \leftarrow$ Extened_Shortest_path($L^{(m)}, L^{(m)}$)

　$m \leftarrow 2m$

Return $L^{(m)}$

注意：$L^{(n-1)}=L^{(n)}=\ldots$

---

HIT CS&E

## 7.4.3 Floyd-Warshall算法

- 动态规划算法求解all-pairs最短路径
  - 遵循动态规划算法设计的一般过程
  - 运行时间为$O(V^3)$
  - 允许有负权值的边
  - 但不允许有负环
- 给出一个类似的算法寻找有向图的传递闭包

---

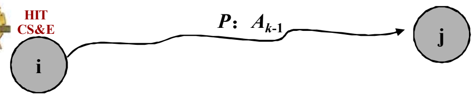
HIT CS&E

## 优化子结构

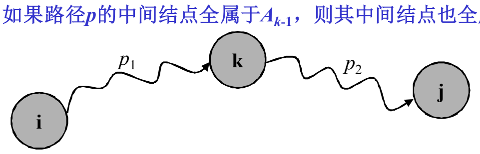
- 设$i$到$j$的最短路径为$p: i \rightarrow \ldots \rightarrow k \rightarrow \ldots \rightarrow j$
  - 矩阵算法的优化子结构考虑$j$在$p$上的前驱
  - Floyd-Warshall算法的优化子结构将考虑路径$p$上经过的中间结点集
- 设$V=\{1,2,\ldots,n\}$　　$A_k=\{1,2,\ldots,k\} \subseteq V$
  - $p$是从$i$到$j$的中间结点全属于$A_k$的最短路径
  - $P'$是从$i$到$j$的中间结点全属于$A_{k-1}$的最短路径
  - Floyd-Warshall算法通过考察p和p'之间的关系建立优化子结构

---

HIT CS&E




如果路径$p$的中间结点全属于$A_{k-1}$，则其中间结点也全属于$A_k$




如果路径$p$的中间结点全属于$A_k$且包含了结点$k$

- $p$可以从$k$处断开成两条路径
- $p_1: i \rightarrow \ldots \rightarrow k$是从$i$到$k$的中间结点全属于$A_{k-1}$的最短路径
- $p_2: k \rightarrow \ldots \rightarrow j$是从$i$到$k$的中间结点全属于$A_{k-1}$的最短路径

---

HIT CS&E

## 例

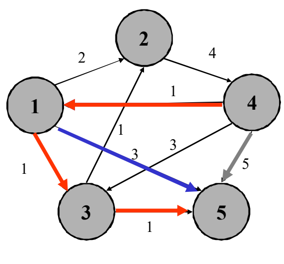
$i$=4 ， $j$=5

$k$=0

$k$=1

$k$=2

$k$=3

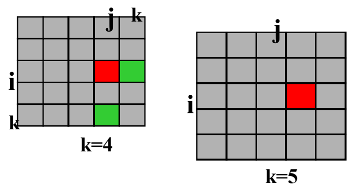



---

HIT CS&E

## 递归关系的建立

- 令$d_{ij}^{(k)}$＝从$i$到$j$的中间结点全属于$A_k$的最短路径的代价
  - $d_{ij}^{(k)} = w(i,j)$　if　$k$=0　(此时路径至多一条边)
  - $d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$　if $k \geq 1$
  - $D^{(n)}=(d_{ij}^{(n)})_{n \times n}$给出最终答案，$d_{ij}^{(n)} = \delta(i,j)$



## Floyd-Warshall算法

**算法Floyd_Warshall($W$)**

**Input** 图的边加权函数矩阵$W$

**Output** all_pair_Shortest_Paths代价

$n \leftarrow row[L]$;
$D^{(0)} \leftarrow W$
For $k \leftarrow 1$ to $n$ do
  For $i \leftarrow 1$ to $n$ do
    For $j \leftarrow 1$ to $n$ do
      $d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$
Return $D^{(n)}$

定义前驱矩阵$\pi^{(k)} = (\pi_{ij}^{(k)})_{n \times n}$

- 如何在计算$D^{(k)}$的过程中，完成$\pi^{(k)}$的计算
- 如何由$\pi^{(n)}$给出最短路径



## 有向图的传递闭包

- 给定有向图$G=(V,E)$,其中$V=\{1,2,\ldots,n\}$
  - $\forall i,j \in V$, 在$G$中从$i$到$j$是否有有向路径可达
  - $G$的传递闭包是有向图$G^*=(V,E^*)$，其中$E^*=\{(i,j)|$ 在$G$中存在从$i$到$j$的有向路径$\}$
  - 令G中每条边的权值为1，调用Floyd-Warshall算法可以计算传递闭包